

Нобелевский лауреат

Дж. В. Стрэтт
(лорд Рэлей)



ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА



УРСС

Дж. В. Стрэтт (лорд Рэлей)

ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

Перевод с английского *Г. И. Катто*

Под редакцией и с примечаниями
М. А. Дивильковского

Издание второе, стереотипное

Москва • 2004



УРСС

Стрэтт Джон Вильям (лорд Рэлей)

Волновая теория света: Пер. с англ. / Под ред. и с прим. М. А. Дивильковского. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 208 с.

ISBN 5-354-00680-5

В предлагаемой вниманию читателя книге автор, выдающийся английский физик Дж. В. Стрэтт (1842–1919), в сжатой и вместе с тем удивительно изящной форме описывает основные достижения физической оптики. Оригинальное изложение, умение выделить с предельной ясностью суть физической теории, множество ценных сведений, в том числе известные понятия оптики, введенные самим автором — все это делает книгу Стрэтта настоящим классическим произведением в физике.

Книга рекомендуется физикам — научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам физических вузов.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 04.02.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 500 экз. Печ. л. 13. Зак. № 2-1247/444.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

 E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: <http://URSS.ru>
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00680-5

© Перевод на русский язык:
Г. М. Катто, 1940, 2004
© Едиториал УРСС, 2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

„Волновая теория света“ Джон-Вильяма Стрэтта, лорда Рэля (правильнее — Рейли), написана им, как статья для 9-го издания „Encyclopaedia Britannica“ в 1888 году. Мастер глубокого и тонкого анализа сложнейших физических явлений, Рэлей в этой работе дает в очень сжатой и вместе с тем удивительно изящной форме сводку основных достижений физической оптики к этому времени.

„Волновая теория света“ — настоящее классическое произведение в физике. Несмотря на свой солидный возраст, эта книга — одна из немногочисленных сравнительно объемистых работ Рэля — имеет исключительный интерес для современных физиков, которые найдут в ней богатый источник ценных сведений и глубоких обобщений.

Книга Рэля не похожа ни на какой другой курс оптики. Изложение Рэля всегда оригинально. Он умеет выделить основное физическое зерно в запутанной совокупности фактов и изложить с предельной ясностью существо сложной теории. Его выводы настолько глубоки и просты, что иногда кажутся парадоксальными: физическое явление неожиданно предстает перед читателем в многообразных своих связях с другими явлениями, из частного факта вырастает далеко идущий общий закон.

Рэлей никогда не отрывает теорию от эксперимента. Всюду, где это только возможно, он ссылается на опыт и предлагает читателю самому произвести простые и остроумные эксперименты, прямо ведущие к цели.

Многое из того, что изложено в книге Рэля, объяснено или открыто им самим; многие привычные нам понятия оптики введены им. Можно указать на его исследования по рассеянию света малыми частицами, на то его фундаментальное открытие, что цвет неба может быть объяснен молекулярным рассеянием света. Общее понятие о групповой и фазовой скорости дано Рэлеем. Им же введено понятие разрешающей силы спектральных аппаратов, произведшее переворот в этой области оптики, и т. д.

Немногие места книги, связанные, главным образом, с природой световых волн, устарели. Однако отжившие „упругие теории эфира“, в особенности в мастерском изложении Рэля, имеют еще большой интерес для современного читателя, который легко перейдет от них к привычным представлениям электромагнитной теории света.

Книга не является учебником; ее чтение требует серьезной математической и физической подготовки. Наиболее близким к ней по

характеру учебником физической оптики является „Введение в теоретическую оптику“ Шустера, к которой можно обращаться для справок по наиболее трудным или устаревшим местам книги. Рэлей часто ссылается на статью „Оптика“, написанную им также для „Encyclopaedia Britannica“; эта статья находится в его „Собрании сочинений“, т. II („Scientific Papers“).

В примечаниях оставлен богатый список литературы, даваемый Рэлеем по каждому вопросу и представляющий собой ценный материал для истории физики.

В 1900 году Рэлей сделал некоторые дополнения к статье для 10-го издания. Эти дополнения включены в текст в квадратных скобках, подобно тому, как это сделано в „Собрании сочинений“ (т. III).

В 1910 году Рэлей более основательно переработал статью для 11-го издания „Encyclopaedia Britannica“, разбив ее на три отдельные статьи: „Интерференция света“, „Диффракция света“ и „Небо“.

Многочисленные сделанные им при этом дополнения, не вошедшие в „Собрание сочинений“ помещены как „Дополнения“ в конце книги и ссылки на них даны в тексте в квадратных скобках.

Кроме того, добавлены три известные статьи Рэрея, посвященные вопросу о групповой и фазовой скорости света, не освещенному в основном тексте.

Перевод „Волновой теории света“ предпринят по предложению акад. Мандельштама, проявившего неустанный интерес к работе по подготовке рукописи к печати.

М. Дивильковский

1/VII-39 г.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье „Свет“ (Епс. Brit., том XIV, изд. 1888 г.) уже был дан в элементарной форме общий очерк основ волновой теории, а в статье „Эфир“ мастерски изложены доводы в пользу существования всепроникающей среды, различные части которой могут находиться в периодически изменяющихся состояниях. Предмет этот, однако, столь важен и столь тесно связан с новыми оптическими исследованиями и открытиями, что более подробному изложению теории с приложениями к основным явлениям посвящается отдельная статья. Что этот предмет труден, — ясно с первого взгляда. Даже в теории звука, распространяющегося посредством колебаний воздуха — среды, с природой и свойствами которой мы хорошо знакомы, — не очень легко освоиться с основными концепциями, а их развитие предъясвляет серьезные требования к нашим математическим средствам. Легко понять, что положение не улучшается в том случае, когда среда является гипотетической. Действительно, хотя существуют чрезвычайно убедительные доказательства в пользу предположения, что свет распространяется посредством колебаний, мы находимся, однако, почти в полном неведении в вопросе о том, что именно колеблется и каков характер этих колебаний. Это незнание сообщает оттенок некоторой неопределенности даже тем частям предмета, трактовка которых не изменилась бы существенно от приобретения более точных знаний, например, теории цветов тонких пластинок и теории разрешающей силы оптических инструментов. В других же вопросах, например, при объяснении законов двойного преломления и интенсивности света, отраженного от поверхности прозрачной среды, неопределенность имеет не только терминологический характер; если мы желаем априорным путем прийти к определенным результатам, то мы должны ввести недостаточно обоснованные гипотезы. Следует отчетливо усвоить указанное здесь различие. Многие оптические явления необходимо должны согласоваться с любой волновой теорией; другие же явления могут быть или не быть в согласии с той или иной частной формой теории. В последнем случае мы можем считать эту специальную форму опровергнутой опытом, тогда как волновая теория в собственном, более широком смысле слова остается непоколебленной.

Наиболее известной из таких специальных форм волновой теории является та, которая отождествляет свет с поперечными колебаниями

упругого твердого тела. *Поперечность* их необходима для объяснения явлений поляризации. Эта теория оказывает большую помощь воображению и позволяет вывести результаты, имеющие во всяком случае механический смысл. Изотропное твердое тело обладает, вообще говоря, двумя упругими свойствами — одним, связанным с восстановлением измененного объема, и другим, связанным с возвращением из состояния сдвига, при котором слои вынуждены скользить друг по другу. Как показал Грин, необходимо предположить, что светонесущая среда несжимаема, так что единственно допустимыми различиями между изотропными средами являются различия в *упругости* и *плотности*. На первых порах мы свободны в выборе между этими свойствами. Более медленное распространение света в стекле, чем в воздухе, можно одинаково хорошо объяснить, как предположив, что упругость в обоих случаях одна и та же, тогда как плотность в стекле больше, так и предположив, что плотность в обоих случаях одна и та же, тогда как упругость в воздухе больше. В действительности пока нет никаких оснований исключать возможность и более сложного случая, при котором и упругость, и плотность изменяются при переходе от одной среды к другой, при одном лишь условии, чтобы отношение скоростей распространения было принято равным известному из опыта относительному показателю преломления двух сред.

Применяя эту теорию к исследованию интенсивности света, отраженного, например, от стеклянной поверхности, и рассеяния света весьма малыми частицами (например, в атмосфере), мы находим, что удовлетворительное согласие с опытом можно получать, лишь предположив, что упругость в разных средах одна и та же (приблизительно, во всяком случае) и что изменяется только плотность. Кроме того, мы должны принять, что колебания перпендикулярны к плоскости поляризации.

До сих пор соответствие можно считать вполне удовлетворительным; однако, когда мы распространяем исследование на кристаллические среды в надежде объяснить наблюдаемые законы двойного преломления, мы находим, что предположения, которые были бы здесь наиболее подходящими, несовместимы с заключениями, к которым мы уже пришли ранее. Прежде всего, строго придерживаясь аналогии с упругим твердым телом, мы можем объяснить двойное преломление лишь анизотропией упругости, а это едва ли можно совместить с гипотезой, что упругость в разных изотропных средах одна и та же. Если же мы оставим в стороне эту трудность и посмотрим, какого рода двойное преломление возможно в твердом кристаллическом теле, то не обнаружим такого совпадения с опытом, которое заставляло бы нас думать, что мы находимся на правильном пути. Теория анизотропных твердых тел с ее двадцатью одной константами упругости кажется слишком широкой для оптического двойного преломления, имеющего гораздо более простой характер ¹⁾.

¹⁾ См. Stokes, Report on Double Refraction, *Brit. Assoc. Report*, 1862, стр. 253.

По этим и другим причинам, в частности, вследствие громоздкости объяснения дисперсии, упругую теорию света, ценную как образец чисто динамического рассуждения и, вероятно, не лишенную математической аналогии с реальностью, в оптике можно рассматривать лишь в качестве иллюстрации.

В последнее время большим успехом пользуется теория, рассматривающая свет как электромагнитное явление. Предполагается, что диэлектрическая среда подвергается действию периодического „электрического смещения“, изменения которого обладают магнитными свойствами электрического тока. Основываясь на чисто электрических наблюдениях, Максвелл вычислил скорость распространения таких возмущений и получил величину, не отличающуюся заметным образом от скорости света. Такое совпадение весьма поразительно; и дальнейший вывод из этой теории — что диэлектрическая постоянная прозрачной среды равна квадрату показателя преломления — в известной мере подтверждается опытом. Основы электромагнитной теории пока еще не вполне очищены от более или менее произвольных гипотез; однако, поскольку выясняется с несомненностью, что в диэлектрической среде возможны колебания, распространяющиеся со скоростью света, можно, не задумываясь, допустить тождество этих колебаний с теми, которыми обусловлены оптические явления. В то же время электромагнитная теория, совершенно независимо от вопроса о степени достоверности ее, весьма поучительна в том отношении, что она показывает нам, как тщательно должны мы избегать слишком большого ограничения наших представлений о природе световых колебаний.

§ 2. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ ПРОСТОГО ТИПА

Каков бы ни был характер среды и ее колебаний, аналитическим выражением бесконечного ряда плоских волн будет

$$A \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \alpha \right\}, \quad (1)$$

где λ обозначает длину волны и V — скорость ее распространения. Коэффициент A называется амплитудой; его природа зависит от свойств среды, и, следовательно, вопрос о ней здесь должен остаться открытым; α обозначает фазу волны в данном месте и в данный момент времени. Выражение (1) сохраняет одно и то же значение, какое бы целое число длин волн мы ни прибавили к x или ни отняли от него. Оно периодически также относительно t , и период равен

$$\tau = \frac{\lambda}{V}. \quad (2)$$

В опытах со звуком мы в состоянии определить отдельно τ , λ и V ; но период световых колебаний, вследствие его малости, совершенно не поддается измерению имеющимися в нашем распоряжении средствами и определяется лишь косвенно из λ и V при помощи (2).

В пользовании круговой функцией для представления волн нет ничего произвольного. Как общее правило, волны этого типа являются единственным видом волн, которые могут распространяться без изменения формы; и даже в исключительных случаях, когда скорость не зависит от длины волны, такой способ представления волны не ограничивает общности; в самом деле, согласно теореме Фурье, любой вид периодической волны можно рассматривать как составленный из ряда волн типа (1) с длинами волн, образующими гармонический ряд.

Хорошо известной характерной чертой волн типа (1) является то, что любое число рядов волн с разными амплитудами и фазами, но *одной и той же длины волны*, эквивалентно одному ряду волн того же типа. Действительно,

$$\sum A \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \alpha \right\} = \sum A \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) - \\ - \sum A \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) = P \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \varphi \right\}, \quad (3)$$

где

$$P^2 = \left(\sum A \cos \alpha \right)^2 + \left(\sum A \sin \alpha \right)^2, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum A \sin \alpha}{\sum A \cos \alpha}. \quad (5)$$

Важным частным случаем является случай сложения только двух рядов волн

$$A \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \alpha \right\} + A' \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \alpha' \right\} = \\ = P \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \varphi \right\},$$

где

$$P^2 = A^2 + A'^2 + 2AA' \cos (\alpha - \alpha'). \quad (6)$$

Как было отмечено Френелем, сложение колебаний одного и того же периода совершенно аналогично сложению сил, а также любых других двумерных векторных величин. Величина силы соответствует амплитуде колебания, а наклон силы — фазе. Система одинаковых по величине сил, представленных прямыми, проведенными из центра к вершинам правильного многоугольника, находится в равновесии. Следовательно, равна нулю и результирующая системы колебаний, у которых амплитуды одинаковы и фазы симметрично распределены по периоду.

В зависимости от соотношения фаз, определяемого разностью $(\alpha - \alpha')$, амплитуда результирующего колебания может изменяться от $(A - A')$ до $(A + A')$. Если A и A' равны, то наименьшее значение результирующей амплитуды есть нуль, а это показывает, что два одинаковых ряда волн могут нейтрализовать друг друга. Такое явление имеет место, когда фазы противоположны, т. е. разнятся на половину

(полного) периода, и обычно называется *интерференцией* света. С чисто динамической точки зрения это название является не очень удачным, так как колебания просто *налагаются* друг на друга, и если понимать слово „интерференция“ как взаимодействие, то меньше всего здесь можно говорить об интерференции.

§ 3. ИНТЕНСИВНОСТЬ

Интенсивность света данной длины волны должна зависеть от амплитуды; однако точный характер этой зависимости непосредственно не проявляется. Мы не можем путем простого наблюдения оценивать относительные интенсивности двух неодинаковых источников света; и когда мы говорим, например, что одна свеча вдвое ярче другой, то подразумеваем при этом, что две свечи, менее яркие, горящие независимо, дали бы нам такой же свет, как одна более яркая. Это можно рассматривать как определение, и тогда можно обратиться к опыту, чтобы доказать, что интенсивность света данного источника изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Однако наше убеждение в истинности этого закона основано, быть может, в такой же мере на том представлении, что нечто не уничтожающееся излучается во вне и распределяется последовательно по сферическим поверхностям, концентрическим с источником, площади которых пропорциональны квадратам радиусов. Это нечто может быть только энергией, и, следовательно, мы приходим к тому, что рассматриваем как меру интенсивности энергию, проходящую в единицу времени через данную площадь, параллельную волнам; а эта величина пропорциональна не первой степени амплитуды, а *квадрату* ее.

В основу практической фотометрии обычно кладется закон обратной пропорциональности квадратам расстояний. Не следует забывать, что в этом методе существенно необходим рассеивающий экран, освещение которого, наблюдаемое в определенном направлении, считается не зависящим от небольших изменений направления, по которому свет на него падает. Расстояние свечи, например, нельзя изменить, не изменяя одновременно ее кажущейся величины, а следовательно, и угла падения, во всяком случае, некоторой части света.

С этой трудностью связана другая, часто более существенная, а именно: неизбежное ослабление света, обусловленное рассеянием. Если же для сохранения яркости мы заменим рассеивающие экраны правильно отражающими зеркалами, то метод оказывается совсем неприменимым, так как наблюдаемая глазом яркость при этом становится независимой от расстояния источника света.

В научной фотометрии, когда недопустима большая потеря света, часто можно рекомендовать применение для изменения яркости вращающегося диска с прозрачными и непрозрачными секторами, как это было предложено Фокс Тальботом¹⁾. Повидимому, хорошо установлен

¹⁾ *Phil. Mag.*, 5, стр. 331, 1834.

закон, что при частоте перерывов, достаточной для получения непрерывного впечатления, яркость пропорциональна угловой величине прозрачных секторов ¹⁾).

§ 4. РЕЗУЛЬТАТ СЛОЖЕНИЯ БОЛЬШОГО ЧИСЛА КОЛЕБАНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ФАЗАМИ

Мы видели выше, что результат сложения двух колебаний с одинаковыми амплитудами всецело зависит от соотношения между их фазами. Представляет интерес вопрос, чего следует ожидать от сложения большого числа (n) одинаковых колебаний с амплитудой, равной единице, и произвольными фазами. Интенсивность результирующего колебания будет, конечно, зависеть от точного закона распределения фаз и может изменяться от n^2 до нуля. Но существует ли определенная интенсивность, которая становится все более и более вероятной при неограниченном возрастании n ?

Сущность этого вопроса хорошо выясняется на частном случае, когда возможные фазы сводятся только к двум *противоположным* фазам. В этом случае удобнее оставить в стороне представление о фазе и считать амплитуды *положительными* или *отрицательными* по законам случая. Если все знаки одинаковы, то интенсивность равна n^2 ; если, наоборот, положительные и отрицательные амплитуды имеются в равном числе, то результат равен нулю. Однако, хотя интенсивность может колебаться между 0 и n^2 , меньшие ее значения гораздо более вероятны, чем большие.

Простейшая часть задачи относится к вычислению того, что в теории вероятностей называется „ожиданием“ интенсивности, т. е. к расчету средней интенсивности, которую надо ожидать после большого числа испытаний, в каждом из которых фазы распределены по закону случая. Вероятность того, что все колебания положительны, равна 2^{-n} , и, следовательно, ожидание интенсивности, соответствующее этому случаю, равно $2^{-n} \cdot n^2$. Подобным же образом ожидание, соответствующее числу положительных колебаний, равному $(n-1)$, равно

$$2^{-n} \cdot n(n-2)^2$$

и т. д. Полное ожидание интенсивности, следовательно, равно

$$\frac{1}{2^n} \left\{ 1 \cdot n^2 + n(n-2)^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^2 + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-6)^2 + \dots \right\}. \quad (1)$$

¹⁾ По вопросу о различных конструкциях фотометров см. статью E. Brodhuup „Photometrie“, Hdb. d. Physik, том XIX, 1928; также П. М. Тиходеев, Световые измерения в светотехнике, ОНТИ, 1936 г.

Но сумма $(n+1)$ членов этого ряда равна просто n , как можно показать, сравнивая коэффициенты при x^2 в эквивалентных выражениях

$$(e^x + e^{-x})^n = 2^n \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right)^n = \\ = e^{nx} + ne^{(n-2)x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-4)x} + \dots$$

Итак, ожидание интенсивности равно n , причем безразлично, велико или мало n .

Тот же вывод имеет место и в том случае, когда фазы могут иметь любые значения.

Из (4) § 2 при $A = 1$ имеем

$$P^2 = n + 2 \sum \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (2)$$

где суммирование производится по косинусам $1/2 n(n-1)$ разностей фаз. Когда фазы произвольны, то эти суммы с равной вероятностью могут быть положительными или отрицательными и, следовательно, среднее значение P^2 равно n .

Читатель должен остерегаться при этом одной ошибки, которой не избежали некоторые высокоавторитетные ученые. Мы доказали не то, что, когда n велико, то существует стремление у отдельной комбинации дать интенсивность, равную n , а совершенно другое предложение, состоящее в том, что при большом числе испытаний, в каждом из которых распределение фаз произвольно, средняя интенсивность будет стремиться к значению n . Верно то, что даже для одной комбинации нет причин, почему какой-либо из косинусов в (2) должен быть скорее положительным, чем отрицательным, и отсюда можно заключить, что при возрастании n сумма членов делается исчезающе малой по сравнению с числом членов. Но число членов — величина порядка n^2 , и потому мы не можем прийти к какому-либо заключению относительно значения суммы ряда по сравнению с n .

Несомненно, безусловно неверно, что интенсивность отдельной комбинации при больших n стремится к n . Можно показать ¹⁾, что вероятность того, что амплитуда результирующего колебания будет заключаться между r и $r + dr$, равна

$$\frac{2}{n} e^{-\frac{r^2}{n}} r dr. \quad (3)$$

Вероятность того, что амплитуда будет меньше r , следовательно, равна

$$\frac{2}{n} \int_0^r e^{-\frac{r^2}{n}} r dr = 1 - e^{-\frac{r^2}{n}}, \quad (4)$$

¹⁾ Phil. Mag., Авг. 1880 [том I, стр. 491].

или, что то же самое, вероятность того, что амплитуда будет больше r , равна

$$e^{-\frac{r^2}{n}}. \quad (5)$$

Прилагаемая таблица дает вероятности интенсивностей меньших долей n , приведенных в первом столбце. Например, вероятность того, что значение интенсивности будет меньше n , равна 0,6321.

0,05	0,0488	0,80	0,5506
0,10	0,0952	1,00	0,6321
0,20	0,1813	1,50	0,7768
0,40	0,3296	2,00	0,8647
0,60	0,4512	3,00	0,9502

Из этой таблицы видно, что, как бы велико ни было n , имеется заметная вероятность значительных относительных флуктуаций интенсивности в последовательных комбинациях.

Средняя интенсивность, определяемая выражением

$$\frac{2}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{n}} \cdot r^2 \cdot r \, dr,$$

как мы уже видели, равна n .

Только с этой средней интенсивностью мы и имеем дело в обычной фотометрии. Источник света, как, например, свечу или даже натриево пламя, можно считать состоящим из очень большого числа светящихся центров, распределенных по весьма значительному объему; и хотя справедливо, что интенсивность в какой-либо отдельной точке экрана, освещенного этим источником, в каждый данный момент является делом случая, однако должны произойти еще процессы усреднения, прежде чем получится то, что обычно воспринимается нашими чувствами. В кратчайший промежуток времени, достаточный, чтобы глаз успел получить впечатление, может произойти любое число перераспределений фаз, обусловленных либо движениями частиц, либо неправильностями в характере их колебаний. Даже если предположить, что каждый светящийся центр неподвижен и испускает совершенно правильные колебания, способ сложения колебаний и обусловленная этим интенсивность быстро изменялись бы от точки к точке экрана, и в обычных случаях среднее освещение самой малой воспринимаемой площади соответствовало бы полному усреднению фазовых соотношений. Таким путем мы убеждаемся в том, что представление об интенсивности источника света оправдывается независимо от каких-либо вопросов, связанных с фазой, и мы вправе говорить, что две свечи вдвое ярче, чем одна.

§ 5. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН

В статье „Оптика“ (том II, стр. 387) было показано, что система лучей, скольким бы отражениям и преломлениям она ни подвергалась, всегда остается перпендикулярной к некоторой поверхности или, вер-

нее, к системе поверхностей. С принятой нами теперь точки зрения эти поверхности надо рассматривать как волновые поверхности, т. е. поверхности постоянной фазы. Очевидно, что пока радиус кривизны очень велик сравнительно с λ , каждая малая часть волновой поверхности распространяется совершенно так же, как бесконечная плоская волна, совпадающая с касательной плоскостью. Если мы имеем в момент t данную поверхность, то, чтобы найти соответствующую волновую поверхность в момент $t + dt$, надо продолжить каждую нормаль на длину $V dt$, где V обозначает скорость распространения в данном месте. Если среда однородна, так что V постоянно, то новая поверхность *параллельна* прежней, и это свойство сохраняется, сколько бы коротких последовательных промежутков времени мы ни рассматривали. Таким образом волновая поверхность распространяется в направлении *нормали*, и соответствующими частями следующих друг за другом поверхностей являются те, которые лежат на одной и той же нормали. В этом смысле нормаль можно рассматривать как *луч*, но это представление не следует применять к пучкам света, проходящим через небольшие отверстия. О том, каким образом фаза определяется длиной луча, и о тех условиях, при которых можно считать, что энергия распространяется вдоль луча, будет уместнее говорить в главе о тенях (§ 10).

Из закона распространения, согласно которому волновые поверхности всегда продвигаются вперед возможно дальше, следует, что луч идет по тому пути, для которого время, представленное интегралом $\int V^{-1} ds$, является наименьшим. Это — принцип наименьшего времени Ферма ¹⁾. Так как показатель преломления (μ) пропорционален V^{-1} , то мы можем принять интеграл $\int \mu ds$ за меру отставания одной волновой поверхности от другой; это отставание остается одним и тем же, вдоль какого бы луча ни брать интеграл.

Принцип, состоящий в том, что интеграл $\int \mu ds$, взятый вдоль луча, есть минимум, легко может быть применен к исследованию оптических законов. Рассмотрим в качестве примера очень важную теорию увеличительной способности. Пусть A_0, B_0 — две точки на волновой поверхности до того, как свет входит в объектив зрительной трубы, A, B — соответствующие им точки на волновой поверхности после выхода из окуляра; обе поверхности считаем плоскими. Значение $\int \mu ds$ одно и то же как вдоль луча A_0A , так и вдоль луча B_0B ; и если по какой-либо причине B_0 немного отстанет по отношению к A_0 , то и B на ту же величину отстанет по отношению к A . Допустим теперь, что

¹⁾ В общем случае принцип Ферма можно формулировать как принцип *стационарности* интеграла $\int V^{-1} ds$, а не *минимальности*. Действительно, этот принцип сводится к тому требованию, чтобы первая вариация интеграла, взятого вдоль луча, равнялась нулю: $\delta \int V^{-1} ds = 0$. *Примеч. ред.*

рассматриваемое отставание обусловлено вращением волновой поверхности A_0B_0 на небольшой угол θ около оси, лежащей в ее собственной плоскости и перпендикулярной к A_0B_0 . Тогда отставание B_0 относительно A_0 равно $A_0B_0 \cdot \theta$; подобным же образом, если φ — соответствующий угол вращения AB , то отставание равно $AB \cdot \varphi$. Так как эти отставания одинаковы, то мы имеем

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{A_0B_0}{AB},$$

т. е. увеличение равно отношению ширины пучков света до и после прохождения через зрительную трубу.

Увеличение не должно быть непременно одним и тем же по всем направлениям. Рассмотрим случай призмы, расположенной, как в спектроскопической установке. Прохождение через призму не изменит ширины пучка света в вертикальном направлении; следовательно, в этом направлении увеличения нет. Что произойдет в горизонтальном направлении, зависит от обстоятельств. Одна призма в положении наименьшего отклонения не изменит ширины пучка в горизонтальном направлении. То же относится и к последовательности любого числа призм, каждая из которых находится в положении наименьшего отклонения, или для комбинации, названной Толлоном (Thollon) *парой*, где отклонение достигает наименьшего значения при повороте пары, как *твердой системы*, хотя дальнейшее уменьшение может быть достигнуто при устранении жесткой связи между призмами. Во всех этих случаях нет увеличения ни в горизонтальном, ни в вертикальном направлениях, и прибор действует, как труба с увеличением, равным единице. Однако, если призма будет расположена так, что угол выхода луча не равен углу падения, то ширина пучка в горизонтальном направлении претерпевает изменение. Если выход почти скользкий, то в горизонтальном направлении увеличение будет значительное; и, каков бы ни был характер системы призм, увеличение в горизонтальном направлении равно отношению ширины пучков. Брюстер указал, что, комбинируя две призмы с перпендикулярными друг к другу преломляющими ребрами, можно было бы получить одно и то же увеличение в обоих направлениях и, таким образом, воспроизвести действие обыкновенной зрительной трубы.

Теория увеличения тесно связана с теорией видимой яркости. При наблюдении в трубу светящегося тела, как, например, луны, имеет место концентрация света на зрачке, пропорциональная отношению площади объектива к площади зрачка ¹⁾. Но видимая яркость остается неизменной, так как видимая величина поверхности объекта изменяется в точно таком же отношении, в согласии с только что установленным законом.

¹⁾ При этом предполагается, что объектив достаточно велик для того, чтобы заполнить светом весь зрачок, а также, что стекла совершенно прозрачны и что нет потери света путем отражения. Для теоретических целей последнему требованию можно удовлетворить, допуская, что переход от одной оптической среды к другой во всех случаях совершается постепенно.

Эти основные положения были доказаны уже давно Котсом (Cotes) и Смитом (Smith); полное изложение их с точки зрения геометрической оптики можно найти в книге Смита ¹⁾.

§ 6. ВОЛНЫ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО ПЛОСКИЕ ИЛИ СФЕРИЧЕСКИЕ

Плоская волна, конечно, остается плоской после отражения от вполне плоской поверхности; но всякие неправильности поверхности сказываются на волне. В простейшем случае перпендикулярного падения неправильности *удваиваются*, так как каждое углубление в отражающей поверхности обуславливает отставание фронта волны, вдвое большее по величине, чем оно само. При этом предполагается, что поперечные размеры углублений или возвышений во много раз больше длины волны; в противном случае незаконно считать различные части волны плоскими.

Подобным же образом, если плоская волна проходит перпендикулярно через плоскопараллельную пластинку с показателем преломления (μ), то небольшое возвышение t , где-нибудь на одной из ее поверхностей, вызывает отставание $(\mu - 1)t$ в соответствующем месте волновой поверхности. Таким образом дефект поверхности стеклянной пластинки вызывает вчетверо меньшее искажение волны, чем равная по величине неправильность в отражающей поверхности. Далее, если пластинка, в остальных отношениях безупречная, деформирована изгибанием, то неправильности, обусловленные изгибом у обеих ее поверхностей, приблизительно противоположны и компенсируют друг друга ²⁾.

В практических применениях важно знать действия, вызываемые небольшим отклонением волновой поверхности от идеальной плоской или сферической формы. Пусть поверхность отнесена к прямоугольной системе координат, ось z совпадает с нормалью в центре сечения пучка и начало координат — с точкой соприкосновения поверхности с касательной плоскостью. Если, как это часто бывает, поверхность симметрична относительно оси Oz , то уравнение поверхности можно приближенно представить в виде

$$z = \frac{r^2}{2\rho} + Ar^4 + \dots, \quad (1)$$

где ρ — радиус кривизны, или фокусное расстояние, и $r^2 = x^2 + y^2$. Если поверхность вполне сферическая, то $A = \frac{1}{8\rho^3}$ и всякое отклонение A

¹⁾ Smith, Complete system of Optics, Cambridge, 1738. Можно отослать читателя к статье под заглавием „Notes, Chiefly historical on some fundamental Propositions in Optics“, *Phil. Mag.*, июнь 1886 [том II, ст. 137], в котором дано некоторое представление о работе Смита и об ее отношении к современным исследованиям.

²⁾ Исходя из этого принципа, Грэмбб (Gribb) объяснил тот факт, что действия напряжений вследствие изгиба почти так же вредны в случае толстых объективов, как и в случае тонких.

от этого значения указывает на обычную симметричную сферическую aberrацию.

Если же поверхность несимметрична, то мы можем встретиться с случаем aberrации при малых величинах более низкого порядка, а следовательно, могущих иметь большее значение. Если взять направления главных сечений в точке O за оси x и y , то мы можем написать уравнение поверхности в виде

$$z = \frac{x^2}{2\rho} + \frac{y^2}{2\rho'} + \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3, \quad (2)$$

где ρ и ρ' — главные радиусы кривизны, или фокусные расстояния. Наиболее важный пример несимметричной aberrации мы имеем в спектроскопе, где (если грани призм можно рассматривать в известном смысле как поверхности вращения) волновая поверхность с помощью подходящих приспособлений может быть сделана симметричной относительно горизонтальной плоскости $y=0$. Эту плоскость можно тогда рассматривать как главную, причем ρ есть первое фокусное расстояние, на котором образуется спектр. При этих условиях β и δ в уравнении (2) можно опустить, и оно принимает вид

$$z = \frac{x^2}{2\rho} + \frac{y^2}{2\rho'} + \alpha x^3 + \gamma x y^2. \quad (3)$$

Постоянные α и γ в (3) можно выразить через производные главных радиусов кривизны. По известной формуле радиус кривизны в точке x пересечения поверхности (3) с плоскостью $y=0$ приблизительно равен $\rho(1-6\alpha\rho x)$. Так как $y=0$ есть всюду главная плоскость, то этот радиус кривизны есть главный радиус кривизны поверхности, так что, обозначая его через ρ , имеем

$$\alpha = \frac{1}{6} \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx}. \quad (4)$$

Кроме того, вблизи начала координат приближенное значение произведения главных кривизн равно

$$\frac{1}{\rho\rho'} + \frac{6\alpha x}{\rho'} + \frac{2\gamma x}{\rho}.$$

Таким образом

$$d\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2\rho'} - \frac{d\rho'}{\rho'^2\rho} = \frac{6\alpha dx}{\rho'} + \frac{2\gamma dx}{\rho}.$$

Откуда в силу (4)

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dx}. \quad (5)$$

Уравнение нормали в точке x, y, z есть

$$\frac{\zeta - r}{-1} = \frac{\xi - x}{\frac{x}{\alpha} + 2\alpha x^2 + \gamma y^2} = \frac{\eta - y}{\frac{y}{\rho'} + 2\gamma xy}, \quad (6)$$

она пересекается с плоскостью $\zeta = \rho$ в точке, определяемой приближенно координатами

$$\xi = -\rho(3\alpha x^2 + \gamma y^2), \quad \eta = \frac{(\rho' - \rho)y}{\rho'} - 2\rho\gamma xy, \quad (7)$$

если пренебречь членами третьего порядка.

Согласно геометрической оптике, толщина изображения светящейся линии в первом фокусе определяется крайним значением ξ ; для получения хорошей резкости в спектроскопе необходимо уменьшить насколько возможно эту толщину. Одним из способов достичь желаемого результата могло бы быть сужение отверстия; но, как мы увидим ниже, уменьшать отверстие в горизонтальном направлении, значило бы в действительности сводить на-нет особое преимущество больших инструментов. Такое возражение, однако, неприменимо к уменьшению отверстия в *вертикальном* направлении, и во многих спектроскопах таким способом можно достигнуть значительного улучшения резкости. Вообще необходимо, чтобы и γ и α были малы. Так как значение ξ не зависит от ρ' , то уничтожение астигматизма, повидимому, не дает выгод в отношении резкости.

Ширина изображения при $\eta = 0$ (что соответствует $y = 0$) равно $3\alpha\rho x^2$ и обращается в нуль при $\alpha = 0$, т. е. при отсутствии аберрации для лучей в главной плоскости. В этом случае изображение сводится к линейной дуге. Если, кроме того, и $\gamma = 0$, то эта дуга обращается в прямую и тогда изображение в первом фокусе является совершенным в этом порядке приближения. В качестве примера случая, когда $\alpha = 0$, можно указать на изображение светящейся точки, образованное на равном расстоянии по ту сторону наклоненной линзы с одинаково выпуклыми поверхностями.

Во втором фокусе $\zeta = \rho'$, и из (6) мы имеем

$$\xi = x \frac{\rho - \rho'}{\rho}, \quad \eta = -2\rho'\gamma xy. \quad (8)$$

Если $\gamma = 0$, и только в этом случае, вторая фокальная линия образуется без аберрации. Обе фокальные линии получаются отчетливо, когда параллельные лучи падают на плоско-выпуклую линзу, наклоненную под углом около 30° и обращенную выпуклой стороной к параллельным лучам.

[1900. Плоскую отражающую пластинку, которая отражает приблизительно плоские волны перпендикулярно, можно *изогнуть* так, чтобы оказались исключенными все ошибки волнового фронта, представленные в (2). Действительно, решение уравнения изгиба

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = 0$$

содержит произвольные члены во всех степенях x и y ниже четвертой. Одновременно исключаются дефекты того же рода в самой (неизогнутой) отражающей поверхности.]¹⁾

§ 7. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ПОЛОСЫ [1]

Мы видели (§ 2), что когда две параллельно распространяющиеся волны одинаковой длины налагаются друг на друга, то интенсивность результирующей волны зависит от соотношения между фазами составляющих; однако она непременно одинакова во всех точках волнового фронта. Нередко случается, что параллельность составляющих волн только приближенная, и тогда возникает явление, известное под названием интерференционных полос. Если направления распространения двух волн составляют с осью x , по обе стороны от нее, небольшие углы α , то выражения для составляющих волн разных амплитуд будут

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x \cos \alpha - y \sin \alpha)$$

и

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x \cos \alpha + y \sin \alpha),$$

так что результирующая волна определяется выражением

$$2 \cos \frac{2\pi y \sin \alpha}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x \cos \alpha), \quad (1)$$

из которого видно, что колебания распространяются без изменения формы параллельно оси x с постоянной скоростью $\frac{V}{\cos \alpha}$. Рассматриваемая, как функция y , амплитуда колебания достигает максимума, когда $y \sin \alpha$ получает значения $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ и т. д., соответствующие серединам светлых полос, тогда как для промежуточных значений $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$ и т. д. колебания нет. Это — явление интерференции света, исходящего из двух одинаковых однородных и весьма удаленных источников.

В опыте, осуществленном Френелем, источники O_1, O_2 ²⁾ расположены на конечном расстоянии D от места наблюдения (Епс. Brit., том XIV, стр. 606) [3] [4]. Если A — точка экрана, расположенная на равном

¹⁾ По вопросу об aberrации в оптических системах см., например, книгу А. И. Тудоровского, Теория оптических приборов, из-во Ак. наук СССР, 1937; также статью А. König, „Geometrische Optik“, Hdb. d. Exp. Phys., том XX, 1929.

²⁾ Едва ли необходимо упоминать о том, что O_1 и O_2 не должны быть различными источниками света [3]; в противном случае не могло бы быть постоянного соотношения между фазами, а следовательно, и правильной интерференции. В опыте Френеля O_1 и O_2 — мнимые изображения одного действительного источника O , полученные отражением от двух зеркал. Зеркала можно заменить бипризмой. Или, как в опыте Ллойда, O_1 может быть тождественным с O , а O_2 получено скользким отражением от одного зеркала.

расстоянии от O_1 и O_2 , и P — точка, находящаяся вблизи A , то приближенно

$$O_1P - O_2P = \sqrt{D^2 + \left(u + \frac{1}{2}b\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(u - \frac{1}{2}b\right)^2} = \frac{ub}{D},$$

где

$$O_1O_2 = b, \quad AP = u.$$

Таким образом, если λ — длина волны, то места, где фазы совпадают, определяются равенством

$$u = \frac{n\lambda D}{b}, \quad (2)$$

где n — целое число.

Если бы свет был действительно однородным, то мы имели бы неограниченное количество последовательных полос, тождественных друг другу; более того, не было бы места, которое можно было бы выделить при наблюдении в качестве центра системы. В действительности λ меняется, и единственное место полного совпадения фаз для всех длин волн находится в A , где $u=0$. Теоретически нигде нет места полного несовпадения фаз для всех длин волн и, следовательно, нет полной темноты. Однако, ввиду того что область чувствительности глаза ограничена интервалом длин волн, составляющим меньше „октавы“, середина первой темной полосы (с обеих сторон светлой полосы) кажется черной, даже когда опыт производится с белым светом; следует, однако, иметь в виду, что существование даже одной полосы обусловлено таким отбором и что образованию многих видимых полос благоприятствует способность сетчатки к различению цветов в пределах видимой части спектра [6].

Число воспринимаемых полос возрастает *pari passu* с увеличением однородности света. Для этой цели можно применить два метода.

Мы можем воспользоваться светом, вроде натриевого пламени, обладающим *ab initio* высокой степенью однородности. Если область длин волн составляет $1/50\,000$, то может быть обнаружено соответствующее число интерференционных полос. Указанное выше число их получено Физо; употребляя разрядные трубки, содержащие, например, пары ртути или кадмия, Майкельсону удалось пойти значительно дальше ¹⁾. Узость светлой линии, видимой в спектроскопе, и возможность получения большого числа полос Френеля зависят в точности от одних и тех же условий; по существу первое является в такой же степени интерференционным явлением, как и второе.

Во втором методе первоначальный свет может быть чрезвычайно сложным, и однородность достигается с помощью спектроскопа. Аналогия с первым методом получится полная, если мы пользуемся спектроскопом для получения линии однородного света, просто подставляя ее

¹⁾ Современные интерференционные приборы дают возможность получить несколько миллионов интерференционных полос (более полутора метров разности хода в воздухе). См., например, Борн, Оптика, ОНТИ, 1937; также Вуд, Физическая оптика, ОНТИ, 1936.

вместо окрашенного пламени. Или, следуя Фуко и Физо, мы можем пропустить белый свет, а затем уже анализировать смесь, прошедшую через узкую щель в экране, на котором получают интерференционные полосы. В последнем случае мы наблюдаем полосатый спектр, с максимумами яркости, соответствующими длинам волн $\frac{bc}{nD}$. В обоих случаях наблюдаемое число полос ограничено исключительно разрешающей силой спектроскопа (§ 13) и ничего не говорит относительно правильности или каких-либо других свойств колебаний в первоначальном свете.

Справедливость этого замечания отчетливо иллюстрируется возможностью получения с помощью белого света большого числа ахроматических полос. Неодинаковая ширина полос для разных цветов и обусловленное этим наложение их и размывание, имеющее место в обычной форме опыта, зависит от постоянства b (расстояния между двумя источниками) при изменении λ . Очевидно, что если бы b было пропорционально λ , то ширины полос не зависели бы от λ и различные системы полос вполне совпадали бы друг с другом. Чтобы осуществить эту идею во всей полноте, было бы необходимо воспользоваться в качестве источника дифракционным спектром и получить его изображение при помощи метода Ллойда с одним зеркалом, расположенным так, что $b=0$ при $\lambda=0$ (*Phil. Mag.*, том XXVIII, стр. 77, 1889). На практике можно было бы, без сомнения, получить достаточно хорошие результаты с призматическим спектром (особенно, если устранить красную и фиолетовую части его путем поглощения), при условии, что $d(b/\lambda)=0$, в желто-зеленой части. Замечательно то, что, несмотря на ахроматический характер полос, возможное число их ограничено попрежнему разрешающей силой прибора, примененного для получения спектра ¹⁾.

При наблюдении системы полос Френеля через призму центральная белая полоса подвергается аномальному смещению, которое считали несовместимым с теорией. Как показал Эйри ²⁾ (*Airy*), это явление объясняется тем особым способом, которым, вообще говоря, образуется эта белая полоса.

«Каждая из однородных составных частей падающего неоднородного света даст ряд светлых и темных полос в количестве, не ограниченном в пределах той части пространства, в которой происходит наложение света от двух пучков, и не различимых по качеству. Поэтому рассмотрение однородного света никогда не даст нам возможности определить, где то место, к которому сразу обращается глаз, как к середине системы полос. Каково же то физическое условие, которое определяет середину системы полос?»

¹⁾ [*] Заметим, что этот способ получения системы ахроматических интерференционных полос осуществляется сам собой в изображении дифракционной решетки, даваемом оптическим прибором.

Действительно, изображение решетки можно рассматривать по Аббе как результат интерференции света от спектров, даваемых решеткой. *Примеч. ред.*

²⁾ „Remarks on Mr. Potter's Experiment on Interference“, *Phil. Mag.*, 2, стр. 161, 1833.

„Ответ очень прост. Полосы, соответствующие разным цветам, имеют различную ширину. Поэтому, если полосы всех цветов совпадают в одном месте смеси света, то они не совпадут ни в каком другом месте; но на равных расстояниях по обе стороны от места совпадения они будут одинаково далеки от совпадения. Следовательно, если мы можем найти место, где полосы всех цветов совпадают, то оно и будет серединой системы полос.

„Таким образом, оказывается, что середина системы полос *не совпадает* непременно с тем местом, до которого оба пучка света прошли равные пути, а определяется соображениями совсем иного рода... Это различие важно в этом и в других опытах“.

Рассматриваемое явление зависит от диспергирующей способности призмы. Если v — линейное перемещение первоначально центральной полосы, обусловленное призмой, то v надо рассматривать как функцию λ . Тогда положение n -й полосы, измеренное от первоначального положения середины системы полос, будет

$$v + \frac{n\lambda D}{b}.$$

Совпадение разных светлых полос имеет место в том случае, когда эта величина, насколько возможно, независима от λ , т. е. когда n есть целое число, ближайшее к

$$n = -\frac{b}{D} \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3)$$

или, если выразить это, как делает Эйри, через ширину полосы (h), то $n = -\frac{dv}{dh}$. Видимое смещение белой полосы равно, следовательно, не просто v , а

$$v - h \frac{dv}{dh}. \quad (4)$$

Так как знаки dv и dh противоположны, то аномальное смещение добавляется к нормальному действию призмы. Но так как $\frac{dv}{dh}$ или $\frac{dv}{d\lambda}$ не постоянно, то ахроматизм белой полосы менее совершенен, чем в том случае, когда нет призмы.

Если бы призма была заменена решеткой, то v изменялось бы пропорционально h и (4) обратилось бы в нуль, так что в спектрах всех порядков белая полоса не смещалась бы.

Зависящая от диспергирующей способности теоретическая ошибка, имеющая место в методе определения показателя преломления пластинки по перемещению системы интерференционных полос (Епс. Вит., том XIV, стр. 607), была рассмотрена Стоксом¹⁾. В отсутствии дисперсии запаздывание R , обусловленное пластинкой, не зависело бы от λ и, следовательно, вполне компенсировалось бы в точке, определяемой равенством $i = \frac{DR}{b}$; но при наличии дисперсии оно сопровождается кажущимся смещением полос, согласно принципу, указанному Эйри.

¹⁾ Brit. Assoc. Rep., 1850.

Позднее этот вопрос привлек внимание Корню¹⁾ (Cornu), который сформулировал основной принцип следующим образом: „В системе интерференционных полос, полученных при помощи неоднородного света, имеющего непрерывный спектр, всегда существует ахроматическая полоса, играющая роль центральной полосы и находящаяся в том месте поля, где разность фаз наиболее интенсивных лучей является максимальной или минимальной*.

Если запаздывание фазы в опыте Френеля, обусловленное помещенной на пути пластинкой или какой-нибудь другой причиной, есть $F(\lambda)$, то полное запаздывание фазы для двух пучков света в точке u есть

$$\varphi = F(\lambda) + \frac{bu}{\lambda D} \quad (5)$$

и положение центральной, или ахроматической, полосы определяется не равенством $\varphi = 0$, а $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ или

$$u = \frac{\lambda^2 DF'(\lambda)}{b} \quad [7]. \quad (6)$$

В теоретическом рассуждении мы предполагали, что источник света либо представляет математическую точку, либо имеет протяжение только в вертикальном направлении (параллельном полосам). Такое удлинение в вертикальном направлении, увеличивая освещение, не оказывает вредного влияния на резкость, так как различные системы полос, соответствующие разным точкам светящейся линии, практически налагаются друг на друга. С другой стороны, размеры источника в горизонтальном направлении должны быть ограничены узкими пределами, подчиняющимися, очевидно, тому условию, чтобы смещение центра системы при применении в качестве источника света сначала только одного, затем другого края щели было мало в сравнении с шириной интерференционной полосы.

Прежде чем перейти к следующему вопросу, следует заметить, что дифракция влияет на полосы Френеля в большей мере, чем предполагал открывший их ученый. По этой причине полосы часто неодинаково широки и неодинаково ярки. Более точное вычисление дано Вебером²⁾ (H. F. Weber) и Струве³⁾ (H. Struve), но вопрос слишком сложен, чтобы рассматривать его здесь подробнее. Наблюдения Струве, повидимому, хорошо согласуются с уточненной теорией.

§ 8. ЦВЕТА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК [8]

Когда плоские волны однородного света (λ) падают на плоскопараллельную пластинку с показателем преломления μ , результирующая отраженная волна представляет совокупность бесчисленного множества

¹⁾ *Journ. de Physique*, 1, стр. 293, 1882.

²⁾ *Wied. ann.*, 8, стр. 407.

³⁾ *Wied. ann.*, 15, стр. 49.

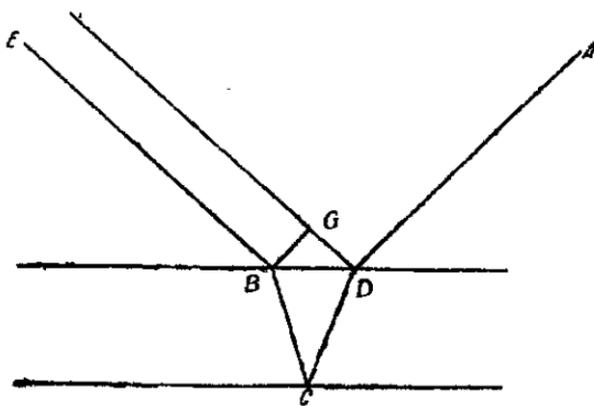
составляющих, наиболее важной из которых являются первая, отраженная от верхней поверхности пластинки, и вторая, прошедшая через верхнюю поверхность, отраженная от нижней и затем снова прошедшая через верхнюю поверхность. Легко показать (Enc. Brit., том XIV, стр. 608), что запаздывание (δ) второй волны относительно первой, поскольку оно зависит от расстояний, проходимых в пластинке и в воздухе, дается выражением

$$\delta = 2\mu t \cos \alpha', \quad (1)$$

где t обозначает толщину пластинки и α' — угол преломления, соответствующий первому преломлению [9]. [1900. На фиг. 1 $ABF = 2a$,

$$\begin{aligned} BCD = 2\alpha', \delta = \mu(BC + CD) - BG = 2\mu BC - 2BC \sin \alpha' \sin \alpha = \\ = 2\mu BC (1 - \sin^2 \alpha') = 2\mu t \cos \alpha'. \end{aligned}$$

Представляя все колебания комплексными числами, мнимые части которых в окончательных формулах надо отбросить, мы можем выразить запаздывание δ путем введения множителя $e^{-i\kappa\delta}$, где $i = \sqrt{-1}$ и $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$.



Фиг. 1.

Мы должны предположить, что при каждом отражении или преломлении амплитуда падающей волны изменяется на некоторый множитель. В том случае, когда свет идет из окружающей среды в пластинку, мы обозначим множитель, соответствующий отражению, через b , и преломлению через c , а при переходе из пластинки в окружающую среду — соответственно через f и g . Полагая амплитуду падающей волны равной единице, мы имеем, следовательно, для амплитуды первой составляющей отраженной волны b , для второй $cfge^{-i\kappa\delta}$, для третьей $cf^3ge^{-2i\kappa\delta}$, и т. д. Складывая их и суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$b + \frac{cfge^{-i\kappa\delta}}{1 - f^2e^{-2i\kappa\delta}}. \quad (2)$$

Подобным же образом для волны, прошедшей через пластинку, находим

$$\frac{cg}{1 - f^2 e^{-i\kappa\delta}}. \quad (3)$$

Величины b , c , f , g не независимы. Простейший способ найти соотношения между ними — это вывести следствия из того предположения, что $\delta = 0$ в (2) и (3). Действительно, а priori ясно, что в случае пластинки нулевой толщины отражения не будет и весь свет пройдет. Следовательно,

$$b + f = 0, \quad cg = 1 - f^2 \text{ [10]}. \quad (4)$$

Первое из этих соотношений является выражением закона Араго о равенстве коэффициентов отражения и пресловутой „потери полуволны“¹⁾. Пользуясь этими соотношениями, мы находим для отраженной волны

$$-\frac{f(1 - e^{-i\kappa\delta})}{1 - f^2 e^{-i\kappa\delta}} \quad (5)$$

и для прошедшей волны

$$\frac{1 - f^2}{1 - f^2 e^{-i\kappa\delta}} \quad (6)$$

Интенсивности отраженного и прошедшего пучков света равны квадратам модулей этих выражений.

Таким образом, интенсивность отраженного света равна

$$f^2 \frac{(1 - \cos \kappa\delta)^2 + \sin^2 \kappa\delta}{(1 - f^2 \cos \kappa\delta)^2 + f^4 \sin^2 \kappa\delta} = \frac{4f^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \kappa\delta\right)}{1 - 2f^2 \cos \kappa\delta + f^4}; \quad (7)$$

интенсивность прошедшего света равна

$$\frac{(1 - f^2)^2}{1 - 2f^2 \cos \kappa\delta + f^4}, \quad (8)$$

причем сумма этих двух выражений равна единице.

Согласно (7), свет совсем не отражается не только в том случае, когда $\delta = 0$, но и тогда, когда $\frac{1}{2} \kappa\delta = n\pi$, где n — целое число, т. е. когда $\delta = n\lambda$. Когда первая и третья среды одинаковы, как мы здесь предполагали, центральное пятно в системе ньютоновых колец *черное*, даже в том случае, когда первоначальный свет представляет собой смесь всех длин волн. Общее объяснение цветов ньютоновых колец дано в статье „Свет“ (Enc. Brit., том XIV), к которой мы и отсылаем читателя. При исследовании света, отраженного от пластинки любой толщины, при помощи спектроскопа достаточной разрешающей силы

¹⁾ Вопрос о величине изменения фазы при отражении и преломлении света представлялся очень существенным для теорий упругого эфира, так как он тесно связан с вопросом о продольных волнах в эфире [см. примечание на стр. 27 о неудачной попытке Стокса рассчитать задачу о тонкой пластинке в общем случае изменения фазы, а также § 26].

В электромагнитной теории света „пресловутая потеря полуволны“ вытекает автоматически из граничных условий для векторов поля.

(§ 13), спектр представляется пересеченным темными полосами, середины которых соответствуют тем длинам волн, которые не отражаются пластинкой. Очевидно, что нет предела тонкости полос, которые могут быть наложены таким образом на спектр, каков бы ни был характер первоначального сложного света.

[1900. При обычном наблюдении, ньютонovy кольца обусловлены переменной толщиной тонкой пластинки, рассматриваемой в фокусе. При этом лучи, которые, распространяясь от данной части пластинки и заполняя зрачок глаза, в конце концов собираются в некоторой точке сетчатки, падают под *разными* углами. Смещение является наименьшим, когда падение приблизительно перпендикулярно; обычно оно не имеет значения, если полное запаздывание мало, как, например, если окрашенные полосы образованы белым светом. Но когда мы переходим к интерференции лучей с большой разностью хода, трудность, обусловленная переменным углом наклона, возрастает, и необходимо больше заботиться о перпендикулярности падения и, может быть, сузить зрачок глаза. Вскоре мы приходим к положению, при котором лучше отказаться совсем от этого способа действий и аккомодировать глаз не на пластинку, а на бесконечность, чтобы таким образом соединить в одной точке сетчатки лучи, падающие в *данном направлении*. Если поверхности пластинки абсолютно параллельны, то образуется идеальная система колец, причем центр системы соответствует перпендикулярному падению и каждое кольцо — определенной степени наклона. Вполне параллельные поверхности можно получить очень просто при помощи слоя воды, расположенного на поверхности ртути (*Nature*, том XLVIII, стр. 212, 1893). В этом методе не требуется ни щели, ни какого-либо иного ограничения пучка, кроме зрачка глаза [11] [12].

Яркость зависит от интенсивности источника монохроматического света и от отражательной способности поверхностей. Если R обозначает интенсивность отраженного света, определяемую выражением (7), то

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{(1-f^2)^2}{4f^2 \sin^2\left(\frac{1}{2} \kappa \delta\right)} \quad (7')$$

Если f точно равно 1, то $\frac{1}{R} = R = 1$ для всех значений δ . Если f очень близко к 1, то R почти равно 1 для всех значений δ , для которых $\sin\left(\frac{1}{2} \kappa \delta\right)$ не очень мал. В отраженном свете от протяженного источника поле зрения будет иметь полную яркость, соответствующую источнику, но будет пересечено *узкими* черными линиями.

К этому можно подойти, если в случае слоя воды на поверхности ртути сделать отражение очень наклонным. Опыт в этой форме удается, но большой угол наклона неудобен. В исследованиях Фабри и Перо применялся *проходящий* свет, соответствовавший почти перпендикулярному падению. Если бы можно было сделать прозрачную пластинку из такого материала, для которого f близко к 1, то проходящего света $(1-R)$ почти не было бы, кроме случая, когда $\sin\left(\frac{1}{2} \kappa \delta\right)$ близок к нулю. Поле зрения, в целом, было бы *темным*, но пересеченным

узкими светлыми линиями [13]. К сожалению, прозрачного вещества, дающего почти полное отражение при перпендикулярном падении, не существует, но Фабри и Перо получили очень интересные результаты, пользуясь слегка посеребренными стеклянными поверхностями. Между посеребренными поверхностями может находиться слой воздуха, толщину которого можно регулировать, или они могут представлять собой внешние поверхности стеклянной пластинки, которая должна быть очень тщательно выполнена. Такая установка является в сущности *спектроскопом*, так как она позволяет непосредственно наблюдать строение сложной спектральной линии. Например, если мы рассмотрим натриево пламя, то увидим, вообще говоря, две отдельные системы узких светлых окружностей, соответствующих двум D -линиям. При некоторых частных значениях толщины слоя воздуха обе системы могут совпадать, причем они будут видны как единственная система, но при небольшом изменении толщины произойдет их разделение. Одна особенность света натриевого пламени сразу бросается в глаза гораздо отчетливее, чем в случае спектроскопа любого другого типа. Если пламя содержит лишь немного натрия, то линии двух систем обладают весьма различной яркостью, но это различие значительно уменьшается по мере возрастания количества натрия, т. е. при условии, необходимом с самого начала в других методах наблюдения. При пользовании этим прибором глаз наблюдателя должен быть аккомодирован на бесконечность, и установка отражающих поверхностей на параллельность должна быть очень точной. Небольшое перемещение глаза в каком-либо направлении не должно вызывать расширения или сужения колец [14].

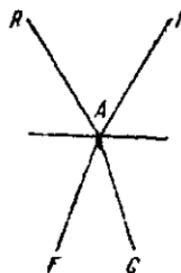
В приборе Майкельсона (Michelson) цвета, отраженные от тонкой пластинки, получаются без действительного приближения отражающих поверхностей. При помощи этого прибора Майкельсон произвел весьма тщательное и удачное сравнение эталонов длины и длин волн, излучаемых паром кадмия при электрическом разряде в пустотной трубке¹⁾.

Соотношения между множителями b , c , f , g были выведены независимо от теории тонких пластинок в общем виде Стоксом²⁾ при помощи общего механического принципа *обратимости*. Если предположить, что движения, образующие отраженный и преломленный лучи, на которые распадается падающий луч, обращены, то они воссоздадут обращенный падающий луч. Это дает одно соотношение; другое получается из того соображения, что не существует луча во второй среде, произведенного действием одного только обращенного отраженного или одного обращенного преломленного луча. Недостаток места не позволяет воспроизвести рассуждение полностью, но несколько слов, может быть, дадут читателю представление о том, как получаются эти выводы.

1) Интерференционная спектроскопия сильно развилась в настоящее время; доступные разрешающие способности превосходят 10^6 (см. примечание 1 на стр. 19).

2) „О полной черноте центрального пятна в кольцах Ньютона и о проверке формул Френеля для интенсивностей отраженного и преломленного луча“, *Camb. and Dub. Math. Jour.*, 4, стр. 1, 1849. Перепечатано в собрании сочинений, том II, стр. 89.

Положим (фиг. 2) амплитуду падающего луча (IA) равной единице и обозначим амплитуды отраженного (AR) и преломленного (AF) лучей соответственно через b и c . Если обратить b , то этот луч порождает отраженный луч с амплитудой b^2 вдоль AI и, допустим, преломленный луч с амплитудой bc вдоль AG . Если обратить c , то возникают луч с амплитудой cg вдоль AI и луч с амплитудой cf вдоль AG . Следовательно, $bc + cf = 0$, $b^2 + cg = 1$, что согласуется с (4).



Фиг. 2.

При этом предполагается, что при отражении или преломлении нет изменения фазы, за исключением того, которое может быть представлено изменением знака. Стокс, однако, распространил свой метод на случай, когда возможны изменения фазы, и пришел к заключению, что „сумма опережений фазы при двух отражениях равна сумме опережений при двух преломлениях, и опережения при двух преломлениях равны друг другу“. При этом предполагается, что опережения измеряются таким образом, что дают одинаковые знаки при c и g и противоположные — при b и f . Между множителями b , c , f , g , выражающими отношения амплитуд, получаются те же соотношения, что и выше¹⁾.

Когда третья среда отлична от первой, то теория тонких пластинок более сложна, и нет надобности рассматривать ее здесь. Об одном частном случае следует все же упомянуть. Когда тонкая прозрачная пленка находится на вполне отражающей поверхности, никаких цветов не должно наблюдаться, ибо весь свет в конце концов отражается, какова бы ни была длина волны. Опыт можно проделать с тонким слоем желатины на полированной серебряной пластинке [15]. В тех же случаях, когда наблюдается иной результат, это может быть следствием либо того, что металл не вполне отражает, либо того, что вещество, из которого состоит пленка, недостаточно прозрачно.

¹⁾ Оказывается, однако, что эти законы в сущности нельзя применить к вычислению отражения от тонкой пластинки. Это достаточно показывает тот факт, что выведенное с их помощью выражение для интенсивности не обращается в нуль вместе с толщиной. Суть дела заключается в том, что метод вывода многократного отражения из рассмотрения последовательных отдельных отражений и преломлений применим только в том случае, когда возмущение внутри пластинки состоит только из поперечных волн, рассматриваемых при выводе, между тем как появление изменения фазы, вероятно, связано с существованием добавочных поверхностных волн (§ 27). Наличием этих поверхностных волн можно пренебречь только в том случае, когда отраженная и преломленная волны рассматриваются на расстояниях от поверхности, превышающих несколько длин волн, но в применении к тонким пластинкам это ограничение нарушается. В действительности, если бы метод вычисления многократного отражения от тонкой пластинки был правилен в том случае, когда имеет место изменение фазы, то мы могли бы попеременно пользоваться выражениями (2) и (3), понимая только под буквами b , c , f , g множители, которые могут быть комплексными; и те же самые формальные соотношения (4) оставались бы справедливыми. Однако они не согласуются с соотношениями, найденными Стоксом методом обращения; и это расхождение показывает, что в том случае, когда имеют место изменения фазы, действие тонкой пластинки не может быть вычислено обычным способом.

Теория и наблюдение одинаково показывают, что цвета тонкой пластинки, например, мыльной пленки [16] или слоя воздуха в проходящем свете значительно слабее, чем в отраженном. С другой стороны, образцы старого стекла, поверхностный слой которых подвергся разложению, иногда обнаруживают в проходящем свете цвета замечательной яркости. Возможное объяснение, указанное Брюстером, состоит в том, что в данном случае мы имеем дело не с одной, а с рядом тонких пластинок, не очень отличающихся друг от друга по толщине. Очевидно, что при наличии такого ряда пластинок цвета в проходящем свете были бы гораздо чище, а в отраженном гораздо ярче, чем обычно. Если толщины строго равны, то некоторые длины волн должны совершенно отсутствовать в отраженном свете; с другой стороны, постоянство расстояния между пластинками, вообще говоря, приведет к особому преобладанию света некоторой другой длины волны, все составные части которого, выходящие в конце концов из стекла, совпадают по фазе ¹⁾ [17].

Все, что можно требовать от физической теории в данном случае, сводится к определению состава света, отраженного от тонкой пластинки или прошедшего через нее, исходя из состава падающего света. Дальнейший вопрос о хроматическом характере полученных таким образом смесей относится скорее к физиологической оптике, и на него нельзя ответить без полного знания хроматических соотношений между самими спектральными цветами. Опыты в этой области производились различными исследователями, в частности Максвеллом ²⁾, представившим свои результаты в цветной диаграмме, подобной той, какой пользовался Ньютон. Недавно было опубликовано ³⁾ вычисление цветов тонких пластинок, основанное на данных Максвелла и иллюстрированное кривой, представляющей весь ряд цветов до пятого порядка. К нему мы и отсылаем читателя, желающего получить дальнейшие сведения; заметим, что истинные цвета не видны при обычном способе наблюдения с слоем воздуха, заключенным между стеклянными поверхностями, вследствие примешивания белого света, отраженного от других поверхностей стекол. Это затруднение устраняется, если воспользоваться мыльной пленкой, к явной выгоде более темных цветов, как, например, красного первого порядка. Цвета ньютонова ряда наблюдаются также в свете, прошедшем через довольно тонкую пластинку из двоякопреломляющего вещества, как, например, слюды, когда плоскость анализатора перпендикулярна к плоскости первоначальной поляризации.

Тот же ряд цветов наблюдается и в других оптических опытах, например, в центре освещенной площадки, образующейся, когда свет,

1) Аналитические исследования и формулы, данные Стоксом для стопки пластинок (*Proc. Roy. Soc.*, 11, стр. 545, 1860), можно применить и к данному случаю при условии, что мы будем считать величины r , t , ϕ , ψ и т. д. комплексными, чтобы выразить не только амплитуду светового смещения, но и его фазу, тогда как действительные числа относятся только к интенсивностям.

2) Maxwell, Theory of compound Colours, *Phil. Trans.*, 1860.

3) *Edin. Trans.*, 1887 [том II, стр. 498].

исходящий из точечного источника, проходит через небольшое круглое отверстие в непрозрачном экране (§ 10).

Цвета, о которых мы говорили выше, образуются при почти перпендикулярном падении, так что запаздывание (рассматриваемое как расстояние), а именно $2\mu t \cos \alpha'$, не зависит в заметной степени от λ . Положение вещей может сильно измениться, если тонкая пластинка является менее плотной, чем окружающая ее среда, и если падение таково, что α' почти равно 90° , так как тогда, вследствие большой дисперсии, $\cos \alpha'$ может значительно изменяться при переходе от одного цвета к другому. При этих условиях ряд цветов совершенно изменяет свой характер, и полосы (соответствующие постепенно меняющейся толщине) могут даже потерять свою окраску, принимая после многих изменений вид черных и белых полос¹⁾.

Общее объяснение этого замечательного явления было предложено Ньютоном²⁾, но оно, повидимому, не было развито далее с точки зрения волновой теории.

Допустим, что плоские волны белого света, идущие в стекле, падают под углом α на слой воздуха, также ограниченный с другой стороны стеклом. Если μ — показатель преломления стекла, α' — угол преломления, то $\sin \alpha' = \mu \sin \alpha$, и запаздывание, выражаемое эквивалентным расстоянием в воздухе, будет

$$2t \sec \alpha' - \mu \cdot 2t \cdot \operatorname{tg} \alpha' \sin \alpha = 2t \cos \alpha',$$

а соответствующее запаздывание по фазе будет $\frac{2t \cos \alpha'}{\lambda}$, где λ , как обычно, длина волны в воздухе.

Прежде всего отметим, что когда α приближается к предельному углу, то $\cos \alpha'$ становится сколь угодно малым; вследствие чего запаздывание, соответствующее данной толщине, гораздо меньше, чем при перпендикулярном падении. Благодаря этому, стеклянные поверхности могут и не быть столь близкими друг к другу, как обычно.

Далее, следует отметить увеличение яркости света. Согласно (7) максимальное (при $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \delta = 1$) значение интенсивности отраженного света равно $\frac{4f^2}{(1+f^2)^2}$. При перпендикулярном падении f составляет около $\frac{1}{6}$, и интенсивность невелика; но, когда $\cos \alpha'$ приближается к нулю, f приближается к единице (§ 26), и яркость сильно возрастает.

Однако наиболее замечательной особенностью является уменьшение влияния изменения λ на запаздывание фазы. Уменьшение λ само по себе увеличивает запаздывание фазы, но так как волны более короткие преломляются сильнее, то этот эффект может быть более или менее полно компенсирован большим наклоном и соответствующим уменьшением

¹⁾ Ньютон, Оптика, кн. II; Fox Talbot, *Phil. Mag.*, 9, стр. 401, 1836.

²⁾ По вопросу о теории цветов, развившейся в настоящее время в большой отдел оптики, см. статью Schrödinger, „Die Gesichtsempfindungen“, Müller-Pouillet, „Lehrbuch d. Physik“, том II, 1926.

Список более поздней литературы можно найти в *Journal of the Optical Soc. of America* за 1937 и 1938 гг.

значения $\cos \alpha'$. Исследуем условия, при которых запаздывание фазы не зависит от λ .

Для того чтобы $\frac{\cos \alpha'}{\lambda}$ могло не зависеть от λ , должно быть

$$\lambda \sin \alpha' d\alpha' + \cos \alpha' d\lambda = 0,$$

причем (так как α постоянно)

$$\cos \alpha' d\alpha' = \sin \alpha d\mu.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha' = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}, \quad (9)$$

откуда находим α' , если известно соотношение между μ и λ .

Согласно формуле Коши, очень хорошо согласующейся с опытными данными в большей части видимого спектра,

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad (10)$$

так что

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha' = \frac{2B}{\lambda^3 \mu} = \frac{2(\mu - A)}{\mu}. \quad (11)$$

Если примем, как, например, для „особо тяжелого флинта“ Чэнса, $B = 0,984 \cdot 10^{-10}$ и, например, для натриевых линий, $\mu = 1,65$; $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-5}$, то получим

$$\alpha' = 79^\circ 30'.$$

При этом угле преломления и при этом сорте стекла запаздывание фазы почти не зависит от длины волны, и потому полосы, образующиеся при переменной толщине, являются приблизительно ахроматичными. Совершенный ахроматизм был бы возможен лишь в случае закона дисперсии

$$\mu^2 = A' - B'\lambda^2.$$

Если источник света находится на далеком расстоянии и очень мал, то черные полосы необычайно тонки и многочисленны. Опыт лучше всего удается (согласно Ньютону) с прямоугольной призмой, гипотенузную грань которой можно приблизить, почти до соприкосновения, к пластинке черного стекла. Полосы следует наблюдать с помощью выпуклой линзы с фокусным расстоянием около 8 дюймов. Если поместить глаз на вдвое большем, чем это последнее, расстоянии от призмы, а линзу держать посредине, то можно достигнуть соединения условий широкого поля зрения и максимальной резкости.

Если наблюдать ньютоновы кольца через призму, то обнаруживаются некоторые весьма замечательные явления, описанные в его двадцать четвертом наблюдении¹⁾. „Когда два объективных стекла были наложены

¹⁾ Ньютон, Оптика (русское издание стр. 172—3); см. также Плесе, *Pogg. ann.*, 114, стр. 504, 1861.

одно на другое так, что появлялись кольца цветов, то хотя простым глазом я не мог различить свыше восьми или девяти колец, однако, рассматривая их через призму, я видел значительно большее их количество; я мог насчитать их свыше сорока... И я полагаю, что опыт может быть усовершенствован и позволит обнаружить их еще гораздо большее число... Однако отчетливой при таком преломлении делалась только одна сторона этих колец, именно та, в сторону которой производилось преломление, другая же сторона становилась более смутной, чем при наблюдении простым глазом...

„Иногда я так налагал одно объективное стекло на другое, что простому глазу они казались повсюду равномерно белыми, без малейших следов каких-либо окрашенных колец; однако при рассматривании стекол через призму открывалось множество таких колец.“

Ньютон был явно весьма поражен этими „столь странными обстоятельствами“ и считал появление колец при необычных толщинах обусловленным диспергирующей способностью призмы. Так как система синих колец преломляется сильнее, чем красных, то при известных условиях возможно, что синее кольцо может быть настолько смещено по отношению к соответствующему красному кольцу, что в *одной части окружности* кольца различных диаметров будут компенсировать друг друга. Таким образом может образоваться белая полоса в положении, в котором без призмы смещение цветов было бы полным, насколько может судить глаз.

Проще всего обстоит дело в том случае, когда „тонкая пластинка“ ограничена плоскими поверхностями, составляющими небольшой угол друг с другом. Отодвигая назад призму (ребро которой параллельно линии пересечения вышеупомянутых плоскостей), всегда возможно подобрать эффективную диспергирующую способность призмы так, чтобы совпадали *n*-е полосы для каких-либо двух заданных цветов, а следовательно, приближенно и для всего спектра.

Образование ароматической полосы или, скорее, центральной черной полосы, зависит в сущности от тех же причин, что и кажущееся смещение центра системы полос Френеля при *рассматривании* их через призму.

Однако ни Ньютон, ни, повидимому, кто-либо из позднейших ученых не объяснили, почему полосы должны быть более многочисленными, чем обычно, и при известных условиях заметно ароматичными после большого числа чередований. Очевидно, что в частном случае вышеупомянутой клинообразной пластинки это не имело бы места. Ширина полос для любого цвета была бы пропорциональна λ как до, так и после смещения их призмой, и последовательность образующихся в белом свете цветов, а также число видимых полос были бы такими же, как и обычно.

Особенность, которую нужно объяснить, повидимому, зависит от *кривизны* поверхностей, ограничивающих пластинку. Предположим, для простоты, что нижняя поверхность плоская ($y=0$) и что приближенное уравнение верхней поверхности есть $y=a+bx^2$, где a , очевидно, представляет наименьшее расстояние между пластинками. Черная полоса

n -го порядка для длины волны λ появляется, когда

$$\frac{1}{2} n\lambda = a + bx^2, \quad (12)$$

и, следовательно, ширина (δx) полосы в этом месте определяется соотношением

$$\frac{1}{2} \lambda = 2bx \delta x, \quad (13)$$

или

$$\delta x = \frac{\lambda}{4bx} = \frac{\lambda}{4\sqrt{b} \sqrt{\frac{1}{2} n\lambda - a}}. \quad (14)$$

Если, как это обычно предполагается в теории ньютоновых колец, стекла соприкасаются друг с другом, то $a = 0$ и $\delta x \propto \lambda^{1/2}$, т. е. ширина полосы n -го порядка изменяется пропорционально квадратному корню из длины волны, а не первой степени.

Даже в этом случае наложение и обусловленное им размывание полос значительно ослабляются при пользовании призмой, но для наблюдения явления во всей его полноте необходимо, чтобы a было конечным. Исследуем, при каком условии ширина полосы n -го порядка будет оставаться постоянной при изменении λ . Согласно (14), для этого необходимо, чтобы вариация выражения $\frac{\lambda^2}{\frac{1}{2} n\lambda - a}$ была равна нулю. Отсюда $a = \frac{1}{4} n\lambda$, так что расстояние между поверхностями в том месте, где образуется n -я полоса, должно быть обусловлено наполовину кривизной поверхностей, наполовину несовершенным контактом в месте их наибольшего сближения. Если это условие выполнено, то вызванный призмой ахроматизм n -й полосы влечет за собой ахроматизм большого числа соседних полос и таким образом обуславливает возникновение замечательных явлений, описанных Ньютоном.

[1901. Относительно дальнейших подробностей см. *Phil. Mag.*, том XXVIII, стр. 200, 1889] [18].

§ 9. ДИФFUЗИОННЫЕ КОЛЬЦА НЬЮТОНА

В четвертой части второй книги своей „Оптики“ Ньютон исследует другой ряд колец, обычно (хотя и не очень удачно) называемых цветами толстых пластинок. Основной опыт заключается в следующем. В центре кривизны вогнутого, покрытого с задней стороны ртутью зеркала помещается непрозрачный лист картона, через небольшое отверстие в котором проходит солнечный свет. Большая часть света отражается обратно к отверстию; но при этом на картоне наблюдается ряд концентрических колец, для образования которых, как показал Ньютон, необходимо совместное действие обеих поверхностей зеркала. Поэтому диаметры колец зависят от толщины стекла, и кольца не образуются, если стекло заменить металлическим зеркалом. Яркость колец зависит от несовершенства полировки передней поверхности стекла и может

Если углы θ и θ' малы, то с достаточной степенью приближения мы можем положить

$$R = \frac{10^2}{\mu}. \quad (1)$$

Условие резкости здесь выполнено, так как R одно и то же для всякого луча, выходящего параллельно данному. Лучи, принадлежащие одной системе параллельных лучей, собираются линзой в фокус в определенной точке вблизи первоначального источника.

Формула (1), как показал Гершель, согласуется с измерениями Ньютона. Закон образования колец вытекает непосредственно из выражения для разности хода, причем радиус кольца n -го порядка пропорционален n и квадратному корню из длины волны.

§ 10. ТЕНИ [19]

Наиболее часто приводившимся возражением против волновой теории в начальный период ее развития было указание на трудность объяснения, с точки зрения этой теории, существования теней. Благодаря Френелю и его последователям именно этот отдел оптики стал источником наибольших триумфов волновой теории.

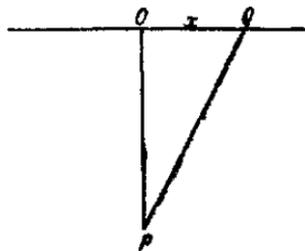
Принцип, лежащий в основе их исследований, принадлежит Гюйгенсу и может быть сформулирован следующим образом. Если вокруг источника волн провести воображаемую замкнутую поверхность, то полное действие волн в области, лежащей вне ее, можно считать обусловленным движениями, непрерывно распространяющимися через разные элементы этой поверхности. Волновое движение, обусловленное каким-либо элементом поверхности, называется *вторичной* волной, и при вычислении полного действия надо принимать в расчет не только амплитуды, но и фазы составляющих колебаний. Обычно удобно выбирать в качестве поверхности, подлежащей разбиению на элементы, *волновой фронт*, т. е. поверхность, на которой первичные колебания имеют одинаковые фазы.

Та неясность, которая может быть присуща принципу Гюйгенса, вызывается главным образом неопределенностью мысли и выражения, с которой мы вынуждены примириться, если не хотим высказываться относительно природы колебаний. В применении к звуку, где мы знаем, с чем имеем дело, вопрос в принципе довольно прост, хотя на пути вычислений, которые мы пожелали бы произвести, часто возникали бы математические трудности¹⁾. Воображаемую поверхность, подлежащую разбиению на элементы, можно там рассматривать как гибкий и тонкий слой, а мы знаем, что если приложенными в отдельных его местах силами каждый элемент слоя приводится в направлении своей нормали в движение точно такое же, как и воздух в этом месте, то движение

¹⁾ Ясно, что электромагнитная теория света, как это и отмечает в других местах автор [20], также позволяет ставить принципиально вполне строго проблему дифракции света.

воздуха вовне полностью определено. Согласно принципу суперпозиции, полное действие может быть найдено путем интегрирования отдельных действий, производимых каждым элементом поверхности, в то время как другие элементы остаются в покое.

Рассмотрим теперь подробно важный случай, когда разбиваются на элементы однородные плоские волны по поверхности, совпадающей с фронтом волны (OQ). Представим себе, что фронт волны разделен на элементарные кольца или зоны, часто называемые зонами Гюйгенса, но лучше зонами Френеля, сферическими поверхностями (фиг. 4), описанными из точки P , как центра (точки, полное действие в которой требуется вычислить), причем сферическая поверхность, касающаяся плоскости в точке O , описывается радиусом, равным PO , а последующие — радиусами, возрастающими каждый раз на $\frac{1}{2} \lambda$. На плоскости получается, таким образом, ряд окружностей, радиусы x которых даются соотношением $x^2 + r^2 = (r + \frac{1}{2} \lambda)^2$ или приближенно $x^2 = \lambda r$, так что кольца в начале имеют почти одинаковые площади. Действие каждого элемента плоскости на точку P пропорционально его площади; но она зависит также от расстояния от точки P , а возможно и от наклона вторичного луча к направлению колебания и к фронту волны. Эти вопросы будут рассмотрены ниже



Фиг. 4.

в связи с динамической теорией, но при всех обычных условиях результат не зависит от того или другого ответа на них. Необходимо допустить лишь одно, что действия последовательных зон постепенно уменьшаются, либо вследствие возрастания наклона вторичного луча, либо вследствие того, что из-за ограниченности области интегрирования зоны становятся все более и более неполными. Составляющие колебания в P , обусловленные последовательными зонами, являются, таким образом, почти равными по амплитуде и противоположными по фазе (фаза каждого колебания соответствует фазе бесконечно тонкого кольца, находящегося посредине между границами зоны), следовательно, члены подлежащего суммированию ряда имеют чередующиеся знаки и, будучи вначале почти постоянными по численному значению, постепенно уменьшаются до нуля. В таком ряду можно считать с весьма большим приближением, что каждый член уничтожается половинами соседних с ним членов и, следовательно, сумма всего ряда представляется половиной первого члена, остающейся некомпенсированной. Вопрос сводится, таким образом, к нахождению действия первой зоны, т. е. центрального круга, площадь которого равна λr .

Мы видели, что стоящая перед нами задача не зависит от закона вторичной волны в отношении наклона; но результат интегрирования необходимо включает закон интенсивности и фазы вторичной волны как функции расстояния r от начала. И мы можем в самом деле, как это было сделано Смитом¹⁾, определить закон вторичной волны, сравнивая

¹⁾ *Camb. Math. Journ.*, 3, стр. 46, 1843.

результат интегрирования с результатом, полученным в предположении, что первичная волна распространяется до P без разбиения.

Что касается фазы вторичной волны, то естественно предположить, что эта волна исходит из любой точки Q с фазой первичной волны, так что с приходом ее в P она отстает по фазе на величину, соответствующую расстоянию QP . Но небольшое рассуждение покажет, что в этом случае ряд вторичных волн не мог бы воссоздать первичную волну. Действительно, суммарное действие вторичных волн равно половине действия первой зоны Френеля, и только для центрального элемента этой зоны расстояние, которое должно быть пройдено, равно r . Представим себе, что рассматриваемая зона разделена на бесконечно тонкие кольца равной площади. Действия, обусловленные каждым из этих колец, равны по амплитуде, а фазы их равномерно распределены по половине полного периода. Фаза результирующего колебания лежит посередине между фазами крайних элементов, т. е. она отстает на четверть периода от фазы, обусловленной элементом, находящимся в центре круга. Соответственно этому необходимо предположить, что вторичные волны выходят с фазой, опережающей на четверть периода фазу первичной волны на поверхности, разбиваемой на элементы.

Далее, очевидно, что при вычислении величины действия первой зоны в P надо принять во внимание изменение фазы. Только действие одного срединного элемента дается непосредственно; действие же каждого из остальных элементов должно быть найдено введением дополнительного множителя, равного $\cos \theta$, если θ — разность фаз между этим элементом и результирующим колебанием. Соответственно этому, амплитуда результирующего колебания будет меньше, чем в случае, если бы все составляющие имели одну и ту же фазу, в отношении

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}.$$

Но $\frac{2}{\pi} \times \text{площадь} = 2\lambda r$, поэтому, чтобы согласовать амплитуду первичной волны (принятую за единицу) с половинным действием первой зоны, амплитуда вторичной волны, исходящей из элемента поверхности dS на расстоянии r , должна быть принята равной

$$\frac{dS}{\lambda r}. \quad (1)$$

Этим выражением, вместе с опережением фазы на четверть периода, и определяется закон вторичной волны.

То, что амплитуда вторичной волны должна изменяться обратно пропорционально r , следовало ожидать из энергетических соображений; но появление множителя λ^{-1} и опережение фазы иногда считается чем-то таинственным. Поэтому может быть не лишне напомнить, что именно эти законы приложимы и ко вторичной волне звука, которая может быть исследована на основе самых строгих механических принципов.

Сложение действий вторичных волн можно разобрать и аналитически. Если первичная волна в точке O будет $\cos kat$, то действие вторичной волны, распространяющейся от элемента dS в точке Q , есть

$$\frac{dS}{\lambda \varrho} \cos k \left(at - \varrho + \frac{1}{4} \lambda \right) = - \frac{dS}{\lambda \varrho} \sin k (at - \varrho).$$

Если $dS = 2\pi x dx$, то для полного действия имеем

$$- \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\sin k (at - \varrho) x dx}{\varrho},$$

или, так как $x dx = \varrho d\varrho$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$$- k \int_r^{\infty} \sin k (at - \varrho) d\varrho = \left[- \cos k (at - \varrho) \right]_r^{\infty}.$$

Чтобы получить действие первичной волны после прохождения ею расстояния r , а именно $\cos k (at - r)$, необходимо предположить, что результат интегрирования при верхнем пределе обращается в нуль. Важно отметить, что без некоторого дополнительного условия интеграл на самом деле является неопределенным. Согласно принятому закону вторичной волны, результат действительно должен зависеть от радиуса внешней границы области интегрирования, которую мы предполагаем имеющей вид точной окружности. Этот случай является, однако, в высшей степени специальным и исключительным. Обычно мы можем предполагать, что большое количество внешних колец является неполным, так что результат интегрирования при верхнем пределе естественно принять равным нулю. Если требуется формальное доказательство, то его можно получить, вводя в подынтегральное выражение множитель вроде $e^{-h\varrho}$ и заставляя h в конечном результате стремиться к нулю.

В том случае, когда первичная волна плоская, площадь первой зоны Френеля равна $\pi \lambda r$, и так как амплитуды вторичных волн изменяются обратно пропорционально r , то интенсивность не зависит от r , как и должно быть, разумеется. Если же первичная волна сферическая и радиус подлежащего разбиению волнового фронта равен a , тогда мы знаем, что на расстоянии r от последнего амплитуда первичной волны будет уменьшена в отношении $a : (r + a)$. Это можно рассматривать как следствие изменения площади первой зоны Френеля.

Действительно, если ее радиус будет x , то

$$\sqrt{\left(r + \frac{1}{2} \lambda\right)^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} = r + a,$$

так что приближенно

$$x^2 = \frac{\lambda ar}{a + r}.$$

Так как расстояние, которое должны пройти вторичные волны, равно r , то мы видим, почему действие первой зоны, а следовательно, и всего ряда пропорционально $\frac{a}{a + r}$. Подобным же образом можно

разобрать и другие случаи, как, например, случай первичной волновой поверхности с неравными главными кривизнами.

Общее объяснение образования теней легко также дать на основе зон Френеля. Если рассматриваемая точка так удалена от геометрической тени, что большое количество первых зон является полным, то освещение, определяемое в основном первой зоной, будет таким же, как если бы преграды совсем не было. Если же точка глубоко погружена в геометрическую тень, то первые зоны совершенно отсутствуют, и вместо ряда членов, начинающихся с конечной численной величины и постепенно уменьшающихся до нуля, мы имеем теперь дело с рядом, члены которого стремятся к нулю *на обоих концах*. Сумма такого ряда весьма близка к нулю, так как каждый член нейтрализуется половинами соседних с ним членов, имеющих противоположные знаки. Вопрос о том, будет ли в данном месте свет или тень, зависит, таким образом, от того, обрывается ли резко ряд в начале либо в конце. За немногими исключениями этот резкий обрыв может встретиться только при наличии первого члена, т. е. когда на пути наименее запаздывающей вторичной волны нет преград или когда луч проходит через рассматриваемую точку. Согласно волновой теории, свет, строго говоря, нельзя считать распространяющимся вдоль луча; но существование луча, на пути которого нет преграды, предполагает, что система зон Френеля может иметь начало, и если большое количество этих зон существует и не обрывается резко, то имеющиеся вблизи преграды на освещение не влияют. Промежуточные случаи, в которых образуется только небольшое число зон, относятся главным образом к области дифракции.

Интересное исключение из общего правила, согласно которому полная яркость требует существования первой зоны, имеет место в том случае, когда преграда имеет форму небольшого круглого диска, параллельного плоскости падающих волн. В первой половине XVIII столетия ¹⁾ Делиль нашел, что в центре круглой тени находится яркое светлое пятнышко. Это наблюдение оставалось в забвении до тех пор, пока Пуассон не выдвинул в качестве возражения против теории Френеля то, что она требует, чтобы в центре круглой тени находилось светлое пятно, столь же яркое, как и в отсутствии преграды. Если представим себе, что первичная волна прерывается у плоскости диска, то можно построить систему зон Френеля, начинающуюся от окружности диска; и первая, внешняя по отношению к диску, зона играет роль, принадлежащую обычно центру всей системы. Полное действие равно половине действия первой существующей зоны, а оно почти такое же, как если бы никакой преграды не было.

Когда свет проходит через небольшое круглое или кольцеобразное отверстие, то освещение в любой точке на оси зависит от соотношения между величиной отверстия и расстоянием от него до выбранной точки. Если, как в предыдущем абзаце, мы вообразим систему зон, проведенную, начиная от внутреннего круглого края отверстия, то все зависит от того, каким образом ряд заканчивается на внешнем крае. Если

¹⁾ Verdet, Leçons d'Optique Physique, I, § 66.

отверстие таково, что в нем укладывается в точности целое число зон, то полное действие можно рассматривать как полусумму действий, обусловленных первой и последней зонами. Если число зон четное, то действия первой и последней зон противоположны друг другу, и в рассматриваемой точке будет полная темнота. Если же число зон нечетное, то действия согласуются друг с другом, и освещение (пропорциональное квадрату амплитуды) будет вчетверо больше, чем в том случае, если бы преграды совсем не было.

Процесс увеличения результирующего освещения в выбранной точке путем задерживания некоторых из вторичных лучей можно продолжить значительно дальше¹⁾. При помощи фотографии легко приготовить пластинку, прозрачную в тех местах, на которые падают зоны нечетного порядка, и непрозрачную в местах, на которые падают зоны четного порядка. Такая пластинка обладает способностью собирающей линзы и дает освещение, несравненно большее, чем то, какое могло бы быть получено без нее. Можно было бы достигнуть еще большего эффекта (в четыре раза), если бы удалось устроить так, чтобы задержание света четными зонами было заменено обращением фазы без потери в амплитуде²⁾.

В этих опытах узость зон делает необходимой очень большую точность в осуществлении геометрических условий. Так, в случае круглого диска, находящегося на равном расстоянии (r) от источника света и от экрана, на котором наблюдается тень, ширина первой внешней зоны определяется соотношением

$$dx = \frac{\lambda (r)}{4(2x)},$$

где $2x$ — диаметр диска. Если $2r = 1000$ см, $2x = 1$ см, $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см, то $dx = 0,0015$ см. Следовательно, для того чтобы эта зона могла быть вполне хорошей формы, ошибка в окружности должна быть менее величины порядка $0,001$ см³⁾. Опыт удается в темной комнате указанной выше длины с диском размером монеты в три пенса (подвешенным на трех нитях) в качестве преграды; источником света является маленькое игольное отверстие в жестяной пластинке, через которое проникают в горизонтальном направлении солнечные лучи, отраженные от наружного зеркала. В отсутствии гелиостата более удобно получить светящуюся точку при помощи короткофокусной линзы.

Амплитуда света в какой-либо точке оси при перпендикулярном падении плоских волн на кольцеобразное отверстие, как указано выше, равна

$$\cos k(at - r_1) - \cos k(at - r_2) = 2 \sin kat \cdot \sin k(r_1 - r_2),$$

где r_2, r_1 — расстояния внешнего и внутреннего краев от рассматриваемой точки. Едва ли нужно упоминать о том, что во всех этих случаях вычисление приложимо в первую очередь к однородному свету и что

¹⁾ Soret, *Pogg. Ann.*, 156, стр. 99, 1875.

²⁾ Р. Вуду удалось построить пластинки зон на этом принципе (*Phil. Mag.* 1898, 45, стр. 513, а также *Физическая оптика*).

³⁾ Легко видеть, что радиус светлого пятна того же порядка величины.

в согласии с теоремой Фурье каждая однородная составляющая смеси может быть рассматриваема отдельно. Когда первоначальный свет белый, присутствие одних составляющих и отсутствие других будет обычно вызывать появление цветовых эффектов, изменяющихся вместе с характерными особенностями данного случая.

Хотя то, что можно сказать об этом предмете, лучше отложить до рассмотрения динамической теории, уместно все же сразу отметить, что в приложении принципа Гюйгенса к вычислению действий, производимых непрозрачными экранами конечных размеров, имеется элемент гипотезы. Надлежащим образом примененный этот принцип не мог бы повести к ошибочным выводам; однако, как легко доказать в случае звуковых волн, строго говоря, недостаточно задать выражение для вторичной волны, пригодное тогда, когда первичная волна является невозмущенной, и затем попросту ограничивать интеграцию прозрачными частями экрана. Но обусловленная этим ошибка, вероятно, незначительна, кроме, быть может, случая очень тонких решеток; действительно, неправильность вычисления вторичных волн будет ограничена расстояниями лишь в несколько длин волн от границы непрозрачных и прозрачных частей ¹⁾.

§ 11. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ФРАУНГОФЕРА

Весьма общей задачей в области дифракции является исследование распределения света на экране, на который падают расходящиеся или сходящиеся сферические волны после прохождения через разные дифрагирующие отверстия. Когда волны сходящиеся, а воспринимающий экран помещен так, что содержит центр схождения их — изображение первоначальной светящейся точки, — то вычисление оказывается менее сложным. Этот класс явлений был исследован Фраунгофером (на основании принципов, установленных Френелем) и иногда называется его именем. Нам будет удобно начать с них, ввиду их простоты и большой важности для теории оптических приборов.

Если f будет радиус сферической волны в месте ее разбиения на элементы, где колебание представляется выражением $\cos kat$, то в любой точке M (фиг. 5) воспринимающего экрана колебание, вызываемое элементом dS волнового фронта, дается выражением (§ 10):

$$-\frac{dS}{\lambda e} \sin k(at - e),$$

где e — расстояние между точкой M и элементом dS .

¹⁾ В рамках электромагнитной теории света задача дифракции решена со строгим учетом граничных условий в ряде случаев (дифракция от металлического шара, экрана с острым краем и др.). По этому вопросу см. книгу Франка и Мизеса, „Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики“. ОНТИ. 1937, ч. II; также статью Laue, „Interferenz und Beugung elektromagn. Wellen“, Hdb. d. Exp. Phys., том XVIII, 1928 [28]. *Примеч. ред.*

Примем плоскость экрана за координатную плоскость и центр волны за начало координат; обозначим координаты точки M через ξ , η и координаты точки P (в которой находится dS) — через x , y , z . Тогда

$$\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2, \quad f^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

так что

$$\rho^2 = f^2 - 2x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2.$$

В рассматриваемом случае ξ , η весьма малы, и мы можем принять

$$\rho = f \left\{ 1 - \frac{x\xi + y\eta}{f^2} \right\}.$$

В то же время dS можно положить равным $dx dy$ и рассматривать ρ в знаменателе как постоянную, равную f . Таким образом выражение^e для колебания в точке M обращается в

$$-\frac{1}{\lambda f} \iint \sin k \left\{ at - f + \frac{x\xi + y\eta}{f} \right\} dx dy, \quad (1)$$

и для интенсивности, представляемой квадратом амплитуды, имеем

$$I^2 = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \left[\iint \sin k \frac{x\xi + y\eta}{f} dx dy \right]^2 + \frac{1}{\lambda^2 f^2} \left[\iint \cos k \frac{x\xi + y\eta}{f} dx dy \right]^2. \quad (2)$$

Это выражение для интенсивности становится строго приложимым, когда f бесконечно велико, так что обыкновенная оптическая aberrация исчезает. Падающие волны в таком случае плоские и ограничены плоским отверстием, совпадающим с фронтом волны. Тогда интегралы являются собственно функциями направления, в котором надлежит вычислить интенсивность света.

В опыте при обычных условиях безразлично, расположена ли собирающая линза впереди или позади дифрагирующего отверстия. Обычно удобнее всего пользоваться зрительной трубой, сфокусированной на светящейся точке, а дифрагирующие отверстия помещать непосредственно перед объективом. То, что видно через окуляр, во всяком случае совпадает с тем, что представилось бы на экране в фокальной плоскости.

Прежде чем перейти к частным случаям, полезно обратить внимание на некоторые общие свойства решения, представленного соотношением (2)¹⁾.

Если при данном отверстии длина волны (пропорциональная k^{-1}) изменится, то подинтегральные выражения остаются неизменными, при условии, что ξ и η прямо пропорциональны λ . Уменьшение λ приводит, таким образом, к простому пропорциональному сокращению дифракционной картины, сопровождаемому увеличением ее яркости в отношении λ^{-2} .

¹⁾ Bridge, *Phil. Mag.*, ноябрь 1858.

Если длина волны остается неизменной, то такое же действие достигается увеличением размеров отверстия. Линейные размеры дифракционной картины обратно пропорциональны размерам отверстия, а яркость в соответствующих точках пропорциональна *квадрату* площади отверстия.

Если размеры отверстия и длина волны возрастают в одном и том же отношении, то величина и форма дифракционной картины не изменяются.

Приложим теперь интегралы (2) к случаю прямоугольного отверстия ширины a в направлении, параллельном оси x , и ширины b параллельно оси y . Пределы интегрирования можно, таким образом, принять равными $-1/2 a$ и $+1/2 a$ для x и $-1/2 b$ и $+1/2 b$ для y . Мы легко находим (подставив $\frac{2\pi}{\lambda}$ вместо k):

$$I^2 = \frac{a^2 b^2}{f^2 \lambda^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a \xi}{f \lambda} \right)}{\frac{\pi^2 a^2 \xi^2}{f^2 \lambda^2}} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b \eta}{f \lambda} \right)}{\frac{\pi^2 b^2 \eta^2}{f^2 \lambda^2}}. \quad (3)$$

Это выражение дает распределение света в изображении математической точки в случае прямоугольного отверстия, как это часто имеет место в спектроскопах.

Поскольку второй и третий множители в (3) имеют оба вид $\frac{\sin^2 u}{u^2}$, мы исследуем характер этой функции. Она обращается в нуль при $u = m\pi$, где m — любое целое число, отличное от нуля. Когда $u = 0$, она обращается в единицу. Максимумы имеют место, когда

$$u = \operatorname{tg} u, \quad (4)$$

и тогда

$$\frac{\sin^2 u}{u^2} = \cos^2 u. \quad (5)$$

Чтобы вычислить корни уравнения (4), мы можем положить

$$u = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi - y = U - y,$$

где y — положительное число, которое мало, когда u велико. Подставляя, находим $\operatorname{ctg} y = U - y$, откуда

$$y = \frac{1}{U} \left(1 + \frac{y}{U} + \frac{y^2}{U^2} + \dots \right) - \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{15} - \frac{17y^7}{315}.$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений. Легко найти, что

$$u = U - y = U - U^{-1} - \frac{2}{3} U^{-3} - \frac{13}{15} U^{-5} - \frac{146}{105} U^{-7} - \dots \quad (6)$$

В первом квадранте нет корня, кроме нуля, так как $\operatorname{tg} u > u$, а во втором квадранте нет ни одного корня, так как знаки u и $\operatorname{tg} u$ про-

твояположны. Первый корень после нуля находится, таким образом, в третьем квадранте и соответствует значению $m = 1$. Даже в этом случае ряд сходится достаточно, чтобы дать значение корня со значительной точностью, тогда как для больших значений m большей точности и желать нельзя. Истинные значения u/π (вычисленные иным путем Швердом) суть 1,4303; 2,4590; 3,4709; 4,4747; 5,4818; 6,4844 и т. д.

Так как максимумы имеют место, когда $u = (m + 1/2)\pi$ приблизительно, то последовательные значения максимумов не очень отличны от

$$\frac{4}{9\pi^2}, \quad \frac{4}{25\pi^2}, \quad \frac{4}{49\pi^2} \text{ и т. д.}$$

Приложение этих результатов к (3) показывает, что поле ярче всего в центре: $\xi = 0$, $\eta = 0$, т. е. в геометрическом изображении. Оно пересечено темными линиями, уравнения которых суть

$$\xi = \frac{m\lambda}{a}, \quad \eta = \frac{m\lambda}{b}.$$

Внутри прямоугольника, образованного парами последовательных темных линий, и недалеко от его центра яркость возрастает до максимума; однако эти чередующиеся максимумы во всех случаях сильно уступают по яркости центру всей картины ($\xi = 0$, $\eta = 0$).

Согласно принципу сохранения энергии, освещение всей фокальной плоскости должно быть равно освещению дифрагирующей площади; таким образом, в согласии с предположениями, при которых было получено (3), его значение при интегрировании от $\xi = -\infty$ до $\xi = +\infty$ и от $\eta = -\infty$ до $\eta = +\infty$ должно быть равно ab .

Это интегрирование, примененное впервые Келландом¹⁾ для определения абсолютной интенсивности вторичной волны, может быть произведено сразу посредством известной формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi.$$

Следует заметить, что в то время как полная интенсивность пропорциональна ab , интенсивность в фокальной точке пропорциональна a^2b^2 . С увеличением отверстия не только возрастает полная яркость в фокальной плоскости, но имеет также место сжатие дифракционной картины. Вид выражения (3) сразу показывает, что с изменением a и b координаты любой заданной точки картины изменяются пропорционально a^{-1} и b^{-1} .

Сжатие дифракционной картины с увеличением отверстия имеет фундаментальное значение для разрешающей силы оптических приборов. В геометрической оптике, в которой изображения рассматриваются как абсолютные, предполагается, что дифракционная картина бесконечно мала и что две светящиеся точки, как бы близки они ни были друг к другу, образуют отдельные изображения. Это равносильно допущению,

¹⁾ *Ed. Trans.*, 15, стр. 315.

что λ бесконечно мало. Тот факт, что λ в действительности конечно, ставит предел разделяющей или разрешающей способности оптического прибора.

Иногда говорят, что эта неотчетливость изображений обусловлена дифракцией у края отверстия; вносились даже предложения устранить эту неотчетливость устройством менее резкого перехода между задержанной и проходящей частями первичной волны. Такой взгляд совершенно неправилен. Объяснения требует не столько тот факт, что встречающиеся в действительности изображения несовершенны, сколько то, что возможно существование их в том отчетливом виде, в каком мы их наблюдаем.

В фокусе ($\xi = 0, \eta = 0$) все вторичные волны имеют одну и ту же фазу, и легко вычислить интенсивность в этой точке, какова бы ни была форма отверстия. Из общей формулы (2), если A — площадь отверстия, находим

$$I_0 = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2}. \quad (7)$$

Для образования резкого изображения светящейся точки необходимо, чтобы освещение становилось незначительным, когда ξ, η достигают больших значений, а эта незначительность освещения может получиться только как следствие расхождений в фазах вторичных волн, исходящих из разных частей отверстия. Пока нет заметного расхождения фаз, не может быть и заметного уменьшения яркости в сравнении с той яркостью, которая наблюдается в самом фокусе. Мы можем пойти дальше и утверждать, что не может быть значительной потери яркости, пока разность фаз волн, исходящих из самых близких и самых удаленных частей отверстия, не достигает $\frac{1}{4} \lambda$.

Когда разность фаз составляет λ , мы можем ожидать, что результирующее освещение будет весьма значительно ослаблено. Ход явления легко проследить в частном случае прямоугольного отверстия, особенно, если представить себе, что f бесконечно. В направлении (допустим, горизонтальном), для которого $\eta = 0, \frac{\xi}{f} = \sin \theta$, фазы вторичных волн заполняют полный период, когда $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$, и так как все части отверстия в горизонтальном направлении одинаково эффективны, то в этом направлении имеет место полная компенсация, а следовательно, и отсутствие освещения. Когда $\sin \theta = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{a}$, фазы заполняют полтора периода и освещение опять появляется. Мы можем сравнить эту яркость с яркостью в направлении $\theta = 0$. Фаза результирующего колебания та же, что и фаза, обусловленная центральной вторичной волной, и расхождение в фазе между составляющими уменьшают амплитуду в отношении

$$\frac{1}{3\pi} \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{+\frac{3}{2}\pi} \cos \varphi \, d\varphi : 1,$$

или $-2:3\pi$, так что яркость в этом направлении составляет $\frac{4}{9\pi^2}$ максимума яркости при $\theta=0$. Подобным же образом мы можем найти освещение в любом другом направлении, и очевидно, что оно обращается в нуль, когда $\sin\theta$ составляет какое-либо кратное $\frac{\lambda}{a}$.

Причина увеличения разрешающей способности с увеличением отверстия теперь очевидна. Чем больше отверстие, тем меньше те углы, на которые нужно отклониться от главного направления, чтобы получить заданные расхождения в фазе, и тем более сжато изображение.

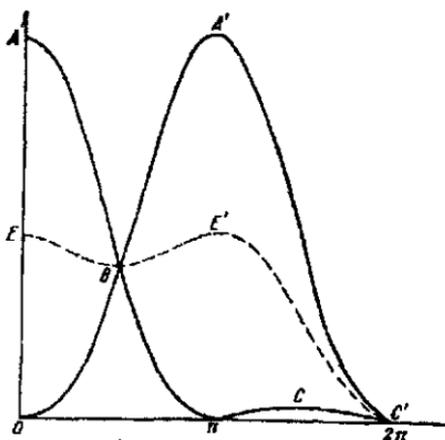
Во многих случаях исследуемый объект представляет собой светящуюся линию равномерной интенсивности, разные точки которой должны быть рассматриваемы как независимые источники света. Если уравнение для изображения этой линии будет $\xi=0$, то интенсивность в какой-либо точке ξ, η дифракционной картины может быть представлена выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\eta = \frac{a^2 b}{\lambda f} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \xi}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi^2 a^2 \xi^2}{\lambda^2 f^2}}. \quad (8)$$

Это — тот же закон, что и для светящейся точки, если рассматривать только горизонтальные направления. Резкость тонкой вертикальной линии, а следовательно, и разрешающая способность в отношении смежных вертикальных линий, таким образом, не зависит от величины отверстия прибора в вертикальном направлении; это — очень важный закон в теории спектроскопа.

Распределение освещения в изображении светящейся линии показано на кривой ABC (фиг. 6), представляющей значения функции $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ от $u=0$ до $u=2\pi$. Часть, соответствующая отрицательным значениям u , подобна, если OA является осью симметрии.

Рассмотрим теперь распределение яркости в изображении двойной линии, компоненты которой одинаковой интенсивности и находятся на таком угловом расстоянии друг от друга, что центральная линия в изображении одной из них совпадает с положением первой темной полосы в изображении другой. На фиг. 6 кривая яркости для одной компоненты есть ABC , а для другой $OA'C'$; кривая, представляющая полусумму этих яркостей, есть EVE' . Яркость (соответствующая точке B) посередине между двумя центральными точками AA' составляет 0,8106 от яркости в самих центральных точках. Можно считать, что это соответствует



Фиг. 6.

примерно пределу близости, при котором возможно еще сколько-нибудь уверенное разрешение; без сомнения, однако, наблюдатель, привыкший к своему инструменту, с уверенностью распознал бы здесь двойственность линии. Наклон, соответствующий $u = \pi$, таков, что фазы вторичных волн заполняют полный период, т. е. таков, что проекция отверстия в горизонтальном направлении на это направление равна одной длине волны. Мы приходим к выводу, что *двойная линия не может быть с уверенностью разрешена, если ее компоненты не стягивают угол, превышающий угол, стягиваемый длиной волны света на расстоянии, равном величине отверстия в горизонтальном направлении.* Это правило удобно вследствие его простоты; и оно достаточно точно, если иметь в виду неизбежную неопределенность в отношении того, что именно понимается под разрешением.

Относительно экспериментального подтверждения теории разрешающей способности прямоугольных отверстий см. Optics, Enc. Brit., том XVII, стр. 807; том II, стр. 411 [20].

Если угловое расстояние между компонентами двойной линии наполовину больше расстояния, принятого на фиг. 6, то яркость посредине между ними составляет 0,1802 против 1,0450 в центральных линиях каждого изображения. Такое падение яркости посредине должно быть более чем достаточно для разрешения. Если угол, стягиваемый компонентами двойной линии, вдвое больше угла, стягиваемого длиной волны на расстоянии, равном величине отверстия в горизонтальном направлении, то центральные полосы вполне четко отделены друг от друга и посредине между двумя изображениями имеется абсолютно черная линия.

Так как пределы ширины центральной полосы в изображении светящейся линии зависят от расхождений по фазе между вторичными волнами и так как расхождение наибольшее для волн, приходящих от краев отверстия, то возникает вопрос, насколько полезно действие центральных частей отверстия. Если мы представим себе, что отверстие сведено к двум одинаковым узким щелям вдоль его краев, то тогда компенсация, очевидно, будет полной в том случае, если проекция на наклонное направление равна $\frac{1}{2} \lambda$, а не λ , как для полного отверстия. Этим приемом ширина центральной полосы в дифракционной картине уменьшается вдвое и тем самым достигается некоторое преимущество. Но ясно, что светлые полосы вдоль обеих сторон центральной полосы теперь не уступают ей по яркости; действительно, полоса, подобная центральной, воспроизводится неопределенное число раз, пока не наступает заметного расхождения по фазе во вторичных волнах, идущих от различных частей *одной и той же* щели. При этих условиях сужение полосы достигается слишком дорогой ценой, и это устройство должно быть совершенно отвергнуто.

Однако более осторожное устранение центральных частей иногда оказывается выгодным. Теория и опыт одинаково показывают, что двойная линия, компоненты которой одинаково интенсивны, разрешается лучше, когда, например, одна шестая отверстия в горизонтальном направлении закрыта центральным экраном или когда лучи в самом центре

отверстия пропускаются, тогда как немного более удаленные от него задерживаются. Диафрагмы, занимающие каждая одну восьмую ширины отверстия, с центрами, расположенными в точках, делящих отверстие на три равные части, также хорошо подходят для этой цели.

Как уже указывалось, закон сохранения энергии требует, чтобы общее выражение для I^2 в (2) при интегрировании по всей плоскости ξ, η было равно A , где A — площадь отверстия. Общее аналитическое доказательство этого было дано Стоксом¹⁾. Выражение для I^2 может быть написано в виде

$$I^2 = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iiint \cos \frac{k}{f} \{ \xi(x' - x) + \eta(y' - y) \} dx dy dx' dy', \quad (9)$$

где интегрирования по x', y' и x, y производятся по площади отверстия; для поставленной нами сейчас цели это выражение должно быть еще раз проинтегрировано по ξ, η по всей фокальной плоскости.

При изменении порядка интегрирования так, чтобы сначала произвести интегрирование по ξ, η , удобно во избежание неопределенности ввести под знак интеграла множитель $e^{\mp \alpha \xi \mp \beta \eta}$, причем знаки \mp или $-$ выбираются так, чтобы элементы интеграла обращались в нуль в бесконечности. После выполнения указанных действий α и β должны быть положены равными нулю.

Таким образом $\iint I^2 d\xi d\eta$ равен пределу выражения:

$$\frac{1}{\lambda^2 f^2} \iiint \iiint e^{\mp \alpha \xi \mp \beta \eta} \cos \frac{k}{f} \{ \xi(x' - x) + \eta(y' - y) \} dx dy dx' dy' d\xi d\eta.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mp \alpha \xi} \cos(h\xi - H) d\xi = \frac{2a \cos H}{a^2 + h^2};$$

следовательно,

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\xi d\eta = \text{пределу } \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iiint \iiint \frac{4\alpha\beta dx dy dx' dy'}{\left\{ a^2 + \frac{k^2(x' - x)^2}{f^2} \right\} \left\{ \beta^2 \frac{k^2(y' - y)^2}{f^2} \right\}}.$$

Пусть

$$\frac{k(x' - x)}{f} = \alpha u, \quad dx' = \frac{f\alpha}{k} du.$$

Пределы для u суть окончательно $-\infty$ и $+\infty$, и мы имеем

$$\text{предел } \int \frac{2\alpha dx'}{\left\{ a^2 + \frac{k^2(x' - x)^2}{f^2} \right\}} = \frac{2f}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{2f}{k} \cdot \pi = f\lambda.$$

¹⁾ Ed. Trans., 20, стр. 317, 1853.

Подобным же образом можно произвести интегрирование по y' , и мы находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\xi d\eta = \iint dx dy = A^2). \quad (10)$$

Мы видели, что I_0^2 (интенсивность в фокусе) равна $\frac{A^2}{\lambda^2 f^2}$. Если A' есть площадь, на которой интенсивность должна быть равна I_0^2 для того, чтобы дать действительную полную интенсивность согласно соотношению

$$A' I_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\xi d\eta,$$

то A' связано с A соотношением $AA' = \lambda^2 f^2$. Так как A' есть, в некотором смысле, площадь дифракционной картины, то ее можно рассматривать как грубый критерий разрешимости; мы заключаем, что разрешение точки зависит, главным образом, от *площади* отверстия и только в гораздо меньшей степени от его формы, когда площадь остается постоянной.

§ 12. ТЕОРИЯ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

Мы рассмотрим теперь важный случай, когда форма отверстия круглая. Положив для краткости

$$\frac{k\xi}{f} = p, \quad \frac{k\eta}{f} = q, \quad (1)$$

для общего выражения (§ 11) интенсивности мы имеем

$$\lambda^2 f^2 I^2 = S^2 + C^2, \quad (2)$$

где

$$S = \iint \sin(px + qy) dx dy, \quad C = \iint \cos(px + qy) dx dy. \quad (3), (4)$$

Когда, как в применении к случаям прямоугольного или круглого отверстий, форма их симметрична относительно обеих осей x и y , то $S = 0$, а C сводится к

$$C = \iint \cos px \cos qy dx dy. \quad (5)$$

В случае круглого отверстия распределение света, конечно, симметрично относительно фокальной точки $p = 0$, $q = 0$, и C есть функция

¹⁾ Легко показать, что этот вывод не изменится, если ввести в каждой точке произвольное запаздывание q как функцию x , y . Тогда к аргументу косинуса в (9) должны быть прибавлены члены $(q' - q)$, но на окончательный результат они не влияют, так как лишь те элементы существенны, для которых в пределе $x' = x$, $y' = y$, а следовательно, $q' = q$.

от p и q только через $\sqrt{p^2 + q^2}$. Таким образом достаточно определить интенсивность вдоль оси p . Полагая $q = 0$, получаем

$$C = \iint \cos px \, dx \, dy = 2 \int_{-R}^{+R} \cos px \sqrt{R^2 - x^2} \, dx,$$

где R — радиус отверстия. Этот интеграл есть бесселева функция первого порядка, определяемая выражением

$$J_1(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi. \quad (6)$$

Следовательно, если $x = R \cos \varphi$,

$$C = \pi R^2 \frac{2J_1(pR)}{pR}, \quad (7)$$

и освещение на расстоянии r от фокальной точки равно

$$I^2 = \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2 f^2} \frac{4J_1^2\left(\frac{2\pi Rr}{f\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi Rr}{f\lambda}\right)^2}. \quad (8)$$

Ряд для $J_1(z)$ по возрастающим степеням z , которым пользовался Эйри¹⁾ в своем первоначальном исследовании дифракции от круглого объектива и который легко получить из (6), имеет вид

$$J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{z^7}{2^2 \cdot 4^3 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \quad (9)$$

Когда z велико, можно пользоваться полусходящимся рядом

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 16} \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32} \left(\frac{1}{z}\right)^4 + \dots \right\} + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{z} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 16 \cdot 24} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32 \cdot 40} \left(\frac{1}{z}\right)^5 - \dots \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Таблица значений функции $\frac{2}{z} J_1(z)$ дана Ломмелем²⁾, которому принадлежит первое систематическое применение бесселевых функций к интегралам, встречающимся в теории дифракции.

Освещение обращается в нуль в местах, соответствующих корням уравнения $J_1(z) = 0$. Если обозначить эти корни через z_1, z_2, z_3, \dots , то радиусы темных колец в дифракционной картине суть

$$\frac{f\lambda z_1}{2\pi R}, \quad \frac{f\lambda z_2}{2\pi R}, \quad \dots$$

будучи, таким образом, *обратно* пропорциональными R .

¹⁾ On the Diffraction of an Object-Glass with Circular Aperture, *Camb. Trans.*, 1834.

²⁾ Schlömilch, 15, стр. 166, 1870.

Интегрирования могут быть произведены также с помощью полярных координат, причем сначала интегрируют по φ так, чтобы получить результат для бесконечно тонкого кольцеобразного отверстия. Так, если

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

то

$$C = \iint \cos px \, dx \, dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} \cos(\rho \cos \theta) \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Но, по определению,

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z \cos \theta) \, d\theta = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (11)$$

Значение C для кольцеобразного отверстия радиуса r и ширины dr , таким образом, равно

$$dC = 2\pi J_0(\rho r) \rho \, d\rho. \quad (12)$$

Для полного круга

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{pR} J_0(z) z \, dz = \frac{2\pi}{p^2} \left\{ \frac{p^2 R^2}{2} - \frac{p^4 R^4}{2^2 \cdot 4} + \frac{p^6 R^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \dots \right\} = \\ &= \pi R^2 \cdot \frac{2J_1(pR)}{pR}, \end{aligned}$$

как и выше.

В этих выражениях надо заменить p через $\frac{k\xi}{f}$ или лучше, так как дифракционная картина симметрична, через $\frac{kr}{f}$, где r — расстояние какой-либо точки в фокальной плоскости от центра системы.

Корни функций $J_0(z)$, после первого, могут быть найдены из уравнения

$$\frac{z}{\pi} = i - 0,25 + \frac{0,050661}{4i-1} - \frac{0,053041}{(4i-1)^3} + \frac{0,262051}{(4i-1)^6}, \quad (13)$$

а корни функции $J_1(z)$ — из уравнения

$$\frac{z}{\pi} = i + 0,25 - \frac{0,151982}{4i+1} + \frac{0,015399}{(4i+1)^3} - \frac{0,245835}{(4i+1)^6}. \quad (14)$$

Эти формулы получены Стоксом¹⁾ из ряда по убывающим степеням z^2). Следующая таблица дает точные значения:

¹⁾ *Camb Trans.*, 9, 1850.

²⁾ Ряд по убывающим степеням z для $J_0(z)$, повидимому, дан впервые В. Гамильтоном (W. Hamilton) в мемуаре под заглавием „Fluctuating Functions“, *Roy. Irish. Trans.*, 1840.

i	$\frac{z}{\pi}$ для $J_0(z) = 0$	$\frac{z}{\pi}$ для $J_1(z) = 0$	i	$\frac{z}{\pi}$ для $J_0(z) = 0$	$\frac{z}{\pi}$ для $J_1(z) = 0$
1	0,7655	1,2197	6	5,7522	6,2439
2	1,7571	2,2330	7	6,7519	7,2448
3	2,7546	3,2383	8	7,7516	8,2454
4	3,7534	4,2411	9	8,7514	9,2459
5	4,7527	5,2428	10	9,7513	10,2463

В обоих случаях изображение математической точки представляет, таким образом, симметричную систему колец. Наибольшая яркость находится в центре, где

$$dC = 2\pi q \, dq; \quad C = \pi R^2.$$

До известного расстояния от центра эта яркость остается почти неизменной, а затем постепенно уменьшается до нуля, по мере того как вторичные волны расходятся по фазе. Последующие яркие области, образующие светлые кольца, имеют всегда меньшую яркость сравнительно с центральным диском.

Первое темное кольцо в дифракционной картине полного круглого отверстия появляется, когда

$$\frac{r}{f} = 1,2197 \cdot \frac{\lambda}{2R}. \quad (15)$$

Мы можем это сравнить с соответствующим результатом для прямоугольного отверстия ширины a ,

$$\frac{\xi}{f} = \frac{\lambda}{a};$$

мы видим, что вследствие преобладания действия центральных частей, компенсация в случае круга не наступает при таком наклоне, как в том случае, когда круг заменяется прямоугольным отверстием со стороной, равной диаметру круга.

С другой стороны, если мы сравним полный круг с узким кольцеобразным отверстием того же радиуса, то увидим, что в последнем случае первое темное кольцо появляется при гораздо меньшем наклоне, а именно

$$\frac{r}{f} = 0,7655 \cdot \frac{\lambda}{2R}.$$

Гершель и другие нашли, что разрешающая сила телескопа часто улучшается, если закрыть центральную часть объектива; но получаемая при этом выгода никогда не бывает велика; всякое уменьшение отверстия до размеров тонкого кольца сопровождалось бы развитием внешних светлых колец, а этого достаточно, чтобы свести на-нет всякое улучшение, обусловленное уменьшением диаметра центральной части объектива¹⁾.

¹⁾ Airy, *loc. cit.* „Таким образом при закрывании центральных частей объектива величина центрального пятна уменьшается, а яркость колец возрастает“.

Максимумы яркости и их местонахождение легко определить при помощи некоторых свойств бесселевых функций. Известно¹⁾, что

$$J'_0(z) = -J_1(z); \quad (16)$$

$$J_2(z) = \frac{1}{2} J_1(z) - J'_1(z); \quad (17)$$

$$J_0(z) + J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z). \quad (18)$$

Максимумы S имеют место, когда

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{J_1(z)}{z} \right) = \frac{J'_1(z)}{z} - \frac{J_1(z)}{z^2} = 0,$$

или, по (17), когда $J_2(z) = 0$. Если z имеет одно из определенных таким образом значений, то

$$\frac{2}{z} J_1(z) = J_0(z).$$

Прилагаемая таблица дана Ломмелем²⁾; первый столбец в ней дает корни уравнения $J_2(z) = 0$, а второй и третий столбцы — соответствующие значения указанных в них функций. Из таблицы видно, что максимальная яркость в первом кольце составляет только около $1/57$ яркости в центре.

z	$\frac{2}{z} J_1(z)$	$\frac{4}{z^2} J_1^2(z)$
0,000000	+1,000000	1,000000
5,135630	-0,132279	0,017498
8,417236	+0,064482	0,004158
11,619857	-0,040008	0,001601
14,795938	+0,027919	0,000779
17,959820	-0,020905	0,000437

Исследуем теперь полное освещение, распределенное по площади круга радиуса r . Имеем

$$I^2 = \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2 f^2} \cdot \frac{4 J_1^2(z)}{z^2}, \quad (19)$$

где

$$z = \frac{2\pi Rr}{\lambda f}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$2\pi \int I^2 r dr = \frac{\lambda^2 f^2}{2\pi R^2} \int I^2 z dz = \pi R^2 \cdot 2 \int \frac{1}{2} J_1^2(z) dz.$$

Но по (17), (18),

$$\frac{1}{z} J_1(z) = J_0(z) - J'_1(z),$$

¹⁾ Todhunter's Laplace's Functions, гл. XXXI.

²⁾ *Loc. cit.*

По вопросу о функциях Струве и их связи с бесселевыми функциями см. книгу Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922, стр. 328 и след.

Примеч. ред.

так что

$$\frac{1}{z} J_1^2(z) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} J_0^2(z) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} J_1^2(z)$$

и

$$2 \int_0^z \frac{1}{z} J_1^2(z) dz = 1 - J_0^2(z) - J_1^2(z). \quad (21)$$

Если r или z бесконечны, то $J_0(z)$, $J_1(z)$ обращаются в нуль, и полное освещение равно πR^2 , в согласии с общим принципом. Во всяком случае доля освещения вне круга радиуса r от полного освещения дается выражением

$$J_0^2(z) + J_1^2(z).$$

Для темных колец $J_1(z) = 0$, так что часть освещения вне какого-либо темного кольца равна просто $J_0^2(z)$. Таким образом для первого, второго, третьего и четвертого темных колец мы получаем соответственно 0,161; 0,090; 0,062; 0,047; это показывает, что больше $\frac{9}{10}$ всего света сконцентрировано внутри площади второго темного кольца ¹⁾.

Когда z велико, ряд по убывающим степеням z (10) дает

$$\frac{2J_1(z)}{z} = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (22)$$

так что места максимумов и минимумов находятся на равных расстояниях друг от друга.

Средняя яркость пропорциональна z^{-3} (или r^{-3}), и интеграл, получаемый умножением ее на $z dz$ и интегрированием между 0 и ∞ , сходится.

Поучительно, быть может, противопоставить это случаю бесконечно тонкого кольцеобразного отверстия, в котором яркость пропорциональна $J_0^2(z)$. Когда z велико, то

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right).$$

Средняя яркость пропорциональна z^{-1} , и интеграл $\int_0^{\infty} J_0^2(z) z dz$ не сходится.

Качество трубы, конечно, тесно связано с величиной диска, которым она отображает математическую точку. Разрешающая сила телескопов с различными объективами по отношению к двойным звездам была исследована Дауэсом и другими (Енс. Врт., том XVII, стр. 807; том I, стр. 411), и результаты, к которым они пришли, довольно хорошо согласуются с теорией [21].

Если мы проинтегрируем выражение (8) для I^2 по η , то получим результат, приложимый к линейному источнику света, различные части которого предполагаются действующими независимо друг от друга.

¹⁾ *Phil. Mag.*, март 1881; том. I, стр. 73.

Из (19), (20) имеем

$$d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\eta = \frac{2\pi^2 R^4}{\lambda^2 f^2} d\xi \int_0^{\infty} \frac{4}{z^2} J_1^2(z) dz = 2R^2 d\xi \int \frac{J_1^2(z) dz}{z \cdot \eta},$$

так как $\eta^2 = r^2 - \xi^2$.

Если положим

$$\zeta = \frac{2\pi R\xi}{\lambda f}, \quad (23)$$

то получим

$$d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\eta = 2R^2 d\xi \cdot \int_{\zeta}^{\infty} \frac{J_1^2(z) dz}{z \sqrt{z^2 - \zeta^2}}. \quad (24)$$

Этот интеграл был исследован Струве (H. Struve)¹⁾, который, при помощи различных свойств бесселевых функций, показал, что

$$\int_{\zeta}^{\infty} \frac{J_1^2(z) dz}{z \sqrt{z^2 - \zeta^2}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(2\zeta \sin \beta) \cos^2 \beta d\beta; \quad (25)$$

правая часть этого равенства легко разлагается в ряд по степеням ζ . При помощи (24) можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\eta = \pi R^2.$$

Вопреки тому, что естественно было бы ожидать, вопрос легко поддается разбору, если не пользоваться результатами интегрирования по x и y , а прежде всего проинтегрировать по η , как это делает Стокс (§ 11). Таким образом

$$\lambda^2 f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 d\eta =$$

$$= \text{пределу} \iiint \iiint e^{\mp \theta \eta} \cos \frac{k}{f} \{ \xi (x' - x) + \eta (y' - y) \} dx dy dx' dy' d\eta \quad (26)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mp \theta \eta} \cos \frac{k}{f} \{ \xi (x' - x) + \eta (y' - y) \} d\eta = \frac{2\beta \cos \frac{k\xi}{f} (x' - x)}{\beta^2 + \frac{k^2 (y' - y)^2}{f^2}}. \quad (27)$$

¹⁾ *Wied. Ann.*, 17, стр. 1008, 1882.

Нам нужно теперь рассмотреть интеграл

$$\iint \frac{2\beta \, dy \, dy'}{\beta^2 + \frac{k^2 (y' - y)^2}{f^2}}. \quad (28)$$

При интегрировании по y' каждый элемент интеграла обращается в нуль в пределе ($\beta = 0$), за исключением того случая, когда $y' = y$. Если область интегрирования по y' содержит значение y , то

$$\text{предел } \int \frac{2\beta \, dy'}{\beta^2 + \frac{k^2 (y' - y)^2}{f^2}} = f\lambda,$$

в противном случае он обращается в нуль.

Предел выражения (28) можно, таким образом, обозначить через $\lambda f Y$, где Y — *общая часть* областей интегрирования по y' и y , соответствующая любым значениям x' и x . Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta &= \frac{1}{\lambda f} \iint Y \cos \frac{k\xi}{f} (x' - x) \, dx \, dx' = \\ &= \frac{1}{\lambda f} \iint Y \cos \frac{k\xi x}{f} \cos \frac{k\xi x'}{f} \, dx \, dx', \end{aligned} \quad (29)$$

если, как в данном случае, отверстие симметрично относительно оси y

В приложении к кругу мы можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta = \frac{4}{\lambda f} \int_0^R \int_0^R Y \cos \frac{k\xi x}{f} \cos \frac{k\xi x'}{f} \, dx \, dx',$$

где Y есть меньшая из двух величин $2\sqrt{R^2 - x'^2}$ и $2\sqrt{R^2 - x^2}$, т. е. соответствует *большой* из двух абсцисс x' , x . Если положим $Y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ и ограничим область интегрирования теми значениями x' , которые меньше x , то мы должны получить точно половину искомого результата. Таким образом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta &= \frac{16}{\lambda f} \int_0^R \int_0^x \sqrt{R^2 - x^2} \cos \frac{k\xi x}{f} \cos \frac{k\xi x'}{f} \, dx \, dx' = \\ &= \frac{4}{\pi\xi} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sin \frac{2k\xi x}{f} \, dx = \frac{4R^2}{\pi\xi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \beta \sin \frac{2k\xi R \sin \beta}{f} \, d\beta. \end{aligned}$$

Отсюда, положив, как и выше, $\zeta = \frac{2\pi R\xi}{\lambda f}$, получаем

$$d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta = \frac{4R^2}{\pi} \frac{d\xi}{\xi} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \beta \sin (2\xi \sin \beta) \, d\beta, \quad (30)$$

в котором мы можем заменить $\frac{d\xi}{\xi}$ через $\frac{d\zeta}{\zeta}$ в согласии с результатом, полученным Струве.

Интеграл в (30) можно представить в другом виде. Имеем

$$\begin{aligned} & \int \zeta \sin(2\zeta \sin \beta) \cos^2 \beta \, d\beta = \\ & = -\frac{1}{2} \cos \beta \cos(2\zeta \sin \beta) - \frac{1}{2} \int \cos(2\zeta \sin \beta) \sin \beta \, d\beta \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \zeta \sin(2\zeta \sin \beta) \cos^2 \beta \, d\beta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{1 - \cos(2\zeta \sin \beta)\} \sin \beta \, d\beta = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2(\zeta \sin \beta) \sin \beta \, d\beta. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом интеграл может быть выражен через функцию K_1 ¹⁾, и мы имеем

$$d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta = \frac{1}{2} R^2 \zeta^{-3} d\zeta K_1(2\zeta).$$

Ряд по возрастающим степеням z для $K_1(z)$ есть

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{z^3}{1^2 \cdot 3} - \frac{z^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{z^7}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right\}.$$

Этот ряд всегда сходится. Полусходящийся ряд по убывающим степеням z есть

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \frac{2}{\pi} \{ z + z^{-1} - 3z^{-3} + 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5z^{-5} - 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot z^{-7} + \dots \} - \\ &- \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \left\{ 1 - \frac{(1^2-4)(3^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot (8z)^2} + \dots \right\} - \\ &- \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \left\{ \frac{1^2-4}{1 \cdot 8z} - \frac{(1^2-4)(3^2-4)(5^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (8z)^3} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где ряды в скобках те же самые, что и ряды, входящие в выражение для функции $J_1(z)$.

Когда ζ (или ξ) очень велико,

$$d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, d\eta = \frac{2R^2}{\pi} \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

¹⁾ Theory of Sound, § 302.

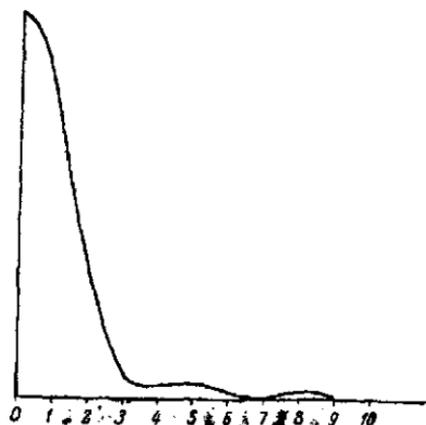
так что интенсивность изображения светящейся линии в конечном счете обратно пропорциональна квадрату расстояния от центральной оси, или геометрического изображения.

	ζ	Интенсивность
На самой оси	0,00	1
Первый минимум	3,55	$\frac{1}{34}$
Первый максимум	4,65	$\frac{1}{24}$
Второй минимум	6,80	$\frac{1}{115}$
Второй максимум	8,00	$\frac{1}{80}$
Третий минимум	9,60	$\frac{1}{419}$
Третий максимум	11,00	$\frac{1}{208}$
Четвертый минимум	13,20	$\frac{1}{10\,000}$

Как видно из строения формулы для интенсивности, последняя остается конечной для всех значений ζ ; однако она подвержена колебаниям и представляет максимумы и минимумы, вычисленные Андрэ ¹⁾, пользовавшимся, повидимому, методом квад

Результаты вычислений представлены Андрэ также в форме кривой, изображенной на фиг. 7.

Мы видим, что распределение яркости не отличается значительно от распределения, обусловленного прямоугольным отверстием, ширина которого (в направлении, перпендикулярном к светящейся линии) равна диаметру круглого отверстия. Получительно исследовать изображение двойной линии, компоненты которой находятся на расстоянии друг от друга, соответствующем $\zeta = \pi$, и сравнить результат с уже найденным для прямоугольного отверстия (§ 11). Мы можем считать яркость на расстоянии ζ пропорционально



Фиг. 7.

$$L(\zeta) = \frac{1}{1^2 \cdot 8} - \frac{2^2 \cdot \zeta^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{2^4 \cdot \zeta^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \quad (35)$$

¹⁾ *Ann. de l'École Normale*, 5, стр. 310, 1876.

В сложном изображении освещенность в геометрическом фокусе одной из светящихся линий представляется выражением

$$L(0) + L(\pi),$$

а освещенность посредине между геометрическими изображениями этих линий равна

$$2L\left(\frac{1}{2}\pi\right).$$

Вычисляя при помощи ряда, находим

$$L(\pi) = 0,0164,$$

$$L\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0,1671,$$

$$L(0) = 0,3333,$$

так что

$$L(0) + L(\pi) = 0,3497, \quad 2L\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0,3342$$

и

$$\frac{2L\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{L(0) + L(\pi)} = 0,955.$$

Соответствующее число для прямоугольного отверстия было 0,811, так что, как можно было ожидать, разрешающая способность круглого отверстия заметно меньше, чем прямоугольного равной ширины. Следовательно, труба разделит двойную линию только в том случае, если угловое расстояние между ее компонентами будет определенно больше угла, стягиваемого длиной волны света на расстоянии, равном диаметру объектива. Опыт показывает, что разделение начинается, когда угловое расстояние примерно на одну десятую больше только что упомянутого.

Если проинтегрируем (30) по ξ между пределами $-\infty$ и $+\infty$, то, как уже было замечено, получим πR^2 . Это представляет собой полное освещение фокальной плоскости от светящейся точки, изображение которой находится в O , или, обратно, освещенность — в O (такое же, как и в любой другой точке), создаваемое неограниченно простирающейся светящейся плоскостью. Если мы проинтегрируем от ξ (считая его положительным) до ∞ , то получим освещенность в точке O , производимую равномерно светящейся площадью, простирающейся по этой области, иначе говоря, освещенность в точке, расположенной на расстоянии ξ наружу от края геометрического изображения большой равномерно светящейся площади. Если примем, что точка находится внутри геометрического изображения на расстоянии ζ от его края, то мы должны интегрировать от $-\infty$ до ξ . Таким образом, если мы выберем шкалу интенсивностей так, чтобы полная интенсивность была равна единице, то интенсивность на расстоянии, соответствующем $+\zeta$ (вне геометрического изображе-

ния), можно представить через $\mathcal{E}(+\zeta)$, а интенсивность на расстоянии $-\zeta$ через $\mathcal{E}(-\zeta)$, где

$$\mathcal{E}(+\zeta) + \mathcal{E}(-\zeta) = 1$$

и

$$\mathcal{E}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-3} d\zeta K_1(2\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\zeta} \zeta^{-3} d\zeta K_1(2\zeta). \quad (36)$$

Этот результат получил Струве, давший следующие ряды для $\mathcal{E}(\zeta)$.

Ряд по возрастающим степеням ζ , получаемый сразу путем интегрирования из (33), есть

$$\mathcal{E}(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{2^{2n} \zeta^{2n-1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n+1)^2}. \quad (37)$$

Когда ζ велико, то мы имеем приближенно из ряда по убывающим степеням:

$$\mathcal{E}(\zeta) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{12\zeta^3} \right) - \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{\cos\left(2\zeta + \frac{1}{4}\pi\right)}{\zeta^{5/2}}.$$

Таким образом „на больших расстояниях от края геометрического изображения интенсивность обратно пропорциональна расстоянию и радиусу объектива“.

Следующая таблица, представляющая извлечение из таблицы, данной Струве, послужит для вычисления расширения изображения, обусловленного дифракцией, в любом могущем представиться случае:

$$\zeta = \frac{2\pi R\xi}{\lambda f}, \quad \mathcal{E}(-\zeta) = 1 - \mathcal{E}(+\zeta).$$

ζ	$\mathcal{E}(\zeta)$	ζ	$\mathcal{E}(\zeta)$	ζ	$\mathcal{E}(\zeta)$
0,0	0,5000	2,5	0,0765	7,0	0,0293
0,5	0,3678	3,0	0,0630	9,0	0,0222
1,0	0,2521	4,0	0,0528	11,0	0,0186
1,5	0,1642	5,0	0,0410	15,0	0,0135
2,0	0,1073	6,0	0,0328		

Читатель, может быть, заметил, что в нашей трактовке выражения (27) имеется некоторый недостаток строгости, когда мы интегрируем его по всей фокальной плоскости ξ, η , тогда как при выводе формулы ξ и η предполагаются малыми. Непоследовательность становится очень явной, когда мы замечаем, что согласно формулам нет предела относительной разности хода вторичных волн, идущих от разных частей отверстия, тогда как в действительности эта разность хода ни в коем случае не может превышать самой длинной линии, какую можно провести внутри отверстия. Этот пункт следует рассмотреть несколько

ближе, хотя пределы этой статьи не позволяют дать подробный разбор вопроса.

Формула становится строгой, если мы будем ее рассматривать как представляющую освещенность на поверхности сферы очень большого радиуса f в таком направлении, что

$$\xi = f \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta = f \sin \theta \sin \varphi;$$

ее можно тогда написать в виде

$$I^2 = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iiint \cos k \{ (x' - x) \sin \theta \cos \varphi + (y' - y) \sin \theta \sin \varphi \} dx dy dx' dy'.$$

Полная интенсивность на бесконечной полусфере дается выражением

$$E = f^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} I^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (38)$$

Согласно принятому раньше плану, мы откладываем интегрирование по x, y, x', y' и сначала интегрируем по θ и φ . Таким образом для одной пары элементов площади dx, dy, dx', dy' мы должны рассмотреть интеграл

$$\iint \cos k \{ (x' - x) \sin \theta \cos \varphi + (y' - y) \sin \theta \sin \varphi \} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

или, если положим

$$x' - x = r \cos \alpha, \quad y' - y = r \sin \alpha,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos (kr \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Можно показать (например, разложением в ряд по степеням kr), что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos (kr \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \frac{\sin kr}{kr}; \quad (39)$$

следовательно,

$$E = \frac{2\pi}{\lambda^2} \iiint \frac{\sin Rr}{kr} dx dy dx' dy', \quad (40)$$

где r — расстояние между двумя элементами площади $dx dy$ и $dx' dy'$.

В случае круглого отверстия радиуса R мы имеем ¹⁾

$$\iiint \frac{\sin kr}{kr} dx dy dx' dy' = \frac{2\pi R^2}{k^2} \left\{ 1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right\},$$

¹⁾ Theory of Sound, § 302,

и следовательно,

$$E = \pi R^2 \left\{ 1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right\}. \quad (41)$$

Когда $kR = \infty$,

$$E = \pi R^2, \text{ как и выше.}$$

Оказывается, следовательно, что, согласно принятому закону вторичной волны, полное освещение пропорционально площади отверстия лишь при том ограничении, что линейные размеры отверстия весьма велики сравнительно с длиной волны.

Уместно, быть может, сделать еще одно замечание относительно равенства (39). Мы знаем, что выражение

$$\psi = \cos k \{ \sin \theta \cos \varphi \cdot x + \sin \theta \sin \varphi \cdot y + \cos \theta \cdot z \} \quad (42)$$

удовлетворяет расширенному уравнению Лапласа $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$, так как имеет вид $\cos kx'$, где x' проведено в наклонном направлении; отсюда следует, что и $\iint \psi \sin \theta d\theta d\varphi$ удовлетворяет тому же уравнению. Но этот интеграл, если проинтегрировать по полусфере от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{1}{2}\pi$, должен стать функцией только r или $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Отсюда, полагая $x = r$, $y = 0$, $z = 0$, получаем

$$\iint \psi \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kr \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Но единственная функция r , удовлетворяющая уравнению Лапласа и непрерывная в начале координат, есть $A \frac{\sin(kr)}{kr}$, а что $A = 2\pi$, можно доказать сразу, полагая $r = 0$. Правильность формулы можно доказать также независимо от дифференциального уравнения, приравняв значения

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \psi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

когда $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ и когда $x = 0$, $y = 0$, $z = r$.

Таким образом

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kr \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kr \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \frac{\sin kr}{kr}. \end{aligned}$$

Формула может быть написана также в виде

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_0(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin kr}{kr}. \quad (43)$$

Результаты изложенной выше теории круглых отверстий допускают интересное приложение к явлениям корон, подобных тем, которые часто наблюдаются вокруг солнца и луны. Они обусловлены присутствием маленьких сферических капель воды, играющих роль дифрагирующих преград. Для образования хорошо выраженной короны существенно, чтобы капли были исключительно или преимущественно одной величины.

Если источник света принять бесконечно малым и наблюдать его в фокусе либо простым глазом, либо при помощи зрительной трубы, то весь свет в отсутствии преград был бы сконцентрирован в непосредственной близости к фокусу. В других частях поля, согласно принципу Бабинэ, действие будет тем же, независимо от того, является ли воображаемый экран перед объективом в большей своей части прозрачным, но с некоторым числом непрозрачных круглых дисков на нем, или же он почти весь непрозрачен, но снабжен соответствующими отверстиями. Рассмотрим теперь свет, дифрагированный в направлении, гораздо более наклонном, чем любое из направлений, с которыми нам пришлось бы иметь дело, если бы все отверстие было открыто, и исследуем сначала действие одного небольшого отверстия. Интенсивность света в указанном направлении определяется величиной небольшого отверстия, согласно уже установленным законам, а его фаза зависит от положения отверстия. Если мы возьмем такое направление, что свет (данной длины волны) от одного отверстия исчезает, то исчезновение будет иметь место и тогда, когда мы примем в рассмотрение всю совокупность отверстий. Таким образом, что бы еще ни случилось, должна образоваться система темных колец, такая же, как от одного небольшого отверстия. Вопрос о том, как должны складываться действия отдельных отверстий в иных направлениях, чем эти, является более сложным. Если сделать крайнее предположение, что источник бесконечно мал, а свет абсолютно однороден, то нельзя не прийти к заключению, что интенсивность света в определенном направлении произвольна, т. е. зависит от случайного распределения отверстий. Если же, как это бывает на практике, свет неоднороден, источник имеет конечную площадь, преграды находятся в движении и различные направления не могут быть вполне точно разделены, то мы имеем дело только со средней яркостью, которую можно найти, варьируя произвольные фазовые соотношения; эта средняя яркость получается простым умножением яркости, обусловленной одним отверстием, на число отверстий (n)¹). Дифракционная картина поэтому та же, что и от одного отверстия, но только в n раз более яркая.

¹) См. § 4.

В своих опытах, посвященных этому вопросу, Фраунгофер пользовался стеклянными пластинками, посыпанными ликоподием или снабженными маленькими металлическими дисками одинаковой величины; он нашел, что диаметры колец были прямо пропорциональны длинам волн и обратно пропорциональны диаметру дисков.

В другом отношении опыты Фраунгофера кажутся на первый взгляд несогласными с теорией; так, его измерения диаметров красных колец, наблюдавшихся при пользовании белым светом, соответствуют закону, приложимому к темным кольцам, а не отличному от него закону, приложимому к максимумам яркости. Верде указал, однако, на то, что наблюдение в этой форме существенно отлично от того, в котором употребляется однородный красный свет, и что положение красных колец должно соответствовать *отсутствию* сине-зеленого света, скорее чем величайшему изобилию красного света. Собственные наблюдения Верде, произведенные с большой тщательностью, полностью подтверждают этот взгляд и находятся в полном согласии с теорией.

Из данных измерения корон можно сделать заключение о величине частиц, вызывающих их появление; метод представляет значительный интерес в случае естественных корон; общее правило здесь таково, что чем больше корона, тем мельче сферические капельки воды. Юнг применил этот метод не только к определению диаметров частиц облаков (например, $\frac{1}{40}$ мм), но и для оценки диаметров нитей волокнистых материалов, для которых теория аналогична. Его прибор получил название *эриометра*¹⁾.

§ 13. ВЛИЯНИЕ АБЕРРАЦИИ. ОПТИЧЕСКАЯ СИЛА ПРИБОРОВ

Наши исследования и вычисления разрешающей способности основывались до сих пор на том предположении, что не существует оптических несовершенств, зависящих либо от правильной абберрации, либо от дефектов в материале или в его обработке. На практике же всегда имеется некоторая абберрация или неправильность в фазе, которую мы можем также рассматривать как отклонение действительной волновой поверхности от надлежащего ее положения. Вообще можно сказать, что абберрация не имеет значения, если она нигде (или, по крайней мере, за исключением относительно небольшой площади) не превышает малой доли длины волны (λ). Так, при вычислении интенсивности в фокусе, где, в отсутствии абберрации, все вторичные волны имели бы в точности одну и ту же фазу, мы видим, что абберрация, нигде не превышающая $\frac{1}{4} \lambda$, не может оказывать значительного действия.

Единственным случаем, когда было вычислено²⁾,³⁾ влияние небольшой абберрации на все изображение, является случай прямоугольного

¹⁾ По вопросу об „эриометре“ Юнга см. книгу Вуда, Физическая оптика, ОНТИ, 1936, стр. 290. Chromatics, в томе III дополнения к Enc. Brit., 1817.

²⁾ Investigations in Optics, *Phil. Mag.*, ноябрь 1879 [том I, стр. 428].

Примеч. ред.

³⁾ По вопросу о рассчитанных в настоящее время случаях абберрации см. примечания на стр. 18.

Примеч. ред.

отверстия, через которое проходит цилиндрическая волна с абберацией, равной cx^3 . Абберация здесь несимметрична, — волна в одной половине отверстия опережает свое нормальное положение и отстает от него в другой половине. Нет надобности рассматривать члены, содержащие x или x^2 . Первый соответствовал бы повороту всего пучка, а второй означал бы несовершенное фокусирование центральных частей. Действие абберации можно рассматривать двумя способами. Мы можем предположить, что отверстие (a) постоянно, и исследовать влияние возрастающей абберации; или же мы можем принять заданное значение c (т. е. заданную волновую поверхность) и исследовать действие изменяющегося отверстия. Результаты во втором случае показывают, что увеличение отверстия до величины, соответствующей наибольшей абберации в полпериода, не оказывает вредного влияния на центральную полосу (§ 11), но сопровождается ненормальным увеличением интенсивности одной из соседних боковых полос; отсюда практический вывод тот, что наилучшие результаты получатся от отверстия, дающего крайнюю абберацию от четверти до половины периода, и что при увеличении отверстия абберация является не столько непосредственной причиной искажения, сколько препятствием к достижению того улучшения резкости, которым должно было бы сопровождаться увеличение отверстия.

С другой стороны, если мы будем считать отверстие заданным, то мы находим, что абберация становится явно вредной, когда она составляет около четверти периода, т. е. когда волновая поверхность у каждого из концов отклоняется на четверть длины волны от правильной плоскости.

Для самого фокуса вычисления гораздо проще. Рассмотрим случай круглого объектива с симметричной абберацией, пропорциональной hq^4 . Колебание представится выражением

$$2 \int_0^1 \cos(nt - hq^4) e dq,$$

в котором радиус отверстия положен равным единице. Интенсивность дается, следовательно, выражением

$$I_0^2 = \left[2 \int_0^1 \cos(hq^4) e dq \right]^2 + \left[2 \int_0^1 \sin(hq^4) e dq \right]^2, \quad (1)$$

причем шкала интенсивностей такова, что в отсутствии абберации ($h=0$) интенсивность равна единице.

Интеграцией по частям можно показать, что

$$2 \int_0^1 e^{ihq^4} e dq = e^{ih} \left\{ 1 - \frac{4ih}{8} + \frac{(4ih)^2}{6 \cdot 10} - \frac{(4ih)^3}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right\},$$

так что

$$2 \int_0^1 \cos(h\rho^4) \rho d\rho = \cos h \left\{ 1 - \frac{(4h)^2}{6 \cdot 10} + \frac{(4h)^4}{6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18} - \dots \right\} + \sin h \left\{ \frac{4h}{6} - \frac{(4h)^3}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right\}; \quad (2)$$

$$2 \int_0^1 \sin(h\rho^4) \rho d\rho = \sin h \left\{ 1 - \frac{(4h)^2}{6 \cdot 10} + \frac{(4h)^4}{6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18} - \dots \right\} - \cos h \left\{ \frac{4h}{6} - \frac{(4h)^3}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right\}. \quad (3)$$

Отсюда, при $h = \frac{1}{4} \pi$,

$$2 \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{4} \pi \rho^4\right) \rho d\rho = \frac{1,32945}{\sqrt{2}},$$

$$2 \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{4} \pi \rho^4\right) \rho d\rho = \frac{0,35424}{\sqrt{2}},$$

$$I_0^* = 0,9464.$$

Подобным же образом, при $h = \frac{1}{2} \pi$,

$$I_0^* = 0,8003$$

и, при $h = \pi$,

$$I_0^* = 0,3947.$$

Эти числа выражают влияние aberrации на интенсивность в центральной точке, в предположении, что фокусировка производилась по небольшому отверстию, для которого величиной h можно пренебречь. Если бы изменение фокусировки было допустимо, то числа были бы заметно больше. Общий вывод тот, что aberrация между центром и краями отверстия в четверть периода имеет лишь небольшое влияние на интенсивность в центре изображения.

В качестве приложения этого результата исследуем, какой величины колебания температуры в трубе телескопа могут оказаться достаточными для ухудшения резкости. Согласно Био и Араго, показатель преломления μ для воздуха при t° градусах Цельсия и атмосферном давлении дается формулой

$$\mu - 1 = \frac{0,00029}{1 + 0,0037 t}.$$

Если примем 0°C за нормальную температуру, то

$$\delta\mu = -1,1 t \cdot 10^{-6}.$$

Тогда, предполагая, что неравномерность температуры t простирается на длину l и вызывает опережение на четверть длины волны, мы имеем

$$\frac{1}{4} \lambda = 1,1 lt \cdot 10^{-6};$$

или, принимая $\lambda = 5,3 \cdot 10^{-5}$,

$$lt = 12,$$

где за единицу длины взят сантиметр.

Мы можем заключить, что в случае трубы длиной в 12 см слой воздуха, нагретый на 1°C , находящийся в верхней части трубы и занимающий небольшую долю всего объема, уже произвел бы заметное действие. Если бы изменение температуры распространялось равномерно от одной стороны к другой, результатом этого было бы поперечное смещение изображения без потери в резкости, но вообще наблюдались бы оба эффекта. В более длинных трубах подобное возмущение было бы вызвано пропорционально меньшей разностью температур.

Рассмотрим теперь приложение принципа к образованию изображений, не сопровождаемому отражением или преломлением¹⁾. Действие линзы при образовании изображения состоит в том, что она, вследствие своей переменной толщины, компенсирует разности фаз, которые в отсутствии ее имели бы место между вторичными волнами, приходящими в фокус из разных частей отверстия (Optics. Eps. Brit., том XVII, стр. 802; том II, стр. 398). Если считать диаметр линзы заданным $2R$ и ее фокусное расстояние f постепенно возрастающим, то первоначальные разности фаз в изображении бесконечно удаленной светящейся точки будут беспредельно уменьшаться. Когда f достигнет некоторого значения, скажем, f_1 , то наибольшая разность фаз, подлежащая компенсации, упадет до $\frac{1}{4} \lambda$. Но, как мы видели, такая разность фаз не вызывает заметного ухудшения резкости, так что, начиная с этого пункта, линза становится бесполезной, ибо она лишь улучшает изображение, которое и так уже настолько совершенно, насколько это позволяет данное отверстие. В процессе увеличения фокусного расстояния, разрешающая способность инструмента, зависящая только от отверстия, остается неизменной; и мы приходим, таким образом, к тому довольно неожиданному заключению, что можно было бы построить телескоп с разрешающей способностью любой величины без объектива, если бы только было возможно беспредельно увеличивать фокусное расстояние. Однако это последнее условие, как мы увидим, лишает этот вывод почти всякого практического значения.

Чтобы получить представление о порядке величин, о которых идет речь, возьмем случай отверстия в $\frac{1}{5}$ дюйма, что приблизительно равно размеру зрачка глаза. Расстояние f_1 , которое действительное

¹⁾ Phil. Mag., март 1881; том I, стр. 513.

фокусное расстояние должно превышать, определяется из соотношения

$$\sqrt{f_1^2 + R^2} - f_1 = \frac{1}{4} \lambda,$$

так что

$$f_1 = \frac{2R^2}{\lambda}. \quad (4)$$

Таким образом, если $\lambda = \frac{1}{40000}$, $R = \frac{1}{10}$, то

$$f_1 = 800 \text{ дюймов (дюйм} = 2,54 \text{ см)}.$$

Изображение солнца на экране, помещенном на расстоянии, превышающем 66 футов, от отверстия в $\frac{1}{5}$ дюйма диаметра, является, таким образом, по крайней мере столь же отчетливым, как и непосредственно видимое изображение.

Так как минимальное фокусное расстояние растет пропорционально квадрату диаметра отверстия, то для того чтобы получить разрешающую способность современного телескопа, потребовалось бы совершенно неосуществимое расстояние. Даже в случае отверстия в 4 дюйма расстояние f_1 должно было бы равняться 5 милям.

Аналогичное рассуждение можно применить для нахождения тех условий, при которых ахроматическая линза становится заметно лучше простой линзы. Вопрос сводится к тому, будет ли, при правильной установке на фокус лучей средней части спектра, ошибка в фазе для самых крайних лучей (которые необходимо рассматривать) достигать четверти длины волны. Если нет, то применение ахроматической линзы выгоды не даст. Вычисление показывает, что если диаметр отверстия равен $\frac{1}{5}$ дюйма, ахроматическая линза не имеет заметного преимущества, если фокусное расстояние больше примерно 11 дюймов. Если примем фокусное расстояние равным 66 футам, то простая линза является практически совершенной вплоть до отверстия в 1,7 дюйма [22].

Некоторая оценка допустимой *абerrации* в сферической линзе уже была приведена в статье „Оптика“ Епс. Brit., том XVII, стр. 807 [том II, стр. 412]. Подобным же образом можно оценить наименьшее видимое смещение окуляра трубы, сфокусированной на отдаленном объекте, — вопрос, представляющий интерес в связи с дальномерами. Оказывается ¹⁾, что смещение δf от истинного фокуса не ухудшит заметно резкости при условии, что

$$\delta f < \frac{f^2 \lambda}{R^2}, \quad (5)$$

где $2R$ — диаметр отверстия. Требуемая линейная точность является, таким образом, функцией *отношения* диаметра отверстия к фокусному расстоянию. Формула хорошо согласуется с опытом.

Указанный принцип дает немедленное решение вопроса о наибольшей оптической эффективности в методе „зеркального отсчета“, часто

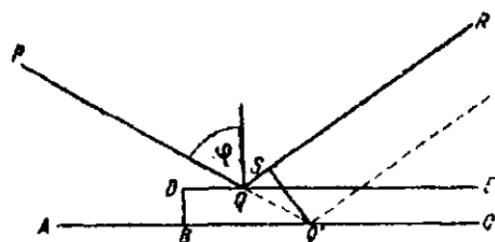
¹⁾ Phil. Mag., 20, стр. 354, 1885 [том II, стр. 430].

употребляемом при различных физических наблюдениях. Вращение, при котором один край зеркала перемещается вперед на $\frac{1}{4} \lambda$ (тогда как другой край отстает на такую же величину), вводит расхождение по фазе в целый период, тогда как до вращения имело место полное совпадение фаз. Вращение такой величины должно быть поэтому легко наблюдаемо, однако пределы разрешающей способности недалеки; этот вывод имеет силу независимо от фокусного расстояния зеркала и от применения зрительной трубы, при условии, конечно, что отраженное изображение наблюдается в фокусе и что используется вся ширина зеркала.

Интересно сравнить этот метод с методом отсчета при помощи материального указателя, соединенного с частями, вращение которых наблюдается, и рассматриваемого в микроскоп. Предельная эффективность микроскопа достигается, когда угловая апертура составляет 180° („Микроскоп“, Епс. Brit., том XVI, стр. 267; „Оптика“, Епс. Brit., том XVII, стр. 807 [том II, стр. 412]); ясно, что поперечное смещение наблюдаемой точки на $\frac{1}{2} \lambda$ вызывает (на месте первоначального изображения) расхождение по фазе на целый период, причем один из крайних лучей ускоряется, а другой задерживается на половину этой величины. Отсюда мы можем заключить, что пределы эффективности в обоих методах

одни и те же, когда длина указателя равна ширине зеркала.

Практически важным является вопрос о величине ошибки, допустимой в оптических поверхностях. В случае зеркала, отражающего при почти перпендикулярном падении, не должно быть отклонения (на сколько-



Фиг. 8.

нибудь заметной площади), превышающего $\frac{1}{8} \lambda$. Для стекла $\mu - 1 = \frac{1}{2}$ приблизительно; отсюда следует, что допустимая ошибка в преломляющей поверхности из этого материала в четыре раза больше.

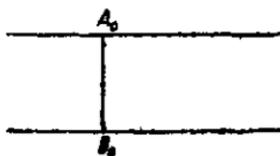
В случае наклонного отражения под углом φ ошибка в ходе, обусловленная возвышением BD (фиг. 8), равна

$$\begin{aligned} QQ' - QS &= BD \sec \varphi (1 - \cos SQQ') = \\ &= BD \sec \varphi (1 + \cos 2\varphi) = 2BD \cos \varphi, \end{aligned}$$

откуда следует, что ошибка заданной величины в форме поверхности при наклонном отражении менее важна, чем при перпендикулярном. Однако следует иметь в виду, что ошибки могут быть иногда компенсированы путем изменения установки. Если поверхность, которая должна была бы быть плоской, имеет небольшую общую кривизну, то можно поправить дело изменением фокусировки; эта поправка тем менее эффективна, чем более наклонно отражение.

Формула, выражающая оптическую силу призмных спектроскопов, приведена с примерами в статье „Оптика“ Епс. Brit., том XVII, стр. 807 [том II, стр. 412] и может быть легко исследована с точки зрения принципов волновой теории.

Пусть A_0B_0 (фиг. 9) будет плоской волновой поверхностью света до падения его на призмы, AB — соответствующей волновой поверхностью для некоторой части спектра после того,



Фиг. 9.

как свет прошел через призмы или через окуляр зрительной трубы. Путь луча от волновой поверхности A_0B_0 к A или B определяется тем условием, что оптический путь $\int \mu ds$ есть минимум („Оптика“, Епс. Brit., том XVII, стр. 798), и так как AB по предположению есть волновая поверхность, то этот оптический путь одинаков для обеих точек. Таким образом

$$\int \mu ds \text{ (для } A) = \int \mu ds \text{ (для } B). \quad (6)$$

Рассмотрим теперь поведение света, принадлежащего соседней части спектра. Путь луча от волновой поверхности A_0B_0 до точки A другой; но в силу свойства минимальности при вычислении оптического пути этим изменением можно пренебречь, так как оно влияет на результат лишь во втором порядке величин изменений преломляемости. Соответственно этому оптический путь от A_0B_0 до A представляется выражением $\int (\mu + \delta\mu) ds$, причем интегрирование производится вдоль первоначального пути $A_0 \dots A$; аналогично, оптическое расстояние между A_0B_0 и B выражается через $\int (\mu + \delta\mu) ds$, причем интегрирование производится по пути $B_0 \dots B$. В силу (6) разность оптических расстояний до A и B равна

$$\begin{aligned} & \int \delta\mu ds \text{ (вдоль пути } B_0 \dots B) - \\ & - \int \delta\mu ds \text{ (вдоль пути } A_0 \dots A). \end{aligned} \quad (7)$$

Новая волновая поверхность образуется в таком положении, что оптический путь постоянен; поэтому *дисперсия*, или угол, на который повертывается волновая поверхность вследствие изменения преломляемости, получается просто делением выражения (7) на расстояние AB . Если, как в обычных флинтгласовых спектроскопах, имеется только одно диспергирующее вещество, то $\int \delta\mu ds = \delta\mu \cdot s$, где s — просто толщина стекла, пройденная лучом. Если t_2 и t_1 — толщины, пройденные край-

ними лучами, и a — ширина выходящего пучка, то дисперсия θ дается выражением

$$\theta = \frac{\delta\mu(t_2 - t_1)}{a},$$

или, если величиной t_1 можно пренебречь,

$$\theta = \frac{\delta\mu \cdot t}{a}. \quad (8)$$

Условие разделения двойной линии, компоненты которой стягивают угол θ , заключается в том, что θ должно быть больше $\frac{\lambda}{a}$. Отсюда для того чтобы могла быть разделена двойная линия с компонентами, имеющими показатели преломления μ и $\mu + d\mu$, необходимо, чтобы t превышало значение, определяемое следующим уравнением:

$$t = \frac{\lambda}{\delta\mu}. \quad (9)$$

Относительно приложения этих результатов, см. статью „Спектроскоп“ (Enc. Brit., том XXII, p. 373)¹⁾.

§ 14. ТЕОРИЯ РЕШЕТОК [23]

Общее объяснение способа действия решеток дано в статье „Свет“ (Enc. Brit., том XIV, стр. 607). Если решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных частей, то вопрос может быть рассмотрен с помощью общих интегралов (§ 11) просто путем ограничения области интегрирования прозрачными частями отверстия. Исследования в этом направлении читатель может найти в „Tracts“ Эйри и „Leçons“ Верде. Если же, однако, мы будем исходить из теории простого прямоугольного отверстия (§ 11), то действие штриховки может быть выяснено элементарными методами, которые, быть может, более поучительны.

Отвлекаясь от штриховки, мы знаем, что изображением математической линии будет ряд узких полос, средняя из которых значительно ярче остальных. Посредине этой полосы фазы вторичных волн вполне совпадают друг с другом. Темные линии, разделяющие полосы, суть места, в которых фазы вторичных волн заполняют целое число периодов. Если теперь мы представим себе, что отверстие AB покрыто большим числом непрозрачных полосок или стержней ширины d , разделенных прозрачными промежутками ширины a , то положение вещей в только что указанных направлениях не изменится существенным образом. В средней точке все еще будет полное совпадение фаз; но амплитуда уменьшится в отношении $a : a + d$. В другом направлении, составляющем небольшой угол с последним, так что проекция AB на него

¹⁾ См. Рэлей, Scientific Papers, т. I, стр. 425; также Шустер, Введение в теоретическую оптику, ОНТИ, 1935, стр. 154.

составляет несколько длин волн, характер интерференции, как легко видеть, такой же, как если бы штрихов не было. Например, когда направление таково, что проекция AB на него равна одной длине волны, то элементарные составляющие нейтрализуют друг друга, так как их фазы распределены симметрично, хотя и не непрерывно, по всему периоду. Единственное действие штрихов состоит в уменьшении амплитуды в отношении $a : a + d$; за исключением разницы в освещенности изображение светлой линии такое же, как если бы отверстие было совершенно свободно.

Боковые (спектральные) изображения образуются в таких направлениях, в которых проекция элемента $(a + d)$ решетки на них представляет точное кратное λ . Действие каждого из n элементов решетки в таком случае одно и то же; и если только это действие не обращается в нуль вследствие особого подбора отношения $a : d$, результирующая амплитуда становится сравнительно очень большой. Эти направления, в которых разность хода между A и B точно равна $m\lambda$, могут быть названы главными направлениями. По обе стороны любого из них освещение распределено согласно тому же закону, что и для центрального изображения ($m = 0$), обращаясь, например, в нуль, когда разность хода составляет $(m \pm 1)\lambda$. При рассмотрении относительных яркостей различных спектров достаточно поэтому обращать внимание только на главные направления, при условии, что полное отклонение не настолько велико, чтобы его косинус значительно отличался от единицы.

Рассмотрим теперь амплитуду, обусловленную одним элементом решетки, который нам удобно будет считать состоящим из прозрачной части ширины a , ограниченной двумя непрозрачными частями ширины $d/2$. Фаза результирующего колебания в силу симметрии совпадает с фазой составляющей, идущей от середины a . Тот факт, что остальные составляющие имеют фазы, отличающиеся от последней на величины, заключенные между $\pm \frac{am\pi}{a+d}$, приводит к тому, что результирующая амплитуда оказывается меньше, чем для центрального изображения (в котором имеет место полное совпадение фаз). Если B_m обозначает яркость m -го бокового изображения и B_0 — яркость изображения центрального, то

$$\frac{B_m}{B_0} = \left[\int_{-\frac{am\pi}{a+d}}^{+\frac{am\pi}{a+d}} \cos x dx : \frac{2am\pi}{a+d} \right]^2 = \left(\frac{a+d}{am\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{am\pi}{a+d}. \quad (1)$$

Если B обозначает яркость центрального изображения, когда все пространство, занятое решеткой, прозрачно, то

$$\frac{B_0}{B} = \frac{a^2}{(a+d)^2},$$

и следовательно,

$$\frac{B_m}{B} = \frac{1}{m^2 \pi^2} \sin^2 \frac{am\pi}{a+d}. \quad (2)$$

Синус угла не может быть больше единицы; следовательно, при самых благоприятных условиях только $\frac{1}{m^2\pi^2}$ первоначального света может быть получено в m -м спектре. Мы приходим к заключению, что в случае решетки, состоящей из прозрачных и непрозрачных частей, наибольшая возможная в каком-либо спектре интенсивность получается в первом спектре и составляет в нем $1/\pi^2$, т. е. около $1/10$, и что для этого a и d должны быть равны. Когда $d = a$, общая формула обращается в

$$\frac{B_m}{B} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} m\pi}{m^2\pi^2}, \quad (3)$$

откуда видно, что, когда m — четное число, B_m обращается в нуль, а когда m — нечетное

$$\frac{B_m}{B} = \frac{1}{m^2\pi^2}.$$

Третий спектр имеет, таким образом, только $1/9$ яркости первого.

Другой интересный частный случай получается при предположении, что a мало сравнительно с $(a + d)$. Если только спектр не очень высокого порядка, то мы имеем просто

$$\frac{B_m}{B} = \frac{a^2}{(a + d)^2}, \quad (4)$$

так что яркости всех спектров одинаковы.

Свет, задержанный непрозрачными частями решетки, сложенный со светом, распределенным в центральном изображении и боковых спектрах, должен дать такую яркость, которая имела бы место в центральном изображении, если бы все части отверстия были прозрачны. Таким образом, если $a = d$, мы должны иметь

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right),$$

что справедливо в силу известной теоремы. В общем случае

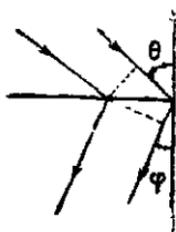
$$\frac{a}{a+d} = \left(\frac{a}{a+d} \right)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi a}{a+d} \right),$$

— формула, которая может быть проверена при помощи теоремы Фурье.

Согласно общему принципу, сформулированному Бабинэ, яркость бокового спектра не изменяется от замены прозрачных и непрозрачных частей решетки друг другом. Колебания, соответствующие этим двум случаям, являются в точности противоположными, так как при одновременном их действии результирующее колебание было бы равно нулю. Поскольку речь идет о приложении к решеткам, это же заключение можно вывести из (2).

Из значения B_m/B_0 видно, что ни один из боковых спектров не может превосходить по яркости центральное изображение; но этот ре-

зультат основан на том предположении, что действие решетки обусловлено непрозрачностью ее частей, что, вообще говоря, весьма далеко от того, что имеет место на практике. В решетке, вырезанной на стекле, нет непрозрачного вещества, которое поглощало бы свет; ее действие основано на различном запаздывании света, приобретаемом при прохождении через различные части. Можно изготовить решетки, дающие боковой спектр, более яркий, чем центральное изображение, и объяснить это нетрудно. Действительно, если бы различные части решетки были равны и одинаково прозрачны, но устроены так, чтобы давать разность хода в $\frac{1}{2} \lambda$, то очевидно, что центральное изображение было бы совершенно потушено, тогда как первый спектр был бы в четыре раза ярче, чем в случае, когда чередуются прозрачные и совсем непрозрачные части. Если бы можно было ввести в каждой части отверстия решетки произвольное запаздывание, то весь свет можно было бы сконцентрировать в любом из спектров, по желанию. Предположив, что запаздывание изменяется равномерно и непрерывно, мы приходим к случаю обыкновенной призмы; но тогда нет дифракционного спектра в обычном смысле. Чтобы его получить, нужно было бы сделать так, чтобы запаздывание изменялось постепенно на длину волны при прохождении каждого элемента решетки, а затем возвращалось к своему предыдущему значению, перескакивая таким образом внезапно на длину волны. Мало вероятно, чтобы можно было когда-либо полностью этого достигнуть на практике; однако случай этот стоит отметить для того, чтобы показать, что нет теоретического предела концентрации света заданной длины волны в одном спектре, и чтобы иллюстрировать часто наблюдаемый несимметричный характер спектров по обе стороны от центрального изображения ¹⁾ [24].



Фиг. 10.

До сих пор мы предполагали, что свет падает на решетку перпендикулярно; но теорию легко обобщить. Если падающие лучи образуют угол θ с нормалью (фиг. 10) и если дифрагированные лучи образуют угол φ (по ту же сторону), то разность хода от каждого элемента ширины $(a + d)$ по отношению к соседнему с ним равна $(a + d)(\sin \theta + \sin \varphi)$; это и есть та величина, которую следует приравнять $m\lambda$. Таким образом

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} (\theta + \varphi) \cos \frac{1}{2} (\theta - \varphi) = \frac{m\lambda}{a + d}. \quad (5)$$

„Отклонение“ равно $(\theta + \varphi)$ и, следовательно, будет минимальным при $\theta = \varphi$, т. е. когда решетка расположена так, что углы падения и дифракции равны.

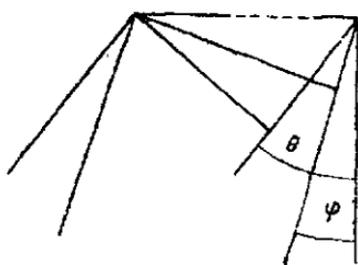
В случае отражательной решетки применим тот же метод. Если θ и φ обозначают углы, которые образуют падающий и дифрагированный лучи с нормалью, то формула (5) остается справедливой, и если

¹⁾ *Phil. Mag.*, 47, стр. 193, 1874 [том 1, стр. 215].

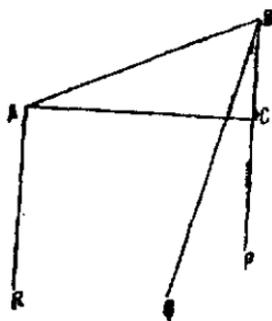
отклонение отсчитывать от направления правильно отраженных лучей, то оно, как и раньше, равно $(\theta + \varphi)$ и является минимальным при $\theta = \varphi$, т. е. когда дифрагированные лучи возвращаются по пути падающих лучей.

В обоих случаях (как и в случае призмы) в положении минимального отклонения ширина пучка остается неизменной, т. е. угловая ширина рассматриваемого объекта не увеличивается и не уменьшается.

Из (5) видно, что при перпендикулярном падении света на решетку ($\theta = 0$) спектр не образуется (изображение, соответствующее $m = 0$, не принимается за спектр), если постоянная решетки σ или $(a + d)$ меньше λ . При этих условиях, если вещество решетки вполне прозрачно, то весь свет должен оказаться в прямом изображении и штриховка будет незаметной. Исходя из отсутствия спектров, Фраун-



Фиг. 11.



Фиг. 12.

гофер утверждал, что должен существовать микроскопический предел, равный λ , и это заключение является по меньшей мере правдоподобным¹⁾, ²⁾. Фраунгоферу следовало, однако, принять микроскопический предел равным $\frac{1}{2} \lambda$, как видно из (5), если положить

$$\theta = \frac{1}{2} \pi, \quad \varphi = \frac{1}{2} \pi.$$

Рассмотрим теперь важный вопрос о зависимости разрешающей способности решеток от числа штрихов n и от порядка наблюдаемого спектра (m). Пусть BP (фиг. 12) будет направлением главного максимума (середины центральной полосы) для длины волны λ в m -м спектре. Тогда разность хода крайних лучей (соответствующих краям A , B

¹⁾ Notes on some Fundamental Propositions in Optics, *Phil. Mag.*, июнь, 1886 (том II, стр. 513).

²⁾ [21] Аббе, сильно двинувший вперед теорию микроскопа, а также Гельмгольц строго вывели предел разрешающей силы, связанный с конечностью длины волны света, и обосновали таким образом „правдоподобное предположение“ Фраунгофера о существовании микроскопического предела.

По этому вопросу см. книгу O. Lummer, *Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop* von Ernst Abbe, Vieweg, 1910; также книгу Борна, *Оптика*, ОНТИ, 1937.

решетки) равна $m\lambda$. Если BQ — направление первого минимума (темной полосы между центральной и первой боковой полосами), то разность хода крайних лучей равна $(m+1)\lambda$. Допустим теперь, что $\lambda + \delta\lambda$ есть длина волны, для которой BQ дает главный максимум; тогда

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \delta\lambda),$$

откуда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \quad (6)$$

Согласно установленному нами выше правилу, это выражение дает наименьшую разность длин волн в двойной линии, которая как раз еще может быть разрешена; мы приходим к заключению, что разрешающая способность решетки зависит только от общего числа штрихов и от порядка спектра и ни от чего больше. Конечно, при этом предполагается, что все n штрихов действительно используются.

В случае D линий натрия значение $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ равно приблизительно $\frac{1}{1000}$, так что для разделения этой двойной линии в первом спектре требуется 1000 штрихов, во втором спектре 500 и т. д.

Следует особо отметить, что разрешающая способность решетки не зависит непосредственно от густоты штриховки. Возьмем случай решетки шириной в 1 дюйм, содержащей 1000 штрихов, и рассмотрим, что произойдет, если добавим новые 1000 штрихов, делящие прежние промежутки между штрихами пополам; первый, третий и вообще нечетные спектры будут уничтожены вследствие интерференции, тогда как преимущество, получаемое в спектрах четного порядка, состоит не в дисперсии и не в разрешающей способности, а попросту в яркости, которая возрастает в четыре раза. Если представим себе теперь, что половина решетки отрезана, так что осталось 1000 штрихов в половине дюйма, то дисперсия не изменится, а яркость и разрешающая способность станут вдвое меньше.

Ясно, что нет теоретического предела разрешающей способности решеток даже в спектрах какого-либо заданного порядка. Однако возможно, как указал Роуланд¹⁾, что строение естественных спектров бывает слишком грубым для применения разрешающих способностей намного больших, чем употребляемые в настоящее время²⁾. Как бы то ни было, всегда было бы возможно с помощью решетки с заданной разрешающей способностью создать искусственно из белого света смесь из несколько отличных друг от друга длин волн, разделение или, напротив,

¹⁾ Ср. также Lippich, *Pogg. Ann.*, 139, стр. 465, 1870; Rayleigh, *Nature*, 2 окт. 1873 [том 1, стр. 183].

²⁾ Способность решетки создавать свет почти определенной длины волны хорошо иллюстрируется сделанным Юнгом сравнением с получением музыкального тона путем отражения звукового импульса от решетки из жердей. Возражение против этого сравнения, сделанное Гершелем (*Light*, § 703), основано на недоразумении.

невозможность разделения которых позволили бы различить между разрешающими способностями ниже и выше данной ¹⁾).

Если мы назовем „дисперсией“ в данном участке спектра отношение приращения угла $d\theta$ к соответствующему приращению длины волны $d\lambda$, то мы можем ее выразить очень простой формулой. Действительно, изменение длины волны вызывает на границах дифрагированного волнового фронта разность хода, равную $mn d\lambda$. Отсюда, если a — ширина дифрагированного пучка и $d\theta$ — угол, на который поворачивается волновой фронт, то

$$a d\theta = mn d\lambda,$$

или

$$\text{дисперсия} = \frac{mn}{a}. \quad (7)$$

Разрешающая способность и ширина выходящего пучка определяют оптическую характеристику прибора. Ширина пучка должна быть в конечном счете уменьшена до величины, меньшей, чем диаметр зрачка глаза. Поэтому широкий пучок требует обработки его еще добавочным прибором (обычно зрительной трубой) с большим увеличением.

В приведенном выше рассуждении предполагалось, что штриховка правильная, и мы видели, что, увеличивая m , можно достичь высокой разрешающей способности с умеренным числом штрихов. Но этот прием (оставляя в стороне вопрос об освещении) наталкивается на то затруднение, что он предъявляет чрезмерные требования в смысле точности изготовления. Согласно уже установленному выше принципу, различие будет невелико в главном направлении, соответствующем первому спектру, если только каждый штрих расположен в пределах одной четверти интервала $(a + d)$ от своего теоретического положения. Но, чтобы получить столь же хороший результат в m -м спектре, ошибка должна быть меньше $1/m$ указанной величины ²⁾.

Существуют известные ошибки систематического характера, требующие особого рассмотрения. Нанесение штрихов обычно производится при помощи винта, каждому обороту которого соответствует большое число (например, сто) штрихов. Таким образом может случиться, что хотя при каждом обороте винта через (скажем) 100 штрихов имеет место почти совершенная периодичность, все же сами эти 100 штрихов не расположены равномерно. Возникающие, таким обра-

¹⁾ Полученные в настоящее время большие разрешающие способности решетонок, намного превосходящие те, которые были доступны в то время, дали возможность обнаружить тонкую и сверхтонкую структуру спектральных линий, связанную с важными особенностями строения атомов и молекул.

Примеч. ред.

²⁾ Не следует думать, что ошибки такого порядка величины никогда не могут иметь практического значения. Положение середины яркой полосы, представляющей математическую линию, может быть определено микрометром с паутиновой нитью с точностью до малой доли ширины полосы точно так же, как точность астрономических наблюдений далеко превосходит разрешающую способность прибора.

зом, „духи“ были описаны впервые Квинке¹⁾ и тщательно исследованы Пирсом²⁾ как теоретически, так и экспериментально. Общий характер эффектов, которых следует ожидать в таких случаях, можно разъяснить с помощью иллюстрации, уже использованной для другой цели.

Представим себе, что две одинаковые и вполне точно изготовленные прозрачные решетки наложены друг на друга так, что их штрихи параллельны. Если одна система штрихов делит точно пополам интервалы между штрихами другой системы, то практически период решетки оказывается вдвое меньшим и существовавшие раньше спектры нечетного порядка исчезают. Но очень небольшое относительное смещение вызовет появление нечетных спектров. В этом случае имеет место приблизительная периодичность в половинном интервале, полная же периодичность — только через целый интервал. Преимущество приближенного деления пополам состоит в большей яркости остающихся спектров; но во всяком случае составную решетку можно считать совершенной в более длинном интервале, а разрешение столь же хорошим, как если бы деление пополам было точным.

Действие равномерного возрастания интервала (фиг. 13) вдоль решетки было исследовано Корню³⁾, объяснившим таким образом аномалию, наблюдаемую Маскаром. Последний нашел, что некоторые решетки вызывали сходные спектры, образующихся по одну сторону решетки, и соответствующее расхождение спектров по другую сторону. Предположим, что свет падает перпендикулярно и что интервал решетки возрастает от центра к тому краю, который находится ближе к наблюдаемому спектру, и уменьшается к другому краю. Очевидно, что волны от обеих половин решетки ускоряются по фазе в возрастающей степени, когда мы переходим от центра к краям, сравнительно с фазой, которую они имели бы, если бы интервал решетки всюду оставался таким же, как и посредине ее.



Фиг. 13.

Неравномерность штриховки действует таким образом, как выпуклая линза, ускоряющая краевые лучи по отношению к центральным. На другой стороне действие обратное. Ясно, что такого рода неправильность может иметь место в степени, превосходящей обычные пределы ошибок изготовления без потери в разрешающей силе, когда труба фокусируется так, что достигается наилучший результат.

Следует, быть может, разобрать еще другие отступления от правильной штриховки, соответствующие различным членам, выражающим отклонение волновой поверхности от идеальной плоскости. Если x и y — координаты в плоскости волновой поверхности, причем ось y параллельна штрихам решетки и начало координат соответствует центру

¹⁾ Pogg. Ann. 146, стр. 1, 1872.

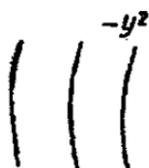
²⁾ Am. Jour. Math. 2, стр. 330, 1879.

³⁾ C. R., 80, стр. 645, 1875.

пучка, то в качестве приближенного уравнения волновой поверхности (§ 6) имеем

$$z = \frac{x^2}{2e} + Bxy + \frac{y^2}{2e'} + \alpha x^3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \dots; \quad (8)$$

как мы только что видели, член, содержащий x^2 , соответствует линейной ошибке в нанесении штрихов. Подобным же образом член, содержащий y^2 , соответствует общей кривизне штрихов (фиг. 14) и не влияет на резкость в (первом) фокусе, хотя и может вызвать астигматизм ¹⁾. Если мы допустим, что все симметрично по обе стороны от плоскости $y=0$, то коэффициенты B, β, δ равны нулю. Несмотря на любое возможное неравенство e и e' , разрешение будет хорошим в этом порядке приближения при условии, что α и γ равны нулю. Первая из этих величин является мерой *толщины* первой



Фиг. 14.

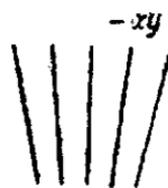
фокальной линии, а вторая — ее кривизны. Ошибка в штриховке, вызывающая появление α , состоит в том, что интервалы решетки увеличиваются или уменьшаются в *обоих* направлениях от центра к краям (фиг. 15), и она часто может быть компенсирована небольшим поворотом азимута объектива зрительной трубы. Член, содержащий γ , соответствует изменению знака кривизны вдоль решетки (фиг. 16).



Фиг. 15.



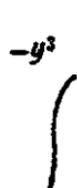
Фиг. 16.



Фиг. 17.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

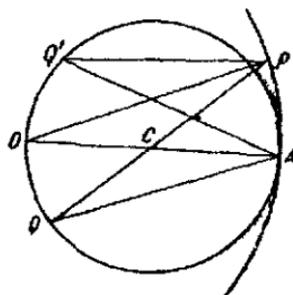
Когда плоскость zx не является плоскостью симметрии, то приходится рассматривать члены, содержащие xy, x^2y и y^3 . Первый из них соответствует отклонению от параллельности, вызывающему постепенное изменение интервала *вдоль* штрихов (фиг. 17). Возникающая таким образом ошибка может быть компенсирована вращением объектива около одного из диаметров $y = \pm x$. Член, содержащий x^2y , соответствует отклонению от параллельности в одном и том же направлении по обе стороны от центрального штриха (фиг. 18); член, содержащий y^3 , соответствует такой кривизне, при которой в середине каждого штриха имеется точка перегиба (фиг. 19).

¹⁾ Подобным же образом мы можем заключить, что в плоских решетках всякое отклонение от прямолинейности приводит к тому, что пыль в щели и спектр имеют разные фокусы — факт, иногда наблюдаемый*. (Rowland, On Concave Gratings for optical Purposes, *Phil. Mag.*, сент. 1883.)

Все ошибки, за исключением той, которая зависит от α , в особенности те, которые зависят от γ и δ , могут быть уменьшены без потери в разрешающей силе путем уменьшения отверстия в *вертикальном* направлении. Линейная ошибка в расположении штрихов и общая кривизна штрихов исключаются при обычном способе употребления решетки.

Правильность объяснения различия в фокусировке по обе стороны неравномерностью нанесения штрихов была доказана Корню на решетках с возрастающим интервалом, специально изготовленных для этой цели. Он показал также, как нанести на плоскую поверхность штрихи, расположенные так, чтобы решетка сама собой давала хорошо фокусированные спектры.

Аналогичная, повидимому, идея, привела Роуланда к его блестящему изобретению вогнутых решеток, с помощью которых можно фотографировать спектры без каких-либо добавочных оптических приспособлений. В этих приборах штрихи наносятся на сферической поверхности из зеркального металла и образуют линии пересечения этой поверхности системой параллельных и равноотстоящих плоскостей, средняя из которых проходит через центр сферы. Если мы будем рассматривать только главную плоскость симметрии, то чертеж сведется к двум измерениям. Пусть AP (фиг. 20) представляет поверхность решетки, O — центр окружности. Тогда, если Q — какая-либо светящаяся точка, а) Q' — ее изображение в сферическом зеркале AP , то



Фиг. 20.

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{u} = \frac{2}{a \cos \varphi},$$

где $v_1 = AQ'$, $u = AQ$, $a = OA$, $\varphi =$ углу падения QAO , равному углу отражения $Q'AO$ ¹⁾. Если Q лежит на окружности, описанной на OA , как на диаметре, так что $u = a \cos \varphi$, то и Q' лежит на этой окружности, и в этом случае из симметрии следует, что несимметричная аберрация (зависящая от α) равна нулю.

Это расположение принято в приборе Роуланда; только, вдобавок к центральному изображению, образуемому при угле $\varphi' = \varphi$, в нем имеется ряд спектров с разными значениями φ' , но расположенных все на той же окружности. Исследование Роуланда содержится в статье, на которую мы уже ссылались; но нижеследующее изложение теории принадлежит Глэзбруку²⁾.

Чтобы найти разность оптических путей лучей QAQ' и QPQ' , мы должны вычислить разность $QP - QA$ и $PQ' - AQ'$. Чтобы найти

¹⁾ Эту формулу можно вывести тем же путем, как в статье „Оптика“ Епс. Brit., том. XVII, стр. 800, уравнение (3) [том II, стр. 390]; ее можно получить из этого уравнения, полагая $\varphi' = \varphi$ и $\mu = -1$.

²⁾ Phil. Mag., июнь 1883; ноябрь 1883.

первую, имеем, если $OAQ = \varphi$, $AOP = \omega$,

$$QP^2 = u^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega - 4a u \sin \frac{1}{2} \omega \sin \left(\frac{1}{2} \omega - \varphi \right) = \\ = (u + a \sin \varphi \sin \omega)^2 - a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \omega + 4a \sin^2 \frac{1}{2} \omega (a - u \cos \varphi).$$

Но с точностью до членов порядка ω^4 :

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega = \sin^2 \omega + \frac{1}{4} \sin^4 \omega,$$

и, следовательно, с той же степенью приближения,

$$QP^2 = (u + a \sin \varphi \sin \omega)^2 - a \cos \varphi (u - a \cos \varphi) \sin^2 \omega + \\ + \frac{1}{4} a (a - u \cos \varphi) \sin^4 \omega.$$

Если мы теперь предположим, что Q лежит на окружности $u = a \cos \varphi$, то средний член обращается в нуль, и мы получим с точностью до членов порядка ω^4 :

$$QP = (u + a \sin \varphi \sin \omega) \sqrt{1 + \frac{a^2 \sin^4 \varphi \sin^4 \omega}{4u^2}},$$

так что

$$QP - u = a \sin \varphi \sin \omega + \frac{1}{8} a \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin^4 \omega, \quad (9)$$

причем следует заметить, что расположение, при котором достигается исчезновение $\sin^2 \omega$, ведет также к уничтожению члена, содержащего $\sin^2 \omega$.

Аналогичное выражение можно найти для $Q'P - Q'A$; и, таким образом, если $Q'A = v$, $Q'AO = \varphi'$, причем $v = a \cos \varphi'$, мы получаем

$$QP + PQ' - QA - AQ' = a \sin \omega (\sin \varphi - \sin \varphi') + \\ + \frac{1}{8} a \sin^4 \omega (\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin \varphi' \operatorname{tg} \varphi'). \quad (10)$$

Если $\varphi' = \varphi$, то член первого порядка исчезает и сведение разности хода лучей, идущих через P и через A , к члену четвертого порядка доказывает не только то, что Q и Q' суть сопряженные фокусы, но и то, что эти фокусы лишены самого важного в отношении абберации члена. В данном случае φ' не обязательно равно φ ; но если P соответствует штриху на решетке, то разность хода для последовательных положений P , поскольку она выражается членом первого порядка, будет равна $\mp m\lambda$ (m — целое число) и, следовательно, не будет оказывать влияния при условии, что

$$\sigma (\sin \varphi - \sin \varphi') = \mp m\lambda, \quad (11)$$

где σ обозначает постоянный интервал между плоскостями, содержащими штрихи. Это — обыкновенная формула для отражательных плоских

решеток, и она показывает, что спектры образуются в обычных направлениях. Здесь спектры фокусируются (поскольку речь идет о лучах в главной плоскости) на окружности $OQ'A$, и остаточная аберрация — четвертого порядка.

Для того чтобы большая часть поля зрения могла быть одновременно в фокусе, желательно, чтобы область, где находится фокусированный спектр, была расположена почти перпендикулярно к линии зрения. Для этой цели Роуланд помещает окуляр в O , так что $\varphi = 0$, и тогда по (11) значение φ' в m -м спектре определяется соотношением

$$\sigma \sin \varphi' = \pm m\lambda. \quad (12)$$

Если теперь ω относится к краю решетки, на которой имеется всего l штрихов, то $n\sigma = 2a \sin \omega$ и последний член в (10) обращается в

$$\frac{1}{16} n \sigma \sin^3 \omega \sin \varphi' \operatorname{tg} \varphi',$$

или

$$\frac{1}{16} mn\lambda \sin^3 \omega \operatorname{tg} \varphi'. \quad (13)$$

Это выражение определяет запаздывание крайнего луча относительно центрального и должно считаться положительным, каковы бы ни были знаки ω и φ' .

Если половина угловой величины решетки (ω) равна $1/100$ и $\operatorname{tg} \varphi' = 1$, то mn может достигнуть четырех миллионов, прежде чем ошибка в фазе достигнет $1/4 \lambda$. На случай, если бы было желательно применить настолько большой раствор конуса лучей, что аберрация согласно (13) стала бы вредной, Роуланд указывает, что при его приборе нетрудно исправить это положение, сделав σ слегка меняющимся к краям решетки. Или же, оставляя σ постоянным, можно добиться компенсации, полируя поверхность так, чтобы выдвинуть край решетки несколько вперед сравнительно с положением, которое он занимал бы на правильной сфере.

Следует заметить, что эти вычисления применимы только к лучам, лежащим в главной плоскости. На изображение оказывает большое влияние астигматизм; но это влияние незначительно, если y в (8) достаточно мало. Так как кривизна фокальной линии оказывает вредное влияние на резкость, то из прекрасного действия этих решеток можно заключить, что в действительности y мало. Его значение, повидимому, не вычислялось. Другие коэффициенты в (8) равны нулю в силу симметрии.

Механические приспособления для фокусировки очень просты. Решетка в A и окуляр в O жестко прикреплены к стержню AO , концы которого лежат на тележках, движущихся по рельсам OQ , AQ , составляющим прямой угол друг с другом. Можно соединить стержнем C с Q , если это представляется желательным.

Отсутствие хроматической аберрации представляет большое преимущество при сравнении налагающихся друг на друга спектров;

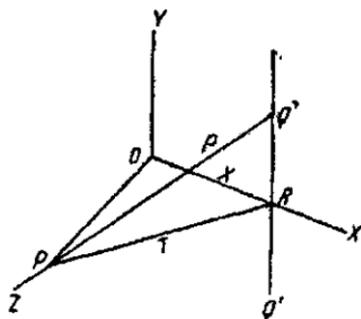
Роуланд прекрасно использовал это преимущество в своих определениях относительных длин волн линий солнечного спектра ¹⁾.

Для абсолютных измерений длин волн пользуются плоскими решетками. Найдено ²⁾, что угловые измерения представляют меньше трудностей, чем сравнение постоянной решетки с эталонным метром. Имеется также некоторая неопределенность относительно действительной температуры решетки во время измерений. С целью свести к минимуму нагревание, производимое светом, можно подвергнуть последний, прежде чем он попадает на щель спектрометра, предварительному разложению с помощью призмы, по способу Гельмгольца („Оптика“, Епс. Brit., том XVII, стр. 802 [том II, стр. 397]).

Далее, Белл нашел, что необходимо подвергнуть решетки калиброванию, не довольствуясь знанием числа линий и полной ширины решетки. Нередко случается, что в начале штриховки интервал отличается от нормального. Если ширина этой области невелика, то она едва ли оказывает какое-либо влияние на угловые измерения и не должна быть принимаема в расчет при определении эффективного интервала решетки ³⁾.

§ 15. ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН ³⁾

Теория решеток дается обычно в форме, приложимой только к случаю, когда чередующиеся части решетки являются прозрачными и непрозрачными. Но даже в этом случае весьма маловероятно, чтобы процесс простого учета прозрачных и исключения непрозрачных частей при интегрировании в § 11 давал точный результат. Положение вещей в действительных решетках гораздо сложнее, и все, что можно принять с уверенностью, есть приближительная периодичность в интервале σ . Таким образом возникает задача — определить, что происходит по другую сторону плоскости $z = 0$, когда амплитуда и фаза в этой плоскости являются периодическими функциями x ; и первым шагом в



Фиг. 21.

решении этой задачи естественно было бы определить действие, соответствующее бесконечно тонкой полоске $y dx$, вдоль которой амплитуда и фаза постоянны. На фиг. 21 QQ' представляет рассматриваемую полоску, действие которой в точке $P(0, 0, z)$ подлежит вычислению; $QR = y$, $RP = r$, $QP = e$.

¹⁾ *Phil. Mag.*, март 1887.

²⁾ *Bell. Phil. Mag.*, март 1887.

³⁾ Мы переводим „пространственно-модулированные волны“ оригинальный термин Рэлея „corrugated waves“, означающий буквально „морщинистые“ или „сморщенные“ волны.

Если мы примем закон вторичной волны, установленный в § 10 для случая разбиения бесконечной однородной первичной волны, то действие QQ' будет равно

$$\begin{aligned} 2dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{\lambda \varrho} \cos k \left(at - \varrho + \frac{1}{4} \lambda \right) &= \\ = -\frac{2dx}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} \sin k(at - \varrho). \end{aligned} \quad (1)$$

Раскрытие этого выражения, определяющего действие линейного источника, завело бы нас слишком далеко ¹⁾. Мы должны ограничиться рассмотрением предельного случая, когда kr велико, как это и имеет почти всегда место в оптике. В этом случае знаменатель можно упростить, полагая:

$$\sqrt{\varrho^2 - r^2} = \sqrt{2r} \sqrt{\varrho - r},$$

так что (1) обращается в

$$-\frac{2dx}{\lambda \sqrt{2r}} \int_0^{\infty} \frac{d(\varrho - r)}{\sqrt{\varrho - r}} \sin k \{ at - r - (\varrho - r) \}.$$

Но

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ku \, du}{\sqrt{u}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos ku \, du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda};$$

таким образом мы получаем выражение

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{\sqrt{2\lambda r}} \{ \sin k(at - r) - \cos k(at - r) \} &= \\ = -\frac{dx}{\sqrt{\lambda r}} \sin k \left(at - r - \frac{1}{8} \lambda \right), \end{aligned} \quad (2)$$

дающее действие линейного источника на большом расстоянии. Наличие множителя $r^{-\frac{1}{2}}$ есть следствие цилиндрической формы распространяющихся волн. Полное действие отстает на одну восьмую периода сравнительно с действием центрального элемента, вместо четверти периода, как это имеет место в случае однородной волны, занимающей всю плоскость.

Действие такой однородной плоской волны можно вновь найти, интегрируя (2) по x от $-\infty$ до $+\infty$, в предположении, что kr велико. Имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{r}} = \frac{r \, dr}{\sqrt{r \cdot x}} = \frac{\sqrt{r} \, d(r-z)}{\sqrt{r+z} \sqrt{r-z}};$$

¹⁾ Theory of Sound, § 341.

так как в интеграле заметную долю вносят только те элементы его, для которых $(r - z)$ мало, то мы можем в последнем выражении положить

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Интеграл можно тогда вычислить по той же формуле, что и раньше, и мы получаем в конечном счете $\cos k(at - z)$, то же самое, что получилось бы в предположении, что первичная волна распространяется без разбиения на элементы. Восстановление первичной волны путем интегрирования в прямоугольных координатах, таким образом, доказано, но только при том ограничении, в действительности, не требуемом сущностью задачи, что та точка, действие в которой подлежит определению, отстоит на весьма большое число длин волн от плоскости, на которой производится разбиение.

Предположим теперь, что амплитуда и фаза первичной волны в плоскости разбиения $z = 0$ являются уже не постоянными, а периодическими функциями x . Вместо простого $\cos kat$ мы должны взять в общем случае

$$A \cos(px + f) \cos kat + B \cos(px + g) \sin kat,$$

но для нашей цели достаточно будет рассматривать только первый член, в котором мы можем для простоты еще положить $A = 1$, $f = 0$. Действие линейного элемента в точке $(x, 0)$ на точку (ξ, z) согласно (2) будет

$$-\frac{dx}{\sqrt{\lambda r}} \cos px \sin k \left(at - r - \frac{1}{8} \lambda \right),$$

где r — расстояние, определяемое равенством $r^2 = z^2 + (x - \xi)^2$.

Следовательно, если мы положим $x = \xi + \alpha$, то полное действие будет

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{2\sqrt{\lambda r}} \left\{ \sin \left(kat + p\xi - \frac{1}{4} \pi - kr + p\alpha \right) + \sin \left(kat - p\xi - \frac{1}{4} \pi - kr - p\alpha \right) \right\}, \quad (3)$$

где $r^2 = z^2 + \alpha^2$.

Элементы обоих членов подинтегрального выражения, вообще говоря, быстро меняют знаки; поэтому единственно существенной частью области интегрирования, например, в первом члене является окрестность того места, где значение $pa - kr$ стационарно, т. е. где

$$p d\alpha - k dr = 0. \quad (4)$$

Вообще $\alpha d\alpha - r dr = 0$, так что, если обозначить значения α и r , соответствующие (4), через α_0 , r_0 , то получим

$$\frac{\alpha_0}{p} = \frac{r_0}{k} = \frac{z}{\sqrt{k^2 - p^2}}. \quad (5)$$

Но вблизи этих значений, если положим $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$,

$$pa - kr = pa_0 - kr_0 + \alpha_1 \left(p - k \frac{a_0}{r_0} \right) - \frac{ka_1^2}{2r_0} \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right),$$

где, согласно (5), член первого порядка обращается в нуль. При помощи этого соотношения мы получаем для первого члена в (3):

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da_1}{2\sqrt{\lambda r_0}} \left\{ \sin \left(kat + p\xi - \frac{1}{4} \pi - kr_0 + pa_0 \right) \cos ha_1^2 - \right. \\ \left. - \cos \left(kat + p\xi - \frac{1}{4} \pi - kr_0 + pa_0 \right) \sin ha_1^2 \right\},$$

где, для краткости, $\frac{k}{2r_0} \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right)$ обозначено через h .

Интегрирование производится с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos hu^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin hu^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2h}}$$

и дает

$$\frac{k}{2\sqrt{k^2 - p^2}} \cos(kat + p\xi - kr_0 + pa_0).$$

Другой член в (3) подобным же образом дает

$$\frac{k}{2\sqrt{k^2 - p^2}} \cos(kat - p\xi + kr_0 + pa_0),$$

так что полное значение интеграла равно

$$\frac{k \cos p\xi}{\sqrt{k^2 - p^2}} \cos \{ kat - \sqrt{k^2 - p^2} z \}. \quad (6)$$

Когда $p=0$, мы возвращаемся к случаю однородной плоской волны, распространяющейся со скоростью a . В общем же случае скорость отлична от a и равна

$$\frac{ka}{\sqrt{k^2 - p^2}}. \quad (7)$$

Волна, представляемая выражением (6), есть волна, в которой амплитуда в разных точках волнового фронта пропорциональна $\cos p\xi$ или $\cos px$; фаза постоянна, если не говорить об имеющих место обращения фазы, так что волновые поверхности определяются равенством $z = \text{const}$. Описанная таким образом волна движется вперед со скоростью, даваемой выражением (7), без изменения формы.

Приведенное выше исследование можно считать приложимым к решеткам, дающим спектры только первого порядка. Хотя k изменяется, разделения цветов нет. Подобное разделение требует либо ограничения ширины решетки (которая здесь предполагается бесконечной), либо употребления фокусирующей линзы.

Важно отметить, что p предполагалось по величине меньше, чем k , т. е. σ больше, чем λ ; иначе ни одна часть области интегрирования в (3) не свободна от быстрых изменений знака, и результат интегрирования должен равняться нулю. То положение, что неправильности в фронте волны с периодами, меньшими λ , не могут распространяться, имеет большое значение. Оно будет освещено другим методом несколько ниже.

Возможность существования волны, представленной выражением (6), быть может, достаточно обоснована предыдущим методом; однако наличие множителя $\frac{k}{\sqrt{k^2 - p^2}}$ показывает, что выражение для вторичной волны, выведенное первоначально из рассмотрения однородных плоских волн, было применено неправильно.

Правильное выражение закона вторичных волн, приложимое к любому случаю, можно установить следующим образом. Допустим, что выражение для волны с заданным периодом есть

$$\psi = e^{ikat} \iint \frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} F(x, y) dx dy, \quad (8)$$

и исследуем, каким должно быть значение $F(x, y)$ для того, чтобы применение принципа Гюйгенса могло привести к правильному результату. Из (8) имеем

$$\frac{d\psi}{dz} = e^{ikat} \iint \frac{z}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} \right) F(x, y) dx dy$$

и

$$\frac{d}{d\varrho} \left(\frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} \right) = -\frac{e^{-ik\varrho}(1+ik\varrho)}{\varrho^2}.$$

Найдем теперь предельное значение $\frac{d\psi}{dz}$, когда z очень мало.

Значение интеграла будет зависеть только от тех элементов, для которых x и y очень малы, так что в пределе мы можем заменить $F(x, y)$ через $F(0, 0)$.

Итак, в пределе

$$\iint \frac{z}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} \right) dx dy = \iint \frac{-z}{\varrho^3} dx dy = -2\pi;$$

так что

$$\text{предел } \frac{d\psi}{dz} = -2\pi e^{ikat} F(0, 0).$$

Значением $e^{ikat} F(x, y)$ является, таким образом, значение $-\frac{d\psi}{dz}$ в той же точке $(x, y, 0)$, деленное на 2π , и мы в общем случае имеем

$$\psi = \frac{-1}{2\pi} \iint \left(\frac{d\psi}{dz} \right) \frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} dx dy. \quad (9)$$

В случае однородной плоской волны

$$\psi = e^{ik(at-z)}, \quad \frac{d\psi}{dz} = -ike^{ik(at-z)},$$

так что

$$\psi = \frac{ie^{ik\alpha t}}{\lambda} \iint \frac{e^{-ikz}}{\rho} dx dy = \iint \frac{e^{ik(at-z + \frac{1}{4}\lambda)}}{\lambda \rho} dx dy,$$

в согласии с тем, что уже было нами найдено для вторичной волны в этом случае.

Но если $\psi = \cos px \cdot e^{i[k\alpha t - \sqrt{k^2 - p^2} \cdot z]}$, то

$$\frac{d\psi}{dz} (z=0) = -i\sqrt{k^2 - p^2} \cos px e^{ik\alpha t}$$

и

$$\psi = \frac{\sqrt{k^2 - p^2}}{2\pi} \iint \frac{e^{ik(at-z + \frac{1}{4}\lambda)}}{\rho} \cos px dx dy.$$

Наличие аномального множителя в (5), таким образом, объяснено.

Надо признать, что приведенный выше метод исследования несколько искусственен; причиной этого является попытка обойтись без дифференциального уравнения, которому удовлетворяет ψ , а именно

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \quad (10)$$

на котором, в случае звука, основана вся теория. Действительно, легко проверить, что любое значение ψ , содержащееся в (8), где

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2,$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + k^2 \psi = 0.$$

Когда же дело идет о разбиении по принципу Гюйгенса, различие между ξ , η и x , y может быть опущено.

Исходя из дифференциального уравнения, мы можем очень просто найти снова прежние результаты. Если ψ пропорционально $\cos px \cos qy$, то мы имеем

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + (k^2 - p^2 - q^2) \psi = 0. \quad (11)$$

Если $k^2 - p^2 - q^2 = \mu^2$, где μ действительно, то решением (11) будет

$$\psi = Ae^{i\mu z} + Be^{-i\mu z},$$

где A и B не зависят от z . Вводя вновь множители, содержащие t , x , y , мы можем написать:

$$\psi = \cos px \cos qy \{ Ae^{i(k\alpha t + \mu z)} + Be^{i(k\alpha t - \mu z)} \}, \quad (12)$$

где первый член можно опустить, если мы рассматриваем волны, распространяющиеся только в положительном направлении. Соответствующее этому решение в действительной форме имеет вид

$$\psi = \cos px \cos qy \cos \{kat - \sqrt{k^2 - p^2 - q^2} \cdot z\}. \quad (13)$$

Когда $k^2 > p^2 + q^2$, волна распространяется без изменения формы со скоростью

$$V = \frac{-ka}{\sqrt{k^2 - p^2 - q^2}}. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь, что получится, когда $k^2 < p^2 + q^2$. Если мы положим $k^2 - p^2 - q^2 = -\mu^2$, то вместо (12) мы будем иметь

$$\psi = \cos px \cos qy \{Ae^{ihat + \mu z} + Be^{ihat - \mu z}\}, \quad (15)$$

и решение, в действительной форме соответствующее (13):

$$\psi = \cos px \cos qy e^{-\mu z} \cos kat. \quad (16)$$

Мы приходим к заключению, что при этих условиях движение быстро затухает с возрастанием z и что никакая волна в обычном смысле этого слова вовсе не может распространяться.

Отсюда следует, что волнистость отражающей поверхности (безразлично, какой глубины) не будет нарушать правильности отраженной нормально волны, при условии, что длина волны этой волнистости не превышает длины волны колебания. И какова бы ни была длина волны волнистости по отношению к длине волны колебания, правильное отражение будет иметь место, когда падение достаточно наклонно.

Первая из данных выше форм решения может быть применена для объяснения явлений, наблюдаемых, когда плоская волна проходит через параллельную ей грубую решетку и затем падает на экран, помещаемый на различных расстояниях позади нее ¹⁾. В качестве общего выражения для волны, периодической относительно x с периодом σ , мы можем взять

$$A_0 \cos(kat - kz) + A_1 \cos(px + f_1) \cos(kat - \mu_1 z) + \\ + B_1 \cos(px + g_1) \sin(kat - \mu_1 z) + A_2 \cos(2px + f_2) \cos(kat - \mu_2 z) + \dots, \\ \text{где}$$

$$p = \frac{2\pi}{\sigma}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{и} \quad \mu_1^2 = k^2 - p^2, \quad \mu_2^2 = k^2 - 4p^2, \dots,$$

причем этот ряд продолжается до тех пор, пока μ действительно. Однако здесь мы ограничимся первыми тремя членами и предположим, что в них A_1 и B_1 малы сравнительно с A_0 . Тогда интенсивность можно представить выражением

$$A_0^2 + 2A_0 A_1 \cos(px + f) \cos(kz - \mu_1 z) + \\ + 2A_0 B_1 \cos(px + g) \sin(kz - \mu_1 z). \quad (17)$$

¹⁾ *Phil. Mag.*, март 1881, On copying Diffraction Gratings and on some Phenomena, connected therewith [том 1, стр. 504].

Полосы, отбрасываемые на экран при различных его положениях, являются, таким образом, периодическими функциями z , и период равен

$$z = \frac{2\pi}{k - \sqrt{k^2 - p^2}} = \frac{2\sigma^2}{\lambda}, \quad (18)$$

если предположить, что λ мало сравнительно с σ . Следует отметить, что если изменить положение экрана на половину этой величины, то результат этого эквивалентен смещению параллельно оси x на расстояние $\frac{1}{2}\sigma$. Следовательно, если решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных частей ширины $\frac{1}{2}\sigma$, то полосы, наблюдаемые на экране, будут *обращены*, когда последний перемещается назад на расстояние $\frac{\sigma^2}{\lambda}$. В этом случае мы можем принять B_1 равным нулю, и (17) тогда показывает, что поле равномерно освещено, когда экран занимает положения, находящиеся посредине между теми, которые дают наиболее отчетливые дифракционные картины. Эти результаты представляют интерес в связи с воспроизведением решеток фотографированием.

§ 16. ПОЛОСЫ ТАЛЬБОТА

Эти весьма замечательные полосы наблюдаются при известных условиях, когда в достаточной мере чистый спектр рассматривается простым глазом или при помощи зрительной трубы, причем *половина отверстия покрыта тонкой пластинкой, например, стеклянной или слюдяной*. Объяснение, данное автором открытия этих полос ¹⁾, состояло в том, что всякий луч, испытывавший при прохождении через пластинку запаздывание на нечетное число полуволн, погашается, вследствие чего спектр оказывается пересеченным темными полосами. Но это объяснение в том виде, как оно дано, не может быть принято, так как оно вызывает то же возражение, что и теория мерцания звезд Араго ²⁾. Совершенно не верно, что тело, испускающее однородный свет, перестало бы быть видимым от одного только покрытия половины отверстия пластинкой в полволны. Такое заключение противоречило бы принципу сохранения энергии, из которого со всей ясностью следует, что подобное запаздывание оставляет общую яркость неизменной. Действительное образование полос происходит весьма любопытным образом, как показывает одно явление, впервые

¹⁾ Phil. Mag., 10, стр. 364, 1837.

²⁾ Вследствие неоднородностей в атмосфере, вызывающих переменное преломление, свет от звезды неравномерно распределен по экрану. Опыт легко сделать в лабораторном масштабе с небольшим источником света, лучи которого на пути к довольно удаленному экрану испытывают возмущение благодаря находящемуся вблизи нагретому телу. В тот момент, когда глаз или объектив трубы занимает темное место, звезда исчезает. Через долю секунды зрачок оказывается на светлом месте, и звезда появляется снова. Согласно этому взгляду, цветовые эффекты зависят исключительно от атмосферной дисперсии.

наблюденное Брюстером. Когда вызывающая запаздывание пластинка помещается на стороне, обращенной к красному концу спектра, *полосы не наблюдаются*. Даже в противоположном случае толщина пластинки не должна превышать известного предела, как бы ни был чист спектр. Удовлетворительное объяснение этих полос было дано впервые Эйри ¹⁾, но здесь мы будем следовать Стоксу ²⁾, ограничиваясь, однако, случаем, когда запаздывающий и не запаздывающий пучки соприкасаются и имеют одинаковую ширину. Не запаздывающий пучок можно тогда считать ограниченными пределами $x = -h$, $x = 0$, $y = -l$, $y = +l$, а пучок, запаздывающий на величину R , — пределами $x = 0$, $x = h$, $y = -l$, $y = +l$. Для первого формула (1) § 11 дает

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda f} \int_{-h}^0 \int_{-l}^{+l} \sin k \left\{ at - f + \frac{x\xi + y\eta}{f} \right\} dx dy = \\ & = -\frac{2lh}{\lambda f} \frac{f}{k\eta l} \sin \frac{k\eta l}{f} \frac{2f}{k\xi h} \sin \frac{k\xi h}{2f} \sin k \left\{ at - f - \frac{\xi h}{2f} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

после интегрирования и приведения.

Для запаздывающего пучка единственное отличие состоит в том, что надо от at отнять R и что пределы при интегрировании по x суть 0 и $+h$. Таким образом для возмущения в точке ξ , η , обусловленного этим пучком, мы получаем

$$-\frac{2lh}{\lambda f} \frac{f}{k\eta l} \sin \frac{k\eta l}{f} \frac{2f}{k\xi h} \sin \frac{k\xi h}{2f} \sin k \left\{ at - f - R + \frac{\xi h}{2f} \right\}. \quad (2)$$

Если положим, для краткости, аргумент в последней круговой функции в (1) равным τ , то выражения (1) и (2) можно представить соответственно в виде $u \sin \tau$, $v \sin(\tau - \alpha)$; интенсивность I будет измеряться суммой квадратов коэффициентов при $\sin \tau$ и $\cos \tau$ в выражении

$$u \sin \tau + v \sin(\tau - \alpha),$$

так что

$$I = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha.$$

Это выражение, если подставить вместо u , v и α их значения и положить

$$\left\{ \frac{f}{k\eta l} \sin \frac{k\eta l}{f} \right\}^2 = 0, \quad (3)$$

обращается в

$$I = Q \frac{4f^2}{\pi^2 \xi^2} \sin^2 \frac{\pi \xi h}{\lambda f} \left\{ 2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi R}{\lambda} - \frac{2\pi \xi h}{\lambda f} \right) \right\}. \quad (4)$$

Если исследуемый объект представляет собой светящуюся линию, параллельную оси η , то мы получим то, что нужно, интегрируя (4)

¹⁾ *Phil. Trans.*, 1848, стр. 225; 1841, стр. 1.

²⁾ *Ibid.*, 1848, стр. 227.

по η от $-\infty$ до $+\infty$. Постоянный множитель не представляет особого интереса, так что мы можем считать приложимой к изображению линии формулу

$$I = \frac{2}{\xi^2} \sin^2 \frac{\pi \xi h}{\lambda f} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi R}{\lambda} - \frac{2\pi \xi h}{\lambda f} \right) \right\}. \quad (5)$$

Если $R = \frac{1}{2} \lambda$, то I обращается в нуль при $\xi = 0$; но полное освещение, выражаемое интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} I d\xi$, не зависит от значения R .

Если $R = 0$, то $I = \frac{1}{\xi^2} \sin^2 \frac{2\pi \xi h}{\lambda f}$, в согласии с § 11, где a означает то же, что здесь $2h$.

Выражение (5) дает освещение в ξ , обусловленное той частью полного изображения, геометрический фокус которой находится в $\xi = 0$, причем запаздывание для этой составляющей равно R . Так как мы должны теперь интегрировать для получения в данной точке O полного освещения, вызываемого всеми составляющими, фокусы которых расположены вблизи этой точки, то удобно принять точку O за начало координат. Тогда ξ есть координата относительно точки O любой фокальной точки O' , для которой запаздывание равно R ; искомым результатом получается тогда просто интегрированием (5) по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Каждому значению ξ соответствует особое значение λ , а также, вследствие диспергирующей способности пластинки, и R . Изменением λ можно, однако, при интегрировании пренебречь везде, кроме выражения $\frac{2\pi R}{\lambda}$, где небольшое изменение λ вызывает относительно большое изменение фазы. Если положим

$$\varrho = \frac{2\pi R}{\lambda}, \quad (6)$$

то мы должны считать ϱ функцией ξ , и с достаточным при всяких обычных условиях приближением мы можем положить

$$\varrho = \varrho' + \bar{\omega} \xi, \quad (7)$$

где ϱ' есть значение ϱ в точке O , а $\bar{\omega}$ — постоянная, положительная, когда вызывающая запаздывание пластинка помещена с той стороны, на которой *видна* синяя часть спектра. Появление темных полос возможно лишь тогда, когда $\bar{\omega}$ положительно. Только в этом случае выражение

$$\cos \left\{ \varrho' + \left(\omega - \frac{2\pi h}{\lambda f} \right) \xi \right\}$$

может сохранять постоянное значение -1 во всей области интегрирования и при этом только тогда, когда

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi h}{\lambda f}, \quad (8)$$

$$\cos \varrho' = -1. \quad (9)$$

Первое из этих уравнений выражает условие образования темных полос, а второе определяет их положение, совпадающее с тем, которое дает нестрогая теория.

Интегрирование может быть выполнено без особого труда. Для первого члена в (5) вычисление производится сразу по известной формуле. Во втором члене, замечая, что

$$\begin{aligned} \cos \left\{ \varrho' + \left(\bar{\omega} - \frac{2\pi h}{\lambda f} \right) \xi \right\} &= \cos \{ \varrho' - g_1 \xi \} = \\ &= \cos \varrho' \cos g_1 \xi + \sin \varrho' \sin g_1 \xi, \end{aligned}$$

мы видим, что вторая часть при интегрировании обращается в нуль и что остающийся интеграл имеет вид

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 h_1 \xi \cos g_1 \xi \frac{d\xi}{\xi^2},$$

где

$$h_1 = \frac{\pi h}{\lambda f}, \quad g_1 = \bar{\omega} - \frac{2\pi h}{\lambda f}. \quad (10)$$

Путем дифференцирования по g_1 можно показать, что

$$w = 0 \quad \text{от } g_1 = -\infty \quad \text{до } g_1 = -2h_1,$$

$$w = \frac{1}{2} \pi (2h_1 + g_1) \quad \text{от } g_1 = -2h_1 \quad \text{до } g_1 = 0,$$

$$w = \frac{1}{2} \pi (2h_1 - g_1) \quad \text{от } g_1 = 0 \quad \text{до } g_1 = 2h_1,$$

$$w = 0 \quad \text{от } g_1 = 2h_1 \quad \text{до } g_1 = \infty$$

Проинтегрированная интенсивность I' или

$$2\pi h_1 + 2 \cos \varrho' w$$

есть, таким образом,

$$I' = 2\pi h_1, \quad (11)$$

когда g_1 по абсолютной величине больше $2h_1$; и

$$I = \pi \{ 2h_1 + (2h_1 - \sqrt{g_1^2}) \cos \varrho' \}, \quad (12)$$

когда g_1 лежит между $\pm 2h_1$.

Оказывается, следовательно, что нет никаких полос, если только $\bar{\omega}$ не заключено между 0 и $+4h_1$, и что в этих пределах наилучшие полосы образуются посредине интервала, когда $\bar{\omega} = 2h_1$. Для получения полос, таким образом, необходимо, чтобы вызывающая запаздывание пластинка была помещена на уже указанной стороне так, чтобы $\bar{\omega}$ было положительно и чтобы толщина пластинки (которой пропорционально $\bar{\omega}$) не превышала известного предела, который мы можем обозначить через $2T_0$. При оптимальной толщине T_0 и только в этом случае полосы являются черными.

Линейная ширина полосы (e) равна приращению ξ , изменяющему e на 2π , так что

$$e = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (13)$$

При оптимальной толщине

$$\frac{1}{\omega} = \frac{2\pi h}{\lambda f}, \quad (14)$$

так что в этом случае

$$e = \frac{\lambda f}{h}. \quad (15)$$

Полосы имеют, следовательно, ту же толщину, что и полосы, обусловленные двумя бесконечно узкими отверстиями, совпадающими с центральными линиями запаздывающего и незапаздывающего пучков, когда исследуемый объект представляет тонкую светящуюся линию.

Если желательно наблюдать определенное число полос во всем спектре или в какой-либо части его, то тем самым определяется толщина вызывающей запаздывание пластинки, независимо от каких бы то ни было иных соображений. Но для того чтобы полосы можно было действительно наблюдать и, тем более, для того чтобы они могли быть черными, должно быть удовлетворено еще одно условие. Необходимо, чтобы отверстие зрачка было аккомодировано к угловой величине спектра или наоборот. Черные полосы будут слишком тонки, чтобы быть хорошо видимыми, если только отверстие ($2h$) зрачка не будет несколько сокращено. Подходящая величина зрачка — от одной двадцатой до одной пятидесятой дюйма. При заданном зрачке и числе полос условие черноты определяет угловую величину полосы и спектра. Очень удобно пользоваться решеткой, так как тогда не только видно одновременно несколько спектров, но, наклоня решетку, можно непрерывно изменять дисперсию. Щели могут быть вырезаны в жестяной пластинке и наполовину покрыты слюдой или „покровным стеклом“, закрепленным в этом положении при помощи небольшого количества замазки.

При пользовании зрительной трубой имеется некоторое отличие в наблюдаемой картине, зависящее от того, находится ли полупокрытое отверстие между глазом и окуляром или перед объективом. В первом случае функция зрительной трубы состоит просто в увеличении дисперсии, и образование полос, конечно, не зависит от того, каким именно образом возникает дисперсия. Если же полупокрытое отверстие находится перед объективом, то явление увеличивается как целое, и желаемое соотношение между (неувеличенной) дисперсией и величиной отверстия то же, что и в отсутствии зрительной трубы. Повидимому, преимущество от пользования последней состоит только в большей легкости аккомодации, а для этого, конечно, достаточно очень небольшая увеличивающая сила.

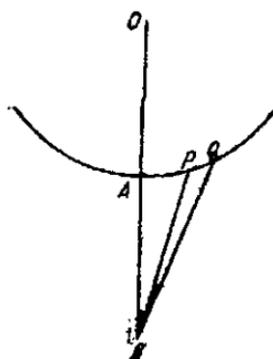
Исследование Стокса, здесь кратко очерченное, распространяется также на случай, когда пучки света неравной ширины h , k и отделены друг от друга промежутком $2g$. В случае неодинако-

вой ширины полосы не могут быть черными, но если $h = k$, то наличие промежутка $2g'$ не препятствует образованию черных полос.

Теория полос Тальбота при полупокрытом *круглом* отверстии была развита Струве ¹⁾ [26].

§ 17. ДИФРАКЦИЯ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИСТОЧНИК СВЕТА НАБЛЮДАЕТСЯ НЕ В ФОКУСЕ

Явления, подлежащие рассмотрению в этой главе, менее важны, чем явления, исследованные Фраунгофером, и будут изложены менее подробно; но в такой статье, как настоящая, нельзя не осветить вкратце их теорию, ввиду исторического интереса вопроса и той легкости, с которой можно произвести многие относящиеся к ним опыты. Один или два примера этих явлений уже привлекли наше внимание при рассмотрении зон Гюйгенса, а именно случай тени круглого диска и тени экрана, снабженного круглыми отверстиями; но наиболее известная задача такого рода, — впервые решенная Френелем, — относится к случаю тени экрана, ограниченного прямолинейным краем [27].



Фиг. 22.

В теоретических исследованиях эти задачи рассматриваются обычно как задачи в двух только измерениях, и все выкладки относятся к плоскости, проходящей через светящуюся точку и перпендикулярной к дифрагирующим краям, предполагаемым прямыми и параллельными. Строго говоря, это представление применимо только в том случае, когда источником является светящаяся линия, испускающая цилиндрические волны вроде тех, которые могли бы быть получены от светящейся точки с помощью цилиндрической линзы. Если предположим, с целью применения принципа Гюйгенса, что волна разбита на элементы, то во всех элементах разбиваемой поверхности, лежащих на линии, перпендикулярной к упомяну-

той плоскости, фаза одна и та же, и, следовательно, действие всей этой линии, или скорее бесконечно узкой полоски, находится в постоянном отношении (§ 15) к действию элемента, лежащего в самой плоскости, и может считаться представленным действием этого элемента. Тот же метод представления приложим и к сферическим волнам, исходящим из *точки*, если радиус кривизны их достаточно велик; действительно, хотя фаза и меняется вдоль бесконечно узкой полоски, однако, полное действие зависит практически от действия центральных ее частей, где фазу можно считать постоянной ²⁾.

¹⁾ *St. Petersburg Trans.*, 31, № 1, 1883.

²⁾ На опыте вместо светящейся точки иногда пользуются линией, чтобы увеличить освещение. Разные части линии являются здесь *независимыми* источниками и их следует рассматривать соответствующим образом. Допу-

В фиг. 22 APQ есть дуга круга, изображающая подлежащий разбиению на элементы волновой фронт, центр которого находится в точке O и радиус OA равен a . B есть точка, действие в которой мы ищем и которая находится на расстоянии $(a+b)$ от точки O , так что $AB = b$, $AP = s$, $PQ = ds$.

Принимая за основную фазу фазу вторичной волны, исходящей из точки A , мы можем представить действие PQ через

$$\cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\delta}{\lambda} \right) ds,$$

где $\delta = BP - AP$ есть разность хода в точке B волн, исходящих из точек P и A .

Но

$$\delta = \frac{(a+b)s^2}{2ab}, \quad (1)$$

так что если мы положим

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi(a+b)s^2}{ab\lambda} = \frac{\pi}{2} v^2, \quad (2)$$

то действие в точке B есть

$$\left\{ \frac{ab\lambda}{2(a+b)} \right\}^{1/2} \left\{ \cos \frac{2\pi t}{\tau} \int \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv + \sin \frac{2\pi t}{\tau} \int \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv \right\}, \quad (3)$$

где пределы интеграции зависят от расположения дифрагирующих краев. Если рассматривать a , b , λ как постоянные, то первый множитель может быть опущен, как в сущности и следует поступить последовательности ради, так как другие множители такого же рода уже были опущены.

Таким образом можно представить интенсивность I — величину, которая нас главным образом интересует, в виде

$$I^2 = \left\{ \int \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv \right\}^2 + \left\{ \int \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv \right\}^2. \quad (4)$$

Эти интегралы, взятые от $v = 0$, известны под названием интегралов Френеля; мы их обозначим через C и S , так что

$$C = \int_0^v \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv, \quad S = \int_0^v \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv. \quad (5)$$

Когда верхний предел бесконечен, так что пределы интеграции соответствуют учету половины первичной волны, C и S оба равны $1/2$, согласно известной формуле; вследствие быстрого изменения знака, те части области интегрирования, которые находятся вне очень небольших значений v , мало сказываются на результате.

стить, что первичная волна имеет и в этом случае цилиндрическую форму, было бы законно лишь в том случае, если бы вторичные волны, исходящие из разных центров, были синхронны.

Ряды по возрастающим степеням v для C и S даны Кнокенгаузэром и легко поддаются исследованию. Интегрируя по частям, мы находим

$$C + iS = \int_0^v e^{i \frac{1}{2} \pi v^2} dv = e^{i \frac{1}{2} \pi v^2} v - \frac{1}{3} i \pi \int_0^v e^{i \frac{1}{2} \pi v^2} dv^3;$$

продолжая этот процесс, мы получаем

$$C + iS = e^{i \frac{1}{2} \pi v^2} \left\{ v - \frac{i\pi}{3} v^3 + \frac{i\pi}{3} \frac{i\pi}{5} v^5 - \frac{i\pi}{3} \frac{i\pi}{5} \frac{i\pi}{7} v^7 + \dots \right\}.$$

Отделяя действительную часть от мнимой, имеем

$$\left. \begin{aligned} C &= M \cos \frac{1}{2} \pi v^2 + N \sin \frac{1}{2} \pi v^2, \\ S &= M \sin \frac{1}{2} \pi v^2 - N \cos \frac{1}{2} \pi v^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$M = \frac{v}{1} - \frac{\pi^2 v^5}{3 \cdot 5} + \frac{\pi^4 v^9}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots, \quad (7)$$

$$N = \frac{\pi v^3}{1 \cdot 3} - \frac{\pi^3 \cdot v^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\pi^5 v^{11}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \dots \quad (8)$$

Эти ряды сходятся для всех значений v , но на практике полезны только, когда v мало.

Удобные для исследования выражения в том случае, когда v велико, были получены Гильбертом ¹⁾. Полагая

$$\frac{1}{2} \pi v^2 = u, \quad (9)$$

мы можем написать

$$C + iS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{e^{iu} du}{\sqrt{u}}. \quad (10)$$

Но, согласно известной формуле, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ux} dx}{\sqrt{x}}. \quad (11)$$

Подставляя это выражение в (10) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$C + iS = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^u e^{u(i-x)} dx = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{e^{u(i-x)} - 1}{i-x}. \quad (12)$$

¹⁾ Мém. couronnés de l'Acad. de Bruxelles, 31, 1, см. также Verdet, Leçons, § 86.

Таким образом, если положим

$$G = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux} \sqrt{x} dx}{1+x^2}, \quad H = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux} dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}, \quad (13)$$

то

$$C = \frac{1}{2} - G \cos u + H \sin u, \quad S = \frac{1}{2} - G \sin u - H \cos u. \quad (14)$$

Постоянные члены в (14), а именно $\frac{1}{2}$, могут быть найдены прямым интегрированием (12) или из того, что, в силу своей структуры, выражения G и H обращаются в нуль при $u = \infty$, а C и S принимают тогда значение $\frac{1}{2}$.

Сравнивая выражения для C и S через M и N и через G и H , мы находим, что

$$G = \frac{1}{2} (\cos u + \sin u) - M, \quad H = \frac{1}{2} (\cos u - \sin u) + N, \quad (15)$$

— формулы, которые могут быть использованы для вычисления G и H , когда u (или v) мало. Например, когда $u = 0$, $M = 0$, $N = 0$ и, следовательно, $G = H = \frac{1}{2}$.

Полусходящиеся ряды по убывающим степеням u , пригодные для численных расчетов, когда u не очень велико, можно получить из (12), полагая $x = \frac{u}{y}$ и разлагая знаменатель в ряд по степеням y . Интегрирование необходимых нескольких членов может быть тогда произведено по формуле

$$\int_0^{\infty} e^{-u} y^{q-\frac{1}{2}} dy = \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) = \left(q - \frac{1}{2}\right) \left(q - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

и мы получаем, в функции v ,

$$G = \frac{1}{\pi^2 v^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{\pi^2 v^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{\pi^2 v^{11}} - \dots, \quad (16)$$

$$H = \frac{1}{\pi v} - \frac{1 \cdot 3}{\pi^3 v^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{\pi^5 v^5} - \dots \quad (17)$$

Соответствующие значения C и S были первоначально выведены Коши, без интегралов Гильберта, непосредственным интегрированием по частям.

С помощью только что полученных рядов для G и H легко проверить соотношения

$$\frac{dH}{dv} = -\pi v G, \quad \frac{dG}{dv} = \pi v H - 1. \quad (18)$$

Мы переходим теперь к более подробному рассмотрению распределения света на экране PBQ вблизи тени прямого края A . В точке P , внутри геометрической тени преграды, половина волны справа от точки C

(фиг. 23) (ближайшей к P точки на волновой поверхности) совершенно преграждена, а слева интегрирование следует произвести от $s = CA$ до $s = \infty$. Если V есть значение v , соответствующее CA а именно

$$V = \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}} CA, \quad (19)$$

то мы можем написать

$$I^2 = \left(\int_V^{\infty} \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv \right)^2 + \left(\int_V^{\infty} \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv \right)^2, \quad (20)$$

или, согласно нашим прежним обозначениям,

$$I^2 = \left(\frac{1}{2} - C_V \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S_V \right)^2 = G^2 + H^2. \quad (21)$$

В интегралах, представленных выражениями G и H , каждый элемент уменьшается с возрастанием V от нуля. Следовательно, по мере того как CA возрастает, т. е. по мере того как точка P все глубже погружается в тень, освещение *непрерывно* и при том неограниченно убывает. Давно уже было известно из наблюдения, что на внутренней стороне тени, падающей от края, полос нет.

Закон убывания в случае, когда V не очень велико, легко выразить с помощью рядов (16), (17) для G , H . Мы имеем в этом случае $G = 0$, $H = (\pi V)^{-1}$, так что

$$I^2 = \frac{1}{\pi^2 V^2},$$

т. е. освещение обратно пропорционально квадрату расстояния от тени края.

Для точки Q вне тени интегрирование распространяется на более чем половину первичной волны. Интенсивность может быть представлена в виде

$$I^2 = \left(\frac{1}{2} + C_V \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S_V \right)^2, \quad (22)$$

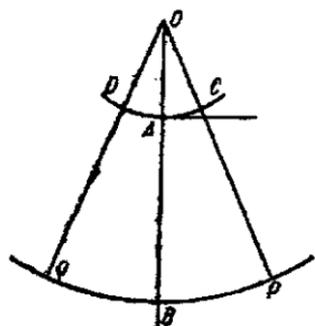
и максимумы и минимумы имеют место, когда

$$\left(\frac{1}{2} + C_V \right) \frac{dC}{dV} + \left(\frac{1}{2} + S_V \right) \frac{dS}{dV} = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{1}{2} \pi V^2 + \cos \frac{1}{2} \pi V^2 = G. \quad (23)$$

Когда $V = 0$, т. е. у края тени, $I^2 = 1/2$; когда $V = \infty$, $I^2 = 2$, в принятом нами масштабе. Последнее значение представляет интенсивность, вызываемую непрегражденной волной. Учетверение интенсивности при переходе от края тени наружу сопровождается, однако,



Фиг. 23.

колебаниями, вызывающими появление светлых и темных полос. Положение этих полос, определяемое равенством (23), можно представить очень просто, когда V велико, так как тогда с большим приближением $G = 0$ и

$$\frac{1}{2} \pi V^2 = \frac{3}{4} \pi + n\pi, \quad (24)$$

где n — целое число. Подставляя сюда δ из (2), имеем

$$\delta = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} n \right) \lambda. \quad (25)$$

Первый максимум появляется, когда $\delta = \frac{3}{8} \lambda = 0,0046 \lambda$, а первый минимум — когда $\delta = \frac{7}{8} \lambda = 0,0016 \lambda^2$; поправки легко получить из таблицы для G подстановкой приближенного значения V .

Положение Q , соответствующее заданному значению V , т. е. полосе заданного порядка, по (19) дается соотношением

$$BQ = \frac{a+b}{a} AD = V \sqrt{\frac{b\lambda(a+b)}{2a}}. \quad (26)$$

С помощью этого выражения мы можем начертить геометрическое место положений полосы заданного порядка при изменении b . С достаточным приближением мы можем рассматривать BQ и b как прямоугольные координаты точки Q . Обозначая их через x , y , так что AB есть ось y , а перпендикуляр к этой прямой в точке A — ось x , и избавляясь от иррациональности в (26), имеем

$$2ax^2 - V^2\lambda y^2 - V^2a\lambda y = 0,$$

что представляет уравнение гиперболы с вершинами в точках O и A .

Из (24) и (26) мы видим, что ширина полос порядка $\sqrt{\frac{b\lambda(a+b)}{a}}$. Отсюда мы можем заключить о пределе ширины источника света, при котором полосы еще могут быть достаточно отчетливо выражены. Если ω есть видимая величина источника, наблюдаемого из A , то ωb должно быть гораздо меньше указанной выше величины, или

$$\omega < \sqrt{\frac{\lambda(a+b)}{ab}}. \quad (27)$$

Если a очень велико в сравнении с b , то последнее условие обращается в

$$\omega < \sqrt{\frac{\lambda}{b}}, \quad (28)$$

так что если b не очень велико (1 метр), то видимая величина Солнца должна быть сильно уменьшена, прежде чем оно может быть использовано в качестве источника.

¹⁾ Verdet, Leçons, § 90.

Значения V для максимумов и минимумов интенсивности и значения последней были вычислены Френелем; в прилагаемой таблице дано извлечение из полученных им результатов.

	V	I^2
Первый максимум	1,2172	2,7413
Первый минимум	1,8726	1,5570
Второй максимум	2,3449	2,3990
Второй минимум	2,7392	1,6867
Третий максимум	3,0820	2,3022
Третий минимум	3,3913	1,7440

Весьма полное исследование этого и связанных с ним вопросов, с подробно разработанными таблицами относящихся сюда функций, можно найти в недавней работе Ломмеля¹⁾.

Когда функции C и S уже вычислены, обсуждение различных дифракционных задач сильно облегчается благодаря принадлежащей Корню²⁾ идее — представить в виде кривой соотношение между C и S , рассматриваемыми как прямоугольные координаты (x, y) некоторой точки. Такая кривая представлена на фиг. 24, где, согласно определению C и S [см. (5)],

$$x = \int_0^v \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv, \quad y = \int_0^v \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv. \quad (29)$$

Начало координат O соответствует $v=0$, а асимптотические точки J, J' , вокруг которых кривая завертывается в спираль с бесконечным числом оборотов, соответствуют $v = \pm \infty$.

Естественное уравнение кривой, выражающее соотношение между дугой σ (отсчитываемой от точки O) и углом наклона φ касательной в любой точке к оси x , принимает весьма простой вид. Действительно,

$$dx = \cos \frac{1}{2} \pi v^2 dv, \quad dy = \sin \frac{1}{2} \pi v^2 dv,$$

так что

$$\sigma = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = v, \quad (30)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \pi v^2. \quad (31)$$

Отсюда получаем

$$\varphi = \frac{1}{2} \pi \sigma^2, \quad (32)$$

и для кривизны

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \pi \sigma. \quad (33)$$

¹⁾ Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme, Abh. Bayer. Akad. der Wiss., Cl. II, том XV, отд. III, 1886.

²⁾ *Journal de Physique*, 3, стр. 1, 1874. Аналогичная идея была недавно независимо выдвинута Фитцджеральдом.

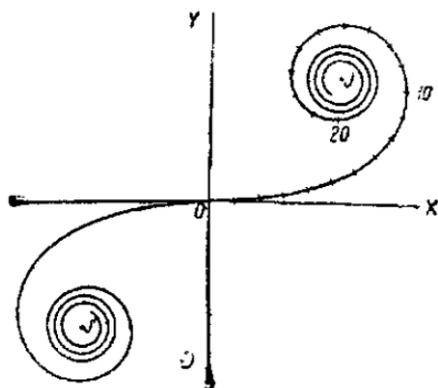
Корню замечает, что этого уравнения достаточно для определения общего характера кривой. В самом деле, соприкасающийся круг в любой точке кривой содержит всю ту часть кривой, которая лежит за точкой соприкосновения; последовательные обороты охватывают друг друга, нигде не пересекаясь.

Практическое значение этой кривой связано с тем фактом, что элементы ее дуги представляют по амплитуде и по фазе составляющие колебания, вызываемые соответствующими частями первичной волновой поверхности. Действительно, согласно (30), $d\sigma = dv$, а по (2) dv пропорционально ds . Кроме того, согласно (2) и (31), отставание по фазе элементарного колебания, исходящего из PQ (фиг. 22), равно $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$, или φ . Следовательно, согласно правилу сложения векторов, результирующее колебание в точке B , вызываемое какой-либо конечной частью первичной волны, представляется по амплитуде и фазе хордой, соединяющей концы соответствующей дуги ($\sigma_2 - \sigma_1$).

При применении кривой в различных частных случаях дифракции к представлению колебания в какой-либо точке (фиг. 23) центр кривой O надо считать соответствующим той точке C первичной волновой поверхности, которая находится ближе всего к P . Действующей частью или частями кривой являются, конечно, те, которые представляют непрегражденные части первичной волны.

Рассмотрим вновь, следуя Корню, дифракцию от экрана, с одной стороны не ограниченного, а с другой — заканчивающегося прямым краем. На освещенной стороне, на некотором расстоянии от тени, колебание представляется отрезком JJ' . Так как координаты точек J , J' суть $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, то $J^2 = 2$, а фаза отстает на $\frac{1}{4}$ периода от фазы элемента в точке O . По мере того как рассматриваемая точка приближается, как предполагается, к тени, колебание будет представляться хордой, проведенной от J к некоторой точке на другой половине кривой, движущейся по ее оборотам от J' к O . Амплитуда, таким образом, испытывает колебания, возрастающие по мере приближения к тени. В точке O интенсивность составляет четверть интенсивности всей волны, а после прохождения через эту точку, т. е. тогда, когда мы вошли в геометрическую тень, интенсивность постепенно, без колебаний, спадает до нуля. Весь ход явления, таким образом, представляется наглядно, весьма поучительным образом.

Предположим теперь, что свет проходит через щель, и исследуем, каково влияние изменения ширины щели на освещение в точке, являющейся проекцией ее центра. При этих условиях дуга, которую следует



Фиг. 24.

взять, делится пополам в точке O , и ее длина пропорциональна ширине щели. Легко видеть, что длина хорды (проходящей во всех случаях через точку O) возрастает до максимума вблизи того места, где отставание по фазе составляет $\frac{3}{8}$ периода; затем она уменьшается до минимума, когда отставание составляет около $\frac{7}{8}$ периода, и т. д.

Если щель имеет постоянную ширину и мы ищем освещение в разных точках экрана, находящегося за щелью, то мы должны считать, что дуга кривой имеет *постоянную длину*. В этом случае интенсивность, как и всегда, представляется квадратом длины хорды. Если щель узка, так что дуга коротка, то интенсивность остается постоянной в широких пределах и не уменьшается значительно до тех пор, пока расхождение крайних фаз не достигнет примерно четверти периода.

До сих пор мы предполагали, что тень от дифрагирующей преграды рассматривается на рассеивающем экране или, что сводится почти к тому же, наблюдается при помощи окуляра. Если глаз, снабженный, если это нужно, пластинкой с отверстием для уменьшения зрачка, поместить внутри тени в месте, где освещение еще заметно, и сфокусировать на дифрагирующий край, то воспринимаемый свет будет казаться идущим из области, находящейся вблизи края, и будет вызывать впечатление серебряной каймы. В этом состоит, без сомнения, объяснение „красивого оптического явления, наблюдаемого в Швейцарии, когда солнце восходит из-за отдаленных деревьев, стоящих на вершине горы“¹⁾.

§ 18. ДИФРАКЦИЯ, СИММЕТРИЧНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Общая проблема дифракционной картины, вызываемой точечным источником света, когда система симметрична относительно оси, была превосходно исследована Ломмелем²⁾. Мы должны ограничиться здесь весьма кратким очерком некоторых из его результатов.

Сферические волны радиуса a с центром, находящимся на оси, падают на дифрагирующий экран; требуется найти освещение на втором экране, подобно первому перпендикулярном к оси, на расстоянии $(a + b)$ от источника. Вычислим сначала расстояние (d) между элементом dS волнового фронта и точкой M в плоскости второго экрана. Пусть ζ обозначает расстояние точки M от оси симметрии; тогда, если проведем ось x через M , координаты M будут $(\zeta, 0, 0)$. В той же системе координаты элемента dS суть

$$a \sin \theta \cos \varphi, \quad a \sin \theta \sin \varphi, \quad a(1 - \cos \theta) + b,$$

¹⁾ Necker, *Phil. Mag.*, ноябрь 1832; Fox Talbot, *Phil. Mag.*, июнь 1833. „Непосредственно перед восходом солнца каждая ветка и каждый лист зажигаются серебристым блеском неопишуемой красоты... Птицы, как весьма правильно описывает Неккер, кажутся летающими блестящими искрами“. Тальбот приписывает это явление дифракции и советует пользоваться зрительной трубой.

²⁾ Abh. der Bayer. Akad. der Wiss., Cl. II, том XV, отд. II.

а расстояние d дается выражением

$$d^2 = b^2 + \zeta^2 - 2a\zeta \sin \theta \cos \varphi + 4a(a+b) \sin^2 \frac{1}{2} \theta.$$

В этом выражении ζ и θ следует считать малыми величинами. Полагая $a \sin \theta$ равным ρ , мы получаем приближенно

$$d = b + \frac{\zeta^2}{2b} - \frac{\zeta \cos \theta}{b} \rho + \frac{a+b}{2ab} \rho^2. \quad (1)$$

Если положим колебание в подлежащей разбиению на элементы волновой поверхности равным $\frac{1}{a} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$, то интегральное выражение для результирующей вторичных волн будет (§ 17)

$$- \frac{1}{ab\lambda} \iint \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{d}{\lambda} \right) dS. \quad (2)$$

Подставляя $\rho d\rho d\varphi$ вместо dS и вместо d его значение из (1), мы получим для интенсивности в точке ζ выражение

$$I^2 = \frac{1}{a^2 b^2 \lambda^2} (C^2 + S^2), \quad (3)$$

где¹⁾

$$C = \iint \cos \left(\frac{1}{2} k \rho^2 - l \rho \cos \varphi \right) \rho d\rho d\varphi, \quad (4)$$

$$S = \iint \sin \left(\frac{1}{2} k \rho^2 - l \rho \cos \varphi \right) \rho d\rho d\varphi \quad (5)$$

и для сокращения положено

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} k, \quad \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} = l. \quad (6)$$

Область интегрирования по φ от 0 до 2π .

Пределы для ρ зависят от рассматриваемой частной задачи; но для определенности мы предположим, что в аналитических определениях C и S пределы суть 0 и r , для того чтобы непосредственно приложить результаты к задаче о круглом отверстии радиуса r .

Вводя бесселевы функции, мы имеем

$$C = 2\pi \int_0^r J_0(l\rho) \cos \left(\frac{1}{2} k \rho^2 \right) \rho d\rho; \quad (7)$$

$$S = 2\pi \int_0^r J_0(l\rho) \sin \left(\frac{1}{2} k \rho^2 \right) \rho d\rho. \quad (8)$$

¹⁾ Эти буквы здесь употребляются в ином смысле, чем раньше.

Путем интегрирования этих выражений по частям, Ломмель получает ряды, удобные для вычислений. Полагая

$$kr^2 = y, \quad lr = z, \quad (9)$$

он находит прежде всего

$$C = \pi r^2 \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} U_1 + \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} U_2 \right\}, \quad (10)$$

$$S = \pi r^2 \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} U_1 - \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} U_2 \right\}, \quad (11)$$

где

$$U_1 = \frac{y}{z} J_1(z) - \frac{y^3}{z^3} J_3(z) + \frac{y^5}{z^5} J_5(z) - \dots, \quad (12)$$

$$U_2 = \frac{y^2}{z^2} J_2(z) - \frac{y^4}{z^4} J_4(z) + \frac{y^6}{z^6} J_6(z) - \dots \quad (13)$$

Эти ряды применимы, когда y меньше z .

Вторая пара выражений такова:

$$C = \pi r^2 \left\{ \frac{2}{y} \sin \frac{z^2}{2y} + \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 - \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right\}, \quad (14)$$

$$S = \pi r^2 \left\{ \frac{2}{y} \cos \frac{z^2}{2y} - \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 - \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right\}, \quad (15)$$

где

$$V_0 = J_0(z) - \frac{z^2}{y^2} J_2(z) + \frac{z^4}{y^4} J_4(z) - \dots, \quad (16)$$

$$V_1 = \frac{z}{y} J_1(z) - \frac{z^3}{y^3} J_3(z) + \frac{z^5}{y^5} J_5(z) - \dots \quad (17)$$

Эти ряды применимы, когда $\frac{z}{y}$ мало.

Когда первичная волна ничем не ограничена, $r = \infty$, и из второй пары выражений мы получаем сразу

$$C_\infty = \frac{2\pi}{k} \sin \frac{l^2}{2k}, \quad S_\infty = \frac{2\pi}{k} \cos \frac{l^2}{2k}, \quad (18)$$

так что

$$l^2 = \frac{C_\infty^2 + S_\infty^2}{a^2 b^2 \lambda^2} = \frac{1}{(a+b)^2}, \quad (19)$$

что и должно иметь место, как известно.

В приложении к задаче о тени от круглого диска пределы интегрирования берутся от r до ∞ . Обозначая эти интегралы через C' , S' , мы имеем

$$C' = C_\infty - C = \pi r^2 \left\{ -\frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 + \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right\}, \quad (20)$$

$$S' = S_\infty - S = \pi r^2 \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 + \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right\}, \quad (21)$$

и

$$C'^2 + S'^2 = \frac{4\pi^2}{k^2} (V_0^2 + V_1^2), \quad (22)$$

$$I^2 = \frac{V_0^2 + V_1^2}{(a+b)^2}. \quad (23)$$

Когда точка, освещение в которой требуется найти, расположена на оси, ζ , l , z равны нулю. Тогда $V_0 = 1$, $V_1 = 0$, и интенсивность

$$I^2 = \frac{1}{(a+b)^2},$$

т. е. такая же, как и в том случае, когда первичная волна ничем не преграждена. Это — теорема Пуассона, уже найденная нами (§ 10) гораздо более простым методом, в котором рассмотрение с самого начала было ограничено точками, лежащими на оси. Распределение света в других точках экрана можно найти из (23) с помощью рядов (16), (17) для V_0 и V_1 . Ломмель дает кривые для интенсивности при $y = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, вл. Светлое центральное пятно сопровождается кольцами различной интенсивности.

Границе геометрической тени $\left[\frac{\zeta}{a+b} = \frac{r}{a} \right]$ соответствует $y = z$. В этом случае

$$V_0 = J_0(z) - J_2(z) + J_4(z) - \dots = \frac{1}{2} \{ J_0(z) + \cos z \}, \quad (24)$$

$$V_1 = J_1(z) - J_3(z) + J_5(z) - \dots = \frac{1}{2} \sin z. \quad (25)$$

Числа, найденные для частных значений y и z , приложимы к целому классу задач. Так как

$$y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(a+b)}{ab} r^2, \quad z = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\zeta}{b} r,$$

то y и z остаются неизменными, даже когда λ постоянно, если предположим, что

$$b \sim a, \quad r \sim \zeta \sim \sqrt{a}. \quad (26)$$

Мы можем возвратиться к явлениям Фраунгофера, полагая $a = b = \infty$ или, более обще, $b = -a$, так что $y = 0$. В этом случае

$$C = \pi r^2 \frac{J_1(z)}{z}, \quad S = 0.$$

Представляется излишним еще что-либо добавить к этой главе.

§ 19. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Луч обыкновенного света симметричен по отношению к направлению своего распространения. Например, если это направление вертикально, то нет такого утверждения, которое было бы верно по отношению к северной и южной сторонам луча и не было бы в равной мере верно и по отношению к его западной и восточной сторонам. В поляризованном свете такая симметрия не имеет места. Гюйгенс показал, что когда луч такого света падает на кристалл исландского шпата, вращаемый около луча, как оси, то явления изменяются не так, как это соответствовало бы простому вращению вместе с шпатам. На языке Ньютона луч сам по себе имеет *стороны*, т. е. поляризован.

Малюс открыл, что обыкновенный свет может быть поляризован также при помощи отражения, как и посредством двойного преломления, а Брюстер доказал, что поляризация является почти полной, когда тангенс угла падения равен показателю преломления или (что сводится к тому же) когда отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг к другу. Полученный таким образом свет называется поляризованным в плоскости отражения.

Обратно, характер поляризации луча можно определить, подвергая его испытанию на отражение под подходящим углом. Когда нормаль к отражающей поверхности вращается (по конусу) вокруг луча, существуют два азимута плоскости падения, отстоящих друг от друга на 180° , при которых отражение максимально, и два других, отстоящих на 90° от первых, при которых отражение почти исчезает. В последнем случае плоскость падения перпендикулярна к той, в которой свет должен был бы отразиться, чтобы стать поляризованным.

Полная формулировка закона двойного преломления довольно сложна и едва ли может быть сделана понятной иначе, как в терминах волновой теории; но для того только, чтобы показать отношение двойного преломления в одноосном кристалле, например в исландском шпате, к поляризованному свету, мы можем взять случай призмы, вырезанной так, что преломляющее ребро параллельно оптической оси. Проходя через такую призму в плоскости, перпендикулярной к ребру, луч обыкновенного света разделяется на два луча равной интенсивности, каждый из которых преломляется согласно обычному закону Снеллиуса. Каковы бы ни были угол и положение призмы, явление можно описать, предполагая, что половина светового пучка преломляется с одним показателем преломления (1,65), а другая половина — с другим (1,48). Получающиеся таким образом лучи поляризованы: более преломляемый — в плоскости

преломления, а другой — в плоскости, перпендикулярной к ней. Если заставить эти лучи падать на вторую такую же призму, расположенную так, что ее ребро параллельно ребру первой призмы, то нового раздвоения не наблюдается. Луч, преломленный в первый раз с показателем 1,65, преломится снова таким же образом; так же и луч, преломленный в первый раз с показателем 1,48, снова так же преломится. Но дело меняется, если вращать вторую призму около падающего луча. При повороте на 90° каждый из лучей, правда, преломляется, как обычно, но теперь они обмениваются показателями преломления. Тот луч, который подвергался большему преломлению в первой призме, преломляется слабее во второй и наоборот. При промежуточных углах поворота двойное преломление опять имеет место, т. е. каждый луч разделяется на два луча, преломленных с указанными выше показателями преломления и с интенсивностями, зависящими от величины угла поворота, но всегда такими, что в целом при разделении нет потери (или приобретения) света.

Закон, которому подчиняется интенсивность, был сформулирован Малюсом и подтвержден измерениями Араго и других ученых. Если θ — угол поворота от того положения, в котором интенсивность одного из лучей достигает максимума, тогда как другой исчезает, то интенсивности пропорциональны $\cos^2 \theta$ и $\sin^2 \theta$. В этом масштабе, если пренебречь потерей света при отражении и поглощении, интенсивность падающего света равна единице.

Подобный же закон имеет место и для интенсивности при отражении поляризованного луча от стеклянной поверхности под углом Брюстера. Если отсчитывать угол θ от азимута максимального отражения, то интенсивность при других углах может быть представлена выражением $\cos^2 \theta$, обращаясь в нуль при $\theta = 90^\circ$.

Описанные здесь кратко явления принуждают нас стать на ту точку зрения, что световые колебания поперечны по отношению к направлению распространения. В обыкновенном свете колебания совершаются настолько же в одном направлении, насколько и во всяком другом; когда такой свет падает на двоякопреломляющую или отражающую среду, то колебания *разделяются* по двум определенным направлениям, составляя два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча, на которые среда действует по-разному. В этом случае интенсивности обоих лучей по необходимости одинаковы.

Рассмотрим, например, с этой точки зрения отражение луча обыкновенного света под углом поляризации, т. е. углом Брюстера. Падающий свет можно разложить на два луча одинаковой интенсивности, поляризованных соответственно в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Но мы знаем, что луч, поляризованный в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, не отразится, а целиком пройдет; отсюда необходимо следует, что весь свет, отраженный под этим углом, будет поляризован в плоскости падения. Действие пластинки, таким образом, чисто избирательное; поляризованная составляющая, отсутствующая в отраженном свете, представлена полностью в проходящем свете.

Если падающий свет поляризован, допустим, под углом θ к плоскости падения, то падающее колебание может быть разложено на

$\cos \theta$ в одной плоскости и $\sin \theta$ — в другой. Последняя поляризованная составляющая не отражается. Отраженный свет, следовательно, во всех случаях поляризован в плоскости отражения, а его *интенсивность*, пропорциональная квадрату амплитуды колебания, равна $k \cos^2 \theta$, если k — интенсивность, с которой отражается свет, поляризованный в плоскости отражения. Закон Малюса является, таким образом, необходимым следствием принципа разложения колебаний.

Представление о поперечных колебаниях было принято неохотно даже самими Юнгом и Френелем. Совершенная жидкость, какой тогда считали эфирную среду, по самому существу своему неспособна к поперечным колебаниям. Однако, повидимому нет никакой причины отдавать предпочтение а priori одному роду колебаний перед другим, а явления поляризации ясно показывают, что если световые колебания подобны колебаниям материальной среды, то мы должны обратиться к твердым телам, а не к жидкостям. В изотропном твердом теле могут распространяться два различных рода волн — волны, зависящие от *упругости*, т. е. силы, с которой тело сопротивляется сдвигу, и волны, аналогичные звуковым и зависящие от *сжимаемости*. В первом типе волн колебания поперечны по отношению к направлению распространения, т. е. они могут совершаться в любом направлении, параллельном фронту волны и, таким образом, подходят для представления световых колебаний. В этой теории светоносный эфир явно уподобляется твердому телу, и скорость света зависит от *упругости* и *плотности*, приписываемых среде.

Возможность продольных волн, в которых смещение перпендикулярно к фронту волны, является возражением против упругой теории света, так как в оптике неизвестно ничего, что им соответствовало бы. Однако, если мы вместе с Грином предположим, что среда несжимаема, то скорость продольных волн становится бесконечной и возражение в значительной степени отпадает. Такое предположение едва ли является отступлением от первоначальных представлений, так как, насколько мы знаем, нет ничего, что препятствовало бы твердому веществу обладать этими свойствами, и тела, представляющие приближение к такой среде, действительно существуют, как, например, студень, в котором скорость продольных колебаний во много раз больше скорости поперечных колебаний.

§ 20. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

Условия, при которых имеет место интерференция поляризованного света, легче всего вывести из явлений цветов кристаллических пластинок, если мы примем взгляд Юнга, что происхождение этих цветов надо искать в интерференции различным образом преломленных лучей. Независимо от какой-либо гипотезы подобного рода вопрос был непосредственно исследован Френелем и Араго ¹⁾, которые следующим образом резюмировали свои выводы:

1. При тех самых условиях, при которых два луча обыкновенного света как бы уничтожают друг друга, два луча, поляризованные в про-

¹⁾ Френель, Сочинения, том I, стр. 521 (англ. изд.).

твояположных (т. е. взаимно перпендикулярных)¹⁾ направлениях, не оказывают влияния друг на друга.

2. Два луча, поляризованные в одном и том же направлении, действуют друг на друга подобно обыкновенным лучам, так что для этих двух родов света явления интерференции тождественны.

3. Два луча, первоначально поляризованные в противоположных направлениях, могут затем быть приведены к одной и той же плоскости поляризации без того, чтобы они тем самым приобрели способность воздействовать друг на друга.

4. Два луча, поляризованные в противоположных направлениях и затем приведенные к одной и той же поляризации, действуют друг на друга точно так же, как естественные лучи, если они возникли из пучка, первоначально поляризованного в одном направлении.

Тот факт, что противоположно поляризованные лучи нельзя заставить интерферировать, может сам по себе рассматриваться как доказательство того, что колебания поперечны; это положение, раз принятое, дает понятное объяснение всех разнообразных явлений в этой области оптики. Некоторую трудность представляют только вопросы о природе обыкновенного неполяризованного света и о правилах, по которым следует вычислять интенсивность; будет уместно рассмотреть эти вопросы несколько подробнее.

В обыкновенном (линейно) поляризованном свете колебания, по предположению, происходят только в одном направлении. Если x и y — прямоугольные координаты в плоскости волны, то мы можем охарактеризовать правильное колебание линейно поляризованного света выражением

$$x = a \cos(\varphi - a), \quad (1)$$

где $\varphi = \frac{2\pi t}{\tau}$ и a , a — постоянные. Надо, однако, помнить, что в оптике правильное колебание этого рода никогда не встречается. В простейшем случае приблизительно монохроматического света амплитуду и фазу надо считать (§ 4) подверженными непрерывному изменению; то, что мы в состоянии воспринять, является средней интенсивностью, представляемой выражением $M(a^2)$. Если несколько таких неправильных потоков света сливаются, то интенсивность смеси нельзя вычислить, зная только отдельные интенсивности, если только мы не уверены, что потоки независимы, т. е. что между их фазами нет соотношений длительного характера. Например, два совершенно одинаковых потока сливаются в один поток учетверенной интенсивности, если фазы одинаковы, тогда как в случае противоположности фаз интенсивность падает до нуля. Только в том случае, когда потоки независимы, так что соотношение между фазами произвольно меняется от одного момента к дру-

¹⁾ Следуя автору, мы в дальнейшем сохраняем терминологию Френеля и Араго, называвших лучи света, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, „противоположно-поляризованными“ или „поляризованными в противоположных направлениях“.

тому, наблюдаемая результирующая интенсивность по необходимости вдвое больше составляющих интенсивностей.

При наложении любого числа независимых колебаний типа (1) результирующее колебание равно

$$\left[\sum a_1 \cos \alpha_1 \right] \cos \varphi + \left[\sum a_1 \sin \alpha_1 \right] \sin \varphi,$$

а мгновенная интенсивность равна

$$\left[\sum a_1 \cos \alpha_1 \right]^2 + \left[\sum a_1 \sin \alpha_1 \right]^2,$$

или

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \dots$$

Так как соотношения между фазами неизвестны, то эта величина является совершенно неопределенной. Но так как каждый косинус изменяется от момента к моменту и в целом оказывается столько же раз положительным, сколько и отрицательным, то средняя интенсивность равна

$$M(a_1^2) + M(a_2^2) + \dots,$$

т. е. она получается простым сложением отдельных интенсивностей.

Освободимся теперь от ограничения колебания одним направлением и рассмотрим в первую очередь характер *правильного* колебания данной частоты. Общим выражением его будет

$$x = a \cos(\varphi - \alpha), \quad y = b \cos(\varphi - \beta), \quad (2)$$

где a , α , b , β — постоянные. Если $\beta = \alpha$, то колебания происходят исключительно в плоскости $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, т. е. свет является линейно поляризованным. Если $\beta = \pi - \alpha$, то свет опять линейно поляризован, причем плоскостью колебания будет $\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}$. В других случаях колебания не ограничены одной плоскостью, так что свет не является линейно поляризованным; его называют *эллиптически* поляризованным, в соответствии с траекторией, определяемой уравнениями (2). Если устроить так, чтобы одна из составляющих эллиптически поляризованного света опередила другую или отстала от нее на подходящую величину, то его можно превратить в линейно поляризованный свет и обнаружить это обычными способами. Или, наоборот, линейно поляризованный свет можно подобным путем превратить в эллиптически поляризованный. Это относительное опережение легко произвести с помощью пластинки двойкопреломляющего кристалла, вырезанной параллельно оси.

Если $\beta = \alpha \pm \frac{1}{2}\pi$ либо в первый момент, либо после прохождения через пластинку кристалла, то

$$x = a \cos(\varphi - \alpha), \quad y = \pm b \sin(\varphi - \alpha). \quad (3)$$

Одна из координат достигает максимальных и минимальных значений в те моменты, когда другая обращается в нуль, и координатные оси являются *главными* осями эллиптической траектории.

Важный частный случай имеет место, далее, при $b=a$. Тогда траектория есть окружность, и свет называется поляризованным *по кругу*. Окружность описывается в том или ином направлении, в зависимости от знака во втором из уравнений (3).

Свет, поляризованный по кругу, может быть разложен на линейно поляризованные составляющие в *любых* двух взаимно перпендикулярных направлениях, причем интенсивности составляющих одинаковы, а фазы разнятся на четверть периода. Если толщина пластинки кристалла такова, что пластинка вызывает отставание одной из составляющих относительно другой на четверть длины волны (или нечетное кратное число четвертей), то она будет превращать линейно поляризованный свет в свет поляризованный по кругу и обратно, — в последнем случае независимо от того, по какому азимуту она расположена.

Тем же свойством, что и свет, поляризованный по кругу, а именно способностью разлагаться на противоположно линейно поляризованные составляющие равной интенсивности, обладает также естественный неполяризованный свет; однако отличить их друг от друга на опыте можно при помощи пластинки в четверть волны. Последняя превращает луч, поляризованный по кругу, в линейно поляризованный, тогда как естественный свет остается неизменным.

Остается одна трудность — дать объяснение физической природе естественного света. К этому мы вскоре перейдем; однако уже сейчас ясно, что строение естественного света по самому своему существу неправильно, ибо мы видели выше, что абсолютно правильный, т. е. абсолютно однородный, свет *необходимо является (эллиптически) поляризованным*.

При рассмотрении колебания, представленного уравнениями (2), мы считали амплитуды и фазы постоянными; но в природе это так же неосуществимо, как и в случае линейно поляризованного света. Для того чтобы эллиптическая поляризация могла иметь определенный характер, необходимо только, чтобы *отношение* амплитуд и *разность* фаз были абсолютно постоянными, и это, конечно, совместимо с такой же степенью неправильности, какая была допущена для линейно поляризованных колебаний.

Интенсивность эллиптически поляризованного света равна сумме интенсивностей его взаимно перпендикулярных составляющих. Это положение мы можем рассматривать и как экспериментальный факт и как следствие из теории поперечных колебаний. В какой бы форме ни принимать эту теорию, распространяющаяся энергия будет наверняка подчиняться этому закону. Если считать постоянные в (2) подверженными изменению, то наблюдаемая интенсивность дается выражением

$$M(a^2) + M(b^2). \quad (4)$$

Теперь мы в состоянии исследовать строение, которое надо приписать естественному свету. Условия, которые должны быть удовлетво-

рены, состоят в том, что средняя интенсивность колебаний при разложении их в любой плоскости должна быть независимой от ориентации плоскости и, далее, что это свойство должно иметь место независимо от любого предшествующего относительного запаздывания взаимно перпендикулярных составляющих, на которые колебание могло быть разложено. Пусть первоначальное колебание представлено выражениями

$$x = a \cos(\varphi - \alpha), \quad y = b \cos(\varphi - \beta),$$

или, как мы можем написать еще, поскольку мы имеем дело только с разностями фаз,

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi - \delta); \quad (5)$$

предположим, что вторая составляющая испытала отставание ε . Тогда

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi - \delta - \varepsilon), \quad (6)$$

где a , b , δ считаются быстро изменяющимися, тогда как ε остается постоянным. Если колебание, представленное выражениями (6), теперь разложить в направлении x' , составляющем угол ω с осью x , то получим

$$\begin{aligned} x' &= a \cos \varphi \cos \omega + b \cos(\varphi - \delta - \varepsilon) \sin \omega = \\ &= [a \cos \omega + b \sin \omega \cos(\delta + \varepsilon)] \cos \varphi + b \sin \omega \sin(\delta + \varepsilon) \sin \varphi, \end{aligned}$$

а интенсивность будет равна

$$a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \omega \sin \omega \cos(\delta + \varepsilon). \quad (7)$$

От этого выражения мы берем среднее, оставляя ω и ε постоянными. Тогда наблюдаемая интенсивность может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} M(x'^2) &= M(a^2) \cos^2 \omega + M(b^2) \sin^2 \omega + \\ &+ 2M[ab \cos(\delta + \varepsilon)] \cos \omega \sin \omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Для того чтобы световой поток мог удовлетворять условиям, которые мы установили, как необходимые для естественного света, выражение (8) должно быть независимым от ω и ε , так что

$$M(a^2) = M(b^2), \quad (9)$$

$$M(ab \cos \delta) = M(ab \sin \delta) = 0. \quad (10)^1$$

В этих уравнениях a^2 и b^2 представляют собой просто интенсивности, или квадраты амплитуд колебаний по осям x и y , другие две величины также допускают простое истолкование. Значение y может быть написано в виде

$$y = b \cos \delta \cos \varphi + b \sin \delta \sin \varphi, \quad (11)$$

откуда видно, что $b \cos \delta$ есть коэффициент той части колебания по оси y , которая имеет ту же фазу, что и колебание по оси x . Таким

¹) Verdet, Leçons d'Optique Physique, том II, стр. 83.

образом выражение $ab \cos \delta$ можно истолковать как произведение коэффициентов тех частей колебаний по осям x и y , которые имеют одну и ту же фазу. Предположим затем, что фаза колебания по оси y передвинута вперед на $1/2 \pi$, т. е. будем писать $1/2 \pi + \varphi$ вместо φ . Тогда будем иметь

$$y = -b \cos \delta \sin \varphi + b \sin \delta \cos \varphi,$$

и $ab \sin \delta$ представляет собой произведение коэффициентов тех частей колебаний, которые имеют теперь одну и ту же фазу, или (что то же самое) произведение коэффициентов колебания по оси x и той части колебания по оси y , которая отставала по фазе на 90° . Вообще, если

$$x = h \cos \varphi + h' \sin \varphi, \quad y = k \cos \varphi + k' \sin \varphi, \quad (12)$$

то первое произведение есть $hk + h'k'$, а второе $hk' - h'k$.

Рассмотрим теперь, как изменяются полученные нами выше величины при преобразовании координат по формулам

$$x' = x \cos \omega + y \sin \omega, \quad y' = -x \sin \omega + y \cos \omega. \quad (13)$$

Находим

$$x' = \cos \varphi \{a \cos \omega + b \sin \omega \cos \delta\} + \sin \varphi b \sin \delta \sin \omega, \quad (14)$$

$$y' = \cos \varphi \{-a \sin \omega + b \cos \omega \cos \delta\} + \sin \varphi b \sin \delta \cos \omega, \quad (15)$$

откуда

$$\text{ампл}^2 \text{ от } x' = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega, \quad (16)$$

$$\text{ампл}^2 \text{ от } y' = a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega. \quad (17)$$

Подобным же образом

$$\text{первое произведение} = (b^2 - a^2) \sin \omega \cos \omega + ab \cos \delta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega), \quad (18)$$

$$\text{второе произведение} = ab \sin \delta. \quad (19)$$

Второе произведение, представляющее круговую часть движения, таким образом, не изменяется при преобразовании.

Перейдем к рассмотрению средних величин, фигурирующих в (9) и (10), полагая для краткости

$$M(a^2) = A, \quad M(b^2) = B, \quad M(ab \cos \delta) = C, \quad M(ab \sin \delta) = D.$$

Обозначая соответствующие величины после преобразования через A' , B' , C' , D' , мы имеем из (16), (17), (18), (19)

$$A' = A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega + 2C \cos \omega \sin \omega, \quad (20)$$

$$B' = A \sin^2 \omega + B \cos^2 \omega - 2C \cos \omega \sin \omega, \quad (21)$$

$$C' = C (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + (B - A) \cos \omega \sin \omega, \quad (22)$$

$$D' = D. \quad (23)$$

Из этих формул следует, что если условия (9), (10), которые, как было показано, необходимы для того, чтобы свет мог иметь свойства естественного света, удовлетворяются по отношению к одной системе осей координат, то они будут удовлетворяться и по отношению к любой другой. Таким образом безразлично, по отношению к каким осям вводится предполагаемое отставание ε , и условия (9), (10) не только необходимы, но и достаточны для характеристики естественного света.

Возвращаясь к (8), мы видим, что, насколько это можно обнаружить на опыте, характер света, безразлично, естественного или нет, определяется значениями величин A , B , C , D . Изменение последних при переходе к новым осям определяется равенствами (20) и т. д., и очевидно, что новые оси всегда могут быть выбраны так, чтобы $C' = 0$. Для этого необходимо только выбрать ω таким, чтобы

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2C}{A-B}.$$

Если мы примем эти новые оси за главные оси, то значения постоянных для любых других осей, наклоненных к первым под углом ω , будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 \cos^2 \omega + B_1 \sin^2 \omega, \\ B &= A_1 \sin^2 \omega + B_1 \cos^2 \omega, \\ C &= (B_1 - A_1) \cos \omega \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Если A_1 и B_1 здесь равны, то $C = 0$, $A = B$ для всех значений ω . В этом случае свет нельзя отличить от естественного света простым его разложением; но если D конечно, то различие может быть обнаружено при помощи пластинки, вводящей разность хода.

Если A_1 и B_1 не равны, то они представляют максимальное и минимальное значения A и B . Интенсивность является тогда функцией положения плоскости разложения, и с помощью обычных методов можно обнаружить, что свет частично поляризован. Если A_1 и B_1 равно нулю, то свет линейно поляризован¹⁾.

При слиянии нескольких независимых пучков света, значения не только A и B , но и C и D для смеси получаются простым сложением. Здесь следует ясно представлять себе, что между фазами одной составляющей и другой нет постоянных соотношений. Предположим, например, что имеются два пучка света, в каждом из которых удовлетворяются соотношения $A = B$, $C = 0$, но D имеет конечное значение. Если оба значения D равны, но противоположны по знаку и пучки независимы, то смесь их образует естественный свет. Особый случай имеет место, когда оба пучка поляризованы по кругу ($D = \pm A = \pm B$), но один — вправо, а другой — влево. Так как интенсивности равны, то смесь их эквивалентна естественному свету, но лишь при том условии, что фазы пучков не связаны каким-либо соотношением. Если же, напротив, второй пучок подобен первому и только отстает от него по фазе

¹⁾ В этом случае D_1 по необходимости обращается в нуль.

на постоянную величину, то смесь их будет уже не естественным, а вполне (линейно) поляризованным светом.

Мы докажем теперь, что самую общую смесь света можно рассматривать как составленную из одного пучка определенным образом эллиптически поляризованного света и второго независимого от него пучка естественного света. Эта теорема принадлежит Стоксу ¹⁾, но мы будем следовать способу доказательства, предложенному Верде ²⁾.

Прежде всего следует отметить, что значения основных величин A , B , C , D не свободны от ограничений. Покажем, что никогда $C^2 + D^2$ не может превышать AB .

Пусть в уравнениях (2), выражающих колебание в любой момент, a_1, b_1, a_2, b_2 будут значениями a, b, α, β в течение промежутка времени, пропорционального m_1 , и точно так же пусть значки 2, 3 соответствуют промежуткам времени, пропорциональным m_2, m_3, \dots Тогда

$$AB = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \dots + m_1 m_2 (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) + \dots$$

Согласно (12), имеем

$$C = m_1 a_1 b_1 (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1) + \dots$$

$$= m_1 a_1 b_1 \cos \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos \delta_2 + \dots,$$

$$D = m_1 a_1 b_1 \sin \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin \delta_2 + \dots,$$

где, как и выше,

$$\delta_1 = \beta_1 - \alpha_1, \quad \delta_2 = \beta_2 - \alpha_2 \dots$$

Отсюда

$$C^2 + D^2 = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \dots + m_1 m_2 a_1 b_1 a_2 b_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) + \dots$$

Из этих уравнений видно, что $AB - C^2 - D^2$ сводится к сумме членов вида

$$m_1 m_2 [a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)],$$

каждый из которых существенно положителен.

Эта сумма может равняться нулю только в том случае, когда

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \dots,$$

и, кроме того,

$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2 = b_3 : a_3 = \dots$$

При этих условиях поляризация света должна быть определенно эллиптической, хотя амплитуда и фаза системы, как целого, могут подвергаться быстрому изменению. Эллиптические постоянные даются соотношениями

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{B}{A}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{D}{C}. \quad (25)$$

¹⁾ „On the Composition and Resolution of Streams of Light from Different Sources, *Camb. Phil. Trans.*, 1852

²⁾ *Loc. cit.*, стр. 94.

В общем случае AB больше $C^2 + D^2$, но всегда возможно найти такую положительную величину H , которая, при вычитании ее из A и B (также существенно положительных величин), приводит произведение к равенству с $C^2 + D^2$:

$$(A - H)(B - H) = C^2 + D^2. \quad (26)$$

Первоначальный свет может быть, таким образом, разложен на две группы. Для первой группы постоянные суть $H, H, 0, 0$; для второй $A - H, B - H, C, D$. Каждая из них имеет простой характер, а именно первая представляет естественный свет, а вторая — эллиптически поляризованный. Таким образом доказано, что в общем случае пучок света можно рассматривать как составленный из пучка естественного света и другого пучка — эллиптически поляризованного света. Интенсивность естественного света равна $2H$, где по (26)

$$H = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}. \quad (27)$$

Эллиптические постоянные второго пучка даются соотношениями

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{B - H}{A - H}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{D}{C}. \quad (28)$$

и

$$M(a^2) = A - H. \quad (29)$$

Если $D = 0$, а следовательно, по (28) и $\delta = 0$, то второй пучок линейно поляризован. Это можно рассматривать как частный случай эллиптической поляризации. Наконец, если $A = B, C = 0$, то поляризация круговая.

Законы интерференции поляризованного света, открытые Френелем и Араго, — именно те законы, какие следовало бы ожидать, исходя из теории поперечных колебаний, после выяснения представления о неполяризованном свете. Обычные источники света, как, например, солнце, испускают неполяризованный свет. Если разложить его по двум противоположным направлениям, то не только каждая из поляризованных составляющих не представляет правильного колебания, но и нет постоянного фазового соотношения между ними. Поэтому, свет от одной из них ни в каком случае не может интерферировать правильно со светом от другой составляющей. Если, однако, мы будем исходить из линейно поляризованного света, то мы будем иметь дело только с одним рядом неправильностей. Получающиеся при разложении по двум взаимно перпендикулярным направлениям составляющие не могут интерферировать, но только вследствие их перпендикулярности. Если путем разложения привести их снова к одной и той же плоскости поляризации, то интерференция становится возможной, так как в обеих составляющих имеет место один и тот же ряд неправильностей.

§ 21. ДВОЙНОЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ

Построение, при помощи которого Гюйгенс объяснил обыкновенное и необыкновенное преломления в исландском шпате, уже было приведено в статье „Свет“ (Епс. Brit., том XIV, стр. 610, 1888). Волновая поверхность состоит из двух оболочек, представляющих шар и эллипсоид вращения, соприкасающихся друг с другом в концах полярной оси. В двусосных кристаллах волновая поверхность имеет более сложный вид, частным случаем которого является поверхность Гюйгенса.

Важно отметить, что в теории двойного лучепреломления главной задачей является определение двух скоростей, с которыми распространяются плоские волны при заданном направлении нормали к фронту волны. Когда эта задача разрешена, определение волновой поверхности является чисто геометрической задачей, и оно не безусловно необходимо для объяснения основных явлений, хотя и удобно, так как дает сжатую сводку главных законов. Во всех случаях волновую поверхность надо рассматривать как огибающую в любой последующий момент времени всех плоских волновых поверхностей, которые в заданный момент можно считать проходящими через данную точку.

В обычных преломляющих средах, где скорость волны одинакова во всех направлениях, нормаль к волне совпадает с лучом. В двупреломляющих кристаллах этот закон более не имеет места. Рассуждения, которые оправдывают применение понятия луча (§ 10), будучи приложены к данному случаю, показывают, что центр системы зон, вообще говоря, не находится при основании перпендикуляра к первичной волновой поверхности. Поверхность, соприкосновение которой с первичным волновым фронтом определяет элемент, от которого вторичное возмущение приходит с наименьшим запозданием, теперь не сфера, а некоторая волновая поверхность, соответствующая среде. Направлением луча, соответствующим какой-либо касательной плоскости к волновой поверхности, является, таким образом, не нормаль, а радиус-вектор, проведенный из центра к точке соприкосновения.

Скорость распространения (отсчитываемая всегда перпендикулярно к фронту волны) можно представить себе зависящей от направления волнового фронта, или нормали к волне, и от того, что мы можем назвать (по крайней мере, образно) направлением колебания. Если бы скорость зависела исключительно от нормали к волне, то не могло бы быть двойного преломления, хотя необыкновенное преломление, т. е. преломление, не подчиняющееся закону Снеллиуса, и могло бы иметь место; однако в природе ничего подобного не обнаружено. Тот факт, что вообще имеются две скорости для одного волнового фронта, доказывает, что скорость зависит от направления колебания.

Согласно закону Гюйгенса, подтвержденному с большой точностью наблюдениями Брюстера и Свана ¹⁾, луч, поляризованный в главной плоскости (т. е. в плоскости, проходящей через ось) одноосного кристалла, подвергается только обыкновенному преломлению, т. е. распро-

¹⁾ Edin. Trans., 16, стр. 375.

страняется с одной и той же скоростью во всех направлениях. Объяснение, даваемое этому Френелем, состоит в том, что колебания (понимаемые здесь в буквальном смысле) перпендикулярны к плоскости поляризации и что скорость постоянна вследствие того, что направление колебания расположено при этом всегда одинаково (перпендикулярно) по отношению к оси. Развитие этой идеи в богатом мыслями уме Френеля привело его к замечательному открытию закона преломления в двусных кристаллах.

Гипотезы, которые Френель положил в основу своей механической теории, сформулированы Верде следующим образом:

1. Колебания поляризованного света перпендикулярны к плоскости поляризации.

2. Упругие силы, развивающиеся во время распространения системы плоских волн (прямолинейных поперечных колебаний), отличаются от упругих сил, возникающих при параллельном смещении одной молекулы, только постоянным множителем, не зависящим от направления плоскости волны.

3. Когда плоская волна распространяется в какой-либо однородной среде, действующими являются только параллельные фронту волны составляющие упругих сил, вызываемых колебаниями волны.

4. Скорость плоской волны, распространяющейся в какой-либо однородной среде без изменения формы, пропорциональна квадратному корню из действующей составляющей упругой силы, вызываемой колебаниями.

Сам Френель прекрасно сознавал недостаточную строгость своей теории; действительно, немного можно сказать в защиту его второй гипотезы. Тем не менее большой исторический интерес этой теории и подтверждение опытом вывода Френеля относительно действительной формы волновой поверхности в двусных кристаллах заставляют дать некоторое представление о его работе в этой области.

Потенциальная энергия смещения одной молекулы из ее положения равновесия является в конечном счете квадратичной функцией трех составляющих смещения, отсчитываемых параллельно любым трем взаимно перпендикулярным осям. Эти оси можно выбрать так, что квадратичная функция сведется к сумме квадратов, так что энергия может быть выражена в виде

$$V = \frac{1}{2} a^2 \xi^2 + \frac{1}{2} b^2 \eta^2 + \frac{1}{2} c^2 \zeta^2, \quad (1)$$

где ξ , η , ζ — три составляющих смещения. Соответствующие упругие силы, получаемые сразу дифференцированием, суть

$$X = a^2 \xi, \quad Y = b^2 \eta, \quad Z = c^2 \zeta. \quad (2)$$

Таким образом упругая сила, вообще говоря, составляет некоторый угол с направлением смещения. Соотношение между направлениями X , Y , Z и ξ , η , ζ такое же, как и между нормалью к касательной плоскости и радиусом-вектором ρ к точке касания на эллипсоиде:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 1. \quad (3)$$

Если a^2 , b^2 , c^2 не равны, то направления координатных осей являются единственными направлениями, в которых смещение вызывает параллельную ему самому упругую силу. Если две из величин a^2 , b^2 , c^2 равны, то (3) представляет эллипсоид вращения, и любое направление в плоскости равных осей обладает упомянутым свойством. Это — случай одноосного кристалла. Если все три величины a^2 , b^2 , c^2 равны, то среда изотропна.

Если мы разложим упругую силу по направлению смещения, то мы получим величину, зависящую от этого направления, причем эта зависимость легко выражается при помощи эллипсоида упругости (3). Действительно, при заданном полном смещении эта величина пропорциональна

$$\frac{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

т. е. обратно пропорциональна квадрату радиуса-вектора ρ в (3).

Нам теперь нужно исследовать, в каких направлениях, лежащих в определенной плоскости, смещение может быть произведено так, чтобы проекция упругой силы на эту плоскость могла быть параллельной смещению. Ответ непосредственно вытекает из свойства эллипсоида упругости. В самом деле, если в каком-либо сечении эллипсоида мы имеем такой радиус-вектор, что плоскость, содержащая его и нормаль к соответствующей касательной плоскости, перпендикулярна к плоскости сечения, то касательная к сечению должна быть перпендикулярна к радиусу-вектору, т. е. радиус-вектор должен быть одной из главных осей сечения. Следовательно, имеются два и, вообще говоря, только два направления в любой плоскости, удовлетворяющих поставленному условию, и эти направления взаимно перпендикулярны. Однако, если плоскость является одной из тех плоскостей, где сечение круглое, то каждое направление смещения таково, что составляющая силы, параллельная плоскости, с ним совпадает.

Согласно принципам, установленным Френелем, мы имеем теперь все необходимые данные для решения задачи о двойном преломлении. Если направление волнового фронта задано, то имеются, вообще говоря, только два таких направления колебания, при которых распространяется одна единственная волна. Если действительные смещения не подчиняются этому условию, то они разложатся на два смещения требуемого характера, и составляющие будут распространяться, вообще говоря, с разными скоростями. Эти два направления суть главные оси сечения эллипсоида (3) волновым фронтом, и скорости распространения обратно пропорциональны длинам этих осей.

Закон, связывающий длины осей с направлением (l, m, n) плоскости, есть вопрос геометрии ¹⁾; и в самом деле, все исследование волновой поверхности может быть изящно проведено от начала до конца геометрически при помощи некоторых теорем Мак-Куллаха, относящихся к апсидальным поверхностям (Сальмон, гл. XIV). Однако у нас нет

¹ См. Salmon, *Analytical Geometry of Three Dimensions*, Dublin, 1882, § 102.

места для этого, и мы должны ограничиться кратким очерком аналитического метода исследования.

Если v — скорость распространения в направлении l, m, n , то волновая поверхность является огибающей плоскостей:

$$lx + my + nz = v, \quad (4)$$

где v — функция l, m, n , вид которой подлежит определению. Если (λ, μ, ν) — соответствующее направление колебания, то

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \quad (5)$$

Исходя из принципов, установленных Френелем, мы сразу видим, что упругая сила $(a^2\lambda, b^2\mu, c^2\nu)$, соответствующая единичному смещению, эквивалентна силе v^2 вдоль (λ, μ, ν) совместно с некоторой силой (P) вдоль (l, m, n) . Разлагая параллельно координатным осям, мы получаем

$$lP = a^2\lambda - v^2\lambda, \quad mP = b^2\mu - v^2\mu, \quad nP = c^2\nu - v^2\nu,$$

откуда

$$\lambda = \frac{lP}{a^2 - v^2}, \quad \mu = \frac{mP}{b^2 - v^2}, \quad \nu = \frac{nP}{c^2 - v^2}. \quad (6)$$

Умножая эти равенства соответственно на l, m, n и принимая во внимание (5), мы видим, что

$$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0 \quad (7)$$

есть искомое соотношение между v и (l, m, n) . В этом уравнении b, c суть скорости, когда направление распространения параллельно оси x , причем первая величина соответствует колебанию, параллельному оси y , а вторая — колебанию, параллельному оси z .

Направления колебания определяются из (5) и из того соображения, что направления (l, m, n) , (λ, μ, ν) и $(a^2\lambda, b^2\mu, c^2\nu)$ лежат в одной плоскости или, как еще можно сказать, что все они перпендикулярны к одному и тому же направлению (f, g, h) . Таким образом

$$\left. \begin{aligned} lf + mg + nh &= 0, \\ \lambda f + \mu g + \nu h &= 0, \\ a^2\lambda f + b^2\mu g + c^2\nu h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Определитель, выражающий результат исключения $f:g:h$, может быть представлен в виде

$$\frac{l}{\lambda} (b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu} (c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu} (a^2 - b^2) = 0. \quad (9)$$

Этого уравнения вместе с (5) достаточно для определения (λ, μ, ν) в функции (l, m, n) .

То обстоятельство, что система уравнений (5), (8) симметрична относительно (λ, μ, ν) и (f, g, h) , доказывает, что два направления

колебания, соответствующие данному направлению (l, m, n) , взаимно перпендикулярны.

Прямое исследование волновой поверхности на основе (4) и (7) было произведено впервые Ампером, но его приемы анализа были очень сложны. Френель же был вынужден ограничиться косвенным методом проверки. Однако в нижеследующем исследовании, принадлежащем А. Смиуту (Smith)¹⁾, исключения величин производятся сравнительно просто.

В добавление к (4) и (7) мы знаем, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (10)$$

Чтобы найти уравнение огибающей поверхности, мы должны продифференцировать эти уравнения, варьируя l, m, n, v . Исключая дифференциалы методом множителей, получаем

$$x = Al + \frac{Bl}{v^2 - a^2}, \quad y = Am + \frac{Bm}{v^2 - b^2},$$

$$z = An + \frac{Bn}{v^2 - c^2} \quad (11), (12), (13)$$

и

$$l = Bv \left\{ \frac{l^2}{(v^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c^2)^2} \right\}. \quad (14)$$

Умножая уравнения (11), (12), (13) на l, m, n соответственно и складывая, находим

$$v = A. \quad (15)$$

Возводя эти же уравнения в квадрат и складывая, получаем

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2 + \frac{B}{v}.$$

Заменяя $x^2 + y^2 + z^2$ через r^2 и A через только что найденное значение, мы получаем

$$B = v(r^2 - v^2). \quad (16)$$

Подставляя эти значения A и B в (11), имеем

$$x = lv \left\{ 1 + \frac{r^2 - v^2}{v^2 - a^2} \right\} = lv \cdot \frac{r^2 - a^2}{v^2 - a^2},$$

или

$$l = \frac{v^2 - a^2}{r^2 - a^2} \cdot \frac{x}{v}. \quad (17)$$

Подставляя это значение l и соответствующие значения m и n в (4), получаем

$$\frac{(v^2 - a^2)x^2}{r^2 - a^2} + \frac{(v^2 - b^2)y^2}{r^2 - b^2} + \frac{(v^2 - c^2)z^2}{r^2 - c^2} = v^2 = \frac{v^2x^2}{r^2} + \frac{v^2y^2}{r^2} + \frac{v^2z^2}{r^2},$$

¹⁾ Camb. Trans., VI, 1835.

откуда

$$\frac{x^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0. \quad (18)$$

Это есть уравнение волновой поверхности.

При помощи (6) уравнение (11) может быть представлено в виде

$$x = Al + BP^{-1} \lambda;$$

из этого и из других соответствующих уравнений мы видим, что направление (x, y, z) лежит в той же плоскости, что и (l, m, n) и (λ, μ, ν) . Следовательно, в любой касательной плоскости к волновой поверхности направление колебания совпадает с направлением прямой, соединяющей основание перпендикуляра и точку касания (x, y, z) .

Уравнение (18) приводит к другому геометрическому определению волновой поверхности Френеля. Если через центр эллипсоида, сопряженного эллипсоиду упругости (3), а именно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (19)$$

провести плоскость и на нормали к этой плоскости отложить два отрезка, пропорциональные осям эллиптического сечения, определяемого плоскостью, то геометрическое место точек, полученных таким образом, т. е. поверхность, апсидальная относительно поверхности (19), и есть волновая поверхность (18).

Уравнение (18), развернутое по целым степеням координат, принимает вид

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \quad (20)$$

Уравнение сечения поверхности (20) координатной плоскостью $y=0$ есть

$$(x^2 + z^2 - b^2)(a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2) = 0. \quad (21)$$

Оно представляет окружность и эллипс (фиг. 25). То, что сечения поверхности каждой из главных плоскостей будут окружность и эллипс, можно было предвидеть независимо от общего решения задачи об огибающей. Форм сечений, даваемых уравнением (21) и двумя аналогичными уравнениями, достаточно для того, чтобы определить характер волновой поверхности, если принять, что ее уравнение *четвертой степени* и содержит только четные степени координат. Примерно таким путем уравнение и было впервые получено Френелем.

Если две из главных скоростей, например a и b , равны, то уравнение (20) обращается в

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(a^2 x^2 + a^2 y^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2) = 0, \quad (22)$$

так что волновая поверхность вырождается в *гюйгенсову поверхность*, состоящую из сферы и эллипсоида вращения, что соответствует одно-

осному кристаллу. Две оболочки поверхности соприкасаются в точках $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm a$. Если $c > a$, как в исландском шпате, то эллипсоид является внешним по отношению к сфере. Если же $c < a$, как в кварце, то эллипсоид находится внутри шара.

Мы видели, что когда фронт волны параллелен круговым сечениям поверхности (3), то обе скорости волн совпадают. Таким образом, если в (7) a^2 , b^2 , c^2 расположены в убывающем порядке по величине, то мы имеем $m = 0$, $v = b$, так что

$$\frac{v^2}{a^2 - b^2} = \frac{n^2}{b^2 - c^2} = \frac{1}{a^2 - c^2}. \quad (23)$$

Вообще, если θ и θ' — углы, которые нормаль к действительному волновому фронту образует с оптическими осями, то можно доказать, что разность квадратов двух корней уравнения (7) равна

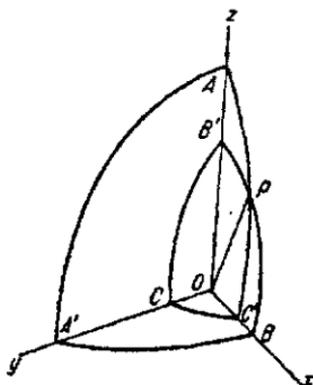
$$v_2^2 - v_1^2 = (a^2 - c^2) \sin \theta \sin \theta'. \quad (24)$$

В одноосном кристалле оптические оси совпадают с осью симметрии, и нет разницы между θ и θ' .

Так как волны в двуосном кристалле, распространяющиеся вдоль одной из оптических осей, имеют только одну скорость, то, следовательно, касательные плоскости к волновой поверхности, перпендикулярные к этим направлениям, касаются обеих оболочек поверхности. Можно, далее, показать, что каждая плоскость касается поверхности не в двух только, а в бесконечном множестве точек, лежащих на окружности.

Часто наблюдается, что направления оптических осей и угол, заключенный между ними, изменяются вместе с окраской света. Такого изменения следует ожидать ввиду дисперсии, делающей a^2 , b^2 , c^2 функциями длины волны.

Знание формы волновой поверхности определяет во всех случаях закон преломления в соответствии с построением Гюйгенса. Предположим для простоты, что первая среда — воздух и что поверхность раздела между средами плоская. Падающий фронт волны в любой момент времени пересекает поверхность раздела по прямой. На этой прямой возьмем какую-либо точку и из нее, как из центра, построим волновую поверхность во второй среде, соответствующую некоторому промежутку времени. В конце этого промежутка след падающего фронта волны на поверхности раздела продвинется вперед до нового положения, параллельного прежнему. Плоскости, проведенные через эту линию так, чтобы они касались волновой поверхности, дают положения преломленных волновых фронтов. Никакие другие не могут удовлетворить обоим условиям: 1) чтобы преломленный фронт волны двигался внутри кристалла с нормальной скоростью, соответствующей его направлению, и 2) чтобы следы падающей и преломленной волн на



Фиг. 25.

поверхности раздела двигались вместе. Нормаль к преломленной волне лежит по необходимости в плоскости падения, но преломленный луч, совпадающий с радиусом-вектором волновой поверхности, вообще говоря, отклоняется от плоскости падения. В большинстве случаев достаточно определить нормаль к волновой поверхности.

Как и в случае полного отражения от обычных преломляющих сред, может случиться, что нельзя провести ни одной касательной плоскости, удовлетворяющей поставленным выше условиям, или что можно провести только одну такую плоскость.

В случае одноосного кристалла одна волна преломляется согласно обычному закону Снеллиуса. Правильность сферической и эллипсоидальной поверхностей в построении Гюйгенса полностью подтверждена новыми наблюдениями ¹⁾.

Простейший случай преломления в одноосном кристалле имеет место, когда ось кристалла перпендикулярна к плоскости падения, по отношению к которой все тогда становится симметричным. Сечение волновой поверхности, с которым мы имеем дело, сводится к двум concentрическим окружностям, так что обе волны преломляются по обычному закону, хотя, конечно, с разными показателями преломления.

В двуосных кристаллах одна волна следует обычному закону преломления, если плоскость падения совпадает с главной плоскостью кристалла. Это следствие теории Френеля было проверено им самим, а затем Рудбергом и другими. Однако самыми замечательными явлениями преломления в двуосных кристаллах являются, без сомнения, те, которые были открыты Гамильтоном и Ллойдом, и обычно известны под названием конической рефракции.

Вообще говоря, имеются два преломленные луча, соответствующие двум различным волнам. Но преломленные волны сливаются, когда их плоскость перпендикулярна к одной из оптических осей и, как мы видели, эта волна касается волновой поверхности по окружности. Таким образом имеется бесконечное множество лучей, лежащих на конусе и соответствующих одному направлению волны. Развертывание единственного падающего луча в конус преломленных лучей называется внутренней конической рефракцией. Если вторая грань кристалла параллельна первой, то каждый преломленный луч при выходе из кристалла принимает свое первоначальное направление, так что выходящий пучок образует полый цилиндр.

Внешняя коническая рефракция связана с особыми точками в главной плоскости ZX , где две оболочки поверхности пересекаются (фиг. 25). В такой точке (P) можно провести бесконечное множество касательных плоскостей к поверхности, и каждый из перпендикуляров из точки O представляет направление волны, соответствующее единственному лучу OP . При выходе эти волны будут преломляться различно и, таким образом, одному внутреннему лучу будет соответствовать бесконечное множество внешних лучей, лежащих на конусе.

¹⁾ Stokes, *Proc. Roy. Soc.*, 20, стр. 443, 1872; Glazebrook, *Phil. Trans.*, 1880 стр. 421; Hastings, *Amer. Jour.*, янв. 1888.

Выше уже указывалось, что динамические основания теории Френеля непрочны, и к этому надо добавить, что из строгой теории кристаллических твердых тел, данной Коши и Грином, не легко вывести объяснение Френелевых законов двойного лучепреломления. По этому вопросу мы отсылаем читателя к докладу проф. Стокса.

Сэр В. Томсон недавно показал ¹⁾, что первоначально изотропная среда, сжатая неодинаково по разным направлениям, может иметь такую структуру, что она будет колебаться в согласии с законами Френеля.

Быть может стоит заметить, что уравнения, аналогичные (2) § 24, приводящие к этим законам, суть.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + a^2 \nabla^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial y} + b^2 \nabla^2 \eta \quad \text{и т. д.}, \quad (25)$$

где a, b, c — главные волновые скорости. Если мы здесь положим

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda \theta, & \eta &= \mu \theta, & \zeta &= \nu \theta, \\ \frac{\theta}{\theta_0} &= \frac{p}{p_0} = e^{i\lambda(x + \mu y + \nu z - Vt)} \end{aligned}$$

и подставим в (25), то условие поперечности приводит сразу к желаемым результатам. Однако уравнения (25) неприменимы к колебаниям кристаллического твердого тела.

В электромагнитной теории света двойное лучепреломление связывается с анизотропностью диэлектрической постоянной n , повидимому, не представляет особых затруднений.

Если настоящее положение теории двойного лучепреломления все же не совсем удовлетворительно, то надо иметь в виду, что эта неопределенность не затрагивает общего принципа. Почти всякая форма волновой теории, допускающая поперечные колебания, сможет объяснить основное явление, а именно раздвоение луча. Можно с уверенностью предсказать, что когда обыкновенное преломление будет хорошо понято, то двойное преломление не представит больших трудностей.

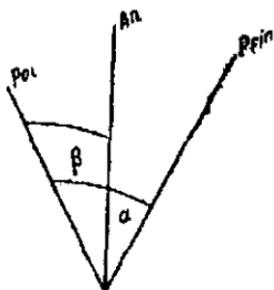
Скорость волны — не единственное свойство света, которое делается несимметричным благодаря кристаллической структуре. Во многих случаях два поляризованных луча подвергаются поглощению в неодинаковой степени. Из турмалина и других кристаллов можно изготовить пластинки такой толщины, что один луч практически весь поглощается, тогда как другой в значительной степени пропускается, так что такие пластинки могут служить в качестве поляризатора (или анализатора). Хотя для практических целей обычно предпочтительны николевы призмы („Свет“, Епс. Brit., том XIII, стр. 612), однако явление двойного поглощения представляет большой теоретический интерес. Объяснение его, без сомнения, тесно связано с объяснением двойного лучепреломления.

¹⁾ „On Cauchy's and Green's Doctrine of Extraneous Force to explain dynamically Fresnel's Kinematics of Double Refraction“, *Phil. Mag.*, февраль 1888.

§ 22. ЦВЕТА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК

Когда поляризованный свет пропускается через не очень тонкую пластинку двоякопреломляющего кристалла и затем анализируется, например, при помощи николя, часто появляются яркие цвета, по своему характеру аналогичные цветам ньютоновой шкалы. Со своей обычной пронизательностью, Юнг сразу приписал эти цвета интерференции между обыкновенными и необыкновенными волнами и показал, что толщина кристалла, необходимая для появления данного цвета, обратно пропорциональна двоякопреломляющей способности, что согласуется с этим взглядом. Однако полное объяснение, требующее более глубокого знания законов интерференции поляризованного света, дали только Френель и Араго. По этому вопросу можно сказать многое ¹⁾, но интерес к нему вызывается, главным образом, красотой наблюдаемых явлений и той легкостью, с которой многие из них могут быть получены на опыте. Мы должны ограничиться кратким рассмотрением одного или двух из более простых случаев.

Допустим, что падающее колебание линейно поляризовано и что его плоскость образует угол α с главной плоскостью кристалла. При входе в кристалл оно, следовательно, разлагается на две составляющие:



Фиг. 26.

$$\cos \alpha \cos \varphi, \quad \sin \alpha \cos \varphi, \quad \text{где } \varphi = \frac{2\pi t}{\tau}.$$

При прохождении через кристалл обе волны запаздывают, но нас интересует только разность их запаздываний. Обозначая эту разность через ϱ , мы можем написать для выходящих волн выражения:

$$\cos \alpha \cos \varphi, \quad \sin \alpha \cos (\varphi - \varrho).$$

Заметим, что в отсутствие дисперсии ϱ было бы обратно пропорционально λ ; в действительности же имеется много случаев значительного отклонения от этого закона.

Пусть плоскость анализатора наклонена под углом β к плоскости первоначальной поляризации (фиг. 26). Тогда для суммы двух выделенных составляющих мы имеем

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \cos \varphi + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \cos (\varphi - \varrho)$$

и для соответствующей ей интенсивности

$$\begin{aligned} & \{ \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \cos \varrho \}^2 + \\ & \quad + \sin^2 \alpha \sin^2 (\alpha - \beta) \sin^2 \varrho = \\ & = \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\varrho}{2}. \quad (1) \end{aligned}$$

¹⁾ См. Verdet's Leçons, том II.

Заменяя в (1) β через $\beta + \frac{1}{2} \pi$, мы получаем

$$\sin^2 \beta + \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{1}{2} \rho \quad (2)$$

и замечаем, что сумма (1) и (2) при всех условиях равна единице. Действие вращения анализатора на 90° сводится, таким образом, всегда к преобразованию окраски в дополнительную к ней. Можно видеть одновременно обе дополнительные окраски, если воспользоваться призмой, дающей двойное изображение. В отсутствие анализатора можно считать, что эти два изображения налагаются друг на друга, в результате чего не наблюдается никакой окраски.

Эти выражения могут быть непосредственно применены для объяснения цветов тонких пластинок слюды или селенита. В этом случае отставание ρ пропорционально толщине и почти не зависит от направления света, которое предполагается почти перпендикулярным к пластинке, т. е. почти параллельным одной из главных осей кристалла.

Наиболее важные случаи имеют место, когда $\beta = 0$ и $\beta = \frac{1}{2} \pi$. В последнем случае, если бы пластинка была удалена, поле было бы темным, а действительная интенсивность равна

$$\sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{1}{2} \rho. \quad (3)$$

Состав света, таким образом, не зависит от азимута пластинки (α), *интенсивность* же меняется сильно, обращаясь четыре раза в нуль в течение полного оборота. Наибольшая яркость имеет место, когда главная плоскость делит пополам угол между плоскостью поляризатора и плоскостью анализатора. Если $\beta = 0$, то свет дополнителен к свету, представленному выражением (3).

Если две пластинки наложены друг на друга, то запаздывания складываются при совпадении азимутов, но они вычитаются, если повернуть одну пластинку на 90° относительно другой. Таким образом, оказывается возможным получить окраску путем наложения друг на друга двух почти одинаковых пластинок, хотя взятые порознь они могут быть слишком толсты, чтобы давать эффект.

Если пренебречь дисперсией, то последовательность цветов в (3) та же, что и в случае отраженных цветов ньютонова ряда. Толщины пластинок слюды (действующей путем двойного лучепреломления) и воздуха, необходимые для получения одного и того же цвета, относятся, как 400 : 1. Когда пластинка слишком толста, чтобы обнаружить цвет, то ее действие может быть проанализировано при помощи спектроסקопа.

Можно заставить и еще более толстые пластинки обнаружить цвет, если направление света внутри них составляет лишь небольшой угол с оптической осью. Предположим, что пластинка исландского шпата или другого одноосного кристалла (кроме кварца), вырезанная перпендикулярно к оси, помещена между поляризатором и анализатором и что последний повернут так, что поле первоначально темное. Луч,

идуший перпендикулярно к пластинке, не подвергается двойному преломлению, так что центр поля остается темным. При небольших углах к оптической оси относительное запаздывание, очевидно, пропорционально квадрату угла наклона, так что цвета расположены концентрическими кольцами. Но интенсивность в разных частях кольца неодинакова. В плоскости поляризации и в плоскости, перпендикулярной к ней, двойного лучепреломления нет или, вернее, один из преломленных лучей исчезает. Вдоль соответствующих линий в поле зрения свет не восстанавливается, и система колец представляется пересеченной черным крестом.

Во многих кристаллах влияния дисперсии достаточно для того, чтобы значительно исказить пропорциональность между ρ и $1/\lambda$. В одной разновидности одноосного апофилита Гершель наблюдал почти ахроматические кольца — факт, указывающий на то, что ρ почти не зависело от λ . При этих условиях было видно значительно большее число колец, чем обычно.

В двусных кристаллах, вырезанных так, что их грани одинаково наклонены к оптическим осям, кольца принимают форму лемнискат.

Первоначально изотропная среда под влиянием деформации может приобрести способность к двойному лучепреломлению, и если деформация *однородная*, то условия в оптическом отношении тождественны с теми, которые наблюдаются в естественном кристалле. Главные оси волновой поверхности совпадают с осями деформации. Если деформация симметрична, то среда оптически одноосная. Вообще говоря, если P , Q , R — главные напряжения, то разность скоростей для волн, распространяющихся параллельно R , очевидно, пропорциональна $(P - Q)$ и т. д.

Чаще случается, что деформация неоднородна. Даже в этом случае можно сравнивать небольшие части среды с кристаллами, но оптические константы изменяются от точки к точке. Сравнительно слабую двоякопреломляющую способность, возникающую таким образом в стекле, лучше всего обнаружить, вызывая появление цветов поляризованного света. Так, в опыте, произведенном Брюстером, довольно толстая стеклянная плитка, полированная по краям, помещается между скрещенными николями. Когда плитка изгибается в плоскости, перпендикулярной к плоскости зрения, то свет появляется вдоль краев, где удлинение и сжатие наибольшие. Если ширина (в направлении наблюдения) достаточна, то действие может быть увеличено настолько, что наблюдаются разные цвета ньютонова ряда. Эти цвета изменяются от точки к точке по толщине плитки в плоскости изгиба, причем „нейтральная ось“ остается темной. Оптическая ось, совпадая везде с направлением удлинения (или сжатия), параллельна длине плитки. Плоскость поляризации должна быть наклонена к этому направлению под углом около 45° .

Внутренняя деформация не вызывается непременно извне приложенными силами. Так, если первоначально свободное от деформации стекло будет подвергнуто неравномерному нагреванию, то сопровождающие это нагревание расширения вызывают появление внутренних деформаций, обнаруживающихся в поляризованном свете. Если нагревание

умеренное, так что точка размягчения не достигается, то ненапряженное состояние восстанавливается после охлаждения, и двойное лучепреломление исчезает. Но если местами температура повышается далее, то горячие части могут освободиться от временной деформации, и тогда после охлаждения они и другие части могут остаться в состоянии постоянной деформации. Внезапное охлаждение стекла, нагретого до точки размягчения, приводит к подобному же результату. Внешние части затвердевают, тогда как внутренние все еще находятся при более высокой температуре, так что, когда все уже остыло, наружная часть стекла, будучи как бы слишком большой по отношению к внутренней, находится в состоянии натяжения по радиусам и сжатия по окружности. Исследование в поляризованном свете показывает, что получающиеся таким образом деформации часто весьма значительны. Если какая-либо небольшая часть стекла путем отламывания будет освобождена от воздействия на нее остальной части, то двоякопреломляющая способность почти или совершенно исчезает. В этом отношении неотожженное стекло существенно отличается от кристалла, все части которого подобны и независимы друг от друга. Заметим, что трудно найти большие куски стекла, столь свободные от внутренних натяжений, что они не вызывают появления света при помещении их между скрещенными николями.

§ 23. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Вообще говоря, поляризованный луч, проходящий вдоль оси одноосного кристалла, не подвергается никакому изменению. Однако Араго заметил, что если в этом опыте воспользоваться кварцем, то плоскость поляризации поворачивается на угол, пропорциональный толщине кристалла, пройденной лучом. Это явление было далее изучено Био, который нашел, что вращение, вызываемое данной толщиной, обратно пропорционально квадрату длины волны света и, таким образом, очень быстро изменяется с цветом. В одних образцах кварца вращение происходит вправо (вследствие чего они и называются правовращающими), тогда как в других — влево. Поэтому равные толщины право- и левовращающего кварца могут компенсировать друг друга.

Френель показал, что вращение плоскости поляризации можно объяснить различной скоростью распространения двух поляризованных по кругу составляющих, на которые всегда можно разложить линейно поляризованный свет. В обыкновенных средах лучи, поляризованные по кругу вправо и влево, распространяются с одной и той же скоростью и на любом участке своего пути при сложении дают снова луч, поляризованный линейно в определенном направлении. Но дело обстоит иначе, если скорости распространения поляризованных по кругу составляющих хотя бы немного отличны друг от друга.

Первая поляризованная по кругу волна может быть представлена так:

$$\xi_1 = r \cos (nt - k_1z), \quad \eta_1 = r \sin (nt - k_1z), \quad (\text{I})$$

а вторая (равной амплитуды):

$$\xi_2 = r \cos (nt - k_2 z), \quad \eta_2 = -r \sin (nt - k_2 z). \quad (2)$$

Результирующая (1) и (2) есть

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2r \cos \frac{1}{2} (k_2 - k_1) z \cdot \cos \left\{ nt - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) z \right\},$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2r \sin \frac{1}{2} (k_2 - k_1) z \cdot \cos \left\{ nt - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) z \right\},$$

так что

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (k_2 - k_1) z; \quad (3)$$

это равенство показывает, что при любом заданном значении z свет является линейно поляризованным. Направление плоскости его поляризации, однако, меняется с z . Таким образом, если $\eta/\xi = \operatorname{tg} \theta$, так что θ представляет угол между направлением колебания и осью ξ , то мы имеем соотношение

$$\theta = \frac{1}{2} (k_2 - k_1) z, \quad (4)$$

указывающее на вращение, пропорциональное z . Величины k_1, k_2 обратно пропорциональны длинам волн поляризованных по кругу составляющих одного и того же периода. Когда относительное запаздывание составляет целый период $(k_2 - k_1) z = 2\pi$, и тогда, по (4), $\theta = \pi$. Вращение плоскости поляризации на два прямых угла восстанавливает первоначальное состояние поляризации. В кварце вращение очень велико и составляет в случае желтого света около 24° на каждый пройденный светом миллиметр.

Интересно, с какой высокой степенью точности может быть произведено сравнение скоростей обеих волн. Если плоскость поляризации будет определена с точностью до одной угловой минуты, то тем самым будет обнаружена разность хода, равная $\lambda/10\,800$. Если l — пройденная светом толщина, v и $v + \delta v$ — скорости, то разность хода составляющих равна $l \delta v/v$. Возьмем в качестве примера $l = 20$ дюймам, $\lambda = 1/40\,000$ дюйма; таким образом, если $\delta v/v$ превышает 10^{-8} , то это уже может быть обнаружено (дюйм = 2,54 см).

В кварце вращение плоскости поляризации обусловлено его кристаллической структурой, но имеется много жидкостей, как, например, терпентинное масло и обыкновенный сахарный сироп, производящих такое же действие. В таких случаях вращение, конечно, не зависит от направления света; оно должно быть обусловлено некоторыми особенностями в строении молекул.

Замечательная связь была открыта между вращательной способностью и кристаллической структурой. Так, Гершель нашел, что во многих образцах право- и левовращающие разновидности кварца можно отличить друг от друга по расположению некоторых второстепенных граней. Кристаллы, оптически противоположные, в известном смысле симметричны, но все же несовместимы друг с другом. Разница между

ними аналогична разнице между правым и левым винтами, в остальном одинаковыми. Исследования Пастера над вращательными свойствами виннокаменной кислоты открыли новую и чрезвычайно интересную главу химии. В то время были известны две изомерные разновидности — обыкновенная виннокаменная кислота, вращающая вправо, и оптически неактивная виноградная кислота; эти свойства кислот присущи также их солям. Пастер нашел, что кристаллы виннокаменной кислоты и виннокислых солей имеют правую структуру и поставил себе целью открыть соответствующие вещества с левой структурой. После многих попыток были получены кристаллизации виннокислого натрия и аммония, содержащие кристаллы противоположных видов. Отбор образцов правой структуры дал обыкновенную правую виннокаменную кислоту, тогда как аналогичный отбор кристаллов левой структуры дал новую разновидность — левую виннокаменную кислоту, вращающую плоскость поляризации влево в той же степени, в какой обыкновенная виннокаменная кислота вращает ее вправо. Смесь равных количеств обоих видов виннокаменной кислоты, почти совсем не отличающихся друг от друга по своим химическим свойствам ¹⁾, образует вновь виноградную кислоту.

Возможность сообщения вращательной способности телам, не обладавшим ею, была одним из самых тонких открытий Фарадея. Он нашел, что если тяжелое стекло, сероуглерод и т. д. поместить в магнитное поле, то имеет место вращение плоскости поляризации луча, распространяющегося вдоль магнитных силовых линий. Законы этого явления были тщательно изучены Верде, выводы которого можно вкратце формулировать так: в данной среде вращение плоскости поляризации луча, распространяющегося в любом направлении, пропорционально разности магнитных потенциалов в начальной и конечной точках. В сероуглероде при 18° С и при разности потенциалов, равной единице CGS, вращение плоскости поляризации луча натриевого света составляет 0,04202 угловой минуты ²⁾.

Следует отметить весьма важную разницу между магнитным вращением и естественным вращением кварца, сиропа и т. д. В последнем случае вращение всегда происходит либо вправо, либо влево по отношению к направлению луча. Следовательно, при обращении луча обращается также и абсолютное направление вращения. Луч, который проходит через пластинку кварца в одном направлении, а затем, после отражения, проходит ту же толщину снова в противоположном направлении, возвращается к своей первоначальной плоскости поляризации. Совершенно иначе обстоит дело при магнитном вращении. В этом случае абсолютное направление вращения одно и то же, даже при обращении луча. Поэтому, если луч отражается назад и вперед любое число раз вдоль магнитной силовой линии, то вращения при всех последовательных прохождениях накапливаются. Необратимость света в намагниченной

¹⁾ Повидимому, эти две разновидности могут быть различены химически только по их отношениям к телам, которые сами являются право- или лево-симметричными.

²⁾ *Phil. Trans.*, 1885, стр. 343 [том II, стр. 377].

среде доказывает совершенно исключительный характер этого случая и, по мнению Томсона, указывает на то, что намагниченная среда сама находится во вращательном движении, независимо от распространения света через нее¹⁾.

Важность поляриметрических исследований привела к изобретению различных типов приборов, отвечающих тем или иным требованиям. Если свет достаточно интенсивен, то весьма точные измерения могут быть произведены путем простого вращения николя до тех пор, пока поле зрения не станет темным. Когда пользуются белым светом, и плоскость поляризации для всех составляющих цветов одна и та же, то наилучшей формой анализатора является, повидимому, анализатор Желле (Jellet)²⁾, представляющий комбинацию двух кусков исландского шпата. В этом приборе поле зрения состоит из двух частей, и установка производится путем вращения его до тех пор, пока обе части поля зрения, яркость которых сильно уменьшена, не покажутся *одинаково* темными. Подобный же результат достигается и в приборе Лорана, который, однако, применим только к однородному свету. В этом приборе используется действие пластинки в полволны. При прохождении через такую пластинку плоскость поляризации как бы отражается в главном сечении пластинки, т. е. вращается до тех пор, пока не составит первоначальный угол с главным сечением, но только по другую сторону от последнего. Пластинка покрывает только половину поля зрения, и глаз фокусируется на линию раздела. Плоскости поляризации обеих половин поля зрения различны, за исключением того случая, когда первоначальная плоскость поляризации параллельна (или перпендикулярна) главному сечению. В анализаторе Лорана пластинка в полволны жестко связана с николем в таком положении, что главное сечение последнего составляет небольшой, но конечный угол с главным сечением пластинки. Вследствие этого обе половины поля зрения не могут быть затемнены одновременно, но становятся одинаково темными, когда прибор повернут так, что главное сечение пластинки параллельно плоскости первоначальной поляризации, являющейся также плоскостью поляризации незакрытой половины поля зрения. При небольшом вращении в том или ином направлении одна половина поля зрения темнеет, а другая светлеет.

В другой форме „полутеневого“ поляриметра, изобретенной Пойнтингом, пластинка полволны Лорана устранена, и небольшое вращение плоскости поляризации одной половины поля зрения по отношению к другой достигается при помощи кварца (вырезанного перпендикулярно к оси) или сиропа. В простейшей конструкции сироп находится в небольшом плоскопараллельном стеклянном сосуде, и разделение поля зрения на две части производится вставкой небольшой стеклянной пластинки около $\frac{3}{16}$ дюйма толщиной, прямой край которой и образует линию раздела. Если сироп густой, то разность в толщине в $\frac{3}{16}$ дюйма дает относительное вращение примерно на 2° . В этом устройстве сосуд с сиропом закреплен неподвижно, и вращается только николь. Показание на от-

¹⁾ Maxwell's Electricity and Magnetism, том. II, гл. XXI.

²⁾ Описание его дано в книге Glazebrook, Physical Optics, London, 1883.

счетном круге соответствует среднему положению между плоскостями двух половин поля зрения; это положение, конечно, отличается от первоначального положения плоскости поляризации до входа в сироп. Это обстоятельство обычно не имеет значения, так как целью является определени *вращения* плоскости поляризации при изменении некоторых условий.

Обсуждение вопроса о степени точности, достижимой в поляриметрии, можно найти в новой работе Липпиха (Lippich)¹⁾.

В приборе Солейля, предназначенном к применению на практике для определения крепости растворов сахара, вращение, производимое сахаром, компенсируется при помощи клина из кварца. Два клина, один из право-, другой из левовращающего кварца, можно сложить так, что при движении комбинации их в том или ином направлении толщина, проходимая светом в одном кварце, увеличивается, а в другом уменьшается. Линейное перемещение, необходимое для компенсации введенной трубки с сиропом, служит мерой содержащегося в нем количества сахара²⁾.

§ 24. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ

Объяснение явлений дифракция, данное Френелем и его последователями, не зависит от того или иного взгляда на природу эфира, по крайней мере в главных своих чертах. Однако при отсутствии более прочного обоснования теории невозможен строгий разбор способа действия твердой преграды, как, например, экрана. Вряд ли можно ожидать полного решения этого рода задач. Даже в гораздо более простом случае звука, где мы знаем, с чем имеем дело, математические трудности огромны, и мы не в состоянии решить даже такой, казалось бы, элементарный вопрос, как распространение звука мимо твердого бесконечно тонкого плоского экрана, ограниченного прямым краем³⁾ или снабженного круглым отверстием. Но, не входя в разбор проблем такого рода, мы можем рассмотреть вопрос о том, каким образом первичная волна может быть разложена на элементарные вторичные волны и, в частности, каков закон, связывающий интенсивность и поляризацию вторичной волны с направлением ее распространения и с характером поляризации первичной волны. Этот вопрос разобран Стоксом в его „Динамической теории дифракции“⁴⁾, на основе теории упругого твердого эфира.

Пусть x, y, z — координаты какой-либо частицы среды в ее естественном состоянии и ξ, η, ζ — перемещения этой частицы в момент времени t , отсчитанные в направлении трех осей координат соответ-

¹⁾ *Wien. Ber.*, 85, 9 февр. 1882; см. также *Phil. Trans.*, 1885, стр. 360 [том II, стр. 378].

²⁾ По вопросу о различных видах поляризационных анализаторов см. статью Н. Schulz, „Polarisation des Lichtes“, *Hdb. d. Exp. Phys.*, том XVIII, 1928.

³⁾ [1901. Некоторым успехом в этом направлении мы обязаны Зоммерфельду.]

Примеч. ред.

⁴⁾ *Camb. Phil. Trans.*, 9, стр. 1; Stokes' collected Papers, том II, стр. 243.

ственно. Тогда первое из уравнений движения может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right),$$

где a^2 и b^2 — две произвольные постоянные, Положим для краткости

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \delta, \quad (1)$$

и обозначим через $\nabla^2 \xi$ множитель при b^2 . При этих обозначениях уравнения движения будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \xi + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \eta + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \zeta + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Следует заметить, что δ обозначает расширение объема элемента, расположенного в точке (x, y, z) . В предельном случае, когда среда рассматривается как абсолютно несжимаемая, δ обращается в нуль, но для того чтобы уравнения (2) могли сохранить свою общность, мы должны предположить, что a в то же время обращается в бесконечность, и заменить $a^2 \delta$ новой функцией координат.

Эти уравнения чрезвычайно упрощаются в приложении их к плоским волнам. Если луч параллелен оси OX , и направление колебания параллельно оси OZ , то $\xi = 0$, $\eta = 0$, а ζ есть функция только x и t . Уравнение (1) и первые два уравнения (2), таким образом, удовлетворяются тождественно. Третье уравнение дает

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3)$$

решение которого есть

$$\zeta = f(bt - x), \quad (4)$$

где f — произвольная функция.

На вопрос о том, какому закону подчиняются вторичные волны, Стокс отвечает следующим образом: „Пусть $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = f(bt - x)$ суть перемещения, соответствующие падающему свету; пусть O_1 есть какая-либо точка в плоскости P (фронта волны), dS — элемент этой плоскости, прилегающий к O_1 ; рассмотрим возмущение, обусловленное только той частью падающего возмущения, которая непрерывно проходит через dS . Пусть O — какая-либо точка в среде, расположенная на расстоянии от точки O_1 , большем по сравнению с длиной волны; пусть $O_1O = r$ составляет угол θ с направлением распространения падающего света, т. е. с осью x , и угол φ — с направлением колебания, т. е. с осью z . Тогда перемещение в точке O будет происходить в направлении, перпендикулярном к O_1O и лежащем в плоскости ZO_1O ; и, если ζ' —

перемещение в O , считаемое положительным в направлении, ближайшем к тому, в котором считаются положительными падающие колебания, то

$$\zeta' = \frac{dS}{4\pi r} (1 + \cos \theta) \sin \varphi \cdot f'(bt - r)^a.$$

В частности, если

$$f(bt - x) = c \sin \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x), \quad (5)$$

то мы будем иметь

$$\zeta' = \frac{c dS}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \sin \varphi \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r). \quad (6)$$

Тогда оказывается, как это и должно быть, что, после интегрирования по dS выражение (6) дает то же самое возмущение, как и в предположении, что первичная волна распространяется беспрепятственно⁴.

Наличие $\sin \varphi$ в качестве множителя в (6) показывает, что относительные интенсивности первичного света и света, дифрагированного в направлении θ , зависят от характера поляризации первого.

Если направление первичного колебания перпендикулярно к плоскости дифракции (содержащей первичный и вторичный лучи), то $\sin \varphi = 1$; если же первичное колебание — в плоскости дифракции, то $\sin \varphi = \cos \theta$. Этот результат был использован Стоксом в качестве критерия для определения направления колебания, и его опыты, произведенные с решетками, привели его к тому заключению, что колебания поляризованного света происходят в направлении, перпендикулярном к плоскости поляризации.

Множитель $(1 + \cos \theta)$ показывает, каким образом вторичное возмущение зависит от направления, в котором оно распространяется по отношению к фронту первичной волны.

Если (что достаточно для всех практических целей) мы ограничим область приложения формулы точками, находящимися впереди плоскости, на которой, по предположению, происходит разбиеие волны, то мы можем воспользоваться более простыми методами разбиеия на элементы, чем рассмотренный выше. В самом деле, оказывается, что чисто математический вопрос не имеет определенного ответа. В качестве иллюстрации этого можно сослаться на аналогичную задачу в случае звука. Представим себе, что мы ввели гибкую пластинку так, что она совпадает с плоскостью, из которой должно быть произведено разбиеие. Введение пластинки (которую мы считаем лишенной инерции) ничего не изменит в распространении плоских параллельных звуковых волн через то место, которое она занимает. В каждой точке движение пластинки будет тем же самым, какое имело бы место в отсутствие ее, так как давление волн, приходящих сзади, есть как раз давление, необходимое для возбуждения волн впереди. Ясно, что движение воздуха перед пластинкой определяется тем, что происходит у самой пластинки, независимо от причины движения, имеющего здесь место. Обусловлены ли силы, необходимые для этого движения, действующим сзади давлением воздуха или непосредственно приложенными внешними силами — безразлично. Представление о такой пластинке приводит сразу к двум

схемам, по которым, как можно предположить, совершается разбиение первичной волны. В первой схеме предполагается, что элемент dS , действие которого надлежит найти, совершает свое действительное движение в то время, как все другие элементы плоской пластинки удерживаются в покое. Результирующее движение воздуха впереди легко вычислить¹⁾; оно симметрично относительно начала координат, т. е. не зависит от θ . Результат интегрирования полученного таким образом вторичного возмущения по dS по всей плоскости пластинки по необходимости такой же, какой получился бы в предположении, что первичная волна проходит без разбиения; это в самом деле в точности то движение, которое возбуждается, когда каждый элемент пластинки совершает одинаковое колебание, такое же, какое было приписано элементу dS . Единственное и, очевидно, законное допущение, которое при этом делается, состоит в том, что когда налагаются у пластинки две системы различно распределенного движения, то и соответствующие движения впереди также налагаются друг на друга.

Только что описанный метод разбиения является простейшим, но это только один из бесчисленного множества возможных и одинаково законных методов, поскольку вопрос рассматривается как чисто математический, без отношения к физическим свойствам реальных экранов. Если вместо того, чтобы предполагать, что движение у элемента dS совпадает с движением первичной волны и равно нулю в других местах, мы предположим, что сила, действующая на элемент dS пластинки, есть сила, соответствующая первичной волне, и эта сила равна нулю в других местах, то мы получим вторичную волну, следующую совершенно иному закону²⁾. В этом случае движение в разных направлениях изменяется, как $\cos \theta$, обращаясь в нуль при прямых углах к направлению распространения первичной волны. Здесь опять-таки при интегрировании по всей пластинке суммарное действие вторичных волн получается конечно таким же, как и действие первичной волны.

Для того чтобы приложить эти соображения к исследованию вторичной световой волны, нам необходимо решить задачу, впервые разобранную Стоксом³⁾: определить движение в неограниченном упругом твердом теле под действием местной периодической внешней силы. Если мы предположим, что сила, приложенная к элементу массы $D dx dy dz$, равна

$$DZ dx dy dz$$

и везде параллельна оси Z , то единственное изменение, которое необходимо произвести в наших уравнениях (1), (2), состоит в добавлении Z ко второму члену в третьем уравнении (2). В рассматриваемом теперь вынужденном колебании Z и величины ξ , η , ζ , δ , выражающие результирующее движение, надо считать пропорциональными e^{int} , где $i = \sqrt{-1}$, $n = \frac{2\pi}{\tau}$, τ — период. В таком случае двойное дифференцирова-

¹⁾ Theory of Sound, § 278.

²⁾ Loc. cit., уравнение (10).

³⁾ Loc. cit., § 27—30.

ние этих величин по t эквивалентно умножению на $-n^2$; поэтому наши уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (b^2 \nabla^2 + n^2) \xi + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial x} &= 0, \\ (b^2 \nabla^2 + n^2) \eta + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial y} &= 0, \\ (b^2 \nabla^2 + n^2) \zeta + (a^2 - b^2) \frac{\partial \delta}{\partial z} &= -Z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Теперь удобно ввести величины ω_1 , ω_2 , ω_3 , выражающие вращения элементов среды вокруг осей, параллельных осям координат, в соответствии с уравнениями

$$\omega_3 = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \omega_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (8)$$

При помощи этих соотношений мы получаем дифференцированием и вычитанием из (7)

$$\left. \begin{aligned} (b^2 \nabla^2 + n^2) \omega_3 &= 0, \\ (b^2 \nabla^2 + n^2) \omega_1 &= \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ (b^2 \nabla^2 + n^2) \omega_2 &= \frac{\partial Z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Первое из уравнений (9) дает

$$\omega_3 = 0. \quad (10)$$

Для ω_1 мы имеем

$$\omega_1 = -\frac{1}{4\pi b^2} \iiint \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy dz, \quad (11)^1$$

где r — расстояние между элементом $dx dy dz$ и точкой, в которой вычисляется ω_1 , и

$$k = \frac{n}{b} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (12)$$

где λ — длина волны.

Введем теперь предположение, что сила Z действует только внутри небольшой области объема T , расположенной около точки (x, y, z) , и допустим для простоты, что вращения надлежит вычислить в начале координат. Интегрируя (11) по частям, мы получаем

$$\int \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial Z}{\partial y} dy = \left[Z \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \right] - \int Z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dy;$$

проинтегрированные члены на границах обращаются в нуль, так как Z отлично от нуля только внутри области T . Таким образом

$$\omega_1 = \frac{1}{4\pi b^2} \iiint Z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dx dy dz.$$

¹ Это решение можно проверить тем же способом, что и теорему Пуассона, где $k = 0$.

Так как размеры области T предполагаются весьма малыми по сравнению с λ , то множитель $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right)$ почти постоянен; поэтому, если Z будет теперь обозначать среднее значение Z по объему T , мы можем написать

$$\omega_1 = \frac{TZ}{4\pi b^2} \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right). \quad (13)$$

Подобным же образом мы находим

$$\omega_2 = -\frac{TZ}{4\pi b^2} \frac{x}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right). \quad (14)$$

Из (10), (13) и (14) мы видим, как это и можно было бы ожидать, что вращение в любой точке происходит вокруг оси, перпендикулярной как к направлению силы, так и к прямой, соединяющей точку с источником возмущения. Если результирующее вращение есть ω , то мы имеем

$$\omega = \frac{TZ}{4\pi b^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \frac{TZ \sin \varphi}{4\pi b^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right),$$

где φ — угол между r и z . При дифференцировании $\frac{e^{-ikr}}{r}$ по r мы можем пренебречь членом, деленным на r^2 , как ничтожно малым, так как kr — чрезвычайно велико уже на сравнительно небольшом расстоянии от источника возмущения. Таким образом

$$\omega = -\frac{ikTZ \sin \varphi}{4\pi b^2} \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (15)$$

это выражение вполне определяет вращение в любой точке.

При наличии возмущающей силы заданной интегральной величины, вращение происходит повсюду вокруг оси, перпендикулярной одновременно к r и к направлению силы, и по величине зависит только от угла (φ) между этими двумя направлениями и от расстояния (r).

Интенсивность света, однако, чаще выражают через действительное перемещение в плоскости волны. Это перемещение, которое мы можем обозначить через ζ' , происходит в плоскости, содержащей z и r , и перпендикулярно к последней. Оно связано с ω соотношением $\omega = \frac{d\zeta'}{dr}$, так что

$$\zeta' = \frac{TZ \sin \varphi}{4\pi b^2} \frac{e^i(nt - kr)}{r}, \quad (16)$$

где множитель e^{int} вновь введен.

Сохраняя только действительную часть (16), мы находим в качестве результата местного приложения силы, равной

$$DTZ \cos nt, \quad (17)$$

возмущение, определяемое выражением

$$\zeta = \frac{TZ \sin \varphi}{4\pi b^2} \frac{\cos(nt - kr)}{r}. \quad (18)$$

Наличие $\sin \varphi$ в формуле показывает, что нет возмущения, излучаемого в направлении силы, — особенность, которую можно было бы предвидеть, исходя из соображений симметрии.

Приложим теперь уравнение (18) к исследованию выражения для вторичного возмущения в том случае, когда предполагается, что первичная волна

$$\zeta = \sin(nt - kx) \quad (19)$$

разбивается на элементы при прохождении через плоскость $x = 0$. Первый шаг состоит в вычислении силы, представляющей взаимодействие между частями среды, разделенными плоскостью $x = 0$. Сила, действующая на положительную половину среды, параллельна оси OZ и по величине, отнесенная к единице площади, равна

$$-b^2 D \frac{\partial \zeta}{\partial x} = b^2 k D \cos nt;$$

можно считать, что этой силой, действующей на всю плоскость, обусловлено действительное движение на положительной стороне. Вторичное возмущение, соответствующее элементу dS плоскости, можно рассматривать как вызванное силой указанной выше величины, действующей на dS и равной нулю в других местах; остается только определить, каков результат действия такой силы.

Очевидно, эта сила, если считать, что она действует только на положительную половину среды, вызывает ровно вдвое большее действие, чем то, которое было бы произведено той же силой, если бы среда не была разделена; в этом последнем предположении (и так как она также локализована в одной точке) эта сила подходит под уже рассмотренный случай. Согласно (18) результатом действия на элемент dS силы, параллельной оси OZ и по величине равной

$$2b^2 k D dS \cos nt,$$

будет возмущение

$$\zeta' = \frac{dS \sin \varphi}{\lambda r} \cos(nt - kr) \quad (20)$$

[см. (12)]. Это выражение представляет, следовательно, вторичное возмущение на расстоянии r и в направлении, образующем угол φ с осью OZ (направлением первичного колебания), обусловленное элементом dS волнового фронта.

Пропорциональность вторичного возмущения $\sin \varphi$ является общей найденному сейчас закону и закону, данному Стоксом, но в нашем случае нет зависимости от угла θ между первичным и вторичным лучами. Наличие множителя $1/\lambda r$ и необходимость допустить, что фаза вторичной волны сдвинута вперед на четверть колебания, были впервые установлены Арчибальдом Смитом, в результате сравнения действия первичной волны, при допущении, что она проходит без разбиения, с суммарным действием всех вторичных волн (§ 10). Наличие таких множителей, как $\sin \varphi$ или $1/2 (1 + \cos \theta)$ в выражении вторичной волны не оказывает влияния на результат

интегрирования, так как действия всех тех элементов, для которых эти множители заметно отличаются от единицы, взаимно уничтожаются.

Выбор между различными методами разбиения на элементы, одинаково приемлемыми с математической точки зрения, должен бы определяться физическими соображениями относительно способа действия преград. Так, если вернуться опять к акустической аналогии плоских волн, падающих на твердый, снабженный отверстиями экран, то все обстоятельства данного случая выявляются лучше всего при помощи первого метода разбиения, приводящего к симметричным вторичным волнам, где движение по нормали предполагается равным нулю у непрозрачных частей экрана. Действительно, если отверстие очень мало, то этот метод дает правильный результат, с точностью до постоянного множителя. Подобным же образом, данный нами закон (20) был бы применим к такой преграде, какую представило бы действительное, физическое разделение упругой среды, распространяющееся на всю ту площадь, которая предполагается занятой заграждающим экраном, за исключением, конечно, тех его частей, которые, по предположению, занимают отверстия.

При недостаточности наших знаний в настоящее время, этот закон представляется по меньшей мере столь же правдоподобным, как и всякий другой ¹⁾ [28].

§ 25. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА МАЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ [29]

Теория дифракции, дисперсии или рассеяния света малыми частицами, как ее различно называли, важна не только из за ее значимости для основных гипотез оптики. но и вследствие ее применения к объяснению происхождения и природы света неба. Взгляд, высказанный Ньютоном и защищавшийся позднее такими авторитетами, как Гершель ²⁾ и Клаузиус ³⁾, что свет неба имеет голубую окраску первого порядка, получающуюся при отражении от водяных частиц, был связан с господствовавшим в то время мнением, что вода, взвешенная в облаках и туманах, образует пузырьки. Опыты, подобные опытам Брюкке ⁴⁾, приводили к другому заключению. При взбалтывании с водой слабого раствора мастики в алкоголе, свет, рассеиваемый выпадающей смолой, имеет голубой цвет, явно подобный по своему характеру голубому цвету неба. Помимо того, что было бы неоснователь-

¹⁾ Разумеется, когда задача решается точно на основе электромагнитной теории света, произвола нет, как и в случае дифракции звука: уравнения и граничные условия дают все элементы строгого решения. Некоторый произвол в выборе закона вторичных волн имеет место при приближенных решениях дифракционных задач, к которым была вынуждена прибегать физика XIX века до признания электромагнитной теории, за неимением последовательной теории света. Часто и сейчас при решении отдельных дифракционных задач бывает удобно задаться определенным законом вторичных волн, не решая строго задачу в полном объеме.

²⁾ Статья „Свет“, *Enc. Metrop.*, 1830, § 1143.

³⁾ *Pogg. Ann.*, 72, 76, 88; *Crelle*, томы 34, 36.

⁴⁾ *Pogg. Ann.*, 83.

Примеч. ред.

ным предполагать, что мастика образует пузырьки, рассеянный свет, как заметил Брюкке, гораздо более насыщен, чем голубой цвет первого порядка. Другой весьма важный момент хорошо выясняется опытами Тиндаля¹⁾ над облачками, осаждающимися при химическом действии света. Если при этом частицы достаточно малы, то свет, рассеянный в поперечном направлении, оказывается голубым и *полностью поляризованным* в направлении, перпендикулярном к падающему пучку.

Что касается цвета, то здесь не может быть особых затруднений, действительно, коль скоро возникает этот вопрос, становится ясно, что мера линейной протяженности, по сравнению с которой частицы считаются малыми, есть длина волны света и что данная совокупность частиц, при всех возможных представлениях о способе их действия, вызывает возмущение, непрерывно возрастающее по мере того, как мы проходим по спектру к более преломляемому его концу.

С другой стороны, тот факт, что направление полной поляризации не зависит от преломляющей способности вещества, из которого состоит облако, представлялся загадочным. Конечно, согласно теории тонких пластинок, это направление определялось бы законом Брюстера; но если частицы инородного вещества малы по всем направлениям, то условия существенно отличаются от тех, при которых приложим закон Брюстера.

Исследование этого вопроса с точки зрения упругой теории света будет зависеть от того, какое свойство твердой среды мы будем считать изменяющимся при переходе от одной оптической среды к другой. Более медленное распространение света в стекле или воде, чем в воздухе или пустоте, можно приписать большей плотности или меньшей упругости среды в первом случае; мы можем допустить и более сложное предположение, что обе эти величины изменяются при одном только условии, чтобы отношение скоростей было равно известному показателю преломления. Мы в дальнейшем увидим, что первоначальная гипотеза Френеля, что упругость в обеих средах одна и та же, является единственной, которая может быть согласована с фактами, и потому мы исследуем на ее основе природу вторичных волн, рассеянных малыми частицами.

Представим себе пучок линейно поляризованного света, распространяющегося среди множества частиц, которые все малы по сравнению с любой из длин волн. В согласии с нашей гипотезой мы можем предположить, что инородное вещество *нагружает* эфир таким образом, что увеличивает его *инерцию*, не изменяя его сопротивления деформации. Если бы частицы отсутствовали, волна распространялась бы беспрепятственно и излучения света в стороны не было бы. Даже в присутствии частиц, замедляющих движение эфира, было бы справедливо то же самое, если бы, в противовес возросшей инерции, были приложены соответствующие силы ко всем тем точкам эфира, где инерция изменилась. Эти силы имеют тот же период и направление, что и сами

¹⁾ *Phil. Mag.* (4) 137, стр. 388.

невозмущенные световые колебания. Свет, в действительности рассеянный в стороны, является, таким образом, тем же самым, какой был бы обусловлен силами, в точности противоположными силам, действующим на среду, в остальном свободную от возмущения, и остается только определить действие таких сил.

Ввиду малых размеров частиц, силы, действующие по всему объему каждой частицы, имеют все одну и ту же величину и направление, и можно рассматривать их как одно целое. Определение движения в эфире, обусловленного действием периодической силы в данной точке, представляет собой задачу, которой мы недавно занимались (§ 24). Но прежде чем применить решение ее к математическому исследованию данного вопроса, целесообразно, быть может, рассмотреть предмет вкратце с более общей точки зрения.

Прежде всего по необходимости имеет место полная симметрия относительно направления силы. Возмущение, состоящее из поперечных колебаний, распространяется во вне по всем направлениям от центра и, вследствие симметрии, направление колебания в любом луче лежит в плоскости, содержащей луч и ось симметрии; другими словами, направление колебания в рассеянном или дифрагированном луче составляет с направлением колебания в падающем или первичном луче наименьший из возможных углов. Симметрия требует также, чтобы интенсивность рассеянного света была равна нулю для луча, идущего вдоль оси, так как нет ничего, что отличало бы одно поперечное к лучу направление от другого. Приложение этого вывода очевидно. Допустим, для ясности, что первичный луч вертикален и что плоскость колебания совпадает с плоскостью меридиана. Интенсивность света, рассеянного малой частицей, постоянна и максимальна для лучей, лежащих в вертикальной плоскости, идущей на восток и запад, тогда как в *северном и южном направлениях рассеянного луча нет*. Если первичный луч не поляризован, то свет, рассеянный к северу и югу, целиком обусловлен той составляющей, которая колеблется с востока на запад, и, следовательно, *полностью поляризован*, причем направление его колебания — также с востока на запад. Подобным же образом, любой другой луч, рассеянный в горизонтальном направлении, вполне поляризован, и колебание в нем происходит в горизонтальной плоскости. В других направлениях, по мере приближения к вертикали, поляризация становится все менее и менее полной.

Наблюдаемые в отношении поляризации факты, таким образом, легко объясняются, а общий закон, связывающий интенсивность рассеянного света с длиной волны, вытекает почти так же легко из соображений, связанных с *размерностями*.

Наша цель — сравнить интенсивности падающего и рассеянного света, так как ясно, что они пропорциональны друг другу. Число (i), представляющее отношение двух амплитуд, есть функция следующих величин: объема (T) возмущающей частицы; расстояния (r) рассматриваемой точки от нее; длины волны (λ); скорости распространения света (b); первоначальной и измененной плотностей (D) и (D'); из них первые три зависят только от протяженности, четвертая — от

протяженности и времени, а пятая и шестая вводят в рассмотрение массу. Других элементов в задаче нет, за исключением просто чисел и углов, не зависящих от основных величин протяженности, времени и массы. Так как отношение (i), выражение которого мы ищем, не имеет размерности относительно массы, то отсюда сразу следует, что D и D' входят только в виде отношения $D:D'$, представляющего просто число и потому исключаемого из рассмотрения. Остается найти зависимость i от T , r , λ , b .

Из этих величин от времени зависит только b , а так как i не имеет размерности относительно времени, то b не может входить в искомое выражение.

Кроме того, так как одно и то же количество энергии распространяется через все сферические поверхности, концентричные с частицей, то мы заключаем, что i обратно пропорционально r . Равным образом очевидно, что i пропорционально T и, следовательно, должно быть пропорционально $\frac{T}{\lambda^2 r}$, так как T имеет три измерения в пространстве. Единственной величиной, меняющейся при переходе от одной части спектра к другой, является λ , и мы имеем важный закон:

Когда свет рассеивается частицами, весьма малыми по сравнению с любой из длин волн, отношение амплитуд колебаний в рассеянном и падающем свете обратно пропорционально квадрату длины волны, а отношение *интенсивностей* — четвертой степени длины волны.

Свет, рассеянный малыми частицами, имеет гораздо более насыщенный голубой цвет, чем голубой цвет первого порядка света, отраженного от очень тонкой пластинки. Исходя из общей теории (§ 8) или с помощью метода размерностей, легко доказать, что в последнем случае интенсивность пропорциональна λ^{-2} , а не λ^{-4} .

Из закона сохранения энергии ясно, что свет, излучаемый в стороны, не создается, а только отводится в сторону от главного потока. Если I — интенсивность первоначального света, после прохождения слоя толщины x мутной среды, то

$$dI = -hI\lambda^{-4}dx,$$

где h — постоянная, не зависящая от λ . Интегрируя, получаем

$$\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = -h\lambda^{-4}x, \quad (1)$$

где I_0 соответствует $x = 0$, — закон, совершенно аналогичный закону поглощения и показывающий, как по мере возрастания толщины среды свет стремится стать желтым и, наконец, красным ¹⁾.

Капитан Эбни нашел, что указанный закон замечательно хорошо согласуется с его наблюдениями над прохождением света в воде, в которой взвешены частицы мастики ²⁾.

¹⁾ „On the Light from the Sky, its Polarisation and Colour“, *Phil. Mag.*, февраль 1871.

²⁾ *Proc. Roy. Soc.*, май 1886.

Мы можем теперь исследовать математическое выражение для возмущения, распространяющегося в каком-либо направлении от малой частицы, на которую падает пучок света. Допустим, что частица находится в начале координат, и пусть выражение для первичного колебания будет

$$\zeta = \sin(nt - kx). \quad (2)$$

Ускорение элемента объема в начале координат равно $-n^2 \sin nt$, так что сила, которую надо было бы приложить к частям среды, где плотность равна D' (вместо D), чтобы волны могли проходить невозможными, равна на единицу объема:

$$-(D' - D)n^2 \sin nt.$$

Чтобы получить полную силу, которую мы должны предположить действующей, надо ввести множитель T (представляющий объем частицы). Противоположная ей сила, которую мы представляем себе действующей в точке O , вызвала бы то же возмущение, что и произведенное в действительности благодаря присутствию частицы. Таким образом, по (18) (§ 24), вторичное возмущение дается выражением ¹⁾

$$\zeta' = \frac{D' - D}{D} \frac{n^2 T \sin \varphi}{4\pi b^2} \cdot \frac{\sin(n - kz)}{r} = \frac{D' - D}{D} \frac{\pi T \sin \varphi}{\lambda^2 r} \sin(nt - kr). \quad (3)$$

Предыдущее исследование основано на предположении, что при переходе от одной среды к другой упругость эфира не изменяется. Если мы откажемся от этого предположения, то вопрос, конечно, усложняется; но при допущении, что изменения упругости (ΔN) и плотности (ΔD) относительно малы, результаты остаются весьма простыми. Если первичная волна дается выражением

$$\zeta = e^{-ikx}, \quad (4)$$

то слагающие вращения во вторичной волне будут

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= P \left(-\frac{\Delta N}{N} \frac{yz}{r^2} \right), \\ \omega_1 &= P \left(\frac{\Delta D}{D} \frac{y}{r} + \frac{\Delta N}{N} \frac{xy}{r^2} \right), \\ \omega_2 &= P \left(-\frac{\Delta D}{D} \frac{x}{r} + \frac{\Delta N}{N} \frac{z^2 - x^2}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$P = \frac{ik^2 T}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (6)$$

¹⁾ Строго говоря, силу надо считать действующей на среду в ее действительном состоянии, между тем как в (18) среда предполагается совершенно однородной. Нетрудно доказать, что соотношение (3) остается неизменным, если принять во внимание это обстоятельство, и во всяком случае очевидно, что поправка зависела бы от квадрата разности ($D' - D$).

Выражение для результирующего вращения в общем случае было бы довольно сложным и не нужно для нашей цели. Легко видеть, что оно происходит около оси, перпендикулярной к рассеянному лучу x , y , z , так как

$$x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 = 0.$$

Рассмотрим более частный случай луча, рассеянного в направлении, перпендикулярном к падающему лучу, так что $x = 0$. Имеем

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = P^2 \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 \frac{z^2}{r^2} + P^2 \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 \frac{y^2}{r^2}. \quad (7)$$

Если ΔN и ΔD оба конечны, то из (7) следует, что нет направления, перпендикулярного к первичному (поляризованному) лучу, в котором вторичный луч исчезает. Но опыт ясно показывает, что такое направление существует, и мы вынуждены, следовательно, заключить, что либо ΔN , либо ΔD должно равняться нулю.

Следствия, вытекающие из предположения, что ΔN равно нулю, уже были рассмотрены. Они очень хорошо согласуются с опытом и заставляют нас допустить, что колебания перпендикулярны к плоскости поляризации. Второе же предположение, что ΔD равно нулю, поскольку дело касается (7), будет столь же приемлемо, если мы допустим, что колебания происходят в плоскости поляризации. Возвратимся, однако, к соотношениям (5), которые дают в этом случае

$$\omega_3 = -P \frac{\Delta N}{N} \frac{yz}{r^2}, \quad \omega_1 = +P \frac{\Delta N}{N} \frac{xy}{r^2}, \quad \omega_2 = +P \frac{\Delta N}{N} \frac{z^2 - x^2}{r^2}. \quad (8)$$

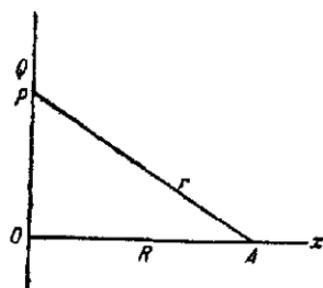
Согласно этим уравнениям, должно быть всего шесть направлений от точки O , вдоль которых нет рассеянного света: два вдоль оси y , перпендикулярно к первоначальному лучу, и четыре ($y = 0$, $z = \pm x$) под углами в 45° с этим лучом. Пока частицы малы, такого исчезновения света в наклонных к лучу направлениях не наблюдается, и мы должны из этого заключить, что гипотеза о существовании ΔN и колебаний в плоскости поляризации не может быть согласована с фактами. Неприемлема ни одна из форм упругой теории, за исключением той, в которой колебания предполагаются перпендикулярными к плоскости поляризации, и различие между средами сводится только к различию в плотности¹⁾ [30].

Прежде чем оставить этот вопрос, поучительно, быть может, показать применение метода, аналогичного тому, которым мы пользовались для малых частиц, к случаю преграды в виде *цилиндра*, ось которого параллельна фронтам первичных волн. Предположим 1) что изменение оптических свойств зависит от разности плотностей ($D' - D$) и мало по величине и 2) что диаметр цилиндра очень мал по сравнению с длиной волны света.

Пусть ось цилиндра совпадает с осью z (фиг. 27) и пусть попрежнему падающий луч параллелен оси x . Первоначальное колебание,

¹⁾ См. работу „On the Scattering of Light by Small Particles“, *Phil. Mag.*, июнь 1871 [том I, стр. 104].

таким образом, в главных случаях параллельно либо оси z , либо оси y . Рассмотрим сначала первый случай, в котором возмущение, обусловленное цилиндром, должно быть, очевидно, симметрично вокруг оси OZ и параллельно ей. Доля возмущения в точке A , обусловленная $PQ(dz)$, будет пропорциональна dz по амплитуде и отставать по фазе на величину, соответствующую расстоянию r . При вычислении действия всего цилиндра мы должны рассмотреть интеграл



Фиг. 27.

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{r} \sin(nt - kr) = \int_R^{\infty} \frac{dr \sin(nt - kr)}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Интеграл в левой части равенства можно вычислить так же, как в § 15, и мы находим выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nt - kr)}{r} dz = \sqrt{\frac{\lambda}{R}} \sin\left(nt - kR - \frac{1}{4}\pi\right),$$

показывающее, что полное действие отстает на $\frac{1}{8}\lambda$ по отношению к действию, обусловленному центральным элементом в точке O . Мы видели [см. ур. (3)], что если σ — площадь сечения, то действие элемента PQ равно

$$\frac{D' - D}{D} \cdot \frac{\pi \sigma dz \sin \varphi}{\lambda^2 r} \sin(nt - kr),$$

где φ — угол OPA . Строго говоря, это действие следует считать перпендикулярным к PA , и потому, для получения действия в направлении результирующей в точке A , его следовало бы еще умножить на $\sin \varphi$. Однако множитель $\sin^2 \varphi$, весьма близкий к единице для тех элементов, которые одни оказывают заметное действие, может быть опущен без влияния на результат. Таким образом, мы находим для возмущения в точке A выражение

$$\frac{D' - D}{D} \cdot \frac{\pi \sigma}{\lambda^2 R^2} \sin\left(nt - kR - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (9)$$

соответствующее падающей волне $\sin(nt - kx)$.

Когда первоначальное колебание параллельно оси y , возмущение, обусловленное цилиндром, уже не будет симметричным относительно OZ . Если α — угол между OX и рассеянным лучом, который, конечно, всегда перпендикулярен к OZ , то, для того чтобы сделать предыдущее выражение (9) применимым, необходимо только ввести множитель $\cos \alpha$.

Исследование показывает, что свет, дифрагированный идеальной проволочной решеткой, подчинялся бы, согласно принципам Френеля,

закону поляризации, сформулированному Стоксом. С другой стороны, мы получили бы отступление от этого закона, если бы предположили, что между цилиндром и окружающей его средой есть какое-либо различие в упругости.

§ 26. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ

Поскольку дело касается направлений лучей, законы отражения и преломления были удовлетворительно объяснены Гюйгенсом с помощью принципов волновой теории. Вопрос о зависимости количества отраженного света от свойств сред и от угла падения является гораздо более трудным; к его решению нельзя приступить а priori без специальных гипотез относительно природы световых колебаний и причины различия между разными средами. Посредством не строго динамических, но весьма остроумных рассуждений Френель пришел к некоторым, известным с тех пор под его именем, формулам, выражающим отношение амплитуды отраженного колебания к амплитуде падающего через одну постоянную (μ). Если θ — угол падения и θ_1 — угол преломления, то данное Френелем выражение для света, поляризованного в плоскости падения, есть

$$\frac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta + \theta_1)}, \quad (1)$$

где углы θ , θ_1 и μ (относительный показатель преломления) связаны, как обычно, соотношением

$$\sin \theta = \mu \sin \theta_1. \quad (2)$$

Подобным же образом, для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, Френель нашел

$$\frac{\text{tg}(\theta - \theta_1)}{\text{tg}(\theta + \theta_1)}. \quad (3)$$

В частном случае перпендикулярного падения обе формулы совпадают с формулой, данной ранее Юнгом, а именно

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 1}. \quad (4)$$

Так как эти формулы прекрасно согласуются с наблюдениями и во всяком случае являются простейшими из всех формул, могущих представить опытные данные, то уместно, быть может, рассмотреть их более подробно. С возрастанием θ от 0 до $\frac{1}{2}\pi$ значение, даваемое формулой синусов, возрастает от значения Юнга до единицы. Это легче всего видеть при помощи небольшого преобразования:

$$\frac{\sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta + \theta_1)} = \frac{1 - \frac{\text{tg} \theta_1}{\text{tg} \theta}}{1 + \frac{\text{tg} \theta_1}{\text{tg} \theta}} = \frac{\mu - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1}}{\mu + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1}}.$$

Представив $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_1}$ в форме $\sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\mu^2}}}$, мы видим, что когда θ возрастает от 0 до $\frac{1}{2} \pi$, $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_1}$ непрерывно уменьшается от 1 до 0, и, следовательно, выражение (1) возрастает от $\frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ до единицы.

Совершенно иначе обстоит дело с формулой тангенсов. Начиная со значения Юнга, ее значение убывает с возрастанием θ , пока не достигнет нуля, когда $\theta + \theta_1 = \frac{1}{2} \pi$, или $\sin \theta_1 = \cos \theta$, или по (2), $\operatorname{tg} \theta = \mu$. Это — угол поляризации, найденный Брюстером. Он представляется здесь, как угол падения, для которого нет отражения рассматриваемого поляризованного света. Когда угол падения проходит через угол поляризации, отраженное колебание меняет знак и возрастает по абсолютной величине до тех пор, пока не достигнет значения, равного единице при скользящем падении ($\theta = \frac{1}{2} \pi$).

До сих пор мы предполагали, что вторая среда (в которую свет входит у преломляющей поверхности) является более плотной. В противном случае наступает полное отражение, коль скоро $\sin \theta = 1/\mu$, причем θ_1 становится мнимым. Мы сможем лучше проследить это явление в связи с механической теорией света.

Если свет падает под углом поляризации на первую поверхность плоскопараллельной пластинки, то преломленный луч также встречает вторую поверхность пластинки под соответствующим углом поляризации. Действительно, если μ — показатель преломления второй среды относительно первой, то тангенс угла падения, являющийся также котангенсом угла преломления, равен μ . У второй поверхности (третью среду мы считаем одинаковой с первой) углы падения и преломления обмениваются значениями, и, следовательно, условие для угла поляризации удовлетворено, так как показатель для второго преломления есть μ^{-1} .

Основные формулы относятся к свету, поляризованному в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Если плоскость поляризации составляет угол α с плоскостью падения, то первоначальное колебание можно разложить на две составляющих: $\cos \alpha$, поляризованную в плоскости падения, и $\sin \alpha$, поляризованную в перпендикулярной к ней плоскости. Эти составляющие отражаются согласно уже рассмотренным законам и воссоздают линейно поляризованный свет, интенсивность которого равна

$$\cos^2 \alpha \frac{\sin^2 (\theta - \theta_1)}{\sin^2 (\theta + \theta_1)} + \sin^2 \alpha \frac{\operatorname{tg}^2 (\theta - \theta_1)}{\operatorname{tg}^2 (\theta + \theta_1)}. \quad (5)$$

Если падающий свет поляризован в плоскости, образующей угол в 45° с плоскостью падения, или поляризован по кругу (§ 20), или не поляризован вовсе, то выражение (5) можно применить к отраженному свету, подставив $\frac{1}{2}$ вместо $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$. Если, в общем случае, β обозначает угол между плоскостью падения и плоскостью, в которой поляризован отраженный свет, то

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos (\theta + \theta_1)}{\cos (\theta - \theta_1)} \quad (6)$$

— результат, приближенная справедливость которого была подтверждена Френелем и Брюстером.

Формулы для интенсивностей преломленного света вытекают непосредственно из соответствующих формул, относящихся к отраженному свету, в силу закона сохранения энергии. Рассмотреть этот вопрос проще всего, если предположить, что преломленный свет выходит из второй среды в третью, подобную первой, не испытывая потери при втором отражении, — предположение, которое было бы реализовано, если бы переход от одной среды к другой был не внезапным, а весьма постепенным. Интенсивности различных пучков света могут быть в таком случае измерены одним и тем же способом; и предположение, что нет потери энергии, когда падающий свет порождает отраженный и преломленный пучки, требует, чтобы сумма квадратов амплитуд колебаний, представляющих последние пучки, была равна квадрату амплитуды колебания, представляющего первый пучок, т. е. единице.

Таким образом в двух случаях, соответствующих (1) и (3), мы получаем

$$1 - \frac{\sin^2(\theta - \theta_1)}{\sin^2(\theta + \theta_1)} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\theta_1}{\sin^2(\theta + \theta_1)}, \quad (7)$$

$$1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \theta_1)}{\operatorname{tg}^2(\theta + \theta_1)} = \frac{\sin 2\theta \cdot \sin 2\theta_1}{\sin^2(\theta + \theta_1) \cos^2(\theta - \theta_1)}. \quad (8)$$

Стеклянная пластинка или стопка плоскопараллельных пластинок часто могут быть с удобством применены в качестве поляризатора в тех случаях, когда не требуется, чтобы поляризация была совершенно полной. При угле падения, в точности равном $\operatorname{arctg} \mu$, согласно формулам Френеля, был бы отражен только один вид поляризованного света, даже в том случае, когда падающий свет не поляризован. С другой стороны, поляризация прошедшего через пластинку света не полная; однако она улучшается с увеличением числа пластинок.

Если мы предположим, что нет правильной интерференции, то нетрудно вычислить с помощью геометрической прогрессии интенсивность (r) света, отраженного от пластинки, когда известна интенсивность (ρ) света, отраженного от одной поверхности. Интенсивность света, отраженного от первой поверхности, равна ρ . Интенсивность света, прошедшего через первую поверхность, отраженного от второй и затем вновь прошедшего через первую, равна $\rho(1 - \rho)^2$. Интенсивность следующей составляющей, три раза отраженной и два раза прошедшей, равна $\rho^3(1 - \rho)^2$ и т. д.

Отсюда

$$r = \rho + (1 - \rho)^2 (\rho + \rho^3 + \rho^5 + \dots) = \frac{2\rho}{1 + \rho}, \quad (9)$$

Интенсивность света, отраженного от стопы пластинок, была исследована Провостэй и Дезэном¹⁾ (Provostaye a. Desain). Если $\varphi(m)$ —

¹⁾ *Ann. d. Chim.*, 30, стр. 159, 1850.

интенсивность света, отраженного от m пластинок, то для отражения от $(m + 1)$ пластинок мы, как и выше, найдем

$$\begin{aligned} \varphi(m+1) &= r + (1-r)^2 \varphi(m) \{1 + r\varphi(m) + r^2 [\varphi(m)]^2 + r^3 [\varphi(m)]^3 + \dots\} = \\ &= \frac{r + (1-2r)\varphi(m)}{1 - r\varphi(m)}. \end{aligned}$$

При помощи этого выражения мы можем получить последовательно значения $\varphi(2)$, $\varphi(3)$ и т. д. через $\varphi(1)$, т. е. r . Общее значение будет

$$\varphi(m) = \frac{mr}{1 + (m-1)r}, \quad (10)$$

как легко проверить путем подстановки.

Соответствующее выражение для света, прошедшего через стопу из m пластинок, будет

$$\psi(m) = 1 - \varphi(m) = \frac{1-r}{1 + (m-1)r}. \quad (11)$$

Это исследование было распространено Стоксом на случай, когда имеет место поглощение света в пластинках ¹⁾.

Проверка формул Френеля путем непосредственных фотометрических измерений представляет известную трудность. Доля падающего под прямым углом света, пропущенная стеклянной пластинкой, была исследована Рудом (Rood) ²⁾. Неполное согласие с теорией отчасти может быть обусловлено поглощением. Если попытаться исследовать непосредственно отраженный свет, то экспериментальные трудности значительно возрастают; однако опыты со светом, отраженным почти перпендикулярно от только что отполированной стеклянной поверхности, говорят в пользу приближенной правильности формул Френеля. В случае старой, хотя и тщательно очищенной, поверхности может иметь место значительное уменьшение отражательной способности ³⁾.

Мы видели, что, согласно френелевой формуле тангенсов, когда угол падения равен $\text{arctg } \mu$, отражение света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, совершенно отсутствует или, что сводится к тому же, обыкновенный свет, отраженный под этим углом, можно было бы полностью погасить при помощи призмы Николя.

Как впервые заметил Эйри, в случае алмаза и других сильно преломляющих сред, этот закон находится лишь в приближенном согласии с фактами. Легко показать на опыте, что каков бы ни был угол падения, солнечный свет, отраженный от пластинки черного стекла, нельзя погасить с помощью николя, и, следовательно, он является не вполне линейно поляризованным. [1901. Однако, если стекло было только что отполировано с помощью шлифовальной мастики, отражение значительно уменьшается.]

¹⁾ *Proc. Roy. Soc.*, II, стр. 545, 1862.

²⁾ *Am. Jour.*, 50, июль 1870.

³⁾ „On the Intensity of Light, reflected from Certain Surfaces at nearly Perpendicular Incidence“, *Proc. Roy. Soc.*, 1886 [том II, стр. 522].

Этот вопрос был изучен Жамэном (Jamin). Характер отраженного колебания как по амплитуде, так и по фазе может быть представлен положением точки P на плоскости относительно начала координат O . Длина отрезка OP представляет амплитуду, а угол наклона OP к оси x фазу. Согласно формуле Френеля для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, точка P расположена всегда на оси x и переходит через O , когда угол падения равен $\arctg \mu$. Однако Жамэн нашел, что обычно точка P проходит не через O , а выше или ниже ее. Когда точка P лежит на оси y , то амплитуда наименьшая, а фаза находится посередине между крайними фазами. Для одного рода тел фаза отстает от фазы, соответствующей перпендикулярному падению, а для другого рода тел — опережает ее. В немногих промежуточных случаях точка P почти проходит через точку O , и тогда фаза резко изменяется, и наименьшее значение амплитуды равно нулю ¹⁾.

В случае металлов поляризация, вызываемая отражением, еще менее полная. Свет, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения, отражается при всех углах падения, но количество его уменьшается с возрастанием угла падения, от 0° до, примерно, 75° , а затем снова увеличивается до скользящего падения. Наиболее отчетливо выраженным эффектом является относительное запаздывание одной поляризованной составляющей относительно другой. При угле около 75° это запаздывание составляет четверть периода.

Интенсивность отражения в случае металлов часто весьма велика. От серебра, даже при перпендикулярном падении, отражается до 95% падающего света. Есть основание считать, что высокая отражательная способность металлов связана с обнаруживаемым ими сильным поглощением. Многие анилиновые краски отражают от своих поверхностей в аномально большом количестве те лучи спектра, по отношению к которым они являются наименее прозрачными. Характерный спектр поглощения перманганата калия воспроизводится (в обращенном виде) в свете, отраженном от поверхности кристалла ²⁾ этого вещества ³⁾.

§ 27. ОТРАЖЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ УПРУГОЙ ТЕОРИИ

В теории, уподобляющей эфир упругому твердому телу, исследование отражения и преломления не представляет очень серьезных трудностей, но результаты не очень хорошо согласуются с оптическими наблюдениями. Однако важно уяснить себе, что отражение и преломление могут быть объяснены, по крайней мере в основных чертах, с точки зрения совершенно определенной и понятной теории, которая,

¹⁾ По вопросу об экспериментальной проверке формул Френеля см. книгу Борна, Оптика, ОНТИ, 1937, стр. 52 и след. *Примеч. ред.*

²⁾ Stokes, On the Metallic Reflection exhibited by Certain Non-Metallic Substances, *Phil. Mag.*, дек. 1853.

³⁾ По вопросу о металлическом отражении и селективном отражении см. книгу Борна, Оптика, ОНТИ, 1937; также Вуда, Физическая оптика, ОНТИ, 1936, гл. XV и XVI. *Примеч. ред.*

если и не строго приложима к эфиру, то во всяком случае имеет определенный механический смысл. Преломляющую поверхность и волновые фронты для этой цели можно считать плоскими.

Когда колебания перпендикулярны к плоскости падения ($z = 0$), то решение задачи весьма просто. Допустим, что преломляющая поверхность совпадает с плоскостью $x = 0$ и что упругость и плотность в первой среде N, D , а во второй N_1, D_1 . Перемещения в обеих средах обычно обозначаются через $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1$; но в разбираемом случае ξ, η, ξ_1, η_1 равны нулю. Кроме того, ζ, ζ_1 не зависят от z . Согласно § 24 внутри сред должны удовлетворяться уравнения

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{N}{D} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{N_1}{D_1} \left(\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

Условия, которые должны быть удовлетворены на границе, состоят в непрерывности перемещения и напряжения, так что когда $x = 0$,

$$\zeta = \zeta_1, \quad N \frac{\partial \zeta}{\partial x} = N_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}. \quad (3)$$

Падающие волны могут быть представлены выражением

$$\zeta = e^{i(ax + by + ct)},$$

где

$$Dc^2 = N(a^2 + b^2). \quad (4)$$

$ax + by = \text{const}$ дает уравнение волновых фронтов. Отраженные и преломленные волны могут быть представлены выражениями

$$\zeta = \zeta' e^{i(-ax + by + ct)}, \quad (5)$$

$$\zeta_1 = \zeta_1' e^{i(a_1 x + by + ct)}. \quad (6)$$

Коэффициент при t для всех трех волн должен по необходимости быть одним и тем же, вследствие периодичности, а коэффициент при y должен быть одним и тем же, так как следы всех этих волн на плоскости раздела должны двигаться вместе. Что касается коэффициента при x , то как можно убедиться путем подстановки в дифференциальные уравнения, он меняет знак при переходе от падающей волны к отраженной; действительно,

$$c^2 = V^2 \{(\pm a)^2 + b^2\} = V_1^2 (a_1^2 + b^2), \quad (7)$$

где V и V_1 — скорости распространения в средах, определяемые соотношениями

$$V^2 = \frac{N}{D}, \quad V_1^2 = \frac{N_1}{D_1}. \quad (8)$$

Но $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ есть синус угла, заключенного между осью x и нормалью к плоскости волн, или на языке оптики — синус угла падения, а $\frac{b}{\sqrt{a_1^2 + b^2}}$ подобным же образом — синус угла преломления. Если обозначить эти углы, как и раньше, через θ , θ_1 , то из равенства (7) вытекает, что отношение $\sin \theta : \sin \theta_1$ равно постоянному отношению $V : V_1$ — хорошо известный закон синусов. Законы отражения и преломления вытекают просто из того факта, что скорость распространения по нормали к фронтам волн постоянна в каждой среде, иначе говоря, не зависит от направления фронта волны, а также из того, что скорости следов всех волн на плоскости раздела равны $\left(\frac{V}{\sin \theta} = \frac{V_1}{\sin \theta_1}\right)$. Условия на границе (3) теперь дают

$$1 + \zeta' = \zeta'_1, \quad Na(1 - \zeta') = N_1 a_1 \zeta'_1, \quad (9)$$

откуда

$$\zeta' = \frac{Na - N_1 a_1}{Na + N_1 a_1}, \quad (10)$$

— формула, дающая амплитуду отраженной волны через амплитуду падающей волны (принимаемую за единицу). Этим завершается решение задачи в комплексных величинах. Если a_1 (и θ_1) действительно, и падающая волна есть

$$\zeta = \cos(ax + by + ct),$$

или, вводя V , λ и θ ,

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta + y \sin \theta + Vt), \quad (11)$$

то отраженная волна есть

$$\zeta = \frac{N \operatorname{ctg} \theta - N_1 \operatorname{ctg} \theta_1}{N \operatorname{ctg} \theta + N_1 \operatorname{ctg} \theta_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (-x \cos \theta + y \sin \theta + Vt). \quad (12)$$

Формула для интенсивности отраженной волны получена здесь в предположении, что волны — гармонического типа; но так как она не содержит λ и изменения фазы нет, то она может быть распространена с помощью теоремы Фурье на волны любого вида. Заметим, что при перестановке первой и второй среды коэффициент в (12), сохраняя свое численное значение, просто меняет знак.

Амплитуда отраженной волны, даваемая, вообще говоря, равенством (12), принимает частные формы, когда мы вводим более специальные предположения о природе различия между средами с неодинаковой преломляющей способностью. Согласно Френелю и Грину, упругость неизменна, т. е. $N = N_1$. В этом случае

$$\frac{N \operatorname{ctg} \theta - N_1 \operatorname{ctg} \theta_1}{N \operatorname{ctg} \theta + N_1 \operatorname{ctg} \theta_1} = \frac{\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \theta_1}{\operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg} \theta_1} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta)}.$$

Если же, с другой стороны, плотность в разных средах одна и та же, то

$$N_1 : N = V_1^2 : V^2 = \sin^2 \theta_1 : \sin^2 \theta,$$

и тогда

$$\frac{N \operatorname{ctg} \theta - N_1 \operatorname{ctg} \theta_1}{N \operatorname{ctg} \theta + N_1 \operatorname{ctg} \theta_1} = \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta)$$

Если мы допустим полную точность выражений Френеля, то любое из этих двух предположений согласуется с опытом; только, если $N = N_1$, то надо считать световые колебания перпендикулярными к плоскости поляризации; тогда как, если $D = D_1$, то колебания параллельны этой плоскости.

Промежуточное предположение, согласно которому преломление считается обусловленным частью различием в плотности, частью различием в упругости, едва ли может быть согласовано с опытом, если только не считать, что изменение одной из этих величин весьма мало по сравнению с изменением другой. Но наиболее убедительный довод против совместной изменяемости обеих величин следует из теории рассеяния света малыми частицами (§ 25).

Ограничиваясь для простоты предположением Френеля ($N_1 = N$), исследуем теперь характер решения в случае, когда имеет место полное внутреннее отражение. Комплексные выражения для отраженной и преломленной волн суть

$$\zeta = \frac{a - a_1}{a + a_1} e^{i(-ax + by + ct)}, \quad (13)$$

$$\zeta_1 = \frac{2a}{a + a_1} e^{i(a_1x + by + ct)}; \quad (14)$$

пока a_1 действительно, можно их толковать в том смысле, что они означают

$$\zeta = \frac{a - a_1}{a + a_1} \cos(-ax + by + ct), \quad (15)$$

$$\zeta_1 = \frac{2a}{a + a_1} \cos(a_1x + by + ct), \quad (16)$$

при падающей волне

$$\zeta = \cos(ax + by + ct). \quad (17)$$

В этом случае существует преломленная волна обычного типа, уносящая часть первоначальной энергии. Однако, когда вторая среда менее плотная ($V_1 > V$) и угол падения превышает так называемый критический угол ($\arcsin V/V_1$), то не может быть преломленной волны обычного типа ¹⁾. Каково бы ни было направление ее распространения, ее след необходимо должен обгонять след падающей волны на поверхности раздела. Величина a_1 , определяемая нашими уравнениями, яв-

¹⁾ По вопросу о волне во второй среде см., например, книгу Шефера „Теоретическая физика“, том III. Примеч. ред.

ляется в таком случае мнимой, так что выражения (13) и (14) уже не представляют действительных частей комплексных выражений (5) и (6).

Если вместо a_1 напишем $-ia'_1$, то комплексные уравнения примут вид

$$\zeta = \frac{a + ia'_1}{a - ia'_1} e^{i(-ax + by + ct)}, \quad \zeta_1 = \frac{2a}{a - ia'_1} e^{i(-ia'_1x + by + ct)},$$

откуда, отбрасывая мнимые части этих выражений, получим

$$\zeta = \cos(-ax + by + ct + 2\varepsilon), \quad (18)$$

$$\zeta_1 = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + a_1^2}} e^{a_1'x} \cos(by + ct + \varepsilon), \quad (19)$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a_1}{a}. \quad (20)$$

Так как x предполагается во второй среде отрицательным, то мы видим, что возмущение здесь ограничено малым расстоянием от поверхности (в несколько длин волн), и энергии не распространяется внутрь второй среды. Вся энергия падающих волн находится в отраженных волнах, т. е. отражение — *полное*. Имеет место, однако, изменение фазы на 2ε , определяемое соотношением (20) или, если ввести V , V_1 и θ ,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta - \sec^2 \theta \cdot \left(\frac{V_1}{V}\right)}. \quad (21)$$

Так как эти формулы находят применение главным образом к отражениям в случае, когда второй средой является воздух, то удобно обозначить через μ показатель преломления *первой* среды *относительно второй*, так что $\mu = \frac{V_1}{V}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta - \frac{\sec^2 \theta}{\mu^2}}. \quad (22)$$

Приведенным выше толкованием формулы $\frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta)}$ в случае, когда θ_1 становится мнимым, мы обязаны проницательности Френеля. Его рассуждение, быть может, и не было проведено вполне строго, но нет никакого сомнения в том, что оно по существу правильно. Аналогичным способом Френель вывел из своей формулы тангенсов для изменения фазы ($2\varepsilon'$), сопровождающего полное отражение в случае, когда колебания происходят в плоскости падения, формулу

$$\operatorname{tg} \varepsilon' = \mu \sqrt{\mu^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \sec^2 \theta}. \quad (23)$$

Разности фаз 2ε и $2\varepsilon'$ не могут быть исследованы экспериментально, но *разность* ($2\varepsilon' - 2\varepsilon$) обнаруживается на опыте, когда падающий свет поляризован под некоторым углом к плоскости падения, так что имеет составляющие в обеих главных плоскостях. Если при отражении одна из составляющих запаздывает больше или меньше, чем другая, то результирующий свет поляризован уже не линейно, а эллиптически.

Из (22) и (23) мы имеем

$$\operatorname{tg}(\varepsilon' - \varepsilon) = \cos \theta \sqrt{1 - \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{\mu^2}},$$

откуда

$$\cos(2\varepsilon' - 2\varepsilon) = \frac{2\mu^2 \sin^4 \theta - (1 + \mu^2) \sin^2 \theta + 1}{(1 + \mu^2) \sin^2 \theta - 1}. \quad (24)$$

Наиболее интересный случай имеет место, когда разность составляет четверть периода, что соответствует свету, поляризованному по кругу. Если, однако, мы положим $\cos(2\varepsilon' - 2\varepsilon) = 0$, мы получим

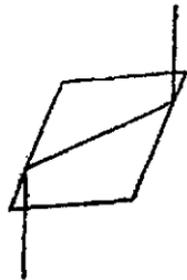
$$4\mu^2 \sin^2 \theta = 1 + \mu^2 \pm \sqrt{(1 + \mu^2)^2 - 8\mu^2},$$

откуда видно, что, для того чтобы $\sin \theta$ мог быть действительным, μ^2 должно быть больше чем $3 + \sqrt{8}$. Так как столь большое значение μ^2 недоступно, то превращение линейно поляризованного света в свет, поляризованный по кругу при помощи одного отражения неосуществимо.

Желаемой цели можно, однако, достичь с помощью двух последовательных отражений. Можно так подобрать угол падения по заданному показателю преломления, что изменение фазы составит $\frac{1}{8}$ периода, а тогда второе отражение при тех же самых условиях даст свет, поляризованный по кругу. Полагая $(2\varepsilon - 2\varepsilon') = \frac{1}{4}\pi$, мы получаем

$$2\mu^2 \sin^4 \theta = \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \{ (1 + \mu^2) \sin^2 \theta + 1 \} \quad (25)$$

— уравнение, из которого определяется θ , когда μ задано. Оказывается, что когда $\mu = 1,51$, $\theta = 48^\circ 37'$ или $54^\circ 37'$. Эти результаты были проверены Френелем при помощи ромба, изображенного на фиг. 28.



Фиг. 28.

Проблема отражения с точки зрения упругой теории света в случае, когда колебания происходят в плоскости падения, более сложна, ввиду тенденции к образованию волн сжатия. Чтобы избавиться от этих волн, которым не соответствуют никакие оптические явления, необходимо, следуя Грину, допустить, что скорость их бесконечно велика, т. е. что среды несжимаемы¹⁾. Даже и в этом случае мы должны ввести вблизи поверхности раздела волны, называемые по-разному — продольными, поверхностными или волнами давления; иначе невозможно удовлетворить условиям непрерывности деформации и напряжения. Эти волны, аналогичные в этом отно-

¹⁾ Делается некоторыми авторами предположение, что скорость этих волн равна нулю, недопустимо. Даже волны сжатия вызывают сдвиг среды и, следовательно, должны распространяться с конечной скоростью, если исключить случай, когда сопротивление сжатию отрицательно. Но в этом случае равновесие было бы неустойчивым. [1901. Лорд Кельвин впоследствии показал (*Phil. Mag.*, 26, стр. 415, 1888), что если среда жестко закреплена на границах, то отрицательное сопротивление сжатию не обязательно влечет за собой неустойчивость.]

шении волнам, имеющим место во второй среде в случае полного внутреннего отражения (19), распространяются на глубину всего нескольких длин волн и они такого рода, что нет при этом ни расширения, ни вращения. Ввиду наличия их, окончательные формулы менее просты, чем формулы Френеля. Если мы предположим, что плотности в обеих средах одинаковы, то никакого согласия теории с опытом нет. В этом случае, как мы видели, колебания, перпендикулярные к плоскости падения, отражаются согласно формуле тангенсов Френеля и, следовательно, колебания в плоскости падения должны бы подчиняться формуле синусов. Действительный результат теории, однако, совершенно иной. В случае, когда относительный показатель преломления не отличается значительно от единицы, получаются углы поляризации, равные $22\frac{1}{2}^\circ$ и $67\frac{1}{2}^\circ$, — результат, совершенно не согласный с опытом. Как и в случае рассеяния света малыми частицами, упругая теория света, основанная на предположении, что плотности в разных средах одинаковы, недопустима. Если же, следуя Грину, мы будем считать одинаковыми упругости, то получим результаты, находящиеся в лучшем согласии с опытом. Действительно, в первом приближении (когда преломление невелико) формула Грина совпадает с формулой тангенсов Френеля, так что световые колебания, происходящие в плоскости падения, отражаются согласно этому закону, а колебания, происходящие в перпендикулярной к ней плоскости, — согласно формуле синусов. Соответственно этому, колебания перпендикулярны к плоскости поляризации.

Указываемые теорией отклонения от формулы тангенсов в случае, когда преломление не очень мало, имеют тот же общий характер, что и отклонения, наблюдаемые Жамэном, но гораздо большую величину. Наименьшее отражение от поверхности стекла ($\mu = \frac{3}{2}$) было бы равно $\frac{1}{49}$ ¹⁾, т. е. почти половине того, что имеет место при перпендикулярном падении, и намного больше истинного значения. Таким образом эта теория в данном ее состоянии не может считаться удовлетворительной, и для ее улучшения были сделаны разного рода предложения. Единственным отклонением от гипотез Грина, находящимся в строгом соответствии с упругой теорией света, является предположение, что переход от одной среды к другой не резкий, а постепенный, т. е. что переходный слой имеет толщину, сравнимую с длиной волны. Это изменение оказало бы большую услугу теории, давшей формулу тангенсов Френеля, как результат резкого перехода, чем теории, в которой отступления от этой формулы уже слишком велики.

Представляется сомнительным, чтобы можно было получить многое от дальнейшего обсуждения этого вопроса, ввиду неспособности упругой теории света справиться с двойным лучепреломлением. Отступления от формул Френеля в случае отражения сравнительно малы, и вся проблема отражения столь тесно связана с условиями на поверхности раздела двух сред, о которых мы мало знаем, что вряд ли можно ожидать ценных указаний с этой стороны. Следует постоянно иметь

1) Green's Papers, by Farrers, стр. 333.

в виду, что отражение целиком зависит от приближения к разрывности в свойствах среды. Если бы толщина переходного слоя доходила до нескольких длин волн, то заметного отражения совсем не было бы.

Отметим здесь еще один пункт. Наши теории отражения не учитывают того факта, что по крайней мере одна из сред обладает дисперсией. Пример натянутой струны, совершающей поперечные колебания и состоящей из двух частей, одна из которых в силу жесткости обладает в некоторой мере диспергирующей способностью, показывает, что условия на границах, от которых зависит отражение, вследствие этого изменяются. Мы можем, таким образом, ожидать конечное отражение на поверхности раздела двух сред, если диспергирующие способности их различны, — даже в том случае, когда показатели преломления для рассматриваемых длин волн совершенно одинаковы, в каком-либо случае преломление отсутствует. Однако, одного знания диспергирующих свойств сред недостаточно для определения отражения без обращения к гипотезам¹⁾.

§ 28. СКОРОСТЬ СВЕТА

Согласно принципам волновой теории, дисперсию при преломлении можно объяснить только тем, что скорость света изменяется с длиной волны или с периодом. В случае колебаний воздуха и колебаний, распространяющихся в упругом твердом теле, такого изменения нет, и потому существование дисперсии рассматривалось одно время как серьезное возражение против волновой теории. Дисперсия в вакууме действительно представляла бы известную трудность или, по крайней мере, вынуждала бы нас к таким взглядам на структуру свободного эфира, которые в настоящее время казались бы неправдоподобными. Однако все данные опыта говорят против существования дисперсии в вакууме. „Если бы времена прибытия к нам синего и красного лучей от Альголя отличались друг от друга на один час, то эта звезда обнаруживала бы хорошо заметную окраску в своих фазах усиления или

¹⁾ Читатель, желающий получить дальнейшие сведения по этому вопросу может обратиться к статьям: Green, „On the Laws of Reflexion and Refraction of Light at the Common Surface of two Non-Crystallized Media“, *Camb. Trans.*, 1838 (Green's Works, London, 1871, стр. 242, 283); Lorenz, „Über die Reflexion des Lichtes an der Grenzfläche zweier isotropen, durchsichtigen Mittel“, *Pogg. Ann.*, 111, стр. 460 (1860) и „Bestimmung der Schwingungsrichtung der Lichtäthers durch die Reflexion und Brechung des Lichtes“, *ibid.*, 114, стр. 238 (1861); Strutt (Rayleigh), „On the Reflexion of Light from Transparent Matter“, *Phil. Mag.* (4), 13 (1871); von der Mühl, „Über die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze der unkrystallinischen Medien“, *Math. Ann.*, 5, стр. 470 (1872) и „Über Greens Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes“, *Math. Ann.*, 27, стр. 506 (1886); Thomson, „Baltimore Lectures“; Glazebrook, „Report on Optical Theories“, *Brit. Ass. Rep.*, 1886; Rayleigh, „On Reflexion of Vibrations at the Confines of two Media between which the Transition is Gradual“, *Proc. Math. Soc.*, 11, и Walker, „An Account of Cauchy's Theory of Reflexion and Refraction of Light“ *Phil. Mag.*, 23, стр. 151 (1887).

Ссылки на новые работы германских авторов, Кеттелера (Ketteler), Ломмеля (Lommel), Фойгта (Voigt) читатель найдет в докладе Глэзбрука (Glazebrook).

ослабления. Так как не наблюдалось ни следа окраски, то разность этих времен не может превосходить доли часа. Совершенно невероятно, чтобы параллакс этой звезды доходил до одной десятой секунды, так что ее расстояние от нас, вероятно, превышает два миллиона радиусов земной орбиты, и время, которое требуется ее свету для достижения земли, вероятно, превосходит тридцать лет, т. е. четверть миллиона часов. Трудно поэтому представить себе, как может существовать разность, равная четырем миллионным, между скоростями света, идущего почти от концов видимой части спектра¹⁾.

Для скорости света в *пустоте*, в километрах в секунду, определенной земными методами (статья „Свет“ Епс. Врт., том XIV, стр. 585), Ньюкомб (Newcomb) дает следующую таблицу:

Майкельсон, в морской академии, в 1879 г.	299 910
Майкельсон, в Кливленде, 1882	299 853
Ньюкомб, в Вашингтоне, 1882, пользуясь только результатами, которые он считал почти свободными от систематических ошибок	299 860
Ньюкомб, при учете всех измерений	299 810

К этим числам можно добавить для справок

Фуко, в Париже, в 1862 г.	298 000
Корню, в Париже, в 1874 г.	298 500
Корню, в Париже, в 1878 г.	300 400
Тот же результат, исправленный Листингом	299 900
Юнг и Форбс, 1880—1881 гг.	301 382

Ньюкомб находит, как наиболее вероятный результат, скорость света в *пустоте* = $299\,860 \pm 30$ км/сек²⁾.

Следует упомянуть о том, что Юнг и Форбс вывели из своих наблюдений разницу скоростей синего и красного света, составляющую около 2%, но ни Майкельсон, ни Ньюкомб, пользовавшиеся методом Фуко, не могли открыть и следа такой разницы.

Переходя к рассмотрению распространения света в весомах средах, мы имеем мало оснований ожидать, что скорость света окажется независимой от длины волны. Взаимодействие вещества и эфира может так усложнить дело, что дифференциальное уравнение колебаний будет содержать более одной постоянной. Закон постоянства скорости есть особое свойство некоторых весьма простых сред. Даже в случае натянутой и совершающей поперечные колебания струны скорость становится функцией длины волны, если мы допустим существование конечной жесткости.

Что касается закона дисперсии, то формула, выведенная Коши из теоретических соображений, одно время была общепринятой. Согласно ей

$$\mu = A + B\lambda^{-2} + C\lambda^{-4} + \dots, \quad (1)$$

¹⁾ Newcomb, Astron. Papers, том II, части III и IV, Washington, 1885.

²⁾ Обзор современных данных о скорости света см. в книге Майкельсона, Исследования по оптике.

Наиболее вероятным значением скорости света в настоящее время можно считать:

$299\,796 \pm 1$ км/сек, полученное Майкельсоном в 1926 г. *Примеч. ред.*

и нет сомнения в том, что даже два первых члена не дают хорошего совпадения с данными опыта для сред, обладающих не очень большой дисперсией, и притом в более яркой части спектра. В основе формул этого рода лежит допущение, что дисперсия обусловлена малостью длин волн, и из нее вытекает существование определенного предела A для показателя преломления в случае, когда длина волны очень велика. Новые, принадлежащие Ланглею (Langley), исследования закона дисперсии в каменной соли в инфракрасной части спектра не очень подкрепляют это представление. Явления аномальной дисперсии указывают на тесную связь между преломлением и абсорбцией; Гельмгольц формулировал общую теорию дисперсии, основанную на гипотезе, что дисперсия может быть связана с поглощением, имеющим место в невидимых частях спектра. По этому вопросу, который до сих пор мало разъяснен, мы отсылаем читателя к работе Глэзбрука „Report on optical Theories“¹⁾. [1901. Со времени написания этой статьи в этой области были сделаны большие успехи германскими физиками, из которых надо особо отметить Рубенса.]

Пределы этой статьи не позволяют рассмотреть более спекулятивные части нашего предмета. Мы заключим ее тем, что обратим внимание читателя на два новых экспериментальных исследования Майкельсона, результаты которых не могут не дать ценных указаний теоретикам оптики. Первое из них²⁾ было повторением, в улучшенных условиях, замечательного опыта Физо, при помощи которого доказано, что когда свет распространяется в воде, находящейся в быстром движении в направлении луча, скорость его, правда, изменяется, но не на полную величину скорости воды (v). В пределах экспериментальных ошибок скорость света согласуется с формулой, выведенной Физо на основе некоторых предположений Френеля, а именно

$$V = V_0 \pm \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} v, \quad (2)$$

где V_0 — скорость в неподвижной среде. Для воды $\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} = 0,437$. Аналогичный опыт с воздухом, движущимся со скоростью 25 метров в секунду, не дал определенного эффекта в согласии с формулой (2).

Из результата опытов с водой мы могли бы склониться к тому заключению, что у поверхности Земли, движущейся в пространстве, эфир все же сохраняет то, что не совсем удачно должно быть названо относительным движением. Однако второе из упомянутых выше исследований³⁾, повидимому, опровергает это заключение и доказывает, что во всяком случае внутри стен здания эфир надо считать полностью участвующим в движении материальных тел.

¹⁾ Brit. Assoc. Rep., 1886. В этом вопросе, как и в большинстве других преимуществе находится на стороне электромагнитной теории. См. J. W. Gibbs, Amer. Jour., 23, 1882.

²⁾ „Influence of Motion of the Medium on the Velocity of Light“, Michelson and Morley, Amer. Journ., 31, май 1886.

³⁾ „On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Aether“, Michelson and Morley, Phil. Mag., дек. 1887.

О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ

(Из *Proceedings of the London Mathematical Society*, том IX, стр. 21, 1877, также *Scientific Papers*, т. I, стр. 322).

Часто замечали, что когда группа волн распространяется в спокойной воде, то скорость группы меньше скорости отдельных волн, из которых она состоит: кажется, что волны проходят сквозь группу, затухая по мере их приближения к ее передней границе. Это явление было, я полагаю, впервые объяснено Стоксом, который рассматривал группу как результат наложения двух бесконечных рядов волн, имеющих равные амплитуды и почти равные длины волн и распространяющихся в одном и том же направлении. Мое внимание к этому вопросу было привлечено около двух лет тому назад Фрудом (Froude), и я пришел тогда независимо к тому же объяснению¹⁾.

В своей книге „Теория звука“ (§ 191) я рассмотрел этот вопрос в более общем виде и показал, что если V есть скорость распространения волн любого вида с длиной волны λ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то скорость U группы, состоящей из большого числа волн и движущейся в невозмущенную часть среды, дается выражением

$$U = \frac{d(kV)}{dk}, \quad (1)$$

или, как еще можно написать,

$$U : V = 1 + \frac{d \lg V}{d \lg k}. \quad (2)$$

¹⁾ Другое явление, на которое также обратил мое внимание Фруд, допускает аналогичное объяснение. Быстро движущийся пароход сопровождается своеобразной системой расходящихся волн, наиболее удивительной особенностью которых является то, что линия, проходящая через наибольшие возвышения последовательных волн, наклонна по отношению к волновым фронтам. Эту волновую картину можно объяснить наложением двух (или более) бесконечных рядов волн с немного отличающимися друг от друга длинами волн, причем направления и скорости распространения этих волн в каждом отдельном случае находятся в таком отношении друг к другу, что положение их относительно парохода не изменяется. Способ сложения лучше всего повясть, если начертить на бумаге две системы параллельных и равноотстоящих линий, удовлетворяющих указанному выше условию и представляющих гребни составляющих рядов волн. В случае двух рядов волн с несколько отличными друг от друга длинами волн можно показать, что тангенс угла между линией максимумов и волновыми фронтами равен половине тангенса угла между волновыми фронтами и направлением движения корабля.

Таким образом, если $V \sim \lambda^n$,

$$U = (1 - n)V. \quad (3)$$

Действительно, если два бесконечных ряда волн представлены выражениями $\cos k(Vt - x)$ и $\cos k'(V't - x)$, то их результирующая будет представлена выражением

$$\cos k(Vt - x) + \cos k'(V't - x),$$

равным

$$2 \cos \left\{ \frac{k'V' - kV}{2} t - \frac{k' - k}{2} x \right\} \cos \left\{ \frac{k'V' + kV}{2} t - \frac{k' + k}{2} x \right\}.$$

Если $k' - k$ и $V' - V$ малы, то мы имеем ряд волн с амплитудами, медленно изменяющимися от точки к точке между пределами 0 и 2, причем эти волны образуют ряд групп, отделенных друг от друга областями, сравнительно свободными от возмущения. Положение в момент t середины той группы, которая в начальный момент находилась в начале координат, определяется соотношением

$$(k'V' - kV)t - (k' - k)x = 0,$$

показывающим, что скорость группы равна $(k'V' - kV) : (k' - k)$. В пределе, когда число волн в каждой группе бесконечно велико, этот результат совпадает с выражением (1).

Заслуживают упоминания следующие частные случаи, сведенные здесь для удобства сравнения в таблицу:

$V \sim \lambda$, $U = 0$, несвязанные маятники Рейнольдса (Reynolds¹),

$V \sim \lambda^{\frac{1}{2}}$, $U = \frac{1}{2}V$, волны, образующиеся в глубокой воде под действием силы тяжести,

$V \sim \lambda^0$, $U = V$, воздушные волны и т. п.,

$V \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}$, $U = \frac{3}{2}V$, капиллярные водяные волны,

$V \sim \lambda^{-1}$, $U = 2V$, волны изгиба.

Капиллярными водяными волнами являются те, у которых длина волны столь мала, что обусловленная капиллярностью сила, возвращающая к положению равновесия, далеко превосходит ту силу, которая обусловлена тяжестью. Их теория была дана Томсоном (*Phil. Mag.*, ноябрь 1871). Волны изгиба, для которых $U = 2V$, суть волны, соответствующие изгибанию упругого стержня или упругой пластинки („Теория звука“, § 191).

В докладе, читанном на съезде Британской ассоциации в Плимуте (позднее напечатанном в *Nature*, 23 авг., 1877), проф. Осборн Рей-

¹) Несвязанные маятники Рейнольдса представляют собой попросту модель, состоящую из совокупности одинаковых маятников, подвешенных на одной оси и не связанных между собой.

нольдс дал динамическое объяснение того факта, что группа волн в глубокой воде распространяется со скоростью, равной лишь половине скорости отдельных волн. Оказывается, что энергия, распространяющаяся через любую точку при прохождении ряда волн, составляет лишь половину той энергии, которая необходима для поддержания волн, проходящих за тот же промежуток времени; таким образом, если ряд волн ограничен, то невозможно, чтобы его фронт распространялся с полной скоростью волн, так как это предполагало бы приобретение большего количества энергии, чем то, которое может быть доставлено в действительности. Проф. Рейнольдс не рассматривал тех случаев, когда распространяется *больше* энергии, чем это соответствует волнам, проходящим за то же время; однако его рассуждение, примененное в обратном направлении к данным результатам, показывает, что такие случаи должны иметь место. Отношение проходящей энергии к энергии идущих волн равно $U:V$; таким образом энергия, проходящая в единицу времени, составляет $U:V$ энергии, заключенной в отрезке длины V , или в U раз больше энергии, содержащейся в единице длины. Следовательно, отношение энергии, проходящей в единицу времени, к энергии, заключенной (в среднем) в единице длины, равно [по (1)]

$$d(kV) : dk.$$

В качестве примера я рассмотрю случай небольших волн без вращения в воде конечной глубины l ¹⁾. Если отсчитывать z от поверхности вниз и определить поднятие h волны соотношением

$$h = H \cos(nt - kx), \quad (4)$$

где $n = kV$, то соответствующий потенциал скоростей φ будет

$$\varphi = -VH \frac{e^{k(z-l)} + e^{-k(z-l)}}{e^{kl} - e^{-kl}} \sin(nt - kx). \quad (5)$$

Это значение φ удовлетворяет общему дифференциальному уравнению для движения без вращения ($\nabla^2 \varphi = 0$), обращает скорость в вертикальном направлении $\frac{d\varphi}{dz}$ в нуль при $z = l$ и в $\frac{dh}{dt}$ при $z = 0$. Скорость распространения определяется соотношением

$$V^2 = \frac{g}{k} \frac{e^{kl} - e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}}. \quad (6)$$

Мы можем теперь вычислить энергию, заключенную в отрезке длины x , предполагая, что этот отрезок содержит столь большое число волн, что дробные части можно не принимать в расчет.

¹⁾ Проф. Рейнольдс рассматривает трохоидаальные волны Ранкина и Фруда, при которых имеет место вращение молекул.

Для потенциальной энергии имеем

$$V_1 = g\varrho \int_0^h \int_0^x z \, dz \, dx = \frac{1}{2} g\varrho \int_0^h h^2 \, dx = \frac{1}{4} g\varrho H^2 x. \quad (7)$$

Для кинетической энергии имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \varrho \iint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \varrho \int \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} dx = \frac{1}{4} g\varrho H^2 x, \end{aligned} \quad (8)$$

по равенствам (1) и (6). Если, следуя рассуждениям, приведенным в конце настоящей работы, принять равенство V_1 и T , то значение скорости распространения вытекает из этих выражений. Полная энергия, содержащаяся в волнах, занимающих длину x , будет поэтому (на каждую единицу ширины)

$$V_1 + T = \frac{1}{2} g\varrho H^2 x, \quad (9)$$

где H обозначает максимальное поднятие.

Нам нужно вычислить теперь энергию, проходящую за время t через плоскость, для которой x постоянно, или, другими словами, работу W , которая должна быть произведена для поддержания движения плоскости (рассматриваемой как гибкая пластина) против давления жидкости, действующего на ее переднюю сторону. Переменная часть давления (δp), на глубине z , дается соотношением

$$\delta p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -nVH \frac{e^{k(z-l)} + e^{-k(z-l)}}{e^{kl} - e^{-kl}} \cos(nt - kx),$$

а для горизонтальной составляющей скорости имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = kVH \frac{e^{k(z-l)} + e^{-k(z-l)}}{e^{kl} - e^{-kl}} \cos(nt - kx),$$

так что

$$W = \iint \delta p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dz \, dt = \frac{1}{4} g\varrho H^2 V t \left\{ 1 + \frac{4kl}{e^{2kl} - e^{-2kl}} \right\} \quad (10)$$

после интегрирования. При помощи значения V в (6) можно показать, что

$$\frac{d(kV)}{dk} = \frac{1}{2} V \left\{ 1 + \frac{1}{V^2} \frac{d(kV^2)}{dk} \right\} = \frac{1}{2} V \left\{ 1 + \frac{4kl}{e^{2kl} - e^{-2kl}} \right\},$$

и подтвердить, таким образом, то, что значение W за единицу времени равно

$$\frac{d(kV)}{dk} \times \text{энергию в единице длины.}$$

В качестве примера непосредственного вычисления U мы можем взять случай волн, распространяющихся под совместным действием силы тяжести и сил сцепления.

Томсон доказал, что

$$V^2 = \frac{g}{k} + T'k, \quad (11)$$

где T' — поверхностное натяжение. Отсюда

$$U = \frac{1}{2} V \left\{ 1 + \frac{1}{V^2} \frac{d(kV^2)}{dk} \right\} = \frac{1}{2} V \frac{g + 3k^2 T'}{g + k^2 T'}. \quad (12)$$

Когда k мало, поверхностным натяжением можно пренебречь, и тогда $U = \frac{1}{2} V$; напротив, когда k велико, $U = \frac{3}{2} V$, как уже было указано выше. Когда $T'k^2 = g$, $U = V$. Это соответствует наименьшей скорости распространения, исследованной Томсоном.

Хотя рассуждения, основанные на интерференционной картине групп, и кажутся убедительными, все же желательно независимое исследование соотношения между энергией, содержащейся в волне, и энергией проходящей. В течение некоторого времени я не мог найти метода, приложимого ко всем видам волн; в частности, я не мог понять, почему сравнение энергий приводит к необходимости рассмотрения изменения длины волны. Быть может следующее рассуждение, в котором приращение длины волны является мнимым, поможет ответить на этот вопрос.

Допустим, что движению каждой части среды препятствует очень малая сила, пропорциональная массе и скорости этой части среды; под действием этой силы волны, возникшие в начале, с возрастанием x постепенно затухают. Движение, которое в отсутствии трения определялось бы выражением $\cos(nt - kx)$, при наличии трения представляется выражением $e^{-\mu x} \cos(nt - kx)$, где μ — небольшой положительный коэффициент. Строго говоря, трение изменяет и значение k ; однако это изменение — второго порядка относительно сил трения и может быть отброшено при допущенных здесь предположениях. Энергия волн в единице длины на любой стадии затухания пропорциональна квадрату амплитуды; следовательно, полная энергия в положительном полупространстве относится к энергии того числа волн наибольшей амплитуды (т. е. амплитуды в начале), которое приходилось бы на единицу длины, как $\int_0^{\infty} e^{-2\mu x} dx : 1$, т. е. как $(2\mu)^{-1} : 1$. Энергия, проходящая через начало координат в единицу времени, равна рассеянной энергии; если сила трения, действующая на элемент массы m , будет hmv , где v — скорость элемента и h — постоянная, то энергия, рассеянная в единицу времени, равна $h \sum mv^2$, или $2hT$, где T — кинетическая энергия. Таким образом, предполагая, что кинетическая энергия равна половине полной энергии, мы находим, что энергия, проходящая в единицу времени, относится к наибольшей энергии, содержащейся в единице длины, как $h : 2\mu$. Остается найти связь между h и μ .

Для этой цели удобно рассматривать $\cos(nt - kx)$ как действительную часть выражения $e^{int} \cdot e^{-ikx}$ и исследовать, как при данном n введение трения влияет на k . Действие трения выражается в дифференциальных уравнениях движения в замене $\frac{d^2}{dt^2}$ через $\frac{d^2}{dt^2} + h \frac{d}{dt}$ или, так как все движение пропорционально e^{int} , в подстановке $-n^2 + ih n$ вместо $-n^2$. Следовательно, введение трения соответствует замене n через $n - \frac{1}{2}ih$ (пренебрегаем квадратом h); соответственно этому k изменяется от k к $k - \frac{1}{2}ih \frac{dk}{dn}$. Таким образом решение принимает вид $e^{-\frac{1}{2}hx} \frac{dk}{dn} \cdot e^{i(nt - kx)}$ или, если отбросить мнимую часть, $e^{-\frac{1}{2}hx} \frac{dk}{dn} \cos(nt - kx)$, так что $\mu = \frac{1}{2}h \frac{dk}{dn}$ и $h : 2\mu = \frac{dn}{dk}$. Отношение энергии, проходящей в единицу времени, к энергии, содержащейся в единице длины, равно поэтому $\frac{dn}{dk}$ или $\frac{d(kV)}{dk}$, что и требовалось доказать.

При рассмотрении частных случаев бегущих волн часто замечали, что потенциальная и кинетическая энергии равны между собой. Однако я не припоминаю ни одного общего разбора этого вопроса. Эта теорема обычно несправедлива для отдельных частей среды¹⁾; ее следует рассматривать как относящуюся либо к целому числу длин волн, либо к столь большой части пространства, что можно не принимать в расчет остающиеся дробные части волн. В качестве примера, хорошо иллюстрирующего суть вопроса, я возьму случай равномерно натянутой круглой мембраны („Теория звука“, § 200), колеблющейся с данным числом узловых окружностей и диаметров. Основные виды колебаний, вследствие симметрии, являются не вполне определенными, так как любой диаметр может быть сделан узловой линией. Чтобы освободиться от этой неопределенности, мы можем предположить, что мембрана несет небольшой груз, прикрепленный к ней в любом месте, за исключением узловой окружности. Тогда имеют место два определенных основных вида колебаний; при одном из них груз находится на узловом диаметре, не производя поэтому никакого действия; при другом — посредине между узловыми диаметрами, где он производит максимальное действие („Теория звука“, § 208). Если колебания обоих родов происходят одновременно, то потенциальная и кинетическая энергии полного движения могут быть вычислены простым сложением энергий составляющих колебаний. Теперь, предполагая, что груз беспрельдно уменьшается, представим себе, что колебания имеют равные амплитуды и разнятся по фазе на четверть периода. Результат представляет бегущую волну, потенциальная и кинетическая энергии которой равны суммам энергий стоячих волн, из которых она состоит. Для первой составляющей имеем $V_1 = E \cos^2 nt$, $T_1 = E \sin^2 nt$; для второй составляющей $V_2 = E \sin^2 nt$, $T_2 = E \cos^2 nt$, так что $V_1 + V_2 = T_1 + T_2 = E$, т. е. потенциальная и кинетическая энергии бегущей волны равны, будучи

¹⁾ Воздушные волны составляют важное исключение.

равными полной энергии каждой из составляющих. Примененный здесь метод доказательства представляется достаточно общим, хотя и довольно трудно дать ему формулировку, подходящую для волн любого вида.

АБЕРРАЦИЯ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

(*Phil. Mag.*, том XXII, стр. 130—134, 1911, также *Scientific Papers*, т. VI, стр. 41.)

Приложение теории групповой скорости к случаю света было рассмотрено в одной из прежних работ ¹⁾ в связи с некоторыми экспериментальными результатами, опубликованными Юнгом (Young) и Форбсом ²⁾ (Forbes). В настоящее время, я думаю, общепризнано, что независимо от метода, — будь то метод зубчатого колеса или вращающегося зеркала, — то, что определяется на опыте, есть не фазовая скорость волны V , а групповая скорость U , причем

$$U = \frac{d(kv)}{dk},$$

где k — величина, обратно пропорциональная длине волны. В диспергирующей среде V и U отличны друг от друга.

Далее я писал: „Несомненно таким образом, что земные методы имеют дело исключительно с U ; обращаемся теперь к рассмотрению астрономических методов. Их два — один связан с аберрацией, другой — с затмениями спутников Юпитера. Последний, очевидно, дает U . Первый же не связан с наблюдением распространения особенности, наложенной на ряд волн, и потому не имеет отношения к U . Если будем считать обычную теорию аберрации удовлетворительной, то результат сравнения коэффициента, найденного из наблюдения, с солнечным параллаксом есть V — фазовая скорость“.

Приведенное выше утверждение, что звездная аберрация дает V , а не U , с полным основанием было недавно подвергнуто сомнению Эренфестом ³⁾ (Ehrenfest). Он показывает, что в данном случае условия не отличаются существенно от тех, которые имеют место в случае зубчатого колеса в методе Физо. Аргументация, которой он пользуется, имеет близкое сходство с методом, примененным мною в более поздней работе ⁴⁾. Обычно приводимое объяснение аберрации звезд основывается скорее на корпускулярной, чем на волновой теории. Для того чтобы привести его в соответствие с принципами этой последней, Френель, следуя Юнгу, счел нужным допустить, что эфир во всяком пустом пространстве, связанном с Землей (практически, следовательно, в атмосфере), не возмущается движением Земли, происходящим со скоростью 19 миль в секунду. Рассмотрим, для простоты, случай, когда направление движения звезды перпендикулярно к направлению движения Земли, и заменим

¹⁾ *Nature*, 24, 25, 1881; *Scientific Papers*, 1, стр. 537. (Эта статья Рэлея помещена ниже, стр. 171) (Ред.).

²⁾ Эти наблюдатели пришли к тому заключению, что скорость синего света в вакууме на 1,8% больше скорости красного света.

³⁾ *Ann. d. Physik*, 33, стр. 1571 (1910).

⁴⁾ *Nature*, 45, стр. 499 (1892); *Scientific Papers*, 3, стр. 542.

телескоп, которым пользовались бы на практике, двумя экранами с отверстиями, на которые свет падает под прямым углом. Мы можем, далее, представить себе световое возмущение состоящим из единственного плоского импульса. Когда импульс достигает переднего экрана, то та часть его, которая совпадает с мгновенным положением отверстия, проходит, а остальная часть задерживается. Прошедшая часть импульса движется далее по своему пути через эфир, независимо от движения экранов. Следовательно, для того чтобы импульс мог пройти через отверстие в заднем экране, линия, соединяющая центры отверстий, очевидно, не должна быть перпендикулярной к экранам и к фронту волны, как в случае покоя. В самом деле, вследствие движения заднего экрана в его собственной плоскости, отверстие будет переноситься вперед в течение времени прохождения света. Для того чтобы второе отверстие могло быть в нужном месте, когда его достигает свет, оно должно быть смещено назад на расстояние, соответствующее этому движению. Если скорость света равна V , а скорость Земли равна v , то линия, соединяющая центры отверстий и дающая видимое направление звезды, должна быть наклонена вперед на угол, равный v/V .

Если среда между экранами является диспергирующей, то возникает вопрос, в каком смысле надо понимать скорость света. Очевидно, в смысле групповой скорости, так что, если воспользоваться приведенным выше обозначением, угол абберации равен v/U . Но для того чтобы доказательство было вполне удовлетворительным, необходимо в этом случае оставить крайнее предположение об одиночном импульсе, заменив его группой волн с заданной приблизительно длиной волны.

Хотя и не может оставаться сомнения в том, что Эренфест прав в своей критике, из предыдущего не совсем ясно, в чем неправильность моего первоначального рассуждения. Правда, имеется особенность, налагающаяся на правильное волновое движение, составляющее однородный свет, но она, казалось бы, налагается скорее в целях рассуждения, чем вследствие самой природы задачи. Следующее ниже аналитическое решение хотя и не относится непосредственно к случаю простого экрана с отверстием, проливает некоторый свет на этот вопрос.

Предположим, что однородные плоские волны падают на „экран“ в плоскости $z = 0$ и что действие экрана состоит в том, что он уменьшает амплитуду колебания в отношении, изменяющемся медленно периодически как во времени, так и по отношению к координате x в плоскости экрана; это действие представляется множителем $\cos m(vt - x)$. Таким образом, когда $t = 0$, то действия нет, если $x = 0$ или кратно 2π ; но при x , равном нечетному числу π , имеет место обращение знака, эквивалентное изменению фазы на полпериода. И те места, где эти частные значения имеют место, движутся по экрану со скоростью v , которую будем считать малой по сравнению со скоростью света. В отсутствие экрана световое колебание представляется выражением

$$\varphi = \cos(nt - kz), \quad (1)$$

или, на месте экрана, где $z = 0$, просто

$$\varphi = \cos nt.$$

Согласно сделанным выше предположениям, колебание непосредственно за экраном будет:

$$\begin{aligned}\varphi &= \cos m(vt - x) \cos nt = \\ &= \frac{1}{2} \cos [(n + mv)t - mx] + \frac{1}{2} \cos [(n - mv)t + mx],\end{aligned}\quad (2)$$

и дело сводится к тому, чтобы найти, какой вид примет φ на конечном расстоянии z за экраном.

Нетрудно видеть, что для этой цели достаточно ввести члены, пропорциональные z , в аргументы косинусов. Таким образом, если мы напишем

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2} \cos [(n + mv)t - mx - \mu_1 z] + \\ &+ \frac{1}{2} \cos [(n - mv)t + mx - \mu_2 z],\end{aligned}\quad (3)$$

то мы можем определить μ_1, μ_2 так, чтобы в обоих случаях удовлетворить общему дифференциальному уравнению распространения, а именно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).\quad (4)$$

В уравнении (4) V постоянно, когда среда не диспергирующая; в обратном же случае V следует приписать разные значения, положим, V_1 и V_2 , когда коэффициент при t есть $n + mv$ или $n - mv$.

Таким образом

$$(n + mv)^2 = V_1^2 (m^2 + \mu_1^2); \quad (n - mv)^2 = V_2^2 (m^2 + \mu_2^2) \dots\quad (5)$$

Если коэффициенты μ_1, μ_2 определены в соответствии с (5), то значение φ в (3) удовлетворяет всем требованиям задачи. Оно может быть также написано в виде

$$\varphi = \cos \left[mvt - mx - \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) z \right] \cos \left[nt - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) z \right],\quad (6)$$

где первый множитель, медленно изменяющийся с t , можно рассматривать как амплитуду светового колебания.

Условие постоянства амплитуды в данный момент времени состоит в том, что выражение $mx + \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) z$ должно оставаться неизменным. Таким образом амплитуда, имеющая место при $x = 0$ на экране, имеет место и за экраном, вдоль линии

$$- \frac{x}{z} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{m},\quad (7)$$

так что (7) можно рассматривать как угол абберации, обусловленный наличием v . Остается выразить этот угол при помощи (5) через основные величины задачи.

При m , равном нулю, значение μ есть n/V ; это верно приближенно и в том случае, когда m мало. Таким образом, из (5) имеем

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2n} = \frac{2mv}{V} + \frac{nV}{2} \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right)$$

и

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2m} = \frac{v}{V} \left[1 + \frac{n}{2mv} \frac{V_2 - V_1}{V} \right] \quad (8)$$

с достаточным приближением.

В равенстве (8) разность $V_2 - V_1$ соответствует изменению в коэффициенте при t от $n + mv$ к $n - mv$. Отсюда, обозначая общий коэффициент при t через σ , функцией которого является V , имеем

$$V_1 - V_2 = 2mv \cdot \frac{dV}{d\sigma},$$

и (8) может быть написано в виде

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{2m} = \frac{v}{V} \left(1 - \frac{\sigma}{V} \frac{dV}{d\sigma} \right). \quad (9)$$

Но

$$V = \frac{\sigma}{k}, \quad U = \frac{d\sigma}{dk};$$

следовательно,

$$\frac{\sigma}{V} \frac{dV}{d\sigma} = k \frac{dV}{d\sigma} = 1 - \frac{\sigma}{k} \frac{dk}{d\sigma}$$

и

$$1 - \frac{\sigma}{V} \frac{dV}{d\sigma} = \frac{\sigma}{k} \frac{dk}{d\sigma} = \frac{V}{U},$$

где U — групповая скорость.

Соответственно этому отношение

$$-\frac{x}{z} = \frac{v}{U} \quad (10)$$

является выражением угла абберации, как и следовало ожидать.

В данной задаче наложенная особенность распределена неравномерно по фронту волны, как это можно предположить при рассмотрении действия зубчатого колеса; но тем не менее она существует, и для ее выражения требуется введение более чем одной частоты; из этого обстоятельства и возникает групповая скорость.

Развитие изложенного выше метода, вероятно, позволило бы разрешить задачу о ряде равноотстоящих движущихся отверстий или об одном единственном движущемся отверстии. Без сомнения, во всех случаях угол абберации получился бы равным v/U .

²) Абберация от щели, движущейся в диспергирующей среде, разобрана при помощи метода Рэля М. П. Свешниковой (*ЖРФХО*, 9, стр. 377, 1927), также подтвердившей взгляд Эренфеста о том, что здесь измеряется групповая скорость света.

О СКОРОСТИ СВЕТА

(*Nature*, том XXIV, стр. 382, том XXV, стр. 52, 1881, также *Scientific Papers*, том I, стр. 537.)

Опубликованный Юнгом (Young) и Форбсом (Forbes) результат¹⁾, состоящий в том, что синий свет распространяется в вакууме со скоростью, приблизительно на 1,8% большей, чем красный свет, поднимает интересный вопрос о том, что в действительности определяется такого рода наблюдениями. Если бы мы наблюдали, что гребень обычной волны в воде движется со скоростью одного фута в секунду, то мы, не колеблясь, утверждали бы, что это была скорость волны; и я предполагаю, что на обычном языке сторонников волновой теории скорость света точно так же означает скорость, с которой распространяется отдельная волна. Однако очевидно, что в случае света или даже звука мы не имеем средств для отождествления отдельной волны, чтобы определить скорость ее распространения. То, что мы делаем в большинстве случаев в действительности, сводится к тому, что мы накладываем какую-нибудь особенность, либо в отношении интенсивности, либо — длины волны, либо — поляризации, на часть в остальном непрерывного ряда волн и определяем скорость, с которой эта особенность распространяется. Так, в опытах Физо и Корню, а также в опытах Юнга и Форбса, свет делается прерывистым при помощи зубчатого колеса, в результате чего мы имеем скорость группы волн, а не непременно скорость отдельных волн. В работе „On progressive waves“ („О бегущих волнах“) (*Proc. Math. Soc.*, том IX), перепечатанной в виде приложения ко второму тому моей книги „Theory of Sound“ („Теория звука“), я исследовал общее соотношение между групповой скоростью U и фазовой скоростью V волны. Оказывается, что если k — величина, обратно пропорциональная длине волны, то

$$U = \frac{d(kV)}{dk}$$

и тождественно с V только в том случае, когда V не зависит от k , как это и считалось до сих пор имеющим место в отношении света в вакууме. Если же, как полагают Юнг и Форбс, V изменяется с k , то U отлично от V . На самом же деле эти опыты ничего нам не говорят непосредственно относительно значения V . Они относятся к U , и если из них выводить V , то это должно быть сделано при помощи данного выше соотношения.

При более детальном исследовании формы этого соотношения мы видим, что полное знание V (как функции k) приводит к полному знанию U , но что полное знание U , — т. е. именно того, что только и могут дать нам опыты этого рода, — не определяет V без помощи некоторого добавочного допущения. Обычное допущение состоит в том, что V не зависит от k , в каковом случае и U не зависит от k . Если мы имеем основание заключить из опыта, что U не независимо от k ,

¹⁾ *Roy. Soc. Proc.*, 17 мая 1881.

то это обычное допущение опровергнуто, но мы не можем подвинуться вперед в определении V , пока не введем какого-либо другого допущения.

Нелегко понять, как получить недостающее звено; но для того чтобы дать представление о вероятной величине рассматриваемого расхождения, я допустил, что в данном случае приложима обычная формула дисперсии $V = A + Bk^2$. Принимая отношение длин волн оранжево-красного и зелено-синего света, которыми пользовались Юнг и Форбс, равным 6:5, я нашел, что для красного света $V = U (1 - 0,0273)$, так что скорость волны почти на 3% меньше скорости, данной ими в качестве результата опыта.

При этих условиях становится интересным выяснить, что говорят другие данные по вопросу о скорости света. Помимо метода зубчатого колеса, скорость света была определена Фуко и Майкельсоном, пользовавшимися вращающимся зеркалом. На первый взгляд не очень ясно, является ли величина, которая получается в этом случае, групповой или фазовой скоростью; но исследование показывает, что это — групповая скорость. Следующие друг за другом волновые фронты после первого отражения не параллельны, откуда следует, что (если только V не постоянно) отдельный волновой фронт поворачивается в воздухе в промежутке между двумя отражениями.

Несомненно, таким образом, что земные методы имеют дело исключительно с U ; обращаемся теперь к рассмотрению астрономических методов. Их два — один связан с абберацией, другой — с затмениями спутников Юпитера. Последний, очевидно, дает U . Первый же не связан с наблюдением распространения особенности, наложенной на ряд волн, и потому не имеет отношения к U . Если будем считать обычную теорию абберации удовлетворительной, то результат сравнения коэффициента, найденного из наблюдения, с солнечным параллаксом есть V — фазовая скорость.

Теперь возникает вопрос, согласуется ли значение скорости, найденное из абберации, с результатами других методов. Сравнение определений, произведенных этими двумя астрономическими методами, должно дать отношение $U:V$, независимо от солнечного параллакса. Следующие ниже данные взяты из работы Джилла (Gill, Determination of the Solar Parallax from observations of Mars made at the Island of Ascension in 1877* (,Определение солнечного параллакса из наблюдений Марса, сделанных на острове Вознесения в 1877 г.“).

Время T , требующееся для прохождения светом среднего радиуса земной орбиты, было определено двумя астрономами из затмений спутников Юпитера. Деламбр из наблюдений, сделанных в прошлом веке, нашел $T = 493,2$ s, но недавно Глазенапп получил из новых наблюдений значительно большее значение $T = 500,8$ s $\pm 1,02$. Что касается постоянной абберации, то значение Брадлея равно $20'',25$, а значение Струве $20'',445$. Джилл находит, как среднее из девяти лучших современных определений, $20'',496$.

Если мы сопоставим значение Глазенаппа для T со значением скорости света, найденным Майкельсоном, то получим для солнечного па-

раллакса $8'',76$. Постоянная аберрация по Струве в сравнении с тем же значением скорости света дает $8'',81$. Из этих данных следует, что если мы считаем солнечный параллакс известным, то получаем из затмений спутников Юпитера почти то же значение скорости света, что и из аберрации, хотя первый результат относится к групповой, а второй — к фазовой скорости. Если вместо значения постоянной аберрации по Струве мы примем среднее значение, упомянутое выше, то получим для солнечного параллакса значение $8'',78$, оставляющее еще меньше места для разницы между U и V .

С другой стороны, мы можем произвести сравнение и без помощи затмений спутников Юпитера, вводя полученное другим путем значение солнечного параллакса. Значение Джилла $8'',78$, найденное из наблюдений Марса, точно согласуется со значением скорости света по Майкельсону и со средней постоянной аберрации. Некоторые другие астрономы склоняются к большему значению солнечного параллакса, равному $8'',86$; но какое значение мы ни примем и предпочтем ли мы определение скорости света Корню или Майкельсона, вывод тот, что не может быть такой разницы между групповой и фазовой скоростями, как 2 или 3%, если только, конечно, обычная теория аберрации не требует серьезного изменения. Эти соображения, как мне кажется, увеличивают уже имеющиеся серьезные трудности, заставляющие колебаться в принятии взглядов Юнга и Форбса. Появление дальнейших опытных данных по этому вопросу будет, без сомнения, ожидаться учеными с большим интересом.

В заключение я коснусь еще одного пункта. Предположение о наличии гармонических соотношений между различными спектральными линиями, испускаемыми светящимся газом, основано на допущении, что частота колебания обратно пропорциональна длине волны или, другими словами, что скорость распространения V не зависит от длины волны, — вопрос в настоящее время спорный. Если взгляды Юнга и Форбса правильны, то вычисления этого рода должны быть пересмотрены. С другой стороны, установление точных простых отношений между длинами волн было бы доводом в пользу того, что V не изменяется.

[¹]. К стр. 18.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Этот термин и понятия, лежащие в его основе, были введены в оптику Томасом Юнгом. В его Бэкеровском чтении на тему: „Теория света и цвета“ (Phil. Trans., 1801) сформулированы следующие гипотезы и предложения, которыми и было положено основание волновой теории:

Гипотезы

I. Светоносный эфир, в высокой степени разреженный и упругий, заполняет вселенную.

II. Колебательные движения возбуждаются в этом эфире каждый раз, как тело начинает светиться.

III. Ощущение различных цветов зависит от различной частоты колебаний, возбужденных светом на сетчатке.

IV. Все материальные тела притягивают эфирную среду, вследствие чего она накапливается в их веществе и на малом расстоянии вокруг них в состоянии большей плотности, но не большей упругости.

Предложения

I. Все импульсы распространяются в однородной упругой среде с равной скоростью.

II. Колебательное движение, которое по предположению происходит от колебания отдельной частицы, должно распространяться в однородной среде в форме сферы, но с различным количеством движения в различных частях.

III. Часть сферического колебательного движения, пропущенная через отверстие в покоящуюся среду, будет попрежнему распространяться прямолинейно концентрическими поверхностями, оканчивающимися сбоку слабыми и нерегулярными частями вновь расходящихся колебательных движений.

IV. Когда колебательное движение достигает поверхности, являющейся границей раздела сред различных плотностей, имеет место частичное отражение, обязательно пропорциональное разности плотностей.

V. Когда колебательное движение проходит через поверхность, разграничивающую различные среды, оно идет в таком направлении,

что синусы углов падения и преломления находятся в постоянном отношении, равном отношению скоростей распространения в двух средах.

VI. Когда колебательное движение падает на поверхность менее плотной среды так косо, что оно не может быть правильно отражено, то оно полностью отражается под углом, равным углу его падения.

VII. Если предположить, что равноотстоящие колебательные движения проходят через среду, частицы которой способны совершать непрерывные колебания, несколько более медленные, чем упомянутые колебательные движения, то скорость последних будет уменьшена этой способностью к колебаниям и в той же среде тем больше, чем больше частота колебательных движений.

VIII. Когда два колебательных движения различного происхождения совпадают либо точно, либо весьма близки по направлению, то их совместное действие является комбинацией движений, принадлежащих каждому в отдельности.

IX. Лучистый свет состоит из колебательных движений светонесного эфира.

В „Phil. Trans.“ за 1802 год, Юнг упоминает открытый им „простой и общий закон“. Этот закон состоит в том, что „везде, где две части одного и того же света попадают в глаз различными путями, либо точно, либо весьма близко по направлению, свет становится или более сильным там, где разность путей есть целое кратное некоторой длины, и наименее сильным в промежуточных состояниях интерферирующих частей, и эта длина различна для света различных цветов“.

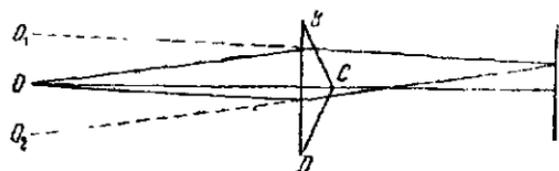
Повидимому, это было первое применение слова „интерферирующий“ или „интерференция“ в отношении света. Когда две части света своим совместным действием дают темноту, несомненно есть „интерференция“ (взаимодействие) в обычном смысле; но с механической или математической точки зрения, наложение, рассматриваемое в предложении VIII, было бы естественнее считать происходящим без интерференции (в смысле взаимодействия). Юнг применил свой принцип к объяснению цветов штрихованных поверхностей (решеток), цветов тонких пластинок и к опыту, который мы рассмотрим ниже в более совершенной форме, приданной ему Френелем, когда экран освещается одновременно светом, идущим от двух одинаковых источников. В качестве введения к этим объяснениям нам нужно получить аналитическое выражение для волн простого типа и рассмотреть эффект, получающийся от их сочетания.

[²]. К стр. 18. В оптических опытах два ряда волн могут интерферировать только тогда, когда они происходят от одного и того же источника. Иначе, как говорят обычно, не может быть постоянного соотношения фаз, а следовательно и правильной интерференции. Надо иметь в виду, однако, что это так только потому, что ряды оптических волн никогда не бывают совершенно однородными. Действительно однородный ряд мог бы сохранить постоянно соотношение фаз с другим таким рядом, и, можно добавить, был бы непременно поляризованным.

[3]. К стр. 18. В фундаментальном опыте Френеля свет от точки O (фиг. 29) падает на равнобедренную стеклянную призму BCD ; угол при C весьма немного меньше 180° .

Источником света может быть игольное отверстие, через которое солнечный свет входит в темную комнату или, что более удобно, изображение солнца, образованное короткофокусной линзой (1 или 2 дюйма). Когда, как это обычно бывает, желательно экономить свет, точка может быть заменена линией света, перпендикулярной к плоскости чертежа и полученной либо от линейного источника, например — нити электрической лампочки накаливания, либо пропусканием света через узкую вертикальную щель.

Если применять однородный свет, то свет, проходящий через призму, будет состоять из двух частей, расходящихся как бы из точек O_1 и O_2 , расположенных симметрично по обе стороны линии CO . Предположим, что лист бумаги помещен в A , причем его плоскость перпендикулярна к линии OCA , и рассмотрим, каково будет освещение в различных точках этой бумаги. Так как O_1 и O_2 являются изображениями O , то гребни волн следует представить себе выходящими из них одновременно. Поэтому они придут одновременно в точку A , находящуюся на равных расстояниях от них, и там усилят друг друга. Таким образом, на бумаге будет видна светлая полоса, параллельная краям призмы.



Фиг. 29.

Если же выбрать точку P_1 так, что разность между P_1O_2 и P_1O_1 равна половине волны (т. е. половине расстояния между двумя последовательными гребнями), то два потока света будут всегда встречаться в таких относительных состояниях,

что они будут уничтожать друг друга. На бумаге будет темная полоса, проходящая через P_1 и параллельная краям призмы. В точке P_2 , где O_2P_2 превосходит O_1P_2 на целую длину волны, мы имеем другую светлую полосу; и в P_3 , где O_2P_3 превосходит O_1P_3 на полторы длины волны, — другую темную полосу, и так далее. Следовательно, так как все симметрично относительно светлой полосы, проходящей через A , то экран будет покрыт рядом светлых и темных полос, постепенно переходящих одна в другую. Если передвигать бумажный экран параллельно самому себе, приближая или удаляя его от призмы, то геометрическое место всех последовательных положений любой полосы будет очевидно гиперболой, фокусами которой являются O_1 и O_2 . Таким образом, промежуток между любыми двумя полосами будет расти быстрее, чем расстояние экрана от источника света. Однако, интенсивность светлых полос быстро уменьшается при отодвигании экрана, так что для измерения их расстояния от A лучше заменить экран глазом, снабженным выпуклой линзой. Если мы таким способом измерим расстояние AP_1 между A и ближайшей светлой полосой, измерим также AO и рассчитаем (зная материал, форму призмы и расстоя-

ние CO) расстояние O_1O_2 , то ясно, что мы сможем отсюда вывести длины O_1P_2 и O_2P_2 . Их разность есть длина волны того однородного света, с которым производится опыт. Хотя это и не является методом, действительно применяемым для этой цели (так как его точность невелика), мы его здесь полностью изложили потому, что этот метод показывает очень просто возможность измерения длины волны.

Разность между O_1P_1 и O_2P_1 возрастает, когда AP_1 растет. Таким образом ясно, что полосы тем дальше отстоят друг от друга, чем длиннее волны применяемого однородного света. Следовательно, когда мы применяем белый свет и имеем наложенные системы полос всех видимых длин волн, полоса A будет по краям красной, следующие же светлые полосы будут синими по их внутренним краям и красными по внешним. Но после того, как мы пройдем несколько полос, светлые полосы от одного рода света постепенно заполняют темные полосы от другого; так что, хотя пользуясь однородным светом и можно сосчитать сотни последовательных светлых и темных полос, однако при применении белого света полосы становятся все менее и менее резкими по мере удаления от A и, наконец, переходят в почти равномерное белое освещение экрана.

[4]. К стр. 18. Вместо бипризмы можно воспользоваться отражением для раздвоения первоначального источника света. В одном из таких устройств применяются два отраженные изображения, полученные от двух почти параллельных отражающих поверхностей и находящиеся в одной и той же плоскости. Можно взять стекло (лучше зачерненное сзади), если только падение достаточно косое. В другом устройстве, предложенном Г. Ллойдом, интерференция происходит между светом, идущим непосредственно от первоначального источника и от одного отраженного изображения. Опыт Ллойда заслуживает большей известности, так как его можно осуществить очень легко и без специальных приспособлений. Солнечный свет впускается горизонтально в затемненную комнату через щель, проделанную в ставне, и направляется при почти скользющем падении на вертикальный брусок зеркального стекла, находящийся на расстоянии от 15 до 20 футов от щели. Длина бруска в направлении света не должна быть меньше 2-х или 3-х дюймов и может быть с выгодой увеличена для некоторых особых наблюдений. Полосы наблюдаются на плоскости, проходящей через задний вертикальный край бруска, посредством лупы с фокусным расстоянием от 1 до 2-х дюймов. Наклон отражающей поверхности следует, конечно, подобрать соответственно требуемой тонкости полос.

Казалось бы, судя по способу их получения, что ни при каких обстоятельствах нельзя увидеть больше половины всей системы полос. Однако, согласно принципу Дж. Б. Эйри (см. ниже), полосы можно сместить, если их рассматривать через призму. Практически достаточно держать лупу несколько эксцентрично. Можно тогда видеть, как полосы постепенно отделяются от зеркала, пока, наконец, не появится вся система полос, как в френелевской форме опыта.

[6]. К стр. 19. Мы видим из (2), что линейная ширина Λ полос отсчитанная от светлой до светлой или от темной до темной полосы, есть

$$\Lambda = \frac{\lambda D}{b} \dots \quad (1)$$

Степень однородности, необходимую для приблизительного совершенства n -ой полосы Френеля, можно сразу найти из (2) и (1), ибо если du — изменение в u , соответствующее изменению $d\lambda$, то $\frac{du}{\Lambda} = \frac{nd\lambda}{\lambda}$.

Ясно, однако, что du должно быть малой долей Λ , так что $\frac{d\lambda}{\lambda}$ должно быть во много раз меньше, чем $\frac{1}{n}$, если желательно, чтобы наиболее темные места казались черными. Явление будет достаточно хорошо выраженным, если относительный диапазон длин волн не превышает $\frac{1}{2} n$, при условии, впрочем, что распределение освещенности в этом диапазоне не сосредоточено у крайних областей.

Мы до сих пор предполагали, что источники в O_1 и O_2 математически малы. В действительности, источник — удлиненная щель, направление которой должно быть тщательно установлено параллельно отражающей поверхности или поверхностям. Таким способом много выигрыша в яркости без потери в резкости, так как различные части отверстия дают совпадающие системы полос.

Вопрос о допустимой ширине щели требует рассмотрения. Мы предположим, что свет, идущий от различных частей отверстия, не имеет постоянных фазовых соотношений, как это и бывает, когда непосредственно за щелью расположено пламя или накаленная нить. Правильная интерференция может тогда иметь место только для света, идущего от соответствующих частей двух изображений. Следует проводить различие между двумя способами, коими изображения могут быть расположены одно относительно другого. В опыте Френеля, безразлично — с зеркалами или с бипризмой, — соответствующие части изображений находятся на одной и той же стороне, т. е. правая сторона одного соответствует правой стороне другого, а левая — левой. Напротив, в опыте Ллойда отраженное изображение обращено относительно первоначального источника, и два внешних края соответствуют друг другу, как и два внутренних. Следовательно, в первом расположении полосы от различных частей щели отличаются только боковым смещением, и условие резкости состоит просто в том, что проекция ширины щели составляет малую долю ширины полос. Отсюда следует, что предельная ширина не зависит от порядка рассматриваемых полос. Иначе обстоит дело в методе Ллойда. В этом случае центры систем полос те же, какую бы часть щели ни считать действующей, а меняется расстояние b между изображениями. Следовательно, полосы, соответствующие различным частям щели, — равного масштаба, и результирующее смещение должно расти с ростом порядка полос. Как следует из (2), соответствующие изменения в u и b даны формулой:

$$du = -n\lambda D \frac{db}{b^2},$$

так что

$$\frac{du}{\lambda} = -n \frac{db}{b}. \quad (II)$$

Если b есть удвоенная ширина щели, то (II) даст меру получающегося смещения полос. Важно то, что щель должна становиться более узкой по мере роста n , если желательно сохранить ту же степень отчетливости полос.

[6] К стр. 20. Этим требованиям легко удовлетворить применением зеркал Ллойда и дифракционной решетки для получения спектра. Белый свет входит в темную комнату через щель в ставне и падает последовательно на решетку и ахроматическую линзу, так что в фокальной плоскости образуется действительный дифракционный спектр, или вернее ряд спектров. Центральное изображение и все боковые окрашенные изображения, кроме одного, задерживаются экраном. Спектр, пропускаемый экраном, является непосредственным источником света в интерференционном опыте, и так как отклонение всякого цвета от центрального белого изображения пропорционально λ , то нужно только расположить зеркало так, чтобы его плоскость проходила через белое изображение, чтобы осуществить условие для образования ахроматических полос.

Если имеется под рукой подходящая решетка, то опыт в таком виде удастся очень хорошо. Если удовлетвориться менее совершенным выполнением условий ахроматичности, то можно заменить дифракционный спектр призматическим, таким, чтобы $d\left(\frac{\lambda}{b}\right) = 0$ для наиболее интенсивных лучей. Тогда полосы ахроматичны в том же смысле, как и изображение в обычной зрительной трубе. В этом случае можно иметь дело просто с мнимым изображением спектра, и опыт может быть очень просто выполнен с зеркалом Ллойда и призмой, например, в 20° , поставленной прямо перед ним.

Число темных и светлых полос, даваемых призмой, не так велико, как можно было бы думать. Недостаточная резкость, которая вскоре появляется, может быть обусловлена только несовершенным наложением различных составляющих систем полос. То, что именно так обстоит дело, сразу доказывается при наблюдении по методу Физо, ибо спектр от щели на очень умеренном расстоянии оказывается пересеченным полосами. Если установка была правильно сделана, то некоторая область в желто-зеленом непрерывна, к другому же концу спектра густота полос возрастает. В отношении красных и синих лучей первоначальные полосы можно считать уже размытыми, что же касается центральных лучей, то полосы все еще хорошо выражены. При этих условиях замечательно то, что окраска столь мало заметна при непосредственном наблюдении полос. Можно думать, что глаз мало чувствителен к цветам, появляющимся при этом, быть может вследствие того, что он сам лишен ахроматизма.

[7]. К стр. 22. В одном классическом опыте интерференционные полосы применялись для определения того, движется ли свет в стекле быстрее или медленнее, чем в воздухе. Для этой цели можно расположить

очень тонкий кусок стекла на пути одного из интерферирующих лучей; результирующее смещение полос таково, что оно указывает на запаздывание света, проходящего через стекло. В более совершенной форме этого опыта два куска плоскопараллельного стекла, вырезанные из одной и той же пластинки, вставляются между призмой и экраном так, что лучи от O_1 (фиг. 29) проходят через одну часть, а от O_2 — через другую. Пока куски параллельны, нет никакого смещения, но если слегка повернуть один из них, то полосы сразу смещаются. В отсутствии дисперсии запаздывание R , обусловленное пластинкой, было бы независимо от λ и поэтому полностью компенсировалось бы в точке, определенной соотношением $u = \frac{DR}{b}$, но когда имеет место дисперсия, запаздывание сопровождается кажущимся смещением полос, согласно принципу, изложенному Эйри, как было показано Стоксом.

[⁸]. К стр. 22. Эти цвета, широко известные как цвета мыльных пузырей, наблюдаются при самых разнообразных условиях. Они были изучены впервые с некоторым успехом Робертом Гуком, называвшим их „фантастическими цветами“ (*Micrographia*, 1664). Исследование их было возобновлено Исааком Ньютоном с обычной для него проницательностью („Рассуждения о свете и цветах“, 1675, Оптика, книга II); им и было открыто большинство законов, управляющих этими явлениями. Ньютон производил опыты в особенности с тонкими пластинками воздуха, ограниченными слегка изогнутыми стеклами; цветные кольца, появляющиеся при этом, носят название „колец Ньютона“.

Цвета оказываются наиболее чистыми, когда отражающими поверхностями являются лишь те, которые ограничивают тонкую пленку, как это имеет место в случае мыльного пузыря. Если же взять две стеклянные пластинки, с пленкой воздуха между ними (что является в некоторых отношениях более удобным), то рассматриваемый свет может быть загрязнен светом, отраженным от внешних поверхностей. Это можно устранить применением клинообразных стекол, приложенных так, что внешние поверхности, хотя и параллельны друг другу, наклонены по отношению к внутренним, активным поверхностям. С помощью подходящего оптического устройства можно тогда разделить обе части света — полезную и нежелательную.

В своем первом исследовании на эту тему Томас Юнг сумел объяснить образование этих цветов интерференцией света, отраженного от двух поверхностей пластинки, или, лучше сказать, — наложением двух отраженных колебаний, дающих результирующие колебания переменной величины, в зависимости от соотношения фаз. Здесь появляется трудность, которая могла бы оказаться непреодолимой для менее проницательного исследователя. Световое колебание, отраженное от второй поверхности, проходит путь, увеличенный на удвоенную толщину пластинки, и было бы естественно предположить, что относительное запаздывание будет измеряться этой величиной. Если бы это было так, то два колебания, отраженные от поверхностей бесконечно тонкой пластинки, совпадали бы по фазе, и интенсивность результирующего

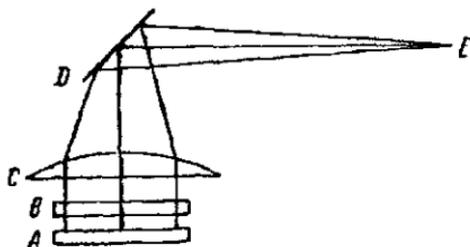
колебания была бы максимальной. Факты же явно обратные. В месте соприкосновения ньютоновых стекол, или в наиболее тонком месте мыльной пленки, как раз перед тем, как она лопнет, цвет черный, а не белый, как следовало бы из этого объяснения. Юнг понял, что устранить противоречие можно, если учесть то, что два отражения происходят при различных условиях: одно, например, при прохождении света из воздуха в воду, а другое — из воды в воздух. Согласно принципам механики, второе отражение сопровождается изменением знака, равносильным приобретению или потере половины волны. Когда ряд волн, образующий какой-либо окрашенный свет, отражается от бесконечно тонкой пленки два частичных отражения приводят к полному расхождению фаз и при равенстве интенсивностей должны дать при наложении полную темноту. При помощи этого принципа последовательность цветов в кольцах Ньютона объясняется в основном так же, как и цвета интерференционных полос.

Полная теория цветов тонких пластинок требует учета не только двух упомянутых отражений, но бесконечного ряда таких отражений. Это было впервые сделано Пуассоном для случая запаздываний, являющихся целыми кратными полуволны и затем в более общем виде Дж. Б. Эйри (*Camb. Phil. Trans.*, 1832, 4, стр. 409).

[⁹]. К стр. 23. Мы видим, в противоположность тому, что можно было сперва ожидать, что запаздывание наименьшее, когда падение наиболее косое, и достигает максимума, когда падение нормальное.

[¹⁰]. К стр. 24. Это можно рассматривать как развитие точки зрения Юнга. Пластинка исчезающей толщины не представляет никакого препятствия. По самой природе вещей поверхность отражать не может.

[¹¹]. К стр. 25. Полосы, наблюдаемые, когда свет натриевого пламени падает на почти параллельные поверхности, часто применяются для испытания качества плоскости. При совпадении двух плоскостей полосы немногочисленны и широки, если они вообще имеются. Как бы поверхности ни были приложены одна к другой, полосы должны быть прямыми, параллельными и равноотстоящими. Если это условие нарушается, то одна из поверхностей отходит от плоской формы.



Фиг. 30.

На фиг. 30 *A* и *B* представляют испытуемые стекла, а *C* есть линза с фокусным расстоянием в 2 или 3 фута. Лучи, расходящиеся от натриевого пламени в точке *E*, становятся параллельными после прохождения через линзу и после отражения от поверхностей собираются вновь линзой в *E*. Для того чтобы было возможно наблюдать, совпадение

светящейся точки и ее изображения должно быть несколько нарушено, так чтобы одна из них сместилась в положение несколько позади плоскости чертежа, а другая — в положение несколько впереди нее. Глаз, защищенный от пламени экраном, ставится на месте изображения и при аккомодации на AB видит поле, пересеченное полосами. Отражатель D вводится для того, чтобы линия зрения была горизонтальной, что удобнее.

Эти полосы можно фотографировать. Объектив камеры ставится на место глаза, возможно ближе к пламени. С подходящими пластинками, сенсibilизированными цианином, необходима экспозиция от десяти минут до часа. Для получения наилучших результатов заднюю поверхность A следует зачернить, а действие передней поверхности B надо устранить наложением клинообразной пластинки стекла, причем промежуточное пространство заполняется терпентиновым маслом или другой жидкостью, показатель преломления которой близок к показателю преломления стекла. Кроме того, свет должен быть очищен от синих лучей с помощью сосуда, содержащего раствор двухромового калия. При этих предосторожностях темные части полос очень черны, и экспозицию можно продолжать гораздо дольше, чем было бы допустимо без этого.

Таким методом нетрудно сравнить между собой две плоскости, и следовательно, если известно, что первая свободна от ошибок, можно определить ошибки второй. Но как получить и проверить стандартную плоскость? Обычно для этого сравнивают три поверхности. Если две поверхности можно привести в совпадение по всем азимутам, то это значит, что они сферические и равной кривизны, но одна вогнутая, а другая выпуклая, причем не исключен и тот случай, что они являются совершенно плоскими. Если совпадают A и B , а также A и C , то отсюда следует, что B и C должны быть подобны. Следовательно, если B и C также совпадают, то все три поверхности должны быть плоскими. Расширением этого процесса можно найти ошибки трех неплоских поверхностей из рассмотрения полос интерференции, которые они дают при их комбинации в три пары.

Свободная поверхность спокойной воды почти идеально плоская, и как показал Рэлей (*Nature*, 1893, 48, 212), нет особых трудностей для применения ее в качестве стандарта для сравнения. Идя по тому же пути, можно получить плоскопараллельную пластинку, наливая слой воды на ртуть. Если нужно, можно компенсировать более высокую отражательную способность ртути прибавлением к воде красящего вещества.

[1²]. К стр. 25.

КОЛЬЦА ГЕЙДИНГЕРА, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НАКЛОНА

Замечательно то, что хорошо известное теоретическое исследование, предпринятое с целью объяснения колец Ньютона, приложимо более непосредственно к другой системе колец, открытой позже.

Результаты, выраженные в уравнениях (1) до (8), применимы в первую очередь к пластинкам, поверхности которых абсолютно парал-

лельны, хотя несомненно их можно применять с большой точностью и к случаю, когда толщина медленно меняется.

Будем считать теперь в (1) t величиной постоянной, а α' переменной. Если α' мало, то:

$$\delta = 2\mu t \left(1 - \frac{\alpha'^2}{2}\right) = 2\mu t - \frac{t\alpha'^2}{\mu},$$

и так как разности δ пропорциональны α'^2 , то закон образования тот же, что и для ньютоновых колец, где α' постоянно, а t пропорционально квадрату расстояния от точки соприкосновения. Чтобы видеть эти кольца отчетливо, глаз должен быть аккомодирован не на пластинку, а на бесконечность.

Первое наблюдение колец, зависящих от наклона, было, повидимому, сделано Гейдингером (Pogg. Ann., 1859, 77, стр. 219; 1855, 96, стр. 453), который применял натриевый свет, отраженный от пластинки слюды (около 0,2 мм толщины). Легче всего увидеть полностью кольца в проходящих лучах, хотя они по необходимости несколько слабее. Для этой цели достаточно смотреть сквозь пластинку слюды, расположенную близко к глазу, перпендикулярно к линии зрения, на лист белой бумаги или картона, освещенный натриевым пламенем. Хотя Гейдингер не рассматривал двойного лучепреломления слюды и дал формулы, не совсем верные даже для обычно преломляющих пластинок, однако он вполне оценил особый характер колец, противопоставляя „Verföhrungsringe“ и „Plattenringe“. Последние можно по заслугам назвать его именем. Их позднее открытие можно объяснить технической трудностью получения достаточно параллельных пластинок, если только не воспользоваться при этом слюдой или приемом наливания воды на ртуть. Кольца Гейдингера были вновь открыты О. Луммером (Wied. Ann., 1884, 23, стр. 49), который указал на те выгоды, которые они представляют при исследовании пластин, которые нужно сделать плоскопараллельными.

[13]. К стр. 26. Допуская в известных направлениях полное прохождение, несмотря на высокую отражательную способность поверхностей, пластинка играет роль резонатора.

[14]. К стр. 26. Как видим, оптические части прибора Фабри и Перо сами по себе отличаются крайней простотой, однако они требуют точности изготовления и юстировки, и требования в этих отношениях тем жестче, чем дальше преследуется идеал — сужение колец путем увеличения отражающей способности. Применяются два вида установки. В одном приборе, называемом интерферометром, расстояние между поверхностями — толщина пластинки — может изменяться в широких пределах. В наиболее совершенном виде этот прибор сложен и дорог. Действительные измерения длин волн производились Фабри и Перо по большей части с помощью прибора другого вида, называемого эталоном. Здесь толщина оптической пластинки задана; стекла прикреплены к металлическим выступам посредством регулируемых пружин, и окончательная юстировка на параллельность производится регулиров-

кой нажима, производимого этими пружинами. Расстояние между плоскостями может быть в 5 или 10 мм.

Теория сравнения длин волн при помощи этого прибора весьма проста, и может быть ее полезно привести, следуя изложению Фабри и Перо (Ann. Chim. Phys., 1902, 25, стр. 110). Рассмотрим сначала излучение кадмия в качестве стандарта. Оно дает систему колец. Пусть P — порядковый номер одного из этих колец, например первого, считая от центра. Это целое число предполагается известным. Порядок интерференции в центре пусть будет $p = P + \varepsilon$. Нам нужно определить это число ε , лежащее обычно между 0 и 1. Диаметр рассматриваемого кольца возрастает вместе с ε , так что измерение диаметра позволит нам определить последнее. Пусть t — толщина слоя воздуха. Порядок интерференции в центре есть $p = \frac{2t}{\lambda}$. Это соответствует нормальному прохождению лучей. При угле наклона i порядок интерференции есть $p \cos i$. Таким образом, если x — угловой диаметр кольца P , то $p \cos \frac{x}{2} = P$; или так как x мало:

$$p = P \left(1 + \frac{x^2}{8} \right).$$

Подобным же образом, из наблюдений над другим излучением λ' , которое мы хотим сравнить с λ , имеем:

$$p' = P' \left(1 + \frac{x'^2}{8} \right),$$

откуда, если считать t абсолютной константой:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{P}{P'} \left(1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x'^2}{8} \right). \quad (\text{III})$$

Отношение $\frac{\lambda'}{\lambda}$ таким образом определено как функция угловых диаметров x , x' и целых чисел P , P' . Если P , допустим, для красной кадмиевой линии известно, то приближенного значения $\frac{\lambda'}{\lambda}$ будет обычно достаточно для определения того, какое целое значение следует приписать P' и отсюда при помощи (III), для вычисления исправленного отношения $\frac{\lambda'}{\lambda}$.

Для нахождения P мы можем воспользоваться видоизмененной формулой (III), а именно:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\lambda}{\lambda'} \left(1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x'^2}{8} \right), \quad (\text{IV})$$

применяя при этом такие спектральные линии, как, например, красную кадмиевую и зеленую кадмиевую, для которых относительные длины волн уже точно известны из работы А. Майкельсона. Для испытания предполагаемого целого значения P (красная кадмиевая линия) мы вычисляем P' (зеленая кадмиевая линия) из (IV), применяя наблюдаемые значения x , x' . Если результат отклоняется от целого числа больше чем на малую величину (зависящую от точности наблюдения), то пред-

положенное значение P следует отбросить. Таким образом процессом исключения можно найти, в конце концов, истинное значение (Рэлей, *Phil. Mag.*, 1906, 685). Оказывается, что методом Фабри и Перо сравнения длин волн могут быть доведены до точности около одной миллионной. Следует, однако, иметь в виду то обстоятельство, что эффективная толщина пластинки t не вполне одинакова для различных длин волн, как это предполагалось в (III).

[16]. К стр. 27. Некоторые кажущиеся исключения из этого правила, обнаруживаемые тонкими пленками коллодия на серебряной поверхности, были описаны Р. Вудом (*Phys. Optics*, стр. 143), который приписывает очень любопытные наблюдаемые при этом явления сморщиванию пленки коллодия.

[16]. К стр. 28. Нет более интересных объектов для изучения цветов тонких пластинок, чем мыльные пленки. Для проектирования можно натянуть пленки на вертикальные железные кольца, покрытые парафином. В спокойном состоянии они утоньшаются сверху, а цвета образуют горизонтальные полосы. Если же, как это предложил Брюстер, направить из маленького сопла под косым углом струю воздуха из хорошо регулируемых мехов, то части пленки начинают вращаться; картина цветов, удивительных своей яркостью и быстротой своего изменения, может быть показана перед большой аудиторией. Устойчивые пленки, подобные мыльным, лучше всего получают по методу Глю (Glew). Несколько капель целлулоидного лака наливаются на поверхность воды в большой тарелке. После испарения растворителя можно поместить пленки на кольца из железной проволоки.

В качестве видоизменения колец Ньютона можно получить интересные эффекты частичным протравливанием поверхностей отобранных кусков зеркального стекла. Поверхность покрывается параллельными полосами парафина и обрабатывается разведенной плавиковой кислотой в течение времени, необходимого для протравливания непокрытых частей на глубину четверти средней длины волны света (оно подбирается путем предварительных проб). Две поверхности, изготовленные таким образом, сжимаются крест-накрест до необходимого контакта, образуя рисунок шахматной доски. Там, где совпадают две непротравленные или две протравленные части, цвета почти те же; но там, где совпадают протравленная и непротравленная поверхности, появляется яркая контрастная окраска. Эта система поддается проектированию, и картина, видимая на экране, очень красива, если принять необходимые меры для удаления белого света, отраженного от первой и четвертой поверхностей пластинок (см. *Nature*, 1901, 64, 385).

[17]. К стр. 28. Несомненно, исходя из того же принципа, надо объяснять цвета некоторых видов опалов и еще более замечательную радужную окраску некоторых кристаллов хлористого калия. Стокс показал, что отраженный свет часто в высокой степени монохроматичен и что он связан с существованием двойниковых плоскостей. Более вни-

мательное рассмотрение, повидимому, показывает, что двойниковые плоскости должны повторяться периодически (Phil. Mag., 1888, 26, 241, 256; см. также Р. Вуд, Phil. Mag., 1906).

Красивый пример подобного эффекта представляют цветные фотографии Г. Липпмана. В этом случае периодическая структура является результатом действия света. Пластика подвергается действию стоячих волн, получающихся при отражении света от отражающей поверхности.

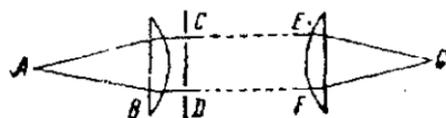
[18]. К стр. 32.

ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ

Во многих случаях необходимо, чтобы те два луча, которые в конечном счете интерферируют, были на некоторой части их пути достаточно разделены для того, чтобы можно было подвергнуть их различным операциям; например, иногда желательно пропустить их через различные газы.

Простого видоизменения первоначального опыта Юнга достаточно для разрешения этой задачи.

Свет, идущий от щели *A* (фиг. 31), перпендикулярной к плоскости чертежа, падает на собирающую линзу *B*, отверстие которой ограничено



Фиг. 31.

двумя параллельными и довольно узкими щелями равной ширины. Параллельные лучи *CE*, *DF*, прошедшие через эти щели, собираются линзой *EF* в фокусе *G*, где они образуют изображение первой щели *A*. Это изображение рассматривается окуляром с большим увеличением. Интерференционные полосы в *G* смещаются, если лучи *CE* и *DF* запаздывают друг относительно друга. Рассмотрим, что происходит в точке *G*, являющейся геометрическим изображением *A*. Если все симметрично, так что пути *CE*, *DF* равны, то в этой точке наблюдается свет. Но, если, например, луч *CE* запаздывает относительно луча *DF* на полволны, вместо света будет темнота, и полосы смещаются на половину одного промежутка между полосами.

Прибор такого рода оказался подходящим для определения показателя преломления газов, в особенности газов, имеющих лишь в малых количествах (Proc. Roy. Soc., 1896, 59, стр. 198; 1898, 64, стр. 95). Большую выгоду дает замена обычного окуляра простым цилиндрическим увеличительным стеклом, представляющим стеклянный стержень диаметром в 4 мм. При этих условиях достаточно парафиновой лампы для освещения щели в *A* и для сравнения показателей преломления газов с точностью до одной тысячной.

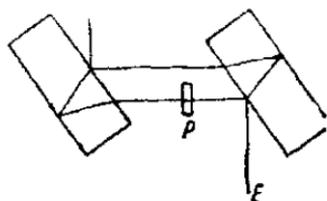
Если целью является просто наблюдение хорошо выраженных полос, то можно обойтись и без линз в описанном приборе. Металлическая или картонная трубка длиной в 10 дюймов имеет на одном конце простую щель (подобную *A*), а на другом — двойную (подобную *C*, *D*).

Эту двойную щель, которая должна быть очень тонкой, можно сделать, нацарапав ножом на куске посеребренного стекла две параллель-

ные линии. Трубка направляется на яркий свет, а глаз, помещенный непосредственно за двойной щелью, аккомодируется на дальнюю щель.

Другие рефрактометры. В другой форме рефрактометра, примененной Жамэном, разделение лучей производится путем отражения их от поверхностей толстых пластинок.

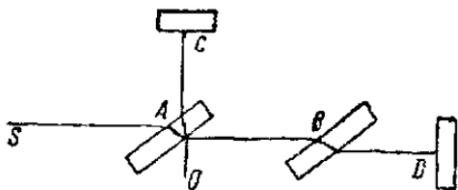
Два толстых стеклянных зеркала, вполне одинаковые во всех отношениях, расположены, как показано на фиг. 32. Первым из двух интерферирующих лучей является тот, который отражается от первой поверхности первого зеркала и от второй поверхности второго зеркала. Второй луч отражается от второй поверхности первого зеркала и от первой поверхности второго зеркала. При условии, что пластинки параллельны и равной толщины, пути, пройденные обоими этими лучами, равны. P представляет собой тонкую пластинку стекла, поставленную на пути одного из лучей, вследствие чего полосы смещаются.



Фиг. 32.

В приборе Жамэна два луча, дающих интерференцию, разделены расстоянием, пропорциональным толщине зеркал; так как эта толщина имеет практический предел, то невозможно очень сильно разделить два луча. В интерферометре Майкельсона такого ограничения нет.

„Свет идет от источника S (фиг. 33) и разделяется на задней поверхности пластинки A , причем часть его отражается к плоскому зеркалу C , возвращаясь точно по тому же пути через A , к O , где его можно наблюдать с помощью труб или проектировать на экран. Другая часть луча проходит через стеклянную пластинку A , проходит через B и отражается плоским зеркалом D , возвращается затем по тому же пути к исходной точке A , где она отражается к O так, что почти совпадает с первым лучом. Плоскопараллельная пластинка B вводится для компенсации дополнительной толщины стекла, которую первый луч прошел, идя дважды через пластинку A . Без нее два пути не были бы оптически равными, так как первый содержал бы больше стекла, чем второй.



Фиг. 33.

Некоторое количество света отражается от передней поверхности пластинки A , но его действие можно сделать ничтожным, если покрыть заднюю поверхность A слоем серебра такой толщины, чтобы отражались и проходили примерно равные доли падающего света. Плоскопараллельные пластинки A и B обрабатываются первоначально в одном куске, который затем разрезается на две части. Они помещаются параллельно друг другу, обеспечивая тем самым точное равенство оптических путей AC и AD (см. Майкельсон, „Световые волны и их применение“¹⁾).

¹⁾ Есть русский перевод. Ред.

Юстировка этого прибора очень деликатна. Из двух полностью посеребренных зеркал *C* и *D* последнее должно быть в точности параллельно изображению первого. Для многих целей необходимо, чтобы одно из зеркал — *C* могло перемещаться параллельно самому себе, что обычно требует применения очень точно построенных направляющих путей. Обойти эту трудность можно, применяя слой ртути, налитой на медь, причем поверхность автоматически принимает горизонтальное положение.

В приборе Майкельсона, при наблюдении широкого поля однородного света, видны кольца Гейдингера, и если все в должном порядке, то темные части представляются черными. По мере того как порядок интерференции растет, все бóльшие требования предъявляются к однородности света. Так, например, если освещение производится натриевым пламенем, то кольца сперва резкие, но по мере увеличения разности хода дублетность яркой натриевой линии начинает приводить к осложнениям. После 500 колец светлые части одной системы совпадают с темными частями другой (Физо), и если бы обе системы были равной яркости, то всякие следы колец исчезли бы. Несколько позже кольца опять появляются и после того, как будет пройдено 1000 колец, они станут почти или столь же резкими, как и прежде. Эти чередования резкости и размытости продолжались бы до тех пор, пока не было бы достигнуто то положение, при котором однородность даже отдельной линии натрия была бы уже недостаточной. Обратное, такие изменения в видимости колец по мере увеличения разности хода доказывают дублетность линии. Таким путем Майкельсон получил ценные сведения о строении приблизительно однородных линий, наблюдаемых при электрическом разряде в разреженных металлических парах. Особенно ценной является вакуумная трубка, содержащая кадмий. Красная линия кадмия оказывается сингулетом, в высокой степени тонким, а зеленая линия мало ей уступает.

Однако, хотя в руках Майкельсона его прибор дал прекрасные спектроскопические результаты, этот метод имеет свои слабые пункты. Немало труда надо затратить для интерпретации кривых видимости, а в некоторых случаях получаемые данные на самом деле двусмысленны. Например, обычно бывает невозможно сказать, на какой стороне главной компоненты находится более слабый спутник. Повидимому, для спектроскопических целей этот прибор уступает прибору Фабри и Перо, где применяются многократные отражения; последний является спектроскопом в буквальном смысле слова, поскольку строение спектральной линии видно при непосредственном наблюдении.

[⁹]. К стр. 34.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Если свет, идущий от небольшого источника, падает на непрозрачный предмет, то на экран, помещенный за преградой, падает тень; можно заметить, что эта тень окаймлена чередованиями света и темноты, известными под названием „дифракционных полос“. Эти явления были

описаны Гримальди и Ньютоном. Позднее Т. Юнг показал, что интерференция играет важную роль в их образовании; однако, полное объяснение досталось на долю А. Френеля. Последующие исследования Фраунгофера, Эйри и других сильно расширили эту область, и теперь под термином „дифракция“ обычно понимают все явления, связанные с ограничением пучка света, а также явления, обусловленные всякого рода неправильностями на поверхностях, через которые свет проходит или от которых он отражается.

[²⁰]. К стр. 46. Разрешающую способность зрительной трубы с круглым или прямоугольным отверстием легко исследовать экспериментально. Наилучшим объектом для рассматривания является решетка из тонких проволок, около 50 на дюйм, за которой помещено натриево пламя. Объектив снабжен диафрагмами с проделанными в них круглыми отверстиями или щелями. Одна из них, шириной, допустим, равной 1/10 дюйма, ставится перед объективом, и труба, все время тщательно фокусируемая, постепенно отодвигается назад от решетки до тех пор, пока линии не исчезнут. Из измерения наибольшего расстояния можно вывести наименьший угол между смежными линиями, совместимый с разрешением, и произвести сравнение с вышеизложенным правилом.

Если нужно только показать зависимость разрешающей способности от величины отверстия, то вообще нет необходимости в трубе. Достаточно рассматривать тонкую проволочную сетку, на фоне неба или пламени, через кусок зачерненного картона с отверстием, проделанным иглой; картон следует держать близко от глаза. Изменяя расстояние, легко найти то положение, при котором разрешение исчезает; наблюдение столь же отчетливое, как и в случае трубы. Функция последней, в действительности, состоит в том, чтобы дать возможность применить более широкое и потому легче измеримое отверстие. Интересные видоизменения этого опыта можно получить, применяя свет различной длины волны.

[²¹]. К стр. 53.

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЗРИТЕЛЬНЫХ ТРУБ

Качество зрительной трубы, конечно, тесно связано с размером того кружка, которым она отображает математическую точку. Оценивая теоретически разрешающую способность по отношению к двойной звезде, следует рассматривать освещенность поля, обусловленную наложением двух независимых изображений. Если бы угловое расстояние между компонентами двойной звезды было равно удвоенному расстоянию, выраженному выше в уравнении (15), то центральные кружки дифракционных картин как раз соприкасались бы. При этих условиях звезда, несомненно казалась бы хорошо разрешенной, так как яркость ее внешней системы колец слишком мала, чтобы привести к существенному смещению, если только, конечно, компоненты не очень различны по яркости. Уменьшение звездного кружка с увеличением отверстия наблюдалось Вильямом Гершелем, а в 1823 году Фраунгофер сформулировал закон

обратной пропорциональности. Преимущество больших объективов для разделения близких компонент двойных звезд было подробно исследовано в течение многих лет В. Дауэсом.

Разрешающая способность труб также исследовалась Ж. Фуко, который пользовался шкалой, состоящей из равных чередующихся светлых и темных частей. Он нашел, что разрешающая сила пропорциональна величине объектива и не зависит от фокусного расстояния. На действии труб наилучшей конструкции и с не очень большим отверстием абберация заметно не сказывается, и предел, налагаемый конечностью волн света, практически достигается. Верде сравнил результат Фуко с теорией и пришел к тому заключению, что радиус видимой части изображения светящейся точки равен половине радиуса первого темного кольца.

Применение этого принципа к микроскопу, непонятно почему сильно запоздавшее, было сделано Г. Гельмгольцем в 1871 году и явилось основой важного учения о микроскопическом пределе. Верно то, что в 1823 году Фраунгофер, исходя из своих наблюдений над решетками, очень близко подошел к цели.¹⁾ Немного раньше Гельмгольца Э. Аббе опубликовал несколько более полное исследование, также основанное на



Фиг. 34.

явлениях, обусловленных решетками. Однако, хотя рассуждения, связанные с рассмотрением решеток, поучительны и в некоторых отношениях удобны, их применение ведет к затемнению существенного единства принципа предела разрешимости, применимого в равной мере как к телескопам, так и к микроскопам.

На фиг. 34 AB представляет ось оптического прибора (телескопа или микроскопа), A — точку предмета, а B — точку изображения. Благодаря действию объектива LL' все лучи, исходящие из A , приходят в B в одной фазе. Следовательно, если A — самосветящийся предмет, то освещенность максимальна в B , где все вторичные волны совпадают по фазе. Точка B является центром дифракционного кружка, представляющего собой изображение A . В соседних точках освещенность меньше, вследствие появляющихся здесь расхождений в фазе. Точно так же, если мы возьмем соседнюю точку P , также самосветящуюся, расположенную в плоскости предмета, то исходящие из нее волны придут в B с фазами, уже не точно совпадающими, и расхождение фаз будет расти по мере увеличения промежутка AP . Если промежуток очень мал, то расхождение, хотя математически и существует, однако, практически не

¹⁾ „Man kann daraus schliessen, was möglicher Weise durch Mikroskope noch zu sehen ist. Ein mikroskopischer Gegenstand, z. B. dessen Durchmesser $= (\lambda)$ ist, und der aus zwei Theilen besteht kann nicht mehr als aus zwei Theilen bestehend erkannt werden. Dieses zeigt uns eine Grenze des Sehvermögens durch Mikroskope.“ (Gilbert's App., 74, 337). Рэлей в одной своей статье писал, что он сам был убежден рассуждениями Фраунгофера еще до опубликования работ Гельмгольца и Аббе.

оказывает влияния, и освещенность в B , обусловленная точкой P , также важна, как и освещенность, обусловленная точкой A (интенсивности обоих источников предполагаются равными). При этих условиях ясно, что A и P не разделены в изображении. Вопрос состоит в том, насколько следует увеличить расстояние AP для того, чтобы различие положений дало себя знать в изображении. Это, конечно, вопрос о степени; однако не требуется подробных вычислений, чтобы показать, что расхождение становится впервые заметным тогда, когда фазы, соответствующие различным вторичным волнам, идущим от P к B , охватывают полный период. Освещенность в B , обусловленная точкой P , становится тогда сравнительно малой и даже исчезающей для некоторых форм отверстия. Наибольшее расхождение имеет место между волнами, идущими от наиболее внешних частей объектива в L и L' . Таким образом, если мы примем упомянутое мерилlo разрешимости, то вопрос состоит в том, где должна находиться точка P , чтобы относительное запаздывание лучей PL и PL' могло составить длину волны (λ), когда они приходят в B .

В силу того общего закона, что значение приведенного оптического пути стационарно, это запаздывание можно вычислить, не учитывая различные пути, пройденные на другой стороне LL' , так что искомое значение есть просто $PL - PL'$. Но так как AP очень мало, то $AL' - PL' = AP \sin \alpha$, где α — половина углового отверстия $L'AB$. Точно также $PL - AL$ имеет то же значение, так что

$$PL - PL' = 2AP \sin \alpha.$$

Согласно принятому нами мерилlo, условие разрешимости сводится к тому, чтобы AP или ϵ превосходило $\frac{1}{2} \lambda / \sin \alpha$. Если ϵ меньше этого значения, то изображения слишком сильно налагаются; тогда как, если ϵ сильно превосходит это значение, то изображения без надобности сильно разделены.

В этом рассуждении все пространство между предметом и линзой предполагается заполненным веществом с одним и тем же показателем преломления, и λ является длиной волны применяемого рода света в этой среде. Если это ограничение об однородности нарушается, то нам в конце концов приходится иметь дело с длиной волны в среде, непосредственно окружающей предмет.

Обозначая показатель преломления через μ , мы имеем для критического значения ϵ :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \lambda_0 / \mu \sin \alpha,$$

где λ_0 — длина волны в пустоте. Знаменатель $\mu \sin \alpha$ есть величина, известная по Аббе под названием „численная апертура“.

Наибольшее возможное значение для α есть прямой угол, так что мы имеем для микроскопического предела:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \lambda_0 / \mu.$$

Этот предел может быть уменьшен только путем уменьшения λ_0 , что делает возможным фотографией, или путем увеличения μ — показателя преломления той среды, в которой находится предмет.

Формулировка закона разрешающей способности была дана в виде, приспособленном для микроскопа, но она может быть непосредственно применена и к телескопу. Если диаметр объектива есть $2R$, а D — расстояние предмета, то угол, стягиваемый AP , есть ε/D , и угловая разрешающая способность дается выражением:

$$\lambda/2D \sin \alpha = \frac{\lambda}{2R}.$$

Из этого метода доказательства (которым мы в основном обязаны Гельмгольцу) очевидно, что нет существенной принципиальной разницы в обоих случаях, хотя результаты можно формулировать различно. В случае телескопа мы имеем дело с линейной мерой для отверстия и угловым пределом разрешимости, тогда как в случае микроскопа предел разрешимости линейный, и он выражен через угловую меру отверстия.

Надо ясно отдавать себе отчет в том, что изложенное доказательство определенно предполагает, что различные части предмета — самосветящиеся, или по крайней мере, что свет, идущий из различных точек предмета, не имеет фазовых соотношений. Как было подчеркнуто Дж. Стонэй, это ограничение часто, быть может и обычно, нарушается в микроскопе. В таком случае необходимо другое рассмотрение, и для некоторых возникающих здесь проблем удобен метод Аббе.

Важность вышеизложенных общих заключений, налагающих предел на наши возможности прямого наблюдения, едва ли может быть переоценена; но в некоторых кругах существовала тенденция приписать им более точный характер, чем они могут иметь, или даже извратить их смысл. Поэтому несколько слов пояснений окажутся полезными. Первый пункт, который следует подчеркнуть, — тот, что ровно ничего не говорится о малости отдельного предмета, который может быть сделан видимым. Глаз, не вооруженный или снабженный телескопом, видит, как точки света, звезды, не стягивающие заметного угла. Видимость звезды является просто вопросом яркости, и ничего не имеет общего с разрешающей способностью. Последнее понятие появляется только тогда, когда речь идет о распознавании дублетности двойной звезды или о различении деталей на поверхности планеты. Таким образом в микроскопе ничто, кроме недостатка света, не препятствует видимости предмета, как бы мал он ни был. Но если его размеры значительно меньше полуволны, то его можно видеть только как целое, и его части не могут быть отчетливо разделены; однако в некоторых случаях, около границы, все же возможны известные заключения, основанные на изучении картины, представляющейся в различных случаях. Интересные наблюдения над частицами ультрамикроскопическими в упомянутом смысле описаны Зидентопфом и Жигмонди (Drude's Ann., 1903, 10, стр. 1).

До некоторой степени аналогичным образом можно сделать видимым темный линейный разрыв в светлом поле, хотя его действительная ширина гораздо меньше половины длины волны. Для иллюстрации этого факта можно упомянуть простой опыт. Перед невооруженным глазом ставится кусок медной фольги, с проделанным в нем маленьким игольным отверстием. При наблюдении через это отверстие строем тонкой проволоочной сетки как раз исчезает на расстоянии от глаза, равном 17 дюймам, причем сетка имела 46 ячеек на дюйм. С другой стороны, простая проволока диаметром в 0,034 дюйма оставалась хорошо видимой до расстояния в 20 футов. Отношение между предельными углами, стягиваемыми периодической структурой сетки и диаметром проволоки, было равно $(0,022/0,034) \times (240/17) = 9,1$. Для более подробных сведений об этом можно отослать читателя к *Phil. Mag.*, 1896, 42, стр. 167, *Journ. R. Micro. Soc.*, 1903, стр. 447.

[²²] К стр. 67. Другим очевидным следствием из необходимого несовершенства оптических изображений является бесполезность попыток полного уничтожения сферической аберрации. Допустимая ошибка в фазе на $\frac{1}{4} \lambda$ будет соответствовать ошибке в $\frac{1}{8} \lambda$ в отражающей и $\frac{1}{2} \lambda$ в (стеклянной) преломляющей поверхности, если в обоих случаях падение перпендикулярное. Если мы спросим, какова наибольшая допустимая предельная аберрация (δf) в объективе, согласно вышеизложенному правилу, то мы найдем

$$\delta f = \lambda a^{-2},$$

где a — половина угловой величины отверстия.

В случае простой стеклянной линзы с наиболее благоприятными кривизмами δf примерно равно $a^2 f$, так что a^4 не должно превосходить λ/f . Для линзы с фокусным расстоянием в 3 фута это условие удовлетворяется, если диаметр отверстия не превышает 2 дюймов.

Если параллельные лучи падают непосредственно на сферическое зеркало, то продольная аберрация составляет только около $\frac{1}{8}$ той, которая имеет место для простой линзы с тем же фокусным расстоянием и диаметром и имеющей наиболее выгодную форму. Отсюда следует, что сферическое зеркало с фокусным расстоянием в 3 фута могло бы иметь диаметр в 2,5 дюйма, причем изображение не было бы существенно испорчено аберрацией.

[²³] К стр. 70.

ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ

Под заглавием „цвета штрихованных поверхностей“ Томас Юнг (*Phil. Trans.*, 1802) в своей обычной сжатой манере дал общее объяснение этих цветов, включая закон синусов, причем он предполагал, что штрихи прямые, параллельные и равноотстоящие. Позже, в своей статье „Хроматика“, в дополнительном томе к 5-му изданию „Энциклопедии Британика“ он показал, что эти цвета „лишены смешанного

характера периодических цветов и гораздо более похожи на обычный призмный спектр, причем они разделены совершенно темными промежутками"; он объясняет это тем, что всякая разность фаз, которая может возникнуть на соседних штрихах, умножается в отношении общего числа штрихов.

Теория была далее развита А. Френелем (1815), который дал формулу, эквивалентную приведенной ниже формуле (5).

Однако большей частью наших сведений по этому вопросу мы обязаны Фраунгоферу. Его открытие „неподвижных линий“ сделало возможным наблюдения с точностью, до тех пор невозможной. Он построил решетки с периодами до 340 на дюйм, натягивая тонкие проволоочки на винтах. Затем он стал делать решетки штриховкой золотого листочка, прикрепленного к стеклу или слою жира (grease), нанесенного на стекло, и, наконец, штриховкой самого стекла алмазным острием. Наилучшие решетки были получены последним методом, однако было трудно найти и сохранить пригодное алмазное острие.

Наблюдая в трубу при перпендикулярном падении света, он показал, что положение каждого луча зависит только от постоянной решетки, т. е. от расстояния от центра одной проволоочки или штриха до центра ближайшей, а не от толщины проволоки или величины промежутка. В различных решетках длина спектров и их расстояние от оси были обратно пропорциональны постоянной решетке, тогда как для данной решетки расстояния различных спектров от оси относились, как 1, 2, 3 и т. д. Мы обязаны Фраунгоферу первыми точными измерениями длин волн и методом разделения налагающихся спектров при помощи призмы, отклоняющей в перпендикулярном направлении. Он описал также сложные картины, наблюдаемые, когда светлая точка рассматривается через две наложенные друг на друга решетки, штрихи которых пересекаются перпендикулярно или косо. Упомянутые наблюдения относятся к проходящему свету, но Фраунгофер распространил свои исследования и на отраженный свет. Для устранения света, отраженного от задней поверхности нанесенной на стекле решетки, он покрывал ее черным лаком. При этом оказалось, что при некоторых углах падения части получившихся спектров были полностью поляризованы. Эти замечательные исследования Фраунгофера, выполненные им в 1817—1823 годах, перепечатаны в его „Собрании сочинений“ (Мюнхен, 1888).

Принцип, лежащий в основе действия решеток, идентичен с принципом, изложенным в § 10 и осуществленным в „пластинках зон“ Ж. Сорэ. Зоны Френеля через одну устраняются или их действие каким-либо другим путем изменяется. Таким образом первоначальная компенсация нарушается, и свет появляется в необычных направлениях. Если источник — точка или линия и применяется коллиматорная линза, то падающие волны можно рассматривать, как плоские. Если, далее, пройдя решетку, свет воспринимается собирающей линзой, например, объективом трубы, то зоны Френеля становятся параллельными и равноотстоящими прямыми полосками, которые при некоторых углах

совпадают со штриховкой. Направления боковых спектров таковы, что переход от одного элемента решетки к соответствующей точке следующего элемента обуславливает запаздывание на целое число длин волн. Если решетка состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных частей, то вопрос можно рассматривать с помощью общих интегралов (§ 11), ограничивая интеграцию прозрачными частями отверстия. За изложением этих вопросов читатель отсылается к „Tracts“ Эйри, к „Leçons“ Вердэ или к „Физической оптике“ Вуда.

[²⁴] К стр. 73. Последняя фраза повторена из статьи автора „Волновая теория света“ в 9-м издании „Энциклопедии“; однако остроумная эшелонная решетка А. А. Майкельсона является осуществлением в неожиданном виде того, что казалось тогда невозможным.

[²⁵] К стр. 82. Несмотря на многочисленные усовершенствования, введенные Роуландом, и ту тщательность, с которой он производил наблюдения, современные исследователи пришли к заключению, что в его измерения длин волн вкрались ошибки неожиданной величины; имеется даже стремление вовсе отбросить решетку, как прибор для фундаментальных измерений, в пользу так называемых „интерференционных методов“, развитых Майкельсоном, Фабри и Перо. Решетка, во всяком случае, сохранит свое значение для сравнения новых линий со стандартами, установленными другим путем. Для таких стандартов представляется теперь достижимой относительная точность по крайней мере в одну миллионную.

Со времени Фраунгофера многие искусные механики посвящали свое внимание штриховке решеток. Решетки Ноберта применялись Онгстромом в его знаменитых исследованиях над длинами волн. Резерфорд ввел в обычную практику отражательную решетку; он нашел, что зеркальный сплав менее изнашивается, чем стекло, алмазное острие, от постоянства которого так много зависит. В делительной машине Роуланда винты изготовлялись особым образом, предложенным им; полученные решетки, плоские и вогнутые, сделали возможными многие из наилучших современных работ. Дальнейшие усовершенствования, тем не менее, повидимому, все же не исключены.

Существуют различные копирующие процессы, с помощью которых можно воспроизвести более или менее совершенно первоначальную штриховку. Самым ранним является процесс, предложенный Квинке; в нем стеклянная решетка покрывается химическим осадком серебра, который затем утолщается медью, в электролитической ванне. Полученная таким образом металлическая пластинка, после отделения от подкладки, образует отражательную решетку, воспроизводящую многие особенности оригинала. Лучше начинать электролитическое утолщение в ванне уксусно-кислого серебра. В настоящее время в продаже имеются прекрасные копии роуландовских зеркальных решеток (Торп, Айвс, Уоллес), изготовленные по предложению Д. Брюстера покрытием оригинала лаком, например, целлулоидным. Требуется много искусства для того, чтобы отделить пленку без деформации.

Гораздо более простой метод, применимый к стеклянному оригиналу, состоит в фотографическом копировании путем контактного печатания. В нескольких статьях, начиная с 1872 года, Релэй (см. „Собрание сочинений“, I, 157, 160, 199, 504; IV, 226) показал, что можно добиться успеха множеством различных методов, включая применение желатина, пропитанного двуххромокислым калием, и старинного битумного процесса, и исследовал действие неполного соприкосновения между изготавливаемой пластинкой и оригиналом во время экспозиции. Для многих целей копии, с числом штрихов до 10 000 на дюйм, не уступают оригиналу. Желательно, чтобы прозрачные решетки были получены от первоклассных делительных машин. Для сохранности алмазного острия можно было бы пользоваться в качестве материала для пластинки чем-нибудь более мягким, чем обыкновенное стекло.

[20] К стр. 94. „Полосы Тальбота“ были рассмотрены очень поучительным образом А. Шустером (*Phil. Mag.*, 1904), точка зрения которого представляет то большое преимущество, что она сразу объясняет особенность, замеченную Брюстером. Плоский импульс, т. е. возмущение, ограниченное бесконечно тонким слоем среды, предполагается падающим на параллельную решетку, которую можно считать состоящей из бесконечно тонких проволок или из бесконечно узких штрихов, нанесенных на стекле. Вторичные импульсы, исходящие из штриховки, падают, как обычно, на объектив; приходя в фокус, они образуют ряд, равномерно расположенный во времени, причем интервал между последующими членами зависит от наклона. Рассмотрим, что происходит в выбранной фокальной точке, если ввести задерживающую пластинку так, чтобы она действовала на те импульсы, которые идут от одной стороны решетки, тогда как остальные остаются невозмущенными.

Полное рассмотрение вопроса потребовало бы применения теории Фурье, но некоторые важные заключения почти очевидны.

До введения пластинки мы имеем эффект, соответствующий длинам волн, тесно расположенным вокруг главной длины волны, т. е. $\sigma \sin \varphi$, где σ — постоянная решетки, а φ — наклон, причем теснота расположения возрастает с числом штрихов. Помимо этих длин волн имеются другие группы (сосредоточенные вокруг длин волн, являющихся целыми делителями главной длины волны) — налагающиеся спектры второго и высших порядков. Предположим теперь, что пластинка введена так, что она закрывает половину отверстия и задерживает те импульсы, которые иначе пришли бы первыми. Результат должен зависеть от величины запаздывания. По мере того как оно увеличивается, начиная с нуля, два ряда, соответствующие двум половинам отверстия, начинают перекрываться, и это перекрывание постепенно увеличивается, пока не нагугает почти полное наложение. Остановим свое внимание на той стадии, когда один ряд делит пополам промежутки в другом, так что образуется новый простой ряд, содержащий то же число членов, что и до введения пластинки, но расположенных теперь вдвое чаще. Очевидно, действие в фокальной точке таково, что исче-

зают первый и другие спектры нечетного порядка; таким образом, в отношении спектра первого порядка мы можем считать, что два пучка интерферируют.

Образование темных полос таким образом объяснено, и оно требует, чтобы пластинка была введена с одной определенной стороны и чтобы была подобрана определенная величина запаздывания. Если запаздывание слишком мало, то наложение рядов неполное, так что кроме ряда в полпериода имеются остатки первоначальных рядов в полный период. То же имеет место, если запаздывание слишком велико. Если оно превосходит двойное значение, необходимое для образования черных полос, то опять нет наложения, и, следовательно, нет интерференции. Если пластинка вставлена с другой стороны, так чтобы задерживать тот ряд, который и до того запаздывал, то нет наложения, какова бы ни была величина запаздывания. Таким образом главные черты явления объясняются; Шустер показал, далее, как можно распространять результаты на спектры, образованные призмами вместо решеток.

[27] К стр. 94. Френель начал свои исследования с рассмотрения полос, внешних и внутренних, сопровождающих тень узкой непрозрачной полоски, как, например, проволоки. Он применял в качестве источника света солнечный свет, проходящий через очень маленькое отверстие, сделанное в металлической пластинке, или сосредоточенный короткофокусной линзой. В отсутствие гелиостата последнее было более удобно. Идя по стопам Юнга, о чем он сам не подозревал, Френель вывел принцип интерференции из того обстоятельства, что темнота внутренних полос требует совместного действия света от обеих сторон преграды. Сначала он следовал за Юнгом также и в том взгляде, что внешние полосы являются результатом интерференции между прямым светом и светом, отраженным от края преграды; однако он вскоре открыл, что природа края — был ли это острый край бритвы или ее тупой задний край — не составляла заметной разницы, и пришел к тому заключению, что объяснение этих явлений не требует ничего, сверх применения принципа Гюйгенса к незагражденным частям волны. При наблюдении полос он получал их сперва на экране из матового стекла, на который была фокусирована собирающая линза, но вскоре оказалось, что можно обойтись без матового стекла и наблюдать дифракционную картину таким же образом, как наблюдается изображение, даваемое объективом трубы — через окуляр. Это упрощение сопровождалось большим выигрышем в яркости, что позволило производить такие наблюдения, которые иначе представляли бы большие трудности.

[28] К стр. 140. Согласно электромагнитной теории, задача дифракции становится определенной в том случае, когда свойства преграды даны. Наиболее простое предположение состоит в том, что материал, из которого сделана преграда, идеально проводит, а следовательно, и идеально отражает. Исходя из этого предположения,

А. Зоммерфельд (Math. Ann. 1895, 47, стр. 317) с большим математическим остроумием разрешил задачу о тени от полубесконечного плоского экрана. Упрощенное изложение было дано Г. Ламб'ом (Proc. Lond. Math. Soc., 1906, 4, 190). Оказывается, что результаты Френеля, хотя и основанные на несовершенной теории, требуют лишь незначительных исправлений. Задачи, не ограниченные двумя измерениями, как, например, задача о тени от круглого диска, представляют большие трудности и до сих пор еще не рассмотрены вполне строго; однако нет оснований предполагать, что в этом случае результаты Френеля будут существенно изменены.

[²⁹] К стр. 140.

ЦВЕТ НЕБА

Как показывают наблюдения, голубой цвет неба, даже в безоблачные дни, является в высшей степени изменчивым. Цвет обычно становится более насыщенным к зениту, а также с увеличением высоты наблюдателя над землей. Ясно, что нормальный голубой цвет более или менее разбавлен посторонним белым светом, обусловленным отражениями от более крупных частиц посторонних веществ, обычно находящихся в воздухе. С цветом тесно связана *поляризация* света неба. Она имеет место в плоскости, проходящей через солнце, и достигает максимума под углом примерно в 90° от него. При благоприятных условиях более половины света поляризовано.

Относительно происхождения нормального голубого цвета неба были высказаны весьма различные взгляды. Некоторые авторы, даже с хорошей репутацией, считали, что голубой цвет есть истинный цвет вещества воздуха или некоторых частей его, например озона. Против такого взгляда достаточно заметить, что согласно этой теории голубой цвет был бы сильнее всего выражен в окраске заходящего солнца. Очевидно, что первое, что нужно объяснить, это тот факт, что мы вообще получаем какой-либо свет от неба. Если бы атмосфера не существовала или была абсолютно прозрачной, то небо было бы обязательно черным. Должно существовать нечто, способное *отражать* свет в более широком смысле этого слова.

В прошлом пользовалась большой поддержкой теория, приписывающая отражения небольшим пузырькам воды, подобным мыльным пузырям, в какой-либо форме, как предполагали, конденсируется пар. Согласно этой теории, голубой цвет неба был бы голубым цветом первого порядка в ньютоновом ряду.

Эта теория была развита Клаузиусом (R. Clausius'ом, Pogg. Ann. томы 72, 76, 88), считавшим ее способной объяснить наблюдаемые факты. Следует заметить, однако, что угол максимальной поляризации был бы равен тогда примерно 76° вместо 90° .

[³⁰] К стр. 145. Интересно применить уравнения (3) к нахождению связи между интенсивностью рассеянного и проходящего света с числом и размерами частиц (см. Phil. Mag., 1890, 47, стр. 375). Чтобы найти

полное количество энергии, испускаемой одной частицей (T), нужно проинтегрировать квадрат выражения (3) по поверхности сферы радиуса r . Так как элемент площади равен $2\pi r^2 \sin\Phi d\Phi$, то мы имеем

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\Phi}{r^2} 2\pi r^2 \sin^2\Phi d\Phi = \frac{8\pi}{3},$$

так что энергия, испускаемая частицей T , представляется выражением

$$\frac{8\pi^3}{3} \frac{(D' - D)^2 T^2}{D^2 \lambda^4}, \dots \quad (V)$$

причем предполагается, что энергия первичной волны на единицу поверхности фронта волны равна единице.

Сказанное выше относится к отдельной частице.

Если в единице объема имеется n одинаковых частиц, то энергию, испускаемую на единицу площади слоем толщины dx , можно найти из (V), вводя множитель ndx .

Так как в целом нет потери энергии, то это выражение представляет потерю энергии в первичной волне. Соответственно этому, если E обозначает энергию первичной волны, то

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} = -\frac{8\pi^3 n (D' - D)^2 T}{3 D^2 \lambda^4}, \dots,$$

откуда

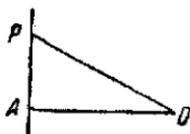
$$E = E_0 e^{-hx}, \dots,$$

где

$$h = \frac{8\pi^3 n (D' - D)^2 T^2}{3 D^2 \lambda^4} \dots, \quad (VI)$$

Если бы мы имели достаточно полное выражение для рассеянного света, то мы могли бы исследовать (VI) несколько более прямым путем, рассматривая результирующее первичного колебания и вторичных колебаний, проходящих в том же направлении. Однако, если мы приложим этот способ рассуждения к (3), то найдем, что он не приведет нас к (VI), хотя он дает другой интересный результат. Комбинация вторичных волн, идущих в рассматриваемом направлении, имеет ту особенность, что фазы уже более не распределены по законам случая. Интенсивность вторичного света уже не может быть получена путем сложения отдельных интенсивностей, а должна быть вычисляема с учетом всех фаз колебаний. Если рассмотрим частицы, лежащие все на одном первичном луче, то увидим, что фазы вторичных колебаний, испускаемых вдоль этой линии, все одинаковы.

Вычисление производится путем, подобным тому, которому обычно следуют при обосновании концепции Гюйгенса о разложении волны на составляющие, соответствующие разным частям фронта волны. Рассмотрим частицы, заполняющие тонкий слой dx , перпендикулярный к первичному лучу x . Пусть AP (фиг. 35) будет этот слой и O — точка, колебание в которой вычисляется. Если $AP = e$, то элемент объема



Фиг. 35.

равен $dx \, 2\pi \rho dr$, а число частиц, в нем находящихся, получим, вводя множитель n . Далее, если $OP=r$ и $AO=x$, то $r^2=x^2+e^2$ и $\rho dr = r dr$. Согласно (3) и полагая $\sin \Phi$ равным единице, результирующее всех вторичных колебаний, исходящих из слоя dx в точке O , равно

$$ndx \int_x^\infty \frac{D'-D}{D} \frac{\pi T}{r\lambda^3} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt-r) 2\pi r dr,$$

или

$$ndx \frac{D'-D}{D} \frac{\pi T}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (bt-x).$$

К этому выражению нужно прибавить выражение для самой первичной волны, предполагая, что она распространяется без возмущения, а именно $\cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt-x)$, и тогда результирующее будет представлять полное действительное возмущение в точке O , измененное частицами в слое dx .

Таким образом оказывается, что в порядке приближения, допускаемом равенством (3), действие частиц в dx состоит в изменении фазы, но не интенсивности света, проходящего мимо них. Если действие представить выражением

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt-x-\delta),$$

то δ — есть *запаздывание*, обусловленное частицами, и мы имеем:

$$\delta = nT dx \frac{D'-D}{2D}.$$

Если обозначим через μ показатель преломления среды, измененной наличием частиц, тогда как показатель преломления первоначальной среды принят за единицу, то $\delta = (\mu-1) dx$ и

$$\mu-1 = nT \frac{(D'-D)}{2D}. \quad (\text{VII})$$

Если μ' обозначает показатель преломления вещества, из которого состоят частицы, рассматриваемые, как сплошное тело, то $\frac{D'}{D} = \mu'^2$ и

$$\mu-1 = \frac{1}{2} nT (\mu'^2-1), \quad (\text{VIII})$$

что сводится к

$$\mu-1 = nT (\mu'-1)$$

в случае, когда величину $\mu'-1$ можно считать малой.

Только в этом последнем случае приложимы формулы упругой теории к свету.

Согласно электромагнитной теории света, ныне общепринятой, результаты являются более сложными в том отношении, что, когда $\mu'-1$ не мало, рассеянный луч зависит и от формы, а не только от объема малого препятствия. В случае *шаров* мы должны заменить $\frac{D'-D}{D}$ выра-

жением $\frac{3(K'-K)}{K'+2K}$, где K, K' — диэлектрические постоянные среды и препятствия соответственно (Phil. Mag., 1881, 12, стр. 98), так что вместо (VIII) получаем

$$\mu - 1 = \frac{3nT}{2} \frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 2}.$$

При тех же предположениях (VI) заменяется равенством

$$h = 24 \pi^2 n \left(\frac{\mu'^2 - 1}{\mu'^2 + 2} \right)^2 \frac{T^2}{\lambda^4}.$$

По любой теории

$$h = \frac{32 \pi^2 (\mu - 1)^2}{3n\lambda^4}, \quad (\text{IX})$$

формула, дающая коэффициент пропускания в функции показателя преломления и числа частиц в единице объема. Как показал Кельвин (Baltimore Lectures, стр. 304, 1904), формулу (VII) можно получить также, рассматривая среднюю плотность среды, измененной наличием частиц.

Рассмотрим теперь прозрачность воздуха, обусловливаемую только входящими в его состав молекулами, т. е. в отсутствии всяких инородных веществ. Мы можем положить $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см, $\mu - 1 = 0,0003$; тогда из (IX) получаем расстояние x , равное $\frac{1}{h}$, которое должно быть пройдено светом, чтобы его интенсивность изменилась в отношении $e : 1$:

$$x = 4,4 \cdot 10^{-13} \cdot n. \quad (\text{X})$$

Чтобы закончить вычисление, необходимо знать значение n — числа молекул в единице объема при нормальных условиях согласно закону Авогадро, одинаковому для всех газов. Максвелл оценил это число в $1,9 \cdot 10^{19}$; однако современные данные приводят к большему числу, равному примерно $4,3 \cdot 10^{19}$ [Вильсон (H. A. Wilson), Phil. Mag., 1903; см. Шустер (A. Schuster), Theory of Optics, § 178].

Подставляя это последнее значение в (X), находим

$$x = 19 \cdot 10^6 \text{ см} = 190 \text{ километрам.}$$

Хотя гора Эверест и видна очень отчетливо на расстоянии в 100 миль, если наблюдать из окрестностей Дарджилинга, мы не можем предполагать, что атмосфера прозрачна в такой степени, как это вытекает из приведенных выше чисел, и, конечно, этого и не следует ожидать, так как в ней несомненно имеется вещество во взвешенном состоянии, которое следует учитывать. Быть может, наилучшие данные для сравнения можно почерпнуть из изменения яркости звезд с высотой над горизонтом. Бонге (P. Bonguer) и другие оценивают пропускание света всей атмосферой от звезды в зените, примерно, в 0,8. Это соответствует 8,3 км. воздуха при нормальном давлении. При такой оценке пропускание слоя воздуха в 190 км. было бы равно $(0,8)^{23}$, т. е. 0,006 вместо $e^{-1} = 0,37$. С другой стороны, вычисляя пропускание слоя в 8,3 километра по формуле (IX), мы находим $1 - 0,044 = 0,956$.

Общий вывод из вышеизложенного сводится, повидимому, к тому, что хотя при наблюдении с земной поверхности большая часть света неба обусловлена сравнительно крупными частицами вещества во взвешенном состоянии, все же заметная доля его должна быть приписана самим молекулам воздуха, и что при поднятиях на большие высоты, где голубой цвет чище, эта доля может быть преобладающей.

Дальнейшее обсуждение этого вопроса, в связи с наблюдениями Майоранна (Q. Majorana) и Селлы (A. Sella), можно найти в Балтиморских чтениях (стр. 317) Кельвина, где автор склоняется в пользу более высокого значения λ . Следует заметить, что отдельными молекулами может быть обусловлена только постоянная часть света неба. Обычное наблюдение ландшафта показывает, что имеется и другая часть, крайне изменчивая от дня ко дню и обусловленная материей во взвешенном состоянии, большая часть которой достаточно тонка, чтобы рассеивать голубой свет. Об опытах Тиндалля по осаждению облаков уже упоминалось. Если осаждаемые частички очень мелки, то свет, рассеянный в перпендикулярном направлении, небесно-голубого цвета и полностью поляризован. На дальнейших стадиях своего роста частицы рассеивают в перпендикулярном направлении свет, уже не являющийся вполне поляризованным. Если его ослабить насколько возможно вращением николя, то остающийся свет оказывается более интенсивного голубого цвета; далее, найдено, что направление почти полной поляризации становится наклонным к направлению первичных лучей.

Обсуждение этих и других вопросов с точки зрения электромагнитной теории света дано в Phil. Mag., 1887, 12, стр. 81. Здесь же мы должны ограничиться изложением некоторых результатов. Поскольку частицы считаются очень малыми и мало отличающимися в отношении оптических свойств от окружающей их среды, различие между выводами электромагнитной и упругой теории света не велико, и результаты, выражающие свойства рассеянного света, эквиваленты формуле (5). Какова бы ни была форма или величина частиц, в направлении, параллельном первичным электрическим смещениям, рассеянного света нет. Чтобы объяснить „остаточный голубой свет“ Тиндалля, необходимо увеличить точность расчета, рассматривая для простоты случай частиц сферической формы. Мы находим тогда, что свет, рассеянный в направлении первичного колебания, не только выражается членами более высокого порядка в отношении разности оптических свойств, но также оказывается порядка k^2c^2 по сравнению с светом, рассеянным в других направлениях (c — радиус сферы и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, как и выше). Если падающий свет белый, то интенсивность составляющих цветов, рассеянных в этом направлении, обратно пропорциональна восьмой степени длины волны, так что результирующий свет является насыщенным, голубым.

Что касается зависимости поляризации рассеянного света от угла, под которым он испускается, то оказывается, что хотя при учете членов второго порядка рассеянный свет уже не исчезает в том направлении, как это имело место раньше, однако эта особенность не исчезает, а имеет место в другом направлении. Угол θ , на который происходит

смещение, отсчитывается назад, т. е. по направлению к падающему лучу, и его значение дается формулой

$$\theta = \frac{\Delta K}{K} \frac{k^2}{25}, \quad (XI)$$

где ΔK — разность диэлектрических постоянных.

Опыты, относящиеся к этому вопросу, не трудны. В затемненной комнате пучок солнечного (или электрического) света концентрируется большой линзой с фокусным расстоянием 2—3 фута, и на пути света помещается стеклянный сосуд, содержащий разбавленный раствор тиосульфата натрия (гипосульфита). При добавлении и при хорошем размешивании небольшого количества слабой серной кислоты медленно образуется осадок серы; при образовании осадка необычайно хорошо наблюдаются рассматриваемые явления. Чем более разбавлены растворы, тем медленнее происходит процесс осаждения. Лучше всего взять такую концентрацию, при которой заметный эффект появляется через 4—5 минут. Однако большой точности здесь не требуется.

При оптическом исследовании можно, если желательно, поляризовать первичный свет; обычно, однако, более удобно поляризовать рассеянный свет. На первых стадиях осаждений поляризация является полной в перпендикулярном направлении и неполной — в наклонных направлениях. Через некоторое время поляризация становится неполной в перпендикулярном направлении; свет, достигающий глаза, когда николь находится в положении наименьшего пропускания, имеет прекрасный голубой цвет, гораздо более насыщенный, чем все то, что можно было наблюдать на первых стадиях явления. В этот именно момент и надо исследовать, имеется ли более полная поляризация в каком-либо наклонном направлении; оказывается, что при положительном θ действительно есть направление более полной поляризации; при отрицательном θ поляризация менее полная, чем даже в перпендикулярном направлении.

В достаточно наклонном направлении, однако, поляризация неполная; для объяснения этой особенности можно привести более чем одну причину. Во-первых, при данной величине частиц направление полной поляризации, определяемое формулой (XI), есть функция цвета света, причем значение θ для фиолетового конца спектра в 3 или 4 раза больше, чем для красного. И в самом деле, опыт значительно улучшается, если пропустить первичный свет через окрашенное стекло. При этом наклонное направление максимальной поляризации становится более определенным, а самая поляризация более полной; кроме того, наблюдения легче, чем в случае белого света, вследствие однородности в цвете лучей, рассеянных в разных направлениях.

Если мы начнем с синего стекла, то можно наблюдать постепенное увеличение наклона направления максимальной поляризации; а затем, заменяя синее стекло красным, мы можем вернуться к первоначальному положению вещей и наблюдать переход от перпендикулярности к наклонному направлению еще раз. Изменение в длине волны света дает тот же эффект, в этом отношении, что и изменение в величине частиц, и сравнение дает любопытные сведения о скорости их роста.

Но даже в случае однородного света было бы неразумно ожидать наклонного направления для полной поляризации. Пока частицы все очень малы по сравнению с длиной волны, имеет место полная поляризация в перпендикулярном направлении, но когда величина их такова, что появляется наклон, степень наклона будет меняться вместе с величиной частиц, и поляризация будет полной только при том весьма неправдоподобном условии, что величина всех частиц одинакова. Не следует, кроме того, забывать, что очень небольшое увеличение размеров может вывести частицы за пределы пригодности наших приближений.

Тот факт, что на этой стадии поляризация является максимальной, когда угол, на который отклоняется свет, *превосходит* 90° , тем более достоин быть отмеченным, что можно было бы ожидать противоположного результата. В самом деле, согласно закону Брюстера, этот угол в случае правильного отражения от пластинки *меньше* прямого угла. Таким образом закон поляризации для очень малой частицы отличается от закона, приложимого к пластинке; кроме того, увеличение размеров частиц влечет за собой увеличение этого различия.

Простая теория рассеяния света мелкими частицами достаточна для объяснения не только голубого цвета неба в зените, но и почти полного отсутствия малых длин волн в прямых солнечных лучах и блестящей оранжевой и красной окраски заходящего солнца и облаков, освещенных его лучами. Опыт с гипосульфитом и здесь дает прекрасную иллюстрацию. Но мы не должны ожидать того, что простая теория объяснит все факты. Ясно, что частицы воздуха освещены не только прямыми солнечными лучами, но также и светом, рассеянным другими частями атмосферы и земной поверхности. По этой и другим причинам окраска неба является в высшей степени изменчивой. Переход от голубой окраски к оранжевой или красной при закате солнца происходит обычно через зеленую, но особые условия могут легко нарушить нормальное положение вещей. Блестящие эффекты при закате солнца, наблюдавшиеся в Европе после извержения Кракатоа, естественно приписать пыли необычного качества или количества в верхних слоях атмосферы.

В связи с ненормальностями окраски можно ожидать обнаружения и соответствующих поляризационных эффектов. Такого именно происхождения нейтральные точки, в которых поляризация меняет характер, наблюдаемые Араго (Arago), Бабинэ (J. Babinet), Брюстером (D. Brewster'ом); сведения о них можно найти в *Traité d'Optique* Маскара (E. Mascart'a). На зависимости нормальной поляризации в зените от положения Солнца основаны полярные часы Уитстона (C. Wheatstone'a).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аббе 20, 74, 190, 191, 192
 Айвс 195
 Ампер 121
 Андраэ 57
 Араго 24, 65, 89, 107, 108, 109, 116,
 126, 129, 204
 Бабинз 72, 204
 Брайлей 172
 Бели 82
 Био 65, 129
 Бонге 201
 Борн 19, 74, 151
 Бридж 41
 Бродхун 10
 Брюкке 140
 Брюстер 14, 28, 90, 106, 117, 128, 148,
 149, 185, 195, 196, 204
 Вебер 22
 Верде 38, 63, 70, 96, 99, 112, 115, 118,
 126, 131, 190, 195
 Вильсон 201
 Вин 133
 Вуд 19, 39, 63, 151, 185, 186, 195
 Гамильтон 50, 124
 Гастингс 124
 Гейдинггер 183, 188
 Гельмгольц 74, 82, 160, 190, 192
 Гершель 33, 51, 75, 128, 130, 140, 189
 Гиббс 160
 Гильберт 96
 Глазенапп 172
 Глэзбрук 79, 124, 132, 158, 160
 Глю 185
 Гримальди 189
 Грин 108, 125, 153, 156, 157, 158
 Грэмб 15
 Гук 180
 Гюйгенс 34, 106, 117, 147, 199
 Дауэс 53, 190
 Дезэн 149
 Деламб 172
 Делиль 38
 Де-Шольн 33
 Джилл 172, 173
 Жамен 151, 157, 187
 Желле 132
 Жигмонди 192
 Зидентопф 192
 Зоммерфельд 133, 198
 Квинке 77, 195
 Келлакад 43
 Кельвин 156, 201, 202
 Кениг 18
 Кеттелер 158
 Клаузиус 140, 198
 Квокенгвэр 96
 Корню 22, 77, 79, 100, 101, 159, 117, 173
 Котс 15
 Коши 30, 97, 125, 159
 Ламб 198
 Ланглей 160
 Лауе 40
 Липпих 75, 133
 Липпман 186
 Листинг 159
 Ллойд 18, 20, 124, 177, 178, 179
 Ломмель 49, 52, 100, 102, 104, 105,
 158
 Лоран 132
 Лоренц 158
 Луммер 74, 183
 Майоран 202
 Майкельсон 19, 26, 159, 160, 172, 173,
 184, 187, 188, 195
 Мак-Куллах 119
 Максвелл 7, 21, 28, 132, 201
 Малюс 106, 107
 Маскар 77, 204
 Мизес 40
 Морли 160
 Мюль 158
 Неккер 102
 Ноберт 195
 Ньюкомб 159
 Ньютон 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,
 106, 140, 180, 189

Онгстрем 195

Пастер 131

Перо 25, 26, 183, 184, 185, 188, 195

Плас 30

Пирс 77

Провостэй 149

Пойнтинг 132

Пуассон 38, 181

Ранкин 163

Резерфорд 195

Рейнольдс 162, 163

Роуланд 75, 78, 79, 81, 82, 195

Рубенс 160

Руд 150

Рудберг 124

Сальмон 119

Свешникова 170

Сван 117

Селля 202

Смит 15, 35, 121, 139

Солейль 133

Сорэ 39, 194

Стонэй 192

Стокс 6, 21, 24, 26, 27, 28, 33, 47,

50, 54, 90, 93, 115, 124, 125, 133,

134, 135, 136, 139, 147, 150, 151,

161, 180, 185

Струве 22, 54, 56, 59, 94, 172, 173

Тальбот 9, 29, 89, 102

Тиндаль 141, 202

Тиходеев 10

Тодгентер 52

Толлон 14

Томсон 125, 132, 158, 162, 165

Тудоровский 18

Уитстон 204

Уокер 158

Уоллес 195

Уотсон 52

Фабри 25, 26, 183, 184, 185, 188, 195

Фарадей 131

Фитцджеральд 100

Физо 19, 20, 160, 167, 171, 179

Фойгт 158

Форбс 159, 167, 171, 172, 173

Франк 40

Фраунгофер 40, 63, 74, 94, 106, 189,

190, 194

Френель 8, 18, 22, 34, 40, 94, 100, 108,

109, 116, 118, 119, 120, 121, 122,

124, 126, 129, 133, 141, 147, 149,

153, 154, 155, 156, 160, 167, 175,

178, 189, 194, 197, 198

Фроуд 161, 163

Фуко 20, 159, 172, 190

Фурье 196

Чэнс 30

Шверд 43

Шефер 154

Шлемильх 49

Шредингер 29

Шульц 133

Шустер 70, 196, 197, 201

Юнг 33, 63, 75, 108, 126, 147, 148,

159, 167, 171, 172, 173, 174, 175,

180, 181, 186, 189, 193, 197

Эбни 143

Эйри 20, 21, 49, 51, 70, 90, 150, 177,

180, 181, 189, 195

Эренфест 167, 168

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абберрация остаточная 81
 — приборов 63, 64, 65, 67
 — сферическая 16, 193
 — хроматическая 81
 Аккомодация 26, 93
 Анализатор 28, 127
 — Желле 132
 — Лорана 132
 Астигматизм 17, 81
 Ахроматизм 21

 Волновая поверхность Френеля 122
 Волны бегущие 161
 — плоские 7, 15
 — пространственно-модулированные 82
 — сферические 15
 Вращение плоскости поляризации 129, 130

 Двойное поглощение 125
 — преломление 117, 125
 Дисперсия 21, 69

 Закон Араго 24
 — Брюстера 141, 204
 — Малюса 108
 — Снеллиуса 106, 117, 124
 Зоны Гюйгенса 35, 94
 — Френеля 36, 37, 38

 Коллиматор 33
 Кольца Гейдингера 182, 188
 — Ньютона 24, 25, 26, 30, 31, 181, 183, 185
 Коническая рефракция 124
 Круговая поляризация 116

 Линейно-поляризованный свет 110, 114

 Метод Ллойда 18, 20, 178
 Монохроматический свет 25

 Николь 126, 132, 150

 Оптическая сила приборов 63
 Опыт Физо 160, 167, 179
 — Френеля 22, 178
 Отражение 147

 Поверхность Гюйгенса 117, 122
 Полосы ахроматические 20, 22
 — интерференционные 18, 21, 22
 — Тальбота 89, 94
 — Френеля 19, 20, 22, 32, 179
 Построение Гюйгенса 123, 124
 Поляризация 28, 106, 107, 108
 Поляризатор 125, 127
 Преломление 147
 Принцип Бабинэ 62
 — Гюйгенса 34, 40, 86, 87, 97, 197
 — Ферма 13

 Разрешающая сила 30
 Разрешающая способность решеток 74, 75
 Рефрактометр 187
 Решетка дифракционная 193

 Сопряженные фокусы 80
 Спектр дифракционный 20, 73
 — призматический 20
 Спектроскоп 16, 17, 26

 Тени 34
 Теорема Мак-Куллаха 119
 — Пуассона 105, 137

 Угол Брюстера 107

 Формула Коши 30
 Фотометрия научная 9
 — практическая 9

 Эллиптически поляризованный свет 110, 115, 116
 Эриометр 63

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Введение	5
2. Плоские волны простого типа	7
3. Интенсивность	9
4. Результат сложения большого числа колебаний с произвольными фазами	10
5. Общие соображения о распространении волн	12
6. Волны приблизительно плоские или сферические	15
7. Интерференционные полосы	18
8. Цвета тонких пластинок	22
9. Диффузионные кольца Ньютона	32
10. Тени	34
11. Дифракционные явления Фраунгофера	40
12. Теория круглого отверстия	48
13. Влияние aberrации. Оптическая сила приборов	63
14. Теория решеток	70
15. Теория пространственно-модулированных волн	82
16. Полосы Гальбота	89
17. Дифракция в случае, когда источник света наблюдается не в фокусе	94
18. Дифракция, симметричная относительно оси	102
19. Поляризация	106
20. Интерференция поляризованного света	108
21. Двойное преломление	117
22. Цвета кристаллических пластинок	126
23. Вращение плоскости поляризации	129
24. Динамическая теория дифракции	133
25. Дифракция света малыми частицами	140
26. Отражение и преломление	147
27. Отражение с точки зрения упругой теории	151
28. Скорость света	158
О бегущих волнах	161
Аберрация в диспергирующей среде	167
О скорости света	171
Дополнения	174

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Шепелев А. В. Оптика. Готовимся к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.

Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред.

Федоров Ф. И. Группа Лоренца.

Килин С. Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование.

Килин С. Я. Квантовая информация.

Добролюбов А. И. Бегущие волны деформации.

Кравченко И. Т. Теория волновых процессов.

Шашков А. Г., Бубнов В. А., Янковский С. Ю. Волновые явления теплопроводности.

Бардзюкас Д. И. и др. Распространение волн в электромагнитоупругих средах.

Астапенко В. А. Поляризаационные и интерференционные эффекты в излучательных процессах.

Иванов Б. Н. Мир физической гидродинамики.

Иванов Б. Н. Законы физики.

Ляпунов А. М. Работы по теории потенциала.

Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация.

Вайнберг С. Мечты об окончательной теории.

Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны и поиски окончательной теории.

Пенроуз Р. НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Трубецков Д. И. Введение в синергетику.

Арнольд В. И. Теория катастроф.

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.

Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего.

Баранцев Р. Г. Синергетика в современном естествознании.

Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации).

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.

Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение.

Пригожин И., Глендсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135-42-16, 135-42-46
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в Интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Издательство УРСС

Научная и учебная
литература

Джон Вильям Стрэтт (лорд Рэлей)

(1842–1919)

Родился в 1842 г. В 1865 г. окончил с отличием Тринити-колледж, а через три года создал научную лабораторию в своей родовой усадьбе. В 1871 г. вывел соотношение, известное как закон рассеяния света Рэлей. В 1879 г. и стал профессором экспериментальной физики в Кембридже и директором Кавендишской лаборатории. За более чем пятьдесят лет своей исследовательской деятельности Дж. В. Стрэтт опубликовал свыше 400 работ по исключительно широкому кругу вопросов, в том числе по световым и звуковым волнам, электромагнетизму, теоремам механики, вибрации пластичных сред, капиллярности и термодинамике. Его ставшая классической двухтомная монография «Теория звука» вышла в свет в 1877–1878 гг. и до сих пор остается неизменным руководством для современных ученых и инженеров. В 1904 г. Дж. В. Стрэтт был награжден Нобелевской премией по физике «за исследования плотностей наиболее распространенных газов и за открытие аргона в ходе этих исследований».



2373 ID 20146



ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16

Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



Любые замечания и предложения по изданию, а также замеченные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Полный список замеченных опечаток можно будет увидеть на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>