

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 57

В. А. УСПЕНСКИЙ

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

ПРЕДИСЛОВИЕ

Есть в математике темы, пользующиеся достаточной известностью и в то же время признаваемые традицией слишком сложными (или маловажными) для включения в обязательное обучение: обычай относит их к занятиям факультативным, дополнительным, специальным и т.п. В перечне таких тем есть несколько, остающихся сейчас там исключительно в силу инерции. Одной из них является теорема Гёделя.

Несмотря на то, что очень многие математики (и нематематики) слышали о ней, мало кто из них может объяснить, в чем состоит утверждение теоремы Гёделя и тем более как она доказывается. Вместе с тем результат столь важен, а причины, вызывающие неустранимую неполноту (т.е. невозможность добиться того, чтобы каждое истинное утверждение было доказуемо), столь просты, что теорема Гёделя могла бы излагаться на самых младших курсах. Более того, для понимания доказательства необходимо лишь знакомство с простейшей терминологией теории множеств (словами «множество», «функция», «область определения» и тому подобными) и некоторая привычка к восприятию математических рассуждений, так что оно вполне доступно подготовленному школьнику.

Излагаемый в этой брошюре способ доказательства теоремы Гёделя отличен от способа, предложенного самим Гёделем, и опирается на элементарные понятия теории алгоритмов. Все необходимые сведения из этой теории сообщаются по ходу дела, так что читатель одновременно знакомится с основными фактами теории алгоритмов. Брошюра написана на основе статьи автора в журнале «Успехи математических наук», 1974, том 29, выпуск 1 (175). Естественно, что изменение круга предполагаемых читателей сделало необходимой ее переработку. В частности, некоторые более специальные вопросы, а также библиографические ссылки на оригинальные публикации исключены, и любознательный читатель может найти их в упомянутой статье автора. Одновременно расширен раздел, посвященный связи между семантической и синтаксической формулировками теоремы о неполноте, а также добавлены приложения, посвященные теореме Тарского о невыразимости понятия истины и обоснованию аксиомы арифметичности.

План брошюры таков. В § 1 формулируется теорема о неполноте и уточняется ее формулировка, в частности вводится центральное для данной брошюры понятие дедуктики. В § 2 излагаются на неформальном уровне начальные понятия теории алгоритмов, и на их основе формулируются первые критерии полноты и неполноты. В § 3 продолжается исследование критериев неполноты, в § 4 описывается язык формальной арифметики, дается точное определение понятия истинности утверждения этого языка и точная формулировка теоремы Гёделя о неполноте для формальной арифметики. В § 5 на основе дальнейшего развития тех представлений об алгоритмах, которые были описаны в § 2,— развития, закрепляемого в виде трех аксиом теории алгоритмов, — завершается доказательство теоремы о неполноте формальной арифметики.

Брошюра снабжена шестью приложениями, написанными несколько более сжато, хотя по-прежнему не предполагающими никаких специальных знаний. В первом из них рассматривается вопрос о связи между наличием истинных недоказуемых утверждений и наличием утверждений, не являющихся ни доказуемыми, ни опровержимыми. Во втором доказывается некоторое усиление теоремы Гёделя — теорема Тарского о невыразимости понятия истины. Третье приложение посвящено обоснованию одной из аксиом теории алгоритмов, сформулированных в § 5, а именно, аксиомы арифметичности. С этой целью вводится некоторый конкретный класс алгоритмов - класс адресных программ - и проверяется арифметичность функций, вычисляемых алгоритмами этого класса. В четвертом приложении развитые в § 2 критерии полноты и неполноты применяются к языкам, связанным с так называемыми ассоциативными исчислениями. Пятое приложение посвящено первоначальной формулировке теоремы о неполноте, предложенной самим Гёделем. Шестое приложение содержит упражнения к некоторым из предыдущих разделов. Наконец, последнее приложение содержит ответы и указания к упражнениям. Приложения не зависят друг от друга и могут читаться в любом порядке, за исключением приложения В, отдельные места которого требуют знакомства с введенными в приложении Б понятиями.

Если после чтения этой брошюры у читателя возникнет желание более близко познакомиться с математической логикой и теорией алгоритмов, он может обратиться к следующим книгам:

1. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. Эббинхауз Г.Д., Якобе К., Ман Ф.К., Хермес Г. —М.: Мир, 1972, 264 с. (Современная математика. Популярная серия.)
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. —М.: Наука, 1979, 320 с.
3. Клини С. К. Введение в метаматематику. — Мл ИЛ, 1957, 526 е.
4. Клини С.К. Математическая логика. — М.: Мир, 1973, 480 с.
5. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. - М.: Мир, 1969. Глава 1. Основы математической логики, с. 13—86
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. —М.: Наука, 1975, 240 с.
7. Линдой Р. Заметки по логике. — М.: Мир, 1968, 128 е. (Современная математика. Популярная серия.)
8. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функций,— Мл Наука; 1965, 391 с.
9. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. — М. 6 Советское радио, 1979, 167 с.
10. Манин Ю. И. Вычислимое и невычислимое.— М.: Советское радио, 1980, 128 с.
11. Мендельсон Э. Введение в математическую логику, - 2-е издание. — М.: Наука, 1976, 320 с.
12. Новиков П.С. Элементы математической логики. 2-е издание, исправленное. -М.: Наука, 1973, 399 с.
13. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективной вычислимости. —М.: Мир, 1972, 624 с.
14. Фрейденталь Х. Язык логики. -М.: Наука, 1969, 135 с.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Формулировка теоремы о неполноте, которую мы будем уточнять и доказывать, такова:
при определенных условиях

в языке существует недоказуемое истинное утверждение.

В этой формулировке едва ли не каждое слово нуждается в разъяснениях. Сделаем, такие разъяснения.

1. **Язык.** Мы не будем давать какое бы то ни было определение языка (поскольку не беремся это сделать с достаточной общностью), а ограничимся теми относящимися, к языку понятиями, которые единственно и будут нужны нам для дальнейшего. Таких понятий нам потребуется два: «алфавит языка» и «множество истинных утверждений языка».

(Вот прямо отсюда начинается ГЛУПОСТЬ. Если ты не дал Определение Понятию, то откуда тогда взял «относящиеся к Языку Понятия»? Ведь Определение Понятия и есть нахождение Особенности присущих Объекту имеющему ИМЯ - Понятие. Эти Особенности и есть те самые «относящиеся к Языку Понятия»... Из чего Состоит этот самый Объект. В данном случае разговор идёт о Понятии – ЯЗЫК. Ему ОБЯЗАТЕЛЬНО необходимо дать Определение перед тем, как им Оперировать. Язык – Система Знаков для передачи Информации. Даже сами Понятия ПОНЯТИЕ и ОПРЕДЕЛЕНИЕ необходимо Определить.)

1.1. Алфавит. Под *алфавитом* понимается конечный список элементарных (т.е. считающихся не членимыми далее) знаков, называемых *буквами* этого алфавита. Конечная цепочка следующих друг за другом букв некоторого алфавита называется *словом* в этом алфавите. Так, слова русского языка (включая и собственные имена) суть слова в 66-буквенном алфавите (33 строчные буквы, 31 прописная буква¹, дефис, апостроф);

¹ Кроме твердого и мягкого знаков.

десятичные записи натуральных чисел - слова в десятибуквенном алфавите {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. («Под Алфавитом понимается...» АЛФАВИТ как Понятие тоже необходимо Определить, а не Понимать его.... Я считаю, что это есть нормальное Определение Понятия АЛФАВИТ. Только чуть поправить: «Конечный список Элементов - Знаков, называемых Буквами». А конечность данного списка есть СИСТЕМА – Пропорциональные Отношения Элементов. Получается: АЛФАВИТ – Система

Элементов-Знаков, называемых Буквами. Но... Это ещё не всё... И без определённого продолжения невозможно говорить о том, о чём здесь написано т.н. автором. Необходимо Определить Понятие ЗНАК. И т.д. Так что, всё, что здесь написано – Прimitив... И непонимание Задачи. Для Решения которой следует Определить Условия. Их Точное Количество и Качество в определённое ВРЕМЯ. Что есть МЕРА. Этого не умеет ни один академик. Тот же Колмогоров. Для него что Измерение, что МЕРА есть одно и то же – Непонятное. А чтобы Понять, надо эти Понятия Определить. Что это за Объект такой – Измерение... И что это за Объект – МЕРА. Почему у них один Корень. Что их Объединяет, и в чём у них Отличие. Во как Глубоко... Только тогда будет ПРАВИЛЬНО. Правило произошло от Правило. Выправлять. Выравнивать. ПРАВИТЬ. Управлять. Правление. Ещё в древней Руси князей сажали на ПРАВЛЕНИЕ. Правительство. И всё это есть Функция ЛИНЕЙНАЯ.) Для называния алфавитов используются обычно прописные русские буквы. Множество всех слов в алфавите B будем обозначать B^∞ . Предполагается, что для каждого языка имеется такой алфавит, что все выражения этого языка (т.е. имена тех или иных предметов, утверждения об этих предметах и т.п.) суть слова в этом алфавите; каждую русскую фразу, например, и даже каждый русский текст можно рассматривать как слово в алфавите, представляющем собой расширение указанного выше 66-буквенного алфавита за счет знаков препинания, знака пробела между словами, знака абзацного отступа (и, быть может, еще некоторых знаков). Предполагая, что выражения языка являются словами в некотором алфавите, мы тем самым

налагаем запрет на такое «многоэтажное» выражение, как, например, $\int_a^0 f(x) dx$. Этот запрет, однако, не является слишком ограничительным, поскольку все подобные выражения можно при подходящей кодировке «вытянуть в строку». (Придать Формуле другой вид.) Всякое множество M такое, что $M \in B^\infty$, называется *словарным* в B . Просто *словарным* называется множество, словарное в каком-либо алфавите. Сделанное только что предположение может быть теперь сформулировано короче: **множество выражений всякого языка словарно**. (До чего же Прimitивно... И непонятно – неправильно. Можно намного Лучше и Понятнее. Применим Понятие СИСТЕМА. Система – Пропорциональные Отношения Элементов. В Системе каждый Элемент есть тоже Система. Получается: Система Систем и Система в Системе. Никаких тебе Множеств, ПодМножеств и НадМножеств...) (По поводу Знаков Именуемых Цифрами...)

1.2. **Множество истинных утверждений**. Предполагается, что в множестве B^∞ , где B — алфавит рассматриваемого языка, задано подмножество T , называемое множеством «истинных утверждений» (или, короче, просто «истин»). Таким образом, мы опускаем все промежуточные этапы, посредством которых, во-первых, среди слов в алфавите B выделяются правильно построенные *выражения* языка, получающие определенный смысл при интерпретации (такие, как $2 + 3$, $x + 3$, $x = y$, $x = 3$, $2 = 3$, $2 = 2$, — в отличие от таких, как $-f = x$); во-вторых, среди выражений выделяются так называемые *формулы*, означающие при интерпретации «утверждения, зависящие, быть может, от параметра» (такие, как $x=3$, $x = y$, $2 = 3$, $2 = 2$); в-третьих, среди формул выделяются так называемые *замкнутые формулы*, или утверждения, не зависящие от параметра (такие, как $2 = 3$, $2 = 2$); и лишь, в-четвертых, среди утверждений выделяются *истинные утверждения* (такие, как $2 = 2$). •

1.3. Для наших целей будет достаточным считать язык полностью заданным, коль скоро задан алфавит B и подмножество T множества B^∞ . Всякую такую пару $\langle B, T \rangle$ мы будем называть *фундаментальной парой*,

ТАЙНАЯ ДОКТРИНА

Цель этого труда может быть определена так: доказать, что Природа не есть «случайное сочетание атомов» и указать человеку его законное место в схеме Вселенной; спасти от извращения архаические истины, являющиеся основой всех религий; приоткрыть до некоторой степени основное единство, откуда все они произошли; наконец, показать, что оккультная сторона Природы никогда еще не была доступна науке современной цивилизации.

Если это до некоторой степени выполнено, писательница удовлетворена. Труд **XXII** этот написан в служении человечеству, и человечеством же и будущими поколениями должен быть судим. Автор его не признает меньшего апелляционного суда. К оскорблениям она привыкла, со злословием она встречается ежедневно; клевете она улыбается в молчаливом презрении.

De minimis non curat lex.

Е. П. Б.

Лондон, Октябрь, 1888.

ИТОГ ПОЛОЖЕНИЯ

Все положение было представлено читателю с двух сторон, и ему надлежит решить – говорит ли итог в нашу пользу или нет? Если бы в Природе существовала такая вещь, как пустота–вакуум в Природе, то следовало бы найти ее воспроизведенной, согласно физическому закону, в умах неудачных поклонников «светил» Науки, проводящих свое время в обоюдном уничтожении своих учений. Если теория, что «два света производят тьму», нашла себе когда-либо приложение, то это именно в данном случае, где одна половина «светил» предписывает своим приверженцам принять на веру «их силы» и «способы движения», тогда как другая половина отрицает самое существование таковых. «Эфир, Материя, Энергия» – священная ипостасная троица, три принципа Бога, истинно, *неизвестного* науке, называемого ими **ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДОЙ!**

Теология обвиняется и высмеивается за веру в единство трех лиц в одном Божестве – Единый Бог в смысле естества, три лица в отношении индивидуальности; а нас осмеивают за нашу веру в недоказанные и недоказуемые доктрины в Ангелов и дьяволов, Богов и Духов. И действительно то, что дало победу ученым над теологией в великом «Конфликте между Религией и Наукою», было именно, возражение, что ни тождественность этого естества, ни

Альфонсо	9	7	2	47	?	0	42	14
Коперник	9	6	2	13	?	1	42	48
Тихо	9	7	54	40	+	0	9	39
Кеплер.....	9	6	57	35	?	0	47	26
Лонгмонтанус	9	7	2	13	?	0	42	48
Буйо	9	6	48	8	?	0	58	53
Риччиоли	9	7	53	57	+	0	8	56
Кассини	9	7	44	11	?	0	0	50
Индия	9	7	45	1					

«Ни одно из этих средних движений, исключая движений Кассини, не согласуется с исчислением индусов, которые, следовательно, не заимствовали своих средних движений, ибо их числа тождественны лишь с цифрами Кассини, таблицы которого не существовали в 1687 году. Это среднее движение Луны принадлежит, следовательно, индусам, которые могли определить его лишь наблюдением», – (*там же*, заметьте стр. XXXVI, XXXVII).

претендуемая троичная индивидуальность – после того, как они были задуманы и выработаны в глубинах теологического сознания – не могли быть доказаны никакими научными индуктивными рассуждениями и, менее всего, свидетельством наших чувств.

Религия должна погибнуть, говорят нам, потому что она учит «тайнам». «Тайна есть отрицание Здравого Смысла», и наука отвергает это. Согласно Тиндалю, метафизика есть «вымысел», подобно поэзии. Ученый «ничего не берет на веру»; отвергает все, «что не доказано ему», тогда как теолог принимает «все на слепую веру».

Теософ и **732]** оккультист, которые ничего не берут на веру, ни даже *точную науку*, спиритуалист, отрицающий догмы, но верящий в Духов и в *невидимые, но мощные влияния* – все они имеют равную долю в этом презрении. Прекрасно, **тогда нам остается в последний раз исследовать, не действует ли точная наука именно тем же способом, как и теософия, спиритуализм и теология?**

В сочинении С. Лэйнга, считающемся образцовой книгой в науке «*Modern Science and Modern Thought*», автор которой, согласно хвалебному обзору в «*Таймс'е*», излагает с большою силою и убеждением огромные открытия науки и ее многочисленные победы над старыми мнениями, каждый раз как они отваживаются восставать против нее, мы читаем:

«Из чего состоит материальная Вселенная? Из Эфира, Материи, Энергии».

Мы останавливаемся, чтобы спросить – что есть Эфир? И г-н Лэйнг отвечает во имя науки:

«Эфир в действительности еще неизвестен нам путем опытного исследования, доступного нашим чувствам, но он есть своего рода математическая сущность, которую мы принуждены допустить, чтоб объяснить феномены света и тепла».

А что есть Материя? Знаете ли вы о ней больше, нежели о «гипотетическом» посреднике, Эфире?

«Точно говоря, это верно, что химические исследования ничего не могут сказать нам, ... непосредственно о составе живой материи и... также верно, что мы ничего не знаем о составе любого существующего (материального) тела».

А Энергия? Несомненно, вы можете определить третье лицо Троицы вашей Материальной Вселенной? Мы можем найти ответ в любой книге по физике:

«Энергия есть то, что известно нам лишь по своим следствиям».

Пожалуйста, объясните, ибо это очень туманно.

«[В механике существует действительная и потенциальная энергия: работа, действительно произведенная, и способность производить ее. Что же касается до природы молекулярной Энергии или Сил], то различные феномены, представляемые телами, указывают, что их молекулы находятся под воздействием двух противоположных сил, одна стремится их соединить, другая – разлучить их... Первая сила... называется *молекулярный притяжением*... вторая сила обязана *vis viva* или двигающей силе».

Именно так: именно, природу этой *двигающей силы*, этой *vis viva*, мы и хотим знать. Что это? **733]** «Мы не знаем!» таков неизменный ответ. «Это пустая тень моего воображения» поясняет Гёксли в своем сочинении «*Physical Basis of Life*».

Итак, все здание современной науки построено на своего рода «математической абстракции», на, Протею-подобной «Субстанции, которая неуловима нашими чувствами», (Дю-Буа Рэймонд), и на *следствиях*, призрачных и обманчивых блуждающих огоньках *чего-то*, совершенно неизвестного и находящегося за пределами досягаемости наукою. «*Самодвигающиеся*» Атомы! *Самодвигающиеся* Солнца, Планеты и Звезды! Но кто или *что* есть все они, если они все самоодарены движением? Почему же тогда вы, физики, смеетесь и высмеиваете наш «Самодвижущийся Архей»? **Тайна отвергнута и высмеяна наукою и, как справедливо сказал о. Феликс:**

«Она не может избежать этого. Тайна есть рок науки».

Слова французского проповедника – наши слова, и мы приводим их в «*Разоблаченной Истории*». «Кто – спрашивает он – кто из вас, людей науки, –

«оказался в состоянии проникнуть в тайну образования тела, зарождения одного атома? Что заключается, я не скажу, в центре солнца но в центре атома? Кто исследовал до дна

глубину песчинки? Песчинка, господа, была изучаема наукою на протяжении тысячелетий; наука оборачивала ее так и сяк; она делит и подразделяет ее, она мучает ее своими исследованиями; она пытается ее своими вопросами, чтоб исторгнуть из нее конечное слово, относительно тайны ее строения; она вопрошает ее с ненасытным любопытством: «Должна ли я делить тебя до бесконечности?» И, висая над этою бездною, **наука колеблется, теряет почву, она чувствует себя ослепленной, испытывает головокружение и в отчаянии восклицает: «Я НЕ ЗНАЮ».**