

**Тулайкова Т.В., Амирова С.Р.**

$\Gamma(z)$

$J(z)$

$Y_v(z)$

$N_v(z)$

$H^{(1)}_v(z)$

$H^{(2)}_v(z)$

$I_v(Z)$

$K_v(z)$

*Вводный курс  
по специальным функциям  
для аспирантов-физиков*

$\text{ber}_vx$

$\text{bei}_vx$

$\text{ker}_vx$

$\text{kei}_vx$

$Ai(z)$

$Bi(z)$

$H_v(z)$

$P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$

$P_n^{(\sigma)}(x)$

$T_n(x)$

$U_n(x)$

$H_n(x)$

$L_n^{(\alpha)}(x)$

**ЗАО «Книга и бизнес»  
Москва 2009**

**Тамара Тулайкова  
Светлана Амирова**

**Вводный курс  
по специальным функциям  
для аспирантов-физиков**

**ЗАО «Книга и бизнес»  
Москва 2009**

УДК 517.58

ББК 22.161

Т 82

*Тулайкова Т.В.* – старший научный сотрудник

Российской Академии Наук, учреждение –

Институт динамики геосфер, Москва.

*Амирова С.Р.* – аспирантка

Московского Физико-Технического Института,

Государственный Университет, Москва.

**Вводный курс по специальным функциям для аспирантов-физиков – М.: ЗАО «Книга и бизнес», 2009 – 156 с.**

ISBN 978-5-212-01107-5

Анализ огромного количества задач из разделов современной физики приводит к различным математическим выражениям, содержащим почти всегда специальные функции. Эта книга призвана помочь начинающему научному сотруднику или инженеру освоить язык специальных функций и облегчить процесс пользования специальными математическими справочниками, дающими большое количество возможных вариантов для каждой функции, из которых нужно выбрать один наиболее подходящий. Приводятся некоторые начальные сведения по наиболее распространенным специальным функциям, сгруппированные в несколько лекций, которые читались студентам-старшекурсникам и аспирантам-физикам; здесь просто и доходчиво объясняется и прослеживается вывод ряда основных понятий, встречающихся в справочниках. Приводятся примеры использования специальных функций и оперирования ими при проведении анализа физических процессов и задач. Книга ставит своей целью научить студента и аспиранта самостоятельной научной работе, помогает провести теоретическое исследование изучаемого физического явления.

ISBN 978-5-212-01107-5

© ЗАО «Бизнес и книга», 2009

<b>Оглавление</b>	<b>стр.</b>
<b>I. Вводные замечания</b>	6
Немного истории, корни и источники.	7
Справочники и книги.	9
Благодарности.	10
<b>II. Гамма функция</b>	11
Определение гамма и бета-функции.	11
Бесконечные произведения. Вывод формулы Эйлера-Гаусса.	15
Постоянная Эйлера.	18
Бесконечные произведения Вейерштрасса.	20
Неполные гамма-функции.	21
Формула Стирлинга.	21
Представление гамма - функции контурным интегралом (и его доопределение на всей комплексной плоскости).	22
Асимптотическое представление гамма-функции.	24
<b>III. Функция Бесселя, вывод основных соотношений.</b>	26
Понятие производящих функций.	29
Вывод рекуррентных формул для цилиндрических функций первого рода.	33
Интегральные представления.	37
Теорема сложения.	39
Пример: Уравнение теплопроводности для цилиндра, неустановившийся во времени процесс.	41
<b>IV. Цилиндрические функции</b>	45
Цилиндрические функции первого и второго рода.	45
Функции Ханкеля (или цилиндрические функции 3-го рода).	49
Функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной.	51
Модифицированные цилиндрические функции.	53
Функции Кельвина.	56
Преобразования уравнений к каноническому виду уравнений Бесселя.	60
Пример. Распределение интенсивности тока высокой частоты в поперечном сечении цилиндрического проводника.	61
<b>V. Асимптотические разложения цилиндрических функций</b>	65
Определение и свойства.	65
Разложение цилиндрических функций при больших значениях аргумента $z \rightarrow \infty$ .	67

<b>Разложения для больших индексов <math>\nu \rightarrow \infty</math>.</b>	<b>71</b>
Интеграл Эйри и функции Эйри.	73
Представление функции через ее модуль и фазу.	78
Решения неоднородных уравнения типа уравнения Бесселя.	79
Функция Струве.	82
<b>VII. Разложения функций в ряды Фурье-Бесселя,</b>	
<b>Дини, Шлемильха, Каптейна, Неймана</b>	<b>84</b>
Ортогональность функций.	84
Ряд Фурье-Бесселя.	86
Ряд Дини.	88
Ряд Шлемильха.	90
Ряд Неймана.	92
Ряд Каптейна.	94
Разложение функции Бесселя в ряд по функциям Бесселя других порядков.	95
<b>VIII. Гипергеометрическая функция</b>	<b>97</b>
Гипергеометрическая функция.	97
Уравнение Римана, обобщенное уравнение Ламе.	100
Выражение функций через гипергеометрическую функцию.	106
Вырожденная гипергеометрическая функция.	107
Выражение интеграла вероятности через функции типа $W_{k,m}(z)$ .	107
Интегралы Френеля	108
<b>VIII. Функции Лежандра</b>	<b>111</b>
Полиномы Лежандра и сферическая функция.	111
Производящая функция для полиномов Лежандра.	116
Формула Родрига.	117
Интеграл Шлефли.	118
Функция Лежандра второго рода.	119
Выражение $P(z)$ и $Q(z)$ через гипергеометрическую функцию.	121
<b>IX. Ортогональные полиномы</b>	<b>123</b>
Определения. Рекуррентные соотношения для ортогональных полиномов.	124
Приведение гипергеометрического ряда к полиному.	125
Полиномы Якоби.	127
Полиномы Чебышева 1-го рода.	130
Полиномы Чебышева 2-го рода.	131
Полиномы Эрмита.	133
Полиномы Лагерра.	136
Уравнение Пирсона.	137
Пример использования ортогональных полиномов в физических задачах – в уравнении Шредингера.	138

<b>X. Применение цилиндрических функций для анализа оптических процессов в волоконно-оптическом световедущем кабеле</b>	141
Описание поля в волоконном световоде.	141
Пример расчета характеристик оптических мод.	146
Преобразование специальных функций для обеспечения необходимой точности расчетов.	146
Численный расчеты характеристик дискретных мод излучения в волоконном световоде.	148
<b>Литература</b>	151

## I. Вводные замечания.

Решение ряда важных задач теоретической физики, связанных, например, с изучение процессов взаимодействия излучения с веществом, теплообмена, распространения электромагнитных и акустических волн, разработкой теории ядерного реактора или внутреннего строения звезд, приводит к различным математическим уравнениям и системам уравнений, и, в конечном счете, к использованию различных специальных функций. В настоящее время опубликованы различные справочники, наиболее полным из которых является «Справочник по специальным функциям» под общей редакцией Милтона Абрамовича и Ирены Стиган. В этом справочнике, например, только для цилиндрических функций первого рода приводятся 206 возможных формул и вариантов разложений, выражающих эту функцию, а именно: это общие формулы (9.1.1.-9.1.89), также формулы асимптотических функций при больших значениях аргумента (9.2.1.-9.2.31), асимптотические разложения при больших значениях порядка (9.3.1-9.3.47), аппроксимация многочленами (9.4.1-9.4.6) и нули функций (9.5.1-9.5.33). Кроме нормального любопытства обычного хорошего студента-физика, который сразу задается вопросом о происхождении той или иной формулы (обычно справочники содержат только перечисление вариантов), существует гораздо более серьезная причина, побудившая нас написать эту книгу, содержащую вывод основополагающих соотношений. Активно разбираться в многообразии формул, связанных со специальными функциями, а не слепо доверяться компьютерным программам различного происхождения (в основном – стандартным) мы считаем необходимым для получения правильного и максимально точного решения физической задачи.

Что такое специальные функции? Образно выражаясь, можно их себе представить в виде айсберга, находящегося над водой, в то время как наибольшая подводная часть этого айсберга включает в себя методы классического комплексного анализа. Комплексный анализ представляет собой особый язык с мощными дополнительными возможностями, по сравнению с привычными операциями. Этими методами можно, например, разложить функцию в ряд элементарных дробей, метод комплексного анализа позволяет естественным образом преобразовать ряд в произведение, а произведение превратить в ряд элементарных дробей, ряд просуммировать и вновь свернуть в функцию. Такая комплексная пластика необходима для правильного анализа поведения сложных

функций, со сложными разрывами, их асимптотикой и особыми точками разного рода.

*Немного истории, корни и истоки.* Теория функций Бесселя тесно связана с одним дифференциальным уравнением первого порядка – уравнением Риккати, современная его запись имеет вид:

$$F(x)y'_x + F(x)y^2 + P(x)y + Q(x) = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение Риккати может быть получено из линейного однородного уравнения второго порядка посредством следующей подстановки:

$$\begin{aligned} F(x)y''_x + P(x)y'_x + Q(x)y &= 0 \\ u(x) &= y'_x(x)/y(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнение Бесселя, в частности, получается из уравнения Риккати посредством элементарного преобразования. Наиболее раннее упоминание уравнений типа Риккати встречается в статье Иоганна Бернулли, опубликованной в 1694 году в «Acta Eruditorum publicata Lipsiae». В этой статье автор приводит уравнение этого типа и пишет, что не решил его. Через несколько лет его брат Яков Бернулли, пишет, что ему удалось преобразовать уравнение  $y = yu dx + x dx$ , в котором ранее не удавалось разделить переменные, к линейному уравнению второго порядка  $d \frac{dy}{y} = -x^2 dx^2$  посредством замены переменных. И еще примерно

через год Яков Бернулли сообщил в своем письме к Лейбницу, что он нашел решение уравнения в виде ряда:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{2x^{11}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{13x^{15}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11} \dots$$

В те времена математики стремились получить решение в конечном виде, и открытие Якова Бернулли не было оценено по достоинству. Двадцатью годами позже Риккати опубликовал статью, в которой приводил более общее уравнение этого типа и привел решение, зашифрованное анаграммой (которая так и не была никем расшифрована). Шведский ученый Даниил Бернулли, сын Иоганна Бернулли, придавал большое значение работам Риккати, что и привело к тому, что более широкому классу уравнений этого типа было присвоено имя «уравнения Риккати». Шведский ученый Даниил Бернулли работал в Петербургской Академии

Наук в 1724-1733 годах сначала на кафедре физиологии, а потом механики, а с 1733 года получил позицию профессора в Базеле. Он известен своими исследованиями дифференциальных уравнений и их решений в виде рядов. Однако наибольшую известность ему принесло открытое им уравнение гидродинамики, связывающее величины давления  $p$ , скорости потока  $v$  и координаты  $z$  положения частиц в струе потока жидкости – уравнение Бернулли:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + g\rho z = \text{const.} \quad (1.3)$$

Уравнение Бернулли является основополагающим уравнением гидравлики, три его слагаемых имеют размерность давления (статическое давление, динамическое и весовое) и отражают закон сохранения энергии для единицы веса жидкости. Это уравнение широко применяется сегодня, например, для расчетов при проектировании трубопроводов, насосов и т.д.

Бесселевы функции, или цилиндрические функции первого рода, были названы так по имени немецкого астронома Фридриха Бесселя (1784-1846), члена немецкой Академии Наук, который подробно исследовал цилиндрические функции первого рода. Он реформировал методы учета инструментальных и других ошибок, что значительно повысило точность астрономических измерений, на основании чего он вычислил элементы земного эллипсоида, а также определил звездный параллакс звезды 61 Лебедя.

В 19-20 столетии большую роль в развитии математики сыграла английская и русская классическая школа математики. Здесь необходимо отметить великолепную книгу «Теория Бесселевых функций», которую написал в 1922 году английский математик Джордж Невилл Ватсон. В предисловии этой книги автор пишет, чтоставил перед собой две задачи, которые им и были блестяще решены. «Во-первых, расширение области применения фундаментальных методов теории функций комплексного переменного. Бесселевы функции идеально подходят для этой цели». Вторая задача – соединение в единое целое ряда разрозненных до этого времени исследований (с целью дать исчерпывающее описание цилиндрических функций) также была решена посредством этого объемного двухтомного издания.

*Что хорошо почитать.* Позже были и другие эпохальные в этой области книги. В 1927 году в Кембридже вышла книга Джорджа Н. Ватсона в соавторстве с Эдмундом Тейлором Уиттекером, озаглавленная «Курс современного анализа. Введение в общую теорию бесконечных

процессов и аналитических функций, с учетом принципиально трансцендентных функций». Также с удовольствие отметим прекрасную книгу нашего соотечественника Дмитрия Сергеевича Кузнецова, отличающуюся четким, ясным и подробным изложением специальных функций, вышедшую в Москве в 1965 году. В 1974 г. в США вышла книга Фрэнка В. Дж. Олвера «Введение в асимптотические методы и специальные функции», которую также мы искренне советуем почитать и получить при этом большое удовольствие. Недавно (2002г) вышла книга Сергея Славянова и Вольфганга Лай «Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей», которая в основном посвящена изучению особенностей дифференциальных уравнений и написана для математиков, профессионально работающих в этой области. И напоследок, невозможно удержаться, чтобы еще раз не сказать о некотором гениальном феномене нашего времени – о серии справочников по дифференциальным уравнениям, написанных Поляниным Андреем Дмитриевичем и в ряде книг в соавторстве, автор является нашим соотечественником, сотрудником Института Проблем Механики РАН, Москва. В этих справочниках проведен титанический анализ современных исследований различных видов дифференциальных уравнений и приведены их решения, что чрезвычайно облегчает труд армии пользователей, количество которых, наверное, превышает количество пользователей компьютеров. Здесь приводится краткий анализ уравнения Бесселя и его решений, а также анализ большого количества близких уравнений, которые могут быть сведены подстановками, найденными авторами, непосредственно к уравнению Бесселя или к другим классическим уравнениям.

*Справочники.* Справочник «Специальные функции» немецких авторов Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш вышел в 1960г в Германии, выдержал несколько изданий в разных странах, в том числе и у нас. Он отличается большим количеством графиков специальных функций и содержит основные формулы и таблицы. Самый большой и подробный на сегодня - «Справочник по специальным функциям» (1964г.) группы американских авторов под общей редакцией М.Абрамович и И.Стиган имеет в русском издании 830 страниц формата А4. Также хочется отметить справочник А.П.Прудникова, Ю.А.Брычкова и О.И.Маричева «Интегралы и ряды» в 3х томах, и особенно для работы со специальными функциями – т.3. «Специальные функции. Дополнительные главы» 2003г издания.

*Благодарности.* Здесь мы, авторы настоящей работы, хотим выразить искреннюю благодарность профессору Теодоровичу Эдуарду Владимировичу за наши содержательные беседы о специальных функциях, которые, в конце концов, привели к написанию данной книги. Также выражаем искреннюю благодарность Академику Российской Академии Наук Дианову Евгению Михайловичу, поскольку работа в тематике последнего, связанная с волоконной оптикой и волоконно-оптическими сенсорами, продиктовала необходимость углубленного изучения специальных функций.

В настоящей книге даются основные определения наиболее распространенных специальных функций, а также вывод большинства основополагающих соотношений в области специальных функций.

## II. Гамма функция.

Гамма-функция определяется интегралом:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

Интеграл сходится при  $a > 0$ . Также гамма-функцию называют интегралом Эйлера 2-го рода. Интеграл Эйлера 1-го рода - это родственная функция, называемая также *Бета-функцией* и определяемая соотношением:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx \quad (2.2)$$

Этот интеграл также сходится при  $a > 0, b > 0$ . Чтобы выявить некоторые его интересные свойства, введём замену переменной  $x = 1-t$ , тогда получаем выражение, которое отражает *свойство симметричной функции* для  $B(b, a)$ :

$$B(a, b) = \int_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a) \quad (2.3)$$

Введём замену переменной в определении (2.1):  $x = ty$ , где константа  $t > 0$ , следовательно, получим:

$$\Gamma(a) = t^a \cdot \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy$$

Введём вторую замену в последнем выражении гамма-функции:  $a \rightarrow a+b$ ,  $t \rightarrow 1+t$ , получим:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$$

Наконец, умножая это равенство на  $t^{a-1}$  и интегрируя по  $t$  в пределах от 0 до  $\infty$  приходим к формуле:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy \right\} t^{a-1} dt, \\ \Gamma(a+b) B(a,b) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty (ty)^{a-1} e^{-ty} d(ty) \right\} y^{b-1} e^{-y} dy = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \right] y^{b-1} e^{-y} dy = \\ &= \Gamma(a) \cdot \int_0^\infty y^{b-1} \cdot e^{-y} dy = \Gamma(a) \Gamma(b) \end{aligned}$$

Окончательно из проведенных выкладок находим связь интегралов Эйлера первого и второго рода в следующем виде:

$$\Rightarrow B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (2.4)$$

Для специальных функций большое значение имеют рекуррентные соотношения, которые связывают значения функций при двух соседних порядках « $a$ ». Получить рекуррентную формулу для гамма-функции можно простой заменой аргумента в интеграле (2.1), то есть числа  $a$  на  $a+1$  и интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \left[ -x^a e^{-x} \right]_0^\infty + a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \Rightarrow \\ \Gamma(a+1) &= a\Gamma(a) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученное соотношение (2.5) называется рекуррентной формулой. Наиболее актуально это соотношение при целых значениях аргумента  $a = n$ . В этом случае получим, в частности:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[ -e^{-x} \right]_0^\infty = 1, \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, при целых положительных значениях аргумента Гамма-функция обращается в факториал, порядок которого на единицу меньше числа взятого аргумента. При  $n=0$  формула (2.6) даёт численные значения  $0! = \Gamma(1) = 1$ . На основе (2.5) рекуррентными соотношениями

гамма-функции считаются также следующие соотношения, часто используемые в физических задачах:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.7a)$$

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z), n=1,2,\dots \quad (2.7b)$$

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{z-1}\Gamma(z) \quad (2.7c)$$

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}, n=1,2,\dots \quad (2.7d)$$

Полученная рекуррентная формула (2.5) легко объясняет вид *графика гамма-функции*. График гамма-функции показан на рис. 2.1. На первом этапе рассмотрения этого графика, из рекуррентной формулы (2.5) получим пределы, показывающие, что вблизи нулевого значения аргумента справа и слева гамма-функция стремится к  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно;

$$\Gamma(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = -\infty, \quad \Gamma(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty$$

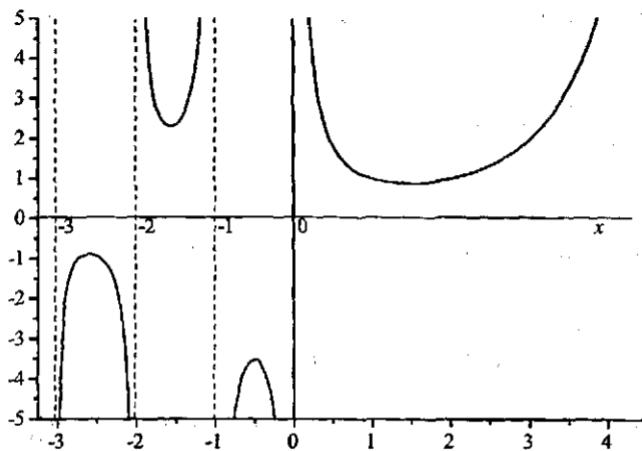


Рис.2.1. а - График гамма-функции.

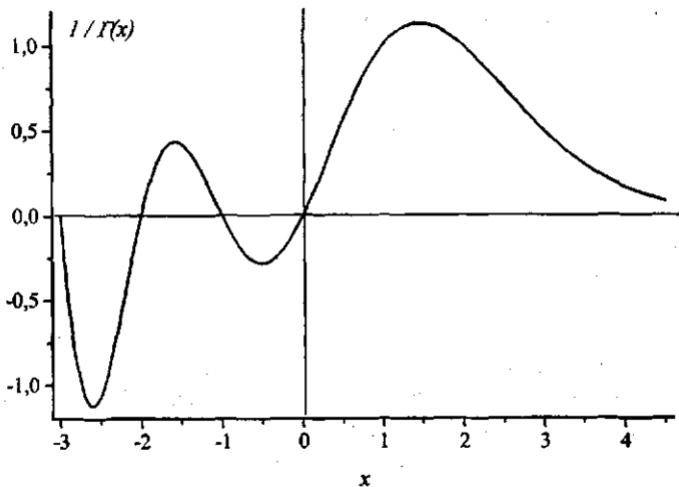


Рис.2.1. б - График – график функции  $1/\Gamma(x)$ .

Аналогичным образом объясняются и другие точки вблизи точных значений аргумента в отрицательной области  $-n < a < -n + 1$ , где  $n > 0$  – любое целое положительное число, по определению гамма-функции получим:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \quad (2.8a)$$

Альтернативный способ – ввести замену  $a = -n + \beta$  где величина  $\beta$  изменяется вблизи единицы  $0 < \beta < 1$ , тогда получим:

$$\Gamma(-n + \beta) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta)}{(1-\beta)(2-\beta)\dots(n-\beta)} \quad (2.8b)$$

отсюда становится очевидным, что в интервале  $(-n, -[n-1])$ ,  $\Gamma(a) > 0$  при  $n$  четном и также  $\Gamma(a) < 0$  при  $n$  нечетном (см. рис.2.1). Докажем это утверждение из (2.8b):

$$\Gamma(-n) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \Gamma[-n + \beta] = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{(-1)^n \cdot \Gamma(\beta)}{(1-\beta)(2-\beta)\dots(n-\beta)} = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = \pm\infty$$
(2.9a)

здесь получается соответственно знак «-» при нечетном  $n$  или знак «+» при четном  $n$ . Рассмотрим дополнительно приближение к этой точке целого значения аргумента с другой стороны:

$$\Gamma(-n) = \lim_{\beta \rightarrow -1} \Gamma[-(n-1) + \beta] = \lim_{\beta \rightarrow -1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \Gamma(\beta)}{(1-\beta)(2-\beta)\dots(n+1-\beta)} = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(1)}{0} = \mu\infty$$

здесь  $\langle -\infty \rangle$  при четном  $n$ , знак  $\langle +\infty \rangle$  при нечетном  $n$ . Таким образом, график функции объяснен и доказано, что при переходе в отрицательном направлении через значение  $a = -n$ , гамма-функция изменяется скачком от  $-\infty$  до  $+\infty$ , если  $n$  нечетно, и от  $+\infty$  до  $-\infty$ , если  $n$  четно.

### **Бесконечные произведения. Вывод формулы Эйлера-Гаусса.**

**Определение:** если для последовательности  $n$  вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  их частичное произведение имеет предел при  $n \rightarrow \infty$  (предел конечный или бесконечный, но определенного знака), этот предел называется величиной бесконечного произведения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \cdot x_2 \dots x_n) = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$$
(2.10)

Рассмотрим предел следующего выражения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( 1 - z^{\frac{1}{n}} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-z^{\frac{1}{n}} \ln z \left( -\frac{1}{n^2} \right)}{-\frac{1}{n^2}} = -\ln z = \ln \frac{1}{z}$$

Введем замену переменной  $e^{-x} = z$ , откуда получим  $x = \ln(1/z)$ , с помощью этой замены преобразуем последнее соотношение к виду гамма-функции (2.1):

$$\Gamma(a) = - \int_{1}^{0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( 1 - z^{\frac{1}{n}} \right) \right]^{a-1} z \frac{dz}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^{a-1} \int_{0}^{1} \left( 1 - z^{\frac{1}{n}} \right)^{a-1} dz \right]$$

Перестановка знаков интеграла и предела законна, т.к. при безграничном возрастании  $n$  функция  $n(1-z^{1/n})$  стремится к своему пределу  $\ln(1/z)$ , возрастая. Применим далее следующую подстановку  $z = y^n$ , получим выражение гамма-функции, включающее под знаком предела - вета-функцию:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^a \int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{n-1} dy \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [n^a B(n, a)] \quad (2.11)$$

На основе свойства симметрии (2.3) вета-функции получим ее выражение в виде:

$$\begin{aligned} B(a, n) &= B(n, a) = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \dots \frac{1}{a+1} B(a, 1) = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(a+1) \cdot (a+n-1)} \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Объединив (2.11) и (2.12), получим формулы Эйлера-Гаусса, которые формулируются следующим образом:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \quad (2.13a)$$

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{a(a+1)\dots(a+n)} \quad (2.13b)$$

На основе этих соотношений и определения (2.10) следует, что гамма-функция может быть представлена в виде бесконечного произведения. *Бесконечное произведение для гамма-функции имеет вид:*

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a}{1 + \frac{a}{n}}, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.14)$$

Доказательство разложения  $\Gamma(a)$  (2.14) в бесконечное произведение проведем на основе анализа следующего частичного произведения:

$$P_{n-1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^a \left(1 + \frac{1}{2}\right)^a \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^a}{a \left(1 + \frac{a}{1}\right) \left(1 + \frac{a}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{a}{n-1}\right)} = \frac{2^a \cdot 3^a \cdots n^a \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{1^a \cdot 2^a \cdots (n-1)^a \cdot a \cdot (a+1) \cdots (a+n-1)} =$$

$$= \frac{n^a (n-1)!}{a(a+1) \cdots (a+n-1)}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем правую часть предыдущей формулы (2.13б), чем и доказывается справедливость разложения (2.14). На основе рекуррентных соотношений, формулу (2.14) можно представить в следующем виде:

$$\Gamma(a+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a}{1 + \frac{a}{n}} \quad (2.15)$$

Заменим в (2.15)  $a$  на  $-a$ , после умножения на (2.14), получаем:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)} \quad (2.16)$$

Можно доказать с помощью формулы Муавра, что знаменатель полученного выражения (2.16) представляет собой разложение синуса в непрерывное произведение:

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Окончательно получим из (2.16) известное соотношение, которое носит название – *формула дополнения*:

$$\Gamma(a)\Gamma(a-1) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (2.17)$$

Полагая в (2.17)  $a=1/2$ , получим  $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$ , следовательно  $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ . Рассуждая аналогично, можно показать вывод формулы умножения, которая называется также *теоремой Гаусса*:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{2}-ma} \Gamma(ma) \quad (2.18)$$

Формула умножения при  $m=2$  переходит в формулу удвоения (формула Лежандра):

$$2^{2a-1} \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2a) \quad (2.19)$$

Отсюда следуют актуальные для практических применений значения:

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(n) = (n-1)!$$

*Постоянная Эйлера  $C = 0.5772156\dots$*

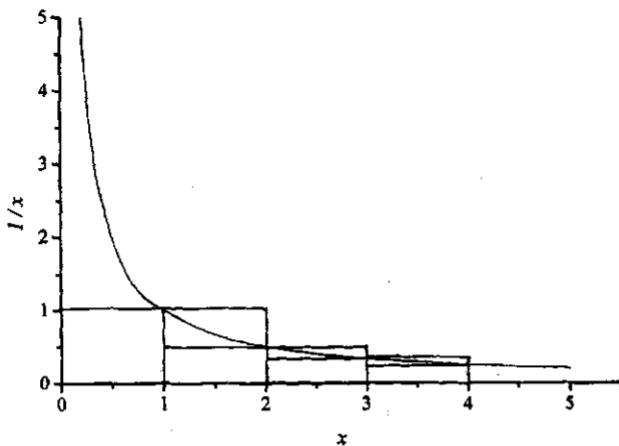


Рис.2.2. Схема объяснения постоянной Эйлера.

Рассмотрим график гиперболы на рис. 2.2. Обозначим через  $S_n$  - площадь, ограниченную равносторонней гиперболой  $y = \frac{1}{x}$ , осью  $Ox$  и ординатами при  $x = 1, 2, \dots, x = n$ .

$$S_n = \ln n \quad (2.20)$$

Сравним две суммы площадей прямоугольников. Первая  $Q_n$  - общая площадь прямоугольников, основания которых равны 1, а высоты равны:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1} , \quad Q_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} .$$

Вторая сумма  $q_n$  - общая площадь прямоугольников с теми же основаниями, но с высотами :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} , \quad q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

При любом  $n$  справедливы соотношения:

$$q_n < S_n < Q_n ;$$

$$Q_n - S_n < Q_{n+1} - S_{n+1} ;$$

$$Q_n - S_n < Q_n - q_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Введём переменную  $v_n$ , которая равна разности суммы площадей больших треугольников  $Q_n$  и площади под кривой  $S_n$ :

$$v_n = Q_n - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad (2.21)$$

При увеличение  $n$  это значение  $v_n$  возрастает, оставаясь меньше 1, и, следовательно, имеет конечный предел  $c$ . Этот предел, равный пределу переменной  $u_n = v_n + 1/n$ , называется *постоянной Эйлера*:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772156 \quad (2.22a)$$

Постоянная Эйлера играет важную роль в соотношениях, связанных с гамма-функцией, покажем это подробнее. Также иногда называют *связанную с предыдущей* - *постоянную*:

$$C = \ln \gamma, \gamma = 1.781\ 072\ 418 \quad (2.226)$$

### Бесконечные произведения Вейерштрасса

Имеет место следующее соотношение:

$$e^c = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \quad (2.23)$$

Для его доказательства составим частичное произведение:

$$P_n = \frac{e^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{C + \ln n + \alpha_n}}{n+1} = e^C \frac{n}{n+1} e^{\alpha_n} \quad (2.24)$$

где  $\alpha_n$  - бесконечно малая, определяемая формулой:

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - C$$

Переходя к пределу частичного произведения (2.24) при  $n \rightarrow \infty$ , получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^C \frac{n}{n+1} e^{\alpha_n} \right) = e^C$$

Возводим в степень  $a$  соотношение (2.23) и умножим на гамма-функцию в форме бесконечного произведения (2.14), получим:

$$e^{Ca} \Gamma(a) = \frac{1}{a} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{a}{n}}}{1 + \frac{a}{n}}$$

Преобразуя, приходим к формуле Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{Ca} \cdot a \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}} \quad (2.25)$$

Логарифмируем последнее соотношение (2.25) и получаем другое известное соотношение:

$$\ln \Gamma(a) = -Ca - \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a}{n} - \ln \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right] \quad (2.26)$$

После дифференцирования по аргументу  $a$ , получим также:

$$[\ln \Gamma(a)]' = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C - \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right) = -C - \frac{1}{a} + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)} \quad (2.27)$$

*Рассмотрим неполные Гамма-функции (функции Прима):*

$$P(x, a) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2.28a)$$

$$Q(x, a) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2.28b)$$

Обе эти функции связаны равенством:

$$P(x, a) + Q(x, a) = \Gamma(a) \quad (2.29)$$

Разлагая  $e^{-t}$  в ряд в формуле (2.28a) функции Прима  $P(x, a)$ , можно получить ее простое выражение в виде ряда:

$$\begin{aligned} P(x, a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{a-1+k}}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{a-1+k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{a+k}}{(a+k)} = x^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^k}{(a+k)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

*Формула Стирлинга.*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a+1)}{a^a e^{-a} \sqrt{2\pi a}} = 1 \quad (2.31)$$

Можно представить эту формулу в несколько ином виде, более наглядном для анализа:

$$\Gamma(a+1) \approx a^a e^{-a} \sqrt{2\pi a} (1 + \varepsilon_a),$$

Здесь  $\varepsilon_a \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ , для больших  $n$  очевидно получим:

$$\Gamma(a+1) \approx a^a e^{-a} \sqrt{2\pi a} \quad (2.32)$$

Если  $a = n$  - целое положительное, тогда при  $\Gamma(n+1) = n!$  формула (2.32) обращается в приближенную формулу факториала  $n!$  при больших  $n$ :

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (2.33)$$

Более точная формула, включающая расходящийся ряд, имеет вид:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \left( 1 + \frac{1}{12 \cdot n} + \frac{1}{288 \cdot n^2} - \frac{139}{51840 \cdot n^3} - \frac{571}{2488320 \cdot n^4} + \dots \right)$$

Формула Стирлинга имеет вид, который может быть доказан на основе объединения предыдущих соотношений (2.31-2.336):

$$\Gamma(a) \approx e^{-a} a^{a-1/2} \sqrt{2\pi} \left[ 1 + \frac{1}{12a} + \frac{1}{288a^2} - \frac{139}{51840a^3} - \frac{571}{2488320a^4} + \dots \right] \quad (2.34)$$

$(a \rightarrow \infty, |\arg(a)| < \pi)$

*Представление  $\Gamma$ -функции контурным интегралом (и его доопределение на всей комплексной плоскости  $z$ )*

Раньше мы считали аргумент гамма-функции вещественным, теперь рассмотрим продолжение гамма-функции в комплексную область значений. Преобразуем  $\Gamma(z)$  к виду:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{(z-t)\ln t - t} dt \quad , \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (2.35a)$$

Рассмотрим при комплексном  $t$  функцию  $e^{(z-1)\ln t - t}$ . Можно показать, что эта функция непрерывна от  $z$  и  $t$  при любой регулярной функции  $z$  и при любом  $t \geq 1$ , интеграл (2.34) представляющий  $\Gamma(z)$  - сходится равномерно и является, таким образом, регулярной функцией везде внутри этой области.

Далее несколько расширим рассматриваемую область. На основании разложения в ряд степенной функции  $e^{-t} = \sum_0^{\infty} (-1)^n t^n / n!$ , после умножения обеих частей этого равенства на  $t^{z-1}$  и интегрирования результата (причем интегрирование от 0 до 1 упрощает выражение), получим следующее наглядное представление гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_{t=0}^{t=z-1} e^{-t} dt \quad (2.35b)$$

Это выражение (2.35b) определяет функцию, регулярную на всей комплексной плоскости  $z$  кроме точек  $z=0, -1, -2, \dots, -n$ , в которой она имеет простые полюсы, определяемые вычетами:  $\text{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = (-1)^n / n!$ . Принцип аналитического продолжения позволяет распространить на всю комплексную плоскость  $z$  приведенные выше формулы, определяющие гамма-функцию.

Рассмотрим интеграл (2.35a) на контуре  $I$ , который охватывает точку  $t=0$ , с концами, уходящими в  $+\infty$ . Рассмотрим также контур  $C_\epsilon$ , охватывающий нулевую точку, пусть малый радиус этой окружности равен  $\epsilon$ . Подынтегральная функция (2.35a) имеет точку ветвления в  $t=0$ ; эта функция однозначна на плоскости  $(t)$  с разрезом по вещественной оси от точки  $t=0$  до  $t=+\infty$ , и по теореме Коши имеет одно и то же значение для любого по форме контура  $I$ , интеграл по такому контуру можно представить суммой 3-х интегралов на верхнем участке от  $+\infty$  до 0, на окружности  $C_\epsilon$ , и по нижнему участку от 0 до  $+\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{0} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_{+\infty}^0 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_{C_\epsilon} t^{z-1} e^{-t} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_{\epsilon}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.36a)$$

Здесь учтено, что на нижнем крае разреза выражение  $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$  должно замениться на  $e^{(z-1)(\ln t + 2\pi i)} = e^{(z-1)\ln t} e^{(z-1)2\pi i} = e^{2(z-1)\pi i} t^{z-1}$ . На окружности  $C_\epsilon$  имеем  $|t|=\epsilon$ , и комплексное значение представим  $z=x+iy$ , поэтому справедливо следующее преобразование:

$$\begin{aligned} |t^{z-1}| &= |e^{(z-1)\ln t}| = |e^{(x+iy-1)(\ln|t| + i\arg t)}| = |e^{(x-1)\ln|t| - y\arg t}| \cdot |e^{i[(x-1)\arg t + y\ln|t|]}| = e^{(x-1)\ln|\epsilon|} \cdot e^{-y\arg t} = \\ &= |\epsilon|^{x-1} \cdot e^{-y\arg t} = \epsilon^{x-1} \cdot e^{-y\arg t}. \end{aligned}$$

Если оценить по максимуму следующую величину  
 $\max |e^{-y \arg t - i}| = M = \text{const}$ , тогда получим:

$$\left| \int_{C_\epsilon} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt \right| \leq \int_{C_\epsilon} |t^{z-1} \cdot e^{-t}| dt = \int_{C_\epsilon} |\epsilon^{x-1}| \cdot |e^{-y \arg t - i}| dt \leq \epsilon^{x-1} \cdot M \cdot \int_{C_\epsilon} dt = \epsilon^{x-1} M 2\pi \epsilon = 2\pi M \epsilon^x$$

Отсюда следует, что интеграл по окружности вблизи нулевой точки становится равным нулю при нулевом радиусе охватывающей нуль окружности:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} t^{z-1} e^{-t} dt = 0$$

Таким образом, в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$ , получим следующее оставшееся упрощенное выражение из (2.36) для интеграла по контуру:

$$\int_{C_+}^0 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_{-\infty}^0 t^{z-1} e^{-t} dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.366)$$

здесь  $e^{2\pi i} = 1$ , так что окончательно получаем выражение этого контурного интеграла в виде:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_{-\infty}^0 t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.37)$$

Последнее выражение может быть легко преобразовано к формуле Ханкеля для такого-же контура, справедливой везде кроме  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .  
Формула Ханкеля имеет вид:

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin(\pi z)} \int_{-\infty}^0 (-\tau)^{z-1} e^{-\tau} d\tau \quad (2.38)$$

*Асимптотическое представление  $\Gamma(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$*

*Определение:* бесконечный ряд  $S_n(z)$  называется асимптотическим представлением функции  $f(z)$ , определенной на полупрямой  $l$ , если при больших значениях  $z$ , стремящихся к  $\infty$  по этой полупрямой, их разность, умноженная на  $z^n$ , стремится к нулю, то есть выполняется условие:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - S_n(z)] z^n = 0 \quad (2.39)$$

Формула Стирлинга (2.34) фактически является асимптотическим рядом для представления гамма-функции при больших значениях аргумента. На основе анализа соотношения:

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z) = \int_0^{\infty} [e^{-t}/t - e^{-zt}/(1-e^{-t})] dt$$

Последнее аналогично (2.27), также с помощью соотношения типа  $\Gamma'(z+1)/\Gamma(z+1)$ , можно доказать, что справедливо следующее представление гамма-функции при больших  $z \rightarrow \infty$ :

$$\Gamma(z) = e^{\left(\frac{z-1}{2}\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi\right)} \cdot \left[1 + O(z^{-1})\right] \quad (2.40)$$

Анализируя разложение функции в бесконечное произведение (2.41a), легко получить следующие *асимптотические ряды для логарифмических производных* гамма-функции (2.41б, в):

$$\{\Gamma(z+1)\}^{-1} = e^z \prod_{n=1}^{\infty} [(1+z/n)e^{-z/n}] \quad (2.41a)$$

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)} \quad (2.41b)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad (2.41c)$$

Проводя ряд преобразований асимптотического представления гамма-функции выражением (2.40), можно показать, что оно переходит в формулу Стирлинга.

### III. Функция Бесселя, вывод основных соотношений.

Уравнение Бесселя и его решения в виде функций Бесселя возникают часто в задачах, описывающих различные процессы и уравнения в цилиндрической системе координат: например, уравнения теплопроводности, процессы распространения лазерного излучения по оптическому волокну, и.т.д. Рассмотрим *уравнение Бесселя*:

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - v^2) w = 0 \quad (3.1)$$

Здесь предполагаем пока вещественными значения аргумента  $z$  и порядка  $v=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . После ввода основных определений функции Бесселя и других цилиндрических функций, будет показана возможность расширить  $z$  и  $v$  на комплексной плоскости, где цилиндрические функции могут быть доопределены везде, кроме особых точек, хотя и в ряде этих случаев - неоднозначны.

Очевидный анализ уравнения (3.1) показывает, что если поделить обе части уравнения на  $z^2$ , станет очевидно что получающиеся коэффициенты

$$p(z) = \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad q(z) = 1 - \frac{v^2}{z^2} \quad \text{при первой и второй}$$

производных функции имеют полюсы соответственно 1-го и 2-го порядка. Таким образом, это особые точки уравнения (регулярные). При  $z \rightarrow \infty$  коэффициенты  $q(z) \neq 0$  поэтому бесконечность - также особая точка этого уравнения, иррегулярная. Будем искать решение уравнения Бесселя в виде ряда:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r+k}. \quad \text{Тогда после дифференцирования получим:}$$

$$w' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k z^{r+k-1}$$

$$w'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k z^{r+k-2}$$

После подстановки полученных выражений также в виде рядов для первой и второй производной в исходное уравнение, получим:

$$z^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k z^{r+k-2} + z \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k z^{r+k-1} + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r+k} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r+k} = 0 \quad (3.2)$$

Следуя методу неопределенных коэффициентов, приравниваем к нулю коэффициенты при  $z^r$ ,  $z^{r+1}$ , ..., получаем следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2 a_0 = 0 \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2 a_1 = 0 \\ (r+2)(r+1)a_2 + (r+2)a_2 + a_0 - v^2 a_2 = 0 \\ (r+3)(r+2)a_3 + (r+3)a_3 + a_1 - v^2 a_3 = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Отсюда получим после очевидных преобразований:

$$\left\{ \begin{array}{l} (r^2 - v^2)a_0 = 0 \\ [(r+1)^2 - v^2]a_1 = 0 \\ [(r+2)^2 - v^2]a_2 + a_0 = 0 \\ [(r+3)^2 - v^2]a_3 + a_1 = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Из 1-го соотношения системы (3.4), поскольку  $a_0 \neq 0$  следует утверждение, что  $r_1 = +v$ ,  $r_2 = -v$ . Подстановка этих соотношений в формулу ряда  $w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{r+k}$  позволяет получить частные решения в виде:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{v+k} = J_v(z)$$

$$w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-v+k} = J_{-v}(z)$$

В обоих этих выражениях получим из соотношений системы (3.4):

$$a_1 = 0, a_3 = 0, \dots, a_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Рассмотрим дальше отдельно  $a_2, a_4, \dots$  для  $r = +v$  и для  $J_v(z)$ :

$$a_2 = -\frac{a_0}{(v+2)^2 - v^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(v+4)^2 - v^2} = \frac{a_0}{[(v+2)^2 - v^2][(v+4)^2 - v^2]}$$

...

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{[(v+2)^2 - v^2][(v+4)^2 - v^2] \dots [(v+2k)^2 - v^2]} =$$

$$= \frac{(-1)^k a_0}{(4v+4)(8v+16) \dots (4kv+4k^2)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (v+1)(v+2) \dots (v+k)} =$$

$$= \frac{(-1)^k \Gamma(v+1) a_0}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(v+k+1)} \text{ при } k=1,2,\dots$$

Следовательно, имеем из предыдущего ряд с неопределенными пока коэффициентами  $a_{2k}$  в виде:

$$J_v(z) = a_0 2^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k} \quad (3.5)$$

В результате аналогичных преобразований получается точно такой-же ряд для  $r=-v$ :

$$J_{-v}(z) = a'_0 2^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(-v+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v+2k} \quad (3.5a)$$

Полагаем произвольные коэффициенты в соотношениях (3.5 – 3.5a) равными:

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}, \quad a'_0 = \frac{1}{2^{-v} \Gamma(-v+1)}$$

Получаем окончательные формулы ряда, справедливые при  $v=0, 1, 2, \dots$ :

$$J_{\pm v} = \frac{1}{\Gamma(\pm v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\pm v+1)}{k! \Gamma(\pm v+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (3.6)$$

Полученный ряд является решением исходного уравнения Бесселя и называется *цилиндрическими функциями 1-го рода*, или *функциями Бесселя*. более компактная окончательная запись имеет вид:

$$J_\nu = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (3.7)$$

Отсюда для функции Бесселя нулевого порядка, при  $\nu = 0$  очевидна простая формула:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(k)!]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (3.7a)$$

Так что при малом значении аргумента  $z$  получается  $J_0(z) \approx 1$ . Графики функций Бесселя  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$ ,  $J_2(z)$  показаны на рис. 3.1.

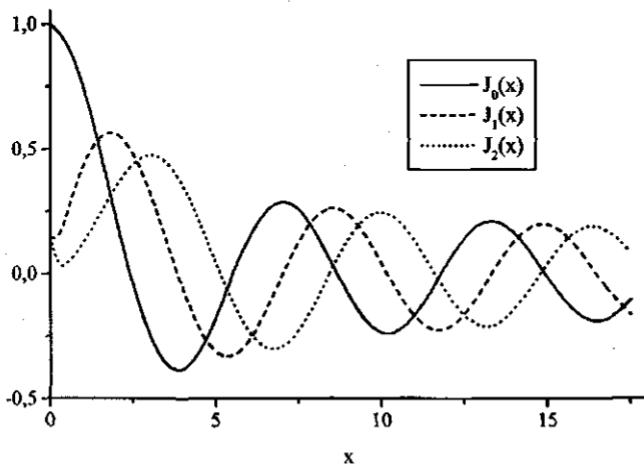


Рис. 3.1. Графики функций Бесселя нулевого, первого и второго порядков.

### *Понятие производящих функций.*

Определение: пусть  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — произвольна последовательность чисел. Производящей функцией (или производящим рядом) для этой последовательности называется выражение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \quad (3.8)$$

Например, рассмотрим простейшую последовательность: 1, 1, 1, ... . Производящая функция для нее может определяться следующим математическим выражением:

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots,$$

Для получения компактной записи производящей функции G(s), умножим обе части предыдущего выражения на s, и выделим явный вид для G(s):

$$sG(s) = s + s^2 + s^3 + \dots = G(s) - 1 \quad (3.9)$$

$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$

Рассмотрим другой примет – это известная в комбинаторике последовательность Фибоначчи. Она определяется своими начальными членами  $f_0 = f_1 = 1$  и соотношением для последующих членов:  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ . Таким образом, начало последовательности Фибоначчи состоит из следующих членов: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., то есть каждый член равен сумме двух предыдущих, исключая самое начало. Производящая функция здесь выглядит следующим образом:

$$Fib(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots \quad (3.10)$$

Умножив обе части предыдущего соотношения на  $(s+s^2)$ , получим общую формулу для производящей функции:

$$(s+s^2) \cdot Fib(s) = \\ s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots \quad (3.11)$$

$$s^2 + s^3 + 2s^4 + 3s^5 + \dots = s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \dots = Fib(s) - 1$$

$$Fib(s) = \frac{1}{1-s-s^2}$$

С производящими функциями можно проводить различные операции, например сложения, или перемножения, они обладают также рядом интересных свойств. Одним из наиболее привлекательных свойств производящих функций является их замкнутость относительно произведения Адамара. Произведением Адамара производящих функций

$A(s)$  и  $B(s)$  называется такая производящая функция  $AB(s)$ , которую можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} A(s) &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \\ B(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots \\ AB(s) &= a_0 b_0 + a_1 b_1 s + a_2 b_2 s^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.12}$$

Необходимость произведения Адамара появляется при перечислении пар объектов одинакового порядка. Бывают производящие функции от нескольких переменных. Производящие функции от двух переменных отвечают двух-индексным последовательностям. Такие последовательности записывают в виде треугольника, например треугольники Паскаля, Бернуlli - Эйлера, и др. Составляются и решаются дифференциальные уравнения на производящие функции. В заключение, приведем еще один известный в мультиплективной теории чисел пример, а именно – производящие функции Дирихле, и самая известная из них – дзета функция Римана:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \text{ ее производящая функция:}$$

$$\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots \tag{3.13}$$

Обратная функция для дзета-функции Римана, называется функцией Мебиуса (соответственно –  $\mu_n$  последовательность Мебиуса) и имеет вид:

$$M(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^s}, \quad \mu_n = \begin{cases} (-1)^t, & n \text{ - число простых делителей } t \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{3.14}$$

первый, ненулевой случай значений реализуется когда  $t_n$  – число простых делителей  $n$ , если в разложении  $n$  на простые множители нет повторяющихся множителей.

Для того, чтобы определить производящую функцию для *Бесселевых функций*, рассмотрим несколько функций. Ряд, сходящийся при всех значениях  $z$  и  $t$ :

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 + \frac{zt}{1! \cdot 2} + \frac{z^2 t^2}{2! \cdot 2^2} + \frac{z^3 t^3}{3! \cdot 2^3} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r t^r}{r! \cdot 2^r} \tag{3.14}$$

Исключим из рассмотрения точки  $t=0$ , тогда на оставной плоскости следующий ряд тоже можно считать сходящимся:

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 - \frac{zt^{-1}}{1! \cdot 2} + \frac{z^2 t^{-2}}{2! \cdot 2^2} - \frac{z^3 t^{-3}}{3! \cdot 2^3} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^s t^{-s}}{s! \cdot 2^s} \quad (3.15)$$

Два рассматриваемых уравнения (3.14, 3.15) умножим друг на друга так, чтобы левую часть умножить на левую, а правую часть – на правую. Перемножим эти два ряда, также и экспоненты в левых частях уравнений перемножаются простым образом. В результате (при  $t \neq 0$ ) получаем:

$$e^{\frac{z(t-t^{-1})}{2}} = \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r \cdot t^r}{r! \cdot 2^r} \right] \cdot \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^s \cdot t^{-s}}{s! \cdot 2^s} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^{r+s} \cdot t^{r-s}}{r! \cdot s! \cdot 2^{r+s}}$$

Полагаем  $r-s=n>0$ , если  $r-s>0$ , и также  $r-s=-n<0$ , если  $r-s<0$ , тогда определим коэффициент при  $t^n$  и  $t^{-n}$  следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot z^{2s+n}}{(n+s)! \cdot s! \cdot 2^{n+2s}} = J_n(z) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot z^{-n+2s}}{(-n+s)! \cdot s! \cdot 2^{-n+2s}} = J_{-n}(z) \quad (3.16)$$

(во второй формуле суммирование начинается только с  $s$ , равного  $n$ ). Замечаем также, что при  $t^0$  предыдущее соотношение упрощается:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot z^{2s}}{s! \cdot s! \cdot 2^{2s}} = J_0(z) \quad (3.16a)$$

В результате можно объединить ряды (3.16, 3.16a) в единый при всех  $t \neq 0$ , и тогда получим выражение для производящей функции  $\Phi(z,t)$  для функций Бесселя:

$$\Phi(z,t) = e^{\frac{z(t-t^{-1})}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \quad (3.17)$$

$\Phi(z,t)$  называется производящей функцией для функций Бесселя.

*Вывод рекуррентных формул для цилиндрических функций первого рода.*

Равенства, которые связывают 3 последовательные функции Бесселя, называются *рекуррентными соотношениями*:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \quad (3.18)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z) \quad (3.19)$$

Для доказательства справедливости этих соотношений, используем производящую функцию  $\Phi(z,t)$  и продифференцируем по  $t$  основное разложение из определения производящей функции.

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\frac{t-1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \cdot J_n(z) \quad (3.20a)$$

После дифференцирования предыдущего выражения (3.20a), получится следующее:

$$\frac{1}{2}z\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{1}{2}z\left(\frac{t-1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nt^{n-1} J_n(z) \quad (3.20,б)$$

Подставим в выражение (3.20,б) предыдущее, то есть заменим в левой части экспоненту соответствующим ей рядом из (3.20a), получим :

$$\frac{1}{2}z\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nt^{n-1} J_n(z) \quad (3.21)$$

Если выражение слева в (3.21) разложить по возрастающим степеням  $t$  и приравнять коэффициенты при  $t^{n-1}$  в обоих рядах Лорана в левой и правой частях, то получим для каждого  $n$  следующую повторяющуюся закономерность и собственно выражение (3.18):

$$\frac{1}{2}z\{J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)\} = nJ_n(z),$$

это и есть первое из рекуррентных соотношений. Теперь перейдем к доказательству второго соотношения (3.19). Продифференцировав опять основное соотношение производящей функции, но теперь по  $z$ , получим:

$$\frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{2}(t-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J'_n(z) \quad (3.22)$$

Отсюда аналогично предыдущей процедуре, заменяя в правой части экспоненту ее рядом согласно основному определению (3.17), получим:

$$\frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J'_n(z) \quad (3.23)$$

Сравнивая в последнем тождестве коэффициенты при  $t^n$  справа и слева в рядах Тейлора, получим окончательно второе рекуррентное соотношение (3.19):

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z)$$

Далее, складывая и вычитая рекуррентные соотношения (3.18 -3.19), получим еще одну дополнительную пару рекуррентных соотношений:

$$zJ'_n(z) + nJ_n(z) = zJ_{n-1}(z) \quad (3.24)$$

$$zJ'_n(z) - nJ_n(z) = -zJ_{n+1}(z) \quad (3.25)$$

Таким образом, полученные уравнения (3.18), (3.19), (3.24), и (3.25) представляют собой все известные рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Похожий вид имеют и системы из 4-х рекуррентных соотношений для других видов цилиндрических функций, которые будут рассматриваться далее.

На основе полученных соотношений легко вывести формулы для производных от функции Бесселя, покажем это. При  $n=0$  производная очевидна из определения (3.7), а также из соотношения (3.7a) получаем:

$$J'_0(z) = -J_1(z)$$

Из системы рекуррентных уравнений получаются формулы дифференцирования функции Бесселя:

$$\frac{d}{dz} \{ z^n \cdot J_n(z) \} = z^n \cdot J_{n-1}(z) \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dz} \{ z^{-n} \cdot J_n(z) \} = -z^{-n} \cdot J_{n+1}(z)$$

Легко показать еще несколько красивых и функциональных соотношений для функций Бесселя. Например, если в определении производящей функции  $\Phi(z, t)$  заменить  $t$  на  $-\frac{1}{t}$  тогда получим:

$$e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{t} + t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{-n} J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{-n}(z) \quad (3.27)$$

Отсюда на основе единственности разложения в ряд Лорана, получается следующее соотношение связывающее функции, имеющие положительные и отрицательные порядки :

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (3.28)$$

Далее полагаем в формуле для  $\Phi(z, t)$  следующую замену переменных в виде экспоненты угла  $\varphi$ :

$$t = e^{i\varphi}, \quad t^{-1} = e^{-i\varphi}, \quad \text{отсюда следует:}$$

$$t - t^{-1} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$$

Затем рассмотрим сумму двух функций:

$$\begin{aligned} J_n(z)t^n + J_{-n}(z)t^{-n} &= J_n(z) \left[ e^{i\varphi} + (-1)^n e^{-i\varphi} \right] = \\ &= \begin{cases} 2J_n(z)\cos n\varphi & , \text{при четном } n \\ 2iJ_n(z)\sin n\varphi & , \text{при нечетном } n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тогда формулу производящей функции можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} e^{z\sin \varphi} &= \cos(z\sin \varphi) + i \sin(z\sin \varphi) = J_0(z) + 2iJ_1(z)\sin \varphi + \\ &+ 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2iJ_3(z)\sin 3\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Поскольку действительные и мнимые части из обеих частей уравнения равны друг другу, таким образом доказывается разложение для функций синуса и косинуса по функциям Бесселя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(z \sin \varphi) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi + \dots = \\ \qquad \qquad \qquad = J_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\varphi \\ \sin(z \sin \varphi) = 2J_1(z)\sin \varphi + 2J_3(z)\sin 3\varphi + 2J_5(z)\sin 5\varphi + \dots = \\ \qquad \qquad \qquad = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\varphi \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Заменяя в (3.30)  $\varphi$  на дополнительный угол ( $\pi/2 - \varphi$ ), получаем другое соотношение:

$$e^{iz \cos \varphi} = \cos(z \cos \varphi) + i \sin(z \cos \varphi) = J_0(z) + 2iJ_1(z)\cos \varphi - 2J_2(z)\cos 2\varphi - \\ - 2iJ_3(z)\cos 3\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi + \dots$$

Следовательно, получаем другой возможный вариант разложения косинуса и синуса по функциям Бесселя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(z \cos \varphi) = J_0(z) - 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi - \dots = \\ \qquad \qquad \qquad = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos 2n\varphi \\ \sin(z \cos \varphi) = 2J_1(z)\cos \varphi - 2J_3(z)\cos 3\varphi + 2J_5(z)\cos 5\varphi - \dots = \\ \qquad \qquad \qquad = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\varphi \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Отсюда при  $\varphi = 2\pi$  получаются следующие формулы разложений тригонометрических функций в ряд по функциям Бесселя, часто приводимые в справочниках :

$$\begin{aligned} \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - 2J_6(z) + \dots \\ \sin z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + 2J_5(z) - \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

Если продифференцировать один раз второе из равенств (3.31) и два раза равенство (3.32) и положить затем  $\varphi = 0$  в первом из равенств (3.31), тогда

в результате получим разложения различных функций в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} z &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot J_{2n-1}(z) \\ z \cdot \sin z &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n)^2 \cdot J_{2n}(z) \\ z \cdot \cos z &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^2 \cdot J_{2n-1}(z) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Интересно, что единицу и любую константу также можно разложить по функциям Бесселя:

$$1 = J_0(z) + 2J_2(z) + 2J_4(z) + 2J_6(z) + \dots \quad (3.35)$$

### *Интегральные представления.*

Из последних формул разложений синуса и косинуса, легко получается интегральное представление функций Бесселя. Для доказательства, умножим левую и правую части первого уравнения из (3.23) на  $\cos m\varphi$  и проинтегрируем:

$$\underbrace{\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos(z \sin \varphi) d\varphi}_{3} = J_0(z) \underbrace{\int_0^{\pi} \cos m\varphi d\varphi}_{1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \underbrace{\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos 2n\varphi d\varphi}_{2} \quad (3.36)$$

В правой части интегралы вычисляются просто:

1.  $\int_0^{\pi} \cos m\varphi d\varphi = 0$
2.  $\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos 2n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетное} \\ \pi/2, & \text{если } m \text{ четное или } 0 \end{cases}$

В результате, интеграл в левой части соотношения (3.36) будет равен:

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cdot \cos(z \sin \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четное} \\ \pi J_m(z), & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases} \quad (3.37)$$

Рассмотрим второе из уравнений (3.31), аналогичные процедуры проводим и для другого интеграла, получим:

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \cdot \sin(z \sin \varphi) d\varphi = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \cdot \int_0^{\pi} \sin m\varphi \cdot \sin(2n-1)\varphi d\varphi \quad (3.38)$$

Интегралы в правой части легко вычисляются аналогично предыдущему случаю, получим:

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \cdot \sin(2n-1)\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 2n-1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = 2n-1 \end{cases}, \quad (3.39)$$

Объединив полученный результат интегрирования (3.39) с правой частью рассматриваемого уравнения (3.38), получаем следующий простой результат:

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \cdot \sin(z \sin \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четное} \\ \pi J_m(z), & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases} \quad (3.40)$$

Обе формулы (3.39 - 3.40) можно переписать в более наглядном виде, а потом сложить, эта процедура позволяет получить интегральное представление функции Бесселя.

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \cdot \sin(z \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot [1 - (-1)^m] J_m(z) \quad (3.41)$$

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cdot \cos(z \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot [1 + (-1)^m] J_m(z)$$

Сложение этих выражений дает известный *интеграл Бесселя*:

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi = \pi J_m(z) \quad (3.42)$$

Можно переписать это выражение в другом виде на основе четности косинуса и нечетности синуса:

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi \quad (3.43)$$

Справедлив следующий интеграл, также являющийся решением исходного уравнения Бесселя:

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\varphi - z \sin \varphi)} d\varphi \quad (3.43a)$$

Интегральное представление типа Пуассона для любого  $v$  имеет вид:

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) J_v(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \varphi) (\cos \varphi)^{2v} d\varphi \quad \operatorname{Re} v > -1/2 \quad (3.44)$$

Этот результат был доказан путем разложения  $\cos(z \cdot \sin \varphi)$  в ряд по степеням  $z$  и почлененного интегрирования. Обобщение интеграла Пуассоном было дано Ханкелем, одно из которых имеет вид:

$$2\pi i J_v(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{v+(-1,-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izt) (t^2 - 1)^{-1/2} dt \quad (3.44a)$$

Путем интегрирования здесь является восьмерка, огибающая точки  $\pm 1$  в комплексной плоскости  $t$ . В контурном интеграле Сонина интегрирование ведется по контуру, который идет из бесконечности вдоль прямой с фазой  $-\pi$ , обходит нулевую точку и возвращается на бесконечность вдоль прямой с фазой  $\pi$ :

$$J_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-v-1} \exp\left(\frac{z}{2}(t - t^{-1})\right) dt, \quad \operatorname{Re} v > -1, \quad c > 0, \quad z > 0 \quad (3.45)$$

При выводе этого соотношения была сделана замена переменных  $\zeta = \exp[i(\pi - \varphi)]$ . Наиболее известны также интегральные представления Шлефли, Гублера, Зоммерфельда и другие.

### Теорема сложения.

Из полученных формул, применяя аналогичный подход, легко доказать *теорему сложения* для цилиндрических функций. Она формулируется следующим образом:

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-l}(z_1) \cdot J_l(z_2) \quad (3.46)$$

Доказательство теоремы сложения проведем на основе производящей функции. Имеют место следующие соотношения:

$$e^{\frac{1}{2}(z_1+z_2)(t-t^{-1})} = e^{\frac{1}{2}z_1(t-t^{-1})} \cdot e^{\frac{1}{2}z_2(t-t^{-1})} \quad (3.47)$$

Из определения производящей функции  $\Phi(z_1 + z_2, t)$  имеем:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(z_1+z_2)(t-t^{-1})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) \cdot t^n \\ e^{\frac{1}{2}z_1(t-t^{-1})} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) \cdot t^k \quad ; \quad e^{\frac{1}{2}z_2(t-t^{-1})} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(z_2) \cdot t^l \end{aligned} \quad (3.48)$$

В результате сравнения соотношений (3.48) получим следующее:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) \cdot t^n = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) \cdot t^k \right] \cdot \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(z_2) \cdot t^l \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) \cdot J_l(z_2) \cdot t^{k+l} \quad (3.49)$$

Выбирая из двойной суммы (3.49) члены с  $t^n$ , т.е. полагаем  $k+l=n$  (или  $k=n-l$ ), получим искомую формулу теоремы сложения для цилиндрической функции целого порядка.

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-l}(z_1) \cdot J_l(z_2)$$

Теорема сложения доказана и формулируется полученной выше формулой. Известно много других интегральных представлений, приводимых в специальной литературе. При подходящем выборе контура интегрирования можно получить много изящных формул, выражающих функции Бесселя через определенные интегралы.

При замене вещественной переменной на комплексную - степенной ряд, определяющий функцию Бесселя, сходится в любой точке (кроме бесконечно-удаленной). При целых отрицательных порядках функции Бесселя отрицательные степени аргумента  $z$  заменяются на положительные на основе доказанного выше соотношения (3.28). Если  $v$  -

дробное, тогда  $z=0$  служит точкой ветвления для  $z^\nu$ , и следовательно – для функции Бесселя, так что эта функция перестает быть однозначной. Чтобы работать с однозначной функцией, делают разрез вдоль отрицательной части вещественной оси с запретом ее пересечений. Поэтому при не целом значении  $\nu$  следует обозначать поворот аргумента (например при замене функции  $J_\nu(-z)$  на  $J_\nu(z)$ ). Переход от  $-z$  к  $+z$  так чтобы не пресекать отрицательную ось может быть осуществлен поворотом на  $\pi$  или  $-\pi$ . В соответствии с этим при повороте в верхней или нижней полуплоскости, вместо соотношения (3.28) надо записать следующее:

$$J_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} J_\nu(z), \quad z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi \quad (3.50)$$

$$J_\nu(-z) = e^{-i\nu\pi} J_\nu(z), \quad z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < 0 \quad (3.51)$$

При вещественном  $z>0$   $\varphi=0$ . В случае если аргумент рассматривается на верхней полуплоскости, получаем из (3.50)  $J_\nu(-z)=\exp(i\nu\pi)J_\nu(z)$ , а если аргумент на нижней полуплоскости – тогда  $J_\nu(-z)=\exp(-i\nu\pi)J_\nu(z)$  из (3.51).

**Пример.** Уравнение теплопроводности для цилиндра, неустановившийся во времени процесс.

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.52)$$

здесь  $T(t)$  – температура,  $t$  – время, и радиус цилиндра  $0 \leq r \leq a$ ,  $\chi = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$ ,  $\text{м}^2/\text{сек}$  – коэффициент температуропроводности, где  $\lambda$  –

коэффициент теплопроводности материала,  $\rho$  – плотность среды,  $c_p$  – теплопроводность при постоянном давлении. Будем рассматривать центрально-симметричный случай, когда температура  $T(r, \varphi, z) = T(r)$  не зависит от азимутального угла  $\varphi$ , соответственно, вид Лапласиана и вид уравнения упрощаются. Также нет зависимости от координаты  $z$  бесконечного цилиндра.

Границные условия обычно задаются одним из вариантов:

- 1) Граничные условия 1-го рода – задача распределение температуры на поверхности.  $T_c = T(x, y, z, t)$  для каждого момента времени. В частности случае независимых от времени процессов – это постоянство температуры на поверхности  $T_c = \text{const}$ .
- 2) Граничное условие второго рода задается величинами постоянного теплового потока на цилиндрической поверхности  $q_n = q_0 = \text{const}$ .
- 3) В граничном условии 3-го рода задается температура окружающей среды  $T_1$  и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Согласно закону сохранения энергии, количество тепла, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени (в результате теплоотдачи) должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности тела в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела:

$$\alpha_T(T - T_1) = -\chi \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_c \Rightarrow \alpha_T \cdot T + \lambda \cdot T' = 0$$

$\alpha_T$  [вт\м²·град.] – коэффициент теплоотдачи,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности.

- 4) Граничные условия 4-го рода – равенство тепловых потоков через границу (или идеальный контакт)

$$\chi_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_c = \chi_2 \cdot \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_c$$

Зададим один из вариантов граничных условий. Например (1) – постоянную нулевую температуру на поверхности цилиндра:

$$T|_{r=a} = 0 \quad (3.53)$$

здесь  $r = a$ . Если температура поверхности не равна нулю, то ее можно свести к нулевой при замене переменных  $T_1 = T - T_0$ . Начальное условие задано некоторым начальным распределением температуры:

$$T = f(r) \quad \text{при } t = 0, \quad (3.54)$$

т.е. далее пойдет процесс охлаждения цилиндра. Будем искать решение методом разделения переменных:

$$T = e^{-\chi \alpha^2 t} \cdot u(r) \quad (3.55)$$

тогда после подстановки (3.55) в (3.52), получим уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0 \quad (3.56)$$

его общее решение имеет вид:

$$T(r,t) = A \cdot J_0(\alpha r) \cdot e^{-\chi \alpha^2 t} + B \cdot Y_0(\alpha r) \cdot e^{-\chi \alpha^2 t} \quad (3.57)$$

т.к.  $Y_0(\alpha r)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \infty$  на оси цилиндра, то константу  $B$  следует приравнять нулю. Решение уравнения теплопроводности в цилиндре имеет вид:

$$T = A \cdot J_0(\alpha r) \cdot e^{-\chi \alpha^2 t}, \quad (3.57a)$$

неизвестный коэффициент  $A$  следует найти из граничных условий. Из граничных условий (3.53) получаем уравнение:

$$J_0(\alpha \cdot a) = 0 \quad (3.58)$$

Это уравнение (нули функции Бесселя) имеет бесчисленное множество действительных положительных корней при значениях аргумента 2.4042; 5.52007; 8.65372; 11.79153..., где  $\alpha_1 \approx 2.4/a$ , и т.д. И каждому положительному корню соответствует отрицательный корень. Если функцию  $f(r)$  из начального условия (3.54) можно разложить в такой ряд:

$$f(r) = A_1 J_0(\alpha_1 r) + A_2 J_0(\alpha_2 r) + \dots \quad (3.59)$$

а любую кусочно-гладкую функцию можно разложить в ряд по функциям Бесселя, то такой ряд и будет решением нестационарной задачи охлаждения (и нагревания) цилиндра:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0(\alpha_n r) \cdot e^{-\chi \alpha_n^2 t} \quad (3.60)$$

Дальше, нужно найти неизвестные константы  $A_n$  ряда (3.59) из начального условия (3.54). Умножим обе части уравнения (3.59) на

$r \cdot J_0(\alpha_n r)$  и проинтегрируем от 0 до  $a$ , в левой части равенства (3.59) получим в силу ортогональности функций Бесселя (по определению ортогональности) при  $m = n$ :

$$\int_0^a r \cdot J_0(\alpha_m r) \cdot J_0(\alpha_n r) dr = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^a r \cdot J_0(\alpha_n r)^2 dr = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot [J'_0(\alpha_n a)]^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot J_1^2(\alpha_n a) \quad (3.61)$$

здесь использовано:  $J'_0(z) = -J_1(z)$ . В правой части из (3.59) после интегрирования, следует:

$$\int_0^a r \cdot f(r) \cdot J_0(r\alpha_n) dr = A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot J_1^2(\alpha_n \cdot a) \quad (3.62)$$

Объединив два последних соотношения, получаем выражение для  $A_n$ :

$$A_n = \frac{2}{a^2 \cdot J_1^2(\alpha_n a)} \cdot \int_0^a r \cdot f(r) \cdot J_0(r\alpha_n) dr \quad (3.63)$$

окончательно распределение температуры:

$$T(r, t) = \frac{2}{a^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi \alpha_n^2 t} \frac{J_0(\alpha_n r)}{J_1^2(\alpha_n a)} \cdot \int_0^a r f(r) J_0(r\alpha_n) dr \quad (3.64)$$

В частности, если  $f(r) = C = const$ , тогда формула упрощается:

$$\int_0^r r^{n+1} J_n(\alpha r) dr = \frac{1}{\alpha} r^{n+1} \cdot J_{n+1}(\alpha r)$$

$$T = \frac{2C}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi \alpha_n^2 t} \cdot \frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n \cdot J_1(\alpha_n a)} \quad (3.64a)$$

Таким образом, радиальное распределение температуры в остывающем цилиндре описывается суммой функций Бесселя нулевого порядка с коэффициентом, зависящим от начальной температуры  $C$  и радиуса цилиндра  $a$ . Во времени процесс остывания цилиндра определяется коэффициентом температуропроводности в экспоненте, который зависит от свойств материала.

#### IV. Цилиндрические функции.

Продолжим рассмотрение других известных цилиндрических уравнений. Итак, будем строить наши рассуждения из вида уравнения Бесселя, которое является дифференциальным уравнением второго порядка и должно иметь как минимум два независимых решения.

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - v^2) w = 0 \quad (4.1)$$

Рассмотрим другие решения этого уравнения. Раньше было показано, что имеет место равенство:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n \cdot J_n(z)$$

Пара функций  $J_v(z)$  и  $J_{-v}(z)$  образуют фундаментальную систему из двух линейно-независимых решений уравнения Бесселя, за исключением случая целых значений порядка  $v = n$ , так как в этом случае они связаны приведенным выше соотношением. Поэтому, в общем случае, будем искать второе решение уравнения, линейно-независимое от  $J_v(z)$ . Для нахождения второго независимого решения рассмотрим следующую функцию  $Y_v(z)$  и покажем что она является решением уравнения Бесселя вначале при любом  $v$ , исключая целые значения, а затем и при любом целом  $n$ :

$$Y_v(z) = \frac{J_v(z) - (-1)^n \cdot J_{-v}(z)}{v - n} \quad (4.2)$$

Простейшее рассмотрение при  $v \neq n$  приводит к заключению, что рассматриваемая функция  $Y_v(z)$  существует, отличается от функции Бесселя и может быть взята в качестве второго линейно-независимого решения исходного уравнения. Также покажем, что при  $v = n$  существует не равный нулю предел этого соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow n} \frac{J_v(z) - (-1)^n \cdot J_{-v}(z)}{v - n} &= \lim_{v \rightarrow n} \left[ \frac{J_v(z) - J_n(z)}{v - n} - (-1)^n \frac{J_{-v}(z) - J_{-n}(z)}{v - n} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поскольку обе частные производные существуют, то существует и искомый предел. Выражение (4.3) называется *цилиндрической функцией 2-го рода* и обозначается  $Y_n(z)$ .

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \left[ \frac{J_\nu(z) - (-1)^n J_{-\nu}(z)}{\nu - n} \right] \quad (4.4)$$

Второе определение  $Y_n(z)$  можно записать так:

$$Y_n(z) = \left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \quad (4.5)$$

Подставляя в  $Y_n(z)$  выражения в виде ряда *функции Бесселя* (также называемой *цилиндрической функцией 1-го рода*) можно получить выражение функции в виде ряда:

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & 2J_n(z) \left[ \ln \frac{z}{2} + c \right] - \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} - \\ & - \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left[ 2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+n} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отсюда видно в частности, что

$$\begin{aligned} Y_n(0) &\sim 2 \ln(z/2) \\ Y_0(0) &\sim 2/\pi d n(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Также отметим очевидные пределы:

$$Y_n(0) = -\infty \quad (4.8)$$

$$Y_0(0) = -\infty \quad (4.9)$$

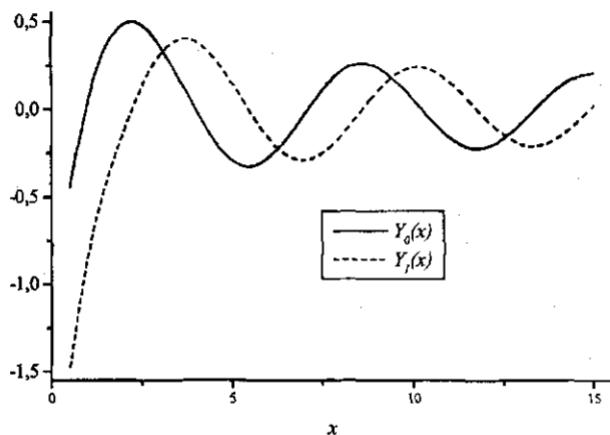


Рис.4.1. Цилиндрическая функция второго рода нулевого и первого порядков.

Функция Неймана также называется цилиндрической функцией 2-го рода, эта функция фактически является более широким понятием предыдущей и определяется следующим образом:

$$N_v(z) = \frac{J_v(z) \cdot \cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} \quad (4.10)$$

При целых  $v=n$  правая часть этого соотношения обращается в неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Применяя правило Лопитала, при  $v \rightarrow n$  можно

доказать существование этой функции при целых  $n$ , получим:

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} - (-1)^n \cdot \left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} \right\} \quad (4.11)$$

Из последнего соотношения следует более полное определение цилиндрической функции второго рода (4.10) во всей комплексной плоскости за исключением разреза вдоль отрицательной части действительной оси, имеющее тот же предел при целом  $v$  включая 0.

Для доказательства линейной независимости решений уравнения Бесселя, а именно цилиндрических функций первого и второго рода, вычислим определитель Вронского, составленный из этих функций; неравенство нулю определителя Вронского есть необходимое и достаточное условие для линейной независимости двух составляющих его решений. Вид определителя Вронского может быть получен следующим образом. Пусть  $w(x)$ ,  $f(x)$  – два произвольных решения уравнения Бесселя. Подставим эти функции последовательно в исходное уравнение (4.1), перемножим получающиеся два равенства на дополняющую функцию  $f(x)$  или  $w(x)$  соответственно, и вычтем первое равенство из второго, тогда получается следующее выражение:

$$x \cdot (f \cdot w'' - f'' \cdot w) + w' \cdot f - w \cdot f' = 0$$

Отсюда следует тождество:

$$(f \cdot w' - f' \cdot w)' = w'' \cdot f - w \cdot f''$$

Это уравнение можно переписать и в другом виде:

$$\frac{d(f \cdot w' - f' \cdot w)}{f \cdot w' - f' \cdot w} = -\frac{dx}{x}$$

После интегрирования получаем:

$$f \cdot w' - f' \cdot w = \frac{G}{x} \quad (4.12)$$

В левой части полученного соотношения (4.12) записано определение вронсиана, а в правой части константа  $G \neq 0$ , которая должна быть не равной нулю обязательно, если две рассмотренные функции линейно независимы.

Чтобы доказать пригодность функции Неймана в качестве второго независимого решения уравнения Бесселя, подсчитаем соответствующий определитель Вронского следующим образом:

$$\Delta[J_v(z), N_v(z)] = \begin{vmatrix} J_v(z) & N_v(z) \\ J'_v(z) & N'_v(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} J_v(z), & \frac{J_v(z)\cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} \\ J'_v(z) & \frac{J'_v(z)\cos v\pi - J'_{-v}(z)}{\sin v\pi} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin v\pi} \cdot \frac{2\sin v\pi}{\pi z} = \frac{2}{\pi z}$$

$$\Delta[J_v(z), N_v(z)] \neq 0$$
(4.13)

Поскольку определитель не равен нулю, то обе эти функции представляют собой пару линейно-независимых решений для уравнения Бесселя, и общее решение уравнения Бесселя может быть записано в виде:

$$W = c_1 \cdot J_v(z) + c_2 \cdot N_v(z), \quad (4.14)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - произвольные постоянные, которые определяются обычно из граничных условий физической задачи так, чтобы обеспечить непрерывность на границе двух областей для функций, описывающих решение в различных областях.

**Функции Ханкеля (или цилиндрические функции 3-го рода).**

Две функции Ханкеля, обозначаемые  $H_v^{(1)}$  и  $H_v^{(2)}$ , называются также **цилиндрическими функциями третьего рода** и определяются следующими соотношениями:

$$H_v^{(1)} = J_v(z) + iN_v(z) \quad H_v^{(2)} = J_v(z) - iN_v(z) \quad (4.15)$$

Доказательство линейно-независимой пары этих решений уравнения Бесселя можно легко показать, получив неравенство нулю определителей Вронского:

$$\Delta[H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z)] = -\frac{4i}{\pi z} \neq 0 \quad (4.16)$$

Доказательство других возможных вариантов полного решения можно также провести, подсчитав значения соответствующих определителей

Вронского. Ниже приводятся пары возможных линейно-независимых решений на основе подсчитанных соответствующих ненулевых значений определителей Вронского:

$$\Delta \left[ J_v(z), H_v^{(1)}(z) \right] = i \Delta \left[ J_v(z), N_v(z) \right] = \frac{2i}{\pi z} \quad (4.17)$$

$$\Delta \left[ J_v(z), H_v^{(2)}(z) \right] = -i \Delta \left[ J_v(z), N_v(z) \right] = -\frac{2i}{\pi z} \quad (4.18)$$

Функции Ханкеля также можно выразить через цилиндрические функции первого рода положительных и отрицательных порядков  $J_v(z)$  и  $J_{-v}(z)$  в виде следующих соотношений :

$$\begin{cases} H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + i \cdot \frac{J_v(z) \cdot \cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} = \frac{J_{-v}(z) - e^{-iv\pi} \cdot J_v(z)}{i \cdot \sin v\pi} \\ H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - i \cdot \frac{J_v(z) \cdot \cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} = \frac{-J_{-v}(z) + e^{iv\pi} \cdot J_v(z)}{i \cdot \sin v\pi} \end{cases} \quad (4.19)$$

при  $v \neq n$ .

Переход к пределу при целых индексах  $v \rightarrow n$  приводит к следующим определениям функций Ханкеля целых порядков на основе производных в этих случаях:

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + \frac{i}{\pi} \left[ \left[ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} \right] \\ H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - \frac{i}{\pi} \left[ \left[ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} \right] \end{cases} \quad (4.20)$$

Отметим следующие отличительные особенности функций Ханкеля, а именно их нулевые асимптотические значения для комплексного аргумента на бесконечности. Эти свойства часто бывают важны для приложений при описании затухающих электро-магнитных и других полей на бесконечности по радиальной координате в цилиндрической системе координат; такие функции позволяют правильно описывать физическую реальность в большинстве практических задач.

$H_v^{(1)}(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$  в секторе  $0 < \arg z < \pi$ ;

$$H_v^{(2)}(z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty \text{ в секторе } -\pi < \arg z < 0; \quad (4.21)$$

Отметим одну любопытную особенность: имеет место следующее соотношение:

$$J_v(z) = \frac{H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)}{2} \quad (4.22)$$

Легко видеть, что получающаяся формула (4.22) по виду представляет собой аналог формулы Эйлера для косинуса:

$$\cos \nu z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Рекуррентные соотношения, подробный вывод которых проводился в 3 разделе для функций Бесселя  $J_n(z)$ , для любых цилиндрических функций 1<sup>го</sup>, 2<sup>го</sup> или 3<sup>го</sup> рода имеют аналогичный вид. Поэтому часто применяют единую запись рекуррентных соотношений для любой из упомянутых функций, то есть  $G(z) = J_\nu(z)$ , или  $G(z) = Y_\nu(z)$ , или одной из цилиндрических функций Ханкеля  $H^{(1)}_\nu(z)$ ,  $H^{(2)}_\nu(z)$ .

*Рекуррентные соотношения имеют общий вид :*

$$\begin{aligned} G_{\nu-1}(z) + G_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} G_\nu(z) \\ G_{\nu-1}(z) - G_{\nu+1}(z) &= 2G'_\nu(z) , \\ G'_\nu(z) &= G_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} G_\nu(z) \\ G'_\nu(z) &= -G_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} G_\nu(z) \end{aligned} \quad (4.23)$$

*Функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной.*

В том случае, когда индекс уравнения Бесселя есть половина нечетного числа, решения уравнения Бесселя можно выразить через

элементарные функции. Рассмотрим сначала случай  $n=1/2$ . Согласно определению, получим:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma(v + \frac{3}{2})} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2v} \quad (4.24)$$

Используем выражение Гамма-функции:

$$\Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2v+1)}{2^{v+1}} \cdot \sqrt{\pi} \quad (4.25)$$

Подставив последнее выражение в предыдущее определение, получаем ряд в виде:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}+2v}}{v! 2^v \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2v+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2v} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \cdot x^{2v+1}}{(2v+1)!} \quad (4.26)$$

Видно, что ряд, получившийся в правой части выражения (4.26) является также разложением синуса в ряд Тейлора, тогда получаются следующие простые соотношения:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin(x) \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos(x) \quad (4.27)$$

С помощью формулы для вычисления производных от функций Бесселя, получаются аналогично выражения общего вида:

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}+n}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{n+1}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{\sin(x)}{x} \\ J_{-\frac{1}{2}+n}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{n+1}{2}} \frac{d^n}{(dx)^n} \frac{\cos(x)}{x} \end{aligned} \quad (4.28)$$

После выполнения дифференцирования в правой части этих соотношений, получим выражения в виде ряда Бесселя дробного порядка, их можно записать в виде следующих соотношений:

$$J_{\frac{1}{2}+n}(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cdot \left[ e^{xi} \cdot \sum_{v=0}^n \frac{(i)^{v-n-1} \cdot (n+v)!}{(v)! \cdot (n-v)! \cdot (2x)^v} + e^{-xi} \cdot \sum_{v=0}^n \frac{(-i)^{v-n-1} \cdot (n+v)!}{(v)! \cdot (n-v)! \cdot (2x)^v} \right] \quad (4.29)$$

Аналогично получаются формулы для функций Бесселя с отрицательными индексами  $J_{-(n+1/2)}(x)$ , а также и формулы для других цилиндрических функций. Забегая вперед, скажем что и для модифицированных функций Бесселя  $I_{\pm(n+1/2)}(x)$ ,  $K_{(n+1/2)}(x)$  выводятся аналогично соотношения (4.29), поскольку эти формулы выражаются через Бесселевы функции.

Функции Бесселя полу-целого порядка часто встречаются в связи с теорией сферических волн, поэтому распространенным названием для них также является следующее: «сферические функции Бесселя». Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя сводятся к линейным комбинациям элементарных функций тогда и только тогда, когда индекс этих функций – полу целое число.

### Модифицированные функции Бесселя

*Модифицированные функции Бесселя* являются решением модифицированного уравнения Бесселя, которое получается при замене в уравнении последнего знака - на + перед  $+v^2$ . Для того чтобы показать взаимосвязь и отличия в этих двух уравнениях - выписываем уравнение Бесселя в следующем общем виде:

$$z^2 w'' + z w' + (k^2 z^2 - v^2) w = 0 \quad (4.30)$$

(где  $k = \text{const}$ )

Введем замену аргумента  $kz = z_1$ , тогда получим уравнение Бесселя:

$$z_1^2 \frac{d^2 w}{dz_1^2} + z_1 \frac{dw}{dz_1} + (z_1^2 - v^2) w = 0 \quad (4.31)$$

Далее рассмотрим случай, когда константа  $k = i$  комплексная, тогда исходное уравнение (4.30) примет вид:

$$z^2 w'' + z w' - (z^2 + v^2) w = 0 \quad (4.32)$$

(4.32) – *модифицированное уравнение Бесселя*. Его решениями являются *модифицированные функции Бесселя* (*называемые также модифицированными цилиндрическими функциями*). Несмотря на похожие названия, графики и характер этих функций сильно отличаются, модифицированные функции Бесселя не являются осциллирующими, они плавно возрастают или спадают с изменением аргумента. Далее, мы будем

строить фундаментальное решения уравнения (4.32), для чего выпишем общее решение уравнения (4.30) в следующем виде :

$$w = c_1 \cdot J_v(iz) + c_2 \cdot N_v(iz), \quad (4.33)$$

Здесь запишем выражения функций в виде рядов:

$$J_v(iz) = i^v \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k} \quad (4.34)$$

$I_v$  - называется модифицированной цилиндрической функцией 1-го рода.  
Для нее, на основе предыдущего, справедливо представление:

$$I_v(z) = i^{-v} \cdot J_v(iz) = e^{\frac{v\pi i}{2}} \cdot J_v(iz) = e^{\frac{v\pi i}{2}} \cdot J_v\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right), \quad (4.35)$$

Функция определена при  $-\pi < \arg z < \pi/2$ . Справедлива также следующая запись:

$$I_v(z) = e^{\frac{3v\pi i}{2}} \cdot J_v\left(ze^{\frac{3v\pi i}{2}}\right) \quad (4.36)$$

Эта функция определена при  $\pi/2 < \arg z < \pi$ . Объединяя предыдущие выражения (4.34- 4.36), получим следующий ряд, который служит определением модифицированной функции Бесселя 1<sup>го</sup> рода:

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(v+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k} \quad (4.37)$$

Рассмотрим цилиндрическую функцию 2-го рода  $K_v(z)$  - (функция Макдональда). Рассмотрим ряд:

$$K_v(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{v\pi i}{2}} H_v^{(1)}(iz) \quad (4.38)$$

Выразим функции Ханкеля через функцию Бесселя, получим:

$$K_v(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{v\pi i}{2}} \frac{J_{-v}(iz) - e^{-v\pi i} \cdot J_v(iz)}{i \cdot \sin v\pi} = \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\frac{v\pi i}{2}} J_{-v}(iz) - e^{\frac{v\pi i}{2}} \cdot J_v(iz)}{\sin v\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-v}(z) - I_v(z)}{\sin v\pi} \quad (4.39)$$

Отсюда следует известное соотношение, определяющее равенство функций при изменении знака порядка :

$$K_{-v}(z) = K_v(z) \quad (4.40)$$

Переходя к пределу при  $v \rightarrow n$  и применяя правило Лопитала, получаем определение функции Макдональда через производные:

$$K_n(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial I_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} - \left[ \frac{\partial I_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} \right\} \quad (4.41)$$

Построим определитель Вронского, чтобы доказать линейную независимость  $K_v(z)$  и  $I_v(z)$ :

$$\Delta[I_v(z), K_v(z)] = \frac{\pi i}{2 \sin v\pi} \cdot \Delta[J_v(iz), J_{-v}(iz)] = -\frac{1}{z} \neq 0 \quad (4.42)$$

Следовательно, фундаментальную систему решений модифицированного уравнения Бесселя можно представить в виде:

$$w = c_1 \cdot I_v(z) + c_2 \cdot K_v(z) \quad (4.43)$$

где  $c_1, c_2$  - константы, определяемые из граничных условий. Из рядов можно получить следующие распространенные формулы, первая из которых аналогична ряду для  $J_0(z)$  с той лишь разницей что все знаки здесь положительны:

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 \quad (4.44)$$

$$K_0(z) = -I_0(z) \cdot \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) \quad (4.45)$$

Можно доказать, что интегральное представление для функции Макдональда имеет следующий вид:

$$K_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cdot [\ln(2z \sin^2 \theta) + C] d\theta \quad (4.46)$$

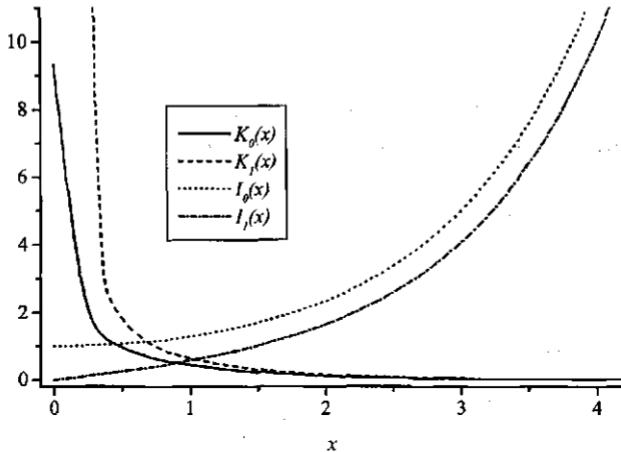


Рис.4.2. Модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

*Функции Кельвина:  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$ ,  $\text{ker } x$ ,  $\text{kei } x$*

Большой класс функций, часто встречающихся в электротехнике, имеют аргумент, фаза которого равна  $\frac{\pi}{4}$  или  $\frac{3\pi}{4}$ , этот комплексный аргумент  $t$  можно записать следующим образом, выразив его через действительный аргумент  $x$ .

$$t = \sqrt{i}x = e^{\frac{\pi i}{4}}x \quad (4.47)$$

Тогда для нулевого порядка получим следующий вид уравнения Бесселя из (4.30) при нулевом значении порядка  $v=0$ :

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - iw = 0 \quad (4.48)$$

Его решением являются функции Кельвина нулевого порядка, обозначаемые  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$ ,  $\text{kerg } x$ ,  $\text{keig } x$  определяемые следующим образом:

$$I_0(\sqrt{ix}) = \text{ber } x + i \text{bei } x \quad K_0(\sqrt{ix}) = \text{kerg } x + i \text{keig } x \quad (4.49)$$

Введём этот аргумент в ранее полученное соотношение (4.44), получим:

$$I_0(\sqrt{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \left( \frac{ix}{(2!)^2} \right)^{2k} = 1 + \frac{ix^2}{2^2} + \frac{i^2 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{i^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{i^4 x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \dots \quad (4.50)$$

Отсюда следуют определения функций Кельвина в виде рядов:

$$\text{ber } x = 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \quad (4.51)$$

$$\text{bei } x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots$$

Аналогично ряду (4.50), из формулы (4.45) получим:

$$\begin{aligned} K_0(\sqrt{ix}) &= -I_0(\sqrt{ix}) \cdot \left( \ln \frac{\sqrt{ix}}{2} + c \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left( \frac{\sqrt{ix}}{2} \right)^{2k} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) = \\ &= (\text{ber } x + i \text{bei } x) \cdot \left( \ln 2 - \frac{\pi i}{4} - \ln x - c \right) + \frac{ix^2}{2^2} + \frac{i^2 x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{i^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

Отсюда следуют определения для оставшихся двух функций Кельвина нулевого порядка:

$$\begin{aligned}\ker x &= \operatorname{ber} x \cdot (\ln 2 - \ln x - c) + \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{bei} x - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ \operatorname{kei} x &= \operatorname{bei} x \cdot (\ln 2 - \ln x - c) - \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ber} x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{i^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots\end{aligned}\quad (4.53)$$

Здесь порядок функции  $v = n = 0$ , традиционно нижний нулевой индекс обычно не пишется для этих функций. Связь функций  $\operatorname{ber} x$  и  $\operatorname{bei} x$  следует из соотношения (4.51) после умножения на  $x$  и интегрирования, получим ряд:

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots$$

После сравнения полученного ряда со вторым выражением (4.51) и получим следующие простые соотношения между этими функциями:

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x dx = x(\operatorname{bei} x)' \quad (4.54)$$

Аналогично, из второго соотношения (4.51) для  $\operatorname{bei}(x)$  после умножения на  $x$  и интегрирования, получим :

$$\int_0^x x \operatorname{bei} x dx = -x(\operatorname{ber} x)' \quad (4.55)$$

Используем аналогичную процедуру интегрирования и из соотношений (4.53) получим:

$$\int_0^x x \ker x dx = x(\operatorname{kei} x)' \quad (4.56)$$

$$\int_0^x x \operatorname{kei} x dx = -x(\operatorname{ker} x)' \quad (4.57)$$

Определены и другие аналогичные функции, например:

$$H_0^{(1)}(i\sqrt{x}) = \operatorname{her} x + i \cdot \operatorname{hei} x \quad (4.58)$$

Рассмотрим функции Кельвина для произвольного порядка  $v$ , они могут определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 J_v\left(e^{\frac{\pm 3\pi i}{4}} \cdot x\right) &= \text{ber}_v x \pm i \cdot \text{bei}_v x \\
 K_v\left(e^{\frac{\pm \pi i}{4}} \cdot x\right) &= \text{ker}_v x \pm i \cdot \text{kei}_v x \\
 H_v^{(0)}\left(e^{\frac{\pm 3\pi i}{4}} \cdot x\right) &= \text{her}_v x \pm i \cdot \text{hei}_v x
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

В книге М. Абрамович и И. Стиган «Справочник по специальным функциям» дается следующее обобщающее определение уравнения Кельвина, различных вариантов его общего решения  $W(x, v)$ , а также определения рядов функций Кельвина произвольного порядка. Уравнение Кельвина порядка  $v$  и его решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x^2 W'' + x W' - (ix^2 + v^2) W &= 0 \\
 W(x) = \text{ber}_v x + i \cdot \text{bei}_v x; \quad \text{ber}_{-v} x + i \cdot \text{bei}_{-v} x; \\
 \text{ker}_v x + i \cdot \text{kei}_v x; \quad \text{ker}_{-v} x + i \cdot \text{kei}_{-v} x
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Анализируя формулы для  $I_v(\sqrt{ix})$  и  $K_v\left(e^{\frac{\pi i}{4}} x\right) = K_v(\sqrt{ix})$  для первого порядка функций  $v = n = 1$  получим следующие простые и красивые соотношения:

$$\begin{aligned}
 \text{ker}_1 x + i \text{ker}_1 x &= K_1(\sqrt{ix}) - i\sqrt{i} \cdot K'_0(\sqrt{ix}) = i\sqrt{i} \left[ (\text{ker } x)' + i(\text{kei } x)' \right] \\
 \text{ber}_1 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\text{ber } x)' - (\text{bei } x)' \right] \quad \text{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\text{ber } x)' + (\text{bei } x)' \right] \\
 \text{ker}_1 x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\text{ker } x)' + (\text{kei } x)' \right] \quad \text{kei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\text{ker}_1 x)' - (\text{kei}_1 x)' \right]
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Общий вид рекуррентных соотношений функций Кельвина произвольного порядка отличается от рекуррентных отношений для функций Бесселя или модифицированных функций Бесселя, при необходимости эта информация должна привлекаться дополнительно из справочников и специальных книг.

## Преобразования уравнений к каноническому виду уравнений Бесселя.

Решение широкого класса уравнений может быть выражено через функции Бесселя. Для нахождения явного вида таких уравнений проведем замену переменных. Выпишем уравнение Бесселя, где  $W(x)$  – есть функция от действительной переменной и введем замену переменных:

$$x^2 w'' + xw' + (x^2 - n^2)w = 0$$

$$x = \gamma t^\beta, w = f \cdot t^\alpha$$

Здесь вычисление производных дает:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{t^{1-\beta}}{\beta \cdot \gamma} \cdot \frac{dw}{dt}, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{t^{1-\beta}}{\beta \cdot \gamma} \left( \frac{t^{1-\beta}}{\beta \cdot \gamma} \cdot \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1-\beta}{\beta \cdot \gamma} t^{-\beta} \frac{dw}{dt} \right)$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение Бесселя, далее выпишем первую (также и вторую) производные при замене  $w = f \cdot t^\alpha$ :

$$\frac{dw}{dt} = t^\alpha \cdot \frac{df}{dt} + \alpha \cdot t^{\alpha-1} \cdot f$$

и т.д. После подстановки всех преобразованных соотношений в исходное уравнение Бесселя, получим следующий его вид в новых переменных:

$$t^2 \cdot f'' + (2\alpha + 1) \cdot t \cdot f' + (\alpha^2 - \beta^2 n^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) \cdot f = 0 \quad (4.62)$$

Поскольку решением исходного уравнения Бесселя при нецелых индексах могло быть выбрано следующее:  $w = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ , поэтому общим решением полученного здесь уравнения вида (4.62) будет аналогичное но в новых переменных, на основе функций Бесселя:

$$f = t^\alpha w = C_1 \cdot t^\alpha \cdot J_\nu(\gamma t^\beta) + C_2 \cdot t^{-\alpha} \cdot J_{-\nu}(\gamma t^\beta) \quad (4.62a)$$

Полученное преобразованное уравнение (3.55) можно переписать еще более наглядно:

$$t^2 \cdot f'' + A \cdot t \cdot f' + (B + Ct^\lambda) \cdot f = 0 \quad (4.62b),$$

здесь постоянные A, B, C – легко можно получить из сравнения уравнений (4.62) и (4.62б). Таким образом, рассматривая конкретные параметры, входящие в эти уравнения, можно получить множество уравнений аналогичного вида по отношению к уравнению Бесселя и вытекающих из формул (4.62). Решения этих уравнений легко найти посредством соответствующей подстановки из общей формулы этих решений (4.62а). Приводим наиболее простые примеры различных уравнений, вытекающих из (4.62б).

1. При  $B=0$ ,  $\lambda=2$ ,  $A=2n+1$ , тогда получим  $\alpha=n$ ,  $\beta=\gamma=1$ , получаем уравнение следующего вида:

$$t \cdot f'' + (2n+1) \cdot f' + t \cdot f = 0 \quad (4.63)$$

2. При  $\alpha=n/2$ ,  $\beta=1/2$ ,  $\gamma=1$ , получается уравнение вида:

$$t \cdot f'' + (n+1) \cdot f' + \frac{1}{4} \cdot f = 0 \quad (4.64)$$

3. Пусть  $\alpha=-1/2$ ,  $\beta=\alpha=1/(2n)$ ,  $\gamma=2n \cdot (C)^{1/2}$ ,  $n=(\lambda+2)^{-1}$ , получается следующее уравнение:

$$t \cdot f'' + C \cdot t^{\lambda} \cdot f = 0 \quad (4.65)$$

Решение широкого класса таких уравнений может быть выражено через функции Бесселя посредством формулы (4.62а). Составлены подробные справочники по дифференциальным уравнениям, например: Полянин А.Д. и Зайцев В.Ф. «Справочник по линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям». Справочник, состоящий из двух томов, соответственно по линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям, содержит несколько тысяч различных уравнений первого, второго, третьего и более высоких порядков и их решения, или указания для подстановок, позволяющих упростить данное уравнение. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, коэффициенты которых зависят от произвольных функций.

*Пример. Распределение интенсивности тока высокой частоты в поперечном сечении цилиндрического проводника.*

Рассмотрим конкретный пример из области физики, а именно - распределение токов высокой частоты  $\omega$  в цилиндрическом проводнике. Уравнения Максвелла:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E = \operatorname{rot} H \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E \quad (4.66)$$

$\sigma$ - проводимость,  $\epsilon$ - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость среды  $\mu=1$  и  $c$  - скорость света в вакууме. Предположим синусоидальную зависимость от времени  $E$  и  $H$ :

$$E \rightarrow E(r, \varphi, z) e^{-i\omega t} \quad H \rightarrow H(r, \varphi, z) e^{-i\omega t} \quad (4.67)$$

Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$(4\pi\sigma - i\omega\epsilon)E = c \operatorname{rot} H \quad i\omega H = c \operatorname{rot} E \quad (4.68)$$

Вследствие тождества  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a) = 0$  на основании 1-го из этих уравнений, получим:

$$\operatorname{div} E = 0.$$

Поэтому, исключим из обоих уравнений (4.68)  $H$ :

$$\nabla^2 E = \frac{\omega i}{c^2} (4\pi\sigma - i\omega\epsilon) \cdot E \quad (4.69)$$

Далее введём вектор плотности тока  $j = s(r, \varphi, z) e^{-i\omega t}$ . Ток связан с вектором  $E$  соотношением:

$$j = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \quad (4.70)$$

Тогда для тока  $s$  аналогично (4.69) получим:

$$\nabla^2 s = \frac{4\pi\omega i}{c^2} s \quad (4.71)$$

Вектор  $s$  характеризует распределение токов внутри проводника.

Рассмотрим цилиндрический проводник. Предположим по условию возбуждения токов, что во всех поперечных сечениях ток имеет одинаковую величину и осевую симметрию (т.е. не зависит от  $z$  и  $\varphi$ ), и подчиняется уравнению Кельвина:

$$\frac{d^2 s_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds_z}{dr} - \beta^2 i S_z = 0 \quad , \quad (4.72)$$

$$\beta^2 = 4\pi\sigma\omega / c^2$$

На оси проводника  $r = 0$  ток не должен обращаться в  $\infty$ , поэтому 1-ое граничное условие  $s_{z=0} < \infty$ , диктует решение (4.72) с использованием только одной функции  $J_0(r\beta i \sqrt{i})$ :

$$s_z = A \cdot J_0(r\beta i \sqrt{i}) = A \cdot [\text{ber}(\beta r) + i \cdot \text{bei}(\beta r)] \quad (4.73)$$

Второе граничное условие сформулируем так, что считаем заданным ток на поверхности, то есть на внешнем радиусе проволоки  $r$  установившийся ток должен быть равен некоторой константе :

$$s_z \Big|_{r=a} = s_0 \quad (4.73)$$

что дает для коэффициента в общем решении (4.73) следующее выражение;

$$A = \frac{s_0}{J_0(a\beta i \sqrt{i})} \quad (4.74)$$

Тогда полное решение имеет следующий вид:

$$s_z = s_0 \cdot \frac{\text{ber}(\beta r) + i \text{bei}(\beta r)}{\text{ber}(\beta a) + i \text{bei}(\beta a)} \quad (4.75)$$

Отсюда найдём модуль выражения (4.75), эта формула собственно и описывает распределение тока по сечению проволоки в радиальном направлении:

$$\left| \frac{s_z}{s_0} \right| = \sqrt{\frac{\text{ber}^2(\beta r) + \text{bei}^2(\beta r)}{\text{ber}^2(\beta a) + \text{bei}^2(\beta a)}} \quad (4.76)$$

Проведем некоторые упрощающие преобразования. Имеется компактный ряд для полученного соотношения:

$$\text{ber}^2(x) + \text{bei}^2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4m}}{m!(2m)!} \quad (4.77)$$

Ряд быстро возрастает при  $x \rightarrow \infty$ , подкоренное выражение модуля тока – мало при  $r \rightarrow 0$ , но при  $r=a |s_z/s_0|$  стремится к 1. Увеличение частоты  $\omega$  повлечет убывание тока на оси проводника, то есть интенсивность высокочастотного сигнала локализована вблизи поверхности. На рис. 4.3 приводится наглядный, типичный результат расчета распределения интенсивности тока в поперечном сечении медного провода (диаметром 0.5 мм). Видно, что интенсивность тока существенно возрастает вблизи цилиндрической поверхности, и падает практически до нуля при частоте  $10^6$  Гц по сравнению с распространением тока с частотой  $10^5$  Гц.

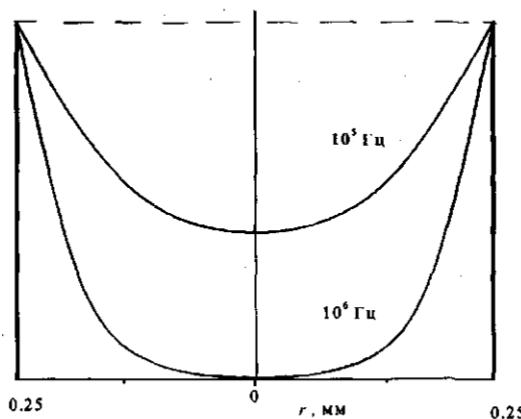


Рис.4.3 – Распределение интенсивности тока в поперечном сечении медного провода (диаметром 0.5 мм), возрастающая вблизи цилиндрической поверхности.

## V. Асимптотические разложения цилиндрических функций.

*Определение асимптотического разложения.* Пусть  $f(z)$  – функция действительной или комплексной переменной  $z$  и существует формальный степенной ряд, сходящийся или расходящийся и  $R_n(z)$  – разность между  $f(z)$  и  $n$ -й частичной суммой этого ряда, удовлетворяющие определению:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + R_n(z) \quad (5.1)$$

Если для каждого фиксированного  $n$  при  $z \rightarrow \infty$  в некоторой области, справедливо утверждение  $R_n(z) = O(z^{-n})$  (то есть отношение  $|f(z)/z^{-n}|$  – ограничено) тогда ряд  $\sum a_m z^{-m}$  является асимптотическим разложением функции  $f(z)$ . Определение асимптотического разложения записывается кратко следующим математическим символом:  $f(z) \sim \sum a_m z^{-m}$ . С асимптотическими разложениями можно проводить перечисленные ниже операции.

О1. Линейные комбинации из асимптотических разложений; пусть две функции  $f(z), g(z)$  имеют асимптотические разложения и областях  $F, G$  и существуют постоянные  $A, B$ , тогда справедливо следующее:

$$Af(z) + Bg(z) \sim \sum_0^{\infty} (A \cdot f_m + B \cdot g_m) z^{-m}, \quad (5.2)$$

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} f_m \cdot z^{-m}, \quad g(z) \sim \sum_0^{\infty} g_m \cdot z^{-m}$$

*FI G*     $z \rightarrow \infty$ .

О2. Справедливо перемножение асимптотических разложений:

$$f(z)g(z) \sim \sum_0^{\infty} h_m z^{-m} \quad (5.3)$$

$$h_m = f_0 g_m + f_1 g_{m-1} + f_2 g_{m-2} + \dots + f_m g_0$$

Для остаточных членов  $F_n(z)$ ,  $G_n(z)$ ,  $H_n(z)$   $n$ -ых частичных сумм разложений функций  $f(z)$ ,  $g(z)$ , и для функции  $f(z)$  и  $g(z)$  получается:

$$H_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f_m}{z^m} G_{n-m}(z) + g(z) F_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

О3. Асимптотические разложения можно делить друг на друга, поскольку справедливо:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_m}{z^m} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \quad (5.4)$$

$$f_0 k_m = -(f_1 k_{m-1} + f_2 k_{m-2} + \dots + f_m k_0), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$k_0 = 1/f_0, \quad k_1 = -f_1/f_0^2, \quad \dots$$

доказательство формулы (5.4) при  $f_0 \neq 0$ ,  $z \rightarrow \infty$  подтверждается следующим преобразованием:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f_0 + F_1(z)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{f_0^{m+1}} \left\{ \frac{f_1}{z} + \dots + \frac{f_{n-1}}{z^{n-1}} + F_n \right\}^m + \frac{(-1)^n \{F_1(z)\}^n}{f_0^n \{f_0 + F_1(z)\}} \quad (5.4a)$$

Здесь  $F_1(z) = O(z^{-1})$  и  $F_n(z) = O(z^{-n})$ .

О4. Асимптотические разложения можно интегрировать, а именно, выражение  $f(x) - f_0 - f_1 f'^{-1}$ , имеющее порядок  $O(t^2)$  – интегрируемо и дает в результате сходящиеся интегралы:

$$\int_x^\infty \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt \sim \frac{f_2}{x} + \frac{f_3}{2x^2} + \frac{f_4}{3x^3} + \dots \quad (5.5)$$

Если  $a$  – произвольное положительное число,  $x$  – действительная стремящаяся к бесконечности переменная, тогда интеграл будет иметь следующий вид:

$$\int_a^x f(t) dt = \left( \int_a^\infty - \int_x^\infty \right) \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt + f_0(x-a) + f_1 \ln \frac{x}{a} \sim$$

$$\sim A + f_0 x + f_1 \ln x - \frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{2x^2} - \frac{f_4}{3x^3} - \dots, \quad (5.5a)$$

$$A = \int_a^{\infty} \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt - f_0 a - f_1 \ln a$$

О5. Дифференцирование асимптотических разложений возможно не всегда. Дифференцирование допустимо, если производная  $f'(x)$  – непрерывная функция и ее асимптотическое разложение существует. Например, производная функции  $f=e^{-x}\sin(e^x)$  – осциллирует и поэтому не имеет асимптотического разложения. Другая система условий дифференцируемости гласит, что асимптотическое разложение  $f(z)$  можно дифференцировать сколько угодно раз строго в том-же секторе, где справедливо первоначальное разложение.

О6. Операция обращения возможна для действительных и комплексных переменных.

### *Разложение цилиндрических функций при больших значениях аргумента.*

Стандартное представление цилиндрических функций рядами по возрастающим степеням аргумента удобно использовать когда  $|z|$  – невелико по сравнению с номером порядка ряда  $\nu$ , поскольку для таких значений  $z$  ряды сходятся быстро. Но при большом  $|z|$  ряды сходятся медленно, так что рассмотрение их начальных членов не дает сколько-нибудь точного вычисления функции  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ . Поэтому, для больших  $z$  выведены отдельные формулы, отражающие характер поведения этих функций при больших значениях аргумента. Этот случай также разделяется на два варианта: 1-ый соответствует также большим порядкам ( $\nu$ - большое); 2-ой случай когда  $\nu$  – все остальные значения, тогда говорят что  $\nu$  фиксировано. Вывод асимптотических выражений проследим для разложения функций Ханкеля для больших  $|z|$ , когда  $\nu$  фиксировано. Возьмем интегральное представление функции Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{iu}{2z} \right)^{-\frac{1}{2}} du \quad (5.6)$$

справедливо при условиях:

$$-\frac{1}{2}\pi + \beta < \arg z < \frac{3}{2}\pi + \beta ; -\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi , R(\nu+1/2)>0 \quad (5.6a)$$

Множитель под интегралом в (5.6) разложим в биноминальный ряд:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i \cdot u}{2 \cdot z}\right)^{(\nu - \frac{1}{2})} &= 1 + \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \cdot i \cdot u}{2 \cdot z} + \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\nu - \frac{3}{2}\right) \cdot (i \cdot u)^2}{2 \cdot 4 \cdot z^2} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_m}{m!} \cdot \left(\frac{u}{2iz}\right)^m + \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_p}{(p-1)!} \cdot \left(\frac{u}{2iz}\right)^p \cdot \int_0^1 (1-t)^{p-1} \cdot \left(1 - \frac{ut}{2iz}\right)^{\nu-p-\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

Следует выбрать индекс частичного ряда  $p$  столь большим, чтобы остаток этого ряда  $R(\nu - p - \frac{1}{2}) \leq 0$ . Далее, проведем оценку интеграла-остатка  $R_p$  в формуле (5.6) для  $H_\nu^{(1)}(z)$ . Подставляя формулу (5.7) в (5.6) получим  $H_\nu^{(1)}(z)$  в виде 2-х слагаемых, второе из них – остаток  $R_p$ , содержащий интеграл. Оценим величину этого остатка и докажем, что он составляет малую величину  $O(z) \sim z^{-p}$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Для этого возьмем любой положительный острый угол  $\alpha$ , удовлетворяющий условию  $|\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow$ , из (5.6а) получим  $|\arg z - (\pi/2 + \beta)| \leq \pi - \alpha$ . Тогда из последнего условия (5.6а) получается условие  $-\pi + 2\alpha \leq \arg z \leq 2\pi - 2\alpha$ , которое при анализе по максимуму подынтегрального выражения из (5.7) получим следующую оценку для подынтегрального выражения из (5.6), которая дает для него величину  $A_p$  независящую от  $z$ :

$$\left| \left(1 - \frac{ut}{2iz}\right)^{\nu-p-\frac{3}{2}} \right| = \left| 1 - \frac{ut}{2iz} \right|^{\operatorname{Re} \nu - p - 3/2} \cdot e^{-\arg\left(1 - \frac{ut}{2iz}\right) \operatorname{Im} \nu} \leq (\sin \alpha)^{\operatorname{Re} \nu - p - 3/2} \cdot e^{|\operatorname{Im} \nu| \pi} = A_p \quad (5.8)$$

Здесь также была использована формула для преобразования комплексных чисел  $a, b$  :  $|a^b| = |a|^{\operatorname{Re} b} e^{-\operatorname{Im} b \arg a}$ . После подстановки

величины  $A_p$  в (5.6) вместо  $\left(1 - \frac{ut}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}}$ , и после почлененного интегрирования получается следующей ряд с остатком  $R_p$ :

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)} \left[ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(1/2-\nu)\Gamma(\nu+m+1/2)}{(2iz)^m m! \Gamma(\nu+1/2)} + R_p^{(1)} \right] \quad (5.9)$$

Окончательно проведем оценку остатка, чтобы доказать, что он достаточно малый  $\sim z^{-p}$ :

$$\begin{aligned} R_{\nu,p}(z) &\leq \frac{A_p}{(p-1)!} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_p}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \cdot (2iz)^p} \cdot \left[ \int_0^1 (1-t)^{p-1} \cdot \left(1 - \frac{ut}{2iz}\right)^{\nu-p-\frac{3}{2}} dt \cdot \int_0^\infty e^{-u} \left| u^{\nu+p-\frac{1}{2}} du \right| \right] \right| \\ &= B_p(\nu, p, \alpha) \cdot |z|^{-p} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Таким образом, доказано что остаток ряда (5.7) – малая величина и такой ряд может быть асимптотическим представлением функции  $H_\nu^{(1)}(z)$ , согласно определению, при больших значениях аргумента. Окончательно получим из (5.6) при  $|z| \rightarrow \infty$  формулу асимптотического представления функции Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cdot e^{i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_m \cdot \left(\frac{1}{2}+\nu\right)_m}{m! (2 \cdot i \cdot z)^m} + O(z^{-p}) \right] \quad (5.11)$$

Иногда получают асимптотическое выражение для функций Ханкеля через вспомогательную функцию  $\psi$ :

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{\Psi(\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right] \quad (5.12)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Psi(\nu, m)}{(2iz)^m}$$

Здесь сгруппирована гамма-функция в универсальный множитель  $\psi(v,m)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi(v,m) &= (-1)^m \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}-v\right)_m \cdot \left(\frac{1}{2}+v\right)_m}{m!} = \frac{\Gamma\left(v+m+\frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(v-m+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{(4v^2-1) \cdot (4v^2-3^2) \cdot \dots \cdot [4v^2 - (2m-1)^2]}{2^{2m} \cdot m!}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Выражая Бесселевы функции 1<sup>го</sup> и 2<sup>го</sup> рода через функции 3<sup>го</sup> рода на основе полученных ранее формул  $H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z)$ , или  $J_v(z) = \frac{1}{2} \{H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)\}$  получаются асимптотические выражения для других цилиндрических функций, справедливые при  $|\arg(z)| < \pi$ , например:

$$\begin{aligned}J_v(z) &\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Psi(v, 2m)}{(2z)^{2m}} - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Psi(v, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} \right]\end{aligned}$$

Выделив только один основной член ряда, имеющий наибольшую величину, из последнего соотношения следует известная формула:

$$J_v(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \cos(z - v\pi/2 - \pi/4) + e^{|Im(z)|} O(|z|^{-1}) \right\} \quad (5.14)$$

Аналогично изложенной выше процедуре получается асимптотическая формула для функции Бесселя второго рода:

$$Y_v(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \sin(z - v\pi/2 - \pi/4) + e^{|Im(z)|} O(|z|^{-1}) \right\} \quad (5.15)$$

Аналогично получают формулы для модифицированных функций Бесселя  $I(z)$ ,  $K(z)$ :

$$J_\nu(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\},$$

$(|\arg z| < \pi/2)$  (5.16)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot e^{-z} \left\{ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\},$$

$(|\arg z| < \frac{3\pi}{2})$  (5.17)

Большое значение в математике при различных вариантах асимптотических разложений придают остаткам. Например, асимптотические разложения в форме Адамара – это интегральные представления. Адамар получил результат большого теоретического значения, он показал, что можно так видоизменить различные асимптотические разложения, что они превращаются в сходящиеся ряды с остаточным членом, стремящимся к нулю. Исследования (Стильтьеса) остатков в асимптотических разложениях для ф-ий  $J_0(x)$ ,  $Y_0(x)$  и  $K_0(x)$  показали, что эти остатки численно меньше первых отброшенных членов и имеют тот же знак. Исследования этих остатков, различные оценки и результирующие неравенства для них представляют собой обширный класс исследований.

*Разложения для больших индексов  $\nu \rightarrow \infty$  для основных функций имеют вид:*

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left( \frac{ez}{2\nu} \right)^\nu \quad (5.18)$$

$$Y_\nu(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left( \frac{ez}{2\nu} \right)^{-\nu} \quad (5.19)$$

Покажем (докажем) – откуда собственно вытекает, например, соотношение (5.18). Будем исследовать уравнение Бесселя и искать его решение в виде:

$$J_\nu(\nu z) = \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \exp \left\{ \int_0^z u(z) dz \right\} \quad (5.20)$$

Уравнение Бесселя можно переписать в более удобном здесь виде:

$$z^2 \frac{d^2 J(\nu z)}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu(\nu z)}{dz} - \nu^2 (1-z^2) J_\nu(\nu z) = 0 \quad (5.21)$$

Представив решение (5.20) функцией  $u(z)$  из уравнения (5.21) получим, преобразовав:

$$z^2 [u'(z) + \{u(z)\}^2] + z \cdot u(z) - \nu^2 (1-z^2) = 0 \quad (5.22)$$

Предположим, что для больших  $\nu$  функцию  $u(z)$  можно разложить в ряд:

$$u(z) = \nu u_0 + u_1 + \frac{u_2}{\nu} + \frac{u_3}{\nu^2} + \dots, \quad (5.23)$$

где  $u_0, u_1, u_2, u_3$  - функции от  $z$ , не зависящие от  $\nu$ . Подставим ряд (5.23) в (5.22) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях  $\nu$ , получим:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}; \quad u_1 = \frac{z}{2(1-z^2)}; \quad u_2 = -\frac{4z+z^3}{8(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}; \\ u_3 &= \frac{4z+10z^3+z^5}{8(1-z^2)^4}; \quad u_4 = -\frac{64z+560z^3+456 \cdot z^5+25 \cdot z^7}{128(1-z^2)^{\frac{11}{2}}} \dots \end{aligned} \quad (5.24)$$

После интегрирования  $\int u(z) dz$  и подстановки ряда (5.23) в (5.20) вместе с найденными коэффициентами (5.24) и после нахождения интегралов, приходим к формуле Мейсселя:

$$J_\nu = \frac{(\nu z)^\nu}{e^\nu} \frac{\exp(\nu\sqrt{1-z^2}) \exp(-V_\nu)}{\Gamma(\nu+1)(1-z^2)^{\nu/4} \cdot \left\{1+\sqrt{1-z^2}\right\}} \quad (5.25a)$$

здесь функция  $V_\nu$  - сумма четырех главных членов асимптотического разложения, заведомо справедливого, когда  $z$  находится в пределах от 0 до 1 и  $\nu$  - большая величина. Формула (5.25a) после преобразований переводится в (5.25б).

$$J_\nu \sim \frac{z^\nu}{\sqrt{(2\pi\nu)}} \frac{\exp\left(\nu\sqrt{1-z^2}\right)}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left\{1+\sqrt{1-z^2}\right\}} \quad (5.206)$$

Отсюда очевидно соотношение (5.18) после дальнейших упрощений, аналогично получается и ряд других представлений.

### *Интеграл Эйри и функции Эйри.*

Асимптотические представления функций Бесселя выражаются посредством функций Эйри в переходных областях, то есть средних значений аргумента, и при достаточно больших значениях порядка, которые в частности могут быть равны значению аргумента. Мы рассматривали ранее, и в специальных справочниках обычно для каждой специальной функции приводятся отдельные формулы для малых и больших аргументов, отличающиеся от рядов общего вида, и многие другие варианты представления данной функции. Однако значение для практики специальных формул в промежуточных областях аргументов и порядков очень велико, именно такими часто выступают функции Эйри для цилиндрических функций. Дополнительное достоинство функций Эйри - очень простой вид уравнения Эйри, решениями которого они являются.

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида – *уравнение Эйри*:

$$\frac{d^2\varpi}{dz^2} - z\varpi = 0 \quad (5.21)$$

Это уравнение можно привести к дифференциальному уравнению, которому удовлетворяют цилиндрические функции порядка 1/3, комбинации которых образуют функции Эйри. Линейно независимыми решениями, удовлетворяющими уравнению (5.21), являются *функции Эйри первого и второго вида* соответственно:

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{3} z^{1/2} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}(\zeta), \\ Bi(z) &= \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь и далее использованы обозначения:  $\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}$ ,  $\omega = e^{2\pi i/3}$ .

Непосредственное вычисление вронскиана приводит к равенству, подтверждающему линейную независимость функций  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$ , представляющих собой фундаментальную систему решений уравнений Эйри.

$$Ai(z)Bi'(z) - Ai'(z)Bi(z) = \pi^{-1} \quad (5.23)$$

Справедливы также следующие формулы-представления:

$$\begin{aligned} Ai(-z) &= \frac{1}{3} z^{1/2} [J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)] \\ Bi(z) &= \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Интеграл Эйри определяется для действительных значений аргумента следующей формулой:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt \quad (5.25a)$$

Хотя подынтегральное выражение не убывает при  $x \rightarrow \infty$ , возрастающая частота его осцилляций обеспечивает сходимость интеграла. Доказательство этого факта следует из интегрирования по частям:

$$\int \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt = \frac{\sin(t^3/3 + xt)}{t^2 + x} + 2 \int \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) \frac{tdt}{(t^2 + x^2)^2}$$

В правой части этого выражения, первое слагаемое стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , также интеграл сходится абсолютно. Когда аргумент комплексный – интеграл не является сходящимся, и чтобы аналитически продолжить  $Ai$  в комплексную плоскость – интеграл преобразовывают в контурный с последующим его анализом. При вещественных значениях  $x$  справедливо также следующее интегральное представление:

$$Bi(x) = \pi^{-1} \int_0^\infty \left[ \exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt \quad (5.25b)$$

Эти интегральные представления могут быть преобразованы в интегральные представления, которые содержат контурные интегралы и справедливы при комплексных значениях аргумента.

Функция  $Ai(z)$  имеет бесконечно много нулей поскольку имеет осциллирующую природу, причем доказано, что все нули этой функции вещественны и отрицательны. Для любого целого  $m$  и  $\omega = e^{2\pi i/3}$  функция  $\varpi_m(z) = Ai(\omega^m z)$  также является решением уравнения (5.21). Непосредственное вычисление такого Вронскиана показывает, что он не равен нулю:

$$\varpi_m(z)\varpi'_k(z) - \varpi'_m(z)\varpi_k(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(m-k)}{3} \exp \left[ i\pi \frac{m+k}{3} + \frac{1}{2} \right]. \quad (5.26)$$

Отсюда вытекает, что функции  $\varpi_m$  и  $\varpi_{m+1}$  линейно независимы. С другой стороны, любые три из указанных функций связаны линейной зависимостью, в частности:

$$\varpi_m(z) + \omega\varpi_{m+1}(z) + \omega^2\varpi_{m+2}(z) = 0. \quad (5.27)$$

Далее, можно показать что имеет место соотношение:

$$Bi(z) = i[\omega^2 Ai(\omega^2 z) - \omega Ai(\omega z)]. \quad (5.28)$$

Разложения функций  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  в степенные ряды вытекают из определений, то есть из равенства (5.22). В частности, для нулевого аргумента эти функции равны следующим числам:

$$\begin{aligned} 3^{2/3} Ai(0) &= 3^{1/6} Bi(0) = \frac{1}{\Gamma(2/3)}, \\ -3^{1/3} Ai'(0) &= 3^{-1/6} Bi'(0) = \frac{1}{\Gamma(1/3)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Справедливы для действительного аргумента при его замене  $x$  на  $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$  следующие формулы:

$$Ai(x) = \pi^{-1} \left( \frac{1}{3}x \right)^{1/2} K_{1/3}(\xi), \quad Ai'(x) = -\pi^{-1} 3^{-1/2} x K_{2/3}(\xi)$$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-x) &= \frac{1}{3} x^{1/2} \{J_{1/3}(\xi) + J_{-1/3}(\xi)\} = \left(\frac{1}{3} x\right)^{1/2} \operatorname{Re} \left\{e^{\pi i/6} H_{1/3}^{(0)}(\xi)\right\} \\ \text{Ai}'(-x) &= \frac{1}{3} x \{J_{2/3}(\xi) + J_{-2/3}(\xi)\} = 3^{-1/2} x \operatorname{Re} \left\{e^{-\pi i/6} H_{2/3}^{(0)}(\xi)\right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Bi}(x) &= \left(\frac{1}{3} x\right)^{1/2} \{I_{1/3}(\xi) + I_{-1/3}(\xi)\} = \left(\frac{1}{3} x\right)^{1/2} \operatorname{Re} \left\{e^{\pi i/6} H_{1/3}^{(0)}(-i\xi)\right\} \\ \text{Bi}'(x) &= 3^{-1/2} x \{I_{2/3}(\xi) + I_{-2/3}(\xi)\} = 3^{-1/2} x \operatorname{Re} \left\{e^{\pi i/3} H_{2/3}^{(0)}(-i\xi)\right\} \\ \text{Bi}(-x) &= \left(\frac{1}{3} x\right)^{1/2} \{J_{-1/3}(\xi) - J_{1/3}(\xi)\} = -\left(\frac{1}{3} x\right)^{1/2} \operatorname{Im} \left\{e^{\pi i/6} H_{1/3}^{(0)}(\xi)\right\} \\ \text{Bi}'(-x) &= 3^{-1/2} x \{J_{-2/3}(\xi) + J_{2/3}(\xi)\} = -3^{-1/2} x \operatorname{Im} \left\{e^{-\pi i/6} H_{2/3}^{(0)}(\xi)\right\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Асимптотическое поведение функции  $Ai(z)$  при больших значениях аргумента имеет вид:

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \\ z \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg z < \pi. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Результаты, имеющие место в секторах, содержащих отрицательную полуось, могут быть получены с помощью формулы (5.27). Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} \{e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})] + ie^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})]\} \\ z \rightarrow \infty, \quad \pi/3 < \arg z < 5\pi/3; \\ Ai(z) &= \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} \{e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})] - ie^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})]\} \\ z \rightarrow \infty, \quad -5\pi/3 < \arg z < -\pi/3. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Из равенства (5.28) вытекает асимптотическая формула для функции Эйри второго рода:

$$\begin{aligned} Bi(z) &= \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \\ z \rightarrow \infty, \quad -\pi/3 < \arg z < \pi/3. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Все асимптотические представления рядами выполняются равномерно по  $\arg z$ , если  $z$  изменяется в замкнутых секторах, целиком расположенных внутри указанных выше открытых секторов. Для больших действительных

аргументов при замене  $x$  на  $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$  справедливы более точные формулы:

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{1/2}x^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_s}{\xi^s}, \quad \text{Ai}'(x) \sim \frac{x^{1/4}e^{-\xi}}{2\pi^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{v_s}{\xi^s} \quad (5.35)$$

$$\text{Ai}(-x) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \left\{ \cos(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \sin(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} \right\}$$

$$\text{Ai}'(-x) \sim \frac{x^{1/4}}{\pi^{1/2}} \left\{ \sin(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} - \cos(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} \right\} :$$

$$u_0 = v_0 = 1, \quad u_s = \frac{(2s+1)(2s+3)(2s+5)\dots(6s-1)}{(216)^s s!}, \quad v_s = -\frac{6s+1}{6s-1} u_s \quad (s \geq 1).$$

$$\text{Bi}(x) \sim \frac{e^\xi}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{\xi^s}, \quad \text{Bi}'(x) \sim \frac{x^{1/4}e^\xi}{\pi^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v_s}{\xi^s} \quad (5.36)$$

$$\text{Bi}(-x) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \left\{ -\sin(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \cos(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} \right\}$$

$$\text{Bi}'(-x) \sim \frac{x^{1/4}}{\pi^{1/2}} \left\{ \cos(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \sin(\xi - \frac{1}{4}\pi) \sum_{s=0}^{\infty} (-)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} \right\}$$

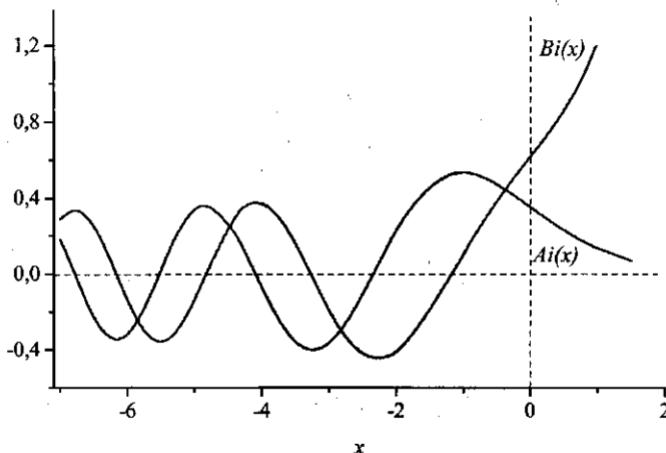


Рис. 5.1 Функции Эйри  $Ai(x)$ ,  $Bi(x)$  действительного аргумента.

*Выражение специальной функции через ее модуль и фазу.*

Для удобного представления, например, функции  $Ai(x)$  или  $Bi(x)$  в широкой области реальных аргументов  $x$ , удобно использовать *модуль функции*  $M(x)$ , *фазу функции*  $\theta(x)$ , также иногда вводится вес функции  $E(x)$ , они связаны соотношениями:

$$E(x)Ai(x) = M((x)\sin\theta(x)), \quad E^{-1}(x)Bi(x) = M((x)\cos\theta(x)) \quad (5.37)$$

$$E^{-1}(x) = 1/E(x).$$

Можно выделить модуль и фазу посредством следующих соотношений:

$$M(x) = \left\{ E^2(x)Ai^2(x) + E^{-2}(x)Bi^2(x) \right\}^{1/2} \quad (5.38)$$

$$\theta(x) = \tan^{-1} \left\{ E^2(x)Ai(x)/Bi(x) \right\}$$

Величина  $E(x)$  выбирается различной в зависимости от значений аргумента, пограничной точкой здесь служит наименьший по абсолютной величине отрицательный корень ( $x = c = -0.36605$ ) уравнения:

$$\text{Ai}(x) = \text{Bi}(x) \quad (5.39)$$

Тогда  $E(x)$  определяется следующим образом:

$$E(x) = \{\text{Bi}(x)/\text{Ai}(x)\}^{1/2}, \quad (c \leq x < \infty), \quad E(x) = 1, \quad (-\infty < x \leq c) \quad (5.40)$$

С помощью определений (5.40) соотношения (5.38) приобретают следующий конкретный вид:

$$M(x) = \{2\text{Ai}(x)\text{Bi}(x)\}^{1/2}, \quad \theta(x) = \frac{1}{4}\pi, \quad (x \geq c) \quad (5.41)$$

$$M(x) = \{\text{Ai}^2(x) + \text{Bi}^2(x)\}^{1/2}, \quad \theta(x) = \tan^{-1}\{\text{Ai}(x)/\text{Bi}(x)\}, \quad (x \leq c)$$

Асимптотические значения модуля, аргумента и веса имеют простой вид:

$$E(x) \approx 2^{1/2} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad M(x) \approx \pi^{-1/2}x^{-1/4}, \quad x \rightarrow \infty \quad (5.42)$$

$$M(x) \approx \pi^{-1/2}(-x)^{-1/4}, \quad \theta(x) = \frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{1}{4}\pi + O(|x|^{-3/2}), \quad x \rightarrow -\infty$$

### Решения неоднородных уравнения типа уравнения Бесселя.

Рассмотрим неоднородное уравнение общего вида:

$$w^2 + f(z)w' + g(z)w = z^\alpha e^{\beta z} p(z) \quad (5.43)$$

здесь  $\alpha, \beta$  - действительные или комплексные постоянные;  $f(z), g(z)$ ,  $p(z)$  - аналитические функции комплексной переменной  $z$ , имеющие сходящиеся разложения:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s}, \quad p(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{p_s}{z^s} \quad (5.44)$$

Общее решение уравнения (5.43) имеет вид:

$$w(z) = Aw_1(z) + Bw_2(z) + W(z) \quad (5.45)$$

$A$ ,  $B$  - произвольные постоянные,  $w_1(z), w_2(z)$  - независимые решения однородного дифференциального уравнения,  $W(z)$  - частное решение (5.43), для которого покажем построение асимптотического приближения. Заменой  $w = e^{\beta z} v$  исходное уравнение приводится к следующему виду, в правой части которого отсутствует экспоненциальный множитель:

$$v'' + \{f(z) + 2\beta\}v' + \{g(z) + \beta f(z) + \beta^2\}v = z^\alpha p(z)$$

Поэтому без потери общности можно ограничиться изучением следующего уравнения, для которого функции  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $p(z)$  - имеют разложения (5.44).

$$w'' + f(z)w' + g(z)w = z^\alpha p(z) \quad (5.46)$$

Подставляя в (5.46) решение в виде  $w = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}$  и затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента, получим:

$$g_0 a_s + \sum_{j=1}^s \{g_j + f_{j-1}(\alpha - s + j)\} a_{s-j} + (\alpha - s + 2)(\alpha - s + 1) a_{s-2} = p_s \quad (5.47)$$

при  $s = 0, 1, K$  и при  $g_0 \neq 0$  коэффициенты  $a_s$  определяются из предыдущего, в частности:

$$a_0 = g_0^{-1} p_0, \quad a_1 = g_0^{-1} p_1 - g_0^{-2} p_0 (g_1 + \alpha f_0), \dots \quad (5.48)$$

Чтобы исследовать возможную асимптотическую природу найденного решения, построим дифференциальное решение для  $n$ -ой частичной суммы в предположении, что каждая из функций  $F_n(z)$ ,  $G_n(z)$  и  $P_n(z)$  - ограничена в замкнутой области для любого  $b > a$ , для которого  $|z| \geq b$ :

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} + \frac{F_n(z)}{z^n}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{g_s}{z^s} + \frac{G_n(z)}{z^n}, \quad p(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{z^s} + \frac{P_n(z)}{z^n}. \quad (5.49)$$

$n = 0, 1, K$

Введем обозначение частичной суммы  $L_n(z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s}$ , и после подстановки ее наряду в функции (5.49) и в уравнение (5.46), приходим к преобразованному уравнению, содержащему остаток  $R(z)$ :

$$L_n''(z) + f(z)L_n'(z) + g(z)L_n(z) - z^\alpha p(z) = z^\alpha R_n(z) \quad (5.50)$$

Остаток определен в уравнении (5.50) следующими соотношениями при  $n \geq 1$  и ограничен:

$$\begin{aligned} R_n(z) &= -\frac{g_0 a_n}{z^n} + \frac{\hat{R}_{n+1}(z)}{z^{n+1}} \\ \hat{R}_{n-1}(z) &= (\alpha - n)(\alpha - n + 1)a_{n-1} - P_{n+1}(z) + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \{(\alpha - s)F_{n-s}(z) + G_{n+1-s}(z)\} \\ |R_n(z)| &\leq \frac{|g_0 a_n|}{|z|^n} + \frac{n r_{n+1}}{|z|^{n+1}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Величина  $r_{n+1}$  конечна и определена следующим равенством:  
 $r_{n+1} = n^{-1} \sup_{z \in B} |\hat{R}_{n+1}(z)|$ .

Теперь исследуемое частное решение уравнения можно представить в виде суммы первоначального ряда и остатка  $\varepsilon$ :

$$W_{n-1}(z) = L_n(z) + \varepsilon_n(z) \quad (5.52)$$

После подстановки этого решения в уравнение, исключая (5.50), получаем, что остаточный член удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon_n''(z) + f(z)\varepsilon_n'(z) + g(z)\varepsilon_n(z) = -z^\alpha R_n(z) \quad (5.53)$$

Методом вариации постоянных, получается решение уравнения (5.53) в виде:

$$\varepsilon_n(z) = w_2(z)I_n^{(1)}(z) - w_1(z)I_n^{(2)}(z) \quad (5.54)$$

Здесь решения однородного уравнения  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$ , и их Вронскиан обозначим  $\aleph$ . Интегралы в решении (5.54) находятся следующим образом:

$$I_n^j(z) = \int_z^\infty \frac{w_j(t)t^\alpha R_n(t)}{\aleph(t)} dt \quad (j=1,2) \quad (5.55)$$

Таким образом, окончательно, частное решение неоднородного уравнения на основе (5.52-5.55) записывается в виде, где  $A_1$  и  $A_2$  – произвольные удаленные точки, принадлежащие выбранной области рассмотрения:

$$\varepsilon_n(z) = \frac{w_2(z)}{z^{2n}\aleph(z)} \int_z^{A_1} w_1(t)t^\alpha R_n(t)dt - \frac{w_1(z)}{z^{2n}\aleph(z)} \int_z^{A_2} w_2(t)t^\alpha R_n(t)dt \quad (5.56)$$

В частности, для неоднородного модифицированного уравнения Бесселя (5.57), вронскиан решений однородного уравнения ( $I(z)$ ,  $K(z)$ ) – равен  $1/vz$ , поэтому частное решение (5.52) и его интегральное слагаемое имеет вид:

$$\varepsilon_n(v, z) = \frac{K_v(z)}{v^{2n-m}} \int_0^z \frac{1+t^2}{t} R_n(t) I_v(t) dt + \frac{I_v(z)}{v^{2n-m}} \int_z^\infty \frac{1+t^2}{t} R_n(t) K_v(t) dt \quad (5.57)$$

Для неоднородного уравнения Бесселя с правой частью общего вида  $f(z)$  его частное решение может быть записано в виде:

$$\varepsilon_n(v, z) = \frac{\pi Y_v(z)}{2} \int_0^z t f(t) J_v(t) dt + \frac{\pi J_v(z)}{2} \int_z^\infty t f(t) Y_v(t) dt \quad (5.58)$$

### Уравнение и функция Струве.

Один частный вид неоднородного уравнения Бесселя называется уравнением Струве:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) w = \frac{(z/2)^{v-1}}{\pi^{1/2} \Gamma(v+1/2)} \quad (5.59)$$

Общим решением его является следующее:

$$w = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) + H_\nu(z)$$

Здесь функция Струве определяется рядом:

$$H_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z^2/4)^s}{\Gamma(s+3/2)\Gamma(\nu+s+3/2)} \quad (5.60)$$

Этот ряд сходится при всех конечных  $z$ . В частности:

$$H_0(z) = \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_{2s+1}(z)}{2s+1}, \quad H_\nu(z) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} J_0(z) + \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_{2s}(z)}{4s^2 - 1} \quad (5.61)$$

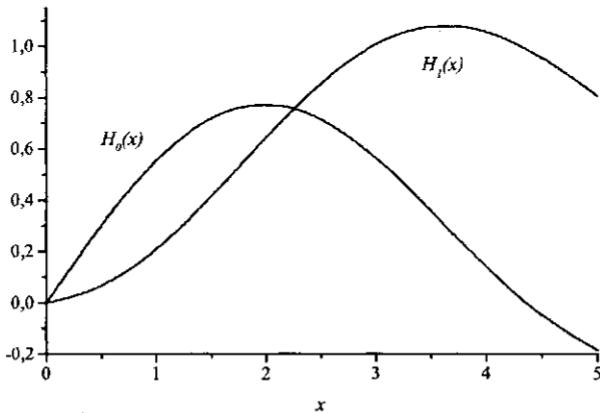


Рис. 5.2. Функции Струве  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ .

## VI. Разложения функций в ряды Фурье-Бесселя, Дини, Шлемильха, Каптейна, Неймана.

*Ортогональность функций.* Рассмотрим уравнение Бесселя и преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y') + \left( \frac{k^2}{l^2} \cdot x - \frac{\nu^2}{x} \right) \cdot y = 0 \quad (6.1)$$

здесь  $\nu, x, y$  - считаем вещественными. Представим решения уравнения (6.1) в виде:

$$J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \text{ и } J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \text{ при } k = k_1 \text{ и } k = k_2. \quad (6.2)$$

Тогда из (5.1) справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nu^2}{x} - \frac{k_1^2}{l^2}x \right) \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) &= \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \right] \\ \left( \frac{\nu^2}{x} - \frac{k_2^2}{l^2}x \right) \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) &= \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Первое равенство из (6.3) умножим на  $J_\nu(k_2 x / l)$ , а второе - на  $J_\nu(k_1 x / l)$ ;

вычтем первое из второго и результат проинтегрируем от 0 до  $l$ , ( $l > 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{k_1^2 - k_2^2}{l^2} \int_0^l x \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) dx &= \\ = \int_0^l \left\{ J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} \left[ x \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \right] - J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} \left[ x \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \right] \right\} dx &= \\ = \int_0^l \frac{d}{dx} \left[ x \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) - x \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \right] dx &= \\ = \left[ x \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) - x \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \cdot \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \right]_0^l &= \\ = \left[ \frac{k_2}{l} \cdot x \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J'_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) - \frac{k_1}{l} \cdot x \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) \cdot J'_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \right]_0^l & \end{aligned} \quad (6.4)$$

Окончательно из соотношения (6.4) получим:

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{l^2} \int_0^l x \cdot J_v\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J_v'\left(\frac{k_2}{l}x\right) dx = k_2 \cdot J_v(k_1) \cdot J_v'(k_2) - k_1 \cdot J_v(k_2) \cdot J_v'(k_1)$$
(6.5)

Из этого соотношения вытекает, что цилиндрические функции первого рода не имеют комплексных корней. Действительно если бы  $k_1 = a + ib$  был корень функции  $J_v(x)$ , то из вида ряда функции Бесселя следует при вещественном  $v$ , что  $k_2 = a - ib$  тоже является корнем, то есть, справедливы следующие определения корней:

$$\begin{aligned} J_v(k_1) &= J_v(a + bi) = 0 \\ J_v(k_2) &= J_v(a - ib) = 0 \end{aligned}$$
(6.6)

Но тогда из соотношений (6.5) при подстановке в него (6.6) получим следующее:

$$4abi \int_0^l x \cdot J_v\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J_v'\left(\frac{k_2}{l}x\right) dx = 0$$
(6.7)

Последнее невозможно в рассматриваемом случае, т.к. приведет к тому, что соответствующие функции Бесселя должны быть сопряженными величинами:

$$\begin{aligned} J_v\left(\frac{k_1}{l}x\right) &= A + Bi \\ J_v\left(\frac{k_2}{l}x\right) &= A - Bi \end{aligned}, \quad J_v\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J_v'\left(\frac{k_2}{l}x\right) = A^2 + B^2 > 0$$
(6.7a)

Кроме этого, можно сделать вывод, что корни функции  $J_v(x)$  – по-парно одинаковы по величине и противоположны по знаку, поскольку соответствующий ряд содержит  $x$  в четных степенях. Имеется бесчисленное множество корней, т.к. ряд – бесконечен. Поскольку функции  $J_v(x)$  и  $J_v'(x)$  связаны и заменямы посредством изменения порядка, то производная функции Бесселя также имеет

бесконечное множество корней. Но если  $k_1$  и  $k_2$  – корни равнения  $J_\nu(x) = 0$  при  $k_1 \neq k_2$ , то на основе (6.5) выполняется следующее соотношение:

$$\int_0^l x \cdot J_\nu\left(\frac{k_1}{l}x\right) \cdot J_\nu\left(\frac{k_2}{l}x\right) dx = 0, \text{ при } k_1 \neq k_2 \quad (6.8)$$

Это соотношение (6.8) отражает *свойство ортогональности цилиндрических функций*. Условие ортогональности выполняется также, если  $k_1$  и  $k_2$  (при  $k_1 \neq k_2$ ) - корни следующего уравнения:

$$\alpha J_\nu(x) + \beta \cdot x \cdot J'_\nu(x) = 0 \quad (6.9)$$

здесь  $\alpha, \beta$  - некоторые вещественные числа. Приведем доказательство утверждения (6.9).

Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot J_\nu(k_1) + \beta \cdot k_1 \cdot J'_\nu(k_1) &= 0 \\ \alpha \cdot J_\nu(k_2) + \beta \cdot k_2 \cdot J'_\nu(k_2) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \cdot J_\nu(k_2) \\ \cdot J_\nu(k_1) \end{array}$$

После умножения первого уравнения на функцию Бесселя от аргумента  $k_2$ , и второго уравнения на функцию Бесселя от аргумента  $k_1$ , вычтем из первого уравнения второе и получим:

$$k_1 \cdot J'_\nu(k_1) \cdot J_\nu(k_2) - k_2 \cdot J'_\nu(k_2) \cdot J_\nu(k_1) = 0 \quad (6.10)$$

Таким образом, сравнивая (6.5) и условие ортогональности (6.8) видим, что полученное соотношение (6.10) доказывает утверждение о том, что рассматриваемые аргументы действительно являются корнями уравнения (6.9).

Далее, кратко перечислим несколько известных вариантов разложения по функциям Бесселя произвольной функции (ограниченной условиями разложимости). Такие возможности были доказаны в разное время математиками, названными по их имени, это – ряды Фурье-Бесселя, Дини, Шлемиха, Каптейна, Неймана

*Определение: ряд Фурье-Бесселя.*

Пусть функцию  $f(x)$  - можно разложить в ряд, равномерно сходящийся в интервале  $(0, l)$ , и называемый рядом Фурье-Бесселя:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot J_v\left(\frac{k_n}{l}x\right) \quad (6.11a)$$

здесь  $k_n$  - такие аргументы функции Бесселя, которые являются корнями уравнения  $J_v(x) = 0$ . Для нахождения коэффициентов  $c_n$  ряда Фурье-Бесселя - умножим обе части (6.11) на  $x \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right)$  и проинтегрируем.

$$\int_0^l x \cdot f(x) \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \int_0^l x \cdot J_v\left(\frac{k_n}{l}x\right) \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx$$

ввиду свойства ортогональности функций (6.8), правая часть предыдущего соотношения упрощается следующим образом:

$$\int_0^l x \cdot f(x) \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx = c_m \cdot \int_0^l x \cdot J_v^2\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx = c_m \cdot \frac{l^2}{2} \cdot J_{v+1}^2(k_m)$$

отсюда определяем соотношение для коэффициентов разложения в ряд Фурье-Бесселя:

$$c_n = \frac{2}{l^2 \cdot J_{v+1}^2(k_n)} \cdot \int_0^l x \cdot f(x) \cdot J_v\left(\frac{k_n}{l}x\right) dx \quad (6.12)$$

Приведем для наглядности аналогию с хорошо известным рядом Фурье для разложения произвольной функции  $f(x)$  и определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cdot \cos(mx) + b_m \cdot \sin(mx)) \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(mt) dt, \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(mt) dt \end{aligned} \quad (6.13)$$

Условия разложимости  $f(x)$  в ряд Фурье-Бесселя формулируется следующим образом: если существует интеграл  $\int_0^l \frac{1}{2} |f(t)| dt$  и если кусочно-непрерывная функция  $f(x)$  обладает ограниченным изменением в любом интервале  $(a,b)$ , который удовлетворяет условию  $0 < a < b < l$ , тогда ряд Фурье-Бесселя сходится и имеет сумму  $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ , то есть представляет функцию  $f(x)$  в любой точке ее непрерывности. Определение функции  $f(x)$ , обладающей ограниченным изменением в интервале  $(a,b)$  таково, что если при любом делении этого интервала точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ , сумма  $\sum_{m=1}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})|$  имеет точную верхнюю границу, не зависящую от  $n$  при любом выборе точек  $x_m$  ( $0 < m < n$ ) .

Для примера, рассмотрим разложение степенной функции в ряд Фурье-Бесселя, которое в результате этого преобразования определяется формулой:

$$z^n = 2^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+2m)(n+m-1)}{m!} \cdot J_{n+2m}(z) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14a)$$

в частности отсюда получаются следующие наглядные формулы этого разложения:

$$\begin{aligned} 1 &= J_0(z) + 2 \cdot J_2(z) + 2 \cdot J_4(z) + K \\ z &= 2 \cdot [J_1(z) + 3 \cdot J_3(z) + 5 \cdot J_5(z) + K] \\ z^2 &= 2 \cdot [4 \cdot J_2(z) + 16 \cdot J_4(z) + 36 \cdot J_6(z) + K] \\ z^3 &= 2 \cdot [24 \cdot J_3(z) + 120 \cdot J_5(z) + 336 \cdot J_7(z) + K] \end{aligned} \quad (6.14b)$$

### Определение ряда Дини.

Рассмотрим альтернативное разложение по функциям Бесселя произвольной функции. Ряд (6.15) называется рядом Дини с коэффициентами, которые находятся следующим образом:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right) \quad (6.15)$$

$$c_m = \frac{2 \cdot \int_0^l x \cdot f(x) \cdot J_v\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx}{l^2 \cdot \left[ J_v'^2(k_m) + \left(1 - \frac{v^2}{k_m^2}\right) \cdot J_v^2(k_m) \right]} \quad (6.16)$$

Здесь  $k_m$  - корни уравнения (6.9). В (6.16) использовано следующее преобразование:

$$\int_0^l x \cdot J_v^2\left(\frac{k}{l}x\right) dx = \frac{l^2}{2} \cdot \left[ J_v'^2(k) + \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) \cdot J_v^2(k) \right]$$

*Условия разложимости в ряд Дини.* В общем случае аргумент (то есть корни  $z=k_m$  функции Бесселя и ее производной) должны удовлетворять условию:

$$z^{-v} \cdot [ \alpha J_v(z) + \beta z \cdot J_v'(z) ] = 0 \quad (6.17)$$

Функцию можно разложить в ряд Дини согласно (6.15), если выполняются условия ее разложимости в ряд Фурье-Бесселя, и если выполняется дополнительное условие:

$$\frac{\alpha}{\beta} + v > 0 \quad (6.18)$$

Это условие можно смягчить, оно возникает из-за того, что при замене знака в (6.18) на противоположный  $v + \alpha/\beta \leq 0$ , в уравнении (6.17) возникают дополнительные корни: при нулевом равенстве (а) - корень в начале координат, при неравенстве (б) - два чисто мнимых корня  $\pm ik_0$ . Поэтому, к разложению Дини в общем случае, при включении в рассмотрение комплексных аргументов, требуется прибавить дополнительные члены ряда к (6.15), которые могут быть выражены соотношениями соответственно случая (а, б):

$$2(\nu+1)x^\nu \int_0^1 t^{\nu+1} f(t) dt \quad (6.19a)$$

$$\frac{2k_0^2 I_\nu(k_0 x)}{(k_0^2 + \nu^2) J_\nu^2(k_0) - k_0^2 J_\nu'^2(k_0)} \cdot \int_0^1 t f(t) J_\nu(k_0 t) dt \quad (6.19b)$$

*Ряды Шлемильха.*

В физике ряды этого вида хорошо описывают ряд специфических задач, например, колебания двумерной мембраны высоких порядков, когда это колебание слагается из бесконечного множества одинаковых одномерных поперечных колебаний, равномерно распределенных по обоим измерениям мембранны. Аргумент  $x$  в этих рядах строго пропорционален номеру ряда, интервал аргумента здесь естественно рассматривать  $(0, \pi)$ . Ряд Шлемильха справедлив для больших значений аргумента  $mx$ , когда  $m$ -й корень функции Бесселя  $J_\nu(k_m x) = 0$  определяется соотношением:

$$k_m = \left( m + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4} \right)\pi + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (6.20)$$

Приведем вначале разложение, данное Шлемильхом, для функции вещественного аргумента в ряд по Бесселевым функциям с индексом 0.

Пусть  $f(x)$  произвольная функция с производной  $f'(x)$ , непрерывной в замкнутом интервале  $(0, \pi)$  и имеющей в этом интервале ограниченное полное изменение. Тогда  $f(x)$  при  $0 \leq x \leq \pi$  допускает разложение в сходящийся ряд Шлемильха следующего вида:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot J_0(mx) \quad (6.21)$$

здесь коэффициенты ряда определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2 \cdot f(0) + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot f'(u \sin \varphi) \cdot d\varphi \cdot du \\ a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot f'(u \sin \varphi) \cdot \cos mu \cdot d\varphi \cdot du \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Шлемильх при определении коэффициентов ряда исходил из интегрального уравнения:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} g(x \sin \theta) d\theta \quad (6.23)$$

с непрерывным решением этого уравнения в виде:

$$g(x) = f(0) + x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \varphi) d\varphi \quad (6.24)$$

Докажем, что функция  $g(x)$  является решением интегрального уравнения (6.23), для этого подставим (6.24) в правую часть (6.23):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(x \sin \theta) d\theta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ f(0) + x \sin \theta \int_0^{\pi/2} f'(x \sin \theta \sin \varphi) d\varphi \right] d\theta = \\ &= f(0) + \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f'(x \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (6.25)$$

Далее, заменим теперь  $\theta$  новой переменной  $\chi$ , которая определяется соотношением:

$$\sin \chi = \sin \theta \sin \varphi \quad (6.26)$$

После изменения порядка интегрирования, преобразуем последний (второй) интеграл в соотношении (6.25) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 II &= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \theta \sin \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_z^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \chi) \frac{\sin \theta \cdot \cos \chi \cdot d\chi \cdot d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \chi}} = \\
 &= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_z^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \chi) \frac{\sin \theta \cdot \cos \chi \cdot d\theta \cdot d\chi}{\sqrt{\cos^2 \chi - \cos^2 \theta}} = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \chi) \cdot \left[ -\arcsin \left( \frac{\cos \theta}{\cos \chi} \right) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \cos \chi \cdot d\chi = \\
 &= x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(x \sin \chi) \cdot \cos \chi \cdot d\chi = f(x) - f(0)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Таким образом, доказано, что функция  $g(x)$  - является решением интегрального уравнения (6.23). Поскольку  $f'(x)$  - непрерывна в интервале  $(0, \pi)$ , функция  $g(x)$  может быть разложена в ряд Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \tag{6.28}$$

где коэффициенты разложения должны определяться соотношениями:

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(u) \cdot \cos(mu) \cdot du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ f(0) + u \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(u \sin \varphi) \cdot d\varphi \right] \cos(mu) \cdot du \tag{6.29}$$

Последний ряд сходится равномерно на  $(0, \pi)$ , следовательно, законно почлененное интегрирование. После интегрирования получим исходное разложение, что и служит доказательством формул (6.22), определяющих вид коэффициентов разложения в ряд Шлемильха (6.21):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} g(x \sin \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx \sin \theta) \right\} d\theta = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx) \tag{6.30}$$

Обобщенный ряд Шлемильха также определен и выражается более сложными соотношениями, которые здесь не приводим. Этот вид разложения справедлив для произвольного комплексного  $\nu > 0$  посредством суммы рядов в выражении типа (6.21) на основе двух различных цилиндрических функций:  $J_\nu(mx)$  и  $H_\nu(mx)$ .

*Ряд Неймана, разложение в ряд по Бесселевым функциям.*

Рядами Неймана считаются различные разложения аналитической функции комплексного переменного в ряды, общие члены которых содержат одну или несколько Бесселевых или родственных им функций. Такие разложения аналогичны разложениям функций в ряд Тейлора или Лорана. Ряд, введенный Нейманом, представляет разложение произвольной функции в ряд (6.31) по Бесселевым функциям с целым индексом, функция определяется также интегралом на контуре (6.32):

$$f(z) = a_0 J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot J_n(z) \quad (6.31)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (6.32)$$

$C$  - контур вокруг точки  $z$ . Коэффициенты в разложении (6.31) определяются через полиномы Неймана  $O_n(t)$  следующим образом:

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_C f(t) \cdot O_n(t) dt$$

$$\varepsilon_n \cdot O_n(t) = \frac{2^n n!}{t^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{t^2}{2(2n-2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2)(2n-4)} + \dots \right\} \quad (6.33)$$

Здесь  $O_n$  - полином Неймана. Полиномы низших порядков имеют следующие простые выражения:

$$O_0(t) = \frac{1}{t}, \quad O_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^3}, \quad O_3(t) = \frac{3}{t^2} + \frac{24}{t^4}, \quad O_4(t) = \frac{1}{t} + \frac{16}{t^3} + \frac{192}{t^5},$$

или для полиномов Неймана в общем виде можно записать следующую формулу:

$$O_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n \cdot (n-m-1)!}{m!} \left(\frac{1}{2} t\right)^{n-2m+1}, \quad n \geq 1 \quad (6.34)$$

Приведем также следующее наглядное соотношение:

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot O_n(t) \cdot J_n(z) = J_0(z) \cdot O_0(t) + 2 \cdot J_1(z) \cdot O_1(t) + 2J_2(z) \cdot O_2(t) + \dots \quad (6.35)$$

Рассмотрим конкретный пример: пусть функция  $f(z)$  раскладывается в ряд Маклорена.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n \quad (6.36)$$

тогда при разложении функции в ряд Неймана, коэффициенты при функциях Бесселя (6.31) выражаются через коэффициенты степенного ряда Маклорена (6.36) следующим образом:

$$a_0 = b_0$$

$$a_n = n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}n} 2^{n-2m} \frac{(n-m-1)!}{m!} b_{n-2m} \quad (6.37)$$

### Ряды Каптейна.

Эти ряды возникли при математическом описании задачи Кеплера о движении частицы по эллипсу под действием центральной силы, направленной к фокусу и притягивающей точку по закону обратных квадратов. В основе этого разложения лежат следующие простые формулы:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(mz), \quad \frac{1}{1+z} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_m(mz) \quad (6.38)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка для полиномов Каптейна  $D_n(t)$ , а также их явный вид - были получены на основе разложения следующей функции при  $|t| \geq 1$  в ряд:

$$\frac{1}{t-z} = D_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} D_m(t) J_m(mz) \quad (6.38a)$$

*Определение ряда Каптейна.* Пусть  $f(z)$  - произвольная аналитическая всюду в области, в которой  $\Omega(z) \leq a$ , где  $a \leq 1$ , тогда во всех внутренних точках этой области функцию можно разложить в ряд Каптейна с коэффициентами:

$$f(z) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot J_n(nz) \quad (6.39)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int D_n(t) \cdot f(t) dt \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} D_n(t) = & n \cdot (1-t^2) \cdot O_n(nt) + \sin^2\left(\frac{1}{2}n\pi\right) + t \cos^2\left(\frac{1}{2}n\pi\right) + \\ & + t^{-1} \{ A_n \cdot J_n(nt) + B_n \cdot Y_n(nt) \} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Здесь  $D_n(t)$  - полином Каптейна,  $O_n(t)$  - полином Неймана. Путем интегрирования является кривая, на которой  $\Omega(t) = a$ .

*Пример разложения степенной функции* в этот ряд. Если  $f(z)$  разложима в ряд Маклорена (6.36), можно вывести связь между коэффициентом ряда Каптейна и степенного ряда Маклорена, которая получится в виде следующих соотношений:

$$a_0 = b_0$$

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} \frac{(n-2m)^2 \cdot (n-m-1)! b_{n-2m}}{m! \left(\frac{1}{2}n\right)^{n-2m+1}} \quad (6.42)$$

*Разложение функции Бесселя в ряд по функциям Бесселя других порядков.*

Пусть  $v, \mu$  - неотрицательные целые числа, обозначающие порядки функций Бесселя и при условии  $v^2 \neq \mu^2$ , справедлива формула, доказанная Ватсоном:

$$J_\mu(z) \cdot J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + \mu + n + 1) \Gamma(\nu + n + 1) \Gamma(\mu + n + 1)} \quad (6.43)$$

Функцию  $J_\nu(z)$  можно разложить по функциям Бесселя других порядков:

$$J_\nu(z) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu-\mu+n)}{\Gamma(\nu+n+1)} \frac{(z/2)^{\nu-\mu+n}}{n!} J_{\mu+n}(z) \quad (6.43a)$$

Также на основе предыдущего соотношения (6.43) были получены представленные ниже теоремы умножения функции Бесселя при произвольном  $\lambda$ :

$$J_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda^2 - 1)^n \frac{(z/2)^n}{n!} J_{\nu+n}(z) \quad (6.43b)$$

Приведем лишь одно частное следствие из (6.43a): дифференцируя по  $\nu$ , и затем, полагая  $\nu = 0$  и при  $\mu = 0$  приходим к разложению функции Вебера - к формуле Ломмеля:

$$\frac{1}{2} \pi Y_0(z) = J_0(z) \left\{ \gamma + \ln \left( \frac{1}{2} z \right) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{1}{2} z \right)^m}{m \cdot m!} J_m(z) \quad (6.44)$$

Приведенные разнообразные возможности разложения произвольных функций в ряды, основанные на функциях Бесселя подтверждают лишний раз возможности комплексного анализа, которые, в конечном счете, направлены на наиболее правильное и точное описание разнообразных физических задач. Взаимозаменяемость различных специальных функций подтверждает их тесную взаимосвязь, основанную на единстве подхода и полноты системы.

## VII. Гипергеометрическая функция.

*Гипергеометрическое уравнение, или уравнение Гаусса, имеет вид:*

$$z(z-1)u_{zz} + [(a+b+1)z - c] \cdot u_z + ab \cdot u = 0 \quad (7.1)$$

Решение ищем в виде ряда:

$$u = A_0 z^r + A_1 z^{r+1} + A_2 z^{r+2} + K = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{r+k} \quad (7.2)$$

отсюда после дифференцирования ряда, получим:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) \cdot z^{r+k-1}; \quad u'' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) z^{r+k-2}$$

После подстановки в исходное уравнение полученных рядов, следует:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) \cdot z^{r+k} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) z^{r+k-1} + \\ & (a+b+1) \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) z^{r+k} - c \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)^{r+k-1} + ab \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{r+k} = 0 \quad (7.3) \end{aligned}$$

Константы  $A_1, A_2, K$  определяются методом неопределенных коэффициентов. В частности, приравниваем к нулю коэффициент при  $z^{r-1}$  и  $k=0$ , получаем:

$$A_0 r(r-1) + c A_0 r = 0, \text{ т.к. } A_0 \neq 0, \Rightarrow$$

$$r(r-1+c) = 0 \Rightarrow r_1 = 0; \quad r_2 = 1-c$$

Положим в уравнении (7.3)  $r = r_1 = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(k-1) \cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(k-1) \cdot z^{k-1} + \\ & + (a+b+1) \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot k \cdot z^k - c \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot k \cdot z^{k-1} + ab \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot z^k = 0 \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при  $z^0, z^1, \dots, z^k$ , получим систему уравнений:

$$cA_1 - ab \cdot A_0 = 0$$

$$2(c+1) \cdot A_2 - (a+1)(b+1)A_1 = 0$$

...

$$(k+1)(c+k)A_{k+1} - (a+k)(b+k)A_k = 0$$

Отсюда при  $A_0 = 1$  и  $c \neq 0, -1, -2, \dots, -k$ , получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{ab}{1 \cdot c} \\ A_2 &= \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \cdot A_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot (c+1)} \\ &\dots \\ A_{k+1} &= \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} A_k = \frac{a \cdot (a+1) \dots (a+k) \cdot b \cdot (b+1) \dots (b+k)}{1 \cdot 2 \dots (k+1)c(c+1) \dots (c+k)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Полагая в (7.2)  $r = r_1 = 0$ , тогда решение гипергеометрического уравнения в виде ряда с определенными в (7.4) коэффициентами, обозначается следующим образом  $u = u_{0,1} = F(a, b, c, z)$  и представляет собой бесконечный ряд:

$$\begin{aligned} u_{0,1} = F(a, b, c, z) &= 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} \cdot z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} \cdot z^2 + \dots + \\ &+ \frac{a(a+1) \dots (a+k-1) \cdot b \cdot (b+1) \dots (b+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k \cdot c \cdot (c+1) \dots (c+k-1)} \cdot z^k + \dots \end{aligned} \quad (7.5)$$

*Функция  $F(a, b, c, z)$*  - является решением гипергеометрического уравнения и называется *гипергеометрической функцией*. При  $c \neq -n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1$  решение гипергеометрической функции можно записать кратко следующим рядом Гаусса:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad (7.6)$$

Для  $c = -m$  гипергеометрическая функция может быть определена следующим образом:

$$\lim_{c \rightarrow -m} \left\{ \frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} \right\} = \frac{(a)_{m+1} (b)_{m+1}}{(m+1)!} z^{m+1} F(a + m + 1, b + m + 1, m + 2; z)$$

Рассмотрим общий вид обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$P_0(z) \cdot U''(z) + P_1(z) \cdot U'(z) + P_2(z) \cdot U(z) = 0 \quad (7.7)$$

с полиномиальными коэффициентами  $P_0(z)$ ,  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$ , степени этих полиномов соответственно  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . Особые точки (сингулярности) уравнения – это нули полинома  $P_0(z)$ , и возможно  $z = \infty$ . В общем случае, особая точка является точкой ветвления по крайней мере одного частного решения уравнения. Если два линейно-независимых частных решения уравнения являются функциями конечного порядка в особой точке, то такая точка называется регулярной (обыкновенной) особой точкой, в ином случае – иррегулярной особой точкой уравнения. Пусть в некоторой точке "c" области  $S$  функции  $p(z)$ ,  $q(z)$  (или хотя бы одна из них) имеют полюсы, причем такого порядка, что функции  $(z - c) \cdot p(z)$ ,  $(z - c)^2 \cdot q(z)$  – будут аналитическими в "c". Тогда уравнение (7.7) можно записать в следующем виде:

$$(z - c)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (z - c)P(z - c) \frac{du}{dz} + Q(z - c) \cdot u = 0 \quad (7.8)$$

$P(z - c)$ ,  $Q(z - c)$  – аналитические функции в особой точке "c", тогда по теореме Тейлора они могут быть представлены рядами:

$$P(z - c) = p_0 + p_1(z - c) + p_2(z - c)^2 + \dots \quad (7.9a)$$

$$Q(z - c) = q_0 + q_1(z - c) + q_2(z - c)^2 + \dots \quad (7.9b)$$

здесь  $p_0, p_1, \dots, q_0, q_1, \dots$  – постоянные. Предположим, что формальное решение уравнения (7.8) имеет вид:

$$u = (z - c)^\alpha [1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z - c)^n], \quad (7.10)$$

где  $\alpha$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , ... – постоянные, подлежащие определению. Подстановкой этого решения в дифференциальное уравнение (предполагая, что почлененное дифференцирование и умножение рядов допустимо) получим:

$$\begin{aligned} & (z-c)^\alpha \left[ \alpha(\alpha-1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n \right] + \\ & + (z-c)^\alpha P(z-c) \left[ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\alpha+n)(z-c)^n \right] + \\ & + (z-c)^\alpha Q(z-c) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z-c)^n \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Далее, подстановкой рядов (7.9а,б) вместо  $P(z-c)$ ,  $Q(z-c)$ , и приравниванием коэффициентов при последовательных степенях  $(z-c)$ , получим последовательность уравнений, первое из которых наиболее существенно:

$$\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0 \quad (7.12a)$$

$$A_1 \cdot \{(\alpha+1)^2 + (p_0 - 1) \cdot (\alpha+1) + q_0\} + \alpha \cdot p_1 + q_1 = 0 \quad (7.12b)$$

$$A_2 \{(\alpha+2)^2 + (p_0 - 1) \cdot (\alpha+2) + q_0\} + A_1 \cdot \{(\alpha+1) \cdot p_1 + q_1\} + \alpha \cdot p_2 + q_2 = 0$$

$$A_n \{(\alpha+n)^2 + (p_0 - 1) \cdot (\alpha+n) + q_0\} + \sum_{m=1}^{n-1} A_{n-m} \{(\alpha+n-m) \cdot p_m + q_m\} + \alpha \cdot p_n + q_n = 0$$

Первое полученное уравнение (7.12a) называется *определяющим или характеристическим уравнением*, а его корни  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – показателями исходного уравнения в особой точке. Определяющее уравнение дает 2 значения  $\alpha$ , которые могут быть и равными.

### Уравнение Римана, обобщенное уравнение Ламе.

Теория дифференциальных уравнений – отдельная обширная область исследований, в этой области написаны монографии и огромное число публикаций, поэтому здесь приводят лишь необходимый минимум информации классификационного характера, без которого взаимосвязь специальных функций не столь наглядна.

Уравнение Римана, частным случаем которого является гипергеометрическое уравнение, имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \cdot \frac{du}{dz} + \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right\} \cdot \frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0 \quad (7.13)$$

Решением уравнения является *P-функция Римана*, которая записывается в форме:

$$u = P \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

Здесь в верхней строке помещены особые точки уравнения с соответствующими показателями непосредственно под ними, а независимая переменная  $z$  помещается в четвертом столбце.

Стандартная схема Римана используется только для фуксовых уравнений, собственно это таблица, представляющая характеристики уравнений – положение особых точек и их характеристические показатели. Она поясняет свойства уравнения и упрощает его преобразование к различным эквивалентным формам, в первой строке указывается положение особых точек, во второй и третьей – характеристические показатели, и в последнем столбце указывается переменная.

Для уравнений с большим числом особых точек может применяться обобщенная схема Римана, подробно изложенная в книге Славянова С.Ю. и Вольфганга Лай, включающая дополнительно характеристические показатели Томе в строках ниже третьей. Обобщенная схема Римана – это таблица, состоящая из столбцов различной длины, каждый столбец содержит полную информацию о данной особой точке уравнения.

Для уравнения Римана (7.13-7.14) присущи *свойства инвариантности*, первое из которых заключается в том, что следующая функция также является его решением

$$w = \left( \frac{z-b}{z-a} \right)^k \left( \frac{z-c}{z-a} \right)' u, \quad (7.15)$$

но с измененными показателями  $\alpha-k-l$ ;  $\beta-k-l$ ;  $\gamma-k-l$ . Второе свойство инвариантности заключается в том, что точки  $z$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  переводятся следующим дробно-линейным преобразованием в другие соответствующие точки  $z_1$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ , также являющиеся решением уравнения и особыми точками с прежними показателями:

$$z = \frac{Az_1 + B}{Cz_1 + D}, \quad a = \frac{Aa_1 + B}{Ca_1 + D}, \quad b = \frac{Ab_1 + B}{Cb_1 + D}, \quad c = \frac{Ac_1 + B}{Cc_1 + D}, \quad AD - BC \neq 0 \quad (7.16)$$

Это свойство в частности позволяет перевести особые точки уравнения в точки  $0$ ,  $1$ ,  $\infty$ , для чего достаточны подстановки:

$$A = c(b-a), \quad B = a(c-b), \quad C = b-a, \quad D = c-b, \Rightarrow$$

$$z_1 = \frac{(z-a)(b-c)}{(z-c)(b-a)} \quad (7.17)$$

Таким способом уравнение Римана переводится в гипергеометрическое. Гипергеометрическую функцию  $F(a, b, c, z)$  можно записать через  $P$ -функцию Римана следующим образом:

$$F(a, b, c, z) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1-c & b & c-a-b \end{matrix} \right\} z \quad (7.18)$$

Отметим, что при  $a=1$ ,  $b=c$ ,  $F(a, b, c, z)$  - обращается в геометрическую прогрессию, поэтому гипергеометрическая функция и имеет такое название.

$$F(a, b, c, z) = 1 + z + z^2 + K + z^k = \frac{1}{1-z} \quad (7.19)$$

Ряд, выражающий гипергеометрическую функцию при  $|z| < 1$ , можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость ( $z$ ) с разрезом по вещественной оси от точки  $z=1$  до точки  $z=+\infty$ . Если  $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ , то для всей комплексной плоскости ( $z$ ) с указанным разрезом имеет место интегральная формула:

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \int_0^1 t^{b-1} \cdot (1-t)^{c-b-1} \cdot (1-tz)^{-a} dt \quad (7.20)$$

где  $(1-tz)^{-a} = 1$  при  $z=0$ .

Уравнение Римана является частным случаем (при количестве особых точек  $n = 3$ ) дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса. Рассмотрим теперь *уравнение класса Фукса* с пятью особыми точками, у которого всякая особая точка  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $\infty$  является обыкновенной, причем эти пять точек будут правильными особыми точками с показателями  $\alpha_r, \beta_r$  в  $a_r$  (где  $r=1,2,3,4$ ) и показателями  $\mu_1, \mu_2$  на  $\infty$ , такое уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{1-\alpha_r - \beta_r}{z-a_r} \right\} \frac{du}{dz} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_r \cdot \beta_r}{(z-a_r)^2} + \frac{Az^2 + 2Bz + C}{\prod_{r=1}^4 (z-a_r)} \right\} \cdot u = 0 \quad (7.21)$$

$A, B, C$  – постоянные. Здесь константа  $A$  в числителе последнего члена должна быть такой, чтобы выполнялось условие для  $\mu_1, \mu_2$  – корни уравнения:

$$\mu^2 + \mu \cdot \left\{ \sum_{r=1}^4 (\alpha_r + \beta_r) - 3 \right\} + \sum_{r=1}^4 \alpha_r \cdot \beta_r + A = 0 \quad (7.22)$$

Линейные дифференциальные уравнения, встречающиеся в математической физики, могут быть получены путем слияния особых точек частного уравнения (7.21), в котором разность показателей в каждой особой точке равна  $1/2$ . Ниже приводится краткое описание получения этих результирующих уравнений. Вначале положим  $\beta_r = \alpha_r + \frac{1}{2}$  ( $r=1,2,3,4$ ),  $\xi \equiv z$ , тогда исходное дифференциальное уравнение (7.21) переходит в *обобщенное уравнение Ламе*:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\frac{1}{2} - 2\alpha_r}{\xi - a_r} \right\} \cdot \frac{du}{d\xi} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_r(\alpha_r + \frac{1}{2})}{(\xi - a_r)^2} + \frac{A\xi^2 + 2B\xi + C}{\prod_{r=1}^4 (\xi - a_r)} \right\} \cdot u = 0 \quad (7.23)$$

На основании условия  $\mu_2 - \mu_1 = \frac{1}{2}$ , получаем:

$$A = \left( \sum_{r=1}^4 \alpha_r \right)^2 - \sum_{r=1}^4 \alpha_r^2 - \frac{3}{2} \sum_{r=1}^4 \alpha_r + \frac{3}{16}$$

Надлежащим слиянием пяти особых точек получаются 6 типов уравнений, которые классифицируются по следующим 3-м отличительным особенностям:

- 1) по числу особых точек с разностью показателей  $\frac{1}{2}$ ,
- 2) по числу других правильных особых точек,
- 3) по числу неправильных особых точек.

Таким образом, различные известные уравнения можно получить из общего дифференциального уравнения (7.23), они сведены в следующую таблицу с указанием особых точек:

→отличия №уравнения↓	1) ч.о.т. – 1\2	2) ч.д.о.т.	3) ч.н.о.т.	Название уравнения
I	3	1	0	Ламе
II	2	0	1	Матье
III	1	2	0	Лежандр
IV	0	1	1	Бессель
V	1	0	1	Вебер, Эрмит
VI	0	0	1	Стокс

### I. Уравнение Ламе.

Если положить:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ;  $a_4 \rightarrow \infty$ ;  $8B = n(n+1) \cdot a_4$ ;  $4C = h \cdot a_4$ , получим уравнение Ламе:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left\{ \sum_{r=1}^3 \frac{1/2}{\xi - a_r} \right\} \frac{du}{d\xi} - \frac{n(n+1) \cdot \xi + h}{4 \prod_{r=1}^3 (\xi - a_r)} \cdot u = 0 \quad (7.24)$$

### II. Уравнение Матье.

Преобразуем уравнение (7.23) к виду:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left\{ \frac{1}{2 \cdot \xi} + \frac{1/2}{\xi - 1} \right\} \cdot \frac{du}{d\xi} - \frac{A - 16 \cdot Q + 32 \cdot Q \cdot \xi}{4 \cdot \xi \cdot (\xi - 1)} \cdot u = 0$$

, где  $A$ ,  $Q$ - постоянные. Полагаем  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = a_4 \rightarrow \infty$ . Тогда при помощи подстановки  $\xi = \cos^2 z$  получится окончательный вид уравнения Маттье:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (A + 16 \cdot Q \cdot \cos(2z)) \cdot u = 0 \quad (7.25)$$

*III. Уравнение Лежандра.* Получим следующее уравнение, полагая

$a_1 = a_2 = 1$ ;  $a_3 = a_4 = 0$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ;  $\alpha_4 = \frac{1}{4}$ , получим:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left\{ \frac{1}{2 \cdot \xi} + \frac{1}{\xi - 1} \right\} \cdot \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{n(n+1)}{\xi} - \frac{m^2}{\xi - 1} \right\} \cdot \frac{u}{\xi(\xi - 1)} = 0$$

Далее, при помощи подстановки  $\xi = z^{-2}$  выводится уравнение Лежандра:

$$(1 - z^2) \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - 2 \cdot z \cdot \frac{du}{dz} + \left\{ n \cdot (n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right\} \cdot u = 0 \quad (7.26)$$

*IV. Уравнение Бесселя.* Полагая  $a_1 = a_2 = 0$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ,  $a_3 = a_4 \rightarrow \infty$ , получается промежуточное уравнение:

$$\xi^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \xi \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{4} (\xi - n^2) u = 0$$

Отсюда при помощи подстановки  $\xi = z^2$  выводится уравнение Бесселя:

$$z^2 \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + z \cdot \frac{du}{dz} + (z^2 - n^2) \cdot u = 0 \quad (7.27)$$

*V. Уравнение Вебера.* Полагаем  $a_1 = 0$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , и  $a_2 = a_3 = a_4 \rightarrow \infty$ . Тогда получается уравнение:

$$\xi \cdot \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{4} \cdot \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \xi \right) \cdot u = 0$$

Далее при подстановке  $\xi = z^2$  получается уравнение Вебера:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot z^2 \right) \cdot u = 0 \quad (7.28)$$

*VI. Уравнение Стокса.* Полагаем  $\alpha_r = 0$  и устремим  $a_r \rightarrow \infty$  (при  $r = 1, 2, 3, 4$ ) получаем уравнение:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (B_1\xi + C_1)u = 0,$$

затем полагаем  $u = (B_1\xi + C_1)^{\frac{1}{2}} \cdot v$ ;  $B_1 \cdot \xi + C_1 = \left(\frac{3}{2} \cdot B_1 \cdot z\right)^{\frac{2}{3}}$ , окончательно:

$$z^2 \cdot \frac{d^2v}{dz^2} + z \cdot \frac{dv}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) \cdot v = 0 \quad (7.29)$$

*Выражение функций через гипергеометрическую функцию.*

Элементарные и специальные функции получаются из гипергеометрической функции  $F(a, b, c, z)$  при определенных значениях параметров и при соответствующем преобразовании независимого переменного. Рассмотрим *первый пример*. Положим в выражении (7.5 - 7.6) для гипергеометрического ряда  $a = -n$ ;  $b = c$ ;  $z = x = -x_1$ :

$$\Gamma(-n; b; b; x_1) = 1 - \frac{n}{1}x_1 + \frac{-n(-n+1)}{1 \cdot 2} \cdot x_1^2 + \frac{-n(-n+1)(-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x_1^3 + K,$$

$$\Gamma(-n; b; b; -x) = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + K$$

окончательно:  $F(-n; b; b; -x) = F(-n; 1; 1; -x) = (1+x)^n$ .

*Второй пример.* Заменяя  $x$  на  $\frac{x}{n}$ , при  $a = c = 1; b = n$  и  $n \rightarrow \infty$ , получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1, n, 1; \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot 1} \cdot \frac{x}{n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} + K \right] = \\ = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + K \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1, n, 1, \frac{x}{n}\right) = e^x$$

## Вырожденная гипергеометрическая функция.

Из уравнения (7.1) при замене переменных  $z$  на  $z/b$ , и далее слиянием двух особых точек при стремлении  $b \rightarrow \infty$  получается уравнение вырожденной гипергеометрической функции, оно имеет вид.

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (c - z) \frac{du}{dz} + au = 0 \quad (7.32)$$

Его решением является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$F(a, c; z) = 1 + \frac{a}{1!c} z + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{ab}{1!c} \frac{z}{b} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} \frac{z^2}{b^2} + \dots \right\} \quad (7.33)$$

При замене  $u = \exp(-z/2) W_{k,m}(z)$  уравнение (7.32) переходит в близкое и более распространенное в задачах математической физики уравнение Уиттекера:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2} \right) W = 0 \quad (7.34)$$

Его решением является функция Уиттекера, которая может быть определена следующим интегралом для всех значений  $n$  и  $m$  для всех  $z$ , кроме вещественных отрицательных и при  $\operatorname{Re}(k-m-1/2) \leq 0$ :

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^k \exp(-z/2)}{\Gamma(m-k+1/2)} \int_0^\infty t^{-k+m-1/2} (1+t/z)^{k+m-1/2} e^{-t} dt \quad (7.35)$$

*Выражение интеграла вероятности через функции типа  $W_{k,m}(z)$ .*

*Интеграл вероятности* (второе название - функция ошибок) называется следующее соотношение:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (7.36)$$

Дополнительная функция, также связь интеграла вероятности с функцией Уиттекера определяются формулами:

$$Erfc(z) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-t^2) dt = 1 - erf(z) \quad (7.37)$$

$$W(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right) = e^{-z^2} erfc(-iz) \quad (7.38)$$

Для получения интеграла вероятности в виде ряда, рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_0^z \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^k}{k!} \right] dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^z t^{2k} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{2k} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot K \cdot \frac{2k-1}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot K \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k+1}{2}} = \\ &= \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+\frac{1}{2}) \cdot K \cdot (\frac{1}{2} + k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot K \cdot k \cdot \frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 1) \cdot K \cdot (\frac{3}{2} + k + 1)} \cdot (-z^2)^k \end{aligned}$$

В результате, очевидно, что интеграл вероятности может быть выражен через вырожденную гипергеометрическую функцию следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \cdot F\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) \quad (7.39)$$

### Интегралы Френеля

С рассмотренными в этой главе функциями также тесно связаны **интегралы Френеля**, которые определяются следующими соотношениями:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad \text{и} \quad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad (7.40)$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n}}{(2n)(4n+1)} z^{4n+1},$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)(4n+3)} z^{4n+3} \quad (7.41)$$

Значения на  $\infty$ :  $C(x) \rightarrow 1/2$ ,  $S(x) \rightarrow 1/2$ , при  $x \rightarrow \infty$ . Интегралы Френеля связаны с вырожденной гипергеометрической функцией следующим образом:

$$C(z) + iS(z) = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{i\pi}{2}z^2\right) \quad (7.42)$$

Графики интеграла вероятности и близкой к нему функции Досона  $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ , а также графики интегралов Френеля показаны на рис. 7.1. и 7.2.

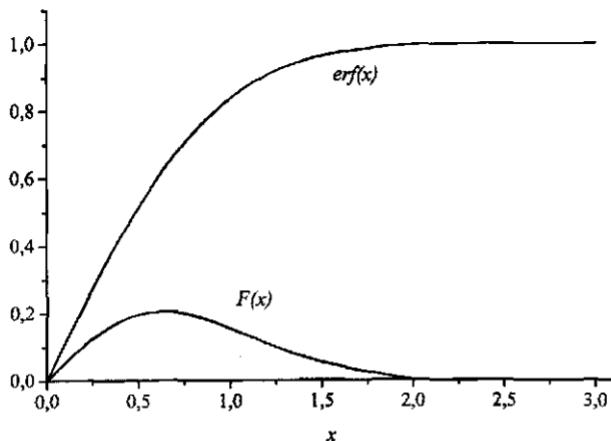


Рис. 7.1. Графики  $\text{erf}(x)$  и интеграла Досона  $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ .

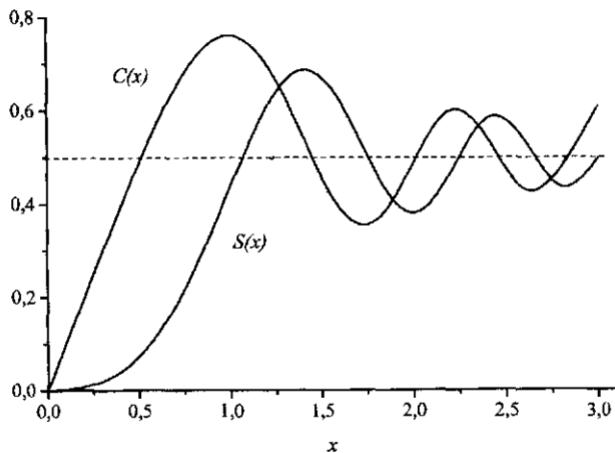


Рис. 7.2. Интегралы Френеля  $C(x)$  ,  $S(x)$ .

## VIII. Функции Лежандра.

Лапласиан в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} + \frac{d^2u}{dy_1^2} + \frac{d^2u}{dz_1^2} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (8.1)$$

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре:

$$\Delta = 0 \quad (8.2)$$

Найдем функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа и принимающую заданные начальные значение на поверхности шара; предположим сферу единичного радиуса  $\rho=1$ , также предположим на первом этапе, что граничные условия не зависят от угла  $\varphi$ , тогда последний член в Лапласиане (8.1) равен нулю. Запишем рассматриваемое уравнение Лапласа с граничными условиями для  $u(\rho, \theta)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (8.3)$$

$$u(1, 0) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (8.4)$$

Предположим, что решение уравнения (8.3) имеет вид:

$$u = R(\rho) \cdot T(\theta), \quad (8.5)$$

после подстановки этого решения в уравнение (8.3), получим:

$$\frac{\rho^2 \cdot R'' + 2\rho R'}{R} = -\frac{T'' + \operatorname{ctg} \theta \cdot T'}{T} \quad (8.6)$$

Очевидно, что общее значение обеих частей этого уравнения (8.6) должно равняться постоянной. Для удобства дальнейших вычислений предположим, что эта постоянная – любое неотрицательное целое число, равное  $n(n+1)$ ,  $n \geq 0$ . Тогда левая часть уравнения (8.6) преобразуется в

уравнение для  $R(\rho)$ , содержащее только функции от радиальной координаты шара:

$$\rho^2 \cdot R'' + 2\rho R' - n(n+1) \cdot R = 0 \quad (8.7)$$

Его решениями будут функции вида  $\rho^n$ ,  $\rho^{-n-1}$ . Оставшаяся часть уравнения (8.9) дает уравнение для определения функции  $T(\theta)$ , зависящей от координаты угла  $\theta$ :

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{dT}{d\theta} + n(n+1) \cdot T = 0 \quad (8.8)$$

Для дальнейшего решения, введем новую вспомогательную переменную  $x$  так что  $x = \cos\theta$ , тогда для уравнения (8.8) получаем следующее вспомогательные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} &= -\sin\theta \cdot \frac{dT}{dx}, \\ \frac{d^2T}{d\theta^2} &= \sin^2\theta \cdot \frac{d^2T}{dx^2} - \cos\theta \cdot \frac{dT}{dx} = (1-x^2) \frac{d^2T}{dx^2} - x \cdot \frac{dT}{dx}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

После последней замены переменных в уравнении (8.8), приходим к классическому уравнению Лежандра:

$$(1-x^2) \frac{d^2T}{dx^2} - 2x \cdot \frac{dT}{dx} + n(n+1) \cdot T = 0 \quad (8.10)$$

которому удовлетворяют полиномы Лежандра:  $P_n(x) = P_n(\cos\theta)$ . Эти функции непрерывны при всех значениях  $-1 \leq x \leq 1$ , и, в частности, при выбранных ранее граничных условиях (8.4). Для обеспечения непрерывности решения исходного уравнения (8.6) нам нужно найти такое решение, которое бы удовлетворяло одновременно двум уравнениям (8.10) и (8.7), поэтому будем рассматривать дальше только решение вида  $\rho^n$ , чтобы удовлетворить условию непрерывности решения для уравнения (8.10). Результирующий вид решения исходного уравнения (8.6), удовлетворяющий граничным условиям, будет следующий:

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \rho^n \cdot P_n(\cos \theta) \quad (8.11)$$

Коэффициенты этого ряда  $A_n$  следует выбрать так, чтобы они удовлетворяли граничному условию:

$$f(\theta) = u(l, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot P_n(\cos \theta) \quad (8.12)$$

Теперь вернемся к уравнению Лапласа в сферических координатах общего вида (8.1 – 8.2), и рассмотрим *сферические функции*:

$$\begin{cases} u_{mn} = \cos(n\varphi) \cdot \sin^m \theta \cdot P_m^{(n)}(\cos \theta) \\ v_{mn} = \sin(n\varphi) \cdot \sin^m \theta \cdot P_m^{(n)}(\cos \theta) \end{cases} \quad (8.13)$$

$n = 0, 1, 2 \dots m$

Докажем, что эти функции являются решением общего уравнения Лапласа с учетом трех сферических координат. Если подставить в исходное уравнение (8.2) функцию решения в виде:

$$u(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho) \cdot T(\theta) \cdot F(\varphi) \quad (8.14)$$

получим, что уравнение можно преобразовать таким образом, чтобы сгруппировать переменные следующим образом:

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{T''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \cdot T'(\theta)}{T(\theta)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)} = 0 \quad (8.15)$$

Первое слагаемое в уравнении (8.15) равно константе, как было показано выше. Переобозначим эту константу через  $m(m+1)$ , тогда получим из первой части уравнения (8.15) следующее, тождественное предыдущему (8.7):

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + 2\rho \cdot R'(\rho) - m(m+1) \cdot R(\rho) = 0 \quad (8.16)$$

Далее, третье слагаемое в уравнении общего (8.15) умножаем на  $\sin^2 \theta$ , тогда видим, что  $\frac{F''}{F}$  не зависит от  $\rho$ ,  $\theta$ , поэтому можно допустить что оно равно константе, обозначим ее через  $-n^2$ , получим:

$$F''(\varphi) + n^2 \cdot F(\varphi) = 0 \quad (8.17)$$

Решениями последнего уравнения являются функции  $\cos n\varphi$ ,  $\sin n\varphi$ . Тогда, подставив вместо первого и третьего слагаемых (8.15) их значения соответственно  $m(m+1)$  и  $-n^2$ , получим его в следующем общем виде:

$$T''(\theta) + ctg\theta \cdot T'(\theta) + [m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta}] \cdot T(\theta) = 0 \quad (8.18)$$

подставим как и ранее  $x = \cos \theta$ , приведем  $-\frac{n^2}{\sin^2 \theta}$  к виду:  $-\frac{n^2}{1-x^2}$ , тогда последнее уравнение (8.18) преобразуется к виду *уравнения Лежандра*:

$$(1-x^2) \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - 2x \cdot \frac{dT}{dx} + [m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}] \cdot T = 0 \quad (8.19)$$

Введем новую зависимую переменную для функции  $T$ :  $T = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \cdot z$ , получим из (8.18):

$$(1-x^2) \cdot z'' - 2(n+1) \cdot x \cdot z' + [m(m+1) - n(n+1)] \cdot z = 0 \quad (8.20)$$

Произведем еще одну замену  $y = P_m(x)$ , и повторное и многократное дифференцирование исходного уравнения (8.21a), аналогичного уравнению Лежандра (8.10), зависящего от двух переменных с учетом изменения  $n$  на  $m$ .

$$(1-x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + [m(m+1)] \cdot y = 0 \quad (8.21a)$$

$$(1-x^2) \cdot y''' - 4x \cdot y'' + [m(m+1)-2] \cdot y' = 0$$

$$(1-x^2) \cdot y^{IV} - 6x \cdot y''' + [m(m+1)-6] \cdot y'' = 0$$

К

$$(1-x^2) \cdot y^{(n+2)} - 2 \cdot (n+1) \cdot x \cdot y^{(n+1)} + [m(m+1) - n(n+1)] \cdot y^{(n)} = 0$$

В результате, все полученные после дифференцирования уравнения (8.21б) – также справедливы. Отсюда следует, что функция  $z = \frac{d^n y}{dx^n}$  – удовлетворяет общему уравнению (8.20), то есть является его решением. Таким образом, решением общего уравнения Лежандра (8.19) при неотрицательных целых  $m, n$ , является следующая функция:

$$T(x) = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \quad (8.22)$$

Возвращаясь к исходным обозначениям (8.18) формула (8.22) будет иметь вид:

$$T(\theta) = \sin^n \theta \cdot \frac{d^n}{(d \cos \theta)^n} P_m(\cos \theta), \quad (8.23)$$

Т.к. решение (8.23) при  $n > m$  тождественно обращается в ноль, то нетривиальный результат получим только при  $n = 0, 1, K, m$ . Обозначают производные в функции (8.23) традиционно следующим образом:

$$P_m^{(n)}(\cos \theta) = \frac{d^n}{(d \cos \theta)^n} P_m(\cos \theta) \quad (8.24)$$

Окончательно эти функции также называются *сферическими функциями*, или *присоединенными функциями Лежандра первого рода*. Решения уравнения Лапласа (8.2) в шаре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{mn} &= \cos n\varphi \cdot \sin^n \theta \cdot P_m^{(n)}(\cos \theta), n = 0, 1, 2, K, m \\ v_{mn} &= \sin n\varphi \cdot \sin^n \theta \cdot P_m^{(n)}(\cos \theta), n = 1, 2, K, m \end{aligned} \quad (8.25)$$

Таким образом, присоединенные сферические функции позволяют строить решения, описывающие различные задачи в сферической системе координат. Для каждого  $m$ ,  $2m+1$  и т.д. существуют функции две независимые функции  $u_{mn}$ ,  $v_{mn}$ . Также часто называются сферическими и функции, домноженные на  $\rho^m$ , так что можно решить уравнение

Лапласа в шаре общем случае, то есть найти функцию  $u(\rho, \theta, \varphi)$ , удовлетворяющую уравнению и граничным условиям, когда граничные условия зависят от  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\rho$  (например равное 1) :  $u(1, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ . Для решения этой задачи достаточно найти частное решение дифференциального уравнения так, чтобы выполнялось условие (здесь  $\rho'' = 1$ ), это решение имеет следующий вид:

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \left[ \frac{a_{m0} u_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} u_{mn} + b_{mn} v_{mn}) \right] \quad (8.26)$$

Неизвестные коэффициенты ряда (8.26), называемого также рядом Лапласа, получаются на основе свойства ортогональности функций почлененного интегрирования по сфере. Коэффициенты ряда (8.26) имеют следующий вид:

$$a_{mn} = \frac{(m-n)}{(m+n)} \frac{2m+1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin^{n+1} \theta \cos(n\varphi) P_m^{(n)}(\cos \theta) d\varphi d\theta \quad (8.27)$$

$$b_{mn} = \frac{(m-n)}{(m+n)} \frac{2m+1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin^{n+1} \theta \sin(n\varphi) P_m^{(n)}(\cos \theta) d\varphi d\theta \quad (8.28)$$

*Производящая функция для полиномов Лежандра* имеет вид:

$$(1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (8.29)$$

При  $|2zh - h^2| < 1$ , функция (8.29) может быть разложена в ряд по возрастающим степеням разности  $(2zh - h^2)$ . Если, кроме этого, выполняется условие  $|2zh| + |h|^2 < 1$ , то степени  $(2zh - h^2)$  можно расположить по формуле бинома Ньютона, так как разложение формулы  $\{1 - [(2zh) + |h|^2]\}^{-\frac{1}{2}}$  по степеням выражения  $|2zh| + |h|^2$  сходится абсолютно. В частности, если расположить этот ряд по степеням  $h$ , получим:

$$\begin{aligned}
 (1 - 2zh + h^2)^{-\frac{1}{2}} &= P_0(z) + h \cdot P_1(z) + h^2 \cdot P_2(z) + K \\
 P_0(z) &= 1 \quad , \quad P_1(z) = z \quad , \\
 P_2(z) &= \frac{3z^2 - 1}{2} \quad , \quad P_3(z) = \frac{5z^3 - 3z}{2} \quad , \\
 P_n(z) &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cdot z^{n-4} - K \right\} = \\
 &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n \cdot r!(n-r)!(n-2r)!} \cdot z^{n-2r}
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

В качестве максимального значения ряда  $m$  следует взять целое из чисел  $m = \frac{1}{2}n$ , или  $m = (n-1)/2$ . Выражения  $P_0(z)$ ,  $P_1(z)$ ,  $K$  - представляют собой полиномы Лежандра в явном виде, и  $P_n(z)$  - называется полиномом Лежандра степени  $n$ . Окончательно, для производящей функции и полиномов Лежандра справедливо такое определение:

$$\psi(z, h) = [1 - 2zh + h^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \cdot h^n \tag{8.31}$$

Рассмотренные полиномы являются частным случаем более обширного класса функций, известных как функции Лежандра.

### *Формула Родрига для полиномов Лежандра*

Для полиномов Лежандра известна формула Родрига:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \tag{8.32}$$

В качестве доказательства формулы Родрига, приводим следующее дифференцирование, которое приводит к определению полинома Лежандра рядом по формулам (8.30). Когда  $n$  - целое, выполняется равенство, которое и доказывает формулу Родрига:

$$P_n(z) = \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \frac{d^n}{dz^n} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot z^{2n-2r} \right\} =$$

$$= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r}$$

Здесь следует взять  $m = \frac{1}{2}n$  или  $m = \frac{1}{2}(n-1)$ , чтобы коэффициенты отрицательных степеней были равны нулю.

*Интеграл Шлефли для  $P_n(z)$  (интегральное представление полиномов Лежандра).*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n \cdot (t - z)^{n+1}} dt \quad (8.33)$$

$C$  - контур с отрицательным направлением обхода (то есть обходящий вокруг точки  $z$  один раз против часовой стрелки). Подставив интеграл Шлефли в уравнение Лежандра, покажем, что он является его решением при целых  $n$ :

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} - 2z \cdot \frac{dP_n(z)}{dz} + n(n+1) \cdot P_n(z) =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)dt}{2^n \cdot (t - z)^{n+3}} \cdot \left\{ (n+2) \cdot (t^2 - 1) + 2(n+1) \cdot t \cdot (t - z) \right\} =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}} \right\} dt \quad (8.33a)$$

Полученный интеграл равен нулю, так как функция  $\frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}}$  принимает свое начальное значение после обхода  $C$ , таким образом рассматриваемый интеграл удовлетворяет уравнению и является его решением. На основе интегрального представления сферических функций

(8.33), методом почлененного интегрирования выражения  $\int_{-1}^1 P_m(z)P_n(z)dz$ , и

последующего использования формулы Родрига, приходим к интегральным свойствам полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_m(z)P_n(z)dz = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (8.34)$$

Можно показать простой подстановкой в уравнение, используя (8.33а), что функция Лежандра комплексного аргумента  $z$  в интегральной форме (8.33) удовлетворяет уравнению Лежандра также в тех случаях, когда  $n$  не является целым числом. Контур интегрирования  $C$  должен быть выбран так, чтобы при обходе этого контура функция принимала свое первоначальное значение. Подынтегральная функция  $(t^2 - 1)^{n+1}(t - z)^{n-2}$  имеет три особые точки:  $t = 1$ ,  $t = -1$  и  $t = z$ . Если контур окружает точки  $t = 1$  и  $t = z$ , но не окружает точку  $t = -1$ , тогда конечное значение функции не изменяется; функция на этом контуре сначала умножается на  $e^{2\pi i(n+1)}$ , а затем на  $e^{2\pi i(-n-2)}$ . Функция Лежандра первого рода порядка  $v$  регулярна и является решением уравнения Лежандра на всей комплексной плоскости ( $z$ ) с разрезом по отрицательной части вещественной оси от  $-1$  до  $\infty$ .

### Определение функции Лежандра второго рода $Q_v(z)$ .

функция Лежандра 2-го рода, может быть определена интегралом:

$$Q_v(z) = \frac{1}{2^{v+2} \cdot i \sin(v\pi)} \cdot \oint_{l'} \frac{(t^2 - 1)^v}{(z - t)^{v+1}} dt \quad (8.35)$$

Пусть  $l'$  - контур интегрирования в виде восьмерки, охватывающей точки  $t = \pm 1$  и образованный следующим образом: пусть  $z$  - комплексное число, не лежащее на вещественной оси между  $-1$  и  $+1$ . В плоскости  $z$  предполагается разрез по вещественной оси от  $-\infty$  до  $+1$ , чтобы исключить неоднозначность выбора контура. Построим эллипс в плоскости  $t$  с фокусами в точках  $-1$  и  $+1$ , настолько малый, что точка  $t = z$  находится вне его. Начальную точку обхода контура  $A$  выберем в правом конце этой

восьмерки конура  $I'$ , и проследим как изменится значение интеграла при обходе контура. Аргумент подынтегральной функции получает приращение  $-v\pi$  при движении по нижней части петли, охватывающей точку  $t = +1$ ; прибавим приращение  $+2v\pi$  при движении по петле, охватывающей точку  $t = -1$ ; дополнительно приращение  $-v\pi$  при движении по верхней части петли, охватывающей точку  $t = +1$ . В пределе при уменьшении радиусов  $\varepsilon \rightarrow 0$  окружностей вокруг точек  $\pm 1$ , интегралы по окружностям с центрами в точках  $-1$  и  $+1$  обратятся в нуль; прямолинейные участки контура совпадут с вещественной осью и интегралы по участкам  $(A;+1)$  и  $(+1;A)$  взаимно уничтожатся. Получим окончательно, что интеграл по контуру  $I'$  равен интегралу на участке оси от  $-1$  до  $+1$  с соответствующим учетом фаз:

$$\oint \frac{(t^2 - 1)^v}{r(z-t)^{v+1}} dt = (e^{v\pi i} - e^{-v\pi i}) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^v}{(z-t)^{v+1}} dt = 2i \sin(v\pi) \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^v}{(z-t)^{v+1}} dt \quad (8.36)$$

Также, как для функции Лежандра первого рода, здесь справедливо следующее представление:

$$Q_v^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m Q_v(z)}{dz^m} \quad (8.38)$$

Разложение функции Лежандра в степенной ряд основано на возможности разложения подынтегральной функции в ряд, и обычно определяется через гипергеометрическую формулу.

Также определен широкий класс функций, сферические функции степени  $v$  (и, в частности, целых  $n$ ) и порядка  $\mu$  (или углого  $m$ ), которые могут быть произвольными комплексными числами. Они называются *сферическими функциями* (или *присоединенными функциями Лежандра*) *первого и второго рода* с особыми точками  $z = \pm 1$  и  $\infty$ . Компактная запись этих функций в виде ряда  $\cos\theta$  и определяются следующими соотношениями при  $0 < \theta < \pi$ :

$$P_v^\mu(\cos \theta) = \frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}} \sin^\mu \theta \cdot \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{\Gamma(v+3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu+1/2)_k (v+\mu+1)_k}{k! (v+3/2)_k} \sin[(v+\mu+2k+1)\theta]$$

$$Q_v^\mu(\cos \theta) = 2^\mu \sqrt{\pi} \sin^\mu \theta \cdot \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{\Gamma(v+3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu+1/2)_k (v+\mu+1)_k}{k! (v+3/2)_k} \cos[(v+\mu+2k+1)\theta] \quad (8.39)$$

Присоединенные функции Лежандра первого и второго рода образуют фундаментальную систему решений уравнения, их вронскиан имеет вид:

$$W\{P_v^\mu(z), Q_v^\mu(z)\} = \frac{e^{i\mu\pi} 2^{2\mu} \Gamma\left(\frac{v+\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+\mu+1}{2}\right)}{(1-z^2) \Gamma\left(\frac{v-\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-\mu+1}{2}\right)} \quad , \quad (8.40)$$

$$W\{P_n(z), Q_n(z)\} = -(z^2 - 1)^{-1}$$

*Выражение через гипергеометрическую функцию.*

Справедливо, при  $|1 - z| < 2$  и при произвольных  $\mu$  и  $v$ , следующее представление сферических функций первого рода через гипергеометрическую функцию:

$$P_v^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} F\left(-v, v+1, 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right) \quad (8.41)$$

При  $\mu = 0$ , и  $v$  - целом неотрицательном, сферические функции  $P_v^\mu(z)$  переходят в полиномы Лежандра. Сферические функции второго рода выражаются через гипергеометрическую функцию:

$$Q_v^\mu(z) = \frac{e^{i\mu\pi} \pi^{1/2} \Gamma(v+\mu+1)}{2^{\nu+1} \Gamma(v+3/2)} \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{v+\mu-1}} F\left(1 + \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, v + \frac{3}{2}; z^{-2}\right) \quad (8.42)$$

Выражение определено также при произвольных  $\mu$  и  $v$  и при  $|z| > 1$ .

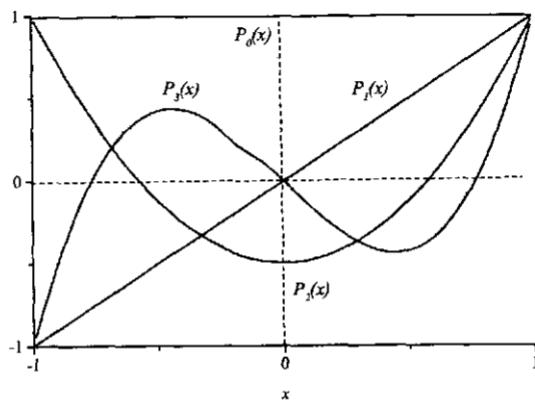


Рис. 8.1 Сферические функции первого рода  $P(x)$ .

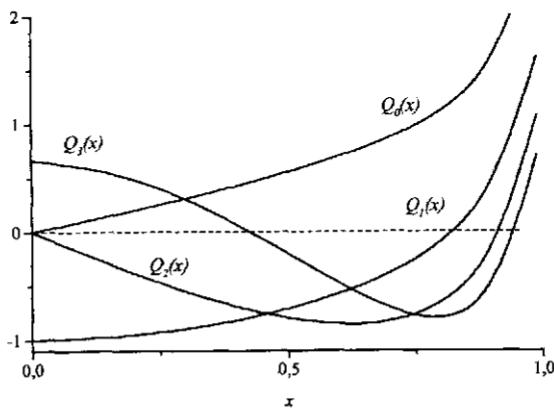


Рис. 8.2 Сферические функции второго рода  $Q(x)$ .

## IX. Ортогональные полиномы.

*Определение.* Пусть  $\rho(x)$  – произвольная неотрицательная функция, интегрируемая на интервале  $(a,b)$ ; функции  $\varphi_k(x)$ ,  $\varphi_l(x)$  – называются ортогональными, если они удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx &= 0 \quad k \neq l \\ \int_a^b \rho(x) [\varphi_k(x)]^2 dx &= N_l \quad k = l \end{aligned} \tag{9.1}$$

Здесь функция называемая *весом*  $\rho(x)$ ;  $N$  – норма функции.

*Ортогональной нормированной функцией* называется следующая:  $\varphi_k(x)/N$ . Будем рассматривать полиномы  $\varphi_k(x)$ , каждый из полиномов имеет степень, указанную его индексом ( $k$  или  $l$ ). Полиномы можно использовать для формального разложения произвольной функции  $f(x)$  в ряд.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \varphi_k(x) \tag{9.2}$$

Умножим обе части соотношения (9.2) на  $\rho(x) \cdot \varphi_l(x)$ ,  $l=0,1,2\dots$ , проинтегрируем в пределах от  $a$  до  $b$ , получим следующее соотношение:

$$\int_a^b \rho(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_l(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \int_a^b \rho(x) \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(x) dx$$

отсюда получим определение константы в разложении произвольной функции по полиномам:

$$C_l = \frac{1}{N_l} \cdot \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) \cdot \varphi_l(x) dx, \quad l = 0, 1, 2\dots \tag{9.3}$$

Из (9.3) и (9.1) следует *свойство полиномов*: если  $f(x)$  – полином степени  $k$ , то он ортогонален любому полиному  $\varphi_l(x)$  меньшей степени  $l$ , с весом  $\rho(x)$  на интервале  $(a,b)$ , то есть в разложении (9.2)  $C_l = 0$  при  $l > k$  из формулы (9.1).

## Рекуррентные соотношения для ортогональных полиномов.

Для того, чтобы вывести рекуррентные соотношения, рассмотрим разложение в ряд по полиномам функцию  $f(x) = x \cdot \varphi_n(x)$ , получим:

$$x \cdot \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n,k} \cdot \varphi_k(x) \quad (9.4a)$$

для коэффициентов  $C_{n,k}$  справедливо общее соотношение (9.3), из которого получим:

$$C_{n,k} = \int_a^b \rho(x) \cdot x \cdot \varphi_n(x) \cdot \varphi_k(x) dx \quad (9.4b)$$

На основе предыдущего вида функции (9.4a), если  $k < n+1$ , тогда функция  $x \cdot \varphi(x) = f(x)$  является полином степени  $k+1 < n$ . Сравнение коэффициентов при  $x^{k+1}$  в обеих частях формулы (9.4a) приводит к соотношению коэффициентов  $C_{n,n+1} = a_n / a_{n+1}$ , где  $a_k$  – коэффициенты при  $x^k$  в полиноме  $\varphi_k(x)$ . На основании (9.4b) справедливо  $C_{n,k} = C_{kn}$  для любых  $n, k$ , тогда справедливо и следующее:  $C_{n-1,n} = a_{n-1} / a_n$ . Из предыдущего и выражений (9.4a, б) следует *рекуррентная формула*, связывающая три последовательные порядка полиномов:

$$x \cdot \varphi_n(x) = C_{n,n-1} \cdot \varphi_{n-1}(x) + C_{n,n} \cdot \varphi_n(x) + C_{n,n+1} \cdot \varphi_{n+1}(x) \quad (9.5)$$

Полагаем полином  $\varphi_n(x)$  – в виде

$$\varphi_n(x) = A_m \cdot x^m + B_m \cdot x^{m-1} + \dots \quad (9.6)$$

$(m = n-1, n, n+1)$

Из (9.5) и (9.6), получаем:

$$\begin{aligned} A_n &= C_{n,n+1} \cdot A_{n+1}, & B_n &= C_{n,n} \cdot A_n + C_{n,n+1} \cdot B_{n+1}, \\ A_{n-1} &= C_{n-1,n} \cdot A_n, & A_{n-1} &= C_{n,n-1} \cdot A_n, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_{n,n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n}, c_{n,n+1} = \frac{A_n}{A_{n+1}}, c_{n,n} = \frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \quad (9.7)$$

После подстановки найденных коэффициентов в (9.5), получим рекуррентную формулу ортогональных полиномов в общем виде:

$$\left( \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} + x \right) \cdot \varphi_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}} \cdot \varphi_{n+1}(x) + \frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot \varphi_{n-1}(x) \quad (9.8)$$

здесь  $A$ ,  $B$  - коэффициенты полинома  $\varphi_m(x) = A_m \cdot x^m + B_m \cdot x^{m-1}$ , ( $m = n-1; n; n+1$ ). Если вес  $\rho(x)$  - функция четная на интервале  $(-a, a)$  или  $(-\infty, +\infty)$ , то есть этот интервал симметричен относительно начала координат, тогда можно показать, что рекуррентная формула упрощается.

Вид рекуррентной формулы для четной функции с весом  $\rho(x)$  упрощается:

$$x \cdot \varphi_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}} \cdot \varphi_{n+1}(x) + \frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot \varphi_{n-1}(x) \quad (9.10)$$

*Приведение гипергеометрического ряда к полиному.*

Гипергеометрический ряд, как было показано раньше, имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} \cdot z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} \cdot z^2 + K \\ &K + \frac{\alpha(\alpha+1)K (\alpha+k-1)\beta(\beta+1)K (\beta+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot K \cdot k\gamma(\gamma+1)K (\gamma+k-1)} \cdot z^k + K \end{aligned} \quad (9.11)$$

напомним, что он является решением гипергеометрического уравнения канонического вида:

$$z(z-1) \cdot w'' + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma] \cdot w' + \alpha\beta \cdot w = 0 \quad (9.12)$$

Рассмотрим полином  $R_n^{(\lambda, \mu)}(s)$ , который должен быть связан с гипергеометрическим рядом (9.11) и должен удовлетворять гипергеометрическому уравнению. Для получения общего вида такого

полинома, в соотношении (9.11) надо сделать следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \lambda &= \gamma - 1; \quad \mu = \alpha + \beta - \gamma; \quad \beta = -n \\ \lambda &> -1; \quad \mu > -1; \quad n > 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Тогда получим выражение функции  $R_n^{(\lambda, \mu)}(s)$  через гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ :

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda, \mu)}(s) &= C_n F(\lambda + \mu + n + 1, -n, \lambda + 1, s) = \\ &= C_n \left[ 1 - \frac{(\lambda + \mu + n + 1)n}{1!(\lambda + 1)} \cdot s + \frac{(\lambda + \mu + n + 1)(\lambda + \mu + n + 2)n(n-1)}{2!(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \cdot s^2 - K + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{(\lambda + \mu + n + 1)K (\lambda + \mu + 2n)nK}{n!(\lambda + 1)K (\lambda + n)} \cdot s^n \right] \end{aligned} \quad (9.14)$$

Здесь  $C_n$  - произвольная постоянная, которую найдем из следующего соотношения, основанного на  $n$ -й производной от  $R_n^{(\lambda, \mu)}(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} \left[ s^{\lambda+n} (s-1)^{\mu+n} \cdot C_n \cdot (-1)^n \cdot \frac{(\lambda + \mu + n + 1)K (\lambda + \mu + 2n)n!}{(\lambda + 1)K (\lambda + n)} \right] &= \\ = (-1)^n \cdot (\lambda + \mu + n + 1)K (\lambda + \mu + 2n) \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot s^\lambda (s-1)^\mu \cdot R_n^{(\lambda, \mu)}(s) & \end{aligned} \quad (9.15)$$

Отсюда при  $C_n = \frac{(\lambda + 1)K (\lambda + n)}{n!}$  получается полином в виде:

$$R_n^{(\lambda, \mu)}(s) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot s^{-\lambda} \cdot (s-1)^{-\mu} \frac{d^n}{ds^n} \left[ s^{\lambda+n} \cdot (s-1)^{\mu+n} \right] \quad (9.16)$$

Отсюда в частности получим:

$$R_0^{(\lambda, \mu)}(s) = 1$$

$$R_1^{(\lambda, \mu)}(s) = -(\lambda + \mu + 2)s + (\lambda + 1)$$

...

Этот преобразованный полином (9.16) является решением классического гипергеометрического уравнения в интервале (0,1). Уравнение с учетом подстановок (9.13) будет иметь вид:

$$s(s-1)R_n''(s) + [(\alpha + \beta + 2)s - (\lambda + 1)]R_n'(s) - (\lambda + \mu + n + 1)nR_n(s) = 0 \quad (9.17a)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ s^{\lambda+1} (s-1)^{\mu+1} \frac{dR(s)}{ds} \right] - n(\lambda + \mu + n + 1)s^\lambda (s-1)^\mu R(s) = 0 \quad (9.17b)$$

Из последнего можно получить при  $n$ -кратном дифференцировании полинома степени  $n$ :

$$\frac{dR_n^{(\lambda,\mu)}(s)}{ds^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)} \quad (9.18)$$

### Полиномы Якоби.

Областью ортогональности полиномов Якоби является конечный интервал (-1,1), так как любой конечный интервал можно свести к нему подстановками. Весом для этих полиномов служит функция при  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ :

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (9.19)$$

Введем подстановку следующего вида:  $s = \frac{1-x}{2}$  в (9.16), получим  $P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$  - полином Якоби порядка  $n$ :

$$R_n^{(\lambda,\mu)}\left(\frac{1-x}{2}\right) = P_n^{(\lambda,\mu)}(x) = \frac{(x-1)^{-\lambda} \cdot (x+1)^{-\mu}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^{\lambda+n} \cdot (x+1)^{\mu+n}] \quad (9.20)$$

В частности,

$$P_0^{(\lambda,\mu)}(x) = 1, \quad P_1^{(\lambda,\mu)}(x) = \frac{1}{2}[(\lambda + \mu + 2)x + (\lambda - \mu)],$$

$$P_2^{(\lambda,\mu)}(x) = \frac{1}{8}[(\lambda + \mu + 3)(\lambda + \mu + 4)x^2 + 2(\lambda - \mu)(\lambda + \mu + 3)x + (\lambda - \mu)^2 - (\lambda + \mu) - 4]$$

...

Применяя далее (9.20) после перегруппировки, можно получить формулу в виде ряда:

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(x-1)^k \cdot (x+1)^{n-k}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(\mu+n-k+1)} \quad (9.21)$$

Из двух последних соотношений определяется коэффициент ряда, и выражение через гипергеометрическую функцию имеет вид:

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)} F\left(\lambda + \mu + n + 1, -n, \lambda + 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (9.22)$$

Нормой полиномов Якоби из определения (9.1) служит следующая функция:

$$\frac{n!(\lambda + \mu + 2n + 1)\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}{2^{\lambda + \mu + 1}\Gamma(\lambda + n + 1)\Gamma(\mu + n + 1)} \quad (9.23)$$

Из полиномов Якоби подстановками  $\lambda = \mu = \sigma - 1/2$ , где  $\sigma > -1/2$ , можно получить другие известные полиномы – *ультрасферические полиномы (называемые еще полиномами Гегенбауэра)*.

$$\begin{aligned} P_n^{(\sigma)}(x) &= \frac{\Gamma(\sigma + 1/2) \cdot \Gamma(2\sigma + n)}{\Gamma(2\sigma) \cdot \Gamma(\sigma + n + 1/2)} \cdot P_n^{\left(\sigma - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}\right)}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\sigma + 1/2) \cdot \Gamma(2\sigma + n)}{\Gamma(2\sigma) \cdot \Gamma(\sigma + n + 1/2)} \frac{(x^2 - 1)^{-\sigma + 1/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^{\sigma + n - 1/2}] \end{aligned} \quad (9.24),$$

в частности:

$$P_0^{(\sigma)}(x) = 1, \quad P_1^{(\sigma)}(x) = 2x\sigma, \quad P_2^{(\sigma)}(x) = \sigma[2(\sigma + 1)x^2 - 1] \dots$$

С помощью этих полиномов разложение  $z^\nu$  по функциям Бесселя имеет следующий компактный вид:

$$z^\nu e^{i\mu z} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + k) P_k^{(\nu)}(\mu) i^k J_{\nu+k}(z) \quad (9.25)$$

Имеет место также разложение Сонина для модифицированных функций:

$$e^{i\mu z} = (2/z)^\nu \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) P_k^{(\nu)}(\mu) J_{\nu+k}(z) \quad (9.26)$$

Отсюда при замене  $\tau = \cos\varphi$ ;  $z = z_1 z_2 / \tau$  были получены изящные формулы сложение Гегенбауэра для цилиндрических функций:

$$\frac{J_\nu(z)}{r^\nu} = \Gamma(\nu) \left( \frac{2}{z_1 z_2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) P_k^{(\nu)}(\cos\varphi) J_{\nu+k}(z_1) J_{\nu+k}(z_2) \quad (9.27a)$$

$$\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \Gamma(\nu) \left( \frac{2}{z_1 z_2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\nu+k) P_k^{(\nu)}(\cos\varphi) I_{\nu+k}(z_1) I_{\nu+k}(z_2) \quad (9.27b)$$

$$\frac{H_\nu^{(1,2)}(r)}{r^\nu} = \Gamma(\nu) \left( \frac{2}{z_1 z_2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) P_k^{(\nu)}(\cos\varphi) J_{\nu+k}(z_1) H_{\nu+k}^{(1,2)}(z_2) \quad (9.27b)$$

$$\frac{K_\nu(r)}{r^\nu} = \Gamma(\nu) \left( \frac{2}{z_1 z_2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) P_k^{(\nu)}(\cos\varphi) I_{\nu+k}(z_1) K_{\nu+k}(z_2) \quad (9.27c)$$

Здесь  $r^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos\varphi$ ; должно выполняться  $|z_1| < |z_2|$ ;  $\nu \neq 0$ .

Из полиномов Якоби (9.20) при  $\lambda=\mu=0$  или из ультрасферических полиномов (9.24) при  $\sigma=1/2$  определяются полиномы Лежандра, эта формула называется формулой Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left[ (x^2 - 1)^n \right]}{dx^n} \quad (9.28),$$

и в частности:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \\ P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

Сейчас проследим, как из полиномов Якоби получаются полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода.

## Полиномы Чебышева 1-го рода $T_n(x)$

Полиномы Чебышева первого рода получаются из полиномов Якоби (9.20) при  $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$  и имеют вид:

$$T_n(x) = \frac{2 \cdot 4 \cdot K(2n)}{1 \cdot 3 \cdot K(2n-1)} \cdot P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) \quad (9.29a)$$

$$T_n(x) = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \sqrt{x^2 - 1} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^{\frac{n-1}{2}}] \quad (9.29b)$$

В частности:

$$T_0(x) = 1 \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_1(x) = x \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Полиномы ортогональны на интервале  $(-1; +1)$  с весом  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Норма  $N_n$  для этих полиномов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot K(2n)}{1 \cdot 3 \cdot K(2n-1)} \right]^2 \cdot \int_{-1}^1 \frac{\left[ P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) \right]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot K(2n)}{1 \cdot 3 \cdot K(2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{\Gamma^2(n+\frac{1}{2})}{n!(2n) \cdot \Gamma(n)} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Исходным уравнением для этих полиномов является следующее:

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{1-x^2} \cdot T'_n(x) \right) + n^2 T_n(x) = 0 \quad (9.31)$$

Можно показать применяя формулу Муавра и подстановки  $y_1 = \cos(n\varphi)$  и  $y_2 = \sin(n\varphi)$ , что возможно преобразование  $T_n(x)$  к следующему простому виду  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ , или  $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$ . Производящая функция для этих полиномов:

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \cdot t^n , \quad \Phi(t, x) = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - e^{i\varphi} \cdot t} = \frac{1 - t \cdot \cos \varphi}{1 - 2t \cdot \cos \varphi + t^2} \quad (9.32)$$

### Полиномы Чебышева 2-го рода $U_n(x)$

Из полиномов Якоби по формуле (9.20) при подстановке  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ , получим *полиномы Чебышева 2-го рода*:

$$U_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(n+2)}{\Gamma(2) \cdot \Gamma(n+\frac{3}{2})} \cdot P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) \quad (9.33a)$$

$$U_n(x) = \frac{2^n \cdot (n+1)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x^2 - 1)^{\frac{n+1}{2}} \right] \quad (9.33b)$$

в частности:

$$U_0(x) = 1 ; U_2(x) = 4x^2 - 1 ; U_1(x) = 2x ; U_3(x) = 8x^3 - 4x \dots$$

Норма полиномов при  $m = n$ :  $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} [U_n(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}$  и вес

$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ , полиномы ортогональны на интервале  $(-1, +1)$ . Представление через гипергеометрическую функцию:

$$U_n(x) = (n+1) \cdot F(n+2; -n; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}) \quad (9.34)$$

Производящая функция имеет вид:

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2} \quad (9.35)$$

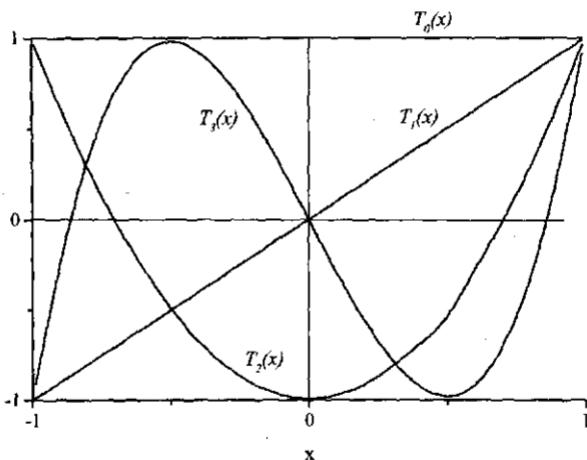


Рис.9.1а. Полиномы Чебышева первого рода –  $T_n(x)$ .

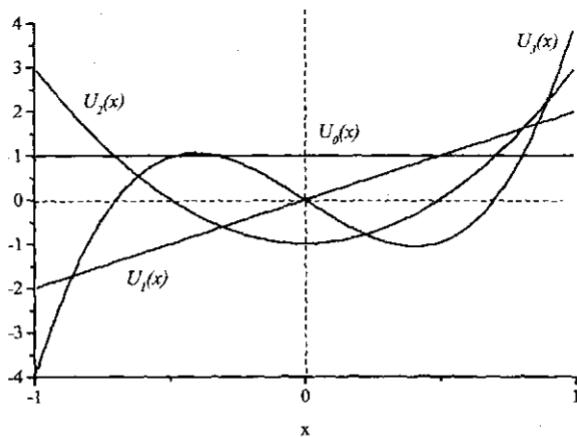


Рис.9.1б. Полиномы Чебышева второго рода –  $U_n(x)$

## Полиномы Эрмита $H_n(x)$

Полиномы Эрмита ортогональны на интервале  $(-\infty, \infty)$ , весом является функция  $\rho(x) = e^{-x^2/2}$ . Получим общий вид этих полиномов последовательным дифференцированием  $\varphi_0(x) = e^{-x^2/2}$ :

$$\varphi'(x) = -x \cdot e^{-x^2/2}, \quad \varphi''(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2}, \quad \varphi'''(x) = (-x^3 + 3x) \cdot e^{-x^2/2} \dots \quad (9.36)$$

Таким образом, легко видеть, что производная любого порядка этой функции ( $e^{-x^2/2}$ ) равна произведению ее же на полином относительно  $x$ , поэтому формулу полинома можно записать компактным способом:

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{-x^2/2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right) \quad (9.37)$$

$H_n(x)$  - называется полиномом Эрмита. В частности:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x + 12 \dots \end{aligned}$$

Можно переписать для  $\varphi(x)$  из (9.36-9.37) следующее:

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n \cdot h_n(x), \quad (9.38)$$

Функцией Эрмита называется функция  $h_m(x) = \exp(-x^2/2) \cdot H_m(x)$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$h_m''(x) + (2m + 1 - x^2) h_m(x) = 0 \quad (9.39)$$

Дифференцирование определения (9.38) ведет к рекуррентным соотношениям, получим:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot [-x \cdot H_n(x) + H_n'(x)] \cdot e^{-x^2/2}$$

Но по определению (9.37) для той же  $\varphi^{(n+1)}(x)$  имеем:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot e^{-x^2/2} \cdot H_{n+1}(x)$$

Поэтому из предыдущего, легко находим рекуррентную формулу для этих полиномов:

$$H_{n+1}(x) = x \cdot H_n(x) - H_{n-1}(x), \quad (9.40a)$$

ее-же можно получить в другом виде:

$$H_{n+1}(x) - x \cdot H_n(x) + n \cdot H_{n-1}(x) = 0 \quad (9.40b)$$

Производящая функция:

$$e^{xt-x^2/2} = H_0(x) - H_1(x) \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot H_2(x) \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot H_3(x) \cdot t^3 + \dots$$

Разложение произвольной функции в ряд по полиномам Эрмита может быть осуществлено по формулам:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k H_k(x) \quad (9.41)$$

$$C_k = \frac{1}{k!(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2} f(x) H_k(x) dx$$

Полиномы Эрмита часто применяются в статистике для представления функций распределения на бесконечном интервале, для этих целей удобнее использовать другой ряд, который называется рядом Грамма-Шарлье:

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(2)} h_m(x), \quad (9.42)$$

$$C_k^{(2)} = \frac{1}{k! 2^k \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) h_m(x) dx$$

В математической физике полиномы Эрмита появляются также в связи с элементарной формой волнового уравнения Шредингера.

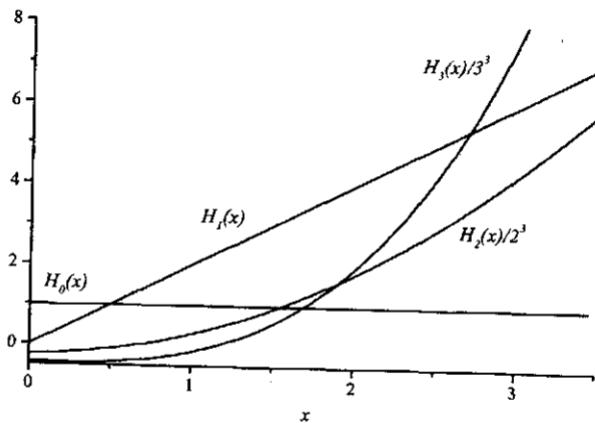


Рис. 9.2а – Полиномы Эрмита -  $H_k(x)$ .

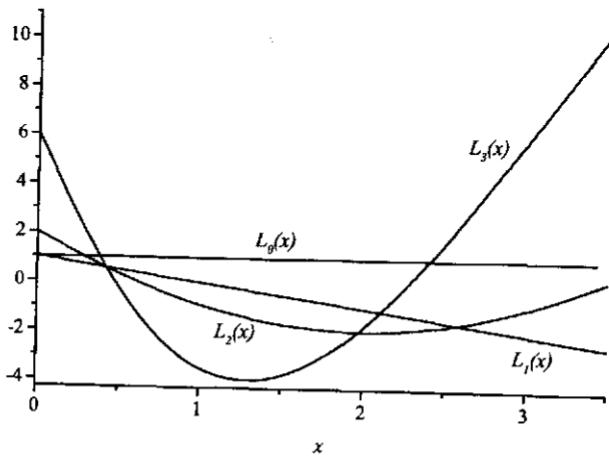


Рис. 9.2б – Полиномы Лагерра -  $L_n^{(0)}(x)$ .

## Полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$

Интервалом ортогональности является  $(0, \infty)$ , весом - функция  $\rho(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}$ , для обеспечения интегрируемости функции  $\rho(x)$ , потребуем  $\alpha > -1$ . Рассмотрим функцию  $\varphi_n(x) = x^{\alpha+n} \cdot e^{-x}$ , вычислив ее  $n$ -ую производную, получим общую формулу, определяющую полиномы Лагерра ( $L_n^{(\alpha)}(x)$  или  $L_n(x)$ ):

$$L_n^{(\alpha)} = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}) \quad (9.43)$$

в частности, полиномы низших степеней при имеют вид:

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)}(x) &= 1 ; \quad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1 , \quad L_2^{(\alpha)}(x) = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2) , \\ L_3^{(\alpha)}(x) &= -x^3 + 3(\alpha + 3)x^2 - 3(\alpha + 2)(\alpha + 3)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) \dots \end{aligned}$$

Нормой полиномов Лагерра является функция:

$$N = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = n! \Gamma(\alpha + n + 1) \quad (9.44)$$

Разложение произвольной функции  $f(x)$  в ряд по полиномам  $L_n(x)$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot L_n(x) \\ c_n &= \frac{1}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \cdot \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x} \cdot f(x) \cdot L_n(x) dx \end{aligned} \quad (9.45)$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \cdot e^{\frac{-xt}{1-t}}, \quad (9.46)$$

$$\Phi(x, t) = L_0(x) - L_1(x) \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot L_2(x) \cdot t^2 + K + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot L_n(x) \cdot t^n$$

Решение волнового уравнения для атома водорода выражается через полиномы Лагерра.

### Уравнение Пирсона.

Рассмотрим веса ортогональных полиномов Якоби, Лагерра, Эрмита:

$$\rho(x) = (1-x)^{\lambda} \cdot (1+x)^{\mu}; \quad \rho(x) = x^{\lambda} \cdot e^{-x}; \quad \rho(x) = e^{-x^2} \quad (9.47)$$

Составим для них дифференциальные уравнения следующего вида:

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{-(\lambda + \mu)x + (\mu - \lambda)}{-x^2 + 1}; \quad \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{-x + \lambda}{x}; \quad \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -2x \quad (9.48)$$

Рассмотрим уравнение Пирсона для весов функций  $\rho(x)$  ортогональных полиномов, объединяющее предыдущее (9.48) при разных значениях коэффициентов:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C} \quad (9.49)$$

Это уравнение является единственным, из него получаются различные дифференциальные уравнения, решения которых выражаются через веса соответствующих полиномов, при следующих различных значениях коэффициентов  $A - D$ :

*Полиномы Якоби:*  $A = -1; B = 0; C = 1; D = -(\lambda + \mu); E = \mu - \lambda;$

*Полиномы Лагерра:*  $A = 0; B = 1; C = 0; D = -1; E = \lambda; \quad (9.50)$

*Полиномы Эрмита:*  $A = 0; B = 0; C = 1; D = -2; E = 0;$

*Полиномы Лежандра:*  $A = -1; B = 0; C = 1; D = 0; E = 0.$

Таким образом, веса указанных ортогональных полиномов, различные по форме, являются решениями одного и того же дифференциального уравнения Пирсона, но при различных значениях коэффициентов.

Рассмотрим пример использования ортогональных полиномов в физических задачах – в уравнении Шредингера.

Уравнение Шредингера имеет вид:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + U\psi \quad (9.51)$$

где  $\mu$  – масса частицы,  $U = U(t, x, y, z)$  – ее потенциальная энергия,  $\psi = \psi(t, x, y, z)$  – волновая функция,  $\hbar$  – постоянная Планка, равная  $1.05 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек. Если силовое поле является стационарным ( $U = U(x, y, z)$ ) тогда, предполагаем решение с разделяющимися переменными по времени и координатам:

$$\psi = \psi_1(x, y, z)T(t), \quad (9.52)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi_1 \frac{dT}{dt}; \quad \Delta\psi = T\Delta\psi_1$$

приводим уравнение (9.51) к следующему виду:

$$ih\psi_1 \frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}T\Delta\psi_1 + U\psi_1 T$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Delta\psi_1}{\psi_1} - U = -ih \frac{T'}{T} = -E$$

Здесь  $E = \text{const}$  – общая энергия частицы. Следовательно, из предыдущего допустимо разделение на 2 уравнения:

$$T' + \frac{Ei}{\hbar}T = 0, \quad T = e^{-\frac{Ei}{\hbar}t} \quad (9.53)$$

и

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi_1 + (E - U)\psi_1 = 0 \quad (9.54)$$

Рассмотрим далее упрощенную одномерную модель линейного осциллятора и следовательно предположим  $\psi_1 = \psi_1(x)$  и  $U = \frac{\mu\omega^2}{2}x^2$ , где  $\omega = const$ , случай упругой силы  $F = -\mu\omega^2x$ , тогда  $\Delta\psi_1 = \frac{d^2\psi_1}{dx^2}$  и последнее уравнение (9.54) принимает вид:

$$\frac{h^2}{2\mu} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \left( E - \frac{\mu\omega^2}{2}x^2 \right) \psi_1 = 0$$

это уравнение после подстановки  $x = \sqrt{\frac{h}{\mu\omega}}x_1$  приобретает вид:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx_1^2} + (\lambda - x_1^2)\psi_1 = 0 \quad (9.55)$$

где  $\lambda = \frac{2E}{h\omega}$ . Очевидно, что  $\psi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  согласно (9.53) и также общему виду решения в исходном предположении (9.52). Последнее уравнение (9.55) совпадает с уравнением полиномов Эрмита (9.39), если:

$$\lambda = \lambda_m = 2m+1 \text{ и } E = E_m = \left( m + \frac{1}{2} \right) h\omega \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.56)$$

Следовательно, энергия квантуется и принимает дискретный ряд значений (*m называется главным квантовым числом*) и решение в уравнения Шредингера в этих предположениях  $\psi_1(x)$  - выражается через полиномы Эрмита  $H_m(x)$ :

$$\psi_{1,m} = \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2h}x^2\right) \cdot H\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{h}} \cdot x\right) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.57)$$

В частности при  $m = 0$  из (9.57) получается  $\lambda_0 = 1$ ,  $E_0 = h\omega/2 \neq 0$ ,  $\psi_{1,0} = \exp(-\mu\omega x^2/2h)$ .

Если частица вращается около неподвижного центра и потенциальная энергия равна константе  $U = const.$  (и в частности  $U = 0$ ), тогда перейдем в уравнении Шредингера к сферическим координатам с центром – в неподвижном центре вращения, в новых переменных  $r =$

*const.*,  $\psi(\theta, \phi)$  , также используем оператора Лапласа в сферических координатах, из (9.54) получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + n(n+1)\psi = 0 \quad (9.58)$$

здесь  $E = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} n(n+1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  , то есть энергия квантуется. Решение

уравнения выражается через сферические функции  $Y_{n,m}^{(1,2)}(\theta, \phi)$  или присоединенные функции полиномов Лежандра  $P_{n,m}(\cos \theta)$ :

$$\begin{aligned}\psi_{n,m}^{(1)}(\theta, \phi) &= Y_{n,m}^{(1)}(\theta, \phi) = P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \cos(m\phi) \\ \psi_{n,m}^{(2)}(\theta, \phi) &= Y_{n,m}^{(2)}(\theta, \phi) = P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \sin(m\phi) \\ m &= 0, 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (9.59)$$

Вращение электрона в атоме водорода отличается тем, что потенциальная энергия, действующая на электрон с зарядом выражается в уравнении Шредингера (9.54) посредством соотношения  $U = -e^2/r$ . Можно показать, что решение уравнения Шредингера выражается через полиномы Лагерра:

$$\psi_1 = R(r)Y(\theta, \phi) = x^{(\lambda-1)/2} \exp(-x/2) \cdot L_n^{(\lambda)}(x) \cdot Y(\theta, \phi) \quad (9.60)$$

где  $x = r\sqrt{-8\mu E/\hbar^2} = 2r\mu e^2/h_s^2$  ,  $\lambda = 2l+1$  ,  $n = s-l-1$  , следовательно из последнего получим квантованные значения:

$$\begin{aligned}\psi_{1,s,l}^{(m)}(r, \theta, \phi) &= R_{s,l}(r)Y_l^{(m)}(\theta, \phi) = \\ &= \left( \frac{2\mu e^2}{h^2 s} r \right)^l \exp\left( -\frac{\mu e^2}{h^2 s} r \right) \cdot L_{s-l-1}^{(2l+1)}\left( \frac{2\mu e^2}{h^2 s} r \right) \cdot Y_l^{(m)}(\theta, \phi)\end{aligned}\quad (9.61)$$

где  $l = 0, 1, \dots, s-1$  ;  $m = 0, \pm l, \dots, \mp l$  .

## X. Применение цилиндрических функций для анализа оптических процессов в волоконно-оптическом световедущем кабеле.

Современная волоконная оптика стала развиваться в начале семидесятых годов двадцатого века одновременно в нескольких странах. Базой для развития этой области науки послужило создание ряда новых технологий, которые позволяли получить сверхчистое стекло, точнее - плавленый кварц, сформированный еще в жидком состоянии в виде тонкой нити. Внешний диаметр световода составляет сейчас стандартную величину 125 микрон, а центральная жила с повышенным показателем преломления обычно имеет в диаметре 3-7 мкм в зависимости от передачи излучения с выбранной длиной волны  $\lambda$ . В настоящее время оптические потери в такой структуре настолько малы, что позволяют передавать лазерное излучение на расстояния порядка 100 км без дополнительного оптического усиления сигналов. Физический эффект распространения лазерных лучей в такой структуре заключается в том, что свет концентрируется в центральной жиле за счет более высокого показателя преломления, и таким образом, только малая доля электромагнитной энергии, переносимой набором разрешенных в такой структуре оптических мод (определенных конфигураций поля), проникает в оболочечную область, где и затухает не доходя до внешней цилиндрической границы оптоволокна.

Рассмотрим волновое уравнение, описывающее распространение оптического излучения в оптическом световоде. Слоистая коаксиальная структура в поперечном сечении оптического свеоврда изображена на рис. 10.1. Сердцевина волокна с показателем преломления  $n_1$  и радиусом "a", окружена оболочкой с показателем  $n_2$  и радиусом "b", внешняя область за пределами радиуса "b" – безгранична и имеет показатель преломления  $n_3$ .

Для нахождения гармонического во времени решения поля с круговой частотой  $\omega$ , будем исходить из *уравнений Максвелла*. Нас интересует распространение изучения в направлении оси оптоволокна  $z$ . В качестве базовых составляющих поля используются его электрическая и магнитная составляющие  $E_z$ ,  $H_z$ , зависимость поля от  $z$  выражается экспонентой комплексного аргумента:  $E_z \cdot \exp(-j\beta z)$  и  $H_z \cdot \exp(-j\beta z)$ . Здесь временная компонента ( $j\omega \cdot t$ ) опущена, таким образом рассматриваются уравнения только для пространственных координат.

Тогда компоненты электромагнитного поля  $E$  и  $H$  - удовлетворяют следующему волновому уравнению:

$$(\nabla_t^2 + k_{rn}^2) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.1)$$

Здесь оператор Лапласа, относящийся к поперечным координатам, в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (10.2)$$

величина  $k_{rn}^2 = n^2 k^2 - \beta^2$  - представляет собой проекцию волнового вектора  $k$  на радиальное направление в различных средах - сердцевине, оболочке оптоволокна с  $n = n_1, n_2$  или в окружающей его бесконечной среде с показателем преломления  $n_3$ . Обычное (типичное) значение показателя преломления для оптического стандартного волокна из кварца с легированной германием сердцевиной, составляет:

$$n_1 = 1.48 \text{ (кварцевая сердцевина) при } 0 \leq r < a, \text{ см. рис. 10.1,}$$

$$n_2 = 1.46 \text{ (кварцевая оболочка) при } a \leq r < b \quad (10.3)$$

$$n_3 = 1 \text{ (внешняя среда - воздух) при } b < r < \infty$$

Решениями уравнения (10.1) служат следующие соотношения:

$$z_m(k_{rn} \cdot r) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \quad (10.4)$$

Здесь  $z_m$  - представляет собой линейную комбинацию двух линейно независимых цилиндрических функций целого порядка  $m$  в каждой из сред.

*I среда - сердцевина оптического волокна*, электрическую и магнитную компоненту поля в этой области запишем следующим образом посредством функции Бесселя с неизвестными пока коэффициентами  $A_E, A_H$ :

$$\begin{aligned} E_{z_1} &= A_E \cdot J_m(k_{r_1} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \\ H_{z_1} &= A_H \cdot J_m(k_{r_1} \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad \text{при } r \leq a \quad (10.5)$$

*II среда – световедущая оболочка*, и компоненты поля здесь, отвечающие решению волнового уравнения, записываются в виде модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned} E_{z_2} &= [C_E \cdot I_m(jk_{r_2} r) + D_E \cdot K_m(jk_{r_2} r)] \cos(m\varphi) \\ H_{z_2} &= [C_H \cdot I_m(jk_{r_2} r) + D_H \cdot K_m(jk_{r_2} r)] \sin(m\varphi) \quad \text{при } a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (10.6)$$

*III среда необходима – это область, окружающая световедущую жилу*, она обязательно учитывается при рассмотрении световедущей структуры, и убывающие поля в этой области описываются только затухающими функциями Макдональда.

$$\begin{aligned} E_{z_3} &= F_E \cdot K_m(jk_{r_3} r) \cos(m\varphi) \\ H_{z_3} &= F_H \cdot K_m(jk_{r_3} r) \sin(m\varphi) \quad \text{при } r \geq b \end{aligned} \quad (10.7)$$

В случае убывающих полей в оболочках II и III, радиальные волновые векторы в этой области будут мнимые. Электрические поля  $E$  по угловой координате соответствуют обычно  $\cos(m\varphi)$ , тогда магнитные поля  $H$  –  $\sin(m\varphi)$  согласно схематической записи решений (10.4). Остальные компоненты электромагнитного поля можно получить с помощью составляющих  $E_z, H_z$  путем решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{j}{k_{r_n}^2} \cdot \left[ \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu_0}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \\ E_\varphi &= -\frac{j}{k_{r_n}^2} \cdot \left[ \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega \mu_0 \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_r &= \frac{j}{k_{r_n}^2} \cdot \left[ \frac{\omega \epsilon_0 n^2}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \beta \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \\ H_\varphi &= -\frac{j}{k_{r_n}^2} \cdot \left[ \omega \epsilon_0 n^2 \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (10.8)$$

В эти формулы будут входить неизвестные пока коэффициенты  $A_E, A_H, C_E, C_H, D_E, D_H, F_E, F_H$ , которые определяются из граничных условий. Эти коэффициенты можно определить, приравнивая две из трех

компонентов полей  $E$  и  $H$  на границах коаксиальной структуры при  $r=a$  и при  $r=b$ . Записывают эти граничные условия следующим образом: на границе тангенциальные составляющие  $E_\phi$ ,  $H_\phi$  из двух соседних сред приравниваются друг к друга для каждой из мод в волноводе, также как и продольные компоненты полей  $E_z$ ,  $H_z$ :

$$\begin{aligned} E_{\phi_1}|_{r=a} &= E_{\phi_2}|_{r=a} & E_{\phi_2}|_{r=b} &= E_{\phi_3}|_{r=b} \\ H_{\phi_1}|_{r=a} &= H_{\phi_2}|_{r=a}; & H_{\phi_2}|_{r=b} &= H_{\phi_3}|_{r=b} \\ E_{z_1}|_{r=a} &= E_{z_2}|_{r=a} & E_{z_2}|_{r=b} &= E_{z_3}|_{r=b} \\ H_{z_1}|_{r=a} &= H_{z_2}|_{r=a} & H_{z_2}|_{r=b} &= H_{z_3}|_{r=b} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Эти граничные условия на двух границах  $r=a$  и  $r=b$  дают систему из восьми уравнений. Система однородная, следовательно, для существования ее нетривиального решения должен быть равен нулю ее определитель. Полученное в результате решения этого определителя уравнение называется *характеристическим уравнением*, откуда и находятся основные необходимые характеристики отдельных мод распространяющегося излучения — так называемые *постоянные распространения*  $\beta_m$  различных мод, номер моды обозначается  $m$ . Наиболее простой вид характеристического уравнения приведен ниже, это соотношение получено из более сложного общего уравнения упрощением для случая двух сред:  $n_1$  — сердцевина,  $n_2$  — кварцевая оболочка:

$$\left[ \frac{J'_m(u)}{u \cdot J_m(u)} + \frac{K'_m(v)}{v \cdot K_m(v)} \right] \cdot \left[ n_1^2 \cdot \frac{J'_m(u)}{u \cdot J_m(u)} + n_2^2 \cdot \frac{K'_m(v)}{v \cdot K_m(v)} \right] = \frac{m^2 \cdot N^2}{\left[ u^2 \cdot \left( \frac{v^2}{u^2 + v^2} \right) \right]^2} \quad (10.11)$$

Также стандартными являются обозначения  $c = \frac{b}{a}$  и  $\frac{\beta_m}{k} = N_m$  — эффективный показатель преломления каждой моды, здесь  $k_{r1}$  или  $k_{r2}$  — радиальные компоненты волнового вектора в сердцевине и оболочке. На границах аргументы цилиндрических функций, описывающих поля, для каждой моды обозначаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 u &= k_{r_1} \cdot a = a \cdot \left( n_1^2 \cdot k^2 - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 v &= jk_{r_2} \cdot a = a \cdot \left( \beta^2 - n_2^2 \cdot k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \omega &= jk_{r_3} \cdot a = a \cdot \left( \beta^2 - n_3^2 \cdot k^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Электромагнитное излучение распространится в такой коаксиальной цилиндрической структуре в виде отдельных мод, отличающихся определенным волновым вектором  $k_m$ , константой распространения  $\beta$  согласно (10.11) и характеризующихся номером моды ( $m$ ). Только в случае  $m = 0$ , правая часть уравнения (10.11) обращается в нуль, следовательно, мы получим два независимых уравнения из левой части. Они описывают две аксиально-симметричные нераспространяющиеся (статические) моды, которые не представляют практического интереса поскольку не переносят информацию. При  $m \neq 0$  моды становятся гибридными, в этом случае только суперпозиция электрического и магнитного полей  $E_z$  и  $H_z$  может удовлетворять всем граничным условиям. Для удобства часто используется замена индексов  $m \neq 0$ ,  $l = m + 1$ . Гибридные моды обозначаются  $HE_{lp}$  и  $EH_{lp}$ , соответственно решения уравнения (10.11), первый индекс соответствует целому числу вариаций поля по углу  $\phi$  (для обеих групп мод  $HE$  и  $EH$ ), т.е. обозначает азимутальный порядок моды и порядок функции Бесселя. Второй индекс  $p$  обозначает радиальный порядок данной моды. Моды  $HE_{11}$  и  $EH_{11}$  являются распространяющимися гибридными модами низшего порядка, первая из них имеет максимальную проекцию волнового вектора на ось, соответственно этому, максимальную концентрацию поля по оси, называется *основной или фундаментальной модой* данного цилиндрического волновода. Каждая из этих оптических мод имеет характерные распределения электрической и магнитной составляющих поля  $E(r, \phi)$  и  $H(r, \phi)$  в сечении световода, и также отличающиеся осевые сомножители  $\exp(-i \cdot \beta_m \cdot z)$  по оси  $z$ . Алгоритм общего решения таков: задавая различные номера мод  $m$ , решаем уравнение (10.11) и находим величину  $\beta_m$ . Затем подставляем  $\beta_m$  в систему уравнений (10.9) для компонент полей на границах, и находим неизвестные коэффициенты, которые позволяют полностью описать конфигурацию полей каждой моды во всей коаксиальной световедущей структуре.

## *Пример расчета характеристик различных мод распространяющегося оптического излучения.*

Рассмотрим расчет мод на примере поликристаллических волоконных инфракрасных световодов, предназначенных для передачи лазерного излучения и обычно работающих в многомодовом режиме. Такие световоды часто применяют в медицине, или в качестве датчиков состояния окружающей среды. Сенсорный эффект достигается за счет частичного или полного выхода оптических мод высокого порядка в окружающую среду (часто – жидкость) при распространении по участкам небольшой длины (метры). Обычно используется многомодовый режим, определяемый материалом (смесь поликристаллов ArCl и ArBr в различных пропорциях) и технологией в отличие от стандартных германиевых одномодовых световодов, используемых в связи.

Для расчетов необходимо адекватно представить цилиндрические функции, входящие в характеристическое уравнение (10.11). Здесь для повышения точности целесообразно рассмотреть функции  $Y_m$ ,  $X_m$ , представляющие собой комбинации функций Бесселя и Макдональда:

$$Y_m = \frac{J'_m(u)}{u \cdot J_m(u)}, \quad X_m = \frac{K'_m(v)}{v \cdot K_m(v)} \quad (10.11)$$

Точность при вычислении такой функции, предполагающей деление цилиндрической функции на ее производную, оказывается выше при учете одного и того же количества членов ряда  $n$ . Ниже используются также следующие рекуррентные соотношения:

$$J'_m(u) = -J_{m+1}(u) + \frac{m}{u} J_m(u), \quad K'_m(v) = K_{m+1}(v) + \frac{m}{v} K_m(v) \quad (10.12)$$

## *Преобразование специальных функций для расчетов.*

Необходимо представить цилиндрические функции соответствующими выражениями в зависимости от величин аргумента и порядка цилиндрических функций для проведения дальнейших расчетов. Рассмотрим отдельно случай низших мод ( $m=1$ ) и мод высокого порядка ( $m=15-30$ ). Фундаментальная мода характеризуется номером  $m=1$ . Фундаментальной моде всегда соответствует малое значение аргументов в функциях Бесселя, поскольку  $\beta \rightarrow n, k$ , поэтому в принципе радиальные

проекции фундаментальной моды как в сердцевине так и в оболочке  $k_{rl}$  – должны быть малыми, поэтому применим формулы для малых аргументов в цилиндрических функциях:

$$J_m(u) \approx \left(\frac{u}{2}\right)^m / \Gamma(m+1), u \rightarrow 0, \quad K_m(v) \approx \frac{1}{2} \cdot \Gamma(m) \cdot \left(\frac{2}{v}\right)^m, v \rightarrow 0 \quad (10.13)$$

Однако, согласно расчетам ниже, значения аргументов здесь получаю все же достаточно большими  $u, v \geq 1$ , поэтому в расчетах были повторно взяты несколько первых членов общих рядов, что обеспечивает необходимую точность:

$$\begin{aligned} J_m(u) &= \left(\frac{u}{2}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-u^2/4)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \\ K_0(v) &= -\ln\left(\frac{v}{2}\right) \cdot I_0(v) + P_0(v), \quad K_1(v) = \ln\left(\frac{v}{2}\right) \cdot I_1(v) + \frac{1}{v} \cdot P_1(v), \quad 0 \leq v \leq 2 \end{aligned} \quad (10.14)$$

Здесь для расчетов функции Макдональда  $K_0(v), K_1(v)$  были выражены через полиномы, также как и функции  $I_0(v), I_1(v)$ . При вычислении использовались полиномы вплоть до членов  $\sim (u/4)^8, (v/4)^8$ .

Случай мод высоких порядков, более активно вытекающих из внешнюю среду с физической точки зрения, соответствует тому что  $k_r$  большое, и аргументы функций являются большими величинами  $v \gg 1, \gg 1$  уже при  $m \geq 2, \dots, 30$ , поэтому следует использовать другие разложения специальных функций – для большого аргумента:

$$\begin{aligned} J_m(u) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \{ \cos(u - 0.5m \cdot \pi - 0.25\pi) \}, \\ K_m(v) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2v}} \cdot e^{-v} \cdot \left\{ 1 + \frac{4m^2 - 1}{8v} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Отношение функции к ее производной всегда давало лучшую точность по сравнению с самой функцией при том же числе членов ряда и имело, например, вид:

$$X_m(v) = \frac{K'_m(v)}{v \cdot K_m(v)} \approx \frac{-1}{v} \cdot \left\{ 1 + \frac{(4m^2 + 3)}{8v} + \dots \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{4m^2 - 1}{8v} + \dots \right\}^{-1} \quad (10.16)$$

### Численный расчеты характеристик дискретных мод.

Одномодовое оптическое волокно, сердцевина (диаметром 30 мкм), оболочка изготавливались из материала близкого состава (поликристаллы AgBrCl) – имело характеристики:  $n_1=2.1106$ ,  $n_2=2.10523$ , так что  $\Delta n=0.0053745$  при длине волны лазерного излучения  $\lambda=10.6$  мкм. Получена константа распространения фундаментальной моды:

$$\beta_{lp}=\beta_{0l} \cdot 1.248393994 \text{ мкм}^{-1}.$$

Для контроля правильности интерпретации специальных функций – рассчитаны аргументы в сердцевине  $u = 1.225638589$ , и в оболочке  $v = 0.537623822$ . Предельная величина  $k_l = 2\pi n_l / \lambda = 1.251065132$ , эта величина близкая к значению  $\beta_{0l}$ , что соответствует физической действительности при одномодовом режиме распространения и говорит о высокой степени локализации поля моды на оси световода.

В качестве другого примера противоположной ситуации волновода с большим числом распространяющихся мод – использовалось безоболочечное волокно AgBrCl диаметром 400 мкм с водой в качестве внешней среды, так что характеристики коаксиальной световедущей структуры таковы:  $n_1 = 2.1106$ ,  $n_2 = 1.33$ ,  $a=200$ . Численные расчеты характеристик каждой из мод показаны в таблице 1.

Таблица 1

m	$\beta, \text{ мкм}^{-1}$	u	v
1	1.251007760190121	2.396232818806	194.26846822196
2	1.250919473089521	3.8180424009518	194.24572641181
3	1.250803455293792	5.1173453042067	194.21583986397
4	1.250661232761895	6.3575001862368	194.1792004011
5	1.250493734216348	7.5614417530113	194.13604579172
6	1.250301594868061	8.7404490029641	194.08653798823
7	1.250085280504181	9.9010217972375	194.03079509294
8	1.249845148762035	11.047295533221	193.96890714347
9	1.249581483266505	12.182086892539	193.90094490737
10	1.249294514323328	13.307412717115	193.82696521332

11	1.248984432273189	14.424773534681	193.74701439119
12	1.248651396536896	15.535320113099	193.66113060192
13	1.248295541983013	16.63995698827	193.56934547716
14	1.247916983553984	17.739409805828	193.4716853102
15	1.24751581971631	18.834270791826	193.36817194349
16	1.247092135091302	19.925030431465	193.25882344497
17	1.246646002499361	21.01210013427	193.14365463296
18	1.246177484574831	22.095828826002	193.02267749029
19	1.245686635059891	23.176515339557	192.89590149545
20	1.245173499854686	24.254417831467	192.76333389077
21	1.244638117878093	25.329761052036	192.62497990156
22	1.244080521782913	26.402742031318	192.48084291756
23	1.243500738549257	27.473534593425	192.33092464285
24	1.242898789991498	28.542292960882	192.17522522314
25	1.242274693186197	29.609154677628	192.01374335267
26	1.241628460824611	30.674243018701	191.84647636133
27	1.240960101539635	31.737668935	191.67342029504
28	1.240269620165086	32.799532706736	191.49456997849
29	1.239557017976418	33.859925300781	191.30991907283
30	1.238822292948643	34.918929446602	191.11946013772

Таким образом, здесь приводятся численные решения уравнения (10.11), точность этих решений была получена в диапазоне  $\sim 10^{-14} - 10^{-9}$ .

Анализируя и сравнивая полученные характеристики  $\beta$  соседних оптических мод становится очевидным, сколь необходима высокая точность для решения подобных структур. Действительно, первая мода от второй отличается всего лишь на  $\Delta\beta=0.000088287$ , вторая мода от третьей отличается на  $\Delta\beta=0.000116018$ , а последние две моды различаются на  $\Delta\beta=0.000734725$ .

Тенденции последних лет, связанные с развитием науки технологий, микроэлектроники, моделирования в биологии, и многих других отраслей человеческих знаний, убеждает нас в необходимости точнейших расчетов при внимательном и бережном обращении с математикой, которая как и прежде занимает центральное место в любой из наук.

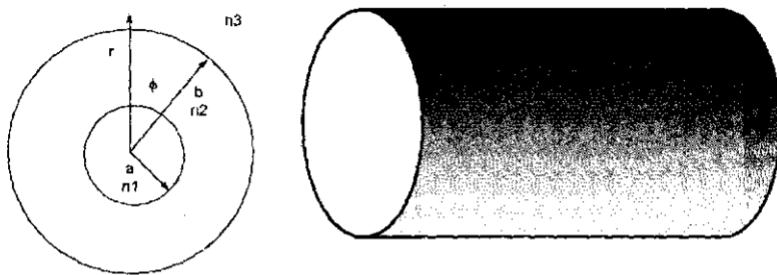


Рис.10.1. Схема поперечного сечения оптического волокна,  $n_1$ ,  $n_2$  – показатель преломления сердцевины и оболочки оптического волокна соответственно,  $n_3$  – показатель преломления внешней среды,  $a$ ,  $b$  – диаметры сердцевины и оболочки;  $r$  – радиальная и  $\phi$  - угловая координаты.

## **Литература.**

1. Абрамович М., Стиган И. ред. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979 , 830 с.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977, 34с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М: Наука, 1977, 831с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.. Интегралы и ряды. том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука, 1981, 687с.
5. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001, 575 с.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997, 303с.
7. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997, с.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003, 416с.
9. Полянин А.Д. Универсальный справочник. Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов. М.: Аст, 2005, 480с.
10. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. Методы решения. М.: Физматлит, 2003, 587с.
11. Полянин А.Д., Полянин В.Д., Попов А.В. Универсальный справочник. Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов. М.: АСТ /Астрель, 2005, 735с.
12. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005, 254с.
13. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций т.1, М.: Издательство иностранной литературы, 1949, 798 с.
14. Уиттекер Э. Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа, т.1, 2, М.: Физматлит, 1963.
15. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965, 423 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т 1,2,3, М.: Наука, 1974 .
17. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматлит, 1962, 127с.
18. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М: Иностранная литература, 1948, 260 с.

19. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978, 376с.
20. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. Ст-Петербург: Невский диалект, 2002, 311с.
21. Розетт Т.А. Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике. М.: Советское радио, 1956, 223с.
22. Рыжик И.М. Специальные функции. Собрание формул и вспомогательных таблиц. М.: НКТП, 1936, 160 с.
23. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. М.-Л., 1935, 244с.
24. Де Брэйн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Иностранная литература, 1961, 247с.
25. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2004, 144с.
26. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003, 336с.
27. Карслу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. 1964, М.: Наука, 488с.
28. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. М.-Ижевск, 2002, 144с.
29. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. 2007, М.: Интеллект. 344с.
30. Кафтанова Ю.В. Специальные функции математической физики. 2009, Харьков: Коргес. 180с.
31. Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева. 1984. Минск Вышэйшая школа, 157с.
32. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. 1980, М. Мир, 608с.
33. Кампен де Ф.Ж , Кенпбелл Р. Петьо Г. Функции математической физики. Справочное руководство. М. Физматлит. 1963, 104с.
34. Tranter C.J. Bessel functions with some physical applications. London: The English university press LTD, 1969, 147p.
35. Boas, Mary L. Mathematical methods in the physical sciences. USA: John Wiley and Sons Inc. 1966, 775p.
36. McLachlan N.W. Bessel functions for engineers. UK: Oxford, 1955.
37. Luke Y.L. Integrals of Bessel functions. UK: McGraw-Hill, 1955.
38. Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Ioshida M. From Gauss to Painleve a modern theory of special functions. Germany: Braunschweig- Vieweg, 1991.

***"An introductory course on special functions designed for the students and young researches specializing in physics"***

**by Tamara Tulaikova and Svetlana Amirova,**

**Moscow, Book-business – press, 2009.**

#### **The Abstract**

The introductory course aims to facilitate understanding of subtle points in description, properties and applications of special functions which are commonly met in the modern problems of applied mathematics and physics. In addition, the course provides overview of major mathematical textbooks, databases and supplementary materials in order to find a quick and efficient way of solving a particular problem involving special functions. The course book is based on the lecture series which being given to MSc and PhD students in applied mathematics and physics. The main features of the book are simplified description and an effective usage of several main concepts and previous operations tend to special functions. The particular attention has been drawn to the practical applications of special functions in analytical models of modern physics. The ultimate goal of the authors is to illustrate the importance of independent research work alongside with creativity in developing of an effective analytical method to facilitate understanding of the particular physics phenomenon.

Тулайкова Тамара Викторовна,  
Амирова Светлана Равильевна.

*Вводный курс  
по специальным функциям  
для аспирантов-физиков*

Подписано в печать 28.04.2009. Формат 60x88  $\frac{1}{16}$ .  
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.  
Печ. л. 9,75. Тираж 500 экз. Заказ № 4987.

Ф. л. Тулайкова Т.В.  
140005, Московская область, г. Люберцы,  
ул. Кирова, д. 55  
т\ф. 8-495-5030483  
e-mail: [tulaik@yandex.ru](mailto:tulaik@yandex.ru)

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИПТИ»  
140010 Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский просп. 403.  
Тел. 8-495-554-21-86