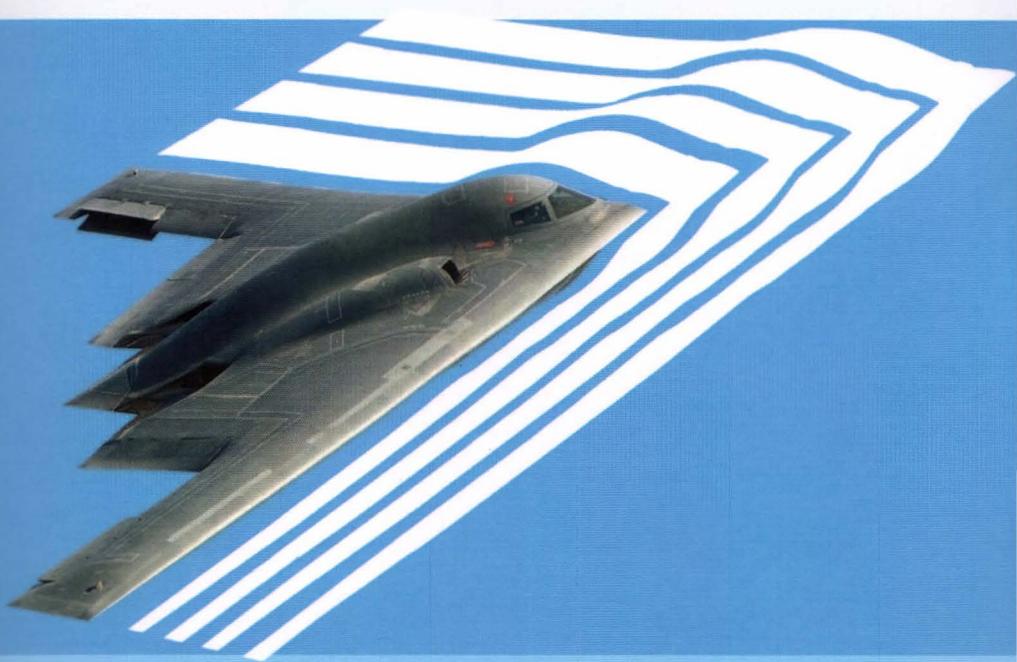


П. Я. Уфимцев

Теория дифракционных краевых волн в электродинамике

Введение в физическую
теорию дифракции



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

Теория дифракционных краевых волн в электродинамике

Theory Of Edge Diffraction In Electromagnetics

Pyotr Yakovlevich Ufimtsev
University of California at Irvine and
University of California at Los Angeles

Edited by **Andrew J. Terzuoli, Jr.**
Air Force Institute of Technology (AFIT)

Translated by **Richard D. Moore**
(Formerly with USAF Foreign Technology Division)

Tech Science Press

Encino, California

П.Я. Уфимцев

Теория дифракционных краевых волн в электродинамике

Введение в физическую теорию дифракции

Перевод с английского
А. В. Капцова



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2012

УДК 537.811+621.371.334

ББК 22.336

У88

Уфимцев П. Я.

У88 Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции / П. Я. Уфимцев ; пер. с англ. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 372 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0634-3

В книге изучается дифракция электромагнитных волн на телах, больших по сравнению с длиной волны. Развиваются приближенные и строгие методы исследования. Полученные результаты проливают свет на природу таких явлений, как дифракция Френеля, теневое излучение, деполяризация обратного рассеяния, процесс формирования краевых волн и т. д.

Книга предназначена для радиофизиков и радиоинженеров, а также для преподавателей вузов, аспирантов и студентов при изучении антенн, дифракции радиоволн и стелс-технологии по созданию объектов, невидимых для радаров.

УДК 537.811+621.371.334

ББК 22.336

Первый тираж издания осуществлен при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 05-02-30003

Научное издание

Уфимцев Петр Яковлевич

**ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ.
ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ДИФРАКЦИИ**

Ведущий редактор *И. Я. Иццоки*

Художник *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Оригинал-макет подготовлен *А. В. Капцовым* в пакете \LaTeX 2 ϵ

Подписано в печать 15.09.11. Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 30,55. Тираж экз. Заказ

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

ISBN 978-5-9963-0634-3

© 2003 by Tech Science Press

© Перевод на русский язык, БИНОМ.
Лаборатория знаний, 2007

Оглавление

Предисловие редактора перевода	9
Предисловие автора к русскому изданию	10
Предисловие	13
Предисловие редактора американского издания	19
Комментарии к американскому изданию	21
Благодарности	23
Введение	24
Краткий обзор литературы по теории краевых волн	27
1. Дифракция электромагнитных волн на черных телах	33
§ 1.1. Черные тела	33
§ 1.2. Векторный аналог теорем Гельмгольца	34
§ 1.3. Определение черного тела и теорема о теневом контуре	36
§ 1.4. Принцип дополнительности для тонких экранов	41
§ 1.5. Интегральный поперечник рассеяния для черных тел	42
§ 1.6. Черная полуплоскость	43
§ 1.7. Черная лента и черный диск	48
§ 1.8. Физическая модель черного тела	55
§ 1.9. Наблюдение М. Л. Левина	57
§ 1.10. Основные свойства поля, рассеянного черными телами	59
2. Дифракция на выпуклых идеально проводящих телах: элементы физической теории дифракции	61
§ 2.1. Равномерные и неравномерные токи	61
§ 2.2. Краевые волны поля, рассеянного клином	63
§ 2.3. Поле, рассеянное круговым изломом	70
§ 2.4. Конусы	75
§ 2.5. Параболоиды вращения	83
§ 2.6. Сферические поверхности	87
§ 2.7. Дополнительные замечания	91
3. Дифракция на вогнутых телах: обобщение физической теории дифракции	93
§ 3.1. Поле внутри клиновидного рупора	93
§ 3.2. Дифракция на круговом изломе вогнутой поверхности вращения	102

§ 3.3.	Поле в отраженной конической волне	104
§ 3.4.	Эффективная поверхность рассеяния конического тела	106
§ 3.5.	Результаты численных расчетов эффективной поверхности рассеяния	111
§ 3.6.	Дополнительные замечания	114
4.	Измерение поля, излучаемого дифракционными токами	115
§ 4.1.	Обратное рассеяние волн с круговой поляризацией	115
§ 4.2.	Деполаризация отраженной волны	122
§ 4.3.	Основные результаты	125
5.	Исследование дифракции на клине методом параболического уравнения	127
§ 5.1.	Параболическое уравнение	127
§ 5.2.	Постановка задачи	128
§ 5.3.	Решение параболического уравнения	130
§ 5.4.	Асимптотическое разложение для функции $w(r, \psi)$	134
§ 5.5.	Метод отражений	137
§ 5.6.	Поперечная диффузия и дифракция цилиндрических волн на клине	139
§ 5.7.	Дополнительные замечания	141
6.	Волны тока в тонких проводниках и на ленте	143
§ 6.1.	Бесконечный проводник, возбуждаемый сосредоточенной э.д.с.	144
§ 6.2.	Передающий вибратор	147
§ 6.3.	Полубесконечный проводник, возбуждаемый плоской волной	149
§ 6.4.	Пассивный вибратор	154
§ 6.5.	Ближнее поле	159
§ 6.6.	Волны тока на ленте	161
§ 6.7.	Основные результаты	165
§ 6.8.	Дополнительные замечания	166
7.	Излучение краевых волн: теория, основанная на теореме вза- имности	167
§ 7.1.	Вычисление поля в дальней зоне	167
§ 7.2.	Излучение передающего вибратора	168
§ 7.3.	Первичная и вторичная дифракция на пассивном вибраторе	170
§ 7.4.	Многократная дифракция краевых волн	177
§ 7.5.	Полное рассеянное поле	180
§ 7.6.	Вибратор, короткий по сравнению с длиной волны (пассив- ный диполь)	185
§ 7.7.	Результаты численных расчетов	187
§ 7.8.	Излучение краевых волн на ленте	191
§ 7.9.	Заключение	195
8.	Функциональные и интегральные уравнения в теории дифрак- ции плоской волны на ленте (граничная задача Неймана)	197
§ 8.1.	Об асимптотических решениях задачи о дифракции на ленте	197
§ 8.2.	Симметрия краевых волн	198
§ 8.3.	Формулировка и решение функциональных уравнений	201

§ 8.4.	Характеристика рассеяния и уравнение краевых волн	204
§ 8.5.	Ряд последовательных приближений для тока и их свойства	207
§ 8.6.	Сходимость бесконечных рядов для тока	210
§ 8.7.	Интегральное уравнение для тока и решение Шварцшильда	214
8.7.1.	Интегральное уравнение, вытекающее из решения функциональных уравнений (8.3.10)	214
8.7.2.	Интегральное уравнение, которое является следствием решения Шварцшильда	215
8.7.3.	Эквивалентность ядер $K(x, z)$ и $\hat{K}(x, z)$	217
§ 8.8.	Преобразование формулы (8.5.2) в (8.5.10)	220
9.	Асимптотическое представление для плотности тока на ленте	223
§ 9.1.	Леммы об асимптотических разложениях для многократных интегралов	223
§ 9.2.	Асимптотические ряды для функций χ_n	228
§ 9.3.	Оценки для функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$, $\varphi(kz, 1)$ и $\hat{\varphi}_m(kz)$	230
§ 9.4.	Асимптотические представления для функций χ_n	232
§ 9.5.	Первое приближение для тока	235
§ 9.6.	N -е приближение для тока	237
9.6.1.	Вывод приближенной формулы	237
9.6.2.	Проверка краевых условий	238
9.6.3.	Оценка погрешности	239
10.	Асимптотические представления для диаграммы рассеяния	241
§ 10.1.	Точное выражение для характеристики рассеяния и некоторые свойства функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$	241
§ 10.2.	Асимптотические представления для функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$	244
10.2.1.	Асимптотические ряды для функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$	244
10.2.2.	Оценка функции $U_{n,2}(\alpha, \alpha_0)$	247
10.2.3.	Асимптотическое представление для $\varphi_{n+m}(\alpha, \alpha_0)$	248
§ 10.3.	Первое приближение для диаграммы рассеяния	249
§ 10.4.	N -е приближение для диаграммы рассеяния	254
10.4.1.	Вывод приближенной формулы	254
10.4.2.	Проверка граничных условий	255
10.4.3.	Оценка погрешности	255
10.4.4.	Интегральный поперечник рассеяния	256
§ 10.5.	Зависимость между приближенными выражениями для тока и диаграммы рассеяния	258
§ 10.6.	Дополнительные замечания	262
11.	Дифракция плоской волны на ленте, ориентированной в направлении поляризации (граничная задача Дирихле)	263
§ 11.1.	Формулировка и решение функциональных уравнений	263
§ 11.2.	Диаграмма рассеяния и уравнение краевых волн	265
§ 11.3.	Ряд последовательных приближений и интегральное уравнение для тока	267
11.3.1.	Ряд по функциям $\xi_n(z, \alpha_0)$ и некоторые свойства этих функций	267

11.3.2. Интегральное уравнение для тока	269
§ 11.4. Асимптотические представления для функций $\xi_n(z, \alpha)$	270
§ 11.5. Первое приближение для тока	275
§ 11.6. N -е приближение для тока	276
§ 11.7. Ряд по функциям $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ для диаграммы рассеяния	277
§ 11.8. Асимптотические представления функций $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$	278
§ 11.9. Первое приближение для диаграммы рассеяния	281
§ 11.10. N -е приближение для диаграммы рассеяния	284
§ 11.11. Зависимость между приближенными выражениями для тока и диаграммы рассеяния	288
§ 11.12. Основные результаты математической теории краевых волн	290
12. Дифракция на открытом резонаторе, образованном параллельными лентами	291
§ 12.1. Вывод основных функциональных уравнений	292
§ 12.2. Формулировка и решение функциональных уравнений для краевых волн	295
§ 12.3. Строгие выражения для рассеянного поля в дальней зоне и внутри резонатора	300
§ 12.4. О физическом смысле и асимптотических разложениях для функции $\mathcal{F}_n(w, u)$	305
§ 12.5. Приближенные выражения для диаграмм рассеяния и амплитуд краевых волн	309
§ 12.6. Резонансная часть поля внутри резонатора	316
§ 12.7. Излучение из открытого резонатора	320
§ 12.8. Результаты численных расчетов	329
§ 12.9. Основные результаты	333
§ 12.10. Дополнительные замечания	334
Заключение	335
Список литературы	338
Приложение 1. Связь между системой единиц СГС и СИ	356
Приложение 2. Ключевая теорема эквивалентности	362
Авторский и предметный указатель	367

Предисловие редактора перевода

Данная книга издана в США в 2003 г. и является продолжением другой известной книги автора — «Метод краевых волн в физической теории дифракции», опубликованной в СССР в 1962 г. и переведенной в США на английский язык в 1971 г. Обе эти книги рассматриваются американскими специалистами как фундаментальный вклад в теорию дифракции электромагнитных волн. Читателям будет интересно самим ознакомиться с оценками американских специалистов в их комментариях, которыми открывается данная книга.

Теория, развитая в книге, может быть использована при конструировании микроволновых антенн и при исследовании характеристик рассеяния различных объектов, представляющих практический интерес. В комбинации с численными методами она находит применение для разработки эффективных гибридных схем для решения сложных задач излучения и рассеяния электромагнитных волн. Данная книга также будет полезна при создании разнообразных вузовских курсов, которые включают в себя асимптотические методы в теории дифракции и их применение для расчета антенн и характеристик рассеяния. Книга предназначена для научных сотрудников исследовательских институтов и лабораторий, для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов.

В процессе перевода книги на русский язык автор исправил в ней замеченные опечатки, а также внес некоторые изменения и добавления в ее текст.

Академик Ю. В. Гуляев

Предисловие автора к русскому изданию

Краевые дифракционные волны, возникающие вблизи острых изломов на поверхности тел, являются постоянным объектом исследования с тех пор, как в XVI веке итальянский ученый Гримальди открыл явление дифракции. Достаточно упомянуть, например, исследования великого Ньютона, проведенные им на рубеже XVI и XVII веков. Их анализ и современная интерпретация даны в статье [54]. В настоящее время изучение краевых волн продолжает стимулироваться разнообразными практическими задачами, которые возникают при разработках антенн, радаров, систем мобильной радиосвязи и т. д.

Одним из новых направлений в современной «high-tech», которое также стимулирует дальнейшее развитие теории дифракции вообще и теории краевых волн в частности, является так называемая стелс-технология по созданию новых типов вооружения (танки, самолеты, ракеты, спутники, корабли и т. д.) с низкой радиолокационной видимостью. Именно в этой технологии с наибольшим эффектом была использована разработанная автором теория краевых волн, которая получила международную известность как «физическая теория дифракции» (ФТД).

В настоящей монографии представлены основные положения этой теории, приведены примеры решения ряда практических задач, а также дано обоснование ФТД с помощью более строгой, математической теории. Вкратце сформулируем основные результаты, содержащиеся в этой книге.

В рамках известной модели Кирхгофа—Котлера здесь построена теория дифракции на «черных» телах, поверхность которых считается идеально поглощающей (с коэффициентом отражения равным нулю). Показано, что дифракционное поле, создаваемое такими телами, обусловлено краевыми волнами (теорема о теневом контуре). Практическая ценность этой теории состоит в том, что она позволяет установить дифракционный предел уменьшения полного рассеянного поля путем нанесения радиопоглощающих покрытий на отражающий объект. С научной точки зрения эта теория интересна тем, что она проясняет

физическую природу таких явлений, как дифракция Френеля и эффект интенсивного теневого рассеяния (*forward scattering*). Эта теория также дает объяснение фундаментальному закону, согласно которому интегральный поперечник рассеяния больших (по сравнению с длиной волны) идеально отражающих тел равен удвоенной площади поперечного сечения их зоны тени.

Основная часть книги посвящена дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах, которые служат хорошей моделью для металлических тел в радиолокационном диапазоне частот. В частности, здесь проведены расчеты радиолокационных поперечников рассеяния для тел вращения, которые могут служить моделями головных частей ракет и самолетов. Показано, что результаты этих теоретических расчетов удовлетворительно согласуются с данными экспериментов. Здесь также предложен метод экспериментального выделения той части радиолокационного сигнала, который обусловлен дифракционной компонентой тока на поверхности отражающих тел. Такие данные могут быть полезны для идентификации радиолокационной цели.

Наряду с приближенной физической теорией дифракции значительное внимание в книге уделяется строгой математической теории, основанной на решении функциональных уравнений (метод Винера—Хопфа—Фока). Здесь получены строгие решения и асимптотические формулы для тока, возбуждаемого плоской волной на ленте, и для для рассеянного ею поля в дальней зоне. Решения представлены в виде суммы краевых волн, возникающих вследствие многократной дифракции на краях ленты. Построенные асимптотики являются в своем роде уникальными. Они пригодны для расчета поля в любой точке на ленте и в любом направлении в дальней зоне, при любом направлении падающей волны, включая скольльзящие направления. Они строго удовлетворяют принципу взаимности и условиям непрерывности поля в свободном пространстве за пределами ленты. Эти результаты также служат обоснованием приближенных решений, полученных в книге с помощью физической теории дифракции.

В книге также изучается важный для радиолокации вопрос о влиянии резонансных свойств цели на ее характеристики рассеяния. Исследование проведено на примере двух простейших типов резонансных объектов: проволочного вибратора и открытого резонатора, образованного двумя параллельными пластинами, расположенными одна над другой. Показано, что резонанс тока и поля в этих системах является следствием синфазной интерференции краевых волн. Резонанс в вибраторах сопровождается резонансом в рассеянном поле. Иная ситуация наблюдается в случае двух параллельных пластин. Поле между пластинами обладает

резонансом, но он не оказывает существенного влияния на рассеянное поле в дальней зоне.

Отметим также, что идеи физической теории дифракции в сочетании с численными методами с успехом применяются в различных гибридных подходах для решения сложных задач излучения и рассеяния.

Данная монография существенно дополняет недавно вышедшую из печати другую книгу автора [196], в которой изложено дальнейшее развитие ФТД, основанное на концепции элементарных краевых волн. Вместе эти две книги дают довольно полное представление о современном состоянии ФТД.

При подготовке настоящего, второго, издания в текст книги внесены некоторые исправления и дополнения. В частности, в книгу включено приложение 2 с детальным изложением ключевой теоремы эквивалентности. В списке литературы приведены дополнительные ссылки, относящиеся к теории краевых волн.

Книга предназначена для научных работников, занимающихся проблемами антенн, распространения радиоволн, радиолокации и стелс-технологии. Она также может быть полезна при подготовке разнообразных вузовских курсов, где рассматриваются асимптотические методы в теории дифракции.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность всем, кто способствовал изданию этой книги в России: директору ИРЭ Российской Академии Наук академику Ю. В. Гуляеву за его поддержку по изданию книги и за ее редактирование, доктору А. В. Капцову за перевод книги на русский язык и за создание ее оригинал-макета, ученому секретарю ИРЭ РАН доктору И. И. Чусову за его содействие в оформлении необходимой документации.

Перевод книги и ее издание выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках издательского проекта № 05-02-30003.

П. Я. Уфимцев

Предисловие

Истребитель F-117 Stealth («невидимка» для радаров) фирмы Локхид (Lockheed) и стратегический бомбардировщик B-2 Stealth фирмы Нортроп (Northrop) играют ключевую роль в современных Военно-Воздушных Силах США.

Эти изделия были первыми двумя наиболее важными образцами военных самолетов, в которых используются принципы разработанной Петром Уфимцевым физической теории дифракции (ФТД). Бен Рич (Ben Rich), который руководил легендарным проектом Локхида «Skunk Works» (Работы Скунса), ссылается на теорию профессора Уфимцева как на «краеугольный камень, позволивший осуществить прорыв в технологии Стелс (невидимка)». В компании Нортроп, где я работал по проекту B-2, мы были такими энтузиастами ФТД, что коллеги и я иногда напевали хором «Вперед, Уфимцев» на мотив «Вперед, Висконсин».

И до сегодняшних дней эта довольно абстрактная физика и математика, разработанная приятным и скромным джентльменом Старого Света, оказывает влияние на военную стратегию и тактику. Тем самым она помогает формировать историю — не только через F-117 и B-2, но и через многие военные системы различного вида, которые включают технологию Стелс, основанную на ФТД.

Можно на самом деле привести доводы, что B-2, созданный с использованием ФТД, сыграл важную роль в окончании холодной войны еще до того, как он стал принимать участие в военных операциях. Советский Союз просматривал воздушное пространство с помощью сети радиолокационных станций, расположенных так, что они перекрывали все подступы на его территорию для любых обычных военных самолетов. Но если технология Стелс могла бы уменьшить дальность обнаружения в n раз, то Советскому Союзу пришлось бы увеличить во столько же раз количество радиолокационных станций, чтобы обеспечить необходимую радиолокационную защиту своей территории. Такие расходы его экономика не могла бы выдержать. Это важное соображение находит

подтверждение в словах Горбачева о том, что Советский Союз не мог больше выдерживать военное соревнование с Западом.

Профессор Уфимцев, урожденный русский, который теперь живет в Лос-Анджелесе, работал в государственном научном институте в Москве в то время, когда он опубликовал свою теорию (1962). Однако Советский Союз очевидно не оценил в полной мере значение физической теории дифракции и не воспользовался теми преимуществами, которые представляла ему эта теория.

Те из нас, кто разрабатывали технологию Стелс в таких фирмах, как Нортроп (Northrop), Локхид (Lockheed) и Грумман (Grumman), нуждались в методе оценки остаточного рассеяния от тел, которые уже разрабатывались по технологии Стелс. Физическая теория дифракции профессора Уфимцева оказалась таким методом и также дала нам руководство, как еще улучшить эту технологию. Кстати компания Грумман, будучи еще независимой от Нортропа, наградила профессора Уфимцева медалью Л. Р. Груммана — своего основателя.

Большинство радиолокационных систем являются моностатическими или почти моностатическими. Это означает, что радарный излучатель и приемник располагаются вдоль линии направления на цель или вдоль линий, которые отличаются лишь на малый угол. Такой радар «видит» только тот сигнал, который возвращается от цели в направлении обратного рассеяния или близкого к ней. Наиболее интенсивный сигнал создается теми точками на отражающей поверхности, где линия направления на цель нормальна к поверхности или к ребру — если такие точки существуют. Поэтому дизайнер объекта с низкой радиолокационной видимостью, т. е. стелс-объекта, ищет способ минимизации диапазона направлений, для которых такие точки действительно существуют, и старается изменить форму объекта так, чтобы они с малой вероятностью лежали на одной линии с радарным лучом. Затем он использует специальные материалы для уменьшения обратного рассеяния.

С этой целью поверхность F-117 собирается главным образом из фасеток в виде многоугольников, образующих клин с прямыми ребрами и плоскими гранями. Клин с прямыми ребрами, но с искривленной поверхностью играет ключевую роль в дизайне В-2, где ребра формируются с помощью объединения неглубоких верхних и нижних поверхностей вдоль полигональной платформы. В обоих дизайнах используются специальные материалы.

Таким образом, ФТД должна быть и на самом деле оказывается вычислительным средством для решения задач дифракции, включающих плоские и искривленные поверхности, прямые ребра, материалы отлич-

ные от идеальных проводников, и обратное рассеяние в направлениях далеких от нормали к поверхностям и к ребрам.

Возможно, и это даже более важно, что ФТД была движущей силой в дизайне обоих самолетов. Основной мотивацией для дизайна F-117 из плоских фасеток была возможность, которую предоставила ФТД, анализировать самолеты, используя существующие на тот момент компьютерные возможности.

Что касается В-2, то мы далеко продвинулись в процессе дизайна, когда правительство сделало существенное изменение в спецификации, которое потребовало значительного изменения в дизайне. Если бы мы были не готовы к этому, то потребовались бы дополнительные миллиарды к стоимости проекта или это даже убило бы его. Но мы уже разработали метод перепланировки в качестве абстрактного упражнения в применении принципов ФТД и получили экспериментальное подтверждение новой концепции спустя несколько дней, благодаря чему проект продолжился благополучно.

Профессор Уфимцев впервые опубликовал ФТД в ряде статей в советских журналах, начиная с конца 50-х годов. В 1962 году он собрал свои результаты в книге, озаглавленной «Метод краевых волн в физической теории дифракции». Она была переведена с русского языка в 1971 г. подразделением US Air Force Foreign Technology Division¹ как «Method of Edge Waves in the Physical Theory of Diffraction».

Настоящая книга содержит улучшенное, современное изложение и развитие наиболее значимых материалов в книге 1962 года, дополненное новыми результатами из последующих работ профессора Уфимцева.

Профессор Уфимцев изначально разработал ФТД как усовершенствование приближения физической оптики (ФО) в задачах рассеяния электромагнитных волн на отражающих телах. Оба эти приближения базируются на следующих соображениях:

а) Поля, рассеянные телами, можно рассматривать как излучение, создаваемое эквивалентными электрическими и магнитными токами, которые возбуждаются на поверхности тел радарными волнами. Эквивалентные электрические токи определяются путем вращения тангенциального магнитного поля на 90° в плоскости поверхности (по отношению к наблюдателю, смотрящему на тело, вращение осуществляется в направлении против хода часовой стрелки). Эквивалентные магнитные токи определяются путем вращения тангенциального электрического поля на 90° в противоположном направлении. В случае идеального

¹Это подразделение было преобразовано в National Air Intelligence Center в 1993. Его первоначальное назначение состояло в обеспечении Военно-Воздушных Сил США научной и технической информацией.

проводящего тела эквивалентный электрический ток оказывается истинным поверхностным током, а эквивалентные магнитные токи не существуют.

б) Математически рассеянное поле может быть представлено в виде интеграла по поверхности тела от линейной функции эквивалентных поверхностных токов.

Таким образом, решение задачи рассеяния может быть сведено концептуально к определению эквивалентных поверхностных токов и к последующему вычислению интегралов. Оба этих шага весьма нетривиальны, особенно для больших тел со сложной формой и сложной материальной структурой.

Как ФТД, так и ФО представляют собой приближенные методы, которые используют результаты решения простых задач рассеяния (часто называемых каноническими задачами²) для определения поля, рассеянного от исследуемого тела. Концептуально оба метода включают первое приближение для поверхностных токов с последующим вычислением поверхностного интеграла точно или приближенно. Часто, однако, эти два шага могут быть объединены, так что явное использование поверхностных токов опускается путем использования предварительно вычисленных дифракционных коэффициентов и соответствующих формул для точного и асимптотического интегрирования.

Поверхностные токи в ФТД выражаются как сумма первого приближения, называемого *равномерной* частью, плюс поправочный член, называемый *неравномерной* частью. Обычно равномерная часть определяется как приближение тождественное приближению ФО. Но ФТД также применяется к задачам, включающим конфигурации из проводников, исследуемым в главе 6, где выбор равномерной части осуществляется иначе.

Канонической задачей для физической оптики (ФО) является рассеяние от бесконечной плоской пластины. В некоторой точке на поверхности, например, идеального проводящего тела поверхностный ток, используемый в ФО, равен току, который был бы создан тем же источником поля на поверхности идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности этого тела в данной точке. Поверхности с покрытием могут часто характеризоваться импедансными граничными условиями,

²Строго говоря, каноническая задача представляет собой задачу из ограниченного набора базисных задач (как, например, рассеяние на бесконечном идеально проводящем клине), результаты которых могут быть использованы для конструирования решений более сложных задач. Но совершенно естественно и очень удобно расширить это определение и включить в их число любую задачу, результаты которой могут быть так использованы.

то есть поверхностным импедансом в каждой точке, измеряемым в омах и фиксирующим отношение эквивалентного магнитного тока (который может быть выражен в вольт/метр) в одном направлении к эквивалентному электрическому току (ампер/метр) в нормальном направлении. В этом случае поверхностные токи ФО в данной точке поверхности определяются как токи, возбуждаемые на касательной пластине с однородным поверхностным импедансом, равным импедансу исследуемой поверхности в этой точке.

Неравномерная часть часто возникает из-за геометрической неоднородности, такой как конец проводника или ребро, вдоль которого смыкаются гладкие части поверхности. Неравномерные токи, которые возникают из-за наличия ребра и имеют тенденцию концентрироваться вблизи ребра, называются краевыми («fringe currents»). Краевые токи также возникают и на менее заметных разрывах однородности, например, на линиях со скачком кривизны или поверхностного импеданса. Другие примеры неравномерного тока включают ползущие волны, исходящие от границы тени в затененную зону, и поправочные члены к ФО, обусловленные, например, кривизной поверхности. Детали конкретной исследуемой задачи определяют, какие именно неравномерные компоненты важны, а какими можно пренебречь.

Для тела с ребрами приближение первого порядка для краевого тока вблизи точки на ребре может быть найдено из решения канонической задачи о бесконечном клине. Ребро клина и его грани направлены по касательной к истинному ребру тела и к его поверхности в данной точке. Рассеянное поле находится затем как сумма вкладов от токов физической оптики и от краевых токов, текущих вблизи каждого ребра.

Для достаточно высокой частоты и при достаточном удалении точки наблюдения от тела поверхностный интеграл, описывающий излучение от краевых токов первого порядка, может быть сведен к линейному интегралу вдоль ребер. Соответствующий интеграл от токов ФО может быть аналогично сведен к линейному интегралу плюс возможные дополнительные вклады от дискретных точек на поверхности тела. Эти два линейных интеграла можно затем просуммировать и получить выражения для поля, рассеянного от ребер, в терминах *элементарных краевых волн*. Элементарная краевая волна может быть в дальнейшем интерпретирована как совокупность элементарных дифрагированных лучей, исходящих из каждой точки ребра во всех направлениях.

Лучевое описание рассеяния на ребрах можно зачастую упростить. В случае рассеяния плоской волны на плоской идеально проводящей пластине, например, с краем в виде выпуклого многоугольника, интеграл по краю может быть сведен к лучевому полю, исходящему из углов. Если

пластина имеет вместо этого выпуклый искривленный край, то дальнейшее поле обратного рассеяния (при его достаточно высокой частоте) сводится к вкладу лучей от двух точек, в которых направление обратного рассеяния перпендикулярно к краю.

Дополнительные члены могут быть добавлены в краевые токи для учета эффектов более высокого порядка, таких как возмущение тока в углах, где встречаются два ребра, или таких как токи, связанные с взаимодействием между ребрами. Однако вычисление таких эффектов высокого порядка обычно оказывается нелегкой работой.

Изложенное выше показывает, что основанная на токах ФТД отнюдь не лишена способности выявлять лучевую структуру рассеянного поля. Более того, там, где лучевое описание допустимо, оно всегда может быть получено путем применения соответствующей техники интегрирования. Лучевое описание особенно ценно, когда ФТД используется в процессе дизайна, а не только для его оценки.

ФТД представляет собой высокочастотную методику в том смысле, что как приближение для поверхностных токов, так и результирующая аппроксимация для рассеянного поля становятся более точными при возрастании частоты. Как обычно бывает с методами, которые хорошо работают в одной части спектра, довольно большие усилия требуются для их уточнения, чтобы расширить их частотный диапазон.

Из вышеизложенного следует, что ФТД это фундаментальная теория, доказавшая свою практическую ценность и доступная для ее дальнейшего развития. Поэтому неудивительно, что она получила известность как в Локхид (Lockheed), так и в Нортроп (Northrop) как дифракционная теория, действительно способная решать важные технические задачи («industrial-strength» diffraction theory).

Кеннет М. Мицнер (Kenneth M. Mitzner)

17 Апреля 2003

Предисловие редактора американского издания

В течение свыше двадцати пяти лет Институт технологии Военно-Воздушных Сил США (AFIT) подготовил большое число специалистов в области радиолокационных наблюдений. Программы обучения включали подготовку специалистов на уровне магистров и докторов, а также краткие курсы повышения квалификации. К реализации этих программ привлекались те, кто написали книги в этой области. Это были люди типа главных инженеров и менеджеров различных технических проектов, а также университетские ученые, работающие на переднем фронте науки в области рассеяния электромагнитных волн. Нам повезло заниматься этой деятельностью в мирное время. Предыдущее поколение, пережившее не такое счастливое время Второй мировой войны, получило первые важные результаты по радиолокаторам и их использованию. Этот период ознаменовался превосходной документацией в виде трудов лаборатории излучения Массачусетского технологического института (Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory), известной под названием Серии лаборатории излучения МТИ.

Чуть более десяти лет назад сотрудники, работающие в этой области, задумались о том, что стоит создать ряд документов, подобных трудам лаборатории излучения, чтобы отразить достижения в области радарных наблюдений за последнее время. После прибытия Петра Уфимцева в США, происшедшего почти одновременно, мы почувствовали, что он будет одним из наиболее подходящих людей, если не самым подходящим, для того чтобы начать эту серию. Большинство из нас были не понаслышке знакомы с его книгой по физической теории дифракции (ФТД), которая сыграла важную роль в нашем понимании явлений. Около трех лет назад, в течение одного из визитов профессора Уфимцева в AFIT как приглашенного лектора, я обсуждал эту возможность с ним, и он сообщил мне, что начал работу над следующей книгой по дифракции. Поскольку она еще не издавалась на английском языке, мы решили сначала сосредоточиться на ее переводе на английский язык.

Затем следовало обновить и отредактировать ее текст, с тем, чтобы получить книгу, полезную для продолжающегося процесса обучения.

Нам понадобился человек, квалифицированно переводящий с русского языка на английский и знакомый с этой технической областью. Я знал Ричарда Мура с момента его работы в лаборатории низкой радиолокационной видимости (Low Observables Office), которая находилась в отделе иностранных технологий (Foreign Technology Division), и немедленно подумал, что он будет идеальной персоной. Когда я встретился с ним в Вашингтоне, он сообщил, что давно подыскивает материал для перевода в этой области и сочтет за честь работать над таким важным проектом. Администрация АФИТ поддержала это начинание, которым я решил заниматься в мое личное время, чтобы защитить копирайт для будущего издателя. Когда все было сказано и сделано, проект двинулся как по маслу. Мы послали рукопись автору Ричарду, далее мы все втроем регулярно взаимодействовали и путем последовательных итераций произвели документ, который вы видите перед собой.

Мне было чрезвычайно приятно работать с такими талантливыми людьми, как Петр и Ричард. В настоящее время, когда у нас всех появились другие приоритеты, я не знаю, состоится ли когда-нибудь другая серия трудов, подобных трудам лаборатории излучения МТИ. Но я знаю, что если это действительно произойдет, то данная книга будет наиболее подходящим первым томом, который я когда-либо мог себе вообразить.

Я хотел бы поблагодарить Петра, Ричарда, мою семью и мою администрацию в АФИТ, предоставившим мне возможность, время и поддержку для работы над этим изданием. Я также благодарю Господа за дух, стойкость, настойчивость и желание выполнить этот проект. Мы все надеемся, что эта книга доставит вам удовольствие и что вы получите от нее профессионально так много, как мы получили в процессе ее создания. Пожалуйста, не стесняйтесь присылать мне ваши комментарии по электронной почте.

Эндрю Дж. Терзуоли, мл. (Andrew J. Terzuoli, Jr.)
a.j.terzuoli@ieee.org

Комментарии к американскому изданию

Это произошло задолго до того как я начал работать в FTD's Low Observable Office, когда я услышал легендарную историю о том, как советский ученый разработал физическую теорию, которая в конечном счете привела к дизайну конструкции самолета F-117, лишь в будущем возможно рассекреченного. Как-то Билл Шрёдер (Bill Schroeder) и Денис Оверхолсер (Denys Overholser) из компании Локхид (Lockheed) приобрели машинный перевод, сделанный в FTD с русского документа, озаглавленного «Метод краевых волн в физической теории дифракции». После дешифровки его содержания (машинный перевод нельзя было легко читать, главным образом удивляла сама эта возможность) эти два джентльмена поняли важность того, что они держали в руках — это была как бы калька (blueprint), т. е. план, непосредственно ведущий к дизайну самолета, невидимого для радиолокаторов. Так родились проекты *Harvey* и *Have Blue* и так возникла эта легенда, способная затмить лучшую из тех, которые может предложить сам Том Глэнси (Tom Glancy).

В интеллектуальном сообществе имя Уфимцева стало почти мифическим. Я говорю *его* имя, поскольку никто в то время реально не знал в точности, кто этот загадочный человек. Мы только могли воображать по каким секретным маршрутам он должен ходить каждое утро на работу, какую шинель он должен носить и т. д. Но, даже оставив без внимания персоналии, возникали некоторые критические вопросы. Как далеко вперед они ушли от нас? Большинство из нас легко соглашались с тем, что русские физики и математики были высочайшего класса. Исключительный успех вооруженных сил США, достигнутый с помощью физической теории дифракции почти десятилетие спустя после ее опубликования в Москве, многие из нас воспринимали как свидетельство жесточайшего соревнования. Возможно, это было время, когда пришла пора «зажигать ночные свечи», т. е. всерьез приниматься за работу.

В нашем быстро меняющемся мире я впервые увидел этого человека на семинаре в АФИТ годы спустя, и даже если у него когда-то была шинель, то сейчас он ее не носил. Держащийся в стороне от политики Уфимцев не выражал интереса к темным очкам, фетровой шляпе и

секретным коридорам. Что, казалось, воодушевляло этого человека, так это лекции студентам о свойствах черных тел и описание того, как F-117 рассеивает радарные волны от своего фюзеляжа с помощью образного представления отраженных лучей в виде иголок ежика, а самого F-117 в форме ежика с причесанными назад иголками. Это было безошибочно. Воодушевление Уфимцева этим процессом показало, что он больше всего любит — учиться и, в свою очередь, учить. И сидя там я думал о том, что должен учиться у этого джентльмена, так же как и студенты, с интересом слушавшие лекцию. Благодарный, я спал крепче этой ночью.

Спустя почти пятнадцать лет после начала моей истории я все еще с трудом верю, что сегодня я сижу здесь и сотрудничаю с этим замечательным человеком. Я говорю это не только потому, что его физическая теория дифракции революционизировала нашу способность моделировать электромагнитное рассеяние, но также и потому, что эта теория очень реальным, непосредственным и осязаемым путем сыграла неожиданную роль в изменении политического ландшафта в нашем мире. С этого времени произносимые шепотом слова «стелс» и «слабо наблюдаемые» стали практически кухонными словами, Берлинская стена и железный занавес стали реликтами прошлого, а Петр Уфимцев, который сыграл невольную роль во всем этом, живет в Лос-Анджелесе, где он работал некоторое время, по иронии всех ироний, в подразделении В-2 в Нортропе (Northrop).

Когда Энди Терзуоли три года назад сообщил мне о возможности поработать над переводом рукописи Уфимцева по теории краевых волн, я с трудом мог поверить, что мне достался такой счастливый билет. Это была невероятная честь участвовать вместе с этими джентльменами в подготовке данной книги. Я благодарен им за их понимание, советы и огромное терпение, пока я работал над переводом и компоновкой данной книги. Хотя перевод первой книги Уфимцева «Метод краевых волн...» непосредственно человеком все еще не завершен, я надеюсь, что его существующая компьютерная версия может удовлетворить технический и исторический интерес любознательных до тех пор, пока английское издание этой книги тоже когда-нибудь станет доступным.

В дополнение к добрым словам в адрес Энди и Петра за уникальное сотрудничество, мои самые искренние благодарности Питеру Ф. Г. Присту (Peter F. H. Priest), Бенедикту А. Мунку (Benedict A. Munk) и Кирби Г. Вильямсу (Kirby H. Williams), которые не только указали мне некоторые менее проторенные дороги, но и поощрили меня найти мои собственные, и тем самым сделали много для того, чтобы направить мою жизнь по пути, который привел меня к работе над этим переводом.

Ричард Д. Мур (Richard D. Moore)

Благодарности

Автор признателен В. А. Фоку за его интерес к данному исследованию и ценные замечания. Он также рекомендовал опубликовать книгу, содержащую этот материал. Будущее показало, что этот материал выдержал испытание временем и не потерял своей научной значимости.

На направление и характер данного исследования значительное влияние оказал Л. А. Вайнштейн — руководитель, а затем консультант теоретической лаборатории, в которой автор начинал свою научную работу после окончания университета. Численные вычисления, представленные в этой книге, были выполнены и первоначально изображены графически сотрудниками вычислительного бюро той же лаборатории. Экспериментальная проверка теоретических вычислений была проведена Е. Н. Майзельсом и Л. С. Чугуновой. Автор приносит свою искреннюю благодарность всем упомянутым коллегам.

Автор признателен К. М. Митцнеру (К. М. Mitzner), ведущему эксперту по теоретическому анализу электромагнитного рассеяния и одному из дизайнеров стелс-бомбардировщика В-2. В предисловии к этой книге он поделился интересными свидетельствами о влиянии физической теории дифракции (ФТД) на стелс-технологии, ясно изложил основные идеи как этой технологии, так и ФТД, а также высказал ценные соображения относительно возможностей ФТД и ее дальнейшего развития. Предложенная им концепция дифференциальных дифракционных коэффициентов явилась существенным вкладом в теорию дифракции и в значительной мере облегчила применение ФТД для решения практических задач.

Автор благодарен Р. Д. Муру (R. D. Moore) за его перевод русской рукописи книги, а также за ее набор и верстку. Особая благодарность выражается Эндрю Дж. Терзуоли (A. J. Terzuoli) из Института технологии Военно-Воздушных Сил США за редактирование книги и за его хлопоты по организации и финансированию перевода рукописи книги на английский язык.

Эта книга включает переработанный материал из оригинальных статей автора и глав 1, 4, 6 и 7 из его книги по ФТД [13]. Автор благодарит редколлегии соответствующих журналов и издательство «Радио и Связь» за разрешение использовать эти материалы.

П. Я. Уфимцев

Введение

Первые упоминания о краевых волнах появились в дифракционной теории в начале XIX века. В то время Юнг исследовал дифракционное поле в зоне тени за непрозрачной плоскостью с отверстием и пришел к идее, что оно может быть представлено в виде сферических волн, исходящих от края отверстия [1, 2]. Это физическое представление дифракционного поля было позднее развито и математически сформулировано в теории дифракции на тонких черных экранах Кирхгофом, Маджи и Котлером (1882–1923 гг.). В середине XX века дифракционная теория сосредоточилась на точных решениях различных краевых задач для волнового уравнения и на изучении их свойств. Эти решения в дальнейшем послужили основой для асимптотического анализа дифракционного поля в случае, когда длина падающей волны мала по сравнению с размерами рассеивающего тела.

Исследования, которые продолжались в последующие десятилетия, показали, что одно из центральных явлений в дифракции состоит в формировании краевых волн. Эти волны возникают вблизи вершин и ребер на поверхности тела и вносят существенный вклад в дифракционное поле.

В настоящей монографии суммируются работы автора, связанные главным образом с исследованиями краевых дифракционных волн. Эти исследования инициировались практической необходимостью и были направлены на разработку приближенных методов для вычисления характеристик рассеяния электромагнитных волн на реальных телах.

В первой главе в рамках модели Кирхгофа—Макдональда развивается теория дифракции на черных телах. Эта теория представляет интерес по двум причинам. Во-первых, с исторической точки зрения она была первой теорией (Маджи, Котлер), в которой удалось выделить в явном виде краевые волны из дифракционного поля. Во-вторых, эта теория также связана с проблемой маскировки отражающих тел радиопоглощающими покрытиями. Она позволяет установить дифракционный пре-

дел уменьшения интегрального поперечника рассеяния, который может быть достигнут с использованием идеального поглощающего покрытия.

В последующих главах исследуется дифракция электромагнитных волн на идеально проводящих телах. В главах 2 и 3 изучаются краевые волны, возникающие при дифракции на выпуклых и вогнутых телах вращения, имеющих ребра на их поверхности. Для этих тел вычислены радиолокационные поперечники рассеяния. Расчет проведен в приближении физической теории дифракции (ФТД). Центральная и оригинальная идея ФТД состоит в представлении тока, возбуждаемого падающей волной на поверхности отражающих тел, в виде суммы равномерной и неравномерной компонент. Равномерная компонента определяется как ток, индуцированный падающей волной на бесконечной плоскости, касательной к поверхности тела. Неравномерная компонента — это дополнительный ток, возникающий вследствие дифракции из-за любого отклонения поверхности тела от касательной плоскости: будь то плавный изгиб, острый излом, край отверстия, вершина или какие-либо другие неоднородности. В главе 4 показано, что излучение, создаваемое неравномерным током, является причиной деполяризации радиолокационного сигнала, отраженного от металлических тел.

Теория, разработанная в главах 2 и 3, изучает только первичные краевые волны, которые дают основной вклад в рассеянное поле. Однако для более точного описания этого поля необходимо учитывать влияние краевых волн высших порядков. Такие волны, возникающие при многократной дифракции на вибраторах и лентах, изучаются в главах 6 и 7 в приближении ФТД с привлечением метода параболического уравнения. Предварительно этот метод апробируется в главе 5 на примере решения классической задачи о дифракции на клине.

Более строгий анализ краевых волн высокого порядка представлен в главах 8–11. Он основан на решении функциональных уравнений и дает новые точные и асимптотические выражения как для тока на ленте, так и для рассеянного поля в дальней зоне. Эта теория применяется в главе 12 для исследования дифракции на открытом резонаторе, состоящем из двух параллельных лент. Два принципиальных вопроса представляют интерес в этой задаче. Какова природа резонансного явления и каково его влияние на рассеянное поле? Здесь показано, что резонанс является результатом синфазной интерференции многократных волноводных мод, отраженных от открытых концов резонатора. Наряду с этим выявлены другие интересные свойства рассеянного поля. Главы 8–12 завершают наше исследование по краевым волнам и служат обоснованием приближенных методов, разработанных в предыдущих главах.

Некоторые результаты, содержащиеся в данной книге, были ранее

опубликованы в журналах и докладывались на Всесоюзных симпозиумах и школах-семинарах по дифракции волн [3–12,14–26]. В 1962 году была опубликована монография автора «Метод краевых волн в физической теории дифракции» [13]. Ее несколько глав во вновь отредактированном и дополненном виде включены в данную книгу.

Чтобы показать место, которое занимает эта книга в существующей профессиональной литературе, она начинается с краткого обзора известных методов и вкратце объясняет ее основные отличия. Другие относящиеся к делу ссылки приводятся и обсуждаются по мере необходимости. В 2011 году в процессе подготовки этой книги к изданию в нее были включены дополнительные комментарии и ссылки.

При чтении книги нужно быть внимательным к обозначениям и символам. Некоторые из них используются в различных главах и могут иметь различные определения.

В этой книге используется гауссова система единиц и временная зависимость в виде $\exp(-i\omega t)$. Связь между гауссовой системой единиц и международной системой СИ дана в приложении 1.

Краткий обзор литературы по теории краевых волн

Краевые дифракционные волны были исследованы в ряде книг. Здесь представлен краткий комментарий к этим публикациям и объясняется, что нового содержится в данной книге «Теория дифракционных краевых волн в электродинамике».

1. Mentzer J. R. Scattering and Diffraction of Radio Waves. Pergamon Press, London, New York, 1955.

Эта книга содержит:

- Результаты по исследованию дифракции на тонких пластинах, полученные методом физической оптики.
- Результаты по исследованию дифракции на тонких проводниках конечной длины, найденные с помощью различных методов. Даны простые выражения. Их физическая интерпретация отсутствует.
- Приведены приближенные формулы, описывающие дифракцию на круговом цилиндре конечной длины. Предполагается, что токи на цилиндрической части поверхности равны токам на бесконечно длинном цилиндре. Дифракция на торцах цилиндра не рассматривается. Краевые токи не учитываются.

2. King R. W. P. and Wu T. T. The Scattering and Diffraction of Waves. Harvard university press, Cambridge, Massachusetts, 1959.

- Лишь одна глава здесь посвящена краевым волнам. Рассмотрены задачи о дифракции на ленте и диске. В книге собраны известные результаты для полного сечения рассеяния. Представлены несколько первых членов высокочастотной асимптотики.

3. Honl H., Maue A. W. and Westpfahl K. Theorie der Beugung. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

- Сформулированы интегральные уравнения для тока на идеально проводящих пластинах.

- Представлены несколько первых членов высокочастотной асимптотики для поля, рассеянного лентой и диском. Эти неравномерные асимптотики несправедливы для скользящих углов падения и наблюдения.
4. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. Москва, Советское радио, 1962.
- Разработана физическая теория дифракции (ФТД), которая позволяет вычислить первый член высокочастотных асимптотических разложений для краевых волн. Рассмотрены рассеивающие тела с выпуклой поверхностью на их освещенной стороне.
 - Найдено асимптотическое решение для проводника конечной длины, которое включает все краевые волны, возникающие при многократной дифракции.
 - Исследована природа деполяризации рассеянного поля. Описан метод для измерения поля, излучаемого дифракционной компонентой поверхностного тока.
5. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. Наука, Москва, 1966.
- Построены высокочастотные асимптотические разложения для краевых волн на больших расстояниях от ребер. Различные типы асимптотик представлены для поля в лучевой зоне и вблизи границ геометрической оптики. Рассмотрена дифракция волн, падающих под углами скольжения. Некоторые результаты включены в публикацию [13], процитированную ниже.
6. Bowman J. J., Senior T. B. A. and Uslenghi P. L. E., Eds. *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1969.
- В этой книге собраны известные результаты по теории дифракции, относящиеся к простым телам. Она содержит асимптотические решения для задач дифракции на клине, полуплоскости, диске и на тонком проводнике (вибраторе). В частности, она включает некоторые результаты ФТД из [4].
7. Noble B. *Method Based on the Wiener–Hopf Technique*. Pergamon Press, New York, 1958.
- Исследуются некоторые задачи, касающиеся дифракции волн на острых кромках.

- Представлены точные решения для задач рассеяния и излучения от полубесконечных плоских и круглых волноводов.
- Общего вида асимптотические выражения содержат бесконечные ряды и являются сложными.
- Простые асимптотические выражения найдены для дальнего поля, рассеянного лентой. Учитывается дифракционное взаимодействие между краями. Определены первые члены неравномерных асимптотик, которые неприменимы для скользящих направлений.

8. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. Советское радио, Москва, 1966.

- В этой книге получены такие же решения, как и в книге [7], для задач излучения из полубесконечных плоских и круглых волноводов.
- Здесь также исследовано рассеяние на бесконечной периодической структуре из параллельных полуплоскостей и на диафрагмах в волноводах.
- Введена новая специальная функция, которая описывает многократную дифракцию на краях.

9. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Советское радио, Москва, 1966.

- Исследуются собственные колебания открытых резонаторов.
- Потери на излучение оцениваются путем вычисления мнимой части собственных частот. Найдены асимптотические выражения для собственных колебаний и собственных частот. Данная теория основана на решении параболического уравнения.

10. Uslenghi P. L. E. (editor). Electromagnetic Scattering. Academic Press, New York, 1978.

- В этой книге собраны обзорные статьи, относящиеся к исследованию краевых волн. В них рассматриваются главным образом геометрическая теория дифракции (ГТД) и ее модификация — равномерная асимптотическая теория дифракции.
- В статье Mitra R. и Rahmat-Samii Y. развита спектральная теория дифракции, в которой используется предложенная в ФТД [4]

концепция неравномерных токов. Данную теорию можно рассматривать как спектральную версию ФТД. Исследуется дифракция произвольной падающей волны на полуплоскости и двух параллельных полуплоскостях. Построены высокочастотные асимптотики для первичной и вторичной краевых волн.

11. James G. L. Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. London, Peregrinus, 1986.

12. McNamara D. A., Pistorius C. W. I. and Malherbe J. A. G. Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction. Boston–London: Artech House, 1990.

13. Боровиков В. А. и Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. Москва, Связь, 1978.

- ГТД в ее первоначальной форме, предложенной Келлером, неприменима вблизи границ тени, а также вблизи каустик и фокусов. Некоторые модификации ГТД развиваются в [11–13] с целью преодолеть ее недостатки.

14. Molinet F. A. Edge-excited rays on convex and concave structures: A Review. IEEE Antennas & Propagation Magazine, vol. 47, no. 5, pp. 34-46, 2005.

- Эта статья содержит обширную информацию об асимптотических исследованиях краевых волн, возникающих при дифракции на телах с выпуклыми и вогнутыми элементами на их поверхности, где могут распространяться ползущие волны и волны шепчущей галереи.

Данная книга

15. Уфимцев П. Я. «Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics». Tech Science Press, California, Encino, 2003

отличается от упомянутых выше публикаций в следующих аспектах:

- В ней содержится теория черных тел, которая важна для понимания физики дифракции, особенно физики рассеяния при больших углах между направлениями на источник и приемник электромагнитных волн. В частности, эта теория представляет интерес для дальнейшего развития технологии по созданию объектов, невидимых для радаров (stealth-technology). Дифракция на черных телах не рассматривается в книгах [1–13].
- Физическая теория дифракции [4] обобщается здесь для тел с вогнутыми элементами. Теория применяется для исследования отражения электромагнитных волн от тел вращения, моделирующих

переднюю часть сверхзвуковых самолетов и ракет. Такие задачи не рассматриваются в книгах [1–13].

- Модификации геометрической теории дифракции [11–13] позволяют определить первый член в асимптотическом разложении для краевых волн вблизи границы тени. Однако эти подходы существенно опираются на лучевую структуру волновых полей и поэтому неприменимы вблизи каустики и фокусов, т. е. там, где и происходит реальный процесс дифракции.
- В отличие от этих лучевых подходов, в данной книге разработаны методы, основанные на представлении дифракционного поля в форме излучения, создаваемого поверхностными токами. Эти методы применимы для исследования рассеянного поля всюду, как в лучевых, так и в дифракционных областях, включая любые каустики. В частности, в книге даны примеры решения ряда практических задач по вычислению дифракционного поля на фокальных линиях.
- В главе 4 этой книги исследуется природа деполяризации и предлагается метод для экспериментального измерения поля рассеянного неравномерной (дифракционной) компонентой поверхностного тока. Такие вопросы не рассматриваются в упомянутых выше книгах [1–3, 5–13]. Эта глава включена в [15] из прежней книги автора [4].
- В данной книге исследуется природа возникновения краевой дифракционной волны как результат взаимодействия первичного теневого излучения с гранями клина. Эта проблема не рассматривается в книгах [1–13].
- Решение задачи о дифракции на тонком проводнике конечной длины (вибраторе) получено с помощью параболического уравнения. Это первое применение параболического уравнения для данной задачи.
- Прямое интегрирование приближенных формул для токов ведет к выражениям для рассеянного поля, которые не удовлетворяют принципу взаимности. Для преодоления этой трудности в данной книге разработан специальный метод. Эти вопросы не рассматриваются в работах [1–13].
- В упомянутых выше работах [1–3, 5–13] представлено много различных асимптотических выражений для тока на ленте и для

рассеянного ею поля в дальней зоне. Однако эти асимптотики являются неравномерными. Они неприменимы для произвольных направлений облучения и наблюдения. В частности, большинство из них несправедливо для скользящих направлений падающей волны. Те же выражения, которые выведены для скользящих направлений, являются непригодными для других направлений.

- В данной книге представлены единственные в своем роде равномерные асимптотики. Они позволяют вычислять ток и дальнее поле (с высокой точностью!) для произвольной точки наблюдения на ленте и в дальней зоне от нее. Они также верны для волн, падающих под произвольным углом к поверхности ленты. Подобные результаты отсутствуют в упомянутых выше книгах [1–13].
- В работах [8, 9] рассматривается рассеяние/излучение на полубесконечных волноводах. В данной книге исследуется более сложная задача дифракции на волноводе конечной длины, который фактически представляет собой открытый резонатор.
- Свойства собственных колебаний в открытом резонаторе были изучены в [9]. Однако их влияние на рассеянное поле там не рассматривалось. Эта важная и интересная задача исследуется здесь.

Дополнительные сведения по теории дифракционных волн содержатся в публикациях [195–206]. Ссылки [195–200] относятся к работам автора в развитие ФТД. Обзор книги [202] дан в упомянутой выше (под номером 14) статье Молинета. Книга Кравцова и Жу [203] содержит обзор эвристических методов, основанных как на лучевых подходах, так и на уточнении приближения Кирхгофа–Макдональда, более известного в электродинамике как приближение физической оптики (ФО). В работах Весника [204–206] развивается метод обобщенного эйконала, который позволяет строить строгие аналитические решения для сложных двумерных задач дифракции. Такие решения могут использоваться в рамках ГТД и ФТД при исследовании дифракции на больших (по сравнению с длиной волны) телах конечных размеров.

Глава 1

Дифракция электромагнитных волн на черных телах

§ 1.1. Черные тела

Как уже отмечалось выше, эта глава выполняет до некоторой степени роль исторического введения в вопрос о краевых волнах. Кроме того, что не менее важно, она оказывается полезной в связи с некоторыми актуальными вопросами. В частности, интересен вопрос, можно ли с помощью покрытий, поглощающих электромагнитные волны, снизить до нуля величину поля, рассеянного телом? Если же этого сделать нельзя, то до какого уровня можно уменьшить величину рассеянного поля, применяя идеальное покрытие, которое полностью поглощает падающую на него энергию? Такие вопросы приводят нас к известной проблеме «черного» тела.

Хотя в электродинамике принципиально нельзя сформулировать условия, адекватные понятию черного тела, тем не менее такое абстрактное понятие оказывается полезным в некоторых случаях. Физически черное тело можно аппроксимировать средой с очень плавным изменением электромагнитных параметров, для которой коэффициент отражения близок к нулю (среда с идеально «мягким входом»).

Применительно к задачам дифракции понятие черного тела впервые было сформулировано Кирхгофом в конце XIX века [208]. Он также исследовал дифракцию скалярных волн на тонких черных экранах. В дальнейшем Котлер распространил понятие черного экрана на случай электромагнитных волн. Он также, в частности, показал, что решение Кирхгофа для черных экранов можно рассматривать как строгое решение задачи о граничном скачке — Sprungwertproblem [27, 28]. Помимо модели черного экрана, предложенной Кирхгофом, был выдвинут ряд

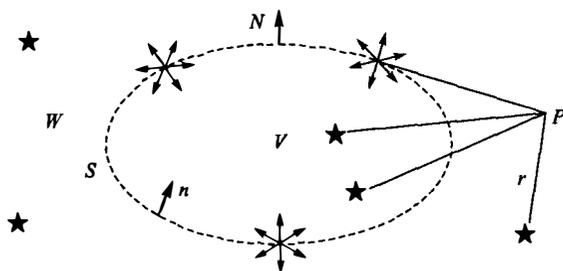


Рис. 1.2.1. К теореме 1

других моделей (Зоммерфельд, Фогт, Котлер). Ясное изложение этих моделей можно найти, например, в книге Бекера и Копсона [29]. Отметим также работы Нойгебауера [30, 31], где рассматривалась дифракция плоских электромагнитных волн на тонких черных и полупрозрачных экранах с отверстиями. Однако при изучении этих работ нужно иметь в виду, что Нойгебауер использовал в дополнительных задачах формулировку принципа Бабинне, которая *не согласуется* с аппроксимациями, сделанными им при решении прямых задач.

Кирхгоф [208] и Макдональд [38] также рассматривали задачи об *объемных* черных телах. Однако в последующей литературе отсутствовали работы, которые бы давали достаточно полное представление о полях, возникающих при дифракции электромагнитных волн на таких телах. С целью восполнить этот пробел автором была выполнена излагаемая ниже работа, основные результаты которой были опубликованы ранее в статье [20].

§ 1.2. Векторный аналог теорем Гельмгольца

Сформулируем несколько вспомогательных теорем, являющихся векторным аналогом известных теорем Гельмгольца, которые были установлены им для скалярных волновых полей [29].

Используя векторный аналог формулы Грина [32], можно доказать следующую ключевую теорему¹.

¹Детальное изложение теоремы дано в приложении 2.

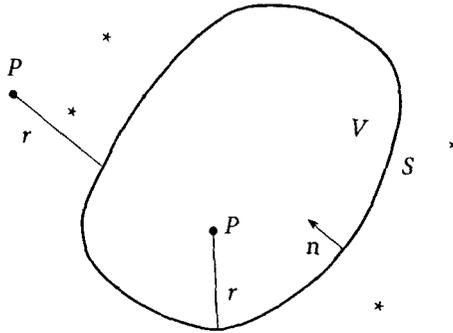


Рис. 1.2.2. К теореме 2

Теорема 1. Пусть в некотором объеме V однородной среды, ограниченной поверхностью S (рис. 1.2.1) векторы \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла, а скалярная функция Грина e^{ikr}/r непрерывна и ограничена вместе со своими первыми и вторыми производными. Тогда

$$\mathcal{E}_V + \mathcal{E}_S = 0, \quad \mathcal{H}_V + \mathcal{H}_S = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{V,S} &= -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_{V,S}^e + k^2 \mathbf{A}_{V,S}^e) - \nabla \times \mathbf{A}_{V,S}^m, \\ \mathcal{H}_{V,S} &= -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_{V,S}^m + k^2 \mathbf{A}_{V,S}^m) + \nabla \times \mathbf{A}_{V,S}^e, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{A}_V^{e,m} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}^{e,m} \frac{e^{ikr}}{r} dV, \quad (1.2.3)$$

$$4\pi \mathbf{A}_S^e = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{H} \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad 4\pi \mathbf{A}_S^m = - \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (1.2.4)$$

Здесь все дифференциальные операции проводятся по координатам точки наблюдения $P(x, y, z)$; $\mathbf{j}^e(\mathbf{j}^m)$ — объемная плотность сторонних электрических (магнитных) токов; \mathbf{E}, \mathbf{H} — электрический и магнитный векторы полного поля, которое создается всеми источниками расположенными как внутри, так и вне объема V , r — расстояние между точкой интегрирования и точкой наблюдения, находящейся вне объема V . Векторные произведения, входящие в \mathbf{A}_S^e и \mathbf{A}_S^m , можно рассматривать

соответственно как эквивалентные электрические и магнитные поверхностные токи. Заметим также, что в работе всюду используется абсолютная система единиц, а зависимость от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

С помощью формул (1.2.1) нетрудно установить следующие теоремы, являющиеся векторным аналогом известных теорем Гельмгольца.

Теорема 2. Пусть все источники находятся вне объема V , а точка P является точкой наблюдения (рис. 1.2.2). Тогда

$$\mathcal{E}_S(P) = \begin{cases} \mathbf{E}(P), & \text{если } P \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } P \text{ вне } V. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

$$\mathcal{H}_S(P) = \begin{cases} \mathbf{H}(P), & \text{если } P \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } P \text{ вне } V. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Теорема 3. Пусть все источники находятся внутри объема V (рис. 1.2.3), а создаваемые ими поля удовлетворяют условиям излучения. Тогда

$$\mathcal{E}_S(P) = \begin{cases} \mathbf{E}(P), & \text{если } P \text{ вне } V, \\ 0, & \text{если } P \text{ внутри } V. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\mathcal{H}_S(P) = \begin{cases} \mathbf{H}(P), & \text{если } P \text{ вне } V, \\ 0, & \text{если } P \text{ внутри } V. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Теоремы 2 и 3 хорошо известны и имеются, в несколько иной форме, например, в книгах [32, 33]. Однако та часть этих теорем, которая касается отсутствия обратных волн, доказывается обычно довольно громоздким путем, исходя из рассмотрения скачка поля на поверхности S и теоремы единственности. С помощью же сформулированной нами теоремы 1 факт отсутствия обратных волн доказывается совершенно элементарно.

Действительно, предположим например, что в области V источников нет, а точка наблюдения P находится вне этой области, т. е. в области W . Тогда поля \mathcal{E}_V , \mathcal{H}_V равны нулю, а величины \mathcal{E}_S , \mathcal{H}_S представляют собой обратные волны по отношению к источникам, расположенным в области W . Полагая в формулах (1.2.1) $\mathcal{E}_V = 0$, $\mathcal{H}_V = 0$, немедленно получаем равенства $\mathcal{E}_S = 0$, $\mathcal{H}_S = 0$.

§ 1.3. Определение черного тела и теорема о теневом контуре

Вычислим поле в точке P , возникающее при дифракции электромагнитных волн на некотором теле (рис. 1.3.1). Применим для этого теорему 2

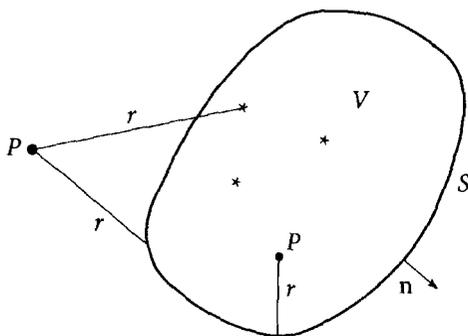


Рис. 1.2.3. К теореме 3

к объему V , ограниченному поверхностью Σ и поверхностью тела (S — освещенная сторона тела, S' — тневая). Предполагая, что все источники находятся вне объема V , получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= \mathcal{E}_\Sigma + \mathcal{E}_S + \mathcal{E}_{S'}, \\ \mathbf{H}(P) &= \mathcal{H}_\Sigma + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{S'}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.1)$$

где \mathcal{E} и \mathcal{H} определяются формулами (1.2.2) и (1.2.4).

Заметим теперь, что на поверхности Σ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_p. \quad (1.3.2)$$

Здесь $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ — поле источников, находящихся вне объема, ограниченного поверхностью Σ , а $\mathbf{E}_p, \mathbf{H}_p$ — поле, рассеянное телом.

В силу теоремы 3, эквивалентные токи на поверхности Σ , обусловленные полем $\mathbf{E}_p, \mathbf{H}_p$, создают внутри объема V поле, равное нулю. Следовательно

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0(P), \quad \mathcal{H}_\Sigma = \mathbf{H}_0(P), \quad (1.3.3)$$

и мы приходим к очевидному соотношению

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= \mathbf{E}_0(P) + \mathcal{E}_S + \mathcal{E}_{S'}, \\ \mathbf{H}(P) &= \mathbf{H}_0(P) + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{S'}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

если точка P находится внутри объема V .

Будем считать тело абсолютно черным, т.е. поглощающим всю падающую на него энергию. Следуя Кирхгофу и Макдональду, положим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \quad (1.3.5)$$

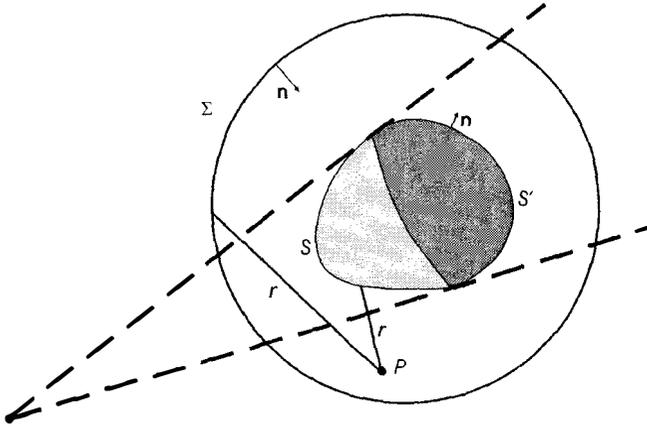


Рис. 1.3.1. Дифракция волн на черном теле, ограниченном поверхностями S и S'

на освещенной стороне тела S и

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad (1.3.6)$$

на теневой стороне (S'). Тогда результирующее поле, возникающее в точке P вследствие дифракции электромагнитных волн на черном теле будет равно

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= \mathbf{E}_0(P) + \mathcal{E}_S, \\ \mathbf{H}(P) &= \mathbf{H}_0(P) + \mathcal{H}_S. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

Вторые слагаемые в правых частях формул (1.3.7) описывают поле, рассеянное черным телом, и определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_S &= -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_S^e + k^2 \mathbf{A}_S^e) - \nabla \times \mathbf{A}_S^m, \\ \mathcal{H}_S &= -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_S^m + k^2 \mathbf{A}_S^m) + \nabla \times \mathbf{A}_S^e, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

где

$$4\pi \mathbf{A}_S^e = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad 4\pi \mathbf{A}_S^m = - \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (1.3.9)$$

а \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности тела.

Следует отметить, что предложенное выше определение черного тела приводит к выражениям для рассеянного поля, которые оказываются *нечислосогласованными*. Значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , вычисленные по формуле (1.3.7) на поверхности тела, не совпадают с первоначально принятыми (1.3.5), (1.3.6). Причина этого в том, что нельзя произвольно и одновременно задавать граничные значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые связаны между собой уравнениями Максвелла.

Однако еще Котлер [27, 28] отметил, что приближение (1.3.7) для черных бесконечно тонких экранов можно рассматривать как строгое решение задачи с граничным скачком (Sprungwertproblem), когда на тангенциальные компоненты E_t и H_t накладываются условия

$$E_t|_S - E_t|_{S'} = E_{0t}, \quad H_t|_S - H_t|_{S'} = H_{0t}. \quad (1.3.10)$$

Но такое определение черного тела, в отличие от определения (1.3.5), (1.3.6) имеет смысл только для тонких экранов и непригодно для объемных тел.

Продолжим изучение формул (1.3.7). Назовем границу между освещенной и теневой частями поверхности тела *тневым контуром* и сравним поля, рассеянные двумя различными черными телами, которые имеют один и тот же теневой контур. Освещенную сторону одного из этих тел обозначим через S_1 , а другого через S_2 . Согласно формуле (1.3.7) поля, рассеянные этими телами, соответственно равны $\mathcal{E}_{S_1}, \mathcal{H}_{S_1}$ и $\mathcal{E}_{S_2}, \mathcal{H}_{S_2}$.

Применим теперь теорему 2 к объему V , ограниченному воображаемыми поверхностями S_1 и S_2 (рис. 1.3.2) и находящемуся в поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. Тогда

$$\mathcal{E}_{S_1} - \mathcal{E}_{S_2} = -\mathbf{E}_0(P), \quad \mathcal{H}_{S_1} - \mathcal{H}_{S_2} = -\mathbf{H}_0(P), \quad (1.3.11)$$

если точка наблюдения находится внутри объема V , и

$$\mathcal{E}_{S_1} - \mathcal{E}_{S_2} = 0, \quad \mathcal{H}_{S_1} - \mathcal{H}_{S_2} = 0, \quad (1.3.12)$$

если точка наблюдения P находится вне объема V . Таким образом, соотношение (1.3.12) позволяет сформулировать следующую теорему о тневом контуре.

Поле, рассеянное черным телом (при заданной ориентации источников и тела), не зависит от формы поверхности тела и полностью определяется его тневым контуром (границей между освещенной и теневой поверхностью тела).

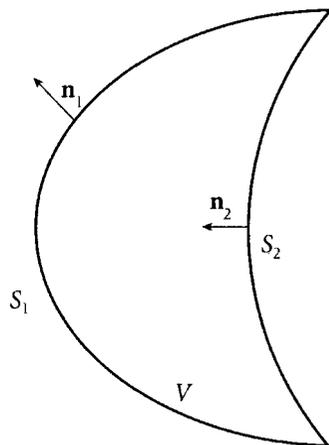


Рис. 1.3.2. Теорема о тневом контуре

Заметим, что эта теорема доказана здесь для произвольного первичного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, падающего на черное тело. Аналогичное утверждение для более простого случая было получено Котлером [28]. Он показал, что дифракционное поле позади черного плоского экрана с отверстием полностью определяется формой края отверстия. Он доказал это для случая плоской волны и волны, возбужденной элементарным диполем.

Можно дать следующее физическое объяснение сформулированной теоремы. Различные черные тела, имеющие одинаковый тневой контур (при заданном направлении падающей волны!), создают одинаковую тень. Но тень можно рассматривать как результат гашения первичного поля вторичным излучением. Вследствие поперечной диффузии энергия теневого излучения проникает в остальное пространство и является единственным источником рассеянного поля, поскольку в силу определения черного тела его освещенная часть ничего не отражает. Следовательно, различные черные тела, имеющие одинаковый тневой контур, создают одинаковые рассеянные поля.

Заметим также, что формулы (1.3.8), (1.3.9) позволяют дать следующую формальную интерпретацию дифракции электромагнитных волн на черном теле. Черное тело является одновременно как бы «идеально электрическим» ($\varepsilon = i\infty, \mu = 1$) и «идеально магнитным» ($\varepsilon = 1, \mu = i\infty$). Половина падающей на тело энергии дифрагирует на нем как на «идеально электрическом» теле, а другая половина как на «идеально магнитном» теле. Такое представление о черных телах было ранее сфор-

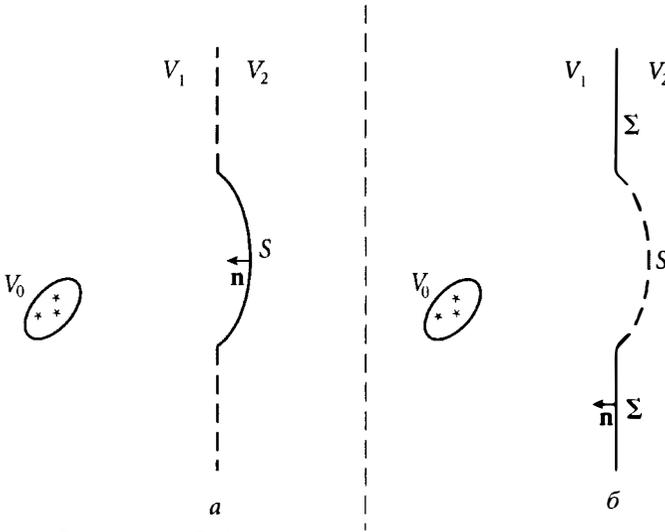


Рис. 1.4.1. Дифракция на дополнительных экранах

мулировано Макдональдом [38] и разработано Леманским и Захарьевым [34, 35].

Таким образом, мы показали, что в соответствии с моделью Кирхгофа—Макдональда поля, рассеянные черными телами, имеют «краевой» характер. Теперь перейдем к их более детальному изучению в связи с теми практическими вопросами, которые были сформулированы в начале этой главы.

§ 1.4. Принцип дополнительности для тонких экранов

Пусть в свободном пространстве в объеме V_0 находятся сторонние источники электромагнитного поля. Рассмотрим две следующие задачи.

1. Дифракция электромагнитных волн на тонкой черной пластине S (плоской или искривленной), см. рис. 1.4.1 а.

2. Дифракция тех же волн на дополнительном экране Σ (плоском или изогнутом), который вместе с поверхностью S делит пространство на две части (см. рис. 1.4.1 б).

Связь между решениями этих задач устанавливает формулируемый ниже принцип дополнительности.

Обозначим через $\mathcal{E}_S, \mathcal{H}_S$ поле, рассеянное черной пластиной S , а через $\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{H}_\Sigma$ поле, рассеянное черным экраном Σ . В соответствии с теоремой 3 из § 1.2

$$\mathcal{E}_S = -\mathcal{E}_\Sigma, \quad \mathcal{H}_S = -\mathcal{H}_\Sigma, \tag{1.4.1}$$

если точка наблюдения P расположена внутри объема V_1 , и

$$\mathcal{E}_S = -\mathcal{E}_\Sigma - \mathbf{E}_0, \quad \mathcal{H}_S = -\mathcal{H}_\Sigma - \mathbf{H}_0, \quad (1.4.2)$$

если точка P лежит внутри объема V_2 (см. рис. 1.4.1).

§ 1.5. Интегральный поперечник рассеяния для черных тел

Интегральный поперечник рассеяния определяется формулой

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}, \quad (1.5.1)$$

где

$$\mathcal{P}_0 = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (1.5.2)$$

представляет усредненную за период колебаний плотность потока энергии в падающей волне и

$$\mathcal{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] dS \right\} \quad (1.5.3)$$

представляет усредненную за период колебаний полную мощность поля, рассеянного в окружающее пространство. Интегрирование в (1.5.3) проводится по любой замкнутой поверхности, охватывающей тело. Выбирая в качестве поверхности интегрирования поверхность черного тела, получим

$$\mathcal{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{S'} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] dS \right\}, \quad (1.5.4)$$

поскольку на освещенной поверхности S черного тела рассеянное поле по определению равно нулю, а на теневой стороне $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_0$.

Считая далее, что на тело падает плоская волна, находим

$$\mathcal{P} = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \int_{S'} \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) dS = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 S_0. \quad (1.5.5)$$

Здесь S_0 — площадь поперечного сечения геометрической зоны тени (рис. 1.5.1). Следовательно, интегральный поперечник рассеяния черного тела равен

$$\sigma = S_0. \quad (1.5.6)$$

Заметим, что для выпуклых идеально проводящих тел, линейные размеры которых велики по сравнению с длиной волны, интегральный



Рис. 1.5.1. Интегральный поперечник рассеяния равен площади S_0

поперечник рассеяния равен $2S_0$. Таким образом, интегральный поперечник рассеяния черного тела равен половине интегрального поперечника рассеяния металлического тела, обладающего одинаковым теньевым контуром.

Ниже на примере решения задач о дифракции на полуплоскости, ленте и диске мы познакомимся более детально с характеристиками поля, рассеянного черными телами.

§ 1.6. Черная полуплоскость

Задача о дифракции плоских волн на черной полуплоскости рассматривалась в работах [28, 29]. Там было вычислено рассеянное поле вблизи ребра ($kr \ll 1$) и в области $kr \gg 1$ вдали от границы тени. Нас интересуют в этой задаче два вопроса, ответов на которые нет в цитированных работах. Во-первых, мы хотим получить равномерную асимптотику для поля при $kr \gg 1$ вдали от ребра, пригодную как вдали от границы тени, так и вблизи нее. Какова эта асимптотика — первый вопрос. Второй вопрос состоит в следующем. Как известно, электрические и магнитные токи, возбуждаемые падающей волной соответственно на идеально электрической и идеально магнитной полуплоскостях, порождают отраженные волны согласно законам геометрической оптики. Интересно понять, что происходит с аналогичными волнами при возбуждении черной полуплоскости. С этой целью мы рассмотрим дифракцию плоской

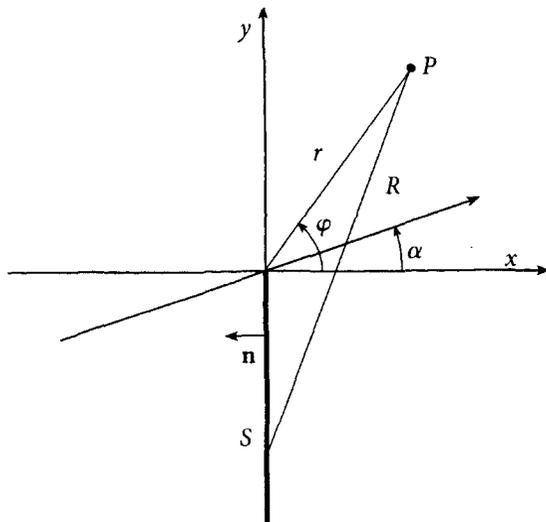


Рис. 1.6.1. Дифракция на черной полуплоскости $x = 0, -\infty \leq y \leq 0$

ВОЛНЫ

$$E_z = E_{0z} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad H_z = 0 \quad (1.6.1)$$

на черной полуплоскости S (рис. 1.6.1). Рассеянное поле описывается формулами (1.3.8) и (1.3.9), где интегрирование ведется по полуплоскости ($x = 0, -\infty \leq y \leq 0, -\infty \leq z \leq \infty$). Можно показать [13], что

$$\left. \begin{aligned} A_z^e &= \frac{i}{4} E_{0z} I \cos \alpha, & A_x^e &= A_y^e = 0, \\ A_y^m &= -\frac{i}{4} E_{0z} I, & A_x^m &= A_z^m = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.2)$$

где

$$I = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(v|x|+wy)}}{v(w-\widehat{p})} dw, \quad (1.6.3)$$

$$p = k \sin \alpha, \quad v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \text{Im } v \geq 0, \quad v = k \text{ для } w = 0$$

и символ $\widehat{}$ показывает, что контур интегрирования обходит полюс $w = p$ сверху. Кроме того мы сдвигаем точки ветвления $w = \pm k$ с вещественной оси, полагая временно $\text{Im } k > 0$. В правом полупространстве

($x > 0$), выражение (1.6.3) может быть записано в виде

$$I = \frac{1}{ik\pi} J + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi > \alpha, \\ \frac{2}{k \cos \alpha} e^{ikr \cos(\alpha-\varphi)} & \text{при } \varphi < \alpha, \end{cases} \quad (1.6.4)$$

где

$$J = \int_{0^- + i\infty}^{0^+ - i\infty} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\sin \alpha - \sin(\zeta + \varphi)}. \quad (1.6.5)$$

Здесь и далее в книге мы будем использовать обозначение $x^+ = \lim(x + \epsilon)$ и $x^- = \lim(x - \epsilon)$, где ϵ положительно и стремится к нулю ($\epsilon \rightarrow 0$). Используя предложенный Паули [36] метод, можно получить следующее асимптотическое выражение для функции J при $kr \gg 1$:

$$J = 2\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \frac{e^{ikr \cos(\alpha-\varphi)}}{\cos[(\alpha + \varphi)/2]} \int_{\bullet \sin[(\alpha-\varphi)/2]}^{\sqrt{2kr} \sin[(\alpha-\varphi)/2]} e^{it^2} dt. \quad (1.6.6)$$

Остальные члены асимптотического выражения имеют порядок $(kr)^{-1/2}$ (вблизи границы тени) и меньше по сравнению с (1.6.6). Некоторые детали метода Паули приведены далее в §5.4.

В результате полное поле в правом полупространстве ($x > 0$, $kr \gg 1$) равно

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}^{(d)} + \begin{cases} \mathbf{E}_0 & \text{при } \varphi > \alpha, \\ 0 & \text{при } \varphi < \alpha, \end{cases} \quad (1.6.7)$$

$$\mathbf{H} = \mathcal{H}^{(d)} + \begin{cases} \mathbf{H}_0 & \text{при } \varphi > \alpha, \\ 0 & \text{при } \varphi < \alpha, \end{cases} \quad (1.6.8)$$

где $\mathcal{E}^{(d)}$, $\mathcal{H}^{(d)}$ — дифракционная часть рассеянного поля, которая не содержит плоских волн. В цилиндрической системе координат векторы

$\mathcal{E}^{(d)}$ и $\mathcal{H}^{(d)}$ имеют следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_z^{(d)} &= \left[2i\phi(r, \alpha - \varphi) \cos \alpha + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \right] \beta, \\ \mathcal{H}_\varphi^{(d)} &= - \left[2i\phi(r, \alpha - \varphi) \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \sin \frac{3\alpha - \varphi}{2} \right] \beta, \\ \mathcal{H}_r^{(d)} &= 2 \left[i\phi(r, \alpha - \varphi) \sin(\alpha - \varphi) - \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \cos \frac{\alpha - \varphi}{2} \right] \beta \cos \alpha, \end{aligned} \right\} (1.6.9)$$

$$\mathcal{E}_r^{(d)} = \mathcal{E}_\varphi^{(d)} = \mathcal{H}_z^{(d)} = 0, \quad (1.6.10)$$

где

$$\beta = \frac{E_{0z} e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi} \cos \frac{\alpha + \varphi}{2}}, \quad \phi(r, \psi) = e^{ikr \cos \psi} \int_{\infty \sin(\psi/2)}^{\sqrt{2kr} \sin \psi/2} e^{it^2} dt. \quad (1.6.11)$$

Вдали от границы тени (т. е. когда $(kr)^{1/2} |\sin[(\alpha - \varphi)/2]| \gg 1$) поле является цилиндрической волной

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_z^{(d)} &= -\mathcal{H}_\varphi^{(d)} = \frac{1}{2} E_{0z} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \varphi}{2} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ \mathcal{E}_r^{(d)} &= \mathcal{E}_\varphi^{(d)} = \mathcal{H}_r^{(d)} = \mathcal{H}_z^{(d)} = 0, \end{aligned} \right\} (1.6.12)$$

амплитуда которой не зависит от ориентации полуплоскости относительно направления падающей волны и определяется только значениями $\alpha - \varphi$. В этом заключается принципиальное различие волны, рассеянной черной полуплоскостью, от волны

$$\mathcal{E}_z^{(d)} = -\mathcal{H}_\varphi^{(d)} = \frac{1}{2} E_{0z} \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} - \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}},$$

рассеянной идеально проводящей полуплоскостью (см., например, [13]).

На границе тени ($\alpha = \varphi$) из выражения (1.6.9) находим

$$\mathcal{E}_z^{(d)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}E_{0z}e^{ikr} & \text{при } \varphi = \alpha^+, \\ +\frac{1}{2}E_{0z}e^{ikr} & \text{при } \varphi = \alpha^-. \end{cases} \quad (1.6.13)$$

Следовательно, полное поле остается непрерывным при переходе через область тени и на самой границе равно половине падающей волны.

Рассмотрим теперь поле в левом ($x < 0$) полупространстве. В этом случае интеграл (1.6.3) равен

$$I = \frac{1}{ik\pi} \int_{0^-+i\infty}^{0^+-i\infty} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\sin \alpha + \sin(\zeta - \varphi)} + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi < \pi - \alpha, \\ \frac{2e^{-ikr \cos(\alpha + \varphi)}}{k \cos \alpha} & \text{при } \varphi > \pi - \alpha. \end{cases} \quad (1.6.14)$$

Второе слагаемое в (1.6.14) имеет смысл отраженной плоской волны. Это означает, что эквивалентные электрические и магнитные токи, текущие на черной полуплоскости, создают отраженные плоские волны. Поле этих волн равно

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^e + \mathcal{E}_0^m, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^e + \mathcal{H}_0^m, \quad (1.6.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_0^e &= -\frac{1}{ik}(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_S^e + k^2 \mathbf{A}_S^e), & \mathcal{E}_0^m &= -\nabla \times \mathbf{A}_0^m, \\ \mathcal{H}_0^e &= \nabla \times \mathbf{A}_S^e, & \mathcal{H}_0^m &= -\frac{1}{ik}(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}_S^m + k^2 \mathbf{A}_S^m), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.16)$$

и значения \mathbf{A}_S^e и \mathbf{A}_S^m определяются в соответствии с формулой (1.6.2) и вторым слагаемым выражения (1.6.14). Можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{0z}^e &= -\mathcal{E}_{0z}^m = -\frac{1}{2}E_{0z}e^{-ikr \cos(\alpha + \varphi)}, \\ \mathcal{H}_{0\varphi}^e &= -\mathcal{H}_{0\varphi}^m = -\frac{1}{2}E_{0z} \cos(\alpha + \varphi)e^{-ikr \cos(\alpha + \varphi)}, \\ \mathcal{H}_{0r}^e &= -\mathcal{H}_{0r}^m = -\frac{1}{2}E_{0z} \sin(\alpha + \varphi)e^{-ikr \cos(\alpha + \varphi)}, \\ \mathcal{H}_{0z}^e &= \mathcal{H}_{0z}^m = \mathcal{E}_{0\varphi}^e = \mathcal{E}_{0\varphi}^m = \mathcal{E}_{0r}^e = \mathcal{E}_{0r}^m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.17)$$

Отсюда следует, что отраженные плоские волны, излучаемые порознь электрическими и магнитными токами, полностью гасят друг друга:

$$\mathcal{E}_0^e = -\mathcal{E}_0^m, \quad \mathcal{H}_0^e = -\mathcal{H}_0^m \quad (1.6.18)$$

и

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{H}_0 = 0. \quad (1.6.19)$$

В результате рассеянное поле \mathcal{E}, \mathcal{H} в левом полупространстве ($x < 0$) определяется только первым слагаемым в формуле (1.6.14) и, как можно показать, описывается при $(kr)^{1/2} |\cos[(\alpha + \varphi)/2]| \gg 1$ формулой (1.6.12). В направлении $\varphi = \pi - \alpha$, которое в случае идеально проводящей полуплоскости является границей отраженной волны, поле, рассеянное черной полуплоскостью, равно

$$\mathcal{E}_z = -\mathcal{H}_\varphi = -\frac{1}{2} E_{0z} \operatorname{tg} \alpha \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (1.6.20)$$

При дифракции на черной полуплоскости плоской волны

$$H_z = H_{0z} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad E_z = 0 \quad (1.6.21)$$

рассеянное поле в области $kr \gg 1$ описывается прежними формулами (1.6.9), (1.6.12), в которых нужно только заменить E_z на H_z , $-H_{\varphi,r}$ на $E_{\varphi,r}$ и E_{0z} на H_{0z} . Иначе говоря, амплитуда поля, рассеянного черной полуплоскостью, не зависит от поляризации падающей волны.

В заключение параграфа заметим, что найденное выше решение для черной полуплоскости является, в силу теоремы о теневом контуре, также и решением задачи о дифракции на произвольной черной цилиндрической поверхности, расположенной в полупространстве $-\infty \leq y \leq 0$.

§ 1.7. Черная лента и черный диск

Пусть плоская волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad (1.7.1)$$

падает на черную ленту неограниченной длины (рис. 1.7.1). Рассеянное поле определяется формулами (1.3.8), (1.3.9). Можно показать, что в дальней зоне ($r \gg ka^2$) оно равно

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_z = -\mathcal{H}_\varphi &= E_{0z} (\cos \alpha + \cos \varphi) \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{H}_z &= H_{0z} (\cos \alpha + \cos \varphi) \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.2)$$

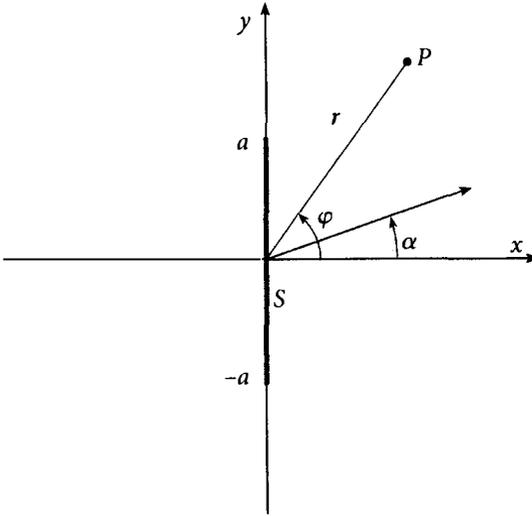


Рис. 1.7.1. Отрезок оси y ($-a \leq y \leq a$), изображающий поперечное сечение ленты плоскостью $z = 0$, угол α определяет направление падающей волны

В направлении главного теневого лепестка ($\varphi = \alpha$) находим

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_z &= -\mathcal{H}_\varphi = 2kaE_{0z} \cos \alpha \frac{e^{i(kr+3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{H}_z = 2kaH_{0z} \cos \alpha \frac{e^{i(kr+3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

что эквивалентно полю, рассеянному идеально проводящей лентой (при условии $ka \gg 1$, $|\alpha| \ll \pi/2$). Однако черная лента, в отличие от идеально проводящей ленты, не излучает волны в направлении зеркально отраженного луча ($\varphi = \pi - \alpha$) и в направлении на источник ($\varphi = \pi + \alpha$). Из формул (1.7.2) далее следует, что интенсивность поля, рассеянного черной лентой, не зависит от поляризации падающей волны.

С помощью формул (1.7.2) и соотношений

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_z &= -\mathcal{H}_\varphi = E_{0z}ka e(\alpha, \varphi) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr+3\pi/4)}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{H}_z = H_{0z}ka h(\alpha, \varphi) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr+3\pi/4)} \end{aligned} \right\} \quad (1.7.4)$$

был проведен численный расчет величин $e(\alpha, \varphi)$, $h(\alpha, \varphi)$, характеризующих диаграмму рассеяния черной ленты. Расчеты выполнены при

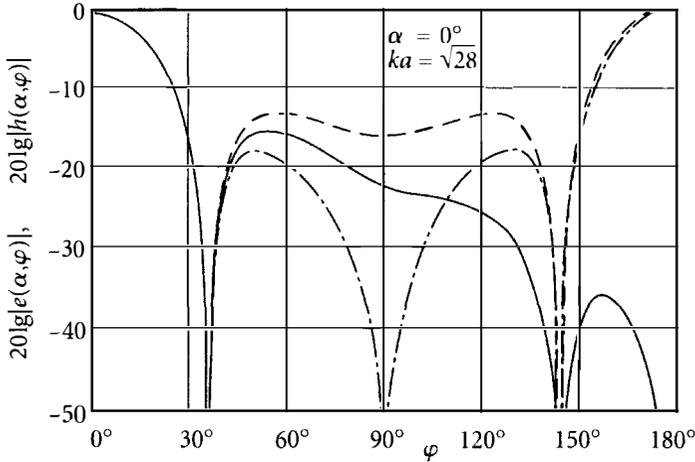


Рис. 1.7.2. Поле, рассеянное лентой. Сплошной линией изображено поле, рассеянное черной лентой. Пунктирные и штрихпунктирные кривые соответствуют полю, рассеянному идеально проводящей лентой для различных поляризаций падающей волны

значениях $ka = \sqrt{28}$ и $\alpha = 0^\circ$ и -45° . Их результаты представлены на рис. 1.7.2, 1.7.3 сплошной линией. Там же для сравнения приведены графики функций $e_0(\alpha, \varphi)$ (штриховая линия) и $h_0(\alpha, \varphi)$ (штрихпунктирная линия), определяющие (в приближении физической оптики [13]!) диаграмму рассеяния для идеально проводящей ленты. Мы видим, что в области главного теневого лепестка черная лента излучает так же, как и идеально проводящая лента. Интересно отметить, что в некоторых других направлениях черная лента излучает энергии больше, чем идеально проводящая.

При дифракции плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)} \quad (1.7.5)$$

на черном диске (см. рис. 1.7.4) рассеянное поле в дальней зоне ($r \gg ka^2$)

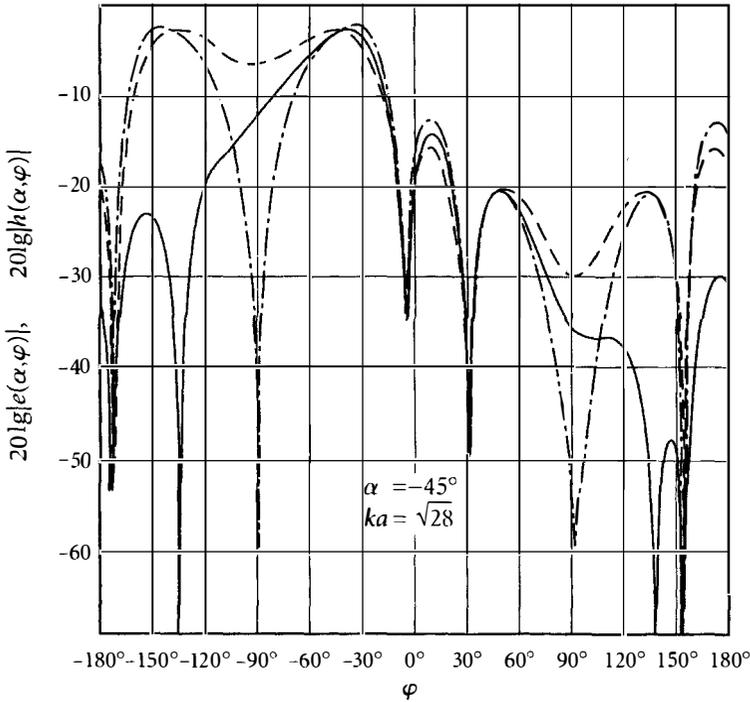


Рис. 1.7.3. Поле, рассеянное лентой. Сплошной линией изображено поле, рассеянное черной лентой. Пунктирные и штрихпунктирные кривые соответствуют полю, рассеянному идеально проводящей лентой для различных поляризаций падающей волны

определяется формулами

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_\varphi = -\mathcal{H}_\vartheta &= -\frac{ia}{2}[E_{0x}(\cos \gamma + \cos \vartheta) \sin \varphi + \\
 &+ H_{0x}(1 + \cos \gamma \cos \vartheta) \cos \varphi]\mathcal{V}, \\
 \mathcal{E}_\vartheta = \mathcal{H}_\varphi &= \frac{ia}{2}[E_{0x}(1 + \cos \gamma \cos \vartheta) \cos \varphi - \\
 &- H_{0x}(\cos \gamma + \cos \vartheta) \sin \varphi]\mathcal{V},
 \end{aligned}
 \tag{1.7.6}$$

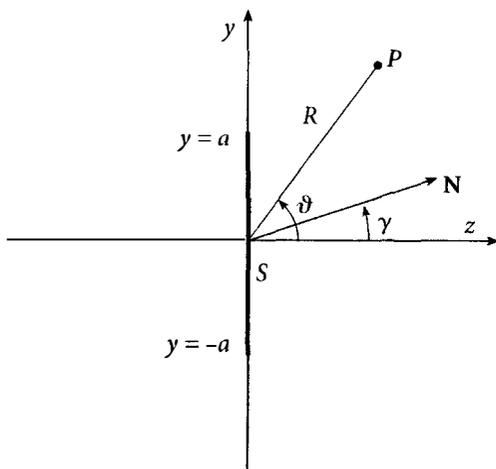


Рис. 1.7.4. Сечение диска плоскостью yOz . \mathbf{N} — нормаль к фронту падающей волны

где

$$\mathcal{V} = \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}) e^{ikR}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} R}, \quad (1.7.7)$$

$$\lambda = -\sin \vartheta \cos \varphi, \quad \mu = \sin \gamma - \sin \vartheta \sin \varphi,$$

а J_1 — функция Бесселя. В направлении главного теневого лепестка ($\varphi = \pi/2$, $\vartheta = \gamma$) рассеянное поле равно

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\vartheta &= -\mathcal{H}_\vartheta = -\frac{ika^2}{2} E_{0x} \cos \gamma \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{H}_\varphi = -\frac{ika^2}{2} H_{0x} \cos \gamma \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7.8)$$

что совпадает с выражением для поля, рассеянного идеально проводящим диском.

Из формулы (1.7.6) легко видеть, что в направлении зеркально отраженного луча ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = \pi/2$) и в направлении на источник ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$) поле, рассеиваемое черным диском, равно нулю. Можно показать, что в этих направлениях равно нулю поле, рассеянное черной пластиной произвольной формы.

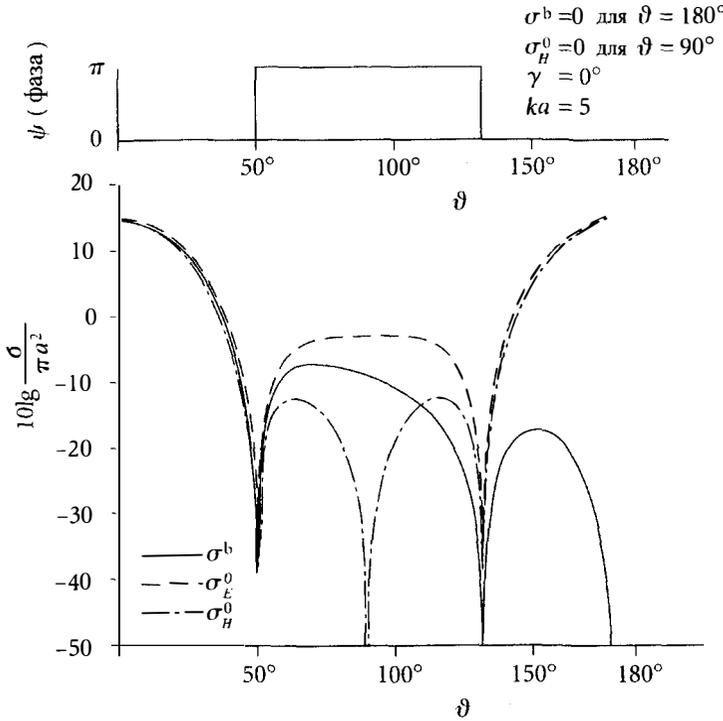


Рис. 1.7.5. Диаграмма рассеянного поля при дифракции плоской волны на диске для $\gamma = 0^\circ$ и $ka = 5$

В плоскости падения ($\varphi = \pm\pi/2$) рассеянное поле имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi = -\mathcal{H}_\vartheta &= -\frac{ia}{2} E_{0x} (\cos \gamma + \cos \vartheta) \sin \varphi \frac{J_1(ka\mu)}{\mu} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \mathcal{E}_\vartheta = \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{ia}{2} H_{0x} (\cos \gamma + \cos \vartheta) \sin \varphi \frac{J_1(ka\mu)}{\mu} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7.9)$$

а эффективная поверхность рассеяния не зависит от поляризации падающей волны и определяется формулой

$$\sigma = \pi a^2 \left| (\cos \gamma + \cos \vartheta) \frac{J_1(ka\mu)}{\mu} \right|^2. \quad (1.7.10)$$

По этой формуле был проведен численный расчет эффективной поверхности рассеяния при $ka = 5$. Вычисления были выполнены для

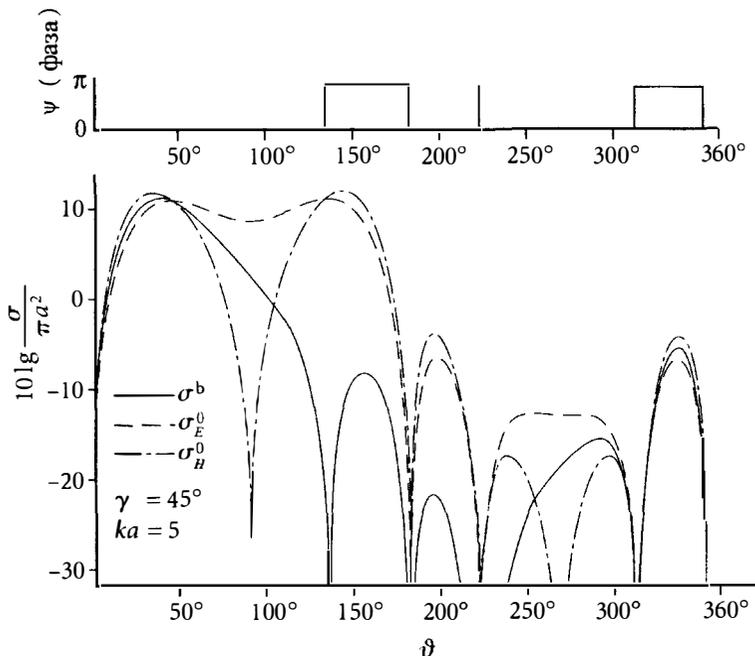


Рис. 1.7.6. Диаграмма рассеянного поля при дифракции плоской волны на диске для $\gamma = 45^\circ$ и $ka = 5$

поля, рассеянного в плоскости падения ($\varphi = \pi/2$). Значение угла γ , характеризующего направление падающей волны, было взято равным 0° и 45° . Результаты расчетов представлены на рис. 1.7.5, 1.7.6 сплошной линией. Там же построены графики фазы ψ компонент рассеянного поля

$$E_x = -i|E_x|e^{ikR}e^{i\psi}, \quad H_x = -i|H_x|e^{ikR}e^{i\psi}. \quad (1.7.11)$$

Как видно из этих рисунков, изменение фазы происходит скачком (на π) при переходе через каждый минимум. Узкий «всплеск» на фазовой кривой на рис. 1.7.6 соответствует «провалившемуся» лепестку, который лежит под нижней границей, имеющейся на графике.

Для сравнения на этих рисунках построены (в приближении физической оптики) эффективные поверхности рассеяния σ_E^0 и σ_H^0 для идеально проводящего диска. Функция σ_E^0 соответствует случаю E -поляризации ($H_{0x} = 0$), а σ_H^0 случаю H -поляризации ($E_{0x} = 0$) па-

дающей волны. За исключением области зеркально отраженного луча и направления на источник, функция σ качественно повторяет ход функций $\sigma_{E,H}^0$, приближаясь к ним вблизи теневого лепестка. В некоторых направлениях черный диск светит ярче металлического.

В заключение параграфа отметим, что согласно теореме о теновом контуре, полученные здесь результаты имеют более широкое значение. Формулы для поля, рассеянного черной лентой, определяют также поле, рассеянное бесконечно длинным черным цилиндром с произвольной формой поперечного сечения. Решение для черного диска остается в силе для произвольных черных тел с теновым контуром в виде окружности. Сюда, в частности, относятся черная сфера и черные тела вращения (при падении плоской волны вдоль их оси симметрии).

§ 1.8. Физическая модель черного тела

Выше мы исследовали абстрактную модель черного тела, Приведем теперь пример физической модели подобного тела. С этой целью рассмотрим задачу о дифракции плоской волны

$$E_x = -H_y = e^{-ikz} \quad (1.8.1)$$

на изотропной неоднородной сфере с радиусом a , в которой электромагнитные параметры ϵ и μ не зависят от координат ϑ , φ (рис. 1.8.1). Пользуясь стандартным методом разделения переменных, можно показать, что рассеянное поле в дальней зоне ($r \gg ka^2$) определяется формулами

$$\begin{aligned} E_\varphi = -H_\vartheta &= \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-1)^n \times \\ &\times \left[-\frac{a_n}{\sin \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + b_n \frac{\partial^2 P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta^2} \right] \sin \varphi, \\ E_\vartheta = H_\varphi &= \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-1)^n \times \\ &\times \left[a_n \frac{\partial^2 P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta^2} - \frac{b_n}{\sin \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

$$E_r = H_r = 0.$$

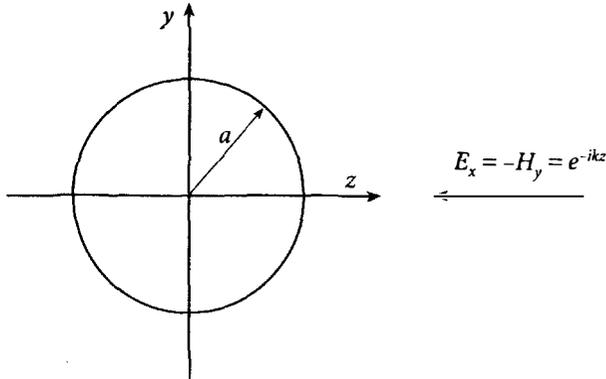


Рис. 1.8.1. Дифракция плоской волны, падающей вдоль оси z , на сфере с центром в начале координат

Здесь P_n — полиномы Лежандра первого рода,

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\psi_n(ka)u'_n(ka) - \epsilon(a)u_n(ka)\psi'_n(ka)}{\epsilon(a)u_n(ka)\zeta'_n(ka) - u'_n(ka)\zeta_n(ka)}, \\ b_n &= \frac{\psi_n(ka)v'_n(ka) - \mu(a)\psi'_n(ka)v_n(ka)}{\mu(a)v_n(ka)\zeta'_n(ka) - v'_n(ka)\zeta_n(ka)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8.3)$$

$$\psi_n(ka) = \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} J_{n+1/2}(ka), \quad \zeta_n(ka) = \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} H_{n+1/2}^{(1)}(ka), \quad (1.8.4)$$

а $J_{n+1/2}$, $H_{n+1/2}^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода, соответственно. Штрих означает производную по аргументу. Функции u_n и v_n являются решениями уравнений

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \rho} u_n(\rho) \right] + \left[\epsilon \mu - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] u_n(\rho) = 0, \quad \text{для } \rho = kr, \quad (1.8.5)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} v_n(\rho) \right] + \left[\epsilon \mu - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] v_n(\rho) = 0, \quad \text{для } \rho = kr,$$

и совпадают с функциями ψ_n при $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$.

Учитывая свойства полиномов Лежандра

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta^2} &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} = -\frac{n(n+1)}{2}, \\ \lim_{\vartheta \rightarrow \pi} \frac{\partial^2 P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta^2} &= -\lim_{\vartheta \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} = -\frac{(-1)^n n(n+1)}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8.6)$$

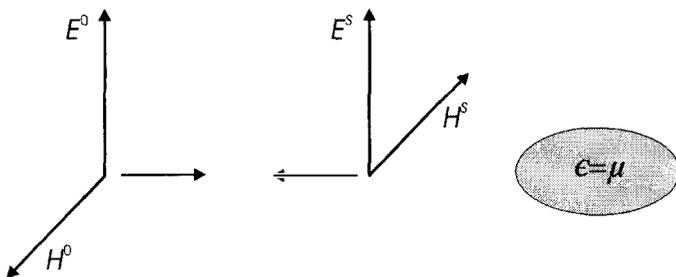


Рис. 1.9.1. Дифракция плоской волны, падающей на черное тело с $\epsilon = \mu$

из формул (1.8.2) находим

$$E_x = H_y = -\frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} (a_n - b_n) \text{ для } \vartheta = 0, \quad (1.8.7)$$

$$E_x = -H_y = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} (a_n + b_n) \text{ для } \vartheta = \pi. \quad (1.8.8)$$

Значение $\vartheta = 0$ соответствует направлению на источник, а значение $\vartheta = \pi$ — направлению главного теневого лепестка диаграммы рассеяния. Формула (1.8.7) показывает, что при $\epsilon(r) = \mu(r)$ поле, рассеянное в направлении на источник, равно нулю. Иначе говоря, сфера с параметрами $\epsilon(r) = \mu(r)$ является как бы черным телом. Такой же результат был установлен иным путем в работе [37]. Очевидно, что величина сигнала, отраженного каким-либо телом, может быть существенно уменьшена, если это тело поместить внутрь поглощающей сферы с плавным изменением параметров $\epsilon(r) = \mu(r)$. Эффект такого уменьшения сигнала имеется даже в случае $\epsilon(r) \neq \mu(r)$, когда $\mu(r) = 1$, а $\epsilon(r)$ изменяется достаточно плавно.

§ 1.9. Наблюдение М. Л. Левина

В своем отзыве на докторскую диссертацию автора М. Л. Левин отметил, что поле при обратном рассеянии от произвольных тел вращения с $\epsilon = \mu$ равно нулю, когда эти тела освещаются волной, распространяющейся вдоль их осей симметрии. Он предложил следующее изящное доказательство, основанное на симметрии задачи и двойственности уравнений Максвелла.

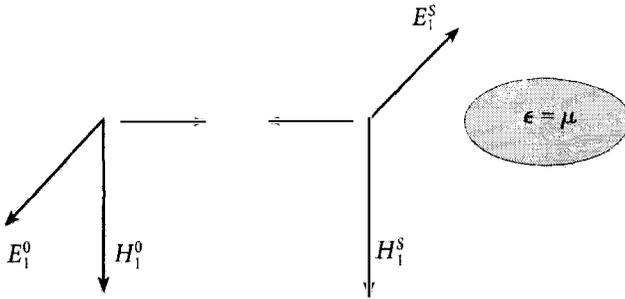


Рис. 1.9.2. Дифракция плоской волны, падающей на черное тело с $\epsilon = \mu$ (векторы повернуты на 90° по отношению к рис. 1.9.1)

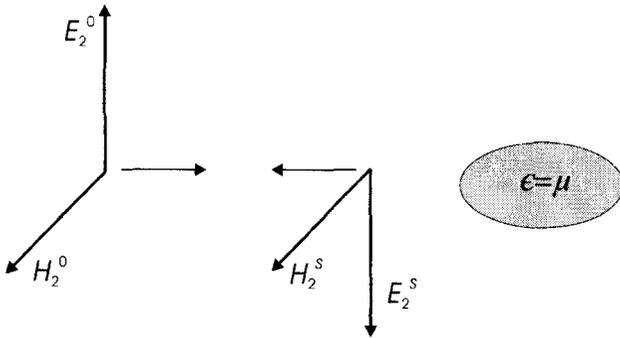


Рис. 1.9.3. Дифракция плоской волны, падающей на черное тело с $\epsilon = \mu$ (векторы повернуты по отношению к рис. 1.9.2 на 90°)

Пусть падающая плоская волна $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ распространяется в свободном пространстве в направлении к телу вращения вдоль его оси симметрии. Напомним, что мы используем гауссову систему единиц. В этой системе $\epsilon = \mu = 1$ для свободного пространства и модули электрических и магнитных векторов в плоской волне равны друг другу ($E^0 = H^0$). Обозначим рассеянные поля $\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S$. Заметим также, что модули этих векторов равны друг другу, $E^S = H^S$. Эта задача иллюстрируется на рис. 1.9.1. Предположим, что внутри рассеивающего объекта параметры ϵ и μ осесимметричны и равны друг другу ($\epsilon = \mu$).

Используя двойственность уравнений Максвелла, можно сделать следующую подстановку: $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}, \epsilon \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \epsilon$. В результате мы получим задачу, изображенную на рис. 1.9.2. Здесь $E_1^0 = H^0, H_1^0 = -E^0, E_1^S = H^S, H_1^S = -E^S$.

Повернем теперь E_1^0 и H_1^0 на 90° и учтем, что внутри рассеивающего

объекта величины ϵ и μ осесимметричны. Вследствие этой симметрии получаем ситуацию, изображенную на рис. 1.9.3. Здесь $E_2^0 = E^0$, $H_2^0 = H^0$, $E_2^S = -E^S$, $H_2^S = -H^S$. Однако поскольку падающая волна и рассеивающий объект такие же, как на рис. 1.9.1, то мы должны иметь такое же рассеянное поле, т.е. $E_2^S = E^S$, $H_2^S = H^S$. Мы получаем, таким образом, два набора противоположных равенств: $E_2^S = -E^S$, $H_2^S = -H^S$, и $E_2^S = E^S$, $H_2^S = H^S$. Они могут выполняться одновременно, если только $E_2^S = 0$, $H_2^S = 0$. Это утверждение завершает доказательство.

§1.10. Основные свойства поля, рассеянного черными телами

- Для электромагнитного поля сформулированы теоремы эквивалентности, аналогичные скалярным теоремам Гельмгольца. Эти теоремы использованы при построении теории дифракции на черных телах в рамках модели Кихгофа–Макдональда.
- Согласно этой теории поле, рассеянное любыми черными телами, равно нулю в направлении на источник падающей волны (с. 18–19 в [25]).
- Поле, рассеянное большими черными телами, можно интерпретировать как теневое излучение, поскольку оно сконцентрировано в основном вблизи главного теневого лепестка. Физическими проявлениями теневого излучения служат дифракция Френеля и эффект *интенсивного рассеяния вперед* (*forward scattering*).
- Доказана теорема о теневом контуре, согласно которой теневое излучение не зависит от всей формы тела и определяется только его теневым контуром (границей между освещенной и затененной частями поверхности тела).
- Установлено, что даже с применением абсолютно поглощающих покрытий, нанесенных на металлические тела, полная рассеянная энергия не может быть уменьшена больше чем в два раза. Это означает, что невозможно полностью замаскировать рассеивающий объект любыми радиопоглощающими покрытиями. Он может быть обнаружен с помощью бистатического радара при подходящем расположении передающей и принимающей станций. В частности, так могут быть обнаружены объекты, созданные по технологии «стелс» и недоступные для локации обычными моностатическими радарными.

- Исследован процесс исчезновения плоской волны, отраженной от черной полуплоскости. Оказывается, что электрические и магнитные токи, возбуждаемые на поверхности черной полуплоскости, создают порознь отраженные плоские волны, которые гасят друг друга.
- Изучена картина поля, рассеянного черными пластинами. В направлении зеркально отраженного луча и в направлении на источник черные пластины не излучают. В области тени диаграмма рассеяния для черных пластин близка к диаграмме рассеяния для таких же идеально проводящих (металлических) пластин.
- Согласно теореме о теневом контуре формулы, полученные для ленты и диска, дают также решение задачи о дифракции плоских волн на произвольных черных телах, имеющих теневой контур в виде двух параллельных прямых или окружности.
- Дан пример физической модели черного тела. Строго показано, что сфера с параметрами $\epsilon(r) = \mu(r)$ не создает рассеянное поле в направлении на источник. Приведено строгое доказательство, предложенное М. Л. Левиным, что этот же результат справедлив для произвольных тел вращения при осесимметричном облучении падающей волной.
- Дополнительные результаты, относящиеся к рассеиванию на черных телах, представлены в [25, 39–41, 150].
- Концепция теневого излучения развита далее в статье [40] (см. раздел VI). Там введены понятия теневого излучения первого и второго порядка. Теневое излучение первого порядка концентрируется вблизи границы тени позади непрозрачного рассеивающего объекта и фактически представляет собой эффект рассеяния вперед. Теневое излучение второго порядка включает в себя краевые волны, ползущие волны и поверхностные дифракционные лучи. Все эти волны и лучи можно интерпретировать как следствие поперечной диффузии теневого излучения и его взаимодействия с поверхностью рассеивающего объекта.
- Новая математическая модель черного экрана предложена в [41]. Названный *римановым* этот экран располагается на границе между двумя соседними римановыми пространствами и имеет две грани. Вместе эти грани непрозрачны для волнового поля, но по отдельности каждая из них прозрачна. Хорошо известные классические модели черных экранов интерпретируются здесь как специальные комбинации, составленные из римановых экранов.

Глава 2

Дифракция на выпуклых идеально проводящих телах: элементы физической теории дифракции

§ 2.1. Равномерные и неравномерные токи

Начиная с этой главы, мы приступаем к исследованию дифракционных задач для идеально проводящих тел. Такие задачи при строгой математической формулировке сводятся к интегрированию волнового уравнения или уравнений Максвелла с учетом граничных условий на поверхности тела. Однако найти их решения в аналитической форме можно лишь для тел простейшей геометрической формы — таких как бесконечно длинный цилиндр, сфера, диск и т. д. При этом оказывается, что полученные результаты позволяют эффективно вычислить дифракционное поле только при условии, если длина волны больше или сравнима с конечными размерами тела. В случае, когда длина волны много меньше размеров тела, строгие решения обычно теряют свою практическую ценность. Численные же методы решения граничных задач здесь также становятся неэффективными. Поэтому в теории дифракции большое значение имеют приближенные методы, позволяющие изучить дифракцию коротких волн на различных телах.

Одним из таких методов, применимым к широкому классу задач, является приближение Кирхгофа—Макдональда [38, 208], известное в электродинамике как приближение физической оптики. В этом методе плотность тока, возбуждаемого падающей волной на освещенной стороне идеально проводящего тела, принимается равной

$$\mathbf{j}^0 = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0, \quad (2.1.1)$$

где c — скорость света в вакууме, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности,

\mathbf{H}_0 — магнитное поле падающей волны. На затененной стороне тела поверхностный ток предполагается равным нулю ($\mathbf{j}^0 = 0$). Выражение (2.1.1) означает, что на каждом элементе освещенной поверхности тела возбуждается такой же ток, как на касательной к этому элементу идеально проводящей плоскости бесконечных размеров. Рассеянное поле, создаваемое током \mathbf{j}^0 , находится затем с помощью запаздывающего векторного потенциала.

В этой главе и в главах 3, 4 и 7 представлены некоторые элементы физической теории дифракции (ФТД) в ее первоначальной форме [3–15, 21, 25]. Эту теорию можно рассматривать как естественное обобщение физической оптики. Центральная и оригинальная идея в ФТД состоит в разделении поверхностного тока на две компоненты

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^1, \quad (2.1.2)$$

где \mathbf{j}^1 — поверхностная плотность дополнительного тока, обусловленного искривлением поверхности. Под искривлением поверхности мы понимаем **любое ее отклонение от бесконечной плоскости (плавное искривление, излом, выступ, отверстие и т. д.)**. Если тело является выпуклым и гладким, а его размеры и радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны, то дополнительный ток сосредоточен, в основном, вблизи границы между освещенной и теневой частями поверхности тела. Если же тело имеет ребра или острия, то дополнительный ток возникает также и вблизи них, а излучаемое им поле имеет характер краевых волн.

Поскольку ток, возбуждаемый плоской волной на идеально проводящей плоскости, распределен на ней равномерно (его поверхностная плотность постоянна по абсолютной величине), то вектор \mathbf{j}^0 можно назвать *равномерной* частью поверхностного тока. Дополнительный ток, обусловленный искривлением поверхности тела, назовем *неравномерной* частью тока. В приближении физической оптики учитывается только равномерная часть тока, поэтому в ряде случаев оно дает неудовлетворительные результаты. При более точном расчете необходимо учесть и неравномерную часть тока.

Следует заметить, что равномерные токи часто называются токами геометрической оптики (или физической оптики), а неравномерные токи вблизи краев иногда называются *краевыми токами*.

Нужно подчеркнуть здесь, что идея ФТД о разделении полного тока на равномерную и неравномерную часть оказалась чрезвычайно эффективной и она широко используется в дифракционной теории. Дополнительную информацию по этому вопросу можно найти в ссылках к § 2.7. Современная форма ФТД представлена в [61–66, 71–75].

В этой главе и в главе 3 мы изучим рассеянное поле, обусловленное ребрами на поверхности тел вращения, в случае, когда расстояние между ребрами и линейные размеры тел велики по сравнению с длиной волны. При этом будем исходить из физически очевидного предположения, что на каждом достаточно малом элементе поверхности тела вблизи излома можно приближенно считать неравномерную часть тока такой же, как на соответствующем двугранном угле (клине). Определив краевые волны, излучаемые неравномерной частью тока, мы вычислим затем поперечник рассеяния для ряда тел, представляющих интерес с практической точки зрения.

В главе 2 рассматриваются задачи для тел, у которых освещенная часть поверхности является выпуклой, а в главе 3 — для тел с вогнутой освещенной стороной. Основные результаты, которые представлены в главах 2 и 3, были ранее доложены на симпозиуме по дифракции и опубликованы в печати [8, 12, 13].

В § 2.2 мы изучим поле, излучаемое неравномерной частью тока, возбуждаемого на клине. Затем, пользуясь этими результатами, вычислим краевые волны, расходящиеся от кругового излома (§ 2.3), после чего в §§ 2.4, 2.5 и 2.6 займемся расчетами эффективной поверхности рассеяния для некоторых тел вращения.

§ 2.2. Краевые волны поля, рассеянного клином

Пусть плоская электромагнитная волна

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0z} \\ H_{0z} \end{bmatrix} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (2.2.1)$$

падает на идеально проводящий клин, находящийся в свободном пространстве. Внешний угол клина обозначим через α . Отсчет углов будем производить от освещенной грани (рис. 2.2.1).

Строгое решение этой задачи впервые было получено Макдональдом [42] и позже Зоммерфельдом [43]¹. Вычисляя разность между точным решением и решением в приближении физической оптики, найдем рассеянное поле, излучаемое неравномерной частью тока. Опуская математические выкладки, которые можно найти в [13], приведем сразу окончательные выражения. При $kr \gg 1$ это поле имеет вид цилиндрических

¹ Полное решение этой задачи изложено также в книгах [13, 196, 197]

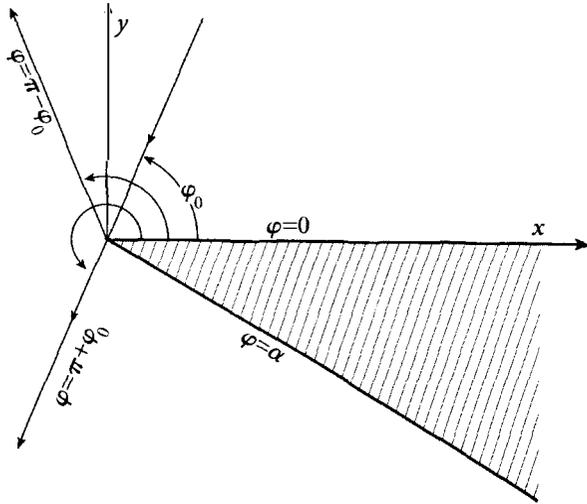


Рис. 2.2.1. Дифракция плоской волны на клине. Граница отраженной волны определяется линией $\varphi = \pi - \varphi_0$. Граница зоны тени определяется линией $\varphi = \pi + \varphi_0$

волн

$$E_z = -H_\varphi = E_{0z} f^1 \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (2.2.2)$$

$$E_\varphi = H_z = H_{0z} g^1 \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}},$$

расходящихся от ребра клина. Функции f^1 и g^1 зависят только от углов $\varphi, \varphi_0, \alpha$ и определяются формулой

$$f^1 = f - f^0, \quad g^1 = g - g^0, \quad (2.2.3)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{array} \right\} = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right\}, \quad n = \frac{\alpha}{\pi} \quad (2.2.4)$$

и

$$f^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad g^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad (2.2.5)$$

если освещена только одна грань клина (т. е. $0 \leq \varphi_0 \leq \alpha - \pi$) и

$$f^0(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \quad (2.2.6)$$

$$g^0(\varphi, \varphi_0) = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)},$$

если освещены обе грани клина ($\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$). Функции f и g описывают цилиндрические волны, излучаемые полным током, т. е. суммой равномерной и неравномерной частей, а функции f^0 и g^0 относятся к цилиндрическим волнам, излучаемым только равномерной частью тока (\mathbf{j}^0).

Отметим некоторые свойства функций f^1 и g^1 . Функция $f^1(\alpha, \varphi, \varphi_0)$ непрерывна, тогда как функция $g^1(\alpha, \varphi, \varphi_0)$ испытывает конечный разрыв при $\varphi_0 = \alpha - \pi$. Причина этого разрыва заключается в том, что равномерная часть тока отлична от нуля на грани, вдоль которой распространяется плоская волна (2.2.1) ($\varphi_0 = \alpha - \pi$). В радиолокационном случае, когда направление в точку наблюдения совпадает с направлением на источник ($\varphi = \varphi_0$), обе функции f^1 и g^1 непрерывны. Разрыва у функции g^1 при $\varphi = \varphi_0 = \alpha - \pi$ нет потому, что элемент тока не излучает в продольном направлении.

На границе плоских волн (т. е. при $\varphi = \pi + \varphi_0$, $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$) функции f , f^0 и g , g^0 обращаются в бесконечность, в то время как функции f^1 , g^1 остаются конечными. Соответствующие выражения для функций f^1 и g^1 даны в параграфе 4 в книге [13] и приведены ниже:

$$\left. \begin{array}{l} f^1 \\ g^1 \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 \pm \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad (2.2.3a)$$

если $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi_0 < \alpha - \pi$;

$$\left. \begin{array}{l} f^1 \\ g^1 \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 \pm \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \\ \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \end{array} \right. \quad (2.2.3б)$$

если $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$;

$$\left. \begin{array}{l} f^1 \\ g^1 \end{array} \right\} = \mp \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad (2.2.3в)$$

если $\varphi = \pi + \varphi_0$ и $\varphi_0 < \alpha - \pi$;

$$\left. \begin{array}{l} f^1 \\ g^1 \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi_0) \pm \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \\ \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \end{array} \right. \quad (2.2.3г)$$

если $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ и $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$.

Исключением является случай касательного падения волны на грани клина ($\varphi_0 = \pi$ или $\varphi_0 = \alpha - \pi$), когда функции f^1 и g^1 оказываются сингулярными в направлении падающей волны ($\varphi = 0$ или $\varphi = \alpha$), см. формулу (4.04) в книге [13]. Причина этой сингулярности заключается в том, что в случае касательного падения плоской волны поле, излучаемое током \mathbf{j}^1 , не имеет лучевую структуру в окрестности соответствующей грани клина и следовательно не может быть представлено в форме цилиндрической волны.

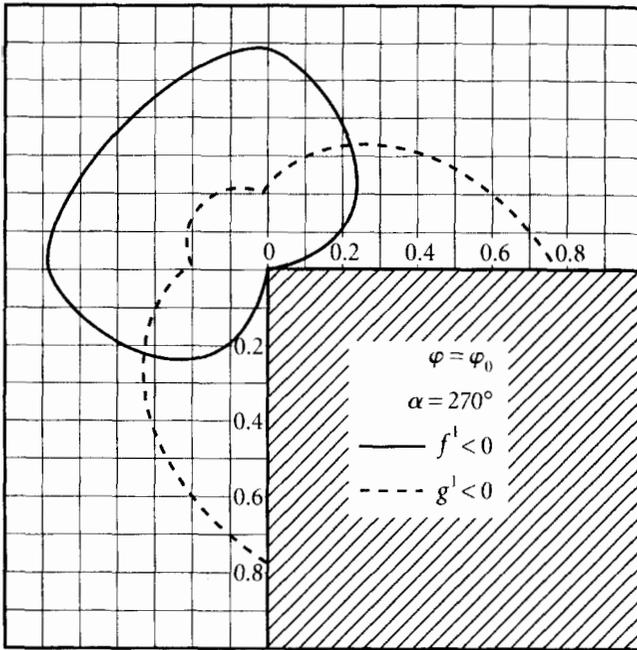


Рис. 2.2.2. Диаграммы краевых волн, излучаемых неравномерными (краевыми) токами. Функция f^1 (или g^1) соответствует случаю, когда электрический (или магнитный) вектор параллелен ребру клина

Графики функций f^1 и g^1 (рис. 2.2.2, 2.2.3), построенные в полярных координатах, дают наглядное представление о краевых волнах, излучаемых неравномерной составляющей тока. В частности, они показывают, что эти волны существенно зависят от поляризации падающей волны.

В случае, когда на клин падает плоская волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(x \cos \bar{\alpha} + y \cos \beta + z \cos \gamma)} \quad (2.2.7)$$

под произвольным углом γ ($0 < \gamma < \pi/2$) к ребру клина (рис. 2.2.4), поле, излучаемое неравномерной частью тока, описывается (при $kr \gg 1$) формулами

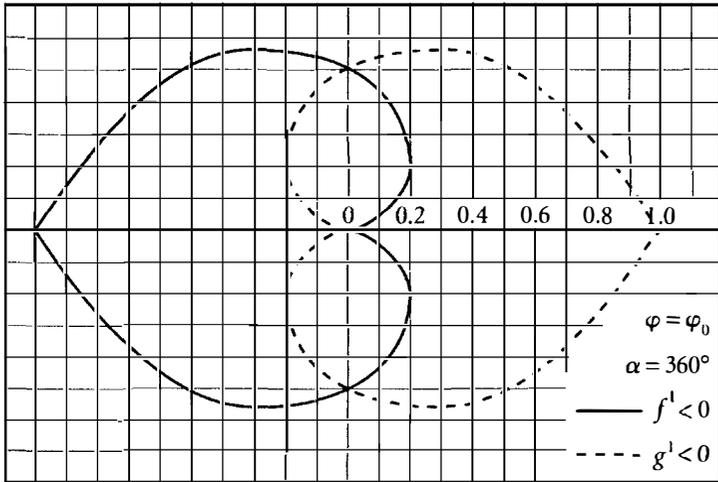


Рис. 2.2.3. Диаграммы краевых волн, излучаемых неравномерной составляющей тока, при дифракции плоской волны на полуплоскости ($\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 360^\circ$). Функция f^1 (или g^1) соответствует случаю, когда электрический (или магнитный) вектор параллелен краю полуплоскости

$$\left. \begin{aligned} E_z &= [H_{0z} \cos \gamma + E_{0z} f^1(\varphi, \varphi_0, \alpha)] \times \\ &\quad \times \frac{e^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} e^{ikz \cos \gamma}, \\ E_\varphi &= H_{0z} g^1(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{e^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} e^{ikz \cos \gamma}, \end{aligned} \right\} k_1 = k \sin \gamma. \quad (2.2.8)$$

Первый член в квадратных скобках для выражения E_z в формуле (2.2.8) является следствием поляризационной зависимости между компонентами H_z и E_z в приближении физической оптики [196, 200], т. е. в поле, излучаемом равномерным током \mathbf{j}^0 . Входящий сюда угол падения φ_0 определяется условием

$$e^{ik(x \cos \bar{\alpha} + y \cos \beta)} = e^{-ik_1(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}, \quad (2.2.9)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \beta}{\cos \bar{\alpha}}.$$

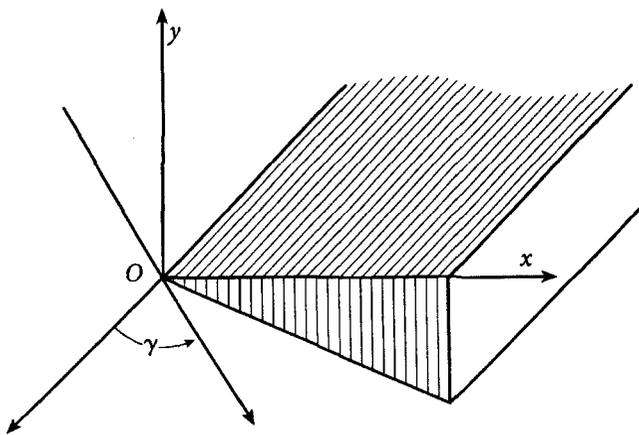


Рис. 2.2.4. Наклонное падение плоской волны на клин. Угол γ — это угол между нормалью к фронту падающей волны и осью z

Следует различать два похожих символа $\tilde{\alpha}$ и α . Символ $\tilde{\alpha}$ обозначает угол между осью z и направлением падающей волны, а буква α обозначает угол между гранями клина.

Остальные компоненты поля, излучаемого неравномерной частью тока, находятся с помощью уравнений Максвелла и равны

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\operatorname{ctg} \gamma E_z, & H_r &= -\operatorname{ctg} \gamma H_z, \\ E_\varphi &= \frac{1}{\sin \gamma} H_z, & H_\varphi &= -\frac{1}{\sin \gamma} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

Поверхности равной фазы для этих волн имеют вид

$$r \sin \gamma + z \cos \gamma = \operatorname{const} \quad (2.2.11)$$

и являются коническими поверхностями, образующие которых составляют угол $\pi/2 + \gamma$ с положительным направлением оси z . Таким образом, при наклонном облучении клина плоской волной поле, излучаемое неравномерной частью тока, представляет собой конические волны, расходящиеся от ребра клина. Нормали к фазовым поверхностям этих волн составляют угол γ с осью z и показаны на рис. 2.2.5. Эти волны можно представить в более наглядной форме, если ввести компоненты

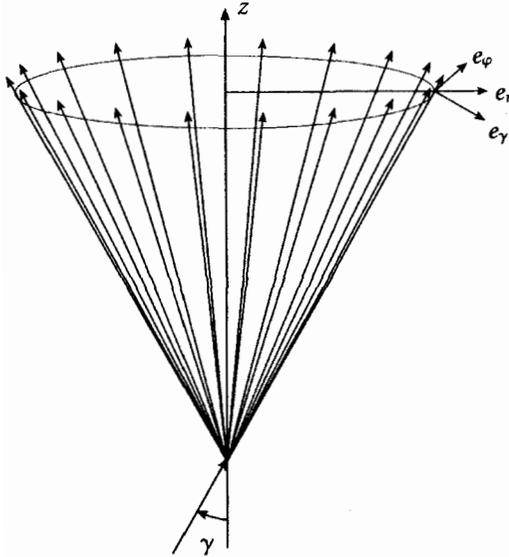


Рис. 2.2.5. Конус дифракционных лучей

(см. рис. 2.2.5)

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma &= E_r \cos \gamma - E_z \sin \gamma, \\ H_\gamma &= H_r \cos \gamma - H_z \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.12)$$

Тогда окончательные выражения для рассеянного поля в дальней зоне будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma = H_\varphi &= -\frac{1}{\sin \gamma} E_z, \\ H_\gamma = -E_\varphi &= -\frac{1}{\sin \gamma} H_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

Пользуясь приведенными здесь результатами, определим в следующем параграфе краевые волны, расходящиеся от кругового излома.

§ 2.3. Поле, рассеянное круговым изломом

Ребро излома на поверхности тела вращения имеет форму окружности. Если диаметр такой окружности и расстояние между соседними ребрами велики по сравнению с длиной волны, то в этом случае неравномерные токи вблизи ребра любой поверхности вращения можно

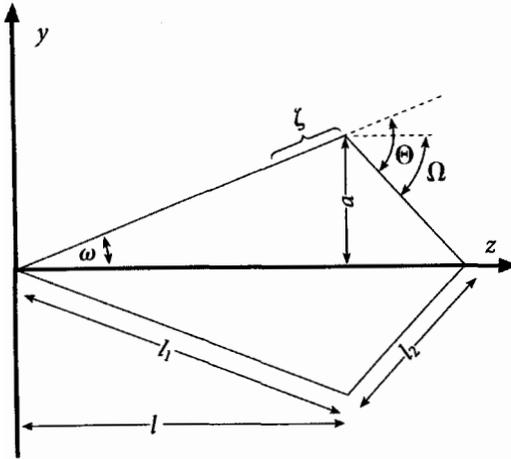


Рис. 2.3.1. Сечение тела вращения плоскостью yoz

приближенно считать такими же, как и на соответствующем коническом теле. Вычисление поля, рассеянного таким неравномерным током, является канонической задачей, которая излагается в данном разделе. Ее решение будет использовано в следующих разделах для определения поперечника рассеяния некоторых тел вращения. Эта каноническая задача изучается для случая, когда волна падает на тело вдоль оси симметрии конической поверхности. Рассеянное поле вычисляется в направлении этой оси, представляющей фокальную линию для краевых волн.

Итак, пусть плоская электромагнитная волна падает на коническое тело в положительном направлении оси z (рис.2.3.1). Из формул

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{ik} (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}), \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

находим следующие выражения для рассеянного поля в волновой зоне:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= H_y = ikA_x, \\ E_y &= -H_x = ikA_y, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.3.2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_y = ikA_x, \\ E_y &= H_x = ikA_y, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (2.3.3)$$

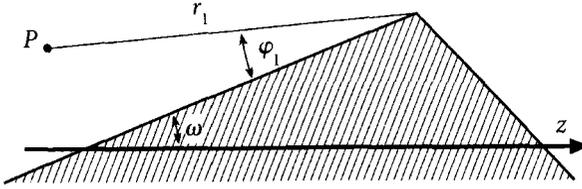


Рис. 2.3.2. Клинь, касательный к излому конической поверхности

При этом вектор-потенциал определяется формулой

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{l_1} \mathbf{j}_1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} (a - \zeta \sin \omega) d\zeta + \int_0^{l_2} \mathbf{j}_2(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} (a - \zeta \sin \Omega) d\zeta \right] d\psi. \quad (2.3.4)$$

Здесь r — расстояние от излома до точки наблюдения, $\mathbf{j}_1(\zeta)$ — плотность поверхностного тока, текущего на освещенной стороне тела ($z < l$), $\mathbf{j}_2(\zeta)$ — плотность тока на теневой стороне ($z > l$). Верхний знак в экспонентах относится к случаю $\vartheta = 0$, а нижний — к случаю $\vartheta = \pi$. Поскольку неравномерная часть тока сосредоточена в основном вблизи ребра, то соответствующий ей вектор-потенциал можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \frac{a}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{l_1} \mathbf{j}_1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \int_0^{l_2} \mathbf{j}_2(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} d\zeta \right] d\psi. \quad (2.3.5)$$

Очевидно, что при $ka \gg 1$ неравномерная часть тока вблизи излома конической поверхности будет приближенно такой же, как на соответствующем клине (рис. 2.3.2). В местной цилиндрической системе координат r_1, φ_1, z_1 поле, излучаемое неравномерной частью тока (возбуждаемого на клине), определяется в дальней зоне формулами

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= -H_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{z_1}(\psi), \\ H_{z_1}(\psi) &= E_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{\varphi_1}(\psi), \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

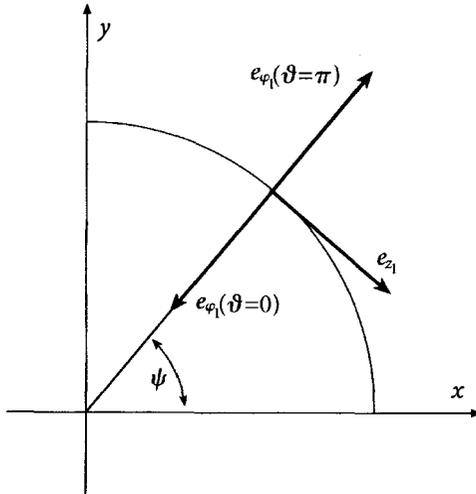


Рис. 2.3.3. Взаимная ориентация ортов e_φ и e_{z_1} в случаях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{kr_1}} \left[\int_0^\infty \mathbf{j}_1^1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \int_0^\infty \mathbf{j}_2^1(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} d\zeta \right] e^{i(kr_1 + \pi/4)}. \quad (2.3.7)$$

Здесь верхний знак в экспонентах относится к случаю $\varphi_1 = \pi + \omega_1$, а нижний — к случаю $\varphi_1 = \omega$. С другой стороны, в § 2.2 было показано, что это поле равно

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= E_{0z_1}(\psi) f^1 \frac{e^{i(kr_1 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}}, \\ H_{z_1}(\psi) &= H_{0z_1}(\psi) g^1 \frac{e^{i(kr_1 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

где $E_{0z}(\psi)$ и $H_{0z}(\psi)$ — значения амплитуды падающей волны на ребре клина, а f^1 и g^1 — угловые функции, характеризующие диаграмму рассеяния. Введем обозначение

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \mathbf{j}_1^1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \int_0^\infty \mathbf{j}_2^1(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} d\zeta. \quad (2.3.9)$$

Приравнивая выражения (2.3.6) и (2.3.8), находим

$$J_{z_1} = \frac{cE_{0z_1}(\psi)}{ik2\pi} f^1, \quad J_{\varphi_1} = \frac{cH_{0z_1}(\psi)}{ik2\pi} g^1. \quad (2.3.10)$$

Компоненты J_{z_1} и J_{φ_1} взаимно перпендикулярны и при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ параллельны плоскости x - y (рис. 2.3.3). Различная ориентация орта e_{φ_1} при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ связана с тем, что угол φ_1 отсчитывается от освещенной грани клина. В исходной системе координат x, y, z вектор \mathbf{J} имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{z_1} \sin \psi - J_{\varphi_1} \cos \psi, \\ J_y &= -J_{z_1} \cos \psi - J_{\varphi_1} \sin \psi, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.3.11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{z_1} \sin \psi + J_{\varphi_1} \cos \psi, \\ J_y &= -J_{z_1} \cos \psi + J_{\varphi_1} \sin \psi, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (2.3.12)$$

Подставляя выражения (2.3.10) в (2.3.11) и (2.3.12), получаем

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi], \\ J_y &= -\frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi], \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.3.13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi], \\ J_y &= -\frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi], \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (2.3.14)$$

Отождествляя теперь ток вблизи излома конической поверхности с током на клине, найдем компоненты вектор-потенциала (2.3.5):

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi] d\psi, \\ A_y &= -\frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] d\psi, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (2.3.15)$$

и

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi] d\psi, \\ A_y &= -\frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] d\psi, \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (2.3.16)$$

Пусть далее плоская волна поляризована так, что $E_0 \parallel ox$. Тогда

$$E_{0z_1}(\psi) = E_{0x} \sin \psi, \quad H_{0z_1}(\psi) = -E_{0x} \cos \psi. \quad (2.3.17)$$

Учитывая эти соотношения и подставляя выражения (2.3.15) и (2.3.16) в формулы (2.3.2) и (2.3.3), найдем поле, рассеянное круговым изломом на конической поверхности:

$$E_x = H_y = \frac{aE_{0x}}{2} (f^1 + g^1) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad E_y = H_x = 0 \text{ при } \vartheta = 0 \quad (2.3.18)$$

и

$$E_x = -H_y = \frac{aE_{0x}}{2} (f^1 - g^1) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad E_y = H_x = 0 \text{ при } \vartheta = \pi. \quad (2.3.19)$$

Формула (2.3.18) применима для значений $0 < \omega < \pi/2$ и $\omega < \Theta < \pi$, а формула (2.3.19) для значений $0 \leq \omega \leq \pi/2$ и $\omega \leq \Theta \leq \pi$. В случае диска ($\omega = \pi/2, \Theta = \pi$) поле, излучаемое краевыми токами, оказывается (в данном приближении) равным нулю на оси z , так как $f^1 = -g^1 = -1/2$ при $\vartheta = 0$ и $f^1 = g^1 = -1/2$ при $\vartheta = \pi$.

Теория, развитая в этом разделе, позволяет вычислять поперечник рассеяния для тел вращения с изломами. Ниже приводятся результаты для некоторых тел, представляющих практический интерес.

§2.4. Конусы

Пусть идеально проводящий конус (рис. 2.3.1) облучается плоской электромагнитной волной

$$E_x = H_y = E_{0x} e^{ikz}, \quad H_x = 0. \quad (2.4.1)$$

Равномерная часть тока, возбуждаемая на его поверхности, имеет компоненты

$$j_x^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \omega e^{ikz}, \quad j_y^0 = 0, \quad j_z^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos \omega \cos \psi e^{ikz} \quad (2.4.2)$$

и создает в направлении $\vartheta = \pi$ (при $R \gg ka^2, R \gg kl^2$) поле

$$E_x = -H_y = -E_{0x} \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega \frac{e^{ikR}}{R} + E_{0x} \left(\frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \omega \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl},$$

$$E_y = H_x = 0. \quad (2.4.3)$$

Напомним, что поле, излучаемое равномерным током, часто называется приближением физической оптики (ФО). Поэтому выражение (2.4.3) представляет собой приближение ФО. Первое слагаемое здесь описывает сферическую волну от вершины конуса, а остальные — сферическую волну от кругового ребра.

В соответствии с (2.3.19) неравномерный ток вблизи кругового излома создает сферическую волну

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \left(\operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl}, \quad (2.4.4)$$

$$E_y = H_x = 0,$$

где

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}. \quad (2.4.5)$$

Асимптотическое исследование строгих дифракционных рядов для полубесконечного конуса [44, 45] показывает, что в направлении $\vartheta = \pi$ можно пренебречь влиянием неравномерной части тока, обусловленной коническим острием. Поэтому суммируя (2.4.3) и (2.4.4), мы получим следующее выражение для рассеянного поля:

$$E_x = -H_y = -E_{0x} \left[\frac{i}{2} \operatorname{tg}^2 \omega (1 - e^{i2kl}) + \frac{ka \frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n} e^{i2kl}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right] \frac{e^{ikR}}{2kR}, \quad (2.4.6)$$

$$E_y = H_x = 0.$$

Отметим одну существенную особенность полученной формулы. Выражение для сферической волны от основания конуса наряду с членом, зависящим от f и g (последнее слагаемое в квадратных скобках формулы (2.4.6)), содержит также дополнительный член (слагаемое $-i \operatorname{tg}^2 \omega e^{i2kl}/2$ в формуле (2.4.6)), который не зависит от функций f и g и определяется равномерной частью тока. Иначе говоря, результирующая

сферическая волна от основания конуса не выражается только через функции f и g , характеризующие диаграмму полной краевой волны от ребра соответствующего клина. Это существенное свойство краевой волны в фокальной области не описывается в рамках геометрической теории дифракции, поэтому выражения, полученные в работах [46, 47, 48], являются сингулярными и неприменимы для конусов с большим углом раствора $\omega \approx \pi/2$. В предельном случае при $\omega = \pi/2$ они дают бесконечно большие значения для дифракционного поля.

Поперечник рассеяния согласно (2.4.6) определяется формулой

$$\sigma = \pi a^2 |\Sigma|^2, \quad (2.4.7)$$

где функция Σ связана с рассеянным полем соотношением

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma \quad (2.4.8)$$

и равна

$$\Sigma = \frac{1}{ka} \operatorname{tg}^2 \omega \sin k l e^{ikl} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl}. \quad (2.4.9)$$

Аналогичную функцию в приближении физической оптики можно записать согласно (2.4.3) в виде

$$\Sigma^0 = \frac{1}{ka} \operatorname{tg}^2 \omega \sin k l e^{ikl} - \operatorname{tg} \omega e^{i2kl}. \quad (2.4.10)$$

При деформировании передней части конуса в диск ($\omega \rightarrow \pi/2, l \rightarrow 0$) формулы (2.4.9) и (2.4.10) преобразуются соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= -ika - \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \\ \Sigma^0 &= -ika. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.11)$$

Из (2.4.9), (2.4.10) далее следует, что для больших значений параметра ka ($ka \gg \operatorname{tg}^2 \omega$) функции Σ и Σ^0 можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl}, \\ \Sigma^0 &= \operatorname{tg} \omega e^{i2kl}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.12)$$

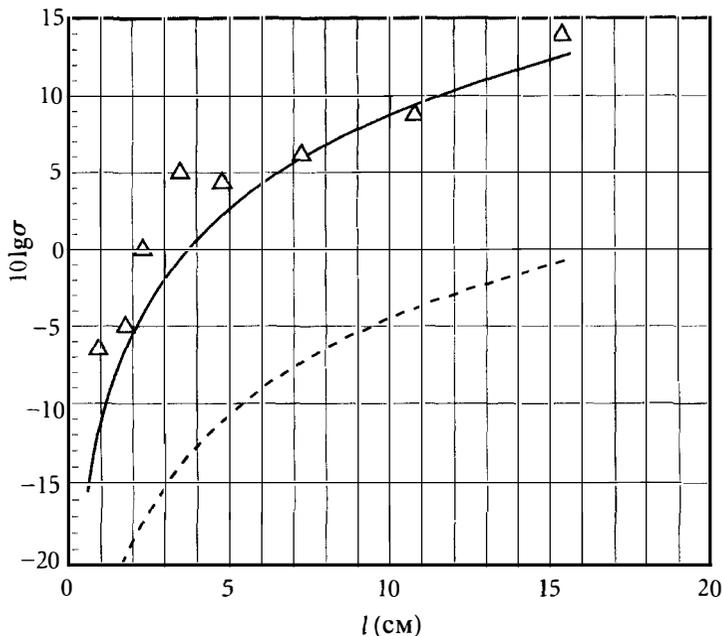


Рис. 2.4.1. Зависимость поперечника рассеяния конуса от его длины. Сплошная линия вычислена по формулам (2.4.7) и (2.4.9), учитывающим неравномерную часть тока вблизи кругового излома. Штриховая линия (σ^0) соответствует приближению физической оптики

Таким образом, даже в случае коротких волн ($ka \gg \text{tg}^2 \omega$ и $R \gg kl^2$) выражение (2.4.9) не переходит в формулу физической оптики и существенно от нее отличается, поскольку

$$\sigma = \pi a^2 \left| \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right|^2 \quad (2.4.13)$$

и

$$\sigma^0 = \pi a^2 \text{tg}^2 \omega. \quad (2.4.14)$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{\sigma^0}{\text{tg}^2 \omega} \left| \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right|^2, \quad (2.4.15)$$

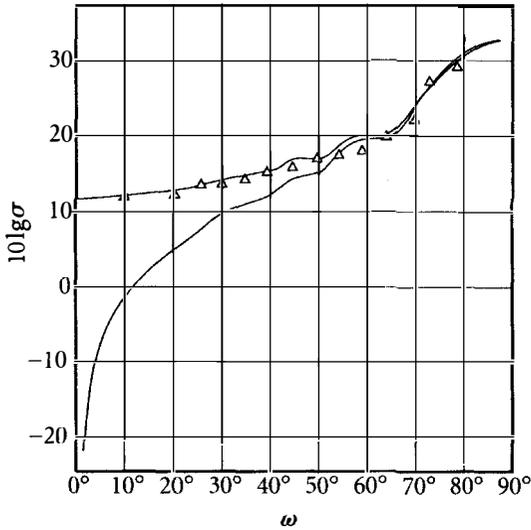


Рис. 2.4.2. Зависимость поперечника рассеяния конечного конуса от величины угла при вершине (радиус основания постоянный)

т. е. для достаточно коротких волн (или для достаточно больших размеров конуса) функция σ пропорциональна σ^0 , причем коэффициент пропорциональности не зависит от размеров конуса, а определяется только его формой.

Этот результат наглядно иллюстрируется кривыми, показывающими зависимость эффективной поверхности рассеяния конуса ($\omega = 10^\circ 25'$, $k = \pi$, $\Omega = 90^\circ$) от его длины (рис. 2.4.1). В то время как наша формула (сплошная линия) находится в удовлетворительном согласии с результатами экспериментальных измерений (треугольники), приближение физической оптики (штриховая линия) дает значения на 10–15 дБ меньше экспериментальных. На рис. 2.4.2 построена кривая для поперечника рассеяния конуса ($ka = 2.75\pi$, $\Omega = 90^\circ$) при деформировании его в диск. Расхождение между нашей кривой и приближением физической оптики достигает здесь почти 30 дБ для $\omega = 2^\circ$.

Полученное нами выражение (2.4.9) позволяет также, в отличие от приближения физической оптики (2.4.10), оценить роль формы теневой части тела и показывает, что отраженный сигнал будет тем больше, чем ближе эта форма к воронкообразной ($\Omega \approx \pi - \omega$). Так, например, в случае $\omega = 10^\circ$, $kl = 10\pi$ ($k = \pi \text{ см}^{-1}$, $\lambda = 2 \text{ см}$) и $\Omega = 170^\circ$ величина сигнала, отраженного конусом, может на 15 дБ превышать значение, соответствующее физической оптике (рис. 2.4.3).

Заметим, что наше выражение (2.4.13) эквивалентно приведенному в упомянутых выше статьях [46, 47, 48], однако последнее применимо лишь для острых конусов, тогда как формула (2.4.9) пригодна для конусов с любым углом раствора ω ($0 \leq \omega \leq \pi/2$).

Изложенный метод расчета может быть обобщен на случай несимметричного падения плоской волны. Однако при этом, вообще говоря, уже нужно принимать во внимание неравномерную часть тока, обусловленную острием конуса.

В заключение параграфа вычислим эффективную поверхность рассеяния для тела, образуемого вращением вокруг оси z плоской фигуры, изображенной на рис. 2.4.4. Интегрируя равномерную часть тока, нетрудно показать, что поле, рассеянное поверхностью усеченного конуса ($l_1 \leq z \leq l_1 + l_2$) в направлении $\theta = \pi$ (рис. 2.4.5), определяется формулой

$$E_x = -H_y = E_{0x} \left[- \left(\frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega_1 + \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{i2kl_1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega_1 + \frac{a_2}{2} \operatorname{tg} \omega_1 \right) \right] e^{i2k(l_1+l_2)} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.4.16)$$

Комбинируя это выражение с (2.4.3), в котором значения l и a надо заменить на l_1 и a_1 , находим поле от равномерной части тока, текущего на всей освещенной стороне тела:

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left\{ \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} - \operatorname{tg} \omega e^{i2kl_1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} e^{i2kl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_1 \right] e^{i2kl_1} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.4.17)$$

Поле, излучаемое неравномерной частью тока, определяется, согласно § 2.3, формулой

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left[\left(\frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} + \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{i2kl_1} + \right. \\ \left. + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} + \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{i2k(l_1+l_2)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (2.4.18)$$

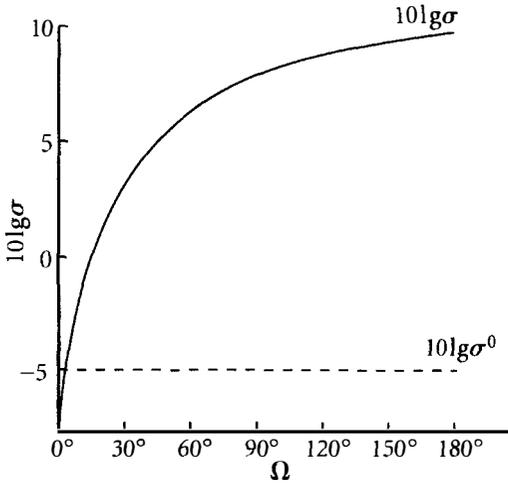


Рис. 2.4.3. Зависимость поперечника рассеяния конечного конуса от формы теневой части

где

$$n_1 = 1 + \frac{\omega - \omega_1}{\pi}, \quad n_2 = 1 + \frac{\omega_1 + \Omega}{\pi}. \quad (2.4.19)$$

Суммируя теперь (2.4.17) и (2.4.18), получим уточненное выражение для поля, рассеянного в направлении $\vartheta = \pi$:

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left[\frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} + \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} e^{i2kl_1} + \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2}}{ka_1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2} e^{i2kl_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} \right) e^{i2kl_1} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.4.20)$$

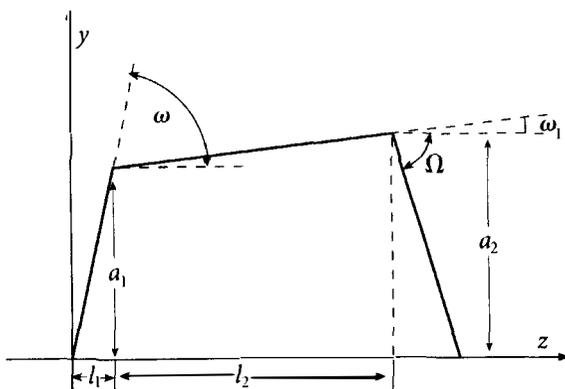


Рис. 2.4.4. Образующая поверхности вращения

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния будет равна

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} + \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} e^{i2kl_1} + \left(\frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2} e^{i2kl_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} \right) e^{i2kl_1} \right|^2. \quad (2.4.21)$$

В приближении физической оптики аналогичная величина равна

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 \left| \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} - \operatorname{tg} \omega e^{i2kl_1} + \left[\frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} e^{i2kl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_1 \right] e^{i2kl_1} \right|^2. \quad (2.4.22)$$

При деформировании переднего конуса в диск ($\omega \rightarrow \pi/2$, $l_1 \rightarrow 0$) формулы (2.4.21) и (2.4.22) принимают вид:

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| -ika_1 - \frac{1}{n_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n_1} + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} e^{i2kl_2} \right|^2, \quad (2.4.23)$$

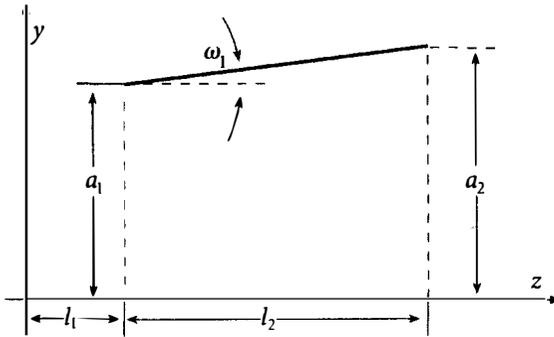


Рис. 2.4.5. Образующая усеченной конической поверхности

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 \left| -ika_1 + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} e^{i2kl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_1 \right|^2. \quad (2.4.24)$$

Полагая в этих выражениях $\omega_1 = 0$, находим поперечник рассеяния для конечного цилиндра:

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| -ika_1 - \frac{1}{n_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n_1} + \frac{2}{\cos \frac{\pi}{n_2} - 1} \frac{\sin \frac{\pi}{n_2}}{n_2} e^{i2kl_2} \right|^2, \quad (2.4.25)$$

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 (ka_1)^2, \quad (2.4.26)$$

где

$$n_1 = \frac{3}{2}, \quad n_2 = 1 + \frac{\Omega}{\pi}. \quad (2.4.27)$$

Формула (2.4.25) является более точной, чем формула (15.06) из [13], где величина поля в направлении $\vartheta = \pi$ была взята в приближении физической оптики.

§ 2.5. Параболоиды вращения

Вычислим эффективную поверхность рассеяния параболоида вращения $r^2 = 2pz$ (рис. 2.5.1), облучаемого плоской волной (2.4.1). Равномерная

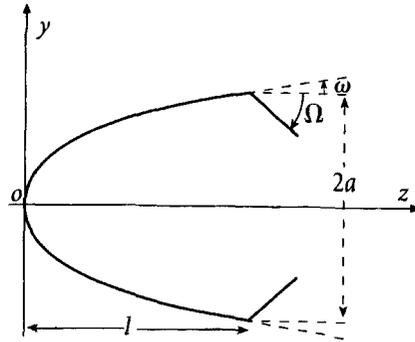


Рис. 2.5.1. Сечение тела вращения плоскостью yoz

часть тока, возбуждаемая на поверхности параболоида, имеет компоненты

$$j_x^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \alpha e^{ikz}, \quad j_y^0 = 0, \quad j_z^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos \alpha \cos \psi e^{ikz}. \quad (2.5.1)$$

Интегрируя этот ток, нетрудно показать, что в направлении $\vartheta = \pi$ он излучает поле

$$E_x = -H_y = -E_{0x} \frac{a}{2} (1 - e^{i2kl}) \operatorname{tg} \omega \frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_y = H_x = 0. \quad (2.5.2)$$

Здесь a — радиус основания параболоида, $l = a^2/(2p) = (a/2) \operatorname{ctg} \omega$ — его длина, α — угол между осью z и касательной к образующей параболоида ($r^2 = 2pz$). В точке $z = l$ угол α принимает значение $\alpha = \omega$ ($\operatorname{tg} \omega = p/a$).

Поле от неравномерной части тока, обусловленной круговым изломом поверхности параболоида, определяется в направлении $\vartheta = \pi$ формулой (2.4.4). Поле от неравномерной части тока, обусловленной плавным искривлением поверхности параболоида, равно нулю [49]. Поэтому, суммируя (2.5.2) и (2.4.4), мы находим выражение для результирующего рассеянного поля:

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \left(\operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl} \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (2.5.3)$$

$$E_y = H_x = 0,$$

где

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}.$$

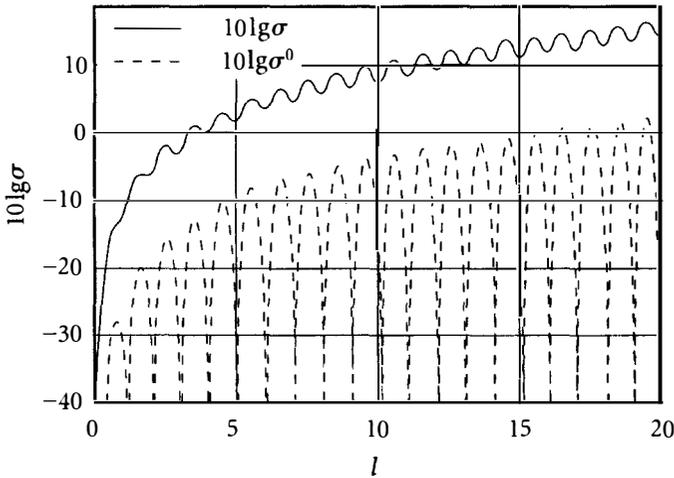


Рис. 2.5.2. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного параболоида от его длины при постоянном значении угла ω ($\text{tg } \omega = 0.1$). Диаметр основания меняется

Следовательно, поперечник рассеяния параболоида будет определяться соотношением

$$\sigma = \pi a^2 \left| \text{tg } \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl} \right|^2, \quad (2.5.4)$$

которое при деформировании параболоида в диск ($\omega \rightarrow \pi/2$, $l \rightarrow 0$, $\Omega = \text{const}$) преобразуется к виду

$$\sigma = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n} \text{ctg } \frac{\pi}{n} \right|^2. \quad (2.5.5)$$

Сравнивая выражение (2.5.4) с формулой

$$\sigma^0 = \pi a^2 \text{tg}^2 \omega \left| 1 - e^{i2kl} \right|^2, \quad (2.5.6)$$

которую дает для эффективной поверхности рассеяния физическая оптика, мы видим, что они существенно отличаются друг от друга. Действительно, прежде всего обращает на себя внимание осциллирующий характер функции σ^0 : отраженный сигнал равен нулю, если по длине параболоида укладывается целое число полуволн ($l = n\lambda/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$), и принимает максимальное значение, если $l = (n + 1/2)\lambda/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

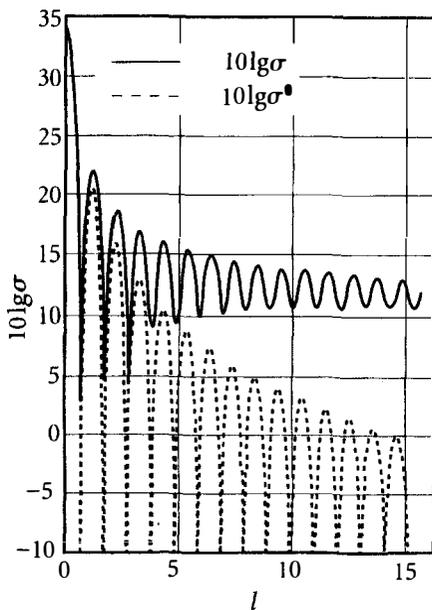


Рис. 2.5.3. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного параболоида от его длины при постоянном диаметре основания

На рис. 2.5.2 показана эффективная поверхность рассеяния для параболоидов с параметрами $\Omega = 90^\circ, \operatorname{tg} \omega = 0.1$ ($k = \pi$). Хотя осциллирующий характер эффективной поверхности рассеяния (2.5.4) сохраняется, амплитуда осцилляции составляет всего лишь около 2 дБ, а максимальные значения функции σ превышают соответствующие значения σ^0 почти на 13 дБ. Еще более сильное расхождение между результатами нашей теории и физической оптики обнаруживается при деформировании параболоида в диск (рис. 2.5.3, $ka = 3\pi$, $k = \pi$, $\omega \rightarrow 90^\circ$, $\Omega \rightarrow 90^\circ$).

Как и в случае конуса, существенное влияние на величину отраженного сигнала оказывает форма теневой части. Например, для параболоида с параметрами $ka = 2\pi$, $kl = 10\pi$, $\operatorname{tg} \omega = 0.1$ ($k = \pi$) величина отраженного сигнала возрастает при увеличении Ω ($\omega < \Omega < \pi - \omega$) на 44 дБ (рис. 2.5.4).

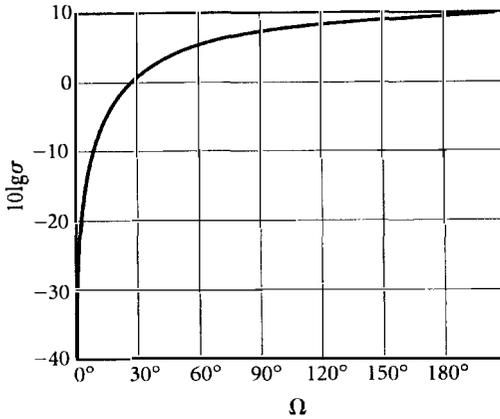


Рис. 2.5.4. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного параболоида от формы теневой части

§ 2.6. Сферические поверхности

На поверхности идеально проводящей сферы (радиуса ρ и с центром на оси z в точке $z = \rho$) падающая волна (2.4.1) возбуждает поверхностный ток, равномерная часть которого имеет компоненты

$$j_x^0 = -\frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos \theta e^{ikz}, \quad j_y^0 = 0, \quad j_z^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \theta \cos \psi e^{ikz}. \quad (2.6.1)$$

Такой ток, текущий на сферическом сегменте (рис. 2.6.1), создает в направлении $\theta = \pi$ поле

$$E_x = -H_y = E_{0x} \left[-\frac{a}{2 \cos \omega} + \frac{i}{4k} + \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \omega - \frac{i}{4k} \right) e^{i2kl} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (2.6.2)$$

где

$$l = \rho(1 - \sin \omega) \quad (2.6.3)$$

и a — радиус сечения сферы плоскостью $z = l$. При $ka \gg 1$ выражение (2.6.2) принимает вид

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} (\sec \omega - \operatorname{tg} \omega e^{i2kl}) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.6.4)$$

Если здесь положить $\omega = 0$, то формула

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (2.6.5)$$

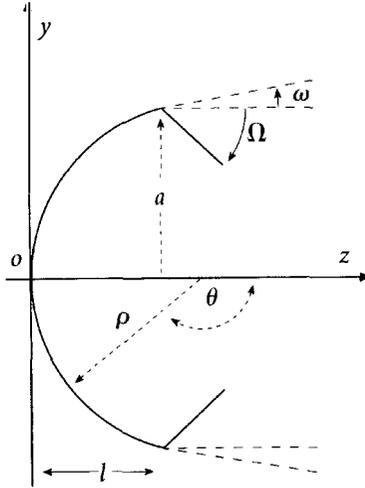


Рис. 2.6.1. Сферический сегмент с основанием конической формы

дает нам величину поля, рассеянного полусферой. Соответствующее ей значение эффективной поверхности рассеяния будет равно

$$\sigma^0 = \pi a^2. \quad (2.6.6)$$

Найдем теперь поле, излучаемое неравномерным током, текущим вблизи излома сферической поверхности. Возмущением тока вследствие гладкого искривления поверхности можно пренебречь, если $ka \gg 1$. Неравномерная часть тока, обусловленная изломом, создает в направлении $\vartheta = \pi$ поле (2.4.4). Суммируя последнее с полем (2.6.4), находим величину искомого поля:

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \left[\frac{1}{\cos \omega} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.6.7)$$

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния сферического сегмента равна

$$\sigma = \pi a^2 \left| \frac{1}{\cos \omega} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{i2kl} \right|^2, \quad (2.6.8)$$

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}.$$

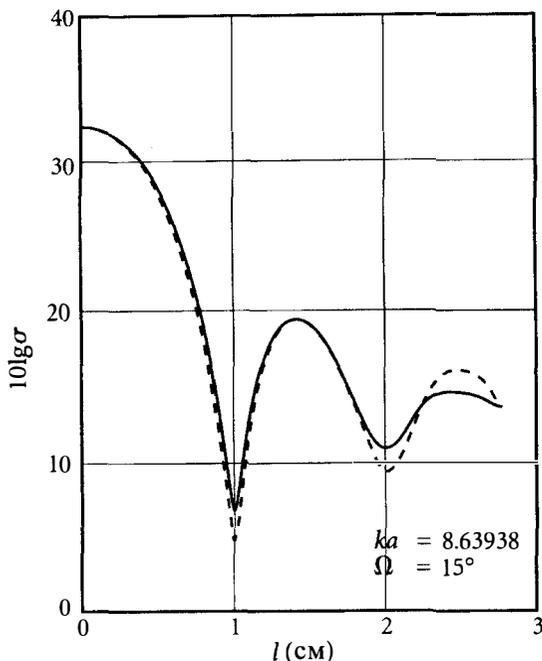


Рис. 2.6.2. Зависимость эффективной поверхности рассеяния сферического сегмента от его длины при постоянном радиусе основания. Функция σ (сплошная линия) вычислена по формуле (2.6.8), учитывающей неравномерную часть тока вблизи излома. Функция σ^0 (штриховая линия) вычислена по формуле (2.6.9) и соответствует приближению физической оптики

В приближении физической оптики аналогичная величина определяется в соответствии с формулой (2.6.4) и равна

$$\sigma^0 = \pi a^2 \left| \frac{1}{\cos \omega} - \operatorname{tg} \omega e^{i2kl} \right|^2. \quad (2.6.9)$$

При деформировании сферической поверхности в диск ($\omega \rightarrow \pi/2$, $l \rightarrow 0$, $\Omega = \operatorname{const}$) формулы (2.6.8) и (2.6.9) преобразуются соответственно к виду

$$\sigma = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right|^2, \quad (2.6.10)$$

$$\sigma^0 = \pi a^2 (ka)^2.$$

Из формул (2.6.8) и (2.6.9) следует, что эффективная поверхность рассеяния сферического сегмента является осциллирующей функцией его

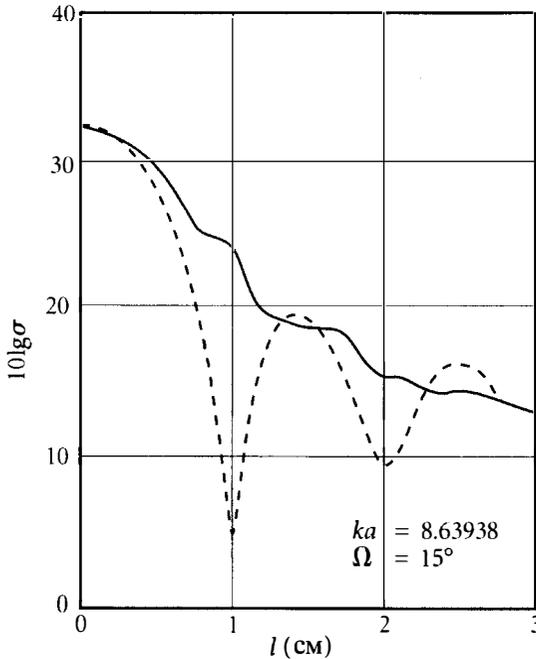


Рис. 2.6.3. Сравнение эффективной поверхности рассеяния для сферического сегмента (сплошная линия) и конечного конуса (штриховая линия), имеющих одинаковую форму основания

длины. Период осцилляций равен $\lambda/2$. Численные расчеты, проведенные по этим формулам, показали (рис. 2.6.2), что при малых углах излома ($\Omega = 15^\circ$) неравномерной частью тока можно пренебречь. На рис. 2.6.3 построены графики для эффективной поверхности рассеяния сферического сегмента и конуса (штриховая кривая), имеющих одинаковые диаметр и форму основания.

Результаты, полученные в данной главе, показывают, что величина отраженного сигнала существенно зависит от форм теневой части тела и возрастает с увеличением угла излома. Однако поскольку неравномерная часть тока сосредоточена в основном вблизи излома, то та часть затененной поверхности, которая удалена от излома на несколько длин волн, по-видимому, не будет заметно влиять на величину отраженного сигнала и может быть произвольной.

Интересно, что наши выражения, находящиеся в удовлетворительном согласии с экспериментом, даже при больших (по сравнению с длиной волны) размерах тел не переходят в формулы физической оптики

и существенно от них отличаются. В то же время физическая оптика, вопреки распространенному мнению о ее надежности в таких случаях, приводит к значительному расхождению с экспериментом.

Заметим, что наряду с экспериментальной проверкой изложенной теории нами был осуществлен также и теоретический контроль ее на примере задачи о диске (см. [6, 13]). Приближенное решение этой задачи сравнивалось со строгим решением, которое было получено М. Г. Белкиной [50]. Оказалось, что уже в случае $ka = 5$ (a — радиус диска) результаты приближенных расчетов для диаграммы рассеяния удовлетворительно согласуются с точными расчетами.

✧

§ 2.7. Дополнительные замечания

- Формула (2.2.8) является результатом корректировки выражения (5.10) из [13]. Дополнительный член $H_{0z} \cos \gamma$ появляется у компоненты E_z . Он обусловлен поляризационной связью в приближении физической оптики, т. е. полем, излучаемом равномерным током \mathbf{j}^0 . Эта поправка впервые опубликована в [51] и позже обсуждалась в [52] и [53]. Физическая природа этого явления детально исследована в [196, 200].
- Исследование краевых дифракционных волн имеет длительную историю. В работе [54] показано, что еще Ньютон наблюдал и детально описал краевые дифракционные лучи, хотя он не предложил правильного объяснения этому явлению.
- Калашников был первым, кто ввел понятие «дифракционных лучей» и предложил первое объективное доказательство их существования, зафиксировав их на фотопластинке [55].
- Следующий важный шаг был сделан Рубиновичем [56]. Он теоретически доказал, что волновое поле, возникающее при дифракции на крае отверстия, имеет лучевую структуру. Им показано, что каждая стационарная точка на крае создает конус дифракционных лучей, которые удовлетворяют принципу Ферма. Угол между дифракционным лучом и касательной к краю равен углу между падающим лучом и касательной (рис. 2.2.5). Эта концепция дифракционных лучей была использована позже Келлером [57, 58]. Лучевой конус Рубиновича широко известен теперь как дифракционный конус. Его существование доказано экспериментально Сениором и Усленги [59].

- В работе [60] предложено обобщение теории Рубиновича [56], из которого непосредственно следует геометрическая теория дифракции (ГТД) Келлера.
- Современная физическая теория дифракции (ФТД), основанная на концепции элементарных краевых волн, разработана в [61–65]. Диаграмма направленности этих волн может быть интерпретирована в терминах элементарных дифракционных коэффициентов [66–70] или в терминах эквивалентных краевых токов [53, 71–74]. С математической точки зрения эти величины определяются, в частности, формулами (2.3.9)–(2.3.14).
- Дополнительные примеры, иллюстрирующие различные применения концепции ФТД, ее модификации и обобщения, даны в [151–191].
- Быстро сходящиеся интегралы, удобные для численного исследования тока вблизи ребер, приведены в [75]. Возможные обобщения понятия неравномерной части тока, полезные для решения различных дифракционных задач, также обсуждаются в [75].
- В работах [63, 64] показано, что ГТД Келлера следует из ФТД в результате применения метода стационарной фазы к интегралам для рассеянного поля. Следовательно, ГТД можно рассматривать как асимптотическую форму ФТД. Однако в отличие от лучевой ГТД, ФТД основана на фундаментальной концепции элементарных волн Гюйгенса–Гельмгольца и поэтому позволяет исследовать рассеянное поле всюду, как в лучевых, так и в дифракционных областях. К последним относятся окрестности границ лучевых полей, окрестности фокусов и каустик, где происходят собственно дифракционные явления и где лучевые теории неприменимы.
- В этой главе мы исследовали рассеяние от тел вращения, когда падающая волна распространяется вдоль их оси симметрии. Задача рассеяния для наклонного падения также может быть решена с помощью ФТД [61–65]. В качестве альтернативных можно использовать теории [76, 77] и [69, 70].
- Отметим также асимптотическую теорию для плоских экранов [192], аналогичную ФТД, и метод сшивания асимптотических разложений [193, 194], который позволяет получить другим путем лучевые асимптотики ФТД.
- В [196, 199] дана новая форма рассеянного поля в приближении физической оптики. Оно представлено там в виде суммы отраженного поля и теневого излучения.

Глава 3

Дифракция на вогнутых телах: обобщение физической теории дифракции

В данной главе мы изучим краевые волны, расходящиеся от ребер на вогнутой поверхности тела. С этой целью в § 3.1 рассматривается задача о возбуждении плоской волной клиновидного рупора и исследуется «неравномерная» часть поля, рассеянного вершиной рупора. Результаты этого раздела используются далее для вычисления эффективной поверхности рассеяния для вогнутых тел вращения.

§ 3.1. Поле внутри клиновидного рупора

Найдем поле внутри клиновидной области $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ($\alpha \leq \pi$) при возбуждении ее плоскими волнами

$$E_z = E_{0z} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad H_z = 0 \quad (3.1.1)$$

и

$$H_z = H_{0z} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad E_z = 0. \quad (3.1.2)$$

Источником этих волн является соответственно нить электрического или «магнитного» тока, удаленная на бесконечность. Грани области будем считать идеально проводящими. Тогда согласно формулам (1.25), (1.26) из книги [13] искомое поле внутри клиновидного рупора равно

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{0z} [u(r, \varphi - \varphi_0) - u(r, \varphi + \varphi_0)], \\ H_z &= H_{0z} [u(r, \varphi - \varphi_0) + u(r, \varphi + \varphi_0)], \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

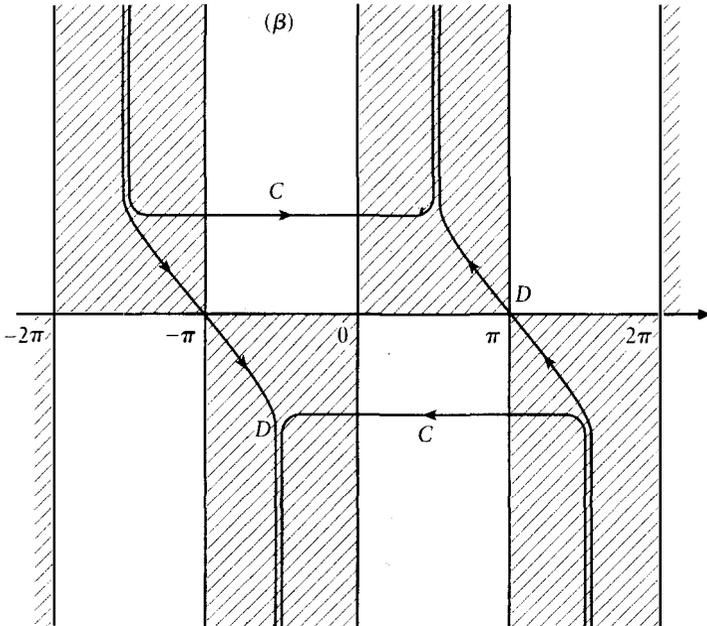


Рис. 3.1.1. Контур интегрирования в формуле (3.1.4)

где

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_C \frac{e^{-ikr \cos \beta}}{1 - e^{i\pi(\beta+\psi)/\alpha}} d\beta, \quad (3.1.4)$$

а контур C показан на рис. 3.1.1. Подынтегральная функция в формуле (3.1.4) имеет полюсы в точках

$$\beta_m = 2\alpha m - \psi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.5)$$

Переходя к интегралу по контуру D и учитывая полюсы (3.1.5), получаем

$$u(r, \varphi - \varphi_0) \pm u(r, \varphi + \varphi_0) = \nu(r, \varphi - \varphi_0) \pm \nu(r, \varphi + \varphi_0) + A^\pm - B^\pm, \quad (3.1.6)$$

где

$$\nu(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_D \frac{e^{-ikr \cos \beta}}{1 - e^{i\pi(\beta+\psi)/\alpha}} d\beta, \quad (3.1.7)$$

и

$$A^{\pm} = \sum_0^{N;M'} \delta_m^{\pm} e^{-ikr \cos(\Phi_m^{\pm} - \varphi)} \pm \sum_0^{M';N-1} \delta_m^{\pm} e^{-ikr \cos(\Phi_m^{\pm} + \varphi)}, \quad (3.1.8)$$

$$B^{\pm} = \sum_1^{M;N'-1} \delta_m^{\pm} e^{-ikr \cos(\Phi_m^{\pm} + \varphi)} \pm \sum_1^{N';M} \delta_m^{\pm} e^{-ikr \cos(\Phi_m^{\pm} - \varphi)}, \quad (3.1.9)$$

причем

$$\Phi_m^{\pm} = 2\alpha m \pm \varphi_0, \quad (3.1.10)$$

$$\delta_m^{\pm} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \varphi < \pi - \Phi_m^{\pm}, \\ 0 & \text{при } \pi - \Phi_m^{\pm} < \varphi < \pi, \end{cases} \quad (3.1.11)$$

$$\delta_m^{\pm} = \begin{cases} 1 & \text{при } \Phi_m^{\pm} - \pi < \varphi < \pi, \\ 0 & \text{при } 0 < \varphi < \Phi_m^{\pm} - \pi. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Кроме того M, M', N, N' — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\pi - \varphi_0}{2\alpha} < N < \frac{\pi - \varphi_0}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi - \varphi_0}{2\alpha} - \frac{1}{2} < M' < \frac{\pi - \varphi_0}{2\alpha}, \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\pi + \varphi_0}{2\alpha} - \frac{1}{2} < M < \frac{\pi + \varphi_0}{2\alpha}, \quad \frac{\pi + \varphi_0}{2\alpha} < N' < \frac{\pi + \varphi_0}{2\alpha} + \frac{1}{2}. \quad (3.1.14)$$

Рассмотрим теперь физический смысл полученного решения.

Функция A^{\pm} есть сумма падающей плоской волны $\exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]$ и последовательности плоских волн, возникающих вследствие многократного отражения от граней клина волны $\pm \exp[-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)]$. Волна $\pm \exp[-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)]$ возникает в свою очередь при отражении падающей волны $\exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]$ от грани $\varphi = 0$. Назовем эту совокупность волн А-серией. Она заканчивается либо волной с номером M' , отраженной от грани $\varphi = 0$ (рис. 3.1.2, а), либо волной с номером N , отраженной от грани $\varphi = \alpha$ (рис. 3.1.2, б).

Функция B^{\pm} + $\exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]$ есть сумма падающей волны и волн, возникающих в результате многократного отражения от граней клина волны $\pm \exp[-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)]$. Волна $\pm \exp[-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)]$ возникает при отражении падающей плоской волны от грани $\varphi = \alpha$. Эту совокупность волн будем называть В-серией. Она заканчивается либо волной с номером M , отраженной от грани $\varphi = 0$ (рис. 3.1.3, а), либо волной с номером N' , отраженной от грани $\varphi = \alpha$ (рис. 3.1.3, б).

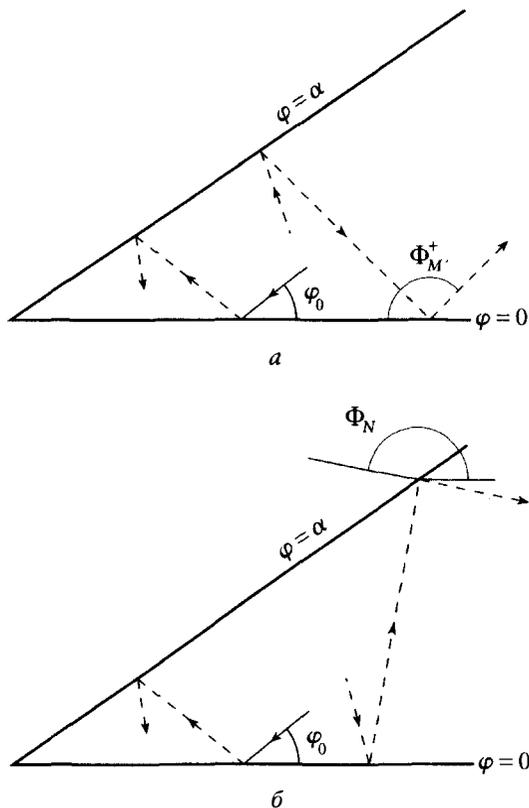


Рис. 3.1.2. А-серия плоских волн. В случае *a*) серия заканчивается M' -волной ($\Phi_{M'} = 2\alpha M' + \varphi_0$), количество волн в серии равно $2M' + 2$. В случае *б*) серия заканчивается N -волной ($\Phi_N = 2\alpha N + \varphi_0$), количество волн в серии равно $2N + 1$

Функцию $\nu(r, \psi)$ удобно представить в виде

$$\nu(r, \psi) = \frac{i}{2\alpha} \sin \frac{\pi^2}{\alpha} \int_{0^- + i\infty}^{0^+ - i\infty} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \frac{\pi^2}{\alpha} - \cos \frac{\pi(\psi + \zeta)}{\alpha}}. \quad (3.1.15)$$

Отсюда следует, что при углах раствора $\alpha = \pi/m$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) функция $\nu(r, \psi)$ равна нулю и поле внутри клина состоит только из набора плоских волн.

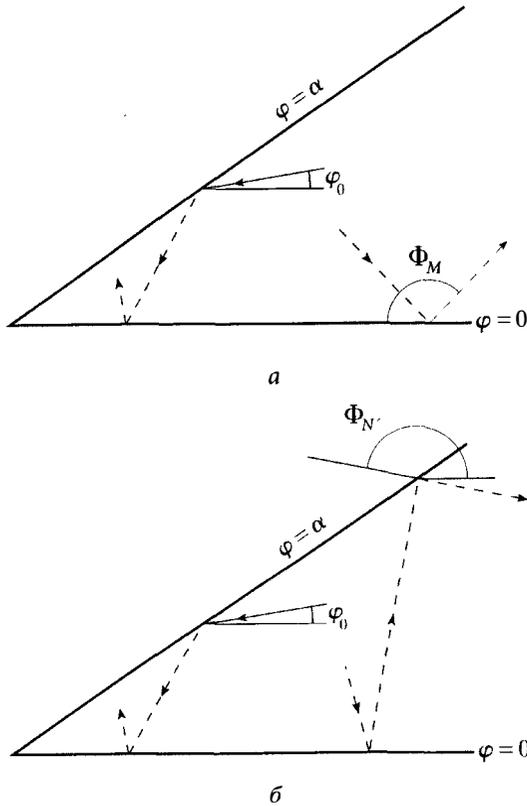


Рис. 3.1.3. В-серия плоских волн. В случае *a*) серия заканчивается *M*-волной ($\Phi_M = 2\alpha M - \varphi_0$), количество волн в серии равно $2M + 1$. В случае *б*) серия заканчивается *N'*-волной ($\Phi_{N'} = 2\alpha N' - \varphi_0$), количество волн в серии равно $2N'$

Согласно формуле (3.1.6) на грань $\varphi = 0$ падают волны

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0z} \\ H_{0z} \end{bmatrix} e^{-ikr \cos(\Phi_m^+ - \varphi)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M', N - 1 \quad (3.1.16)$$

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{0z} \\ H_{0z} \end{bmatrix} e^{-ikr \cos(\Phi_m^- - \varphi)}, \quad m = 1, 2, \dots, M, N' - 1. \quad (3.1.17)$$

Грань $\varphi = \alpha$ возбуждается, в свою очередь, волнами

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{0z} \\ H_{0z} \end{bmatrix} e^{-ikr \cos(\Phi_m^+ + \varphi)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1, M' - 1 \quad (3.1.18)$$

и

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0z} \\ H_{0z} \end{bmatrix} e^{-ikr \cos(\Phi_m^- + \varphi)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M - 1, N' - 1. \quad (3.1.19)$$

Эти волны индуцируют на гранях клина поверхностный ток, который создает рассеянное поле. Пользуясь аппаратом, изложенным в [3, 13], можно показать, что в приближении физической оптики это поле равно

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{E_{0z}} = A^- + B^- + \sum_{m=0}^{M', N-1} \nu_1(\varphi, \Phi_m^+) - \sum_{m=1}^{M, N'-1} \nu_1(\varphi, \Phi_m^-) - \\ - \sum_{m=1}^{M', N} \nu_1(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) + \sum_{m=1}^{M, N'} \nu_1(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha), \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_z}{H_{0z}} = A^+ + B^+ + \sum_{m=0}^{M', N-1} \nu_2(\varphi, \Phi_m^+) + \sum_{m=1}^{M, N'-1} \nu_2(\varphi, \Phi_m^-) + \\ + \sum_{m=1}^{M', N} \nu_2(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) + \sum_{m=1}^{M, N'} \nu_2(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha), \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

где

$$\nu_1(\varphi, \phi) = i \frac{\sin \phi}{2\pi} \int_{0^- + i\infty}^{0^+ - i\infty} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \phi + \cos(\zeta + \varphi)}, \quad (3.1.22)$$

$$\nu_2(\varphi, \phi) = -\frac{i}{2\pi} \int_{0^- + i\infty}^{0^+ - i\infty} \frac{\sin(\zeta + \varphi) e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \phi + \cos(\zeta + \varphi)}. \quad (3.1.23)$$

Функции $\nu_{1,2}(\varphi, \Phi_m^\pm)$ определяют поле, созданное гранью $\varphi = 0$ при возбуждении ее волной $\exp[-ikr \cos(\Phi_m^\pm - \varphi)]$, а функции $\nu_{1,2}(\alpha - \varphi, \Phi_m^\pm - \alpha) = \nu_{1,2}(\alpha - \varphi, \alpha + \Phi_{m-1}^\pm)$ — поле, созданное гранью $\varphi = \alpha$ при возбуждении ее волной $\exp[-ikr \cos(\Phi_{m-1}^\pm + \varphi)]$. Индекс $+/-$ величины $\Phi_m^+(\Phi_m^-)$ означает, что поле, описываемое этой величиной, порождено волной из А-серии (В-серии).

Введем теперь некоторые понятия. Назовем поле (3.1.20), (3.1.21) приближением физической оптики. А разность между точным выражением (3.1.3) для рассеянного поля и приближением физической оптики будем называть «неравномерной» частью поля, излучаемой «неравномерными»/краевыми токами. Эти понятия являются обобщением аналогичных понятий, введенных в главе 2 применительно к выпуклым поверхностям с изломами, на случай вогнутых поверхностей.

Часть рассеянного поля, созданного неравномерными токами, будет определяться формулами

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{E_{0z}} = & \nu(r, \varphi - \varphi_0) - \nu(r, \varphi + \varphi_0) - \sum_{m=0}^{M', N-1} \nu_1(\varphi, \Phi_m^+) + \sum_{m=1}^{M', N'-1} \nu_1(\varphi, \Phi_m^-) + \\ & + \sum_{m=1}^{M', N} \nu_1(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) - \sum_{m=1}^{M', N'} \nu_1(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha), \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_z}{H_{0z}} = & \nu(r, \varphi - \varphi_0) + \nu(r, \varphi + \varphi_0) - \sum_{m=0}^{M', N-1} \nu_2(\varphi, \Phi_m^+) - \sum_{m=1}^{M', N'-1} \nu_2(\varphi, \Phi_m^-) - \\ & - \sum_{m=1}^{M', N} \nu_2(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) - \sum_{m=1}^{M', N'} \nu_2(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha). \quad (3.1.25) \end{aligned}$$

С помощью метода перевала [78] нетрудно найти первый член асимптотических разложений для величин (3.1.24), (3.1.25) при $kr \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{0z} \hat{f}^1(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ H_z &= H_{0z} \hat{g}^1(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}^1 = f(\varphi, \varphi_0) - \sum_{m=0}^{M', N-1} f^0(\varphi, \Phi_m^+) + \sum_{m=1}^{M, N'-1} f^0(\varphi, \Phi_m^-) + \\ + \sum_{m=1}^{M', N} f^0(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) - \sum_{m=1}^{M, N'} f^0(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha), \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}^1 = g(\varphi, \varphi_0) - \sum_{m=0}^{M', N-1} g^0(\varphi, \Phi_m^+) - \sum_{m=1}^{M, N'-1} g^0(\varphi, \Phi_m^-) - \\ - \sum_{m=1}^{M', N} g^0(\alpha - \varphi, \Phi_m^+ - \alpha) - \sum_{m=1}^{M, N'} g^0(\alpha - \varphi, \Phi_m^- - \alpha). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Здесь функции f и g определяются формулой (2.2.4), а функции f^0 и g^0 формулами (2.2.5). Напомним, что целые числа M', N и M, N' определяются соотношениями (3.1.13) и (3.1.14). Для каждого конкретного набора значений $\varphi, \varphi_0, \alpha$ может существовать лишь по одному числу из каждой пары M', N и M, N' . Именно по этой причине в качестве верхней границы индекса суммирования указывается пара возможных чисел.

Заметим, что $f^0(\varphi, \Phi_{M'}^+)$, $f^0(\varphi, \Phi_M^-)$, $g^0(\varphi, \Phi_{M'}^+)$ и $g^0(\varphi, \Phi_M^-)$ обращаются в бесконечность при $\varphi = \pi - \Phi_{M'}^+$ и $\varphi = \pi - \Phi_M^-$, а функции $f^0(\alpha - \varphi, \Phi_N^+ - \alpha)$, $f^0(\alpha - \varphi, \Phi_{N'}^- - \alpha)$, $g^0(\alpha - \varphi, \Phi_N^+ - \alpha)$, $g^0(\alpha - \varphi, \Phi_{N'}^- - \alpha)$ обращаются в бесконечность при $\varphi = \Phi_N^+ - \pi$, $\varphi = \Phi_{N'}^- - \pi$. Однако эти сингулярности компенсируются соответствующими сингулярностями функций f и g , так что функции \hat{f}^1 и \hat{g}^1 оказываются непрерывными и конечными. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} -f^0(\varphi, \Phi_{M'}^+) - \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_{M'}^+ + \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \\ -g^0(\varphi, \Phi_{M'}^+) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_{M'}^+ - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = \pi - \Phi_{M'}^+, \quad (3.1.29)$$

$$\left. \begin{aligned}
 f^0(\varphi, \Phi_M^-) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} &= \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_M^- - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \\
 -g^0(\varphi, \Phi_M^-) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Phi_M^- - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}
 \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = \pi - \Phi_M^-, \quad (3.1.30)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -f^0(\alpha - \varphi, \Phi_{N'}^- - \alpha) - \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\Phi_{N'}^- - \alpha) + \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}
 \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = \Phi_{N'}^- - \pi, \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned}
 -g^0(\alpha - \varphi, \Phi_{N'}^- - \alpha) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\Phi_{N'}^- - \alpha) - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 -f^0(\alpha - \varphi, \Phi_N^+ - \alpha) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} &= \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\Phi_N^+ - \alpha) - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}
 \end{aligned} \right\} \text{при } \varphi = \Phi_N^+ - \pi. \quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned}
 -g^0(\alpha - \varphi, \Phi_N^+ - \alpha) + \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\Phi_N^+ - \alpha) - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}
 \end{aligned}$$

Формулы (3.1.29)–(3.1.32) устраняют неопределенность, существующую в функциях \hat{f}^1 и \hat{g}^1 .

§ 3.2. Дифракция на круговом изломе вогнутой поверхности вращения

Полученные выше результаты позволяют вычислить краевые волны, обусловленные ребрами на вогнутой поверхности вращения. В случае, когда диаметр ребра велик по сравнению с длиной волны, вполне очевидно, что краевая волна будет приближенно такой же, как и от ребра, образованного пересечением двух соответствующих конических поверхностей (рис. 3.2.1). Найдем часть рассеянного поля, излучаемую неравномерными токами вблизи ребра при его возбуждении плоской волной

$$E_x = E_{0x} e^{ikz}, \quad H_x = 0. \quad (3.2.1)$$

С помощью методики, изложенной в § 2.3, нетрудно показать, что искомое поле в направлении $\vartheta = \pi$ определяется для дальней зоны ($R \gg ka^2, R \gg kl^2$) формулой

$$E_x = -H_y = \frac{a_1 E_{0x}}{2} (\hat{f}^1 - \hat{g}^1) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl_1}, \quad E_y = H_x = 0, \quad (3.2.2)$$

где a_1 — радиус первого ребра при $z = l_1$,

$$\begin{aligned} \hat{f}^1 = f(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) - f^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) - \\ - f^0(\omega_1, \omega_1) + \epsilon f^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}^1 = g(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) - g^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) - \\ - g^0(\omega_1, \omega_1) - \epsilon g^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

и

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{при } 2\omega_1 < \omega_2 \\ 0 & \text{при } \omega_1 < \omega_2 < 2\omega_1. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Кроме того

$$\left. \begin{aligned} f(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) \\ g(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n_1}}{n_1} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n_1} - 1} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\pi - 2\omega_2}{n_1}} \right), \quad (3.2.6)$$

$$n_1 = 1 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi},$$

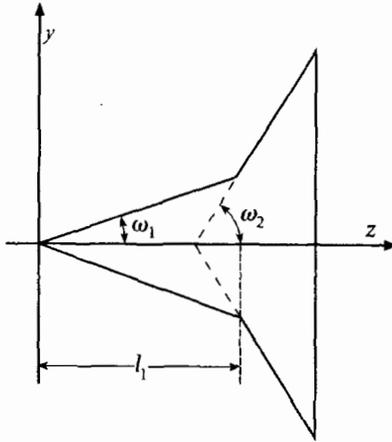


Рис. 3.2.1. Сечение тела вращения плоскостью yOz

$$f^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) = -g^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega_2, \quad (3.2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} f^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1) &= -\frac{\sin(\omega_2 - 2\omega_1)}{\cos \omega_2 + \cos(\omega_2 - 2\omega_1)}, \\ g^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1) &= \frac{\sin \omega_2}{\cos \omega_2 + \cos(\omega_2 - 2\omega_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

$$f^0(\omega_1, \omega_1) = -g^0(\omega_1, \omega_1) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega_1, \quad (3.2.9)$$

причем

$$f^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1) + g^0(\pi - \omega_2, \pi - \omega_2 + 2\omega_1) = \operatorname{tg} \omega_1. \quad (3.2.10)$$

Формулу (3.2.2) удобно записать так:

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \sum_1^1, \quad (3.2.11)$$

где

$$\sum_1^1 e^{-i2kl_1} = \hat{g}^1 - \hat{f}^1 = \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\pi - 2\omega_2}{n_1}} - \quad (3.2.12)$$

$$- \operatorname{tg} \omega_2 + \begin{cases} \operatorname{tg} \omega_1 & \text{при } \omega_1 < \omega_2 < 2\omega_1 \\ 0 & \text{при } 2\omega_1 < \omega_2 \end{cases}.$$

Интервал значений ω_2 , интересный с практической точки зрения, равен

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.13)$$

Заметим также, что при $\omega_2 = \pi/2$ функция (3.2.12) принимает значение

$$\hat{g}^1 - \hat{f}^1 = -\frac{1}{n_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n_1}. \quad (3.2.14)$$

В разделе 3.4 мы применим полученные результаты к вычислению эффективной поверхности рассеяния для реальных тел, составным элементом которых является конечный конус. С этой целью полезно предварительно изучить (в приближении геометрической оптики) отражение плоской волны от поверхности полубесконечного конуса.

§ 3.3. Поле в отраженной конической волне

Пусть плоская электромагнитная волна (3.2.1) падает на идеально проводящий полубесконечный конус, сечение которого меридиональной плоскостью изображено на рис. 3.3.1. Заметим, что уравнения Максвелла эквивалентны уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.3.2)$$

Будем искать \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} e^{ikS}, \quad \mathbf{H} = \mathcal{H} e^{ikS}, \quad (3.3.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \dots, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \frac{1}{ik} \mathcal{H}_1 \dots \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.4)$$

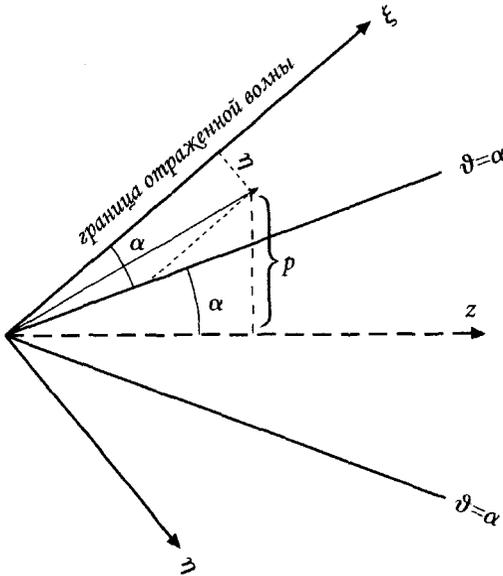


Рис. 3.3.1. Полубесконечный конус с углом раствора 2α

Подставляя эти выражения в формулы (3.3.1), (3.3.2) и приравнявая нулю сумму членов с одинаковой степенью волнового числа k , получим известные соотношения геометрической оптики:

$$(\nabla S)^2 = 1, \tag{3.3.5}$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \nabla S = \mathcal{H}_0 \cdot \nabla S = 0, \tag{3.3.6}$$

$$\mathcal{H}_0 = -\mathbf{E}_0 \times \nabla S, \quad \mathbf{E}_0 = \mathcal{H}_0 \times \nabla S, \tag{3.3.7}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_0 \nabla^2 S + 2(\nabla S \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 &= 0, \\ \mathcal{H}_0 \nabla^2 S + 2(\nabla S \cdot \nabla) \mathcal{H}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{3.3.8}$$

Нас интересует поле в области отраженной конической волны, поэтому удобно ввести лучевые координаты ξ, η и ζ (см. рис. 3.3.1) с коэффициентами Ламэ

$$h_\xi = h_\eta = 1, \quad h_\zeta = p = \xi \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha. \tag{3.3.9}$$

В этих координатах уравнение поверхности конуса имеет вид

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha. \tag{3.3.10}$$

Кроме того

$$S = \xi, \quad \nabla S = \mathbf{e}_\xi, \quad \nabla^2 S = \frac{\sin 2\alpha}{\xi \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha}. \quad (3.3.11)$$

Переходя теперь в выражениях (3.3.8) к лучевым координатам и учитывая граничные условия на поверхности идеально проводящего конуса, получим

$$E_\xi = H_\xi = 0, \quad E_\eta = H_\zeta = -H_\varphi, \quad H_\eta = -E_\zeta = E_\varphi, \quad (3.3.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -E_{0\varphi} \sqrt{\frac{\eta}{\xi \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha}} e^{ik\xi}, \\ H_\varphi &= H_{0\varphi} \sqrt{\frac{\eta}{\xi \sin 2\alpha - \eta \cos 2\alpha}} e^{ik\xi}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.13)$$

$$E_{0\varphi} = -E_{0x} \sin \varphi, \quad H_{0\varphi} = E_{0x} \cos \varphi. \quad (3.3.14)$$

В сферической системе координат отраженное поле (3.3.13) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -E_{0\varphi} \sqrt{\frac{\sin(2\alpha - \vartheta)}{\sin \vartheta}} e^{ikr \cos(2\alpha - \vartheta)}, \\ H_\varphi &= H_{0\varphi} \sqrt{\frac{\sin(2\alpha - \vartheta)}{\sin \vartheta}} e^{ikr \cos(2\alpha - \vartheta)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.15)$$

Интересно отметить, что в этой конической волне амплитудный фронт ($\vartheta = \text{const}$) не совпадает с фазовым фронтом ($\xi = \text{const}$).

§ 3.4. Эффективная поверхность рассеяния конического тела

В этом параграфе мы применим полученные выше результаты к приближенному расчету эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) для тела вращения, изображенного на рис. 3.4.1. Падающая волна задается выражением (3.2.1). Рассеянное поле вычисляется в направлении на источник ($\vartheta = \pi$).

Согласно формуле (2.4.17) рассеянное поле определяется в первом приближении законами физической оптики и равно

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \Sigma_0 \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (3.4.1)$$

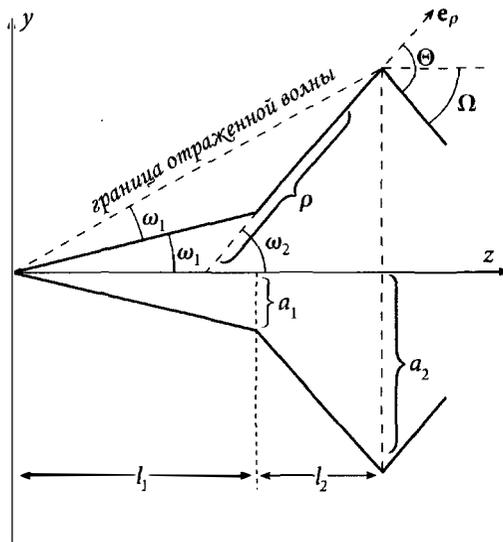


Рис. 3.4.1. Сечение конического тела плоскостью yOz

где

$$\Sigma_0 = \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_1 e^{ikl_1} - \operatorname{tg} \omega_1 e^{i2kl_1} + \left[\frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_2 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} e^{i2kl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_2 \right] e^{i2kl_1}. \quad (3.4.2)$$

Соответствующее значение эффективной поверхности рассеяния равно

$$\sigma_0 = \pi a_1^2 |\Sigma_0|^2. \quad (3.4.3)$$

Неравномерная часть тока, возбуждаемая падающей плоской волной вблизи излома при $z = l_1 + l_2$, $x^2 + y^2 = a_2^2$, излучает в направлении $\vartheta = \pi$ поле

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma_0^1, \quad (3.4.4)$$

где

$$\Sigma_0^1 = \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_2}{n_2}} + \operatorname{tg} \omega_2 \right) e^{i2k(l_1+l_2)} \quad (3.4.5)$$

и

$$n_2 = 1 + \frac{\omega_2 + \Omega}{\pi}.$$

Эта формула непосредственно следует из соотношения (2.4.18), если там отбросить члены с фазой $\exp[i2kl_1]$ и заменить ω_1 на ω_2 . Суммируя теперь (3.4.1) и (3.4.4), получим приближенное выражение для рассеянного поля

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma_1, \quad (3.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_1 e^{ikl_1} + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_2 \sin kl_2 e^{ik(l_2+2l_1)} + \\ & + (\operatorname{tg} \omega_2 - \operatorname{tg} \omega_1) e^{i2kl_1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_2}{n_2}} e^{i2k(l_1+l_2)}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Учитывая далее часть поля (3.2.11), обусловленную неравномерным током вблизи ребра $z = l_1, x^2 + y^2 = a_1^2$, находим уточненное выражение

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} (\Sigma_1 + \Sigma_1^1), \quad (3.4.8)$$

где функция Σ_1^1 определяется согласно (3.2.12).

Формулы (3.4.4), (3.4.5) и (3.4.8) описывают рассеянное поле, вызванное дифракцией падающей плоской волны. Однако при условии $\omega_1 < \omega_2 < 2\omega_1$ на поверхность тела с координатами $l_1 \leq z \leq l_1 + l_2$ падает не только плоская волна, но и коническая волна, отраженная от переднего элемента тела ($0 \leq z \leq l_1$). С учетом обозначений, принятых на рис. 3.4.1, тангенциальные компоненты магнитного вектора конической волны (3.3.15) можно представить на поверхности тела $l_1 \leq z \leq l_1 + l_2$ в виде

$$\begin{bmatrix} H_\varphi \\ H_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \sin(\omega_2 - 2\omega_1) \end{bmatrix} E_{0x} Q e^{ik\xi}, \quad (3.4.9)$$

где

$$Q = \left[\frac{2a_1 \sin(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1 - \rho \sin \omega_2 \sin(\omega_2 - 2\omega_1)}{\rho \sin^2 \omega_2} \right]^{1/2}, \quad (3.4.10)$$

$$\xi = l_1 - a_1 \frac{\cos(\omega_2 - 2\omega_1)}{\sin \omega_2} + \rho \cos(\omega_2 - 2\omega_1). \quad (3.4.11)$$

Это поле возбуждает на поверхности тела ток, плотность которого определяется в приближении физической оптики формулами

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} [\cos^2 \varphi \sin \omega_2 - \sin^2 \varphi \sin(\omega_2 - 2\omega_1)] Q e^{ik\xi}, \\ j_y &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin 2\varphi \sin(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1 Q e^{ik\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.12)$$

Поле, излучаемое в направлении $\vartheta = \pi$ таким током, равно

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma_2^0, \quad (3.4.13)$$

где

$$\Sigma_2^0 = \frac{2}{ika_1} \cos(\omega_2 - \omega_1) \sin \omega_1 \mathbf{I} e^{ika_1 \phi}, \quad (3.4.14)$$

$$\mathbf{I} = \int_{k\rho_1}^{k\rho_2^0} \sqrt{ka_1 \tilde{\lambda} t - \tilde{\mu} t^2} e^{i\nu t} dt. \quad (3.4.15)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 \sin(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1}{\sin^2 \omega_2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\sin(\omega_2 - 2\omega_1)}{\sin \omega_2}, \quad (3.4.16)$$

$$\nu = 2 \cos(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1, \quad \phi = 2 \frac{\cos^2 \omega_1 \sin(\omega_2 - \omega_1)}{\sin \omega_1 \sin \omega_2}, \quad (3.4.17)$$

$$\rho_1 = \frac{a_1}{\sin \omega_2},$$

$$\rho_2^0 = \begin{cases} \frac{a_2}{\sin \omega_2} & \text{при } a_2 \operatorname{ctg} 2\omega_1 \leq l_1 + l_2, \\ 2a_1 \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1}{\sin(\omega_2 - 2\omega_1) \sin \omega_2} & \text{при } a_2 \operatorname{ctg} 2\omega_1 \geq l_1 + l_2. \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Разумеется также, что $2\omega_1 < \omega_2 < \pi/2$. Интеграл (3.4.15) не выражается через известные табулированные функции, поэтому его приходится находить численным путем.

Отраженная коническая волна (3.4.9) при дифракции на поверхности тела создает равномерные и неравномерные токи. Поле, излученное равномерными токами, уже было определено выражением (3.4.13). Основная компонента неравномерных токов представляет краевой ток вблизи излома $z = l_1 + l_2$, $x^2 + y^2 = a_2^2$. Задача состоит в нахождении поля, возбужденного этим краевым током.

Для вычисления этого поля сделаем следующие упрощающие предположения. Будем считать поле конической волны (вблизи каждого достаточно малого элемента ребра) эквивалентным полю плоской волны, распространяющейся в направлении $\vartheta = 2\omega_1$. Амплитуду и фазу эквивалентной плоской волны на ребре выберем равными амплитуде и фазе соответствующей конической волны. Предположим далее, что неравномерная часть тока, возбуждаемая вблизи кругового излома, будет такой же, как и вблизи ребра соответствующего клина. Как обычно, такое предположение можно считать оправданным, если $ka \gg 1$.

Поле, излучаемое в направлении $\vartheta = \pi$ указанными токами, можно найти, пользуясь формулами (2.3.16), в которых следует положить

$$E_{0z_1} = -E_{0x} \sin \psi \cdot Q_0 e^{ik\xi_0}, \quad H_{0z_1} = -E_{0x} \cos \psi \cdot Q_0 e^{ik\xi_0}, \quad (3.4.19)$$

$$f^1 = f(\varphi, \varphi_1^0) - f^0(\varphi, \varphi_1^0), \quad g^1 = g(\varphi, \varphi_1^0) - g^0(\varphi, \varphi_1^0), \quad (3.4.20)$$

где

$$Q_0 = \left[\frac{2ka_1 \sin(\omega_2 - \omega_1) \cos \omega_1 - ka_2 \sin \omega_2 \sin(\omega_2 - 2\omega_1)}{ka_2 \sin \omega_2} \right]^{1/2}, \quad (3.4.21)$$

$$\xi_0 = l_1 + (a_2 - a_1) \frac{\cos(\omega_2 - 2\omega_1)}{\sin \omega_2}, \quad (3.4.22)$$

$$\varphi_1 = \omega_2, \quad \varphi_1^0 = \omega_2 - 2\omega_1, \quad n_2 = 1 + \frac{\omega_2 + \Omega}{\pi}. \quad (3.4.23)$$

Причем, параметр n_2 входит в выражение (2.2.4) для функций f и g . В результате компоненты вектор-потенциала рассеянного поля будут равны

$$A_x = -\frac{a_2 E_{0x}}{2ik} (f^1 + g^1) Q_0 e^{ik\xi_0} \frac{e^{ikR}}{R} e^{ik(l_1+l_2)}, \quad (3.4.24)$$

$$A_y = 0.$$

Откуда

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma_2^1, \quad (3.4.25)$$

где

$$\Sigma_2^1 = \frac{a_2}{a_1} (f^1 + g^1) Q_0 e^{ik(\xi_0+l_1+l_2)}, \quad (3.4.26)$$

причем

$$f^1 + g^1 = \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} + \operatorname{tg} \omega_1. \quad (3.4.27)$$

Заметим, что

$$Q_0 = 0 \quad \text{при} \quad l_1 + l_2 = a_2 \operatorname{ctg} 2\omega_1, \quad (3.4.28)$$

поэтому при $l_1 + l_2 < a_2 \operatorname{tg} 2\omega_1$ функцию Σ_2^1 следует считать равной нулю.

В результате поле, рассеянное в направлении $\vartheta = \pi$, можно записать (с учетом всех рассмотренных выше эффектов) следующим образом:

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x} e^{ikR}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma, \quad (3.4.29)$$

где

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_0^1 + \Sigma_1^1 + \Sigma_2^0 + \Sigma_2^1. \quad (3.4.30)$$

Эффективная поверхность рассеяния определяется через функцию Σ :

$$\sigma = \pi a_1^2 |\Sigma|^2. \quad (3.4.31)$$

Напомним, что полученная формула справедлива при следующих значениях входящих в нее параметров:

$$\left. \begin{aligned} ka_1 \gg 1, \quad ka_2 \gg 1, \quad 0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}, \\ 2\omega_1 < \omega_2 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \omega_2 < \theta \leq \pi, \quad \bullet < \Omega \leq \pi - \omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.32)$$

§ 3.5. Результаты численных расчетов эффективной поверхности рассеяния

По формулам, полученным в § 3.4, были проведены численные расчеты и построены графики (см. рис. 3.5.1, 3.5.2) следующих величин:

$$\begin{aligned} \text{Кривая 1:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0|^2 \\ \text{Кривая 2:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0 + \Sigma_0^1|^2 \\ \text{Кривая 3:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0 + \Sigma_0^1 + \Sigma_1^1|^2 \\ \text{Кривая 4:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0 + \Sigma_0^1 + \Sigma_1^1 + \Sigma_2^1|^2 \\ \text{Кривая 5:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0 + \Sigma_0^1 + \Sigma_1^1 + \Sigma_2^1 + \Sigma_2^0|^2 \\ \text{Кривая 6:} & \quad 10 \lg |\Sigma_0 + \Sigma_0^1 + \Sigma_1^1 + \Sigma_2^0|^2 \end{aligned}$$

Расчеты выполнены для следующих значений параметров: $ka_1 = 2\pi$, $ka_2 = 5\pi$, $kl_1 = 15\pi$, $\operatorname{tg} \omega_1 = 2/15$, $\Omega = \pi/2$, $\omega_1 < \omega_2 < \pi/2$.

Поясним смысл построенных графиков. Кривая 1 соответствует приближению физической оптики и построена при условии возбуждения волной, задаваемой уравнением (3.2.1). Кривая 2 построена с учетом краевого эффекта при $z = l_1 + l_2$, $x^2 + y^2 = a_2^2$, обусловленного плоской

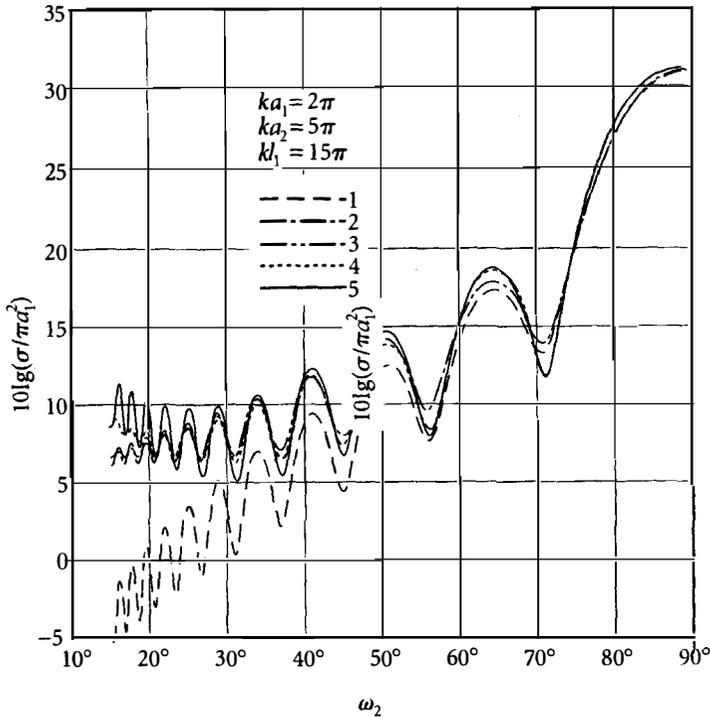


Рис. 3.5.1. Зависимость ЭПР конического тела от его формы

волной. Мы видим, что расхождение между кривыми 1 и 2 составляет 3 дБ уже при $\omega_2 = 45^\circ$ и увеличивается почти до 11 дБ при $\omega_2 \approx 2\omega_1$.

Кривая 3 учитывает краевые эффекты, вносимые обоими ребрами, но при условии, что ребро $z = l_1 + l_2, x^2 + y^2 = a_2^2$ облучается только плоской волной. Сравнивая кривые 2 и 3, можно оценить влияние неравномерной части тока, возникающей вблизи излома $z = l_1, x^2 + y^2 = a_1^2$ вогнутой поверхности. Расхождение между этими кривыми не превышает 1 дБ при $\omega_1 \leq 50^\circ$ и достигает наибольшей величины (~ 2 дБ) в минимумах при $\omega_2 \approx 56^\circ, 70^\circ$.

Кривая 4 отличается от кривой 3 тем, что она построена с учетом неравномерной части тока, возбуждаемой конической волной вблизи излома $z = l_1 + l_2, x^2 + y^2 = a_2^2$. Обе кривые «сливаются» при $\omega_2 > 41^\circ$, так как коническая волна перестает «освещать» излом. Другими словами, при $\omega_2 > 41^\circ$ этот излом переходит в область тени по отношению к падающей конической волне.

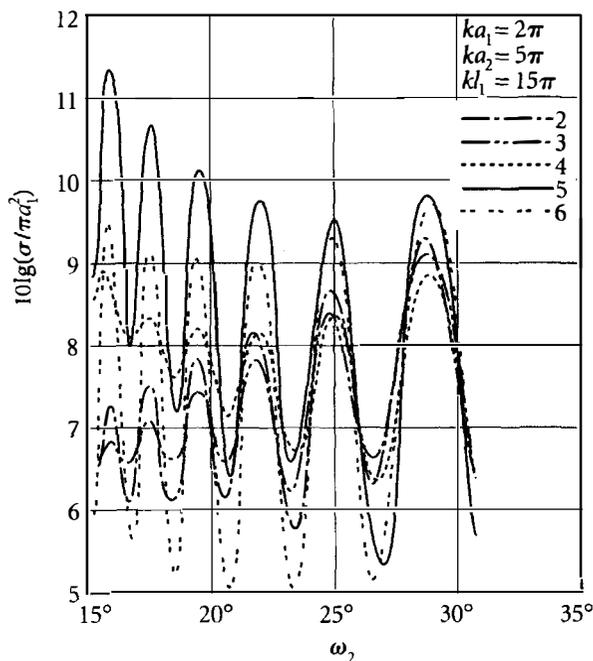


Рис. 3.5.2. Эффективная поверхность рассеяния конического тела

Наконец, кривая 5 описывает полное рассеянное поле. В отличие от кривой 4 здесь учитывается (в приближении физической оптики!) дифракция отраженной конической волны на поверхности тела ($z > l_1$). Эта кривая характеризует, следовательно, дифракционное взаимодействие двух конических поверхностей, из которых состоит рассматриваемое тело. Кривую 5 нужно сравнить с кривой 2, чтобы оценить эффект дифракционного взаимодействия различных элементов вогнутого тела. Мы видим, что максимальное отклонение кривой 5 от кривой 2 достигает 5 дБ. Интересно отметить, что наибольшее отклонение кривых 5 и 2 друг от друга наблюдается при $\omega_2 < 25^\circ$ в максимумах, а при $\omega_2 > 25^\circ$ в минимумах.

Для лучшего представления об относительном влиянии равномерной и неравномерной частей тока, возбуждаемых на поверхности тела ($l_1 < z < l_1 + l_2$) конической волной, мы построили на рис. 3.5.2 кривую 6.

§ 3.6. Дополнительные замечания

- Представленная в этой главе теория была разработана автором в 1964–1965 годах. Асимптотические выражения в § 3.1 для краевых волн внутри клиновидного рупора были также выведены в 1982 году Траном и Кимом [79].
- Некоторые результаты для рассеяния от вогнутых двугранных и трехгранных углов представлены в ряде статей, цитированных в работе [40], где они отмечены номерами [18, 70, 99, 111, 151–153].
- Недавние численные результаты для краевых волн, рассеянных от полубесконечного проводящего конуса, представлены в [80, 81]. Они были получены с помощью точного решения соответствующих граничных задач для уравнений Максвелла.

Глава 4

Измерение поля, излучаемого дифракционными токами

В главах 2 и 3 дано теоретическое исследование поля, излучаемого неравномерной частью тока. В данной главе излагается метод измерения этого поля и рассмотрено явление деполяризации отраженной волны.

Метод измерения поля, излучаемого неравномерной частью тока, был предложен впервые для тел вращения в статье Е. Н. Майзельса и автора [7]. Впоследствии было показано, что этот метод имеет универсальный характер и пригоден для измерения поля от неравномерной части тока, возбуждаемого плоской волной на любых металлических телах [11].

§ 4.1. Обратное рассеяние волн с круговой поляризацией

Пусть в свободном пространстве находится идеально проводящее тело произвольной формы, элемент поверхности которого изображен на рис. 4.1.1. Систему координат выберем так, чтобы ее начало лежало вблизи тела, а источник Q был расположен в плоскости $x = 0$. Если расстояние между телом и источником много больше размеров тела, то падающую волну можно рассматривать вблизи тела как плоскую. Представим ее в виде

$$E_x = E_{0x} e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}, \quad E_y = 0. \quad (4.1.1)$$

Здесь γ — угол между нормалью к фронту волны \mathbf{N} и осью z .

Поместим теперь перед источником параллельно фронту излучаемой волны поляризатор P , преобразующий линейно поляризованное

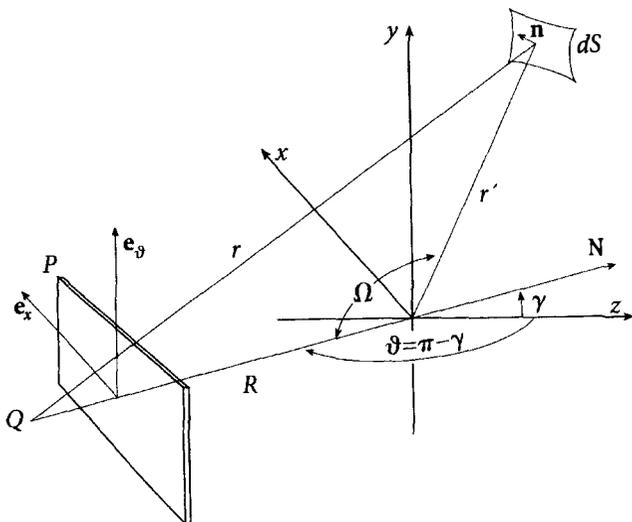


Рис. 4.1.1. К задаче о дифракции на произвольном теле. Здесь dS — элемент поверхности тела, \mathbf{N} — нормаль к фронту падающей волны, \bullet — источник, \mathbf{P} — поляризатор, преобразующий линейно поляризованное излучение в волну с круговой поляризацией

излучение в волну с круговой поляризацией. Пусть прошедшая через поляризатор волна с электрическим вектором E_n отстает по фазе на 90° от волны с электрическим вектором E_τ (рис. 4.1.2). В этом случае поляризатор осуществляет правое вращение плоскости поляризации. Простейшим примером такого поляризатора может служить система металлических пластин, параллельных вектору E_τ . В результате поле падающей волны в начале координат будет равно

$$E_x = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} E_{0x}, \quad H_x = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} E_{0x}. \quad (4.1.2)$$

Рассеянное телом поле можно представить в волновой зоне следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi = -H_\theta &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\theta = H_\varphi &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \Sigma(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3)$$

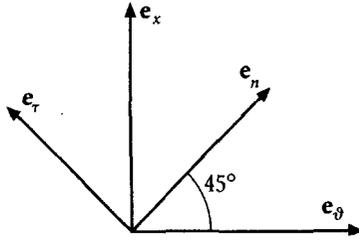


Рис. 4.1.2. Компоненты электрического поля после прохождения через поляризатор

где a — некоторая длина, характеризующая размер тела, а $\bar{\Sigma}(\vartheta, \varphi)$ и $\Sigma(\vartheta, \varphi)$ — неизвестные угловые функции. В общем случае поле (4.1.3) является эллиптически поляризованной волной. В направлении на источник ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$) эта волна проходит через поляризатор и создает поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_\vartheta &= \frac{iaE_{0x}}{2} \Sigma_+(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ E_\vartheta = H_x &= \frac{iaE_{0x}}{2} \Sigma_-(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.4)$$

где

$$\Sigma_\pm = \frac{1}{2}(\Sigma \pm \bar{\Sigma}). \quad (4.1.5)$$

Если источник излучает волну другой поляризации ($\mathbf{H}_0 \perp yoz$), то волна, отраженная телом и прошедшая через поляризатор, описывается в точке Q аналогичными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} H_x = E_\vartheta &= \frac{iaH_{0x}}{2} \Sigma_+(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ H_\vartheta = -E_x &= \frac{iaH_{0x}}{2} \Sigma_-(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

Рассмотрим теперь в приближении физической оптики дифракцию плоской линейно поляризованной волны на том же теле. Согласно определению равномерная часть тока, возбуждаемого на поверхности тела плоской волной, равна

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= -\frac{c}{2\pi} E_{0x} (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\psi}, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \sin \gamma e^{i\psi}, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \cos \gamma e^{i\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

при Е-поляризации падающей волны ($\mathbf{E}_0 \perp yoz$) и

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= 0, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} H_{0x} n_z e^{i\psi}, \\ j_z^0 &= -\frac{c}{2\pi} H_{0x} n_y e^{i\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

при Н-поляризации ($\mathbf{H}_0 \perp yoz$). Здесь E_{0x} и H_{0x} — амплитуды электрического и магнитного поля падающей волны соответственно при Е- и Н-поляризации, $\psi = k(y' \sin \gamma + z' \cos \gamma)$ — фаза падающей волны в точке (x', y', z') на поверхности тела, n_x, n_y, n_z — компоненты нормали к поверхности в той же точке.

Вычисляя далее по этому току вектор-потенциал в дальней зоне, найдем рассеянное поле:

$$E_\varphi = -H_\vartheta = ikA_\varphi, \quad E_\vartheta = H_\varphi = ikA_\vartheta. \quad (4.1.9)$$

При Е-поляризации оно равно

$$\begin{aligned} E_\varphi = -H_\vartheta &= \frac{ikE_{0x}}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int [n_x \sin \gamma \cos \varphi + \\ &+ (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) \sin \varphi] e^{i\phi} dS, \\ E_\vartheta = H_\varphi &= \frac{ikE_{0x}}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int [n_x (\sin \gamma \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \gamma \sin \vartheta) - \\ &- (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) \cos \varphi \cos \vartheta] e^{i\phi} dS, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

а при Н-поляризации

$$E_{\varphi} = -H_{\vartheta} = \frac{ikH_{0x}}{2\pi} \cos \varphi \frac{e^{ikR}}{R} \int n_z e^{i\phi} dS, \quad (4.1.11)$$

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = \frac{ikH_{0x}}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin \vartheta + n_z \sin \varphi \cos \vartheta) e^{i\phi} dS.$$

Здесь R, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения, $\phi = \psi - kr' \cos \Omega$. Интегрирование осуществляется по освещенным элементам тела. В радиолокационном случае, когда направления наблюдения и облучения совпадают ($\vartheta = \pi - \gamma, \varphi = -\pi/2$) из формул (4.1.10) и (4.1.11) соответственно следует

$$E_x = -H_{\vartheta} = -\frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\phi} dS, \quad (4.1.12)$$

$$E_{\vartheta} = H_x = 0$$

и

$$E_{\vartheta} = H_x = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\phi} dS, \quad (4.1.13)$$

$$E_x = H_{\vartheta} = 0.$$

Полагая далее амплитуды падающего поля заданными формулой (4.1.2), запишем выражения (4.1.12) и (4.1.13) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{ikR}}{R} \bar{\Sigma}^0, \\ E_{\vartheta} = H_x &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma^0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

где

$$\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0 = \frac{k}{\pi a} \int (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\phi} dS. \quad (4.1.15)$$

Представим теперь угловые функции рассеянного поля (4.1.3) в виде

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}^1, \quad \Sigma = \Sigma^0 + \Sigma^1, \quad (4.1.16)$$

где функции $\Sigma^0, \bar{\Sigma}^0$ и $\Sigma^1, \bar{\Sigma}^1$ относятся соответственно к полю, излученному *равномерным* и *неравномерным* токами соответственно. Подставляя эти выражения в формулы (4.1.4) и (4.1.6) и учитывая соотношение (4.1.15), найдем рассеянное поле, прошедшее через поляризатор к приемнику Q . В случае Е-поляризации оно равно

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_\theta &= \frac{iaE_{0x}}{4} (\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ E_\theta = H_x &= \frac{iaE_{0x}}{4} (2\Sigma^0 + \Sigma^1 - \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.17)$$

а в случае Н-поляризации

$$\left. \begin{aligned} H_x = E_\theta &= \frac{iaH_{0x}}{4} (\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ H_\theta = -E_x &= \frac{iaH_{0x}}{4} (2\Sigma^0 + \Sigma^1 - \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.18)$$

Физический смысл полученного результата заключается в следующем. Рассеянное телом поле в точке Q является суммой двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. ● отраженная волна, поляризованная так же, как и первичное излучение источника, определяется функцией $\Sigma_+ = (\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1)/2$ и создана только неравномерной частью тока. Отраженная волна с перпендикулярной поляризацией описывается функцией $\Sigma_- = (2\Sigma^0 + \Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1)/2$ и представляет собой поле, излучаемое обеими частями тока. Заметим, что функции Σ^1 и $\bar{\Sigma}^1$ в общем случае не совпадают и поэтому в выражении для Σ_- не компенсируются. Другими словами, часть поля, излученная равномерным током, не может быть выделена в данном случае из рассеянного поля.

Таким образом, рассмотренный способ позволяет выделить из полного поля, рассеянного любыми идеально проводящими телами конечных размеров, ту его часть, которая обусловлена искривлением поверхности (изгибом, изломом, острием, выступом, отверстием и т. д.). Следует отметить, что в случае рассеяния электромагнитных волн на системе разрозненных тел выделяемая часть поля обусловлена не только искривлениями поверхности, но и дифракционным взаимодействием тел. Последнее обстоятельство представляется нам весьма важным особенно в связи с изучением дифракционных характеристик для группы тел, чему придается в настоящее время большое практическое значение.

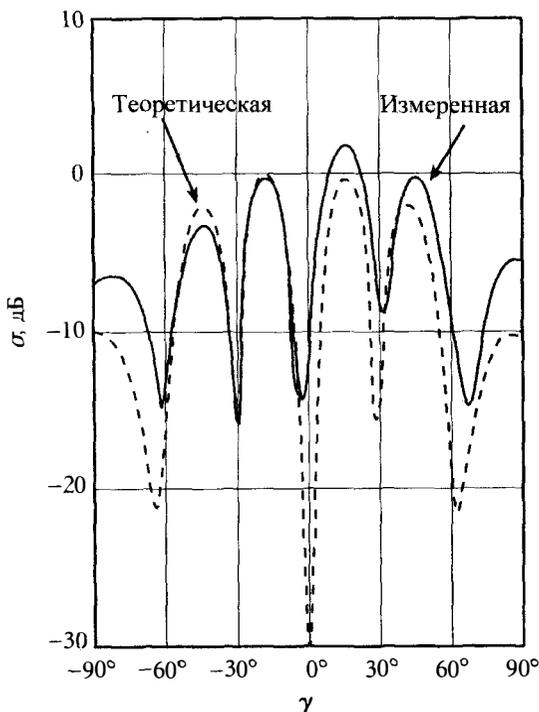


Рис. 4.1.3. Обратное рассеяние от диска. Поле, излучаемое неравномерными (краевыми) токами

Нужно, однако, иметь в виду, что указанное разделение рассеянного поля может быть осуществлено не в произвольном направлении наблюдения, а лишь в тех направлениях, для которых выполняется условие $\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0$, как, например, в направлении на источник.

На рис 4.1.3 представлены результаты измерений и расчетов эффективной поверхности рассеяния

$$\sigma^+ = \pi a^2 |\Sigma_+|^2 = \frac{1}{4} \pi a^2 |\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1|^2, \quad (4.1.19)$$

которая обусловлена неравномерной частью тока, возбуждаемого плоской электромагнитной волной на диске. Диаметр диска равен $2a = 5\lambda/\pi$. Расчеты выполнены с учетом вторичной дифракции по приближенным формулам для функций Σ и $\bar{\Sigma}$, выведенным в работах [6, 13]. Поскольку

изготовить тонкий диск с плоской поверхностью трудно, измерения проводились с тупым конусом, близким по форме к диску и имеющим высоту, равную примерно одной десятой диаметра.

Как видно из рис. 4.1.3, теоретическая и экспериментальная кривая достаточно близки друг к другу. Некоторое расхождение между ними, особенно в области значений близких к 90° , можно, по-видимому, объяснить как конической формой образца, так и приближенным характером расчетных формул. Значение $\gamma = 90^\circ$ соответствует направлению вдоль поверхности диска, а значение $\gamma = 0$ — направлению, нормальному к диску.

§ 4.2. Деполяризация отраженной волны

Представление о равномерной и неравномерной частях поверхностного тока позволяет выяснить физическую природу явления деполяризации отраженного сигнала. Вернемся с этой целью опять к задаче о рассеянии электромагнитной волны на произвольном металлическом теле. Взаимное расположение источника Q , элемента поверхности облучаемого тела и системы координат показано на рис. 4.1.1. Напомним, что источник Q находится в плоскости yoz и излучает линейно поляризованную волну. Будем далее считать, что поляризатор P , изображенный на рис. 4.1.1, теперь отсутствует.

Обозначим через α угол между плоскостью yoz и электрическим вектором \mathbf{E}_0 падающей волны (рис. 4.2.1). Поле этой волны представим в виде

$$\left. \begin{aligned} E_x = H_\gamma = E_{0x} e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}, \\ H_x = -E_\gamma = H_{0x} e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

где

$$E_{0x} = E_0 \sin \alpha, \quad H_{0x} = -E_0 \cos \alpha, \quad \frac{E_{0x}}{E_{0y}} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.2)$$

Рассеянное телом поле определяется в волновой зоне формулами

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ia}{2} [E_{0x} \bar{\Sigma}_1(\gamma, \vartheta, \varphi) + H_{0x} \Sigma_1(\gamma, \vartheta, \varphi)] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\vartheta = H_\varphi = \frac{ia}{2} [E_{0x} \bar{\Sigma}_2(\gamma, \vartheta, \varphi) + H_{0x} \Sigma_2(\gamma, \vartheta, \varphi)] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.3)$$

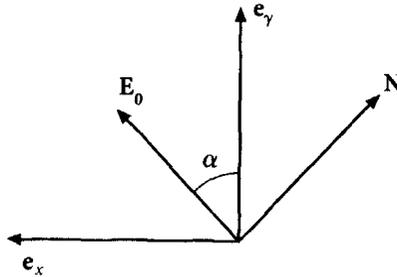


Рис. 4.2.1. Ориентация электрического поля по отношению к плоскости yoz

Здесь a — некоторая длина, характеризующая размер тела, R, ϑ, φ — сферические координаты точки наблюдения, $\bar{\Sigma}_{1,2}(\gamma, \vartheta, \varphi)$ — неизвестные угловые функции.

Очевидно, что поляризация рассеянного поля, т.е. ориентация в пространстве его электрического вектора зависит главным образом от направлений наблюдения и облучения. В направлении на источник она может не совпадать с поляризацией волны, излучаемой источником. Такое явление называется *деполяризацией* отраженной волны.

Причину деполяризации легко установить, если рассеянное поле рассматривать как сумму излучений равномерного и неравномерного токов. В самом деле, согласно § 4.1, равномерная часть тока излучает в направлении на источник ($\vartheta = \pi - \gamma, \varphi = -\pi/2$) поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = H_\vartheta &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \bar{\Sigma}^0, \\ E_\vartheta = H_\varphi &= \frac{iaH_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

Функции Σ^0 и $\bar{\Sigma}^0$ удовлетворяют условию $\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0$ и описываются формулой (4.1.15). Из формулы (4.2.4) немедленно получаем равенство

$$\frac{E_x}{E_\vartheta} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2.5)$$

при условии $H_{0x} = -E_{0\vartheta}$. Это означает, что в приближении физической оптики отраженная волна не испытывает деполяризации. Следовательно, деполяризация отраженной волны обусловлена только неравномерной частью тока или, иначе говоря, искривлением поверхности.

Выведем формулу для величины угла δ , на который поворачивается вектор электрического поля отраженной волны по отношению к электрическому вектору волны, излучаемой источником. С этой целью представим функции $\bar{\Sigma}_{1,2}$ и $\Sigma_{1,2}$ в виде

$$\bar{\Sigma}_{1,2} = \bar{\Sigma}_{1,2}^0 + \bar{\Sigma}_{1,2}^1, \quad \Sigma_{1,2} = \Sigma_{1,2}^0 + \Sigma_{1,2}^1, \quad (4.2.6)$$

где слагаемые $\bar{\Sigma}_{1,2}^0$, $\Sigma_{1,2}^0$ и $\bar{\Sigma}_{1,2}^1$, $\Sigma_{1,2}^1$ соответствуют полю, излучаемому равномерным и неравномерным токами соответственно. Сравнивая выражения (4.2.4) и (4.2.3) находим, что

$$\bar{\Sigma}_1^0 = \bar{\Sigma}^0, \quad \Sigma_1^0 = 0, \quad \bar{\Sigma}_2^0 = 0, \quad \Sigma_2^0 = -\bar{\Sigma}^0. \quad (4.2.7)$$

Поэтому поле, рассеянное в направлении на источник ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$), будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_x &\approx -H_\vartheta = \frac{ia}{2} \left[E_{0x}(\bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}_1^1) + H_{0x}\Sigma_1^1 \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\vartheta &\approx H_x = \frac{ia}{2} \left[E_{0x}\bar{\Sigma}_2^1 - H_{0x}(\bar{\Sigma}^0 - \Sigma_2^1) \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.8)$$

Электрический вектор этого поля образует с плоскостью yoz угол β , который определяется формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|E_x|}{|E_\vartheta|} = \frac{|\bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}_1^1 - \Sigma_1^1 \operatorname{ctg} \alpha|}{|\bar{\Sigma}^0 - \bar{\Sigma}_2^1 + \Sigma_2^1 \operatorname{tg} \alpha|} \operatorname{tg} \alpha \quad (4.2.9)$$

при условии $H_{0x} = -E_{0\vartheta}$. В результате искомый угол δ , который характеризует величину деполяризации, будет равен

$$\delta = \alpha - \beta. \quad (4.2.10)$$

Хотя выражение (4.2.9) содержит слагаемые, связанные с равномерными токами, оно также выявляет природу деполяризации. На самом деле, если бы неравномерные токи отсутствовали, то функции $\Sigma_{1,2}^1$ и $\bar{\Sigma}_{1,2}^1$ обращались в ноль и угол β был бы равен α . Другими словами,

поляризация рассеянного поля была бы такой же, как у падающей волны. Этот результат снова демонстрирует, что деполяризация полностью определяется только неравномерными токами.

Конкретные результаты по расчету деполяризации волн, отраженных от некоторых тел, можно найти, например, в работах [82–84]. В частности, в статье [83] показано, что влиянием деполяризации на эффективную поверхность рассеяния выпуклых тел можно практически пренебречь при условии $ka > 4$.

§ 4.3. Основные результаты

- В главах 2–3 развита физическая теория дифракции (ФТД) для идеально проводящих тел, на поверхности которых имеются изломы/ребра. Теория иллюстрируется расчетами эффективной поверхности рассеяния для некоторых тел, представляющих интерес с практической точки зрения. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментом.
- Найденные здесь асимптотические выражения не сводятся к приближению физической оптики и существенно отличаются от нее даже в случае отражающих тел, больших по сравнению с длиной волны.
- В рамках ФТД рассеянное поле находится путем интегрирования токов на поверхности тела и может быть вычислено в принципе всюду, включая такие дифракционные области, как фокусы и каустики, где лучевые подходы неприменимы. В главах 2 и 3 даны примеры таких расчетов.
- В главе 4 установлена физическая природа деполяризации волны, отраженной в направлении на источник. Это явление обусловлено только неравномерными токами, возникающими вследствие кривизны поверхности отражающих тел и ее разрывов (ребра, углы).
- Предложена методика для выделения и измерения отраженной волны, излучаемой неравномерным током. Она может быть использована для анализа индивидуальных свойств формы тела и поэтому представляет интерес для решения обратной задачи теории дифракции.

- Найденные в данном разделе приближенные выражения для рассеянного поля учитывают лишь первичные краевые волны. Вместе с отраженными лучами они дают основной вклад в поле, рассеянное телами, большими по сравнению с длиной волны. Краевые волны высоких порядков возникают вследствие многократной дифракции и могут вносить существенный вклад в поле, рассеянное телами с сильно выраженными резонансными свойствами. Эти волны изучаются в следующих разделах.

Глава 5

Исследование дифракции на клине методом параболического уравнения

§ 5.1. Параболическое уравнение

Изучение свойств волновых полей при высоких частотах связано с исследованием асимптотических решений соответствующих граничных задач. Метод, который впервые стал применяться в этих целях и который можно назвать классическим, заключается в следующем. В уже известном строгом решении граничной задачи делают аппроксимации, используя малость параметра $1/ka$, где k — волновое число, a — характерный размер для данной задачи. Идея аппроксимации состоит обычно в том, чтобы плохо сходящийся в коротковолновом диапазоне ряд преобразовать в асимптотический.

Принципиальный недостаток этого метода — его ограниченность: лишь сравнительно небольшое число задач имеют строгое решение. Кроме того, нужно сказать, что получить асимптотическое представление даже для готового строгого решения — непростое дело. Например, для полубесконечного кругового конуса имеется строгое решение задачи дифракции в виде рядов по сферическим функциям Лежандра и Бесселя, однако преобразование его в асимптотический ряд остается сложной задачей.

Принципиально другим, более эффективным и ведущим к цели более прямым путем является метод, предложенный в 1944 г. Леонтовичем [85]. Он предложил делать аппроксимации, связанные с малостью параметра, сразу в самих уравнениях. Используя такого рода аппроксимации, он свел граничную задачу для уравнения Гельмгольца к задаче для уравнения параболического типа. В результате оказалось, что необ-

ходимое асимптотическое решение удается получить проще и быстрее. К тому же этот метод оказался еще и более универсальным, позволив подойти к решению многих задач, для которых неизвестно строгое решение. Этот метод получил название метода параболического уравнения и в результате последующих работ достиг существенного прогресса. Здесь следует отметить работы Леонтовича, Фока, Малюжинца, Вайнштейна [86–91]. Этот подход также успешно применен в [92–94].

Однако большинство задач теории дифракции, рассмотренных с помощью метода параболического уравнения, относятся к областям с гладкими границами. Количество же задач, относящихся к областям, граница которых имеет изломы, исчисляется буквально единицами. В 1946 г. Малюжинец показал, что асимптотическое выражение Зоммерфельда для краевых волн может быть найдено с помощью метода параболического уравнения [91]. Возможность подхода с помощью метода параболического уравнения к задаче о дифракции на диске отмечалась Шенстедом [95]. Интересные результаты были получены Вайнштейном в задаче о распространении волн над кусочно неоднородной землей [96]. Попов осуществил численное решение задачи дифракции на клине [97].

В данной главе проведено детальное асимптотическое исследование задачи о дифракции на клине. В следующей главе 6 метод параболического уравнения используется для изучения краевых волн тока в тонких цилиндрических проводниках.

Основные результаты исследований, изложенных в главах 5 и 6, были опубликованы в [16, 17, 19].

§ 5.2. Постановка задачи

Пусть плоская волна падает на клин, граням которого соответствуют значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ (рис. 2.2.1). Дифракционное поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (5.2.1)$$

и граничным условиям

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0; \alpha \quad (5.2.2)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0; \alpha. \quad (5.2.3)$$

Представим решение уравнения (5.2.1) в виде

$$u = u_g + u_d, \quad (5.2.4)$$

где u_g — поле согласно геометрической оптике; u_d — дополнительное дифракционное поле. Введем далее обозначения:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \leq \pi + \varphi_0 \text{ (зона 1),} \\ 0 & \text{при } \varphi > \pi + \varphi_0, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \leq \pi - \varphi_0 \text{ (зона 2),} \\ 0 & \text{при } \varphi > \pi - \varphi_0. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Если $\varphi_0 < \alpha - \pi$, то функцию u_g можно представить в виде

$$u_g = \epsilon_1 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mp \epsilon_2 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}. \quad (5.2.7)$$

Здесь знак минус соответствует граничным условиям (5.2.2), а знак плюс — граничным условиям (5.2.3).

Нас интересует асимптотическое решение уравнения (5.2.1), пригодное при $kr \gg 1$. Поэтому будем искать функцию u_d в виде

$$u_d = W(r, \varphi) e^{ikr}. \quad (5.2.8)$$

Координата r отсчитывается вдоль лучей, расходящихся от *светящейся линии* — края клина (см. главу 20 в книге [43]). Множитель $\exp[ikr]$ определяет основной набег фазы вдоль лучей. Медленно меняющийся множитель $W(r, \varphi)$ — амплитуду дифракционной волны, соответствующей этим лучам и сглаживающей скачки функции u_g .

Подставляя (5.2.8) в (5.2.1), приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + 2ik \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{ik}{r} W = 0. \quad (5.2.9)$$

Отбрасывая здесь первое слагаемое, т. е. пренебрегая продольной диффузией, получим параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 2ikr^2 \frac{\partial W}{\partial r} + ikrW = 0. \quad (5.2.10)$$

Поскольку полное поле $u = u_g + u_d$ всюду непрерывно и удовлетворяет граничным условиям (5.2.2) и (5.2.3), то функция $W(r, \varphi)$ обязана удовлетворять следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} W[r, (\pi - \varphi_0) + 0^+] - W[r, (\pi - \varphi_0) + 0^-] &= -1, \\ W[r, (\pi + \varphi_0) + 0^+] - W[r, (\pi + \varphi_0) + 0^-] &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

$$W(r, 0) = W(r, \alpha) = 0 \quad (5.2.12)$$

при граничных условиях (5.2.2) и соотношениям

$$\left. \begin{aligned} W[r, (\pi - \varphi_0) + 0^+] - W[r, (\pi - \varphi_0) + 0^-] &= 1, \\ W[r, (\pi + \varphi_0) + 0^+] - W[r, (\pi + \varphi_0) + 0^-] &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.13)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} W(r, \varphi) \right|_{\varphi=0; \alpha} = 0 \quad (5.2.14)$$

при граничных условиях (5.2.3). В выражениях (5.2.11) и (5.2.13) введены обозначения $0^+ = \lim(0 + \epsilon)$ и $0^- = \lim(0 - \epsilon)$, где ϵ берется положительным и стремится к нулю ($\epsilon \rightarrow 0$)

Чтобы сделать задачу (для уравнения эллиптического типа (5.2.1)) однозначной, на функцию u накладываются еще два условия: условие излучения (при $kr \rightarrow \infty$) и условие на крае клина (при $kr \rightarrow 0$). При переходе к представлению (5.2.8) и параболическому уравнению (5.2.10) условие излучения выполняется автоматически, а условие на крае клина принимает вид

$$W(r, \varphi) \text{ конечна при } kr \rightarrow 0. \quad (5.2.15)$$

Это условие делает задачу однозначной (см. ниже § 5.3).

§ 5.3. Решение параболического уравнения

Рассмотрим сначала решение параболического уравнения при условиях (5.2.11) и (5.2.12). Будем искать $W(r, \varphi)$ в виде

$$W(r, \varphi) = W_0 + W_1, \quad (5.3.1)$$

где

$$W_0 = \epsilon_2 - \epsilon_1 \quad (5.3.2)$$

есть кусочно-постоянная функция от φ , которая удовлетворяет условиям (5.2.11) и обращается в нуль на гранях клина. Эта функция разлагается в ряд Фурье

$$W_0 = -\frac{4}{\alpha} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_s} \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi, \quad \nu_s = s \frac{\pi}{\alpha}, \quad (5.3.3)$$

который определяет нечетную периодическую функцию с периодом 2α . Следовательно, $W_1(r, \varphi)$ будет непрерывной функцией, обращаемой в

нуль на гранях клина. Можно также показать, что $\partial W_1(r, \varphi)/\partial \varphi$ непрерывна, а $\partial^2 W_1(r, \varphi)/\partial \varphi^2$ имеет разрывы первого рода при $\varphi = \pi \pm \varphi_0$.

Замечая, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r},$$

и подставляя представление (5.3.1) в (5.2.10), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2} + 2ikr^2 \frac{\partial W_1}{\partial r} + ikr W_1 = -ikr W_0. \quad (5.3.4)$$

Полагая далее

$$W_1 = \sum_{s=1}^{\infty} R_{1s}(r) \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi \quad (5.3.5)$$

и учитывая (5.3.3), приходим к уравнению

$$2ikr^2 \frac{\partial R_{1s}}{\partial r} + (ikr - \nu_s^2) R_{1s} = 4 \frac{ikr}{\alpha \nu_s}. \quad (5.3.6)$$

Будем искать функцию W также в виде

$$W(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi. \quad (5.3.7)$$

Очевидно, что

$$R_s(r) = R_{1s}(r) - \frac{4}{\alpha \nu_s} \quad (5.3.8)$$

и удовлетворяет уравнению

$$2ikr^2 \frac{\partial R_s}{\partial r} + (ikr - \nu_s^2) R_s = \frac{4}{\alpha} \nu_s. \quad (5.3.9)$$

Откуда (с учетом условия (5.2.15)) находим

$$R_s(r) = \frac{4}{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{kr}} e^{i\nu_s^2/(2kr)} \int_{\nu_s/\sqrt{2kr}}^{\infty} e^{-it^2} dt, \quad (5.3.10)$$

и, следовательно,

$$W = \frac{4}{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{kr}} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi e^{i\nu_s^2/(2kr)} \int_{\nu_s/\sqrt{2kr}}^{\infty} e^{-it^2} dt. \quad (5.3.11)$$

Нетрудно видеть, что при $kr \ll 1$

$$W = W_0 + O(kr), \quad u_g = -W_0 + O(kr), \quad (5.3.12)$$

поэтому

$$u = u_g + u_d = O(kr), \quad (5.3.13)$$

тогда как точное решение уравнения (5.2.1), удовлетворяющее условию (5.2.2), дает следующую оценку:

$$u = O\left[(kr)^{\pi/\alpha}\right], \quad 0 < \varphi < \alpha. \quad (5.3.14)$$

Сопоставление (5.3.13) и (5.3.14) показывает, что поведение поля, предсказанное параболическим уравнением (5.2.10) и точным волновым уравнением (5.2.1), различно. В соответствии с параболическим уравнением поле исчезает более быстро для точки наблюдения, стремящейся к ребру ($r = 0$) клина ($\alpha > \pi$), и исчезает более медленно ($r \rightarrow 0$) внутри рупора ($\alpha < \pi$) по сравнению с точным решением волнового уравнения.

Вернемся опять к выражению (5.3.11). Его можно преобразовать к виду

$$W = \frac{4}{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{kr}} \int_0^\infty e^{-it^2} dt \sum_{s=1}^\infty e^{-it\nu_s \sqrt{2/kr}} \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi. \quad (5.3.15)$$

Суммируя ряд, получим

$$W(r, \varphi) = w(r, \varphi - \varphi_0) - w(r, \varphi + \varphi_0), \quad (5.3.16)$$

где

$$w(r, \varphi) = -\frac{i}{2\alpha} \int_0^{0^+ - i\infty} e^{-i\frac{kr}{2}\tau^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi + \psi}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{\pi + \psi}{n}} + \frac{\sin \frac{\pi - \psi}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{\pi - \psi}{n}} \right) d\tau \quad (5.3.17)$$

и

$$n = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Пользуясь формулой

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{\pi + \psi}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{\pi + \psi}{n}} + \frac{\sin \frac{\pi - \psi}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{\pi - \psi}{n}} = \\ & = -\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi + \tau}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi - \tau}{n}}, \end{aligned}$$

запишем функцию $w(r, \psi)$ в виде

$$w(r, \psi) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2n\pi i} \int_{0^+ - i\infty}^{0^- + i\infty} e^{-i\frac{kr}{2}\xi^2} \frac{d\xi}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi + \xi}{n}}. \quad (5.3.18)$$

Совершенно аналогичным путем можно показать, что решение параболического уравнения, удовлетворяющее условиям (5.2.13), (5.2.14) и (5.2.15), равно

$$W = \frac{4}{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{kr}} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \nu_s \pi \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi e^{i\nu_s^2/(2kr)} \int_{\nu_s/\sqrt{2kr}}^{\infty} e^{-it^2} dt \quad (5.3.19)$$

и преобразуется к виду

$$W(r, \varphi) = w(r, \varphi - \varphi_0) + w(r, \varphi + \varphi_0), \quad (5.3.20)$$

где функция $w(r, \psi)$ по-прежнему определяется интегралом (5.3.18).

Представления (5.3.16), (5.3.18) впервые были получены Г. Д. Малюжиным из решения функциональных уравнений, связанных с методом параболического уравнения [91]. Сравнивая их с решением точного эллиптического волнового уравнения

$$W^{exact} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2n\pi i} \times \int_{0^+ - i\infty}^{0^- + i\infty} \left(\frac{e^{-i2kr \sin^2 \frac{\xi}{2}}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\xi + \varphi - \varphi_0}{n}} - \frac{e^{-i2kr \sin^2 \frac{\xi}{2}}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\xi + \varphi + \varphi_0}{n}} \right) d\xi, \quad (5.3.21)$$

Малюжинец обнаружил, что первые члены их асимптотических разложений вдали от границ плоских волн совпадают и дают известное выражение Зоммерфельда

$$W(r, z) = W^{exact}(r, z) = \left(\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} - \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (5.3.22)$$

Это асимптотическое выражение справедливо далеко от границ геометрической оптики, где $(kr)^{1/2} |\cos[(\varphi \pm \varphi_0)/2]| \gg 1$. В следующем разделе мы представим более детальное асимптотическое исследование параболического уравнения.

§ 5.4. Асимптотическое разложение для функции $w(r, \psi)$

Асимптотическое разложение для функции $w(r, \psi)$ при $kr \gg 1$ найдем при помощи уточненного метода перевала (см. работу Паули [36]), в котором учитывается, что полюс подынтегральной функции может приближаться к перевальной точке. Для этого представим функцию $w(r, \psi)$ в виде

$$w(r, \psi) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-krt^2} \frac{f(t, \psi)}{t^2 - it_0^2} dt, \quad (5.4.1)$$

где

$$f(t, \psi) = \frac{t^2 - it_0^2}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi + \zeta}{n}}, \quad n = \frac{\alpha}{\pi}, \quad (5.4.2)$$

$$t_0 = \sqrt{2} \cos \psi, \quad \zeta = \sqrt{2} t e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (5.4.3)$$

Подставляя в формулу (5.4.1) ряд Тейлора для $f(t, \psi)$

$$f(t, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m,$$

получим при $kr \gg 1$ асимптотический ряд

$$w(r, \psi) = \frac{1}{\cos \frac{\psi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{F_m(\tau)}{(kr)^m} A_m(\psi), \quad (5.4.4)$$

где

$$F_m(\tau) = \tau^{2m} e^{-i\tau^2} \int_{\tau}^{\infty \operatorname{sgn} \tau} \frac{e^{ix^2}}{x^{2m}} dx, \quad (5.4.5)$$

$$\tau = \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}, \quad (5.4.6)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} F_0(\tau) &= e^{-i\tau^2} \int_{\tau}^{\infty \operatorname{sgn} \tau} e^{ix^2} dx, \\ F_1(\tau) &= \tau + 2i\tau^2 e^{-i\tau^2} \int_{\tau}^{\infty \operatorname{sgn} \tau} e^{ix^2} dx, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

а $\Gamma(m)$ — гамма-функция. Очевидно, что

$$\frac{F_m(\tau)}{(kr)^m} \sim O\left[(kr)^{-m-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } |\tau| \gg 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4.8)$$

Кроме того, из тождества

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-krt^2}}{t^2 - it_0^2} t^{2m} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{F_m(\tau)}{(kr)^m \cos \frac{\psi}{2}} \quad (5.4.9)$$

следует соотношение

$$\frac{F_m(\tau)}{(kr)^m \cos \frac{\psi}{2}} \sim O\left[(kr)^{-m+\frac{1}{2}}\right] \quad \text{при } \psi = \pi, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.4.10)$$

справедливое при $kr \rightarrow \infty$.

Коэффициенты разложения $A_m(\psi)$ определяются формулой

$$A_m(\psi) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{(2m)!} \left. \frac{\partial^{2m} f(t, \psi)}{\partial t^{2m}} \right|_{t=0}, \quad (5.4.11)$$

причем

$$A_0(\psi) = \frac{2}{n\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (5.4.12)$$

$$A_1(\psi) = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\psi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \times \left\{ 1 + \frac{2}{n^2} \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{n}}{\cos \frac{\psi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} - \frac{4}{n^2} \left(\frac{\sin \frac{\psi}{n} \cos \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \right)^2 \right\}, \quad (5.4.13)$$

и

$$A_1(\pi) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{n2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}. \quad (5.4.14)$$

Сравним теперь формулу (5.4.4) с асимптотическим разложением для решения Зоммерфельда

$$u_d e^{-ikr} = w(r, \varphi - \varphi_0) \mp w(r, \varphi + \varphi_0), \quad (5.4.15)$$

найденным Паули [36]. Легко видеть, что первый член асимптотического ряда Паули для функции $w(r, \psi)$ совпадает с таким же членом в выражении (5.4.4). Однако все другие члены отличаются. Например,

коэффициент Паули для $A_1^{Pauli}(\psi)$ содержит дополнительный член по сравнению с выражением (5.4.13):

$$A_1^{Pauli}(\psi) = -\frac{i}{4}A_0(\psi) + \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\psi}{n}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2}{n^2} \frac{\cos^2\frac{\psi}{2} \cos\frac{\psi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\psi}{n}} - \frac{4}{n^2} \left(\frac{\sin\frac{\psi}{n} \cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\psi}{n}} \right)^2 \right\}. \quad (5.4.16)$$

Очевидно, что величины $A_1(\pi)$, полученные по формулам (5.4.13) и (5.4.16), совпадают.

Следовательно, асимптотическое выражение

$$w(r, \psi) = \frac{2}{n} \frac{\sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\psi}{n}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} - 2ikr \cos^2\frac{\psi}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2kr} \cos\frac{\psi}{2}}^{\infty \operatorname{sgn} \cos\frac{\psi}{2}} e^{iq^2} dq \quad (5.4.17)$$

описывает с одинаковой погрешностью как решение Зоммерфельда, так и решение параболического уравнения. Погрешность формулы (5.4.17) имеет величину порядка $(kr)^{-1/2}$, когда $\psi = \pi$, и величину порядка $(kr)^{-3/2}$ при $(kr)^{1/2} |\cos[\psi/2]| \gg 1$.

Мы хотим подчеркнуть, что указанная выше оценка погрешности касается лишь первого члена в асимптотическом выражении (5.4.4) для решения параболического уравнения. Точность полного решения, даваемого выражением (5.4.4), выше. Для того чтобы показать это, рассмотрим разность между (5.4.4) и точным асимптотическим решением Паули [36].

$$\Delta w = w(r, \psi) - w^{Pauli}(r, \psi) = \\ = \frac{i}{4} A_0(\psi) \Gamma(3/2) \frac{F_1(\tau)}{kr \cos(\psi/2)} + O\left(\frac{F_2(\tau)}{(kr)^2 \cos(\psi/2)}\right). \quad (5.4.18)$$

Эта величина определяет погрешность метода параболического уравнения. В соответствии с (5.4.8) и (5.4.10) эта погрешность имеет величину порядка $(kr)^{-3/2}$ при $\psi = \pi$ и вдали от границы тени при $(kr)^{1/2} |\cos[(\varphi \pm \varphi_0)/2]| \gg 1$. Легко видеть, что погрешность Δw имеет величину порядка $(kr)^{-3/2}$ вблизи границы тени, где $kr |\cos[(\varphi \mp \varphi_0)/2]| \ll 1$.

Выше мы исследовали асимптотическое поведение функции $W(r, \varphi)$, пользуясь ее интегральным представлением. Если же нас не интересует

поведение функции $W(r, \varphi)$ в зоне эффективной диффузии и мы хотим знать лишь угловое распределение цилиндрической волны, расходящейся от ребра клина, то это угловое распределение можно найти непосредственно из рядов. При $kr \gg S \gg 1$ сумма первых S членов ряда (5.3.11) имеет вид

$$W = \frac{2}{i\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{s=1}^S \sin \nu_s \pi \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi + O\left(\frac{1}{kr}\right). \quad (5.4.19)$$

Полагая здесь $S = \infty$ и суммируя ряд методом Бореля, получаем выражение (5.3.16), в котором

$$w(r, \psi) = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (5.4.20)$$

Аналогичным путем ряд (5.3.19) преобразуется к формуле (5.3.20), в которой вместо $w(r, \psi)$ будет стоять выражение (5.4.20).

§ 5.5. Метод отражений

Параболическое уравнение (5.2.10) имеет частное решение

$$V(\tau) = e^{-i\tau^2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{\infty \text{sgn} \tau} e^{iq^2} dq, \quad (5.5.1)$$

где $\tau = (kr/2)^{1/2}(\varphi - \phi)$. Это решение, взятое отдельно, соответствует дифракции плоской волны на клине с черными гранями. Поле, образующееся при дифракции плоской волны на идеально отражающем клине, можно рассматривать как результат многократного отражения волн (5.5.1) от граней клина. При этом в первичных функциях $V(\tau)$ надо брать $\phi = \pi + \varphi_0$ (для падающей волны) и $\phi = \pi - \varphi_0$ (для отраженной волны). Метод отражений приводит нас к выражению

$$W(r, \varphi) = w(r, \varphi - \varphi_0) \mp w(r, \varphi + \varphi_0),$$

где

$$\begin{aligned}
 w(r, \psi) = & V \left(\sqrt{kr/2}(\psi - \pi) \right) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ V \left(\sqrt{kr/2}(\psi - \pi + 2m\alpha) \right) + V \left(\sqrt{kr/2}(\psi - \pi - 2m\alpha) \right) \right\} - \\
 & - V \left(\sqrt{kr/2}(\psi + \pi) \right) - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ V \left(\sqrt{kr/2}(\psi + \pi + 2m\alpha) \right) + V \left(\sqrt{kr/2}(\psi + \pi - 2m\alpha) \right) \right\}. \quad (5.5.2)
 \end{aligned}$$

Можно показать, что выражения (5.3.18) и (5.5.2) эквивалентны. Для этого достаточно в формуле (5.3.17) произвести замену

$$\frac{\sin \frac{x}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{x}{n}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x + \tau}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{x - \tau}{2n} \right) \quad (5.5.3)$$

и учесть соотношения

$$\frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2n} = \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + 2mn\pi} + \frac{1}{x - 2mn\pi} \right), \quad (5.5.4)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\frac{kr}{2}\tau^2} \frac{d\tau}{a^2 - \tau^2} = \frac{\pi}{ia} V \left(\sqrt{\frac{kr}{2}} a \right). \quad (5.5.5)$$

Исследуем асимптотические свойства функции $w(r, \psi)$, исходя из формулы (5.5.2). Нетрудно видеть, что если все аргументы функции $V(\tau)$ велики, то

$$\begin{aligned}
 w(r, \psi) = & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[\frac{1}{\psi - \pi} - \frac{1}{\psi + \pi} + \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi - \pi + 2m\alpha} + \frac{1}{\psi - \pi - 2m\alpha} \right) - \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi + \pi + 2m\alpha} + \frac{1}{\psi + \pi - 2m\alpha} \right) + O \left[(kr)^{-3/2} \right] \right]. \quad (5.5.6)
 \end{aligned}$$

Ряды, стоящие в правой части этой формулы, легко суммируются и выражение (5.5.6) точно сводится к (5.4.20).

Представим теперь (при $kr \gg 1$) функцию (5.5.2) в виде

$$w(r, \psi) = V \left(\sqrt{\frac{kr}{2}} (\psi - \pi) \right) + \left(\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} - \frac{1}{\psi - \pi} \right) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (5.5.7)$$

Здесь первое слагаемое описывает процесс поперечной диффузии на границе тени, не зависящий от отражающих свойств граней клина, а второе слагаемое можно рассматривать как дифракционный фон. Подобное представление поля хорошо известно в теории дифракции на выпуклых телах (см. особенно [90] и [98]). Полагая в формуле (5.5.7) $\psi = \pi \pm 0$, получаем

$$w(r, \pi \pm 0) = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (5.5.8)$$

Разрыв функции w при $\psi = \pi$ обеспечивает непрерывность полного поля $u = u_g + u_d$.

Заметим, что формула (5.5.7) по своей точности и общности не уступает формуле (5.4.17). Более того, формулу (5.4.17) можно рассматривать как «стенографическую» запись формулы (5.5.7), которая по своему физическому содержанию является более богатой.

Таким образом, если считать параболическое уравнение обоснованным, то при его помощи можно вывести основные асимптотические формулы (5.4.20) и (5.5.7) гораздо проще, чем при точном подходе. Еще больший выигрыш получается, если от дифракции плоской волны перейти к более сложной задаче о дифракции цилиндрической волны.

§5.6. Поперечная диффузия и дифракция цилиндрических волн на клине

Согласно законам геометрической оптики источник цилиндрической волны, расположенный на линии r_0, φ_0 , возбуждает вне клина поле

$$u_g = \epsilon_1 \frac{e^{ikR_1}}{\sqrt{kR_1}} \mp \epsilon_2 \frac{e^{ikR_2}}{\sqrt{kR_2}}, \quad (5.6.1)$$

где

$$R_1 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (5.6.2)$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi + \varphi_0)},$$

а ϵ_1 и ϵ_2 определяются формулами (5.2.5) и (5.2.6). Здесь верхний знак следует брать для граничных условий (5.2.2), а нижний — для граничных условий (5.2.3).

Дополнительное дифракционное поле при $kr \gg 1$ ищем в виде

$$u_d = \frac{W(r, \varphi)}{\sqrt{k(r+r_0)}} e^{ik(r+r_0)}. \quad (5.6.3)$$

Очевидно, что функция W по-прежнему удовлетворяет условиям (5.2.12), (5.2.14) и (5.2.15) и имеет скачки (5.2.11), (5.2.13). Последнее следует из того, что $R_1 = r + r_0$ при $\phi = \pi + \varphi_0$, а $R_2 = r + r_0$ при $\phi = \pi - \varphi_0$.

Подставляя выражение $W/[k(r+r_0)]^{1/2}$ в параболическое уравнение (5.2.10), получим для функции W дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 2ikr^2 \frac{\partial W}{\partial r} + ik \frac{rr_0}{r+r_0} W = 0. \quad (5.6.4)$$

При помощи замены переменной

$$\rho = \frac{rr_0}{r+r_0} \quad (5.6.5)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 W(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + 2ik\rho^2 \frac{\partial W(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + ik\rho W(\rho, \varphi) = 0, \quad (5.6.6)$$

полностью совпадающему с уравнением (5.2.10).

Таким образом, функция $W(\rho, \varphi)$ удовлетворяет тем же условиям и тому же уравнению, что и функция $W(r, \varphi)$, изученная в предыдущих параграфах. Поэтому решение задачи о дифракции на клине цилиндрической волны получается автоматически из решения задачи о дифракции плоской волны путем замены r на $\rho = rr_0/(r+r_0)$ в выражениях для функции $W(r, \varphi)$, найденных в §§ 5.3, 5.4 и 5.5. Физически это решение является разумной аппроксимацией точного решения при выполнении условий

$$kr \gg 1, \quad kr_0 \gg 1. \quad (5.6.7)$$

Как мы видели выше, нет необходимости пользоваться точным решением параболического уравнения, а достаточно для $w(\rho, \psi)$ взять одну из приближенных функций (5.4.17) или (5.5.7).

Полученные выше результаты относятся к случаю, когда освещена одна грань клина ($\varphi_0 < \alpha - \pi$). Если же освещены обе грани клина, то формулы следует несколько изменить.

Результаты данной главы показывают, что параболическое уравнение позволяет получать асимптотическое решение задач о дифракции на телах с изломами. В следующей главе мы изучим с помощью этого метода более сложную задачу — многократную дифракцию краевых волн тока в вибраторе и на ленте.

§ 5.7. Дополнительные замечания

- Как показано в этой главе, асимптотическое поведение поля, предсказанное параболическим уравнением, некорректно вблизи ребра [см. (5.3.13)], но оказывается правильным вдали от ребра [см. (5.4.4), (5.4.12) и текст, следующий за формулой (5.4.15)]. За этим наблюдением стоит интересная физика. На самом деле эти результаты показывают, что краевые и вершинные волны создаются в некоторой конечной окрестности краев и вершин. Размер этой окрестности может быть сравним с длиной волны. Вклад бесконечно малой окрестности краев и вершин в рассеянное поле очень мал и не может существенно влиять на дифракционную волну. Это наблюдение согласуется с известными численными решениями для клина с закругленными краями. Если радиус кривизны края меньше одной десятой длины волны, то краевая волна от скругленного клина почти идентична волне от идеально острого клина. Явление «светящихся» ребер на освещенных объектах было понято еще Зоммерфельдом, который подчеркивал, что этот эффект является лишь следствием экстраполяции, осуществляемой нашими глазами (см. главу 20 в [43]).
- Численные решения параболических уравнений в задаче дифракции на клине представлены в [97–100].
- Дополнительные ссылки о дифракции на импедансном клине можно найти в [101, 102].
- В работе [103] дана некоторая модификация метода параболического уравнения, полезная для исследования волн в регулярных и нерегулярных волноводах. Предложенный здесь метод опорной волны позволяет изучать распространение волн на расстояниях, больших по сравнению с теми, которые доступны при использовании обычного метода параболического уравнения.

- Интересная связь между параболическим уравнением и уравнением Гельмгольца установлена в [104]. Здесь показано, что в плоских стратифицированных волноводах с идеально проводящими стенками точное решение эллиптического уравнения Гельмгольца может быть представлено в виде интеграла от решения параболического уравнения.

Глава 6

Волны тока в тонких проводниках и на ленте

В данной главе метод параболического уравнения развивается применительно к решению задач о дифракции на тонких цилиндрических проводниках (вибраторах) и на ленте. На возможность решения задачи о вибраторах с помощью параболического уравнения указывалось ранее в [96]. Теории вибраторов посвящено много работ. Общие физические свойства волн тока в вибраторах были изучены в [105–108]. В этой главе показано, что полученные в [105–108] результаты могут быть найдены более простым путем с помощью параболического уравнения. Кроме того, здесь вычислено ближнее поле излучения и показано, что в пределе при $a \rightarrow \infty$ (a — радиус вибратора) найденные решения описывают также волны тока, возникающие при дифракции на ленте.

Заметим, что поле вблизи поверхности активного (передающего) вибратора есть сумма волн различного типа. Здесь имеются волны, бегущие от источника сторонней э.д.с., и волны, возникающие вследствие многократной дифракции на концах проводника. Поэтому задача отыскания полного рассеянного поля сводится в рамках метода параболического уравнения к последовательному решению ряда математических задач. Так, например, чтобы найти ток в передающем вибраторе, необходимо последовательно определить ток, возбуждаемый сосредоточенной э.д.с. в бесконечном проводнике (§ 6.1), затем краевые волны тока и т. д. (§ 6.2). В этом заключается особенность решения данной задачи, что связано со спецификой параболического уравнения, а именно: волны, бегущие в противоположных направлениях, описываются различными уравнениями.

§ 6.1. Бесконечный проводник, возбуждаемый сосредоточенной э.д.с.

Пусть цилиндрический проводник радиуса a и неограниченной длины ($-\infty \leq z \leq \infty$) возбуждается сторонним полем

$$E_z^e = \mathcal{E}\delta(z), \quad (6.1.1)$$

приложенным на его поверхности ($r = a$). Будем искать поле вблизи проводника в виде

$$A_z = W(r, z)e^{ik|z|}, \quad (6.1.2)$$

где A_z — компонента запаздывающего вектор-потенциала. Функция W должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + 2ik \operatorname{sgn} z \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0. \quad (6.1.3)$$

Пренебрегая здесь последним членом, приходим к параболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + 2ik \operatorname{sgn} z \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (6.1.4)$$

решение которого можно искать в виде

$$W(r, z) = \int_C f(u) H_0^{(1)}(\sqrt{2kur}) e^{-iu|z|} du, \quad (6.1.5)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода и $\operatorname{Im}[\sqrt{u}] \geq 0$.

Граничное условие

$$E_z + E_z^e = 0 \quad \text{при } r = a, \quad (6.1.6a)$$

записанное в виде

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = ik\mathcal{E}\delta(z) \quad \text{при } r = a, \quad (6.1.6b)$$

приводит к уравнению

$$\int_C (u^2 - 2ku) f(u) H_0^{(1)}(\sqrt{2kur}) e^{-iu|z|} du = -ik\mathcal{E}\delta(z). \quad (6.1.7)$$

Замечая, что

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu|z|} du, \quad (6.1.8)$$

находим из (6.1.7)

$$f(u) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\mathcal{E}}{\widehat{u} (u - 2k) H_0^{(1)}(\sqrt{2ku}a)}. \quad (6.1.9)$$

Контур интегрирования C проходит по вещественной оси в положительном направлении и огибает точку $u = 0$ сверху, а точку $u = 2k$ снизу. Такой выбор контура диктуется следующими соображениями. Во-первых, мы учитываем, что точка $u = 0$ является точкой ветвления, и обходим ее сверху, проводя разрез вниз ($-i\infty \leq u \leq 0$). Тем самым мы выбираем для функции \sqrt{u} такую ветвь, где выполняется условие $\text{Im}[\sqrt{u}] \geq 0$, необходимое для сходимости интегралов (6.1.5) и (6.1.7). Во-вторых, чтобы определить поведение контура интегрирования около точки $u = 2k$, следует обратиться к уравнению (6.1.6б). Оно имеет решение

$$A_z(a, z) = \text{const} \cdot e^{ik|z|}. \quad (6.1.10)$$

Используя соотношение

$$\frac{d^2}{dz^2}|z| = 2\delta(z), \quad (6.1.11)$$

находим, что

$$A_z(a, z) = \frac{1}{2} \mathcal{E} e^{ik|z|} \quad (6.1.12a)$$

и

$$W(a, z) = \frac{1}{2} \mathcal{E}. \quad (6.1.12б)$$

Подставляя теперь (6.1.9) в (6.1.5), получаем интегральное представление для функции $W(a, z)$:

$$W(a, z) = -\frac{ik}{2\pi} \mathcal{E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\widehat{u} (u - 2k)} e^{-iu|z|} dz. \quad (6.1.13)$$

Используя далее теорему Коши о вычетах, можно показать, что это выражение сводится к предыдущему (6.1.12б) только при условии, если точка $u = 2k$ обходится контуром интегрирования снизу.

Таким образом, выбор контура интегрирования завершен, и мы получаем следующее окончательное выражение для функции $W(r, z)$:

$$W(r, z) = \frac{\mathcal{E}}{4\pi i} \int_C \left(\frac{1}{u - 2k} - \frac{1}{\widehat{u}} \right) \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{2kur})}{H_0^{(1)}(\sqrt{2kua})} e^{-iu|z|} du. \quad (6.1.14)$$

Вычислим теперь ток, возбуждаемый сторонней э.д.с. на поверхности провода. Согласно формулам (6.1.2) и $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ компоненты вектора магнитной напряженности равны

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial W}{\partial r} e^{ik|z|}, \quad H_r = H_z = 0. \quad (6.1.15)$$

Плотность поверхностного тока определяется соотношением

$$j_z = \frac{c}{4\pi} H_\varphi \Big|_{r=a^+} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=a^+} e^{ik|z|}. \quad (6.1.16)$$

Следовательно, полный ток

$$J(z) = 2\pi a j_z \quad (6.1.17)$$

в соответствии с формулами (6.1.14), (6.1.16) равен

$$J(z) = S_0 \psi(|z|) e^{ik|z|}, \quad (6.1.18)$$

где

$$\psi(z) e^{ikz} = \frac{\Lambda(2ka)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - k} - \frac{1}{u - (-k)} \right) \frac{e^{iuz} du}{\Lambda[\sqrt{2k(k-u)a}]}, \quad (6.1.19)$$

$$S_0 = \frac{c\mathcal{E}}{4\Lambda(2ka)}, \quad \Lambda(x) = \frac{H_0^{(1)}(x)}{xH_1^{(1)}(x)}. \quad (6.1.20)$$

Значки \smile и \frown в подынтегральном выражении (6.1.19) показывают, что контур интегрирования огибает точку ветвления $u = k$ снизу, а полюс $u = -k$ сверху.

Отметим следующие свойства функции $\psi(z)$:

$$\psi(0) = 1 \quad \text{и} \quad \psi(\infty) = 0. \quad (6.1.21)$$

Первое свойство легко доказывается с помощью теоремы вычетов, если контур интегрирования в (6.1.19) замкнуть внизу на бесконечности. Такая деформация контура допустима, если учесть, что

$$|\Lambda| \rightarrow \frac{1}{|x|} \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (6.1.22)$$

Чтобы доказать второе свойство, $\psi(\infty) = 0$, нужно деформировать участки контура интегрирования $-\infty \leq u < 0$ и $0 < u \leq \infty$ соответственно в лучи $\arg(u) = \pi - \alpha$ и $\arg(u) = \alpha$, где, например, $0 < \alpha < \pi/4$. Эта деформация также допустима благодаря соотношению (6.1.22). На указанных лучах $\text{Im}(u) > 0$ и подынтегральная функция обращается в нуль, поскольку $\exp(iu|z|) = 0$ при $|z| = \infty$. Можно также показать, что интеграл по участку контура, огибающему точку ветвления $u = k$ снизу и проходящему в ее непосредственной близости, тоже равен нулю.

Формулы (6.1.18), (6.1.19) аналогичны соответствующим формулам, полученным в [105] более сложным путем с помощью метода медленно меняющихся функций, и переходят в последние при $ka \ll 1$, когда

$$\Lambda(2ka) \approx \ln \frac{i}{\gamma ka}, \quad \Lambda\left(\sqrt{2k(k-u)}a\right) \approx \ln \frac{2i}{\gamma a \sqrt{2k(k-u)}}, \quad (6.1.23)$$

где $\gamma = 1, 718\dots$. Здесь и ниже мы выбираем главное значение логарифмической функции, где $\ln(|z|e^{i\varphi}) = \ln|z| + i\varphi$, $\ln(1) = 0$, и $\ln(i) = i\pi/2$.

§ 6.2. Передающий вибратор

Рассмотрим теперь возбуждение вибратора конечной длины ($z_1 \leq z \leq z_2$) сторонним полем (6.1.1). Очевидно, что от точки возбуждения ($z = 0$) будет распространяться вдоль провода волна тока (6.1.18). Обозначим ее через J_0 . Набегая на конец $z = z_1$, она порождает отраженную волну, поле которой вблизи проводника можно представить в виде

$$A_z = W(r, z)e^{ik(z-z_1)}. \quad (6.2.1)$$

Решая для $W(r, z)$ параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + 2ik \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (6.2.2)$$

находим

$$W(r, z) = \int_C f(u) H_0^{(1)}\left(\sqrt{2kur}\right) e^{-iu(z-z_1)} du. \quad (6.2.3)$$

Из граничного условия

$$E_z = -\frac{1}{ik} \left(\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z \right) = 0 \quad \text{при } z - z_1 > 0, \quad r = a, \quad (6.2.4)$$

находим $A_z = \text{const} \cdot \exp[ik(z - z_1)]$, откуда получаем

$$W(a, z) = \text{const}, \quad \frac{\partial W(a, z)}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z - z_1 > 0. \quad (6.2.5)$$

Ток, отраженный от конца $z = z_1$, выражается формулой

$$J_1(z) = \frac{ca}{2} e^{ik(z-z_1)} \int_C \sqrt{2ku} f(u) H_1^{(1)}(\sqrt{2kua}) e^{-iu(z-z_1)} du \quad (6.2.6)$$

и обязан удовлетворять на конце $z = z_1$ условию

$$J_1(z_1) = -J_0(z_1) = -S_0 \psi(-z_1) e^{-ikz_1}. \quad (6.2.7)$$

Условия (6.2.5) и (6.2.7) приводят к системе функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_C u f(u) H_0^{(1)}(\sqrt{2kua}) e^{-iu(z-z_1)} du &= 0, \quad \text{при } z - z_1 > 0, \\ \frac{ca}{2} e^{ik(z-z_1)} \int_C \sqrt{2ku} f(u) H_1^{(1)}(\sqrt{2kua}) e^{-iu(z-z_1)} du &= \\ &= -S_0 \psi(-z_1) e^{-ikz} \quad \text{при } z - z_1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

Заметим, что помимо (6.2.7) должно также выполняться равенство

$$J_1(z) = -J_0(z) \quad \text{при } z - z_1 < 0, \quad (6.2.9)$$

которое означает отсутствие тока при $z < z_1$. Записав уравнения (6.2.8), мы получили приближенную формулировку задачи, при которой удовлетворяется только условие (6.2.7). Условие же (6.2.9) выполняется лишь приближенно, при $k|z_1| \gg 1$. В такой постановке мы будем изучать ниже и дифракцию краевых волн на проводнике конечной длины L . Очевидно, что допускаемая при этом аппроксимация будет оправданной для достаточно длинных ($kL \gg 1$) проводников. Сформулированная приближенная постановка задачи удобна тем, что возникающие при этом функциональные уравнения могут быть решены без применения метода факторизации.

Из (6.2.8) находим

$$f(u) = -\frac{2k}{\sigma\pi i} \frac{\Lambda(2ka)S_0\psi(-z_1)e^{-ikz_1}}{u(u-2k)H_0^{(1)}(\sqrt{2kua})}, \quad (6.2.10)$$

и в результате

$$J_1(z) = -J_0(z_1)\psi(z-z_1)e^{ik(z-z_1)}. \quad (6.2.11)$$

Совершенно аналогично можно показать, что ток, отраженный от конца $z = z_2$, будет равен

$$J_2(z) = -J_0(z_2)\psi(z_2-z)e^{ik(z_2-z)}. \quad (6.2.12)$$

Таким образом, все волны тока в передающем вибраторе выражаются через функцию ψ . Поэтому полный ток можно искать в виде

$$J(z) = S_0 \left\{ \psi(|z|)e^{ik|z|} + A_1\psi(z-z_1)e^{ik(z-z_1)} + A_2\psi(z_2-z)e^{ik(z_2-z)} \right\}. \quad (6.2.13)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяются из граничных условий на концах проводника

$$J(z_1) = J(z_2) = 0, \quad (6.2.14)$$

и равны

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{\mathcal{D}} \left[\psi(-z_1) - \psi(z_2)\psi(z_2-z_1)e^{2ikz_2} \right] e^{-ikz_1}, \\ A_2 &= -\frac{1}{\mathcal{D}} \left[\psi(-z_2) - \psi(-z_1)\psi(z_2-z_1)e^{-2ikz_1} \right] e^{ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.15)$$

где знаменатель

$$\mathcal{D} = 1 - \psi^2(z_2-z_1)e^{2ik(z_2-z_1)} \quad (6.2.16)$$

характеризует резонансные свойства вибратора. В случае $z_2 - z_1 \approx n\lambda/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и $\mathcal{D} \approx 0$ в вибраторе наступает резонанс тока.

§ 6.3. Полубесконечный проводник, возбуждаемый плоской волной

Пусть полубесконечный цилиндрический проводник ($z_1 \leq z \leq \infty$) возбуждается плоской волной

$$E_z^e = E_{0z}e^{iwz}, \quad w = -k \cos \vartheta. \quad (6.3.1)$$

Вычислим сначала ток, возбуждаемый этой волной на бесконечном проводе ($-\infty \leq z \leq \infty$). Поле вблизи его поверхности зададим в виде

$$A_z = W(r, z)e^{iwz}, \quad (6.3.2)$$

где

$$W(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) H_0^{(1)} \left(\sqrt{\nu^2 + 2wur} \right) e^{-iuz} du, \quad \nu = \sqrt{k^2 - w^2} \quad (6.3.3)$$

и является решением параболического уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2iw \frac{\partial}{\partial z} + \nu^2 \right) W(r, z) = 0. \quad (6.3.4)$$

Граничные условия (6.1.6) приводят к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nu^2 + 2wu - u^2) f(u) H_0^{(1)} \left(\sqrt{\nu^2 + 2wua} \right) e^{-iuz} du = ikE_{0z}, \quad (6.3.5)$$

откуда

$$f(u) = \frac{ikE_{0z}}{\nu^2 H_0^{(1)}(\nu a)} \delta(u), \quad \text{Im } \nu \geq 0. \quad (6.3.6)$$

В результате полный ток на проводе

$$J(z) = \frac{ca}{2} e^{i\omega z} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sqrt{\nu^2 + 2wu} H_1^{(1)} \left(\sqrt{\nu^2 + 2wua} \right) e^{-iuz} du \quad (6.3.7)$$

будет равен

$$J(z) = S e^{i\omega z}, \quad (6.3.8)$$

где

$$S = E_{0z} \frac{icka}{2\nu} \frac{H_1^{(1)}(\nu a)}{H_0^{(1)}(\nu a)}, \quad \nu = k \sin \vartheta. \quad (6.3.9)$$

Очевидно, что такая волна существует и на полубесконечном проводнике. Набегая на конец проводника $z = z_1$, она возбуждает краевую волну. Поле краевой волны и соответствующий ей ток будем опять искать в виде (6.2.1), (6.2.3) и (6.2.6). Входящая в эти выражения функция $f(u)$ определяется условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} W(a, z) &= 0 \quad \text{при } z - z_1 > 0, \\ J(z) &= -S e^{i\omega z} \quad \text{при } z - z_1 < 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.10)$$

которые эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\int_C u f(u) H_0^{(1)}(\sqrt{2kua}) e^{-iu(z-z_1)} du = 0 \quad \text{при } z - z_1 > 0,$$

$$\frac{ca}{2} e^{ik(z-z_1)} \int_C \sqrt{2ku} f(u) H_1^{(1)}(\sqrt{2kua}) e^{-iu(z-z_1)} du = \quad (6.3.11)$$

$$= -S e^{iwz} \quad \text{при } z - z_1 < 0.$$

Контур C выбираем так, чтобы он проходил по вещественной оси в положительном направлении и огибал точку $u = 0$ сверху, а точку $u = k - w$ снизу. Заметим, что уравнения (6.3.10) и (6.3.11) обеспечивают точное, а не приближенное равенство нулю тока на продолжении провода, т. е. при $r = a$, $z - z_1 < 0$. Таким образом, в этом случае задача о дифракции плоской волны на полубесконечном проводе решается в строгой постановке.

Из уравнений (6.3.11) находим

$$f(u) = -\frac{S e^{iwz_1}}{c\pi i} \frac{k-w}{u(u-k+w)} \frac{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-w)a} \right]}{H_0^{(1)}(\sqrt{2kua})}. \quad (6.3.12)$$

В результате

$$A_z = -\frac{S e^{iwz_1}}{c\pi i} \Lambda \left[\sqrt{2k(k-w)a} \right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u-k} - \frac{1}{u-\widehat{w}} \right) \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)r})}{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)a})} e^{iu(z-z_1)} du \quad (6.3.13)$$

и

$$J(z) = -S \psi_-(z-z_1) e^{ik(z-z_1)+iwz_1}, \quad (6.3.14)$$

где

$$\psi_-(z)e^{ikz} = \frac{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-w)a} \right]}{2\pi i} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u-k} - \frac{1}{u-\widehat{w}} \right) \frac{e^{iuz}}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-u)a} \right]} du. \quad (6.3.15)$$

Выражение (6.3.14) описывает краевую волну тока. Полный ток в проводнике равен

$$J(z) = S \left[e^{i wz} - \psi_-(z-z_1)e^{ik(z-z_1)+i wz_1} \right]. \quad (6.3.16)$$

Совершенно аналогично можно показать, что плоская волна (6.3.1) возбуждает в полубесконечном проводе ($-\infty \leq z \leq z_2$) ток

$$J(z) = S \left[e^{i wz} - \psi_+(z_2-z)e^{ik(z_2-z)+i wz_2} \right], \quad (6.3.17)$$

где

$$\psi_+(z)e^{ikz} = \frac{\Lambda \left[\sqrt{2k(k+w)a} \right]}{2\pi i} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u-k} - \frac{1}{u-(-w)} \right) \frac{e^{iuz}}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-u)a} \right]} du. \quad (6.3.18)$$

Отметим теперь некоторые полезные соотношения для функций ψ и ψ_{\pm} . Прежде всего очевидно, что они обладают следующими свойствами:

$$\psi_+(0) = \psi_-(0) = \psi(0) = 1, \quad (6.3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_+(z) &= 1 && \text{при } w = -k, \\ \psi_+(z) &= \psi(z) && \text{при } w = k, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_-(z) &= 1 && \text{при } w = k, \\ \psi_-(z) &= \psi(z) && \text{при } w = -k, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.21)$$

$$\psi_+(\infty) = \psi_-(\infty) = \psi(\infty) = 0. \quad (6.3.22)$$

Равенства (6.3.19) и (6.3.22) доказываются так же, как (6.1.21). Равенства, стоящие во вторых строчках в (6.3.20) и (6.3.21), очевидны. Равенства, стоящие в первых строчках в (6.3.20) и (6.3.21), доказываются

следующим образом. Сдвинем контур интегрирования в окрестности полюса $u = \pm w$ немного вниз, пересекая полюс. Согласно теореме о вычетах функция $\psi_{\pm}(z) \exp(ikz)$ оказывается равной сумме, состоящей из величины $\exp(ikz)$ и интеграла по сдвинутому контуру. При $w = \mp k$ этот интеграл обращается в нуль и полученное равенство $\psi_{\pm}(z) \exp(ikz) = \exp(ikz)$ означает, что $\psi_{\pm}(z) = 1$ при $w = \mp k$.

Вычислим далее интеграл

$$I = \int_{z>0}^{\infty} \psi(\zeta) e^{i(k-w)\zeta} d\zeta.$$

Согласно формуле (6.1.19) его можно представить в виде

$$I = ie^{-iwz} \frac{\Lambda(2ka)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u-k} - \frac{1}{u-(-k)} \right) \frac{1}{u-\widehat{w}} \frac{e^{iu\zeta} du}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-u)} a \right]}.$$

Откуда с помощью простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_{z>0}^{\infty} \psi(\zeta) e^{i(k-w)\zeta} d\zeta &= \\ &= \frac{e^{i(k-w)z}}{i(k+w)} \left\{ \psi(z) - \frac{2k}{k-w} \frac{\Lambda(2ka)}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-w)} a \right]} \psi_{-}(z) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Аналогичным путем выводится формула

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{z_1} \psi_{+}(z_2 - \zeta) e^{-i(k-w_0)\zeta} d\zeta &= \frac{e^{i(w_0-k)z_1}}{i(w+w_0)} \times \\ &\times \left\{ \psi_{+}(z_2 - z_1) - \frac{k+w}{k-w_0} \frac{\Lambda \left[\sqrt{2k(k+w)} a \right]}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-w_0)} a \right]} \psi_{-}^0(z_2 - z_1) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{z_2}^{\infty} \psi_{-}(\zeta - z_2) e^{i(k+w_0)\zeta} d\zeta &= \frac{ie^{i(k+w_0)z_2}}{(w+w_0)} \times \\ &\times \left\{ \psi_{-}(z_2 - z_1) - \frac{k-w}{k+w_0} \frac{\Lambda \left[\sqrt{2k(k-w)} a \right]}{\Lambda \left[\sqrt{2k(k+w_0)} a \right]} \psi_{+}^0(z_2 - z_1) \right\}, \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

где функции ψ_{\pm}^0 получаются из ψ_{\pm} заменой w на w_0 . Формулы (6.3.23–6.3.25) понадобятся нам в главе 7 при исследовании поля, рассеянного пассивным вибратором.

§ 6.4. Пассивный вибратор

Рассмотрим дифракцию плоской волны (6.3.1) на цилиндрическом проводнике конечной длины ($z_1 \leq z \leq z_2$). Первичные краевые волны были вычислены в предыдущем параграфе. Найдем вторичные краевые волны, возникающие при дифракции первичных волн на концах провода.

Первичная краевая волна тока, бегущая от конца $z = z_2$, равна

$$J(z) = -S\psi_+(z_2 - z)e^{ik(z_2 - z) + iwz_2}. \quad (6.4.1)$$

Поле и ток возбуждаемой ею вторичной краевой волны будем искать вблизи проводника (при $z - z_1 \geq 0$, $r - a \ll z - z_1$) вновь в виде выражений (6.2.1), (6.2.3) и (6.2.6). Входящая в них неизвестная функция $f(u)$ должна удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} W(a, z) &= 0 && \text{при } z - z_1 > 0, \\ J(z) &= S\psi_+(z_2 - z_1)e^{ik(z_2 - z) + iwz_2} && \text{при } z - z_1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

Определяя отсюда $f(u)$, находим поле

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{2}{c} \left[S\psi_+(z_2 - z_1)e^{ik(z_2 - z_1) + iwz_2} \right] \frac{\Lambda(2ka)}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - k} - \frac{1}{u - (-k)} \right) \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)r})}{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)a})} e^{iu(z-z_1)} du \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

и ток

$$J(z) = \left[S\psi_+(z_2 - z_1)e^{ik(z_2 - z_1) + iwz_2} \right] \psi(z - z_1)e^{ik(z - z_1)} \quad (6.4.4)$$

вторичной краевой волны.

Аналогично можно показать, что первичная краевая волна тока

$$J(z) = -S\psi_-(z - z_1)e^{ik(z - z_1) + iwz_1} \quad (6.4.5)$$

возбуждает при отражении от конца $z = z_2$ поле

$$A_z = \frac{2}{c} \left[S\psi_-(z_2 - z_1)e^{ik(z_2 - z_1) + iwz_1} \right] \frac{\Lambda(2ka)}{2\pi i} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - k} - \frac{1}{u - (-k)} \right) \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)r})}{H_0^{(1)}(\sqrt{2k(k-u)a})} e^{iu(z_2 - z)} du \quad (6.4.6)$$

и ток

$$J(z) = \left[S\psi_-(z_2 - z_1)e^{ik(z_2 - z_1) + iwz_1} \right] \psi(z_2 - z)e^{ik(z_2 - z)}. \quad (6.4.7)$$

Обращаясь далее к результатам § 6.2, мы видим, что все последующие краевые волны тока выражаются через функции ψ . Следовательно, полный ток в пассивном вибраторе можно искать в виде

$$J(z) = S \left\{ e^{iwz} + B_1\psi(z - z_1)e^{ik(z - z_1)} + B_2\psi(z_2 - z)e^{ik(z_2 - z)} - \right. \\ \left. - \psi_-(z - z_1)e^{ik(z - z_1) + iwz_1} - \psi_+(z_2 - z)e^{ik(z_2 - z) + iwz_2} \right\}. \quad (6.4.8)$$

Постоянные B_1 и B_2 находятся из условий на концах провода

$$J(z_1) = J(z_2) = 0 \quad (6.4.9)$$

и равны

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{e^{i(k+w)z_2}}{\mathcal{D}} \left[\psi_+(L) - \psi_-(L)\psi(L)e^{i(k-w)L} \right] e^{-ikz_1}, \\ B_2 &= \frac{e^{-i(k-w)z_1}}{\mathcal{D}} \left[\psi_-(L) - \psi_+(L)\psi(L)e^{i(k+w)L} \right] e^{ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.10)$$

где $L = z_2 - z_1$ и \mathcal{D} — резонансный знаменатель (6.2.16).

Учитывая (6.3.20) и (6.3.21), мы видим, что индуцированный ток равен нулю при скользящих углах падения ($\vartheta = 0, \vartheta = \pi$). Физическая причина этого ясна. В этом случае падающая волна не имеет компоненты E_z и поэтому не может создавать ток в направлении z . Другое эквивалентное объяснение заключается в следующем. Компонента H_φ падающей волны создает равные по величине, но противоположные по направлению z токи на противоположных сторонах провода (φ и $\varphi + \pi$). Поэтому полный ток в проводе оказывается равным нулю и следовательно поле, рассеянное тонким проводом ($ka \ll 1$), также будет равно нулю. Напомним, что компонентой j_φ можно пренебречь для тонких проводников ($ka \ll 1$).

Найденные выше выражения для тока в передающем и пассивном вибраторах отличаются от аналогичных выражений, полученных более сложным путем в [105, 106] лишь видом функций ψ_\pm и ψ . В случае тонких вибраторов ($ka \ll 1$) сравниваемые выражения для тока становятся асимптотически эквивалентными. Их точность и другие особенности детально рассмотрены в [107], поэтому мы не останавливаемся подробно на этих вопросах. Отметим только, что такие выражения имеют наименьшую точность вблизи точки приложения сосредоточенной э.д.с. и вблизи концов провода, где амплитуда возбуждаемых волн изменяется еще недостаточно медленно. В частности, формула (6.1.18) для тока, возбуждаемого в бесконечном проводнике сосредоточенной э.д.с., имеет при $kz \ll 1$ относительную погрешность порядка $[2 \ln(i/\gamma ka)]^{-2}$. При $kz \rightarrow \infty$ погрешность этой формулы стремится к нулю. Такой же погрешностью обладает выражение для тока в полубесконечном проводнике, возбуждаемом плоской волной.

Интересно также отметить, что выражения для функций ψ_\pm и ψ , полученные методом параболического уравнения, более предпочтительны, чем аналогичные выражения из [105, 106]. Во-первых, они, в отличие от последних, не имеют *паразитных* полюсов, вычеты в которых дают волны, лишённые физического смысла. Во-вторых, в предельном случае при $a \rightarrow \infty$ они правильно описывают волны тока на ленте.

Следует сказать, что при более строгом подходе [108] амплитуды у всех отраженных волн будут определяться разными функциями, однако различие между ними быстро уменьшается с ростом номера отражения. Функции ψ_\pm и ψ лишь приближенно описывают эти волны тока, но зато позволяют эффективно их просуммировать и получить замкнутые формулы.

В заключение параграфа приведем полезное для расчетов приближенное выражение

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{2 \ln \left[2i/\gamma a \sqrt{2k(k \pm w)} \right]}{\ln \left[2iz/\gamma ka^2 \right] - E \left[(k \pm w)z \right] e^{-i(k \pm w)z}}, \quad (6.4.11)$$

$$w = -k \cos \vartheta, \quad E(y) = - \int_y^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt,$$

которое вытекает из вариационного принципа [107] и описывается хорошо табулированными функциями. Функция (6.4.11) имеет асимптотические представления

$$\psi_{\pm}(z) \sim \frac{2 \ln \left[\sqrt{2}i/\gamma a \sqrt{k(k \pm w)} \right]}{\ln \left[2iz/\gamma ka^2 \right]} \left[1 - \frac{e^{-i(k \pm w)z}}{\ln \left[2iz/\gamma ka^2 \right]} \int_{(k \pm w)z}^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \right] \quad (6.4.12)$$

для $(k \pm w)z \gg 1$ и

$$\psi_{\pm}(z) \sim 1 - \frac{1}{2 \ln \left[\sqrt{2}i/\gamma a \sqrt{k(k \pm w)} \right]} \times \left\{ \ln \left[\gamma(k \pm w)z/i \right] + e^{-i(k \pm w)z} \int_{(k \pm w)z}^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \right\} \quad (6.4.13)$$

для $kz \ll 1$, относительная погрешность которых не превышает величины порядка $[2 \ln(i/\gamma ka)]^{-2}$. Покажем, что эти формулы можно также получить из выражений (6.3.15) и (6.3.18). Действительно, при $ka \ll 1$ выражения (6.3.15) и (6.3.18) можно записать в виде

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{\ln \left[\sqrt{2}i/\gamma a \sqrt{k(k \pm w)} \right]}{i\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + k \pm w} \right) \frac{e^{itz} dt}{\ln \left[2/\gamma^2 ka^2 t \right]}, \quad (6.4.14)$$

где контур интегрирования огибает полюс $t = -(k \pm w)$ сверху, точку ветвления $t = 2/(\gamma^2 k a^2)$ сверху, а точку $t = 0$ – снизу. Вводя обозначение

$$I(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux} du}{u \ln [\gamma^2 u/2]}, \quad (6.4.15)$$

где контур интегрирования огибает точку ветвления $u = 2/\gamma^2$ сверху, а точку $u = 0$ снизу, получим

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(z) = 2 \ln \frac{\sqrt{2}i}{\gamma a \sqrt{k(k \pm w)}} \left[I \left(\frac{z}{ka^2} \right) + \right. \\ \left. + e^{-i(k \pm w)z} \int_z^{\infty} I'_s \left(\frac{s}{ka^2} \right) e^{i(k \pm w)s} ds \right], \quad (6.4.16) \end{aligned}$$

где

$$I'_s \left(\frac{s}{ka^2} \right) = \frac{\partial}{\partial s} I \left(\frac{s}{ka^2} \right).$$

В работе [105] показано, что при $x \gg 1$

$$I(x) = \frac{1}{\ln[2ix/\gamma]} + O \left[\frac{1}{[\ln(2ix/\gamma)]^3} \right]. \quad (6.4.17)$$

Подставляя это выражение в формулу (6.4.16) и учитывая, что главный вклад в интеграл дается окрестностью нижнего предела (при $(k \pm w)z \gg 1$), получаем формулу (6.4.12).

Заметим далее, что согласно [106] функция (6.4.14) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(z) + \frac{1}{g_{\pm}(0) + g(0)} \int_0^z \ln \frac{\gamma(k \pm w)(z - \zeta)}{i} \psi'_{\pm}(\zeta) d\zeta = \\ = 1 - \frac{g_{\pm}(z) - g_{\pm}(0)}{g_{\pm}(0) + g(0)}, \quad (6.4.18) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{\pm}(z) &= \ln \frac{2z}{a} + e^{-i(k \pm w)z} \int_z^{\infty} \frac{e^{i(k \pm w)\sigma}}{\sigma} d\sigma, \\ g(z) &= \ln \frac{2z}{a} + e^{-2ikz} \int_z^{\infty} \frac{e^{2ik\sigma}}{\sigma} d\sigma, \\ g_{\pm}(0) &= \ln \frac{2i}{\gamma(k \pm w)a}, \\ g(0) &= \frac{i}{\gamma ka}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.19)$$

Отсюда, полагая $kz \ll 1$ и пренебрегая поэтому интегральным членом в (6.4.18), находим для функции (6.4.14) асимптотическое представление (6.4.13). Таким образом, выражение (6.4.11) описывает функции (6.3.15) и (6.3.18) с относительной погрешностью, не превышающей величины порядка $[2 \ln(i/\gamma ka)]^{-2}$.

§ 6.5. Ближнее поле

Метод параболического уравнения позволяет эффективно вычислить не только волны тока, но и поле вблизи вибраторов. Учитывая, что электрический вектор-потенциал \mathbf{A} имеет для тонкого вибратора только компоненту \mathbf{A}_z , и пользуясь соотношениями

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{ik}(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}), \quad (6.5.1)$$

находим

$$H_{\varphi} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad E_r = -\frac{1}{ik} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r}, \quad (6.5.2)$$

$$E_z = -\frac{1}{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z, \quad E_{\varphi} = H_r = H_z = 0. \quad (6.5.3)$$

Подставляя сюда выражения для \mathbf{A}_z из предыдущих параграфов и полагая $k(r-a) \ll 1$, получим формулы

$$E_r = \frac{2}{r} q, \quad H_{\varphi} = \frac{2}{cr} J, \quad (6.5.4)$$

характерные для квазистационарного поля. Здесь величина J обозначает полный ток в вибраторе, а q — погонную плотность заряда, равную

$$q = \frac{1}{ick} \frac{d}{dz} J(z). \quad (6.5.5)$$

Компоненту E_z и энергетические характеристики целесообразно вычислять отдельно для волн различного направления. В приближении параболического уравнения можно положить

$$E_z = \mp 2 \frac{\partial W}{\partial z} e^{\pm ikz}, \quad (6.5.6)$$

где знак $+$ в экспоненте соответствует волнам, бегущим в положительном направлении оси z , а знак $-$ волнам, бегущим в противоположном направлении. Ограничиваясь далее для функции $W(r, z)$ выражением

$$W(r, z) = W(a, z) + \frac{\partial W(a, z)}{\partial ka} k(r - a), \quad (6.5.7)$$

и учитывая граничное условие на проводнике

$$\frac{\partial W(a, z)}{\partial z} = 0, \quad (6.5.8)$$

находим

$$E_z = 4ik \frac{r - a}{a} \left(\pm q - \frac{1}{c} J \right). \quad (6.5.9)$$

Следовательно, усредненная за период колебаний плотность потока энергии

$$\mathbf{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \quad (6.5.10)$$

будет иметь компоненты

$$P_r = \mp \frac{1}{2\pi c} \frac{r - a}{ra} \frac{d}{dz} |J|^2, \quad P_z = \pm \frac{1}{2\pi cr^2} |J|^2. \quad (6.5.11)$$

При выводе этих формул мы воспользовались соотношениями

$$\operatorname{Re} \left\{ J^* \frac{dJ}{dz} \right\} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} |J|^2, \quad \operatorname{Re} \{ qJ^* \} \approx \operatorname{Re} \left\{ \pm \frac{1}{c} JJ^* \right\}. \quad (6.5.12)$$

Заметим, что ближнее поле имеет отчасти реактивный характер, т.е. поле, соответствующее второму члену в формуле (6.5.9), не переносит энергии в радиальном направлении.

§ 6.6. Волны тока на ленте

Полученные выше выражения для тока в вибраторе обладают еще одним достоинством: они позволяют вычислить ток в предельном случае при $a \rightarrow \infty$, когда вибратор разворачивается в ленту. Переходя в формулах (6.2.13) и (6.4.8) к пределу при $a \rightarrow \infty$, можно вычислить ток, возбуждаемый на ленте с одной ее стороны ($y = 0^+$). Полный ток на ленте равен

$$j_z = 2j_z(y = 0^+). \quad (6.6.1)$$

Учитывая эту формулу и вводя обозначение

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \psi(z) = \chi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-2ikz} \int_{\sqrt{2kz}}^{\infty} e^{it^2} dt, \quad (6.6.2)$$

с помощью выражения (6.2.13) находим ток на ленте

$$j_z = -\frac{ick\mathcal{E}}{2\pi} \left[\chi(|z|) e^{ik|z|} + \tilde{A}_1 \chi(z - z_1) e^{ik(z-z_1)} + \tilde{A}_2 \chi(z_2 - z) e^{ik(z_2-z)} \right], \quad (6.6.3)$$

возбуждаемый сторонним полем (6.1.1), приложенным при $y = 0^+$. Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_1 &= -\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \left[\chi(-z_1) - \chi(z_2) \chi(z_2 - z_1) e^{2ikz_2} \right] e^{-ikz_1}, \\ \tilde{A}_2 &= -\frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}} \left[\chi(z_2) - \chi(-z_1) \chi(z_2 - z_1) e^{-2ikz_1} \right] e^{ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.4)$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = 1 - \chi^2(z_2 - z_1) e^{2ik(z_2 - z_1)}. \quad (6.6.5)$$

Аналогичным образом из (6.4.8) находим ток

$$j_z = \frac{c}{2\pi} \left[e^{iwz} + \tilde{B}_1 \chi(z - z_1) e^{ik(z-z_1)} + \tilde{B}_2 \chi(z_2 - z) e^{ik(z_2-z)} - \chi_-(z - z_1) e^{ik(z-z_1)+iwz_1} - \chi_+(z_2 - z) e^{ik(z_2-z)+iwz_2} \right], \quad (6.6.6)$$

возбуждаемый сторонним полем

$$E_z^e = E_{0z} e^{iwz} = \sin \vartheta e^{iwz}, \quad w = -k \cos \vartheta, \quad (6.6.7)$$

приложенным при $y = 0^+$, где

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \psi_{\pm}(z) = \chi_{\pm}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i(k \pm w)z} \int_{\sqrt{(k \pm w)z}}^{\infty} e^{it^2} dt, \quad (6.6.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_1 &= \frac{e^{i(k+w)z_2}}{\tilde{\mathcal{D}}} \left[\chi_+(L) - \chi_-(L) \chi(L) e^{i(k-w)L} \right] e^{-ikz_1}, \\ \tilde{B}_2 &= \frac{e^{-i(k-w)z_1}}{\tilde{\mathcal{D}}} \left[\chi_-(L) - \chi_+(L) \chi(L) e^{i(k+w)L} \right] e^{ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.9)$$

где $L = z_2 - z_1$. Найденные приближенные формулы (6.6.3) и (6.6.6) можно также получить непосредственно с помощью параболического уравнения, записанного в декартовой системе координат.

Заметим, что стороннее поле (6.1.1) возбуждает на бесконечной идеально проводящей плоскости при $y = 0^+$ ток

$$j_z = \frac{ck\mathcal{E}}{4\pi} H_0^{(1)}(k|z|). \quad (6.6.10)$$

Сравнивая это выражение с первым членом из формулы (6.6.3), мы видим, что ее погрешность при $k|z| \gg 1$ имеет величину порядка $(k|z|)^{-3/2}$. Ниже (см. § 9.5) также показано, что абсолютная погрешность формулы (6.6.6) при $(k \pm w)L \gg 1$ не превышает величины порядка $(kL)^{-3/2}$.

Интересно, что метод параболического уравнения дает точные выражения Зоммерфельда для первичных краевых волн тока, возбуждаемых плоской волной на ленте. Напомним, что они получены при условии $j_z = 0$ на продолжении полуплоскости (см. § 6.3). Более того, можно показать, что если задачу о дифракции краевых волн на ленте решать методом параболического уравнения при строгом выполнении условия $j_z = 0$ на продолжении ленты, то мы получим точные выражения для всех краевых волн тока. Представим с этой целью ток на ленте $(-l \leq z \leq l, y = 0)$ в виде

$$\frac{2\pi}{c} j_z = j_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[j_n^{(-)}(z+l) e^{ik(z+l)} + j_n^{(+)}(l-z) e^{ik(l-z)} \right], \quad (6.6.11)$$

где $j_0(z)$ — ток на бесконечной плоскости, $j_n^{(\pm)}$ — краевые волны. Пусть далее формула

$$A_{nz}^{(\mp)} = W_n^{(\mp)}(y, l \pm z) e^{ik(l \pm z)} \quad (6.6.12)$$

описывает поле, соответствующее краевой волне n -го порядка. Функция $W_n^{(\mp)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \pm 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W_n^{(\mp)} = 0, \quad (6.6.13)$$

а в приближении поперечной диффузии — уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \pm 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) W_n^{(\mp)} = 0. \quad (6.6.14)$$

Уравнение (6.6.14) имеет решение

$$W_n^{(\mp)}(y, l \pm z) = \frac{i}{\sqrt{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n^{(\mp)}(t)}{\sqrt{k-t}} e^{i\sqrt{2k(k-t)}|y| - i(k-t)(l \pm z)} dt, \quad (6.6.15)$$

где контур интегрирования огибает снизу точку ветвления $t = k$.

Замечая, что

$$j_n^{(\mp)}(l \pm z) = - \left. \frac{\partial A_{nz}^{(\mp)}}{\partial y} \right|_{y=0^+}, \quad (6.6.16)$$

с помощью формул (6.6.12) и (6.6.15) находим

$$j_n^{(\mp)}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n^{(\mp)}(t) e^{it\zeta} dt. \quad (6.6.17)$$

Из граничного условия $E_{nz}^{(\mp)} = 0$ на поверхности проводника ($y = 0^+$) следует, что

$$W_n^{(\mp)}(0^+, \zeta) = \text{const}, \quad \frac{\partial}{\partial z} W(0^+, \zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta > 0. \quad (6.6.18)$$

Это требование и условие

$$j(z) = 0 \quad \text{при } |z| > l \quad (6.6.19)$$

приводят к системе функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k-t} F_1^{(\pm)}(t) e^{it\zeta} dt &= 0 \text{ при } \zeta > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{(\pm)}(t) e^{it\zeta} dt &= -j_0[\pm(l-\zeta)] \text{ при } \zeta < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k-t} F_n^{(\pm)}(t) e^{it\zeta} dt &= 0 \text{ при } \zeta > 0, \quad n = 2, 3, \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_n^{(\pm)}(t) + F_{n-1}^{(\mp)}(-t) e^{-2itl} \right] e^{it\zeta} dt &= 0 \text{ при } \zeta < 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} (6.6.20)$$

для определения функций $F_n^{(\mp)}(t)$.

Оказывается, что при точном решении задачи о дифракции на ленте (на основе эллиптического уравнения (6.6.13)) для $F_n^{(\mp)}(t)$ получается система уравнений, приведенная ниже в (8.3.10), эквивалентная системе (6.6.20).

Заметим, что решения граничных задач для эллиптического и параболического уравнений совпадают только на поверхности ленты. При удалении от поверхности ленты эти решения становятся разными. Полученный результат можно объяснить следующим образом. Во-первых, в силу граничного условия (6.6.18) формулы (6.6.13) и (6.6.14) совпадают на поверхности ленты. Во-вторых, при точном и приближенном (т. е. на основе параболического уравнения) решениях задачи существенно используется одно и то же условие (6.6.19), которое не зависит от природы дифференциальных уравнений.

В связи с этим остановимся еще на одном интересном вопросе. Изложенная выше постановка задачи для параболического уравнения, основанная на функциональных уравнениях (6.6.20), отличается от той постановки, которая была дана ранее в главе 5. Если при первом подходе (на основе уравнений (6.6.20)) можно получить точные выражения для поля *только на поверхности тела*, то при втором подходе (глава 5) удается найти первый член асимптотического решения точной задачи, описывающий рассеянное поле в *дальней зоне во всем пространстве*.

§ 6.7. Основные результаты

- В главах 5 и 6 проведено исследование краевых волн методом параболического уравнения. В главе 5 изложено асимптотическое решение задачи о дифракции на клине. Показано, что параболическое уравнение, записанное в лучевой (полярной) системе координат, позволяет получить при $kr \gg 1$ первый член асимптотического решения точной задачи. Исходя из решения для абсолютно черного клина, в § 5.5 найдено методом отражений решение задачи о дифракции на клине с идеально проводящими гранями. Здесь же дано новое асимптотическое представление (5.5.7) для дифракционного поля, которое обладает, по сравнению с известной формулой Паули, более богатым физическим содержанием.
- В главе 6 развит метод параболического уравнения, использующий приближенные лучевые координаты для краевых волн, бегущих по тонким проводникам и ленте. Этот метод, основанный на функциональных уравнениях, позволяет довольно простым и изящным путем исследовать многократную дифракцию краевых волн в вибраторах — тонких цилиндрических проводниках. Такие тела имеют сильно выраженные резонансные свойства, поэтому при вычислении их дифракционных характеристик необходимо учитывать краевые волны высших порядков. Найденные в работе выражения для тока в вибраторах переходят при $ka \ll 1$ в известные формулы Вайнштейна [105, 106], а в пределе при $a \rightarrow \infty$ описывают волны тока на ленте. С помощью метода параболического уравнения удастся также вычислить ближнее поле излучения для вибраторов и изучить его физическую структуру (§ 6.5).
- Отметим также результат, полученный в конце § 6.6. Здесь показано, что решение граничных задач для эллиптического уравнения Гельмгольца и соответствующего ему параболического уравнения совпадают на поверхности ленты. Таким образом, мы видим, что метод параболического уравнения может служить эффективным аппаратом для асимптотического исследования краевых волн.
- В заключение отметим, что изученные в этой главе волны тока естественно интерпретировать в терминах ФТД (см. например, [3, 13, 64, 75], а также главы 2–4 в данной книге). Первые члены в выражениях (6.2.13) и (6.4.8) определяют ток, возбуждаемый на бесконечном проводе. Этот ток можно интерпретировать как

равномерную компоненту тока. Все другие члены в этих выражениях описывают краевые токи, которые можно рассматривать как *неравномерные* компоненты тока. Эта интерпретация полностью соответствует ФТД, особенно для предельного случая, когда вибратор трансформируется в ленту (§ 6.6). Найденные выше токи используются в следующей главе для вычисления излучаемого ими поля в дальней зоне.

§ 6.8. Дополнительные замечания

- Некоторые результаты этой главы были опубликованы в [19].
- Новая версия параболического уравнения предложена в [103]. Она представляет собой метод опорной волны и рекомендуется для исследования волн в нерегулярных волноводах.
- Метод параболического уравнения применяется в [109] для изучения токов в тонких проволочных вибраторах с конечной проводимостью. В [110] эти токи были использованы для вычисления дальнего поля, рассеянного такими проводниками.
- Задача о проволочных вибраторах с конечной проводимостью была исследована в [111] с помощью модифицированной функции Вайнштейна.
- Тонкий проволочный вибратор представляет собой пример открытого резонатора. В [112] и [113] метод параболического уравнения использован для исследования других типов открытых резонаторов.
- В [207, 209] изложены детали метода параболического уравнения применительно к задачам распространению волн над неоднородными трассами.

Глава 7

Излучение краевых волн: теория, основанная на теореме взаимности

§ 7.1. Вычисление поля в дальней зоне

Выше мы рассмотрели краевые волны тока на вибраторах и лентах и теперь хотим определить излучаемое ими поле в дальней зоне. Эта задача, в принципе, может быть решена с помощью запаздывающего вектор-потенциала через квадратуры от тока по поверхности тела. Однако оказывается, что непосредственное интегрирование приближенных формул для тока приводит к таким выражениям для рассеянного поля, которые обладают существенным недостатком — они не удовлетворяют принципу взаимности.¹ Поэтому возникает необходимость в специальных методах, которые бы позволяли по приближенным выражениям для тока находить диаграмму рассеяния, лишенную указанного недостатка.

С этой целью ниже развивается теория, основанная на теореме взаимности. С ее помощью найдены явные выражения для рассеянного поля, которые пригодны при любых направлениях облучения и наблюдения и приближенно учитывают многократную дифракцию.

Отметим, что исследованию отражающих свойств вибратора посвящено много работ. Как правило, в них сначала определяют наводимый в проводнике ток, а затем, интегрируя последний, вычисляют рассеянное поле в дальней зоне. Но в силу сложности задачи сравнительно простые формулы получены лишь для частного случая, когда направление наблюдения и направление на источник совпадают и перпендикулярны к оси проводника. В общем случае, когда указанные направления не совпадают и произвольны, выражения для рассеянного поля становятся

¹Этот вопрос подробно рассмотрен в § 10.5.

весьма сложными и неудобными для расчетов. Кроме того, они не удовлетворяют принципу взаимности.

Основные результаты изложенного ниже исследования опубликованы в работах [13] и [14].

§ 7.2. Излучение передающего вибратора

Характеристика излучения передающего вибратора может быть вычислена путем интегрирования тока в нем. Однако так поступать нецелесообразно потому, что как указывалось в предыдущей главе, точность формул (6.2.13) различна на разных участках провода и мала вблизи его концов ($z = z_1$ и $z \approx z_2$) и точки приложения сторонней э.д.с. ($z = 0$). Более точные результаты могут быть получены с помощью теоремы взаимности [114]. Предположим, что передающий вибратор ($r = a$, $-l \leq z \leq l$) возбуждается точечным источником (6.1.1). При работе с теоремой взаимности необходимо знать ток, возбуждаемый в вибраторе вспомогательным источником, находящимся в точке наблюдения. Предполагая, что этот источник располагается в дальней зоне от вибратора ($R \gg kL^2$), излучаемое им поле (в окрестности вибратора) можно рассматривать как плоскую волну (6.3.1). Ток, индуцированный этой волной в вибраторе, описывается формулой (6.4.8). Используя эту формулу и принцип взаимности, находим поле, создаваемое передающим вибратором в дальней зоне:

$$\left. \begin{aligned} E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{\mathcal{E}}{2 \sin \vartheta \Lambda [ka \sin \vartheta]} \frac{e^{ikR}}{R} f(\vartheta), \\ E_{\varphi} = H_{\vartheta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= 1 - \psi_+(z_2) e^{ikz_2(1-\cos \vartheta)} - \psi_-(-z_1) e^{-ikz_1(1+\cos \vartheta)} + \\ &+ B_1 \psi(-z_1) e^{-ikz_1} + B_2 \psi(z_2) e^{ikz_2}, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

а коэффициенты B_1 и B_2 определяются в (6.4.10). Функция $f(\vartheta)$ связана с током (6.4.8), возбуждаемым в вибраторе плоской волной (6.3.1),

соотношением

$$J(0) = Sf(\vartheta). \quad (7.2.3)$$

Выражение (7.2.2) можно переписать в форме, более удобной для физического анализа:

$$f(\vartheta) = 1 - \psi_+(z_2)e^{ikz_2(1-\cos\vartheta)} - \psi_-(-z_1)e^{-ikz_1(1+\cos\vartheta)} + \\ + C_1\psi_+(z_2 - z_1)e^{ikz_2(1-\cos\vartheta)} + C_2\psi_-(-z_1)e^{-ikz_1(1+\cos\vartheta)}, \quad (7.2.4)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left[\psi(-z_1) - \psi(z_2)\psi(z_2 - z_1)e^{2ikz_2} \right] e^{-2ikz_1}, \\ C_2 &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left[\psi(z_2) - \psi(-z_1)\psi(z_2 - z_1)e^{-2ikz_1} \right] e^{2ikz_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.5)$$

Функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad (7.2.6)$$

которое показывает, что поле, излученное конечным проводником в продольном направлении, должно быть равно нулю. Знаменатель \mathcal{D} в (7.2.5) определяется формулой (6.2.16).

Выражение (7.2.4) имеет простой физический смысл. Первое слагаемое (единица) описывает поле излучения бесконечно длинного провода, возбуждаемого сосредоточенной э.д.с. Распространяясь в направлении $\vartheta = 0$, это поле доходит до конца провода $z = z_2$ и, дифрагируя на нем, порождает первичную краевую волну (второе слагаемое). Аналогичным образом возбуждается первичная краевая волна, расходящаяся от конца провода $z = z_1$ (третье слагаемое). Последние два члена в формуле (7.2.4) определяют волны, возникшие в результате последующей дифракции (вторичной, третичной и т. д.).

Выражение (7.2.4), описывающее диаграмму рассеяния, было получено ранее в [106]. Единственное различие состоит в определении функций ψ и ψ_{\pm} . В [106] эти функции были определены с помощью метода медленно меняющихся амплитуд, тогда как здесь они найдены методом параболического уравнения.

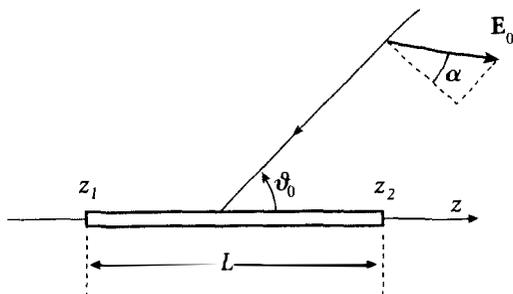


Рис. 7.3.1. Падение плоской волны на тонкий цилиндрический проводник

§ 7.3. Первичная и вторичная дифракция на пассивном вибраторе

Пусть плоская электромагнитная волна падает под углом ϑ_0 на тонкий цилиндрический проводник длины $L = z_2 - z_1$ и радиуса a (рис. 7.3.1). Для общности будем считать, что электрическое поле \mathbf{E}_0 падающей волны составляет угол α с плоскостью рисунка. Тогда его тангенциальная компонента на поверхности провода будет равна

$$E_z^e = E_{0z} e^{iw_0 z}, \quad (7.3.1)$$

где

$$E_{0z} = E \sin \vartheta_0, \quad E = E_0 \cos \alpha, \quad w_0 = -k \cos \vartheta_0. \quad (7.3.2)$$

Ток, наводимый в вибраторе этим полем, рассмотрен нами в § 6.4. Полученное для него выражение (6.4.8) обладает сравнительно малой точностью вблизи концов провода, поэтому вычислять рассеянное поле путем интегрирования тока нецелесообразно. Мы будем искать характеристику рассеяния пассивного вибратора, исходя из следующей картины рассеяния, которая естественно вытекает из предыдущих результатов. Падающая плоская волна, дифрагируя на концах провода, возбуждает первичные краевые волны, излучающиеся в окружающее пространство. Распространяясь вдоль провода, каждая из этих волн испытывает дифракцию на противоположном конце провода и возбуждает вторичные краевые волны. Последние, в свою очередь, порождают третичные краевые волны и т. д. При этом дифракция волн на каждом конце провода

происходит так же, как на конце полубесконечного провода. Следовательно, первичные краевые волны можно найти из задачи о дифракции плоской волны на полубесконечном проводе (z_1, ∞) и проводе $(-\infty, z_2)$. Сумма таких волн дает первичное поле

$$E_{\vartheta}^{(1)} = H_{\varphi}^{(1)} = -E \frac{e^{ikR}}{kR} F^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0), \quad (7.3.3)$$

где

$$F^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{i \operatorname{ctg}(\vartheta/2) \operatorname{ctg}(\vartheta_0/2) e^{-ikz_1(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)}}{2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0)} - \frac{i \operatorname{tg}(\vartheta/2) \operatorname{tg}(\vartheta_0/2) e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)}}{2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0)}. \quad (7.3.4)$$

Функция $\Phi(w, w_0)$ может быть вычислена путем строгого решения задачи о полубесконечном вибраторе (см. § 3 в [106] и [107]) и в этом случае удовлетворяет соотношению

$$\Phi(w, w_0) \Phi(-w, -w_0) = \ln(2i/\gamma \nu a) \ln(2i/\gamma \nu_0 a), \quad (7.3.5)$$

$$\nu = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \nu_0 = \sqrt{k^2 - w_0^2}.$$

Однако в строгом выражении для функции Φ в дальнейшем не будет необходимости.

Вторичная краевая волна, распространяющаяся от конца $z = z_2$, возбуждается при дифракции на нем первичной волны тока

$$-S \psi_{-}^0(z - z_1) e^{i w_0 z_1 + ik(z - z_1)}, \quad (7.3.6)$$

где через $\psi_{\pm}^0(z)$ мы обозначаем функции, получающиеся из функций $\psi_{\pm}(z)$ заменой ϑ на ϑ_0 . Для вычисления искомой вторичной волны нам нужно предварительно найти такое стороннее поле, приложенное к бесконечному проводу $(-\infty \leq z \leq \infty)$, которое возбуждает на его участке $(z_1 \leq z \leq \infty)$ ток (7.3.6).

С этой целью изучим ток, наводимый в бесконечном проводе сторонним полем

$$E_z^e = \hat{E}_{0z} e^{i w_0 z} \epsilon(z - z_1), \quad \epsilon(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < 0, \\ 0 & \text{при } z > 0. \end{cases} \quad (7.3.7)$$

Считаем, что w_0 имеет небольшую отрицательную мнимую часть $\text{Im } w_0 \leq 0$. Величину $\hat{E}_{0z} e^{iw_0 z} d\zeta$ можно рассматривать как сосредоточенную э.д.с., которая согласно формуле (6.1.14) создает в бесконечном проводе (при $ka \ll 1$) ток

$$\frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln(i/\gamma ka)} \psi(|z - \zeta|) e^{iw_0 \zeta + ik|z - \zeta|} d\zeta. \quad (7.3.8)$$

Поэтому в соответствии с принципом суперпозиции полный ток, создаваемый в области $z_1 \leq z \leq \infty$ сторонним полем (7.3.7), будет равен

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln(i/\gamma ka)} \int_{-\infty}^{z_1} \psi(z - \zeta) e^{iw_0 \zeta + ik(z - \zeta)} d\zeta = \\ &= \frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln(i/\gamma ka)} e^{iw_0 z} \int_{z - z_1}^{\infty} \psi(\zeta) e^{i(k - w_0)\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Пользуясь далее формулой (6.3.23), находим

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{c\hat{E}_{0z} e^{iw_0 z_1}}{8ik \sin^2(\vartheta_0/2) \ln(i/\gamma ka)} \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} - \\ &- \frac{c\hat{E}_{0z} e^{iw_0 z_1}}{2ik \sin^2 \vartheta_0 \ln[i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)]} \psi_-^0(z - z_1) e^{ik(z - z_1)}. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Таким образом, оказывается, что стороннее поле (7.3.7) возбуждает помимо волны $\psi_-^0(z)$ также и волну ψ . Для возбуждения «чистой» волны $\psi_-^0(z)$ нужно, очевидно, приложить дополнительное стороннее поле

$$E_z^e = \mathcal{E}_1 \delta(z - z_1), \quad (7.3.11)$$

такое, что

$$\begin{aligned} &\frac{c\hat{E}_{0z} e^{iw_0 z_1}}{8ik \sin^2(\vartheta_0/2) \ln(i/\gamma ka)} \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} + \\ &+ \frac{c\mathcal{E}_1}{4 \ln(i/\gamma ka)} \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} = 0. \end{aligned} \quad ((7.3.12)$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\hat{E}_{0z} e^{iw_0 z_1}}{2ik \sin^2(\vartheta_0/2)}. \quad (7.3.13)$$

Для того чтобы сумма сторонних полей (7.3.7) и (7.3.11) создавала ток (7.3.6), должно еще выполняться равенство

$$\frac{c\hat{E}_{0z}}{2ik \sin^2 \vartheta_0 \ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)]} = S = \frac{i\omega E_{0z}}{2k^2 \sin^2 \vartheta_0 \ln [2i/\gamma ka \sin \vartheta_0]}, \quad (7.3.14)$$

которое определяет величину

$$\hat{E}_{0z} = -E_{0z} \frac{\ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)]}{\ln [2i/\gamma ka \sin \vartheta_0]}. \quad (7.3.15)$$

Следовательно, для возбуждения в бесконечном проводе (при $z > z_1$) волны тока (7.3.6), необходимо приложить стороннее поле

$$E_z^e = E_{0z} \frac{\ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)]}{\ln [2i/\gamma ka \sin \vartheta_0]} \left[\frac{e^{iw_0 z_1} \delta(z - z_1)}{2ik \sin^2(\vartheta_0/2)} - \epsilon(z - z_1) e^{iw_0 z} \right], \quad (7.3.16)$$

где

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < 0, \\ 0 & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

Совершенно аналогично можно показать, что стороннее поле

$$E_z^e = E_{0z} \frac{\ln [i/\gamma ka \sin(\vartheta_0/2)]}{\ln [2i/\gamma ka \sin \vartheta_0]} \times \left[\frac{e^{iw_0 z_2}}{2ik \cos^2(\vartheta_0/2)} \delta(z_2 - z) - \epsilon(z_2 - z) e^{iw_0 z} \right] \quad (7.3.17)$$

возбуждает в бесконечной однопроводной линии (при $z < z_2$) ток

$$-S\psi_+^0(z_2 - z) e^{iw_0 z_2 + ik(z_2 - z)}. \quad (7.3.18)$$

Изучим теперь дифракцию волны (7.3.6) на полубесконечном проводе $(-\infty, z_2)$, для чего воспользуемся теоремой взаимности [114]

$$\iiint (\mathbf{j}_1^e \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_2^m \cdot \mathbf{H}_1) dV = 0. \quad (7.3.19)$$

Здесь $\mathbf{j}_1^e = -i\omega \mathbf{p}_1 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ обозначает ток вспомогательного диполя с моментом \mathbf{p}_1 , находящегося в точке 1 с координатами (R, ϑ) , \mathbf{H}_1 — его

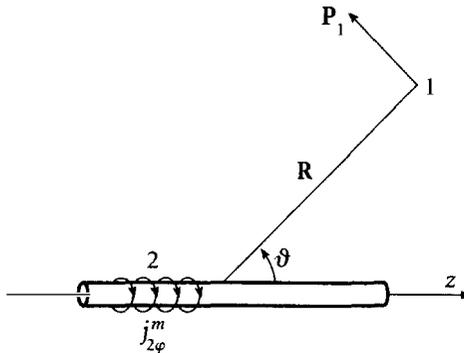


Рис. 7.3.2. Возбуждение полубесконечного проводника $(-\infty, z_2)$ сторонним поверхностным током $\mathbf{j}_{2\varphi}^m$

магнитное поле на поверхности провода, где заданы сторонние токи \mathbf{j}_2^m , \mathbf{E}_2 — поле, создаваемое этими токами в точке 1 (рис. 7.3.2).

Сторонний ток \mathbf{j}_2^m определяется известной формулой

$$\mathbf{j}_2^m = -\frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (7.3.20)$$

через электрическое поле \mathbf{E} на поверхности проводника. В силу граничного условия

$$E_z + E_z^e = 0 \quad (7.3.21)$$

имеем

$$\mathbf{j}_{2\varphi}^m = -\frac{c}{4\pi} E_z^e. \quad (7.3.22)$$

Определяя далее момент диполя \mathbf{p}_1 через его поле в свободном пространстве (в точке $x = y = z = 0$),

$$E'_{0z} = -k^2 p_1 \frac{e^{ikR}}{R} \sin \vartheta, \quad (7.3.23)$$

и переходя от магнитной напряженности $H_{1\varphi}$ к полному току

$$J = \frac{ca}{2} H_{1\varphi}, \quad (7.3.24)$$

наводимому диполем в проводе, получим из теоремы взаимности следующее соотношение:

$$E_{2\vartheta} = H_{2\varphi} = \frac{k^2 \sin \vartheta}{i\omega E'_{0z}} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{z_2} E_z^e J(z) dz. \quad (7.3.25)$$

Если диполь \mathbf{p}_1 удалить на расстояние $R \gg z_2 - z_0$ ($z_2 - z_0 > z_2 - z_1$), то излучаемое им поле можно рассматривать на участке $z_2 - z_0$ полубесконечного провода $(-\infty, z_2)$ как плоскую волну. Тогда ток, наводимый на этом отрезке провода, будет определяться формулой

$$J(z) = S' \left[e^{iwz} - e^{iwz_2} \psi_+(z_2 - z) e^{ik(z_2 - z)} \right], \quad (7.3.26)$$

где

$$S' = \frac{i\omega E'_{0z}}{2k^2 \sin^2 \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)}, \quad w = -k \cos \vartheta. \quad (7.3.27)$$

Величину z_0 мы возьмем такой, чтобы на расстоянии $z_2 - z_0$ от конца провода отраженная волна тока была практически равна нулю ($\psi_+(z_2 - z_0) \approx 0$). Подставляя функцию (7.3.26) в правую часть равенства (7.3.25) и принимая за величину E_z^e стороннее поле (7.3.16), получим

$$\begin{aligned} E_{2\vartheta} = H_{2\varphi} &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{z_2} E_z^e \left[e^{iwz} - \psi_+(z_2 - z) e^{iwz_2} e^{ik(z_2 - z)} \right] dz = \\ &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \times \\ &\times \left\{ \mathcal{E}_1 \left[e^{iwz_1} - \psi_+(z_2 - z_1) e^{iwz_2} e^{ik(z_2 - z_1)} \right] + \hat{E}_{0z} \frac{e^{i(w+w_0)z_1}}{i(w+w_0)} - \right. \\ &\left. - \hat{E}_{0z} e^{i(k+w)z_2} \int_{-\infty}^{z_1} \psi_+(z_2 - z) e^{i(k-w_0)z} dz \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (7.3.28) \end{aligned}$$

Важной особенностью этого соотношения является то, что интегрирование здесь проводится не по всему проводу $(-\infty, z_2)$, а лишь по его

части $(-\infty, z_1)$, где функция $\psi_+(z_2 - z)$ описывает ток уже с хорошей точностью. Интеграл, входящий сюда, вычисляется с помощью формулы (6.3.24). В результате поле, излучаемое полубесконечным проводом $(-\infty, z_2)$, равно

$$\begin{aligned}
 E_{2\vartheta} = H_{2\varphi} = & \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\
 & \times \left\{ \mathcal{E}_1 \left[e^{iwz_1} - \psi_+(L) e^{iwz_2 + ikL} \right] - \frac{\hat{E}_{0z} e^{i(w+w_0)z_1}}{ik(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} + \right. \\
 & + \frac{\hat{E}_{0z} e^{ikL} e^{i(w_0 z_1 + w z_2)}}{ik(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \times \\
 & \left. \times \left[\psi_+(L) - \frac{\sin^2(\vartheta/2) \ln [i/\gamma ka \sin(\vartheta/2)]}{\cos^2(\vartheta_0/2) \ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)]} \psi_0^-(L) \right] \right\}. \quad (7.3.29)
 \end{aligned}$$

Слагаемые в фигурных скобках, имеющие фазовый множитель $\exp[iwz_2]$, соответствуют искомой вторичной волне, расходящейся от конца $z = z_2$ провода. С помощью формул (7.3.13), (7.3.15) эту волну можно представить в виде

$$E_{\vartheta}^{(2)}(z_2) = H_{\varphi}^{(2)}(z_2) = \frac{\mathcal{E}^{(2)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \quad (7.3.30)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^{(2)}(z_2) = & \frac{4iE e^{iw_0 z_1 + ikL}}{k \sin \vartheta_0 (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} \times \\
 & \times \left\{ \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta_0/2)] \psi_+(L) - \right. \\
 & \left. - \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ln [i/\gamma ka \sin(\vartheta/2)] \psi_0^-(L) \right\} \quad (7.3.31)
 \end{aligned}$$

и $L = z_2 - z_1$.

Аналогичным путем находим вторичную дифракционную волну, распространяющуюся от конца $z = z_1$. Для этого нужно рассмотреть дифракцию первичной волны (7.3.18) на конце $z = z_1$ полубесконечного провода ($z_1 \leq z \leq \infty$). Принцип взаимности приводит в этом случае к

соотношению

$$E_{2\vartheta} = H_{2\varphi} = \frac{k^2 \sin \vartheta e^{ikR}}{i\omega E'_{0z}} \frac{1}{R} \int_{z_1}^{\infty} E_z^e J(z) dz, \quad (7.3.32)$$

которое после подстановки в него функции (7.3.17) и тока

$$J(z) = \frac{i\omega E'_{0z}}{2k^2 \sin^2 \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \times \\ \times \left[e^{i\omega z} - \psi_-(z - z_1) e^{i\omega z_1 + ik(z - z_1)} \right] \quad (7.3.33)$$

дает нам поле, излучаемое полубесконечным проводом (z_1, ∞) . Волна, излучаемая концом провода, является искомой вторичной краевой волной и может быть представлена в виде

$$E_{\vartheta}^{(2)}(z_1) = H_{\varphi}^{(2)}(z_1) = \frac{\mathcal{E}^{(2)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \quad (7.3.34)$$

где

$$\mathcal{E}^{(2)}(z_1) = \frac{4iE e^{i\omega_0 z_2 + ikL}}{k \sin \vartheta_0 (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} \times \\ \times \left\{ \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ln [i/\gamma ka \sin(\vartheta_0/2)] \psi_-(L) - \right. \\ \left. - \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta/2)] \psi_+^0(L) \right\}. \quad (7.3.35)$$

Впрочем, это выражение можно записать на основании соображений симметрии, заменяя в формулах (7.3.30) и (7.3.31) z_2 на z_1 , ϑ на $\pi - \vartheta$ и ϑ_0 на $\pi - \vartheta_0$.

§ 7.4. Многократная дифракция краевых волн

Найденные вторичные волны (7.3.30) и (7.3.34) суть волны, расходящиеся от концов полубесконечных проводов $(-\infty, z_2)$ и (z_1, ∞) . Если бесконечную однопроводную линию возбуждать сторонним полем

$$E_z^e = \mathcal{E}_2^{(2)} \delta(z - z_2), \quad (7.4.1)$$

где

$$\mathcal{E}_2^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)}(z_2) \Big|_{\vartheta=\pi} = E \frac{2i \ln(i/\gamma ka) \psi_-^0(L)}{k \sin \vartheta_0 \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} e^{ikL - ikz_1 \cos \vartheta_0}, \quad (7.4.2)$$

то возникает сферическая волна, которая при $\vartheta \approx \pi$ совпадает с волной (7.3.30). При возбуждении бесконечной линии сосредоточенной э.д.с.

$$E_z^e = \mathcal{E}_1^{(2)} \delta(z - z_1), \quad (7.4.3)$$

где

$$\mathcal{E}_1^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)}(z_1) \Big|_{\vartheta=0} = E \frac{2i \ln(i/\gamma ka) \psi_+^0(L)}{k \sin \vartheta_0 \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} e^{ikL - ikz_2 \cos \vartheta_0}, \quad (7.4.4)$$

возникает волна, совпадающая с волной (7.3.34) при $\vartheta = 0$.

Нетрудно видеть, что эти сторонние поля действительно возбуждают в бесконечной однопроводной линии волны тока, эквивалентные вторичным волнам тока в пассивном вибраторе (т.е. тем волнам, которые выражаются первым слагаемым в квадратных скобках формулы (6.4.10), если там заменить $1/\mathcal{D}$ на 1). Эта замена означает, что вторичные волны соответствуют первым членам геометрической прогрессии, сумма которой равна $1/\mathcal{D}$. Поэтому волны третьего порядка можно рассматривать как краевые волны, излучаемые полубесконечными проводами (z_1, ∞) и $(-\infty, z_2)$ при возбуждении их соответственно сторонними полями (7.4.1) и (7.4.3). Из формул (7.3.25) и (7.3.32) без труда находим полное поле, излучаемое при указанном возбуждении проводом (z_1, ∞) ,

$$E_\vartheta = H_\varphi = \frac{\mathcal{E}_2^{(2)}}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} \left[e^{iwz_2} - \psi_-(L) e^{iwz_1 + ikL} \right], \quad (7.4.5)$$

и полное поле, излучаемое проводом $(-\infty, z_2)$,

$$E_\vartheta = H_\varphi = \frac{\mathcal{E}_1^{(2)}}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} \left[e^{iwz_1} - \psi_+(L) e^{iwz_2 + ikL} \right]. \quad (7.4.6)$$

В результате для волн третьего порядка, расходящихся от концов z_1 и z_2 , мы получим следующие выражения:

$$E_\vartheta^{(3)}(z_1) = H_\varphi^{(3)}(z_1) = \frac{\mathcal{E}^{(3)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \quad (7.4.7)$$

$$E_\vartheta^{(3)}(z_2) = H_\varphi^{(3)}(z_2) = \frac{\mathcal{E}^{(3)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \quad (7.4.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}^{(3)}(z_1) &= -\mathcal{E}_2^{(2)} \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{E}^{(3)}(z_2) &= -\mathcal{E}_1^{(2)} \psi_+(L) e^{ikL}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.9)$$

В направлениях к противоположному концу провода эти волны эквивалентны излучению бесконечной однопроводной линии, возбуждаемой сторонними полями

$$E_z^e = \mathcal{E}_1^{(3)} \delta(z - z_1), \quad \mathcal{E}_1^{(3)} = \mathcal{E}^{(3)}(z_1) \Big|_{\vartheta=0}, \quad (7.4.10)$$

$$E_z^e = \mathcal{E}_2^{(3)} \delta(z_2 - z), \quad \mathcal{E}_2^{(3)} = \mathcal{E}^{(3)}(z_2) \Big|_{\vartheta=\pi}. \quad (7.4.11)$$

Следовательно, волны четвертого порядка опять можно рассматривать как краевые волны, излучаемые полубесконечными проводами $(-\infty, z_2)$ и (z_1, ∞) при возбуждении их сторонними полями (7.4.10) и (7.4.11). С помощью принципа взаимности легко получаем

$$\left. \begin{aligned} E_{\vartheta}^{(4)}(z_1) = H_{\varphi}^{(4)}(z_1) &= \frac{\mathcal{E}^{(4)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \\ E_{\vartheta}^{(4)}(z_2) = H_{\varphi}^{(4)}(z_2) &= \frac{\mathcal{E}^{(4)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} (7.4.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}^{(4)}(z_1) &= -\mathcal{E}_2^{(3)} \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{E}^{(4)}(z_2) &= -\mathcal{E}_1^{(3)} \psi_+(L) e^{ikL}. \end{aligned} \right\} (7.4.13)$$

Совершенно аналогично находятся краевые волны n -го порядка

$$E_{\vartheta}^{(n)}(z_1) = H_{\varphi}^{(n)}(z_1) = \frac{\mathcal{E}^{(n)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \quad (7.4.14)$$

$$E_{\vartheta}^{(n)}(z_2) = H_{\varphi}^{(n)}(z_2) = \frac{\mathcal{E}^{(n)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \quad (7.4.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}^{(n)}(z_1) &= -\mathcal{E}_2^{(n-1)} \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{E}^{(n)}(z_2) &= -\mathcal{E}_1^{(n-1)} \psi_+(L) e^{ikL} \end{aligned} \right\} (7.4.16)$$

и

$$\mathcal{E}_1^{(n)} = \mathcal{E}^{(n)}(z_1) \Big|_{\vartheta=0}, \quad \mathcal{E}_2^{(n)} = \mathcal{E}^{(n)}(z_2) \Big|_{\vartheta=\pi}. \quad (7.4.17)$$

Таким образом, поле излучения, возникающее при многократной дифракции (начиная со вторичной), может быть представлено в следующем виде:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[E_{\vartheta}^{(n)}(z_1) + E_{\vartheta}^{(n)}(z_2) \right] = \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln(2i/\gamma k a \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} \times \left[\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_1) e^{-ikz_1 \cos \vartheta} + \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_2) e^{-ikz_2 \cos \vartheta} \right], \quad (7.4.18)$$

где

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_1) = \mathcal{E}^{(2)}(z_1) + \left[\mathcal{E}_1^{(2)} \psi(L) e^{ikL} - \mathcal{E}_2^{(2)} \right] \frac{\psi_-(L)}{\mathcal{D}} e^{ikL}, \quad (7.4.19)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_2) = \mathcal{E}^{(2)}(z_2) + \left[\mathcal{E}_2^{(2)} \psi(L) e^{ikL} - \mathcal{E}_1^{(2)} \right] \frac{\psi_+(L)}{\mathcal{D}} e^{ikL} \quad (7.4.20)$$

и

$$\mathcal{D} = 1 - \psi^2(L) e^{2ikL}, \quad (7.4.21)$$

а функции $\mathcal{E}^{(2)}(z_{1,2})$ и $\mathcal{E}_{1,2}^{(2)}$ определяются формулами (7.3.31), (7.3.35), (7.4.2) и (7.4.4). Мы не будем выписывать здесь довольно громоздкое окончательное выражение для этого поля и перейдем к вычислению полного поля, излучаемого вибратором.

§ 7.5. Полное рассеянное поле

Прежде чем приступить к выводу выражения для характеристики рассеяния, сделаем следующее замечание. В формулу (7.3.4) входят функции Φ , которые удовлетворяют соотношениям (7.3.5) и могут быть найдены путем факторизации. Однако наше рассмотрение последовательных волн, возникающих при дифракции на концах провода, было приближенным, поэтому нет смысла пользоваться точным выражением (7.3.4) для первичного поля. Мы используем приближенные выражения для функции Φ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0) &= \ln \frac{i}{\gamma k a \sin(\vartheta/2) \sin(\vartheta_0/2)}, \\ \Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0) &= \ln \frac{i}{\gamma k a \cos(\vartheta/2) \cos(\vartheta_0/2)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.1)$$

полученные с помощью вариационного метода и обладающие достаточной для нас точностью (см. [106]). Точнее говоря, мы воспользуемся приближенными формулами (7.5.1) в сочетании со строгим выражением (7.3.5) и положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0)} &= \frac{\ln [i/\gamma ka \cos(\vartheta/2) \cos(\vartheta_0/2)]}{\ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)}, \\ \frac{1}{\Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0)} &= \frac{\ln [i/\gamma ka \sin(\vartheta/2) \sin(\vartheta_0/2)]}{\ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)}. \end{aligned} \right\} (7.5.2)$$

Тогда первичное поле будет равно

$$\begin{aligned} E_{\vartheta}^{(1)} = H_{\varphi}^{(1)} = &= -\frac{iE}{2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\ &\times \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \cos(\vartheta/2) \cos(\vartheta_0/2)} \right] e^{-ikz_1(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \right. \\ &\left. - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \sin(\vartheta/2) \sin(\vartheta_0/2)} \right] e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Суммируя теперь выражения (7.4.18) и (7.5.3), находим поле, рассеянное вибратором, в виде

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = -E \frac{e^{ikR}}{kR} F(\vartheta, \vartheta_0), \quad (7.5.4)$$

где

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \mathcal{F}(\vartheta, \vartheta_0) e^{ikl \cos \vartheta} + \mathcal{F}(\pi - \vartheta, \pi - \vartheta_0) e^{-ikl \cos \vartheta}, \quad (7.5.5)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vartheta, \vartheta_0) = & \frac{2i \operatorname{cosec} \vartheta \operatorname{cosec} \vartheta_0}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} \times \\
& \times \left\{ \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \cos(\vartheta/2) \cos(\vartheta_0/2)} \right] e^{ikl \cos \vartheta_0} + \right. \\
& + \left[\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \sin(\vartheta_0/2)} \right] \psi_- - \right. \\
& - \left. \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos(\vartheta/2)} \psi_+^0 \right] e^{ik(L-l \cos \vartheta_0)} - \\
& \left. - \frac{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln(i/\gamma ka)}{2\mathcal{D}} \left[\psi_+^0 \psi e^{ikL-ikl \cos \vartheta_0} - \psi_-^0 e^{ikl \cos \vartheta_0} \right] \psi_- e^{2ikL} \right\}, \tag{7.5.6}
\end{aligned}$$

причем все функции ψ_{\pm}, ψ_{\pm}^0 имеют аргумент L . Кроме того, не теряя общности, мы здесь положили $z_2 = -z_1 = l$, так что теперь $L = 2l$. Полученное выражение имеет четкий физический смысл. Действительно, первое слагаемое в формуле (7.5.6) соответствует первичной краевой волне, второе (в квадратных скобках) — вторичной волне и последний член, содержащий резонансный знаменатель \mathcal{D} , описывает совокупность волн, которые возникают при многократной дифракции. Резонанс наступает при $L \approx n\lambda/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), когда $\mathcal{D} \approx 0$.

Другая важная особенность характеристики рассеяния $F(\vartheta, \vartheta_0)$ заключается в том, что она удовлетворяет принципу взаимности, т. е. не изменяет своей величины при взаимной перестановке ϑ и ϑ_0 .

Можно также показать, что вибратор не излучает в направлениях вдоль своей оси и не рассеивает электромагнитные волны при скользящем облучении, т. е.

$$F(0, \vartheta_0) = F(\pi, \vartheta_0) = F(\vartheta, 0) = F(\vartheta, \pi) = 0. \tag{7.5.7}$$

Полученное выражение (7.5.5) для характеристики рассеяния впервые было опубликовано автором в 1962 г. в [14]. Позже оно было получено более строгим путем, на основе интегральных уравнений в [115]. Оказалось, что погрешность нашего выражения (7.5.5) не превышает при $kl \gg 1$ величины порядка $[2 \ln(i/\gamma ka)]^{-2}$ и, следовательно, мала для тонких вибраторов, когда $ka \ll 1$.

В пределах указанной погрешности функции ψ_{\pm} можно заменить приближенным выражением (6.4.11). С помощью этого выражения ха-

рактическую характеристику рассеяния в направлении зеркально отраженного луча можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0) = & -\frac{kL}{2 \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)} + \\
 & + kL \frac{(\psi_+^0)^2 E[2kL \sin^2(\vartheta_0/2)] + (\psi_-^0)^2 E[2kL \cos^2(\vartheta_0/2)]}{4 [\ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)]^2} + \\
 & + i \frac{\ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0) - 1/2 + \phi(\vartheta_0) + \phi(\pi - \vartheta_0)}{[\sin \vartheta_0 \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)]^2}, \quad (7.5.8)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \phi(\vartheta) = & \left\{ \frac{1}{2} \psi_+ \cos^2(\vartheta/2) - \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \sin(\vartheta/2)} \right] \right\} \psi_+ e^{ikL(1-\cos \vartheta)} - \\
 & - \frac{\ln[i/\gamma ka]}{D} e^{2ikL} \left[\psi_+ \psi e^{ikL(1-\cos \vartheta)} - \psi_- \right] \psi_+. \quad (7.5.9)
 \end{aligned}$$

При скольльзящем облучении вибратора, когда $\vartheta_0 = 0$ или $\vartheta_0 = \pi$, отсюда следует, что $F(\pi, 0) = F(0, \pi) = 0$. Полагая теперь $\vartheta_0 = \pi/2$, получим

$$\begin{aligned}
 F(\pi/2, \pi/2) = & -\frac{kL}{2 \ln(2i/\gamma ka)} + kL \frac{\bar{\psi}^2 E(kL)}{2 [\ln(2i/\gamma ka)]^2} + \\
 & + \frac{i}{[\ln(2i/\gamma ka)]^2} \left[\ln \frac{2i}{\gamma ka} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} - 2 \ln \frac{\sqrt{2}i}{\gamma ka} \right) \bar{\psi} e^{ikL} + \right. \\
 & \left. + 2\bar{\psi} \frac{-2 \ln(i/\gamma ka)}{1 + \psi e^{ikL}} e^{2ikL} \right], \quad (7.5.10)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{\psi} = \psi_{\pm} \Big|_{\vartheta=\pi/2}, \quad (7.5.11)$$

которое характеризует величину отраженного поля при нормальном облучении.

Найденная выше характеристика рассеяния (7.5.5) была получена суммированием всех волн, образующихся при многократной дифракции. Такой путь очень нагляден, но несколько длинен. К этому же результату можно прийти скорее, если учесть, что процесс дифракции краевых волн

на концах пассивного вибратора происходит, начиная с дифракции третьего порядка, так же как на концах передающего вибратора. Поэтому диаграмму рассеяния пассивного вибратора можно сразу искать в виде

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{2if(\vartheta, \vartheta_0)}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0 \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta) \ln(2i/\gamma ka \sin \vartheta_0)}, \quad (7.5.12)$$

где

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \vartheta_0) = & \frac{1}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \times \\ & \times \left\{ \left[f_1(\vartheta, \vartheta_0) + f_2(\vartheta, \vartheta_0) + \hat{C}_1 \psi_-(L) \right] e^{ikl \cos \vartheta} - \right. \\ & \left. - \left[f_1(\pi - \vartheta, \pi - \vartheta_0) + f_2(\pi - \vartheta, \pi - \vartheta_0) - \hat{C}_2 \psi_+(L) \right] e^{-ikl \cos \vartheta} \right\}. \quad (7.5.13) \end{aligned}$$

Функции f_1 и f_2 описывают соответственно первичные и вторичные краевые волны, причем

$$f_1(\vartheta, \vartheta_0) = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left(\frac{i}{\gamma ka \cos(\vartheta/2) \cos(\vartheta_0/2)} \right) e^{ikl \cos \vartheta_0}, \quad (7.5.14)$$

$$\begin{aligned} f_2(\vartheta, \vartheta_0) = & e^{ikL} \left\{ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \sin(\vartheta_0/2)} \right] \psi_-(L) - \right. \\ & \left. - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \left[\frac{i}{\gamma ka \cos(\vartheta/2)} \right] \psi_+^0(L) \right\} e^{-ikl \cos \vartheta_0}. \quad (7.5.15) \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие $\psi_+(L)$ и $\psi_-(L)$ в формуле (7.5.13), представляют собой сумму всех краевых волн, распространяющихся соответственно от концов $z = -l$ и $z = l$. Постоянные \hat{C}_1 и \hat{C}_2 определяются из условия

$$f(0, \vartheta_0) = f(\pi, \vartheta_0) = 0, \quad (7.5.16)$$

которое приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 \psi(L) e^{ikL} + \hat{C}_2 &= \frac{1}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_+^0(L) e^{2ikL - ikl \cos \vartheta_0}, \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \psi(L) e^{ikL} &= \frac{1}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_-^0(L) e^{2ikL + ikl \cos \vartheta_0}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.17)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 &= -\frac{1}{2\mathcal{D}} e^{2ikL} \ln \frac{i}{\gamma ka} \left[\psi_+^0 \psi e^{ikL - ikL \cos \vartheta_0} - \psi_-^0 e^{ikL \cos \vartheta_0} \right], \\ \hat{C}_2 &= -\frac{1}{2\mathcal{D}} e^{2ikL} \ln \frac{i}{\gamma ka} \left[\psi_-^0 \psi e^{ikL + ikL \cos \vartheta_0} - \psi_+^0 e^{-ikL \cos \vartheta_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.18)$$

Подставляя найденную таким образом функцию $f(\vartheta, \vartheta_0)$ в формулу (7.5.12), мы получим выражение, которое полностью совпадает с (7.5.5).

§ 7.6. Вибратор, короткий по сравнению с длиной волны (пассивный диполь)

Изложенная выше теория дифракции плоской волны на тонком цилиндрическом вибраторе основана на ряде физических соображений. Сильной стороной этой теории является то обстоятельство, что ее точность увеличивается с длиной вибратора, поскольку волны тока, дифракцию которых мы рассматривали, выражены тем более четко, чем длиннее вибратор. Однако можно показать, что и для коротких вибраторов, длина которых мала по сравнению с длиной волны, выведенные нами формулы обладают хорошей точностью.

Ясно, что вибратор, короткий по сравнению с длиной волны, действует как диполь, создавая рассеянное поле

$$E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 p_z \frac{e^{ikR}}{kR} \sin \vartheta, \quad (7.6.1)$$

где дипольный момент p_z может быть вычислен путем решения электростатической задачи и зависит от размеров и формы вибратора. Согласно работе [116] дипольный момент цилиндра в однородном электростатическом поле E_z равен

$$p_z = \mathcal{D}(\mathcal{Z}) \left(\frac{L}{2} \right)^3 E_z, \quad (7.6.2)$$

где $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ — безразмерная функция и $\mathcal{Z} = L/2a$. При $\mathcal{Z} \gg 1$ функцию $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ можно вычислять с помощью асимптотического разложения

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\Omega_2} + \frac{0,997}{\Omega_2^3} + \dots \right), \quad (7.6.3)$$

$$\Omega_2 = 2(\ln 4\mathcal{Z} - 7/3).$$

Если в этом разложении ограничиться первым членом, то

$$\mathcal{D}(Z) = \frac{1}{3(\ln 4Z - 7/3)}. \quad (7.6.4)$$

Результаты численных расчетов по формуле (7.6.4) показывают, что последняя формула дает хорошую точность уже при $Z > 9$ [116].

Таким образом, дипольный момент вибратора, короткого по сравнению с длиной волны, равен

$$p_z = E \frac{L^3}{24} \frac{\sin \vartheta_0}{\ln(2L/a) - 7/3} \left\{ 1 + O \left[\left(\ln \frac{L}{a} \right)^{-2} \right] \right\}, \quad (7.6.5)$$

а его характеристика рассеяния должна иметь вид

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{k^3 L^3}{24} \frac{\sin \vartheta \sin \vartheta_0}{\ln(2L/a) - 7/3} \left\{ 1 + O \left[\left(\ln \frac{L}{a} \right)^{-2} \right] \right\}. \quad (7.6.6)$$

В данном параграфе мы найдем первые два члена разложения характеристики рассеяния вибратора F по степеням $1/\ln(L/a)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$) и сравним их с выражением (7.6.6). При этом мы ограничимся случаем $\vartheta = \vartheta_0 = \pi/2$, когда функция F описывается более простой формулой (7.5.10). При малых значениях аргумента kz функции $\psi(z)$ и $\bar{\psi}(z) = \psi_{\pm}|_{\varphi=\pi/2}$ (см. формулы (6.4.13) и (6.4.18)) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= 1 - \frac{g(z) - g(0)}{2g(0)} + O \left[\frac{1}{g^2(0)} \right], \\ \bar{\psi}(z) &= 1 - \frac{\bar{g}(z) - \bar{g}(0)}{2g(0)} + O \left[\frac{1}{g^2(0)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.6.7)$$

где $g(z)$ определяется выражением (6.4.19), а

$$\bar{g}(z) - \bar{g}(0) = \ln \frac{\gamma kz}{i} + e^{-ikz} \int_z^{\infty} \frac{e^{ik\sigma}}{\sigma} d\sigma. \quad (7.6.8)$$

Ограничиваясь в разложении для функций $\psi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$ членами порядка $(kz)^3$, имеем

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 1 - \frac{1}{\ln(i/\gamma ka)} \left[ikz \left(\ln \frac{2\gamma kz}{i} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + k^2 z^2 \left(\ln \frac{2\gamma kz}{i} - \frac{3}{2} \right) - i \frac{2}{3} k^3 z^3 \left(\ln \frac{2\gamma kz}{i} - \frac{11}{6} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

$$\bar{\psi}(z) = 1 - \frac{1}{2 \ln(i/\gamma ka)} \left[ikz \left(\ln \frac{\gamma kz}{i} - 1 \right) + \frac{k^2 z^2}{2} \left(\ln \frac{\gamma kz}{i} - \frac{3}{2} \right) - i \frac{k^3 z^3}{6} \left(\ln \frac{\gamma kz}{i} - \frac{11}{6} \right) \right]. \quad (7.6.10)$$

В выражениях (7.6.9) и (7.6.10) опущены, кроме того, члены порядка $[\ln(i/\gamma ka)]^{-2}$. Если теперь мы будем подставлять эти выражения в формулу (7.5.10), то в ней следует опустить члены порядка $[\ln(i/\gamma ka)]^{-3}$. Поэтому функцию $F(\pi/2, \pi/2)$ можно представить в виде

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{[\ln(2i/\gamma ka)]^2} \left\{ \frac{ikL}{2} \left[\ln \frac{2i}{\gamma ka} - E(kL) \right] + \ln \frac{2i}{\gamma ka} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{ikL} - 2\bar{\psi}(L) \ln \frac{\sqrt{2}i}{\gamma ka} e^{ikL} + \frac{2 \ln(i/\gamma ka) \bar{\psi}^2(L)}{1 + \psi(L) e^{2ikL}} e^{2ikL} \right\}. \quad (7.6.11)$$

Подставляя сюда выражения (7.6.9) и (7.6.10) и опуская все промежуточные выкладки, которые частично приведены в книге [13], получим

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^3 L^3}{24} \left\{ \frac{1}{\ln(L/a)} + \frac{7/3 - \ln 2}{[\ln(L/a)]^2} + O \left[\left(\ln \frac{L}{a} \right)^{-3} \right] \right\}. \quad (7.6.12)$$

Найденная формула может быть представлена в виде

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^3 L^3}{24 [\ln(2L/a) - 7/3]} \left\{ 1 + O \left[\left(\ln \frac{L}{a} \right)^{-2} \right] \right\}. \quad (7.6.13)$$

Она полностью согласуется с формулой (7.6.6), следующей из [116].

Полученный результат подтверждает правильность вычисленной нами характеристики рассеяния (7.5.5) и показывает, что она применима для вибраторов любой длины.

§ 7.7. Результаты численных расчетов

Функция $F(\vartheta, \vartheta_0)$ позволяет вычислить интегральный поперечник рассеяния S и эффективную поверхность рассеяния σ пассивного вибратора. Интегральный поперечник рассеяния характеризует мощность, которую пассивный вибратор рассеивает по всем направлениям, и по определению равен

$$S = \frac{\mathcal{P}}{p}, \quad (7.7.1)$$

где

$$p = \frac{c}{8\pi} E_0^3 \quad (7.7.2)$$

представляет усредненную за период колебаний плотность потока энергии в падающей волне, а

$$\mathcal{P} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} E \sin \vartheta_0 \operatorname{Re} \int_{-l}^l J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz \quad (7.7.3)$$

представляет среднее за период значение мощности, рассеиваемой вибратором в окружающее пространство. Так как рассеянное поле в дальней зоне можно представить в направлении $\vartheta = \pi - \vartheta_0$ формулами

$$E_\vartheta = H_\varphi = -\frac{ik}{c} \sin \vartheta_0 \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-l}^l J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz \quad (7.7.4)$$

и

$$E_\vartheta = H_\varphi = -E \frac{e^{ikR}}{kR} F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0), \quad (7.7.5)$$

то определив отсюда интеграл

$$\int_{-l}^l J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz = \frac{cE}{ik^2 \sin \vartheta_0} F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0), \quad (7.7.6)$$

получим

$$S = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^2 \alpha \operatorname{Im}\{F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0)\}. \quad (7.7.7)$$

На рис. 7.7.1 приведены результаты расчета (при $\alpha = 0, \vartheta_0 = \pi/2$) величины S/L^2 для вибраторов с параметром $\chi = 1/[2 \ln(ka)]$, принимающим значения $\chi = -0.05$ и $\chi = -0.1$. Сплошные кривые вычислены по формулам, выведенным в известной работе Леонтовича и Левина [117]. Штриховые кривые рассчитаны по формуле (7.7.7). Кружками и треугольниками обозначены точные значения, полученные Вайнштейном [118] путем численного решения интегральных уравнений.

Как видно из рис. 7.7.1, точные значения хорошо ложатся на кривые, построенные по нашим формулам (7.7.7) и (7.5.10). Формулы Леонтовича и Левина применительно к тем же вибраторам дают несколько худшие, но все же вполне удовлетворительные результаты.

Эффективная поверхность рассеяния σ по определению равна

$$\sigma(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\mathcal{P}_r 4\pi R^2}{p}, \quad (7.7.8)$$

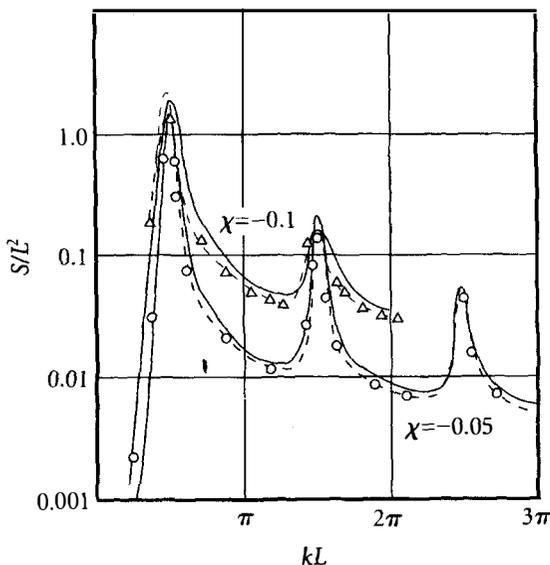


Рис. 7.7.1. Зависимость интегрального поперечника рассеяния от длины вибратора при нормальном падении плоской волны. Сплошные линии построены по формулам Леонтовича и Левина. Штриховые линии построены по формуле (7.7.7). Кружками и треугольниками обозначены точные значения, вычисленные Вайнштейном

где p есть уже известная величина (7.7.2), а

$$\mathcal{P}_r = \frac{c}{8\pi} |E_\vartheta|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{|F(\vartheta, \vartheta_0)|^2}{k^2 R^2} E^2 \quad (7.7.9)$$

представляет среднее значение плотности потока энергии, рассеиваемой вибратором в направлении ϑ . Следовательно,

$$\sigma(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^2 \alpha |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2. \quad (7.7.10)$$

Если приемная антенна работает на той же поляризации, что и передающая, то соответствующее значение эффективной поверхности будет равно

$$\sigma_\alpha(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^4 \alpha |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2. \quad (7.7.11)$$

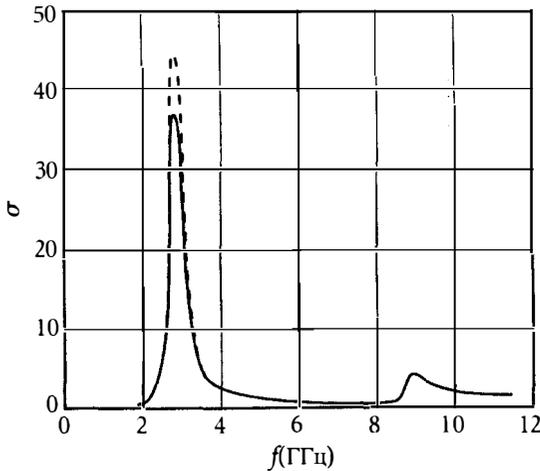


Рис. 7.7.2. Зависимость эффективной поверхности рассеяния вибратора от частоты в гигагерцах при нормальном падении плоской волны

В случае, когда приемная и передающая антенны совмещены, а поляризация произвольна, рассеивающие свойства вибратора характеризуют усредненной величиной

$$\bar{\sigma}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{\alpha}(\vartheta, \vartheta_0) d\alpha = \frac{3\lambda^2}{8\pi} |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2. \quad (7.7.12)$$

На рис. 7.7.2 построен график функции $\bar{\sigma}(\pi/2)$ в зависимости от частоты для значений $L = 5$ см и $L/(2a) = 452$. Сплошная кривая построена по точным значениям Вайнштейна [118], с нею совпадает кривая, рассчитанная Линдротом [119] путем интегрирования тока. Линдрот получил выражение для рассеянного поля по обратным степеням параметра $\Omega_p = 2 \ln(2L/a)$, которое включает члены порядка Ω_p^{-3} . Штриховая кривая построена по формулам (7.7.12) и (7.5.10). Она дает несколько завышенные значения для $\bar{\sigma}$ вблизи первого резонанса (при $\lambda = 4l = 2L$), но при других частотах практически совпадает с точной кривой. В книге [13] приведен также ряд других графиков, построенных по формулам (7.7.7), (7.7.12) и (7.5.8), характеризующих более полно рассеивающие свойства вибратора.

§ 7.8. Излучение краевых волн на ленте

В данном параграфе развитая выше теория излучения краевых волн применяется к задаче о ленте. Поскольку при решении этой задачи основные элементы теории остаются прежними, мы постараемся изложить ее кратко и ограничимся лишь формулировкой основных соотношений.

Итак, пусть плоская волна

$$\begin{aligned} H_x &= e^{-ik(z \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0)}, \quad E_x = 0, \\ E_z &= -\sin \vartheta_0 e^{-ik(z \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0)} \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

дифрагирует на идеально проводящей ленте, которая расположена в плоскости $y = 0$ и характеризуется координатами $-l \leq z \leq l$ и $-\infty \leq x \leq \infty$. Первичные краевые волны находятся из решения задачи о дифракции на полуплоскости (см., например, [13] или [120]) и описываются в дальней зоне (при $R \gg kl^2$) формулой

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{2}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \left[\sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} e^{-ikl(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} e^{ikl(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \right] \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

где $0 \leq \vartheta \leq \pi$ и $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$.

Для вычисления краевых волн высших порядков воспользуемся выражением

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{c} j_z &= e^{-ikz \cos \vartheta_0} - \\ &\quad - \chi_-^0(l+z) e^{ik(z+l) + ikl \cos \vartheta_0} - \chi_+^0(l-z) e^{ik(l-z) - ikl \cos \vartheta_0} + \\ &\quad + \tilde{B}_1 \chi(l+z) e^{ik(z+l)} + \tilde{B}_2 \chi(l-z) e^{ik(l-z)}, \end{aligned} \quad (7.8.3)$$

которое согласно (6.6.6) определяет ток, возбуждаемый падающей волной (7.8.1) на ленте. Функции χ_{\pm}^0 и χ выражаются через интегралы Френеля по формулам (6.6.8) и (6.6.2), где w следует заменить на

$w_0 = -k \cos \vartheta_0$. Кроме того, согласно (6.6.9)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_1 &= \frac{e^{ikL}}{\mathcal{D}} \left[\chi_+^0(L) - \chi_-^0(L) \chi(L) e^{i(k-w_0)L} \right] e^{iw_0 l}, \\ \tilde{B}_2 &= \frac{e^{ikL}}{\mathcal{D}} \left[\chi_-^0(L) - \chi_+^0(L) \chi(L) e^{i(k+w_0)L} \right] e^{-iw_0 l}, \end{aligned} \right\} \quad (7.8.4)$$

где

$$\mathcal{D} = 1 - \chi^2(L) e^{2ikL}, \quad L = 2l, \quad w_0 = -k \cos \vartheta_0. \quad (7.8.5)$$

Можно показать, что при $z > -l$ стороннее поле

$$\begin{aligned} E_z^e &= -\frac{1}{2ik} \left(\cos \frac{\vartheta_0}{2} e^{-iw_0 l} - \tilde{B}_1 \right) \delta(z+l) + \\ &+ \epsilon(z+l) \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} e^{iw_0 z}, \end{aligned} \quad (7.8.6)$$

$$\epsilon(z+l) = \begin{cases} 1 & \text{при } z+l < 0, \\ 0 & \text{при } z+l > 0, \end{cases}$$

приложенное при $y = \pm 0$ к неограниченной идеально проводящей плоскости ($y = 0$), возбуждает полный ток

$$\begin{aligned} j_z &= j_z(y = 0^+) + j_z(y = 0^-) = \\ &= \frac{c}{2\pi} \left[\chi_-^0(z+l) e^{-iw_0 l} - \tilde{B}_1 \chi(z+l) \right] e^{ik(z+l)}, \end{aligned} \quad (7.8.7)$$

эквивалентный суммарной краевой волне тока, бегущей по ленте от ее ребра $z = -l$. Следовательно, искомая волна, излучаемая в окружающее пространство краем ленты, может быть определена из задачи о возбуждении полуплоскости $-\infty \leq z \leq l$ сторонним полем (7.8.6). Решая эту

задачу с помощью теоремы взаимности, находим

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{2}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ik(L-l\cos\vartheta)} \times \\
 &\times \left\{ \left[-\sin \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \chi_-^0(L) + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \chi_+(L) \right] e^{ikl\cos\vartheta_0} + \right. \\
 &+ \left[\chi_-^0(L)\chi(L)e^{ik(1+\cos\vartheta)L} - \chi_+^0(L) \right] \times \\
 &\times \left. \frac{\cos \vartheta + \cos \vartheta_0}{2\mathcal{D}} \chi_+(L)e^{ik(L-l\cos\vartheta_0)} \right\}, \tag{7.8.8}
 \end{aligned}$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta_0 \leq \pi.$$

Здесь первый член в фигурных скобках соответствует вторичной волне, а второй член — сумме всех остальных краевых волн. Из соображений симметрии ясно, что заменяя в формуле (7.8.8) ϑ на $\pi - \vartheta$ и ϑ_0 на $\pi - \vartheta_0$, получим выражение для волн, излучаемых краем ленты $z = -l$.

В результате полное поле, рассеянное лентой, можно представить в виде

$$H_x = F(\vartheta, \vartheta_0) \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta_0 \leq \pi, \tag{7.8.9}$$

где

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \mathcal{F}(\vartheta, \vartheta_0)e^{ikl\cos\vartheta} + \mathcal{F}(\pi - \vartheta, \pi - \vartheta_0)e^{-ikl\cos\vartheta}, \tag{7.8.10}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\vartheta, \vartheta_0) &= -\frac{2\cos(\vartheta/2)\cos(\vartheta_0/2)}{\cos\vartheta + \cos\vartheta_0} e^{ikl\cos\vartheta_0} + \\
 &+ \left[-\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \chi_-(L) + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \chi_+^0(L) \right] \times \\
 &\times \frac{2e^{ikL}}{\cos\vartheta + \cos\vartheta_0} e^{-ikl\cos\vartheta_0} + \frac{e^{i2kL}}{\mathcal{D}} \times \\
 &\times \left[-\chi_-^0(L) + \chi_+^0(L)\chi(L)e^{ikL(1-\cos\vartheta_0)} \right] \chi_-(L)e^{ikl\cos\vartheta_0}. \tag{7.8.11}
 \end{aligned}$$

Функция $F(\vartheta, \vartheta_0)$ удовлетворяет принципу взаимности и условиям (7.5.7). Заметим, что при $\vartheta = \pi - \vartheta_0$, т. е. в направлении зеркально

отраженного луча, каждое слагаемое в формуле (7.8.10) обращается в бесконечность, однако их сумма остается конечной:

$$F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0) = -\frac{1}{\sin \vartheta_0} - 2ikl \sin \vartheta_0 + \beta(\vartheta_0) + \beta(\pi - \vartheta_0) \quad (7.8.12)$$

и

$$\begin{aligned} \beta(\vartheta_0) = & \left[\left(\frac{\cos^3(\vartheta_0/2)}{\sin \vartheta_0} + \sin \frac{\vartheta_0}{2} + 2ikl \sin \vartheta_0 \cos \frac{\vartheta_0}{2} \right) \chi_+^0(L) + \right. \\ & \left. + 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{kl}{\pi}} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right] e^{ikL(1-\cos \vartheta_0)} + \\ & + \frac{e^{2ikL}}{\mathcal{D}} \left[\chi_+^0(L) \chi(L) e^{ikL(1-\cos \vartheta)} - \chi_-^0(L) \right] \chi_+^0(L). \end{aligned} \quad (7.8.13)$$

При нормальном падении плоской волны ($\vartheta_0 = \pi/2$) находим

$$F(\pi/2, \pi/2) = -1 - 2ikL + 2\bar{\beta}e^{ikL}, \quad (7.8.14)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(3 + 2ikL) \bar{\chi}(L) + 2\sqrt{\frac{2kl}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right] + \\ & + \frac{e^{ikL}}{\mathcal{D}} \left[\chi(L) e^{ikL} - 1 \right] \bar{\chi}^2(L), \end{aligned} \quad (7.8.15)$$

$$\bar{\chi}(L) = \bar{\chi}_{\pm}^0(L) \Big|_{\vartheta_0=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}-ikL} \int_{\sqrt{kL}}^{\infty} e^{it^2} dt. \quad (7.8.16)$$

Вычисляя с помощью функции (7.8.14) интегральный поперечник рассеяния

$$S = -\frac{2}{k} \operatorname{Im} \{ F(\pi/2, \pi/2) \}, \quad (7.8.17)$$

получим

$$\begin{aligned} S = & 2L \left\{ 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(kL - \pi/4)}{(kL)^{3/2}} + \frac{2 \cos 2kL}{\pi (kL)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(3kL + \pi/4) - (6\pi/4) \cos(kL + \pi/4)}{(kL)^{5/2}} + O[(kL)^{-3}] \right\}. \end{aligned} \quad (7.8.18)$$

Сравнение этой формулы с известным выражением (31.5) из книги [121] показывает, что ее относительная погрешность имеет величину порядка $(kL)^{-5/2}$. Подробнее мы рассмотрим вопрос о погрешности выражения (7.8.10) ниже, в главе 10, и там убедимся, что оно является более точным, чем аналогичные выражения из работ [5] и [122].

§ 7.9. Заключение

- В данной главе построена приближенная теория излучения краевых волн высшего порядка, возникающих при многократной дифракции. Эта теория основана на ряде физических соображений и дает наглядное представление о формировании рассеянного поля. С ее помощью вычислены диаграммы рассеяния для тонких цилиндрических проводников — вибраторов и ленты. Полученные выражения пригодны для произвольных направлений наблюдения и облучения, удовлетворяют принципу взаимности и позволяют производить расчеты с удовлетворительной точностью при $kL \gg 1$.
- Интересно, что найденная здесь характеристика рассеяния для вибратора правильно описывает рассеивающие свойства не только длинных ($kL \gg 1$), но и коротких ($kl \ll 1$) проводников. Для этой характеристики проведены численные расчеты, результаты которых сопоставлены с данными других приближенных расчетов (Леонтович и Левин [117], Линдрот [119]) и с точным решением Вайнштейна [118].
- Данная глава завершает разработку приближенных методов, описанных в предыдущих разделах. На основе этих методов удалось построить характеристики рассеяния для ряда конкретных тел и выяснить качественную картину многократной дифракции.
- Напомним, что в главе 1 развита теория дифракции на объемных черных телах, являющаяся обобщением приближения Кирхгофа—Макдональда. Эта теория позволяет выяснить физическую природу таких явлений, как дифракция Френеля, эффект теневого излучения, и устанавливает дифракционный предел снижения полной рассеянной мощности при нанесении радиопоглощающих покрытий на поверхность отражающих тел.
- В главах 2–7 изложена физическая теория дифракции (ФТД), даны ее обобщения и перспективы дальнейшего развития. Здесь

приведены некоторые результаты ФТД из книги автора [13], которая давно стала библиографической редкостью. Дано обобщение ФТД для тел вращения, имеющих изломы на вогнутой поверхности, а также исследованы краевые волны с привлечением метода параболического уравнения. В главе 5 этот метод апробирован на задаче о дифракции на клине и затем использован в главе 6 для исследования неравномерной (в терминах ФТД) компоненты токов, возбуждаемых в вибраторах и на ленте. В главе 7 с помощью методики ФТД [13] находятся приближенные выражения для поля, излучаемого этими токами.

Однако все это не избавляет от необходимости решать более строго хотя бы некоторые частные задачи для того, чтобы, во-первых, установить пределы применимости построенной приближенной теории и, во-вторых, изучить более тонкие дифракционные эффекты. С этой целью в следующих главах развивается математическая теория дифракции, которая позволяет детально ознакомиться с тонкой структурой краевых волн.

Глава 8

Функциональные и интегральные уравнения в теории дифракции плоской волны на ленте (граничная задача Неймана)

§ 8.1. Об асимптотических решениях задачи о дифракции на ленте

В предыдущих главах 6 и 7 было проведено приближенное исследование многократной дифракции краевых волн. Теперь на примере ленты мы изучим этот процесс более детально. Существует несколько причин, которые побуждают заняться данной задачей. В настоящее время стало актуальным изучение тонкой структуры слабых сигналов, отраженных от различных объектов. Очевидно, что их физическая природа отчасти обусловлена краевыми волнами высоких порядков, возникающих при вторичной, третичной и при более высоких порядках дифракции. Далее, нужно сказать, что наряду с задачами дифракции на одиночных телах важное практическое значение приобрели задачи о дифракции на группе тел. Согласно теореме двойственности задача о ленте эквивалентна задаче о щели между двумя полуплоскостями и является частным случаем задачи о дифракции на двух телах. Очевидно, что дифракционное взаимодействие двух полуплоскостей также обусловлено краевыми волнами. Таким образом, задача о ленте является удобным примером для выяснения указанных вопросов.

Асимптотическому решению задачи о дифракции на ленте (щели) посвящено много работ. На основе интегральных уравнений в работах Миллара, Вестфаля, Люнебурга, Кибуртца, Штоккеля [123–127] для дифракционного поля найдено несколько первых членов асимптотического

разложения по параметру $1/(kl)$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $2l$ — ширина ленты (или щели). Применяя асимптотические формулы для функций Матве, Хансен [128] выделил из строгого решения граничной задачи в эллиптической системе координат выражения, соответствующие первичным краевым волнам Зоммерфельда.

Приближенное решение интегрального уравнения второго рода для тока на плоском экране со щелью дано Гринбергом [129, 130]. Асимптотическое решение «ключевого» уравнения для тока на ленте с точностью до членов порядка $(kl)^{-5/2}$ получено им же [131]. Дальнейшее исследование этого уравнения проведено Курицыным [132] и Поповым [133]. В работах Хаскинда, Вайнштейна [122] и Фиалковского [134] с помощью метода интегральных уравнений дано обоснование и уточнение приближенных выражений для рассеянного поля, выведенных ранее в [5, 13]. Полученные в [5, 13, 122, 134] формулы применимы при произвольных углах падения и наблюдения, но правильно описывают только первый член асимптотического разложения при $kl \gg 1$.

В работах Боровикова [135, 136] построены асимптотики для рассеянного поля в дальней зоне с точностью до величин порядка $(kl)^{-n}$ при $kl \rightarrow \infty$ и $n = 1, 2, 3, \dots$. Однако эти асимптотики являются *нерегулярными* относительно направления падающей волны. Одни из них пригодны только для направлений, далеких от скользящего, а другие — только для направлений, близких к скользящему. Здесь также не исследован ток на поверхности ленты.

Ниже мы получим асимптотические выражения для тока, возбуждаемого на ленте, и для рассеянного поля в дальней зоне с точностью до любой заданной степени $(kl)^{-n/2}$ при $2kl \gg n$, которые применимы при любых углах наблюдения и облучения. В главах 8–10 будет рассмотрена граничная задача Неймана, а в главе 11 задача Дирихле. Основные результаты исследования опубликованы ранее в [18, 22–24].

§ 8.2. Симметрия краевых волн

Пусть плоская электромагнитная волна

$$H_x = e^{-ik(z\alpha_0 + y\sqrt{1-\alpha_0^2}) - i\omega t}, \quad E_x = 0, \quad \alpha_0 = \cos \vartheta_0 \quad (8.2.1)$$

возбуждает идеально проводящую ленту, ориентация которой в свободном пространстве определяется соотношениями $y = 0, -l \leq z \leq l$ и $-\infty \leq x \leq \infty$ (рис. 8.2.1). Направление падающей волны характеризуется углом ϑ_0 по отношению к оси z ($0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$).

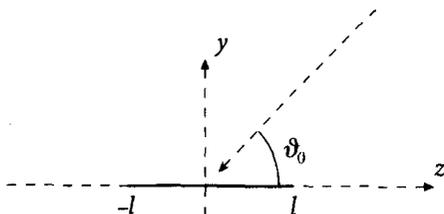


Рис. 8.2.1. Отрезок оси z ($-l \leq z \leq l$) изображает поперечное сечение ленты плоскостью yOz

Представим плотность поверхностного тока, возбуждаемого на ленте, в виде

$$j_z = \frac{c}{2\pi} J(z, \alpha_0), \tag{8.2.2}$$

$$J(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + J^{(-)}(z + l, \alpha_0) + J^{(+)}(l - z, \alpha_0), \tag{8.2.3}$$

где

$$j^{(0)}(z, \alpha_0) = -e^{-ikz\alpha_0} \tag{8.2.4}$$

соответствует току, возбуждаемому волной (8.2.1) на неограниченной идеально проводящей плоскости $y = 0, \infty \leq z \leq \infty$. Величины J^- и J^+ описывают краевые волны, бегущие соответственно слева направо и справа налево.

Пользуясь обозначениями, принятыми в (8.2.2)–(8.2.4), запишем в системе координат x', y, z' (рис. 8.2.2) ток, возбуждаемый на ленте плоской волной:

$$H_{x'} = -e^{-ik(z'\alpha'_0 + y\sqrt{1-\alpha_0'^2}) - i\omega t}, \quad E_{x'} = 0, \quad \alpha'_0 = \cos \vartheta'_0. \tag{8.2.5}$$

Очевидно, что

$$\frac{2\pi}{c} j_{z'} = -j^{(0)}(z', \alpha'_0) - J^{(-)}(z' + l, \alpha'_0) - J^{(+)}(l - z', \alpha'_0) \tag{8.2.6}$$

или

$$\frac{2\pi}{c} j_{z'} = -j^{(0)}(z, \alpha_0) - J^{(+)}(z + l, -\alpha_0) - J^{(-)}(l - z, -\alpha_0). \tag{8.2.7}$$

Замечая далее, что

$$j_{z'} = -j_z,$$

и сравнивая формулы (8.2.2) и (8.2.7), находим

$$J^{(+)}(z, \alpha_0) = J^{(-)}(z, -\alpha_0). \tag{8.2.8}$$

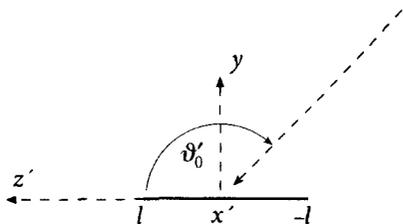


Рис. 8.2.2. Сечение ленты плоскостью $y0z'$ и координаты $x'y'z'$

Учитывая это свойство симметрии краевых волн, выражение (8.2.3) можно записать теперь в виде.

$$J(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}(l - z, -\alpha_0). \quad (8.2.9)$$

Аналогичным образом можно показать, что диаграмма направленности краевых волн обладает свойством симметрии

$$\Phi^{(+)}(\alpha, \alpha_0) = \Phi^{(-)}(-\alpha, -\alpha_0), \quad \alpha = \cos \vartheta. \quad (8.2.10)$$

Следовательно, рассеянное поле в дальней зоне (при $y \geq 0$) можно представить в виде

$$H_x = \Phi(\alpha, \alpha_0) \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (8.2.11)$$

где

$$\Phi(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0)e^{i\kappa\alpha} + \tilde{\Phi}(-\alpha, -\alpha_0)e^{-i\kappa\alpha}, \quad (8.2.12)$$

а величины κ, α и r определяются формулами

$$\kappa = kl, \quad (8.2.13)$$

$$z = r\alpha, \quad y = r\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \alpha = \cos \vartheta. \quad (8.2.14)$$

Выражение (8.2.13) определяет новый параметр κ , который не следует путать с волновым числом k . Указанные свойства симметрии существенно облегчают в дальнейшем формулировку и решение задачи.

§ 8.3. Формулировка и решение функциональных уравнений

Представим \tilde{J} в виде ряда последовательных краевых волн, возникающих на краях ленты:

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, \alpha_0). \quad (8.3.1)$$

Положим далее

$$j_n(z, \alpha_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t, k\alpha_0) e^{izt} dt \quad (8.3.2)$$

и обозначим через $\mathbf{E}_n(z, y, \alpha_0)$ электрический вектор поля, излучаемого током $j_n(z, \alpha_0)$. Касательная к ленте компонента вектора \mathbf{E}_n согласно (1.2.2) и (1.2.3) равна

$$E_{nz} = -\frac{1}{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_{nz}, \quad (8.3.3)$$

где \mathbf{A}_n — запаздывающий векторный потенциал и

$$A_{nz} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} j_n(\zeta, \alpha_0) H_0^{(1)} \left(k\sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2} \right) d\zeta. \quad (8.3.4)$$

Подставляя сюда выражение

$$H_0^{(1)} \left(k\sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[v y + w(z - \zeta)]}}{v} dw, \quad (8.3.5)$$

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \text{Im } v \geq 0, \quad y \geq 0, \quad v = k \text{ при } w = 0,$$

получим

$$A_{nz} = i \int_{-\infty}^{\infty} F_n(w, k\alpha_0) \frac{e^{i(vy + wz)}}{v} dw. \quad (8.3.6)$$

Откуда

$$E_{nz}(z, \alpha_0) = -\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - t^2} F_n(t, k\alpha_0) e^{izt} dt. \quad (8.3.7)$$

В результате условия

$$J(z, \alpha_0) = 0, \quad \text{при } |z| > l \quad (8.3.8)$$

и

$$E_{nz}(z, 0, \alpha_0) = 0, \quad \text{при } z > 0 \quad (8.3.9)$$

приводят нас к следующей рекуррентной системе функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t, k\alpha_0) e^{izt} dt &= -j^{(0)}(z - l, \alpha_0) && \text{при } z < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_n(t, k\alpha_0) + F_{n-1}(-t, -k\alpha_0) e^{-2ilt} \right] e^{izt} dt &= 0 && \text{при } z < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - t^2} F_n(t, k\alpha_0) e^{izt} dt &= 0 && \text{при } z > 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.10)$$

где контур интегрирования огибает точку ветвления $t = -k$ сверху, а точку $t = k$ снизу. Можно также считать, что контур интегрирования расположен на вещественной оси в комплексной плоскости t , а величина k имеет небольшую положительную мнимую часть.

Решение уравнений (8.3.10) ищется методом факторизации (метод Винера—Хопфа—Фока [96]). Из последнего уравнения (8.3.10) следует, что функция $\sqrt{k^2 - t^2} F_n(t, k\alpha_0)$ голоморфна в верхней полуплоскости комплексной переменной t ($\text{Im } t > 0$) и стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Из первого уравнения (8.3.10) следует, что функция $F_1(t, k\alpha_0)$ голоморфна в нижней полуплоскости ($\text{Im } t < 0$), стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$ и имеет полюс при $t = -k\alpha_0$. Поэтому $F_1(t, k\alpha_0)$ может быть представлена в виде

$$F_1(t, k\alpha_0) = \frac{A}{\sqrt{k-t}} \frac{1}{t + k\alpha_0}. \quad (8.3.11)$$

Постоянную A можно найти из первого уравнения в (8.3.10). В результате имеем

$$F_1(t, k\alpha_0) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{k+k\alpha_0}{k-t}} \frac{e^{ik\alpha_0}}{t+k\alpha_0}. \quad (8.3.12)$$

Из второго уравнения в (8.3.10) следует, что функция

$$F_n(t, k\alpha_0) + F_{n-1}(-t, -k\alpha_0) e^{-2ilt} \quad (8.3.13)$$

голоморфна в нижней полуплоскости ($\text{Im } t < 0$) и стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Кроме того, очевидно, что функция

$$\sqrt{k-t} F_n(t, k\alpha_0) + \sqrt{k-t} F_{n-1}(-t, -k\alpha_0) e^{-2ilt} \doteq h^-(t) \quad (8.3.14)$$

так же как и функция в (8.3.13) голоморфна в нижней полуплоскости и стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Можно считать, что функция

$$\sqrt{k-t} F_{n-1}(-t, -k\alpha_0) e^{-2ilt} = H(t) \quad (8.3.15)$$

голоморфна в полосе $-\epsilon \leq \text{Im } t \leq \epsilon$, $\infty \leq \text{Re } t \leq \infty$ и стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. Здесь $\epsilon \ll \text{Im } k \ll 1$ и далее мы положим $\epsilon = 0$. Поэтому эта функция может быть представлена в виде суммы [137, 138]

$$H(t) = H^+(t) + H^-(t), \quad (8.3.16)$$

где

$$H^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\epsilon-\infty}^{-i\epsilon+\infty} \frac{H(u)}{u-t} du, \quad H^-(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\epsilon-\infty}^{i\epsilon+\infty} \frac{H(u)}{u-t} du, \quad (8.3.17)$$

а функция $H^+(t)$ голоморфна в верхней полуплоскости ($\text{Im } t > -\epsilon$) и $H^-(t)$ голоморфна в нижней полуплоскости ($\text{Im } t < \epsilon$).

Таким образом, выражение (8.3.14) может быть переписано в виде

$$\sqrt{k-t} F_n(t, k\alpha_0) + H^+(t) + H^-(t) = h^-(t). \quad (8.3.18)$$

Так как функция $\sqrt{k-t} F_n(t, k\alpha_0)$ голоморфна в верхней полуплоскости, то из выражения (8.3.18) находим, что $h^-(t) = H^-(t)$ и

$$F_n(t, k\alpha_0) = -\frac{H^+(t)}{\sqrt{k-t}}. \quad (8.3.19)$$

Подставляя (8.3.15) в (8.3.17) для $H^+(t)$ и полагая $\epsilon = 0$, окончательно получим

$$F_n(t, k\alpha_0) = -\frac{1}{2\pi i \sqrt{k-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k-u}}{u-t} F_{n-1}(-u, -k\alpha_0) e^{-2ilt} du. \quad (8.3.20)$$

$n=2,3,4,\dots$

Поэтому

$$F_1(k\alpha, k\alpha_0) = -\frac{1}{2\pi i k} \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha}} \frac{e^{i k \alpha_0}}{\alpha + \widehat{\alpha_0}}, \quad (8.3.21)$$

$$F_2(k\alpha, k\alpha_0) = -\frac{e^{-i k \alpha_0}}{k(2\pi i)^2} \sqrt{\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t) dt}{(t+\widehat{\alpha})(t-\widehat{\alpha_0})}, \quad (8.3.22)$$

$$F_n(t, k\alpha_0) = -\frac{e^{-i\kappa\beta_n}}{k(2\pi i)^n} \sqrt{\frac{1-\beta_n}{1-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_1)dt_1}{t_1 - \widehat{\beta}_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_2)dt_2}{t_2 + \widehat{t}_1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_3)dt_3}{t_3 + \widehat{t}_2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_{n-2})dt_{n-2}}{t_{n-2} + \widehat{t}_{n-3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_{n-1})dt_{n-1}}{(t_{n-1} + \widehat{t}_{n-2})(t_{n-1} + \widehat{\alpha})}, \quad (8.3.23)$$

где

$$h(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} e^{iqt}, \quad (8.3.24)$$

$$\beta_n = (-1)^n \alpha_0, \quad q = 2\kappa = 2kl, \quad (8.3.25)$$

а символ $\widehat{}$ показывает, что контур интегрирования обходит соответствующий полюс сверху. При вычислении квадратного корня $(1 \pm t)^{1/2}$ выбирается та ветвь, которая равна 1 для $t = 0$. В интегралах из (8.3.22) и (8.3.23) контур интегрирования огибает точку ветвления $t = -1$ сверху и точку ветвления $t = 1$ снизу.

§ 8.4. Характеристика рассеяния и уравнение краевых волн

Согласно (8.3.6) токи $j_n(z+l, \alpha_0)$ и $j_n(l-z, -\alpha_0)$ возбуждают соответственно поля

$$\left. \begin{aligned} A_{nz} &= i \int_{-\infty}^{\infty} F(w, k\alpha_0) e^{iw(z+l)} \frac{e^{ivy}}{v} dw, \\ A_{nz} &= i \int_{-\infty}^{\infty} F(-w, -k\alpha_0) e^{iw(z-l)} \frac{e^{ivy}}{v} dw. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.1)$$

Считая далее, что

$$H_x = -\frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad (8.4.2)$$

находим при $y \geq 0$ следующее выражение для рассеянного поля:

$$H_x = e^{ik(-z\alpha_0 + y\sqrt{1-\alpha_0^2})} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(w, k\alpha_0) e^{iwz} + F_n(-w, -k\alpha_0) e^{-iwz} \right] e^{i(wz+vy)} dw. \quad (8.4.3)$$

Положим здесь

$$w = k \cos \tau, \quad v = k \sin \tau, \quad z = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

тогда

$$\begin{aligned} H_x = & \epsilon e^{ik(-z\alpha_0 + y\sqrt{1-\alpha_0^2})} + \\ & + k \int_{\vartheta+0-i\infty}^{\vartheta-0+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(k \cos \tau, k\alpha_0) e^{ikl \cos \tau} + \right. \\ & \left. + F_n(-k \cos \tau, -k\alpha_0) e^{-ikl \cos \tau} \right] e^{ikr \cos(\tau-\vartheta)} \sin \tau d\tau, \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

где

$$\epsilon = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{в полосе} \\ 0 \quad \text{вне полосы} \end{array} \right\} - l - y \operatorname{ctg} \vartheta_0 \leq z \leq l - y \operatorname{ctg} \vartheta_0, \quad y \geq 0. \quad (8.4.5)$$

Область, где $\epsilon = 1$, изображена на рис. 8.4.1 и является областью существования решения, полученного согласно геометрической оптике.

С помощью метода перевала [78] из формулы (8.4.4) находим поле в дальней зоне

$$\begin{aligned} H_x = & 2\pi ik \sqrt{1-\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(k\alpha, k\alpha_0) e^{ik\alpha} + \right. \\ & \left. + F_n(-k\alpha, -k\alpha_0) e^{-ik\alpha} \right] \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

где $\alpha = \cos \vartheta$. Таким образом, функции F_n определяют диаграмму направленности краевой волны n -го порядка. Введем функции

$$\Phi_n(\alpha, \alpha_0) = 2\pi ik \sqrt{1-\alpha^2} F_n(k\alpha, k\alpha_0) \quad (8.4.7)$$

и

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\alpha, \alpha_0), \quad (8.4.8)$$

с помощью которых рассеянное поле принимает форму (8.2.11) и (8.2.12). Согласно (8.3.20) функции Φ_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

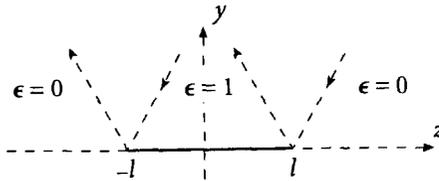


Рис. 8.4.1. Область пространства ($\epsilon = 1$), в которой справедливо решение, построенное методом геометрической оптики

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\alpha, \alpha_0) &= \frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{n-1}(u, -\alpha_0)}{\sqrt{1-u}(u+\widehat{\alpha})} e^{iqu} du, \\ \Phi_n(-\alpha, -\alpha_0) &= \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{n-1}(u, \alpha_0)}{\sqrt{1-u}(u-\widehat{\alpha})} e^{iqu} du. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.9)$$

Очевидно, что ряд (8.4.8) можно рассматривать как ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода

$$\check{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = \Phi_1(\alpha, \alpha_0) + \frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{\Phi}(u, -\alpha_0)}{\sqrt{1-u}(u+\widehat{\alpha})} e^{iqu} du, \quad (8.4.10)$$

где

$$\Phi_1(\alpha, \alpha_0) = -\frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha+\widehat{\alpha}_0} e^{i\kappa\alpha_0}. \quad (8.4.11)$$

Это уравнение [для функции $\check{\Phi}(-\alpha, \alpha_0)$] впервые было получено другим путем в [124] и использовалось затем в работах [122, 125, 134] для асимптотического решения задачи. Однако сущность этого уравнения оставалась не вполне ясной. Наш вывод вскрывает его физический смысл: n -ый член ряда Неймана для уравнения (8.4.10) есть диаграмма направленности краевой волны n -го порядка. Поэтому уравнение (8.4.10) целесообразно называть *уравнением краевых волн*.

§ 8.5. Ряд последовательных приближений для тока и их свойства

Формулы (8.3.1), (8.3.2), (8.3.21), (8.3.22) и (8.3.23) позволяют представить ток в виде ряда

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = -e^{ikz} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \chi_n(z, -\beta_n) e^{iq(n-1) - i\kappa\beta_n}, \quad (8.5.1)$$

где

$$\beta_n = (-1)^n \alpha_0, \quad \chi_1(z, \alpha) e^{ikz} = -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt}}{\sqrt{1-t} t + \widehat{\alpha}}, \quad (8.5.2)$$

$$\chi_2(z, \alpha) e^{iq+ikz} = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \widehat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt_2}}{\sqrt{1-t_2} (t_2 + \widehat{t_1})}, \quad (8.5.3)$$

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= (-1)^n \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(2\pi i)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \widehat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_2) dt_2}{t_2 + \widehat{t_1}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_3) dt_3}{t_3 + \widehat{t_2}} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_{n-1}) dt_{n-1}}{t_{n-1} + \widehat{t_{n-2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt_n}}{\sqrt{1-t_n} (t_n + \widehat{t_{n-1}})}. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Преобразуем функции χ_n к виду

$$\chi_1(z, \alpha) = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikz(t-1)}}{\sqrt{1-t} t + \alpha} \quad \text{при } z > 0, \quad (8.5.5)$$

$$\chi_2(z, \alpha) e^{iq+ikz} = -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2(i\pi)^2} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt_2}}{\sqrt{1-t_2} (t_2 + \widehat{t_1})}, \quad (8.5.6)$$

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2(i\pi)^n} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_2) dt_2}{t_2 + t_1} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_3) dt_3}{t_3 + t_2} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_{n-1}) dt_{n-1}}{t_{n-1} + t_{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt_n}}{\sqrt{1-t_n} (t_n + \widehat{t_{n-1}})}, \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

где контур интегрирования в пределах от 1 до $1 + i\infty$ расположен на левом берегу разреза $1 \rightarrow 1 + i\infty$, где $(1-t)^{1/2} = |(1-t)^{1/2}| \times \exp(-i\pi/4)$ и $(t-1)^{1/2} = |(t-1)^{1/2}| \exp(-i3\pi/4)$.

Из формул (8.5.2), (8.5.6) и (8.5.7) легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(z, \alpha) &= e^{-ikz(1+\alpha)}, \\ \chi_n(z, \alpha) &= \chi_{n-1}(2l-z, \alpha)e^{-2ikz} \end{aligned} \right\} \text{ при } z \leq 0. \quad (8.5.8)$$

Откуда, в частности, следует

$$\chi_1(0, \alpha) = 1, \quad \chi_n(0, \alpha) = \chi_{n-1}(2l, \alpha). \quad (8.5.9)$$

При $z > 0$ функции χ_n удобно представить так:

$$\chi_1(z, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} e^{-ikz(1+\alpha)} \int_{\sqrt{kz(1+\alpha)}}^{\infty} e^{it^2} dt, \quad (8.5.10)$$

$$\chi_2(z, \alpha) e^{iq+ikz} = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(i\pi)^2} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikzt_2}}{\sqrt{1-t_2} (t_2 + t_1)} dt_2, \quad (8.5.11)$$

$$\chi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(i\pi)^n} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_2) dt_2}{t_2 + t_1} \times$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_3) dt_3}{t_3 + t_2} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_{n-1}) dt_{n-1}}{t_{n-1} + t_{n-2}} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikzt_n}}{\sqrt{1-t_n} (t_n + t_{n-1})} dt_n. \quad (8.5.12)$$

Преобразование (8.5.5) в (8.5.10) приведено в § 8.8.

Покажем, что функции χ_n обладают также свойством

$$\chi_1(z, -1) = 1, \quad \chi_n(z, -1) = \chi_{n-1}(z, 1), \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.5.13)$$

Равенство $\chi_1(z, -1) = 1$ очевидно, поэтому займемся сразу функцией

χ_n , где $n = 2, 3, \dots$. Запишем χ_n при $z \geq 0$ в виде

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2(i\pi)^n} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikzt_n} dt_n}{\sqrt{1-t_n}} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_{n-1}) dt_{n-1}}{t_{n-1} + t_n} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_{n-2}) dt_{n-2}}{t_{n-2} + t_{n-1}} \dots \\ &\dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_2) dt_2}{t_2 + t_3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_1)}{(t_1 + \widehat{\alpha})(t_1 + \widehat{t}_2)} dt_1 \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

и рассмотрим предел

$$\begin{aligned} p &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t_1)}{(t_1 + \widehat{\alpha})(t_1 + \widehat{t}_2)} dt_1 = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \sqrt{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(1+t_1)/(1-t_1)} e^{iqt_1}}{(t_1 + \widehat{\alpha})(t_1 + \widehat{t}_2)} dt_1. \end{aligned} \quad (8.5.15)$$

Преобразуем интеграл (8.5.15) в интеграл по левому берегу разреза $1 \rightarrow 1 + \infty$ и разобьем его на части

$$p = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \left(\int_1^{1+i\delta} + \int_{1+i\delta}^{1+i\infty} \right),$$

где δ — как угодно малое положительное число. Очевидно, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \int_{1+i\delta}^{1+i\infty} \frac{h(t_1)}{(t_1 + \alpha)(t_1 + t_2)} dt_1 = 0,$$

поэтому величину p можно представить в виде

$$p = -\frac{\sqrt{2}e^{iq}}{2\pi i(1+t_2)} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \sqrt{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{\sqrt{1-t_1}(t_1 + \widehat{\alpha})}. \quad (8.5.16)$$

Применяя к (8.5.16) теорему Коши, получаем

$$p = \frac{\sqrt{2}e^{iq}}{1+t_2}. \quad (8.5.17)$$

В результате получаем

$$\chi_n(z, -1) = \chi_{n-1}(z, 1), \quad n = 2, 3, \dots,$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь установленными свойствами функций χ_n , можно убедиться в том, что полный ток (8.2.9) удовлетворяет условиям

$$J(z, \alpha_0) = 0 \quad \text{при} \quad |z| > l, \quad (8.5.18)$$

$$J(\pm l, \alpha_0) = 0, \quad (8.5.19)$$

$$J(z, \pm 1) = 0. \quad (8.5.20)$$

Соотношения (8.5.18) и (8.5.19) показывают, что ток равен нулю за пределами ленты и на ее краях. Формула (8.5.20) является следствием того факта, что рассеянное поле не возникает при падении плоской волны (8.2.1) под скользящими углами.

§ 8.6. Сходимость бесконечных рядов для тока

Исследуем сходимость ряда (8.5.1). С этой целью воспользуемся представлением (8.5.12) для функций χ_n . Перейдем в этой формуле от контура интегрирования по левому берегу разреза $1 + i\infty$ к контуру по правому берегу разреза и сдвинем затем контур интегрирования на вещественную ось. В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= \\ &= \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi^n} \int_1^\infty \sqrt{\frac{1+t_1}{t_1-1}} \frac{e^{iqt_1} dt_1}{(t_1+\alpha)} \int_1^\infty \sqrt{\frac{1+t_2}{t_2-1}} \frac{e^{iqt_2} dt_2}{(t_2+t_1)} \dots \\ &\dots \int_1^\infty \sqrt{\frac{1+t_{n-1}}{t_{n-1}-1}} \frac{e^{iqt_{n-1}} dt_{n-1}}{(t_{n-1}+t_{n-2})} \int_1^\infty \frac{e^{ikzt_n}}{\sqrt{t_n-1} (t_n+t_{n-1})} dt_n. \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

Положим далее $t_m = 1 + s_m$, тогда

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) &= \\ &= \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi^n} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2+s_1}{s_1}} \frac{e^{iqs_1} ds_1}{(s_1+\alpha+1)} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2+s_2}{s_2}} \frac{e^{iqs_2} ds_2}{(s_2+s_1+2)} \cdots \\ &\cdots \int_0^\infty \sqrt{\frac{2+s_{n-1}}{s_{n-1}}} \frac{e^{iqs_{n-1}} ds_{n-1}}{(s_{n-1}+s_{n-2}+2)} \int_0^\infty \frac{e^{ikzs_n}}{\sqrt{s_n} (s_n+s_{n-1}+2)} ds_n. \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

Воспользуемся теперь известным приемом [139], положив

$$\left. \begin{aligned} s_m &= \chi_m + p_m \frac{\pi}{q}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ s_n &= \chi_n + p_n \frac{\pi}{kz}, \quad p_{m,n} = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.6.3)$$

Тогда выражение (8.6.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) &= \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi^n} \int_0^{\pi/q} e^{iqx_1} dx_1 \int_0^{\pi/q} e^{iqx_2} dx_2 \cdots \int_0^{\pi/q} e^{iqx_{n-1}} dx_{n-1} \times \\ &\times \sum_{p_1=0}^\infty \sum_{p_2=0}^\infty \cdots \sum_{p_{n-1}=0}^\infty (-1)^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} \times \\ &\times y_1(p_1, \alpha) y_2(p_2, p_1) \cdots y_{n-1}(p_{n-1}, p_{n-2}) \times \\ &\times \int_0^{\pi/(kz)} e^{ikzx_n} \sum_{p_n=0}^\infty (-1)^{p_n} y_n(p_n, p_{n-1}) dx_n, \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 y_1(p_1, \alpha) &= \left(\frac{2 + x_1 + p_1 \pi/q}{x_1 + p_1 \pi/q} \right)^{1/2} \frac{1}{x_1 + p_1 \pi/q + \alpha + 1}, \\
 y_i(p_i, p_{i-1}) &= \\
 &= \left(\frac{2 + x_i + p_i \pi/q}{x_i + p_i \pi/q} \right)^{1/2} \frac{1}{x_i + x_{i-1} + 2 + (p_i + p_{i-1}) \pi/q}, \\
 y_n(p_n, p_{n-1}) &= \\
 &= \left(x_n + p_n \frac{\pi}{kz} \right)^{-1/2} \frac{1}{x_n + x_{n-1} + 2 + p_{n-1} \pi/q + p_n \pi/(kz)}.
 \end{aligned} \right\} (8.6.5)$$

Каждый ряд, входящий в (8.6.4), является знакопеременным рядом, члены которого монотонно убывают с увеличением порядкового номера. Поэтому можно записать

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{p_n=0}^{\infty} (-1)^{p_n} y_n(p_n, p_{n-1}) &< y_n(0, p_{n-1}), \\
 \sum_{p_{n-1}=0}^{\infty} (-1)^{p_{n-1}} y_{n-1}(p_{n-1}, p_{n-2}) \sum_{p_n=0}^{\infty} (-1)^{p_n} y_n(p_n, p_{n-1}) &< \\
 &< y_{n-1}(0, p_{n-2}) y_n(0, 0)
 \end{aligned} \right\} (8.6.6)$$

и

$$\sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \dots \sum_{p_n=0}^{\infty} (-1)^{p_1+p_2+\dots+p_n} y_1(p_1, \alpha) y_2(p_2, p_1) \dots \\
 \dots y_n(p_n, p_{n-1}) < y_1(0, \alpha) y_2(0, 0) \dots y_n(0, 0). \quad (8.6.7)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
 |\chi_n(z, \alpha)| &\leq \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi^n} \int_0^{\pi/q} dx_1 \int_0^{\pi/q} dx_2 \dots \int_0^{\pi/q} dx_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{kz}} dx_n \times \\
 &\times \left| \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} \dots \sum_{p_n=0}^{\infty} (-1)^{p_1+p_2+\dots+p_n} \times \right. \\
 &\left. \times y_1(p_1, \alpha) y_2(p_2, p_1) \dots y_{n-1}(p_{n-1}, p_{n-2}) y_n(p_n, p_{n-1}) \right|, \quad (8.6.8)
 \end{aligned}$$

и учитывая неравенство (8.6.7), получим

$$\begin{aligned}
 |\chi_n(z, \alpha)| &< \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi^n} \int_0^{\pi/q} dx_1 \int_0^{\pi/q} dx_2 \dots \\
 &\dots \int_0^{\pi/q} dx_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{kz}} dx_n y_1(0, \alpha) y_2(0, 0) \dots y_n(0, 0). \quad (8.6.9)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{kz}} y_n(0, 0) dx_n &= \int_0^{\frac{\pi}{kz}} \frac{dx_n}{\sqrt{x_n(x_n + x_{n-1} + 2)}} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2 + x_{n-1}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{kz(2 + x_{n-1})}} < \frac{2}{\sqrt{2 + x_{n-1}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2kz}}, \\
 \int_0^{\frac{\pi}{q}} \frac{dx_i}{\sqrt{x_i(x_i + x_{i-1} + 2)}} &< \frac{2}{\sqrt{x_{i-1} + 2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2q}}, \\
 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{q}} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(x_1 + \alpha + 1)}} &< \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{q(\alpha + 1)}} < 1.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\chi_n(z, \alpha)| < \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2kz}} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2q}} \right)^{n-2}. \quad (8.6.10)$$

Таким образом, ряд (8.5.1) имеет мажорирующую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2q}} < 1 \quad (8.6.11)$$

и, следовательно, сходится абсолютно и равномерно при любых значениях $q = 2kl > 0$.

§ 8.7. Интегральное уравнение для тока и решение Шварцшильда

8.7.1. Интегральное уравнение, вытекающее из решения функциональных уравнений (8.3.10)

Применим преобразование Фурье к (8.3.20) и воспользуемся выражением

$$F_{n-1}(-u, -k\alpha_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_{n-1}(s, -\alpha_0) e^{isu} ds. \quad (8.7.1)$$

В результате получим рекуррентную формулу для тока

$$j_n(z, \alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s - 2l, z) j_{n-1}(s, -\alpha_0) ds, \quad (8.7.2)$$

где

$$K(x, z) = \frac{1}{\pi i 4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{\sqrt{k-t}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k-u}}{u-t} e^{ixu} du. \quad (8.7.3)$$

Заметим, что

$$K(x, z) = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad (8.7.4)$$

и перепишем (8.7.2) в виде

$$j_n(z, \alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(x, z) j_{n-1}(2l + x, -\alpha_0) dx. \quad (8.7.5)$$

Очевидно, что ряд

$$j(z, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, \alpha_0) \quad (8.7.6)$$

является рядом Неймана для интегрального уравнения второго рода, т. е.

$$j(z, \alpha_0) = j_1(z, \alpha_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(x, z) j(2l + x, -\alpha_0) dx. \quad (8.7.7)$$

8.7.2. Интегральное уравнение, которое является следствием решения Шварцшильда

В работе Шварцшильда [139] рассмотрена дифракция плоской волны

$$E_x = -e^{iky - i\omega t}, \quad H_x = 0 \quad (8.7.8)$$

на щели $-l \leq z \leq l$ в плоском идеально проводящем экране $y = 0$. Полагая компоненту рассеянного поля $E_x = u$ в щели при $y = 0^-$, получаем выражение

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [G(r'_0, \pi, r) + G(r_0, \pi, r)] \bar{u}(r) dr, \quad (8.7.9)$$

где

$$G(r_0, \pi, r) = 2\sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r+r_0}, \quad (8.7.10)$$

$$r'_0 = z + l, \quad r_0 = l - z, \quad (8.7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(r), \quad \bar{u}_1(r) = 1, \\ \bar{u}_{n+1}(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{r+2l}{r'}} \frac{e^{ik(r+r'+2l)}}{r+r'+2l} \bar{u}_n(r') dr'. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.12)$$

Перепишем выражение (8.7.9) в виде суммы краевых волн

$$u(r) = \frac{1}{\pi} e^{ik(z+l)} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{l+z}{r}} \frac{e^{ikr}}{l+z+r} \bar{u}(r) dr + \\ + \frac{1}{\pi} e^{ik(l-z)} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{l-z}{r}} \frac{e^{ikr}}{l-z+r} \bar{u}(r) dr. \quad (8.7.13)$$

Применяя к этому результату теорему двойственности, находим, что плоская волна (8.2.1) в случае нормального падения ($a_0 = 0$) возбуждает на ленте рассеянное поле

$$H_x = u \quad \text{при} \quad y = 0^-. \quad (8.7.14)$$

Так как

$$H_x \Big|_{y=0^+} = -H_x \Big|_{y=0^-}, \quad (8.7.15)$$

то соответствующий этому полю ток равен

$$j_z = \frac{c}{2\pi} H_x(y = 0^-) = \frac{c}{2\pi} u. \quad (3.6.16)$$

Следовательно, величину

$$\frac{2\pi}{c} j_z = u \quad (8.7.17)$$

можно представить в виде

$$u = j(z+l, 0) + j(l-z, 0), \quad (8.7.18)$$

где

$$j(z, 0) = \frac{1}{\pi} e^{ikz} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ikx}}{x+z} \bar{u}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, 0). \quad (8.7.19)$$

Здесь

$$j_n(z, 0) = \frac{1}{\pi} e^{ikz} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ikx}}{x+z} \bar{u}_n(x) dx, \quad (8.7.20)$$

или

$$j_n(z, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{K}(x, z) j_{n-1}(2l+x, 0) dx, \quad (8.7.21)$$

где

$$\hat{K}(x, z) = \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ik(z+x)}}{x+z}. \quad (8.7.22)$$

Это означает, что ряд (8.7.19) есть ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода

$$j(z, 0) = j_1(z, 0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{K}(x, z) j(2l+x, 0) dx, \quad (8.7.23)$$

где

$$j_1(z, 0) = \chi_1(z, 0) e^{ikz} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ik(z+x)}}{x+z} dx. \quad (8.7.24)$$

Покажем, что уравнения (8.7.7) к (8.7.23) эквивалентны.

8.7.3. Эквивалентность ядер $K(x, z)$ и $\hat{K}(x, z)$

При $x \geq 0$ и $z \geq 0$ ядро (8.7.3) можно записать в виде

$$K(x, z) = \frac{1}{i\pi} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{izt} dt}{\sqrt{k-t}} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{ixu} \sqrt{k-ud} u}{u-t}, \quad (8.7.25)$$

где интегрирование осуществляется по левому берегу разреза $k \rightarrow k + i\infty$. Первый интеграл в (8.7.3) берется в смысле главного значения, а вклад от полюса, находящегося на разрезе, равен нулю. Полагая здесь

$$t = k + i \frac{\tau_1}{z}, \quad u = k + i \frac{\tau_2}{x},$$

получим

$$K(x, z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{x}} e^{ik(z+x)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\tau_1+\tau_2)} \sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\tau_1}(z\tau_2 - x\tau_1)} d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.7.26)$$

В переменных $t_1 = \tau_1$ и $t_2 = \tau_1 + \tau_2$ это выражение имеет вид

$$K(x, z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{x}} e^{ik(z+x)} \int_0^{\infty} e^{-t_2} dt_2 \int_0^{t_2} \sqrt{\frac{t_2-t_1}{t_1}} \frac{dt_1}{zt_2 - (z+x)t_1}. \quad (8.7.27)$$

Полагая далее $t_1 = \eta t_2$, находим

$$K(x, z) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ik(z+x)}}{z+x} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta-\beta}, \quad (8.7.28)$$

где

$$\beta = \frac{z}{z+x}. \quad (8.7.29)$$

В формуле (8.7.28) функция $[(1-\eta)/\eta]^{1/2}$ действительна и принимает положительные значения. Для последующих вычислений полезно аналитически продолжить эту функцию на всю комплексную плоскость (η). Заметим, что функции $\eta^{1/2}$ и $(1-\eta)^{1/2}$ двузначны. Для того чтобы представить их однозначным образом, введем два разреза на действительной оси ($\text{Im } \eta = 0$): разрез $-\infty \leq \text{Re } \eta \leq 0$ для $\eta^{1/2}$ и разрез $-\infty \leq \text{Re } \eta \leq 1$ для $(1-\eta)^{1/2}$. Для функции $\eta^{1/2}$ мы выбираем ветвь с положительными действительными значениями в интервале $0 \leq \eta \leq \infty$, с положительными мнимыми значениями на верхнем берегу разреза $-\infty \leq \eta \leq 0$ и отрицательными мнимыми значениями на нижнем берегу.

Для функции $(1-\eta)^{1/2}$ мы выбираем ветвь с положительными мнимыми значениями в интервале $1 \leq \eta \leq \infty$, с положительными действительными значениями на нижнем берегу разреза $-\infty \leq \eta \leq 1$ и отрицательными действительными значениями на верхнем берегу. Каждая из функций $\eta^{1/2}$ и $(1-\eta)^{1/2}$ разрывна на линии $-\infty \leq \eta \leq 0$, но их комбинация $[(1-\eta)/\eta]^{1/2}$ непрерывна. Таким образом мы построили функцию $[(1-\eta)/\eta]^{1/2}$, которая однозначна и аналитична в комплексной плоскости (η) с разрезом вдоль отрезка $0 \leq \eta \leq 1$. Эта функция принимает положительные действительные значения на нижнем берегу этого разреза и отрицательные действительные на верхнем берегу. Используя это свойство функции $[(1-\eta)/\eta]^{1/2}$, мы можем представить интеграл (8.7.28) в виде интеграла вдоль контура C (рис. 8.7.1), охватывающего разрез $0 \rightarrow 1$ в направлении против часовой стрелки:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta-\beta} = \frac{1}{2} \int_C \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta-\beta}. \quad (8.7.30)$$

Заметим также, что вычет этого интеграла в полюсе $\eta = \beta$ равен нулю, поскольку этот полюс расположен на разрезе. Деформируя затем контур C на бесконечность, получим

$$\frac{1}{2} \int_C \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta-\beta} = i^2 \pi = -\pi \quad (8.7.31)$$

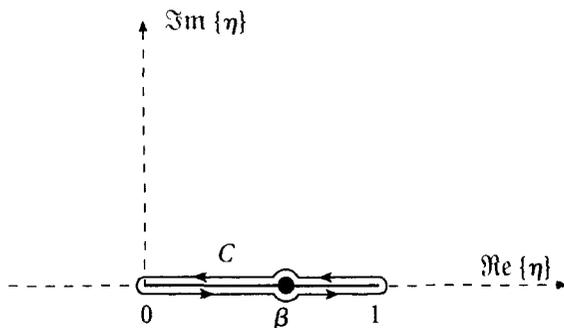


Рис. 8.7.1. Контур интегрирования в формуле (8.7.30)

и в результате

$$K(x, z) = \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{e^{ik(z+x)}}{z+x} = \hat{K}(x, z), \quad (8.7.32)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, решение Шварцшильда [139], по существу, эквивалентно нашему (8.7.6) и отличается только формой записи. Наше решение имеет более четкий физический смысл и более удобно для асимптотических исследований.

В связи с изложенными результатами следует сказать еще несколько слов о судьбе работы Шварцшильда. Эта классическая работа была, по-видимому, первым в теории дифракции асимптотическим исследованием в коротковолновой области и опередила научные запросы своего времени почти на столетия. Когда в 50-е годы 20-го века такие вопросы стали актуальными, об этой работе уже стали забывать (даже на ее родине, в Германии). Так, например, о ней нет упоминания в статьях Браунбека [140, 141], непосредственно примыкающих к той же задаче. В последующие 15–20 лет она вновь приобрела известность, однако, несмотря на большое количество работ, посвященных задаче о ленте (щели), до сих пор не была установлена их связь с исследованием Шварцшильда, которое рассматривалось лишь как некий феномен. Выше мы показали, что решение Шварцшильда, по существу, эквивалентно всем тем решениям, которые основаны на интегральном уравнении *краевых волн*. Хотя Шварцшильд построил свое решение только для случая нормального падения плоской волны на ленту, совершенно ясно, что

предложенный им метод применим в общем случае, для произвольного направления падающей волны.

§ 8.8. Преобразование формулы (8.5.2) в (8.5.10)

В соответствии с формулой (8.5.2)

$$\chi_1(z, \alpha) e^{ikz} = -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikzt}}{\sqrt{1-t} t + \alpha} dt. \quad (8.8.1)$$

Здесь $\alpha = \cos \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $-1 \leq \alpha \leq 1$, $\sqrt{1+\alpha} = \sqrt{2} \cos(\vartheta/2) \geq 0$. Контур интегрирования показан на рис. 8.8.1. Линия $1 \rightarrow 1 + i\infty$ представляет собой линию разреза. Квадратный корень определен следующим образом:

$$\sqrt{1-t} = i\sqrt{t-1} = i|\sqrt{t-1}| e^{i\varphi/2}.$$

В точке A $\varphi = 0$, $\sqrt{1-t} = i|\sqrt{t-1}|$.

В точке B $\varphi = -\pi$, $\sqrt{1-t} = i|\sqrt{t-1}| \exp(-i\pi/2) = |\sqrt{t-1}| \geq 0$.

В точке C $\varphi = -3\pi/2$, $\sqrt{1-t} = i|\sqrt{t-1}| \exp(-i3\pi/4) = |\sqrt{t-1}| \exp(-i\pi/4)$.

В точке D $\varphi = \pi/2$, $\sqrt{1-t} = i|\sqrt{t-1}| \exp(i\pi/4) = |\sqrt{t-1}| \exp(i3\pi/4)$.

Заметим, что

$\sqrt{1-t} \Big|_C = -\sqrt{1-t} \Big|_D$ и преобразуем контур интегрирования вдоль разреза так, как показано на рис. 8.8.2. Теперь для $z \geq 0$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz(t-1)}}{\sqrt{1-t} t + \alpha} dt = -\frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi i} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikz(t-1)}}{i\sqrt{t-1} t + \alpha} dt,$$

где последний интеграл берется по левой стороне ($\varphi = -3\pi/2$) разреза. В результате имеем

$$\chi_1(z, \alpha) = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi i} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{i\zeta(t-1)}}{i\sqrt{t-1} t + \alpha} dt, \quad \zeta = kz, \quad (8.8.2)$$

причем $\sqrt{t-1} = |\sqrt{t-1}| \exp(-i\frac{3\pi}{4})$. Введем теперь новую переменную x ,

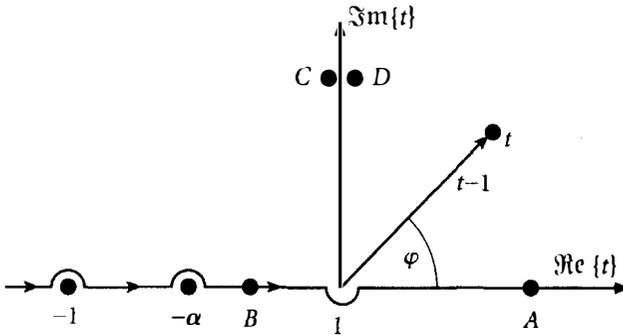


Рис. 8.8.1. Контур интегрирования в формуле (8.8.1)

$x^2 = t - 1$, $x = |\sqrt{t-1}|e^{-i3\pi/4}$,
и получим

$$\chi_1(z, \alpha) = -2 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\zeta x^2} \frac{dx}{x^2 + \alpha + 1}. \quad (8.8.3)$$

После подстановки $s = -x$ имеем

$$\chi_1(z, \alpha) = 2 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\zeta s^2} \frac{ds}{s^2 + \alpha + 1}. \quad (8.8.4)$$

Далее, полагая $\beta^2 = \alpha + 1$, получаем

$$\chi_1(z, \alpha) = 2 \frac{\beta}{\pi} e^{-i\zeta\beta^2} \int_0^{\infty} e^{i\zeta(s^2+\beta^2)} \frac{ds}{s^2 + \beta^2}. \quad (8.8.5)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{i\zeta(s^2+\beta^2)} \frac{ds}{s^2 + \beta^2}. \quad (8.8.6)$$

Его производная равна

$$\frac{dI(\zeta)}{d\zeta} = i \int_0^{\infty} e^{i\zeta(s^2+\beta^2)} ds.$$

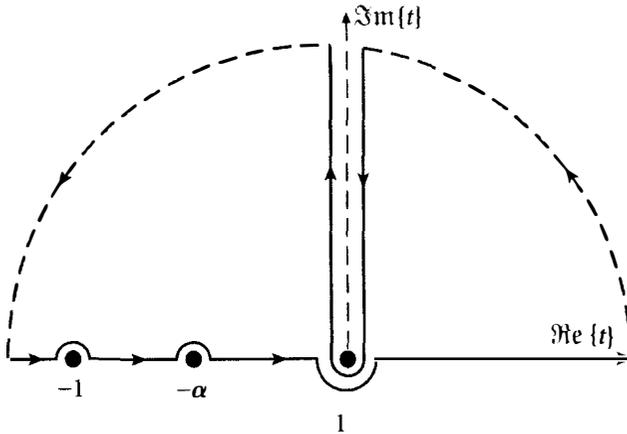


Рис. 8.8.2. Контур интегрирования для преобразования формулы (8.5.2) в (8.5.10)

Поскольку $I(\infty) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
 I(\zeta) &= i \int_{\infty}^{\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} e^{i\zeta(s^2 + \beta^2)} ds = i \int_{\infty}^{\zeta} e^{i\zeta\beta^2} d\zeta \int_0^{\infty} e^{i\zeta s^2} ds = \\
 &= i \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \int_{\infty}^{\zeta} e^{i\zeta\beta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}. \quad (8.8.7)
 \end{aligned}$$

Подставляя $x^2 = \zeta\beta^2$, представим (8.8.7) в виде

$$I(\zeta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-i\pi/4} \int_{\sqrt{\zeta}\beta}^{\infty} e^{ix^2} dx \quad (8.8.8)$$

и

$$\chi_1(z, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} e^{-ikz(1+\alpha)} \int_{\sqrt{kz(1+\alpha)}}^{\infty} e^{ix^2} dx, \quad (8.8.9)$$

что тождественно (8.5.10).

Глава 9

Асимптотическое представление для плотности тока на ленте

В предыдущей главе было показано, что решение задачи о ленте выражается через многократные интегралы специального типа. Теперь мы перейдем к изучению асимптотических свойств таких интегралов при $kl \rightarrow \infty$ и построению приближенных выражений для тока.

§ 9.1. Леммы об асимптотических разложениях для многократных интегралов

Лемма 1. Пусть $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ — аналитическая функция переменных s_1, s_2, \dots, s_n , регулярная в окрестности начала координат, и пусть

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \varphi(0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

есть ее ряд Тейлора. Пусть также при $s_1, s_2, \dots, s_n \geq 0$

$$|\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n)| < K e^{b(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)}, \quad (9.1.2)$$

где K и b положительные числа, не зависящие от s_1, s_2, \dots, s_n .

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} \varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n \underset{q \rightarrow \infty}{\sim} \\
 & \sim \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} \times \\
 & \times \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \varphi(0, 0, \dots, 0) ds_1 ds_2 \dots ds_n. \quad (9.1.3)
 \end{aligned}$$

Доказательство

Представим левую часть соотношения (9.1.3) в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} \times \\
 & \times \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \times \\
 & \times \varphi(0, 0, \dots, 0) ds_1 ds_2 \dots ds_n + R_M, \quad (9.1.4)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_m &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \times \\
 & \times \left\{ \varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \varphi(0, 0, \dots, 0) \right\}. \quad (9.1.5)
 \end{aligned}$$

Можно подобрать такую постоянную $C > 0$, что

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \varphi(0, 0, \dots, 0) \right| \leq \\ & \leq C(s_1 + s_2 + \dots + s_n)^M e^{b(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)}. \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |R_M| & \leq C \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(q-b)(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)} \times \\ & \times (s_1 + s_2 + \dots + s_n)^M ds_1 ds_2 \dots ds_n = \\ & = C(q-b)^{-\frac{M+n}{2}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)} \times \\ & \times (t_1 + t_2 + \dots + t_n)^M dt_1 dt_2 \dots dt_n = \\ & = \frac{\text{const}}{(q-b)^{\frac{M+n}{2}}}. \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

Оценим M -ый член в ряде (9.1.3):

$$\begin{aligned} a_M & = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-q(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)} \times \\ & \times \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^M \varphi(0, 0, \dots, 0) ds_1 ds_2 \dots ds_n = \\ & = q^{-\frac{M+n}{2}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)} \times \\ & \times \left[t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + t_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right]^M \varphi(0, 0, \dots, 0) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \\ & = \frac{\text{const}}{q^{\frac{M+n}{2}}}. \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

Следовательно

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|R_M|}{|a_M|} = \text{const} \quad (9.1.9)$$

и лемма доказана. Совершенно аналогично может быть доказана другая лемма, которая нам и нужна для дальнейшего.

Лемма 2. Пусть $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n)$ — аналитическая функция от s_1, s_2, \dots, s_n , имеющая в окрестности начала координат ряд Тейлора (9.1.1). Пусть также $q, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, K$ и b — вещественные положительные числа, а модуль функции φ удовлетворяет условию (9.1.2). Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} \varphi(s_1, s_2, \dots, s_n)}{(s_1^2 - i\beta_1^2)(s_2^2 - i\beta_2^2) \dots (s_n^2 - i\beta_n^2)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \sim \\ \sim \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{e^{-q(s_1^2+s_2^2+\dots+s_n^2)} ds_1 ds_2 \dots ds_n}{(s_1^2 - i\beta_1^2)(s_2^2 - i\beta_2^2) \dots (s_n^2 - i\beta_n^2)} \times \\ \times \left[s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial s_n} \right]^m \varphi(0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

при $q \rightarrow \infty$. Сформулируем эту лемму в другом виде, более удобном для наших целей.

Пусть $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — аналитическая функция от t_1, t_2, \dots, t_n , имеющая в окрестности $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$ ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \\ \left. + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_n - 1) \frac{\partial}{\partial t_n} \right]^m \varphi(1, 1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Пусть также $q, \alpha + 1, \alpha_0 + 1, K$ и b — вещественные положительные числа и

$$|\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)| \leq K e^{b(|t_1-1|+|t_2-1|+\dots+|t_n-1|)}. \quad (9.1.12)$$

Тогда при $q \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{1+i\infty} \cdots \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t_1+t_2+\dots+t_n)}}{\sqrt{1-t_1}\sqrt{1-t_2}\dots\sqrt{1-t_n}} \times \\
 & \times \frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n}{(t_1 + \alpha_0)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \dots (t_{n-1} + 1)(t_n + \alpha)} \sim \\
 & \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_1^{1+i\infty} \cdots \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t_1+t_2+\dots+t_n)}}{\sqrt{1-t_1}\sqrt{1-t_2}\dots\sqrt{1-t_n}} \times \\
 & \times \frac{b_m(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n}{(t_1 + \alpha_0)(t_2 + 1)(t_3 + 1) \dots (t_{n-1} + 1)(t_n + \alpha)}, \quad (9.1.13)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_m(t_1, t_2, \dots, t_n) = & \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \\
 & \left. + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_n - 1) \frac{\partial}{\partial t_n} \right]^m \varphi(1, 1, \dots, 1), \quad (9.1.14)
 \end{aligned}$$

а интегралы берутся вдоль левого берега разреза $1 \rightarrow 1 + i\infty$, причем $\arg\{(1-t)^{1/2}\} = -\pi/4$.

Напомним, что дифференциальный оператор разложения в ряд Тейлора равен по определению

$$\begin{aligned}
 & \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m = \\
 & \sum_{p_1+p_2+\dots+p_n=m} \frac{m!}{p_1! p_2! \dots p_n!} x_1^{p_1} \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} x_2^{p_2} \frac{\partial^{p_2}}{\partial x_2^{p_2}} \dots x_n^{p_n} \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n^{p_n}}, \quad (9.1.15)
 \end{aligned}$$

где каждый индекс p_l ($l = 1, 2, 3, \dots, n$) принимает все целочисленные значения от нуля до m ($p_l = 0, 1, 2, 3, \dots, m$), но для каждого слагаемого в правой части выражения (9.1.15) сумма всех p_l должна быть равна m ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = m$). Кроме того, $\partial^0/\partial x^0 = 1$.

Заметим, что доказанную выше лемму можно интерпретировать как обобщение леммы Ватсона [78] на случай многомерных интегралов.

§ 9.2. Асимптотические ряды для функций χ_n

Пользуясь леммой 2, можно показать, что функции χ_n имеют при $q \rightarrow \infty$ следующие асимптотические в смысле Пуанкаре разложения:

$$\chi_2(z, \alpha) \sim \chi_1(2l, \alpha) \chi_1(z, 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)}{\pi i^{m+1}} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikz(t-1)}}{\sqrt{1-t}} c_m(t) dt, \quad (9.2.1)$$

где $c_m(t)$ — коэффициенты ряда Тейлора

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x+t} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) (x-1)^m, \quad (9.2.2)$$

$$\chi_n(z, \alpha) \sim \chi_1(2l, \alpha) \chi_1^{n-2}(2l, 1) \chi_1(z, 1) +$$

$$+ \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(i\pi)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{ikz(t_n-1)}}{\sqrt{1-t_n}} dt_n \times$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \frac{u_m(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-1} (1+t_s)}, \quad (9.2.3)$$

где

$$u_m(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right]^m f_n(1, 1, \dots, 1, t_n), \quad (9.2.4)$$

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\sqrt{1+t_1} \prod_{s=2}^{n-1} (1+t_s)^{3/2}}{(t_1 + t_2)(t_2 + t_3) \dots (t_{n-1} + t_n)}. \quad (9.2.5)$$

$n=3,4,\dots$

Правая часть в формуле (9.2.1) и каждый член ряда в (9.2.3) выражаются через сумму произведений однократных интегралов типа

$$\varphi_q^{(m)}(q, \alpha) = \frac{\partial^m}{\partial q^m} \varphi(q, \alpha) = i^m \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)} (t-1)^m}{\sqrt{1-t} (t+\alpha)} dt \quad (9.2.6)$$

$m=1,2,3,\dots$

и

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1(z) &= \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iz(t-1)}}{\sqrt{1-t}(t+1)} dt = \varphi(z, 1), \\ \hat{\varphi}_m(z) &= \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iz(t-1)}}{\sqrt{1-t}(t+1)^m} dt = ie^{-i2z} \int_0^z e^{i2s_1} \hat{\varphi}_{m-1}(s_1) ds_1 = \\ &= i^{m-1} e^{-2iz} \int_0^z ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{m-2}} ds_{m-1} \int_0^{s_{m-1}} e^{2is_{m-1}} \varphi(s_{m-1}, 1) ds_{m-1}, \quad (9.2.7)\end{aligned}$$

где $\varphi(q, \alpha)$ есть функция

$$\varphi(q, \alpha) = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iz(t-1)}}{\sqrt{1-t}(t+\alpha)} dt \equiv \chi_1(2l, \alpha), \quad (9.2.8)$$

которая, как показано в § 8.8, описывается с помощью интеграла Френеля, а именно,

$$\varphi(q, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-iq(1+\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{it^2} dt}{\sqrt{q(1+\alpha)}}. \quad (9.2.9)$$

Напомним, что интегралы в пределах от 1 до $1+i\infty$ берутся по левому берегу разреза $1 \rightarrow 1+i\infty$, где $\arg\{(1-t)^{1/2}\} = -\pi/4$. Заметим еще, что $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ и $\hat{\varphi}_m(z)$ являются алгебраическими функциями интегралов Френеля, а также степенными и экспоненциальными функциями от переменных q, α и z . Например,

$$\hat{\varphi}_2(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} e^{-i2z} \left[z \int_{\sqrt{2z}}^{\infty} e^{it^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^z e^{i2x} x^{1/2} dx \right], \quad (9.2.10)$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_3(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i3\pi/4} e^{-i2z} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} z^2 \int_{\sqrt{2z}}^{\infty} e^{it^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} z \int_0^z e^{i2x} x^{1/2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^z e^{i2x} x^{3/2} dx \right], \quad (9.2.11)\end{aligned}$$

где

$$\int_{\infty}^z e^{i2x} x^{3/2} dx = \frac{1}{i2} \left[z^{3/2} e^{i2z} - \frac{3}{2} \int_{\infty}^z e^{i2x} x^{1/2} dx \right], \quad (9.2.12)$$

$$\int_{\infty}^z e^{i2x} x^{1/2} dx = \frac{1}{i2} \left[z^{1/2} e^{i2z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\infty}^{\sqrt{2z}} e^{it^2} dt \right]. \quad (9.2.13)$$

Следует иметь в виду, что асимптотическое разложение (9.2.3) содержит функции $\hat{\varphi}_m(kz)$, а не $\hat{\varphi}_m(z)$.

Поясним причину появления функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ и $\hat{\varphi}_m(z)$. Функции $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ порождаются членами $(t_s - 1)^m$ в разложении (9.2.4) в ряд Тейлора. Функции $\hat{\varphi}_m(z)$ возникают вследствие дифференцирования (9.2.5) по переменной t_{n-1} , которая связана с переменной t_n множителем $(t_{n-1} + t_n)^{-1}$. Производная

$$\frac{\partial^m}{\partial t_{n-1}^m} (t_{n-1} + t_n)^{-1} = (-1)^m \frac{m!}{(t_{n-1} + t_n)^m}$$

в точке $t_{n-1} = 1$ дает множитель $(1 + t_n)^{-m}$ и функцию $\hat{\varphi}_m(z)$.

Интересен физический смысл полученных асимптотических разложений. Первые слагаемые в формулах (9.2.1) и (9.2.3) выражаются через интегралы Френеля и означают, что краевые волны высших порядков дифрагируют в первом приближении так же, как плоская волна. Следующие слагаемые в этих формулах описываются производными и квадратурами от интегралов Френеля и учитывают более сложный характер краевых волн.

§ 9.3. Оценки для функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$, $\varphi(kz, 1)$ и $\hat{\varphi}_m(kz)$

После замены переменной t на $x = q(t - 1)$ в выражении (9.2.6) становится очевидно, что

$$\frac{\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} = \begin{cases} O[q^{-m-1/2}/(1 + \alpha)] & \text{при } q \rightarrow \infty, \alpha \neq -1, \\ O[q^{-m+1/2}] & \text{при } q \rightarrow \infty, \alpha = -1. \end{cases} \quad (9.3.1)$$

Следовательно, можно предположить, что

$$\frac{\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} = O \left[\frac{q^{-m+1/2}}{1 + q(1 + \alpha)} \right] \text{ при } q \rightarrow \infty. \quad (9.3.2)$$

Это соотношение будет верным, если

$$q^{m-1/2}(1+q\epsilon) \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)} (t-1)^m}{\sqrt{1-t} t + \epsilon - 1} dt = \text{const} \quad \text{при } q \rightarrow \infty, \quad (9.3.3)$$

где $\epsilon = 1 + \alpha$. Положим здесь $t - 1 = \epsilon s$, $\lambda = q\epsilon$ и введем обозначение

$$\phi(\lambda) = \lambda^{m-1/2}(1+\lambda) \int_0^{i\infty} e^{i\lambda s} \frac{s^{m-1/2}}{1+s} ds. \quad (9.3.4)$$

Покажем, что $\phi(\lambda) = \text{const}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$. Представим эту функцию в виде

$$\phi(\lambda) = \frac{1+\lambda}{\lambda} \int_0^{i\infty} e^{it} \frac{t^{m-1/2}}{1+t/\lambda} dt. \quad (9.3.5)$$

Тогда

$$\phi(\lambda) = (1+\lambda) \int_0^{i\infty} e^{it} \frac{t^{m-1/2}}{t+\lambda} dt, \quad (9.3.6)$$

следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) = \int_0^{i\infty} e^{it} t^{m-1/2} dt \quad (9.3.7)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi(\lambda) = \int_0^{i\infty} e^{it} t^{m-3/2} dt. \quad (9.3.8)$$

Так как $m = 1, 2, 3, \dots$, то эти интегралы принимают конечные значения. Поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(\lambda) = \text{const}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi(\lambda) = \text{const}. \quad (9.3.9)$$

Эти результаты служат доказательством (9.3.3) и обоснованием оценки (9.3.2).

Используя (9.2.9) и свойства интегралов Френеля, нетрудно также получить асимптотические оценки

$$\varphi(q, \alpha) = O \left[\frac{1}{1 + \sqrt{q(1+\alpha)}} \right] \quad \text{при } q \rightarrow \infty \quad (9.3.10)$$

и

$$\varphi(kz, 1) = \begin{cases} O\left[1/\sqrt{kz}\right] & \text{при } kz \rightarrow \infty, \\ 1 + O\left[\sqrt{kz}\right] & \text{при } kz \rightarrow 0. \end{cases} \quad (9.3.11)$$

Последнее выражение может быть переписано в виде

$$\varphi(kz, 1) = O\left[\frac{1 + \sqrt{kz}}{1 + kz}\right] \quad \text{при } 0 \leq kz \leq \infty. \quad (9.3.12)$$

Асимптотическое поведение функции $\hat{\varphi}_m(kz)$, $m = 1, 2, \dots$ следует из формулы (9.2.7). Очевидно, что

$$\hat{\varphi}_m(kz) = O(1) \quad \text{при } kz \rightarrow 0. \quad (9.3.13)$$

С помощью замены переменной интегрирования в (9.2.7) имеем

$$\hat{\varphi}_m(kz) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{kz}} e^{-i\pi/4} \int_0^{i\infty} \frac{e^{is}}{\sqrt{s} (2 + s/kz)^m} ds, \quad m=2,3,4,\dots \quad (9.3.14)$$

Отсюда следует

$$\hat{\varphi}_m(kz) = O\left[\frac{1}{\sqrt{kz}}\right] \quad \text{при } kz \rightarrow \infty. \quad (9.3.15)$$

Оценки (9.3.13) и (9.3.15) могут быть объединены формулой

$$\hat{\varphi}_m(kz) = O\left[\frac{1 + \sqrt{kz}}{1 + kz}\right] \quad \text{при } 0 \leq kz \leq \infty. \quad (9.3.16)$$

Сопоставление (9.3.12) и (9.3.16) дает дополнительное соотношение

$$\hat{\varphi}_m(kz) = O[\varphi(kz, 1)] \quad \text{при } 0 \leq kz \leq \infty. \quad (9.3.17)$$

Пользуясь найденными оценками, мы получим в следующем параграфе некоторые полезные асимптотические представления для функций χ_n .

§ 9.4. Асимптотические представления для функций χ_n

Формулы (9.2.1) и (9.2.3) дают точные выражения для всех членов асимптотического разложения функции $\chi_n(z, \alpha)$. В этом параграфе мы построим некоторые полезные аппроксимации. В первую очередь исследуем точность первого члена в (9.2.3). Его погрешность определяется

величиной члена с индексом $m = 1$ в разложении (9.2.3). Этот член равен

$$T_{1\chi} = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(i\pi)^n} \int_1^{1+i\infty} e^{ikz(t_n-1)} \frac{dt_n}{\sqrt{1-t_n}} \times \\ \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \frac{u_1(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1+\alpha) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-1} (1+t_s)}, \quad (9.4.1)$$

где $n = 3, 4, \dots, q \gg 1$ и

$$u_1(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n) = \left[(t_1-1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \\ \left. + (t_2-1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1}-1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right] f_n(1, 1, \dots, 1, t_n). \quad (9.4.2)$$

Функции f_n определены в (9.2.5) и содержат множитель $(t_{n-1} + t_n)^{-1}$, который связывает t_{n-1} с t_n . Анализ функции u_1 показывает, что она содержит следующие члены:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} f_n(1, 1, \dots, 1, t_n) = c_1 \frac{1}{1+t_n}, \quad (9.4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_s} f_n(1, 1, \dots, 1, t_n) = c_2 \frac{1}{1+t_n} \quad \text{при } s = 2, 3, \dots, n-2, \quad (9.4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{n-1}} f_n(1, 1, \dots, 1, t_n) = c_3 \frac{1}{1+t_n} + c_4 \frac{1}{(1+t_n)^2}, \quad (9.4.5)$$

где $c_{1,2,3,4}$ — некоторые константы. После подстановки функции u_1 в (9.4.1) и использования (9.2.6) и (9.2.7) функция $T_{1\chi}$ принимает вид

$$T_{1\chi} = \varphi(kz, 1) \varphi^{n-3}(q, 1) \left[d_1 \varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \varphi(q, 1) + d_2 (n-3) \varphi(q, \alpha) \varphi_q^{(1)}(q, 1) \right] + \\ + \varphi(q, \alpha) \varphi_q^{(1)}(q, 1) \varphi^{n-3}(q, 1) \left[d_3 \varphi(kz, 1) + d_4 \hat{\varphi}_2(kz) \right] \quad (9.4.6)$$

где $d_{1,2,3,4}$ — некоторые константы. Одинаковые $n-3$ производные в (9.4.4) дают $n-3$ одинаковых члена в (9.4.6).

Функция $\chi_n(z, \alpha)$ с помощью функции $T_{1\chi}$ может быть аппроксимирована выражением

$$\chi_n(z, \alpha) = \chi_1(2l, \alpha) \chi_1^{n-2}(2l, 1) \chi_1(z, 1) + T_{1\chi}, \quad (9.4.7)$$

где

$$\chi_1(z, \alpha) = \varphi(kz, \alpha). \quad (9.4.8)$$

Приближенное выражение (9.4.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \chi_n(z, \alpha) = & \chi_1(2l, \alpha) \chi_1^{n-2}(2l, 1) \chi_1(z, 1) \times \\ & \times \left\{ 1 + O \left[\frac{\varphi_q^{(1)}(q, \alpha)}{\varphi(q, \alpha)} \right] + O \left[(n-2) \frac{\varphi_q^{(1)}(q, 1)}{\varphi(q, 1)} \right] + \right. \\ & \left. + O \left[\frac{\hat{\varphi}_2(k, z) \varphi_q^{(1)}(q, 1)}{\varphi(kz, 1) \varphi(q, 1)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.4.9)$$

Подобно оценкам в (9.3.2) и (9.3.13), выражение для функции $\chi_n(z, \alpha)$ может быть далее упрощено:

$$\chi_n(z, \alpha) = \chi_1(2l, \alpha) \chi_1^{n-2}(2l, 1) \chi_1(z, 1) \left[1 + O \left(\frac{n}{q} \right) \right] \quad (9.4.10)$$

для $q \gg n$, $n = 2, 3, 4, \dots$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$. Следовательно, для $q \gg n$

$$\chi_n(z, \alpha) - \chi_1(2l, \alpha) \chi_1^{n-2}(2l, 1) \chi_1(z, 1) = \frac{O[\varphi(kz, 1)]}{q^{n/2} \left[1 + \sqrt{q(1+\alpha)} \right]}. \quad (9.4.11)$$

Используя выражение (9.4.10), нетрудно получить следующее асимптотическое соотношение:

$$\begin{aligned} \left| \chi_{n+m}(z, \alpha) - \frac{\chi_n(2l, \alpha) \chi_n(z, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} \left[\frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} \right]^{m-1} \right| & \leq \\ & \leq \frac{|\varphi(kz, 1)|}{1 + \sqrt{q(1+\alpha)}} O \left(q^{-\frac{n+m}{2}} \right) \quad \text{при } q \gg n + m. \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

Эта формула играет важную роль в построении приближенных выражений для тока.

§ 9.5. Первое приближение для тока

В главе 8 для нормированной плотности тока было получено следующее строгое выражение:

$$J(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}(l - z, -\alpha_0), \quad (9.5.1)$$

где

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, \alpha_0), \quad (9.5.2)$$

$$j_n(z, \alpha_0) = -(-1)^n e^{-i\kappa\beta_n} \chi_n(z, -\beta_n) e^{iq(n-1)+ikz}, \quad (9.5.3)$$

$$\beta_n = (-1)^n \alpha_0, \quad q = 2\kappa = 2kl.$$

Представим $\tilde{J}(z, \alpha_0)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{J}(z, \alpha_0) = & e^{i\kappa\alpha_0} \chi_1(z, \alpha_0) e^{ikz} - e^{-i\kappa\alpha_0} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \chi_n(z, -\alpha_0) e^{iq(n-1)+ikz} + \\ & + e^{i\kappa\alpha_0} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \chi_n(z, \alpha_0) e^{iq(n-1)+ikz}. \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

Подставим сюда для функций $\chi_n(z, \alpha)$ первые члены их асимптотических разложений (9.2.1), (9.4.11) и обозначим полученное таким образом приближенное выражение через \tilde{J}_1 :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(z, \alpha_0) = & e^{i\kappa\alpha_0} \chi_1(z, \alpha_0) e^{ikz} - \\ & - e^{-i\kappa\alpha_0} \chi_1(z, -\alpha_0) \chi_1(2l, 1) e^{iq+ikz} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [\chi_1(2l, 1) e^{iq}]^{n-2} + \\ & + e^{i\kappa\alpha_0} \chi_1(z, \alpha_0) \chi_1(z, 1) \chi_1(2l, 1) e^{i2q+ikz} \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} [\chi_1(2l, 1) e^{iq}]^{n-3}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(z, \alpha_0) = & e^{i\kappa\alpha_0} \chi_1(z, \alpha_0) e^{ikz} - \frac{e^{iq}}{\mathcal{D}_1} \left[\chi_1(2l, -\alpha_0) e^{-i\kappa\alpha_0} - \right. \\ & \left. - \chi_1(2l, \alpha_0) \chi_1(2l, 1) e^{iq+i\kappa\alpha_0} \right] \chi_1(z, 1) e^{ikz}. \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

Знаменатель \mathcal{D}_1 характеризует резонансные свойства ленты и определяется формулой

$$\mathcal{D}_1 = 1 - \chi_1^2(2l, 1)e^{i2q}. \quad (9.5.6)$$

Интересно, что формула (9.5.1), если в нее подставить (9.5.5), совпадает с точностью до знака с выражением (6.6.6), которое было получено выше методом параболического уравнения. Различие в знаках объясняется тем, что компонента падающей волны (6.6.7) отличается знаком от аналогичной компоненты, соответствующей падающей волне (8.2.1). Поэтому вывод формулы (9.5.5) вместе с нижеследующей оценкой ее погрешности можно рассматривать как строгое обоснование приближенного выражения (6.6.6).

Нетрудно показать, что найденное приближенное выражение

$$J_1(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}_1(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}_1(l - z, -\alpha_0) \quad (9.5.7)$$

удовлетворяет краевым и граничным условиям

$$J_1(\pm l, \alpha_0) = J_1(z, \pm 1) = 0. \quad (9.5.8)$$

Пользуясь далее формулой (8.5.10) для функции $\chi_1(z, \alpha)$, находим

$$J_1(z, \alpha_0) = O\left[\sqrt{k(l \pm z)}\right] \quad \text{при } l \pm z \ll 1. \quad (9.5.9)$$

Представим ток в виде

$$J(z, \alpha_0) = J_1(z, \alpha_0) + R_1(z, \alpha_0), \quad (9.5.10)$$

где

$$R_1(z, \alpha_0) = \tilde{R}_1(z + l, \alpha_0) + \tilde{R}_1(z - l, -\alpha_0). \quad (9.5.11)$$

Величина R_1 характеризует абсолютную погрешность первого приближения и определяется вторым членом асимптотического разложения для функции $\chi_2(z, \pm\alpha_0)$. С помощью (9.2.1) находим

$$\tilde{R}_1(z, \alpha_0) = O\left[\varphi_q^{(1)}(q, -\alpha_0)\varphi(kz, 1)\right] \quad \text{при } q \gg 1. \quad (9.5.12)$$

Обращаясь затем к формулам (9.3.2) и (9.3.12), перепишем это выражение в более наглядной форме:

$$\tilde{R}_1(z, \alpha_0) = O\left[\frac{1 + \sqrt{kz}}{1 + kz} \frac{q^{-1/2}}{1 + q(1 - \alpha_0)}\right] \quad (9.5.13)$$

при $q \gg 1$ и $0 \leq kz \leq \infty$.

Очевидно также, что в силу (8.5.19), (8.5.20) и (9.5.8)

$$R_1(\pm l, \alpha_0) = R_1(z, \pm 1) = 0, \quad (9.5.14)$$

т. е. абсолютная погрешность первого приближения равна нулю в двух случаях: 1) на краях ленты при произвольном направлении падающей волны; и 2) всюду на ленте при скользящем падении.

§ 9.6. *N*-е приближение для тока

9.6.1. Вывод приближенной формулы

Оставим в ряде (9.5.4) *n* первых членов, а для остальных воспользуемся асимптотическим представлением (9.4.12). В результате для тока получим выражение

$$J(\bar{z}, \alpha_0) = J_n(z, \alpha_0) + R_n(z, \alpha_0), \quad (9.6.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_n(z, \alpha_0) &= j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}_n(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}_n(l - z, -\alpha_0), \\ R_n(z, \alpha_0) &= \tilde{R}_n(z + l, \alpha_0) + \tilde{R}_n(l - z, -\alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (9.6.2)$$

Причем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n(z, \alpha_0)e^{-ikz} &= - \sum_{m=1}^n (-1)^m \chi_m(z, -\beta_m)e^{-i\kappa\beta_m+iq(m-1)z} + \\ &+ (-1)^n \frac{\chi_n(z, \beta_n) \chi_n(z, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iqn+i\kappa\beta_n} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} \right]^{m-1} - \\ &- (-1)^n \frac{\chi_n(z, -\beta_n) \chi_n(z, 1) \chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}^2(2l, 1)} e^{iq(n+1)-i\kappa\beta_n} \times \\ &\times \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} \right]^{m-2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n(z, \alpha_0) = & -e^{ikz} \sum_{m=1}^n (-1)^m \chi_m(z, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} + \\ & + \frac{(-1)^n e^{iqn}}{\hat{D}_n} \frac{\chi_n(z, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} \times \\ & \times \left[\chi_n(2l, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \chi_n(2l, -\beta_n) \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right] e^{ikz}, \quad (9.6.3) \end{aligned}$$

где

$$\hat{D}_n = 1 - \left[\frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} \right]^2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (9.6.4)$$

Выражение (9.6.3) имеет ясный физический смысл. Оно содержит в *нетронутом* виде краевые волны с порядком кратности от 1 до n . Краевые волны высших порядков вычисляются приближенно и образуют геометрическую прогрессию, суммирование которой приводит к появлению резонансного знаменателя \hat{D}_n .

9.6.2. Проверка краевых условий

Для проверки краевых условий (8.5.19) заметим, что полученное выражение для J_n имеет вид

$$\begin{aligned} J_n(z, \alpha_0) = & -e^{-ikz\alpha_0} - \\ & - e^{ik(z+l)} \sum_{m=1}^n (-1)^m \chi_m(z+l, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - \\ & - e^{ik(l-z)} \sum_{m=1}^n (-1)^m \chi_m(l-z, \beta_m) e^{iq(m-1) + i\kappa\beta_m} + \\ & + A \chi_n(z+l, 1) e^{ik(z+l)} + B \chi_n(l-z, 1) e^{ik(l-z)}. \quad (9.6.5) \end{aligned}$$

Требую, чтобы

$$J_n(\pm l, \alpha_0) = 0, \quad (9.6.6)$$

приходим к линейной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B :

$$\left. \begin{aligned} A + B \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} &= (-1)^n \frac{\chi_n(2l, \beta_n)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iqn + i\kappa\beta_n}, \\ A \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} + B &= (-1)^n \frac{\chi_n(2l, -\beta_n)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iqn - i\kappa\beta_n}. \end{aligned} \right\} \quad (9.6.7)$$

Откуда

$$\begin{aligned} A(\beta_n) &= \frac{(-1)^n}{\hat{D}_n} \frac{e^{iqn}}{\chi_{n-1}(2l, 1)} \times \\ &\times \left[\chi_n(2l, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \chi_n(2l, -\beta_n) \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right], \end{aligned} \quad (9.6.8)$$

$$B(\beta_n) = A(-\beta_n).$$

Коэффициент $A(\beta_n)$ полностью совпадает с коэффициентом, стоящим перед $\chi_n(z, 1)e^{ikz}$ в формуле (9.6.3). Это означает, что условие (9.6.6) удовлетворяется. Из формул (9.4.10) и (8.5.10) далее следует соотношение

$$J_n(z, \alpha_0) = O \left[\sqrt{k(l \pm z)} \right] \quad \text{при} \quad k(l \pm z) \ll 1, \quad (9.6.9)$$

характеризующее поведение тока вблизи краев ленты.

С помощью формулы (8.5.13) можно также проверить, что функция J_n удовлетворяет условию

$$J_n(z, \pm 1) = 0. \quad (9.6.10)$$

9.6.3. Оценка погрешности

В полученном приближенном выражении сохранено n членов ряда (9.5.4). Напомним, что этот ряд имеет мажоранту в виде геометрической прогрессии со знаменателем (8.6.11). Следовательно, абсолютная погрешность приближенной формулы для J_n имеет следующую оценку:

$$|R_n(z, \alpha_0)| \leq \frac{\left[(2/\pi) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\pi/2q} \right) \right]^{n-1}}{1 - (2/\pi) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\pi/2q} \right)}, \quad q = 2kl. \quad (9.6.11)$$

При $kl \gg n$ эту оценку можно уточнить, пользуясь асимптотическим представлением (9.4.12). Полагая там $m = 1$ и учитывая (9.6.3), находим

$$|\tilde{R}_n(z, \alpha_0)| \leq \frac{|\varphi(kz, 1)| O\left(q^{-\frac{n+1}{2}}\right)}{1 + \sqrt{q}[1 + (-1)^n \alpha_0]}, \quad \text{при } q \gg n. \quad (9.6.12)$$

Это выражение может быть записано в еще более наглядной форме, если учесть формулу (9.3.12),

$$|\tilde{R}_n(z, \alpha_0)| \leq O\left\{ \frac{1 + \sqrt{kz}}{1 + kz} \frac{q^{-\frac{n+1}{2}}}{1 + \sqrt{q}[1 + (-1)^n \alpha_0]} \right\} \quad (9.6.13)$$

при $q \gg n$ и $0 \leq kz \leq \infty$. Кроме того из (8.5.19), (8.5.20), (9.6.6) и (9.6.10) следует, что

$$R_n(\pm l, \alpha_0) = R(z, \pm 1) = 0. \quad (9.6.14)$$

Таким образом, найденное n -е приближение (9.6.3) позволяет определить плотность тока на ленте с точностью до любой заданной степени $(kl)^{-n/2}$ при $2kl \gg n$. В принципе, погрешность данного приближения при заданном значении q можно сделать согласно (9.6.11) как угодно малой, увеличивая число n . Однако практическую ценность это приближение имеет только при $2kl \gg n$, когда для вычисления функций χ_n можно пользоваться асимптотическими формулами, а сами функции χ_n убывают с ростом n достаточно быстро.

Глава 10

Асимптотические представления для диаграммы рассеяния

Диаграмму рассеянного поля в дальней зоне можно, в принципе, найти, применяя преобразование Фурье к полученным выше асимптотическим выражениям для тока. Однако, как мы покажем в § 10.5, так поступать не следует, поскольку полученные при этом выражения не удовлетворяют принципу взаимности. Поэтому мы будем искать асимптотическое представление для поля в дальней зоне, исходя из точного решения (8.3.21), (8.3.22) и (8.3.23) функциональных уравнений (8.3.10).

§ 10.1. Точное выражение для характеристики рассеяния и некоторые свойства функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$

Согласно (8.4.6), (8.4.7) и (8.4.8) рассеянное поле в дальней зоне (при $y \geq 0$) можно представить в виде

$$H_x = \Phi(\alpha, \alpha_0) \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (10.1.1)$$

где

$$\alpha = \cos \vartheta, \quad \alpha_0 = \cos \vartheta_0, \quad (10.1.2)$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Phi}(-\alpha, -\alpha_0). \quad (10.1.3)$$

Введенная здесь функция $\tilde{\Phi}$ отличается экспоненциальным множителем от выражения (8.4.8) и представляется рядом

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \varphi_n(\alpha, -\beta_n) e^{iq(n-1) - i\kappa\beta_n} \quad (10.1.4)$$

по функциям $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$, где $\beta_n = (-1)^n \alpha_0$,

$$\varphi_1(\alpha, \alpha_0) = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha + \alpha_0}, \quad (10.1.5)$$

$$\varphi_2(\alpha, \alpha_0)e^{iq} = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t)dt}{(t+\alpha)(t+\alpha_0)}, \quad (10.1.6)$$

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0)e^{iq(n-1)} = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times \quad (10.1.7)$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1)h(t_2)\dots h(t_{n-1})dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1+\alpha_0)(t_2+t_1)(t_3+t_2)\dots(t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)},$$

$$h = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} e^{iqt}, \quad q = 2\kappa = 2kl,$$

а интегралы берутся по левому берегу разреза $1 \rightarrow 1+i\infty$, где $\arg(1-t)^{1/2} = -\pi/4$.

Переходя к изучению свойств функций φ_n , прежде всего заметим, что

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0) = \varphi_n(\alpha_0, \alpha). \quad (10.1.8)$$

Определим далее $\varphi_n(-1, \alpha_0)$. С этой целью представим φ_n в виде

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0)e^{iq(n-1)} = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times \quad (10.1.9)$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1)h(t_2)\dots h(t_{n-2})I(t_{n-2}, \alpha)dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}}{(t_1+\alpha_0)(t_2+t_1)(t_3+t_2)\dots(t_{n-3}+t_{n-4})(t_{n-2}+t_{n-3})},$$

где

$$I(t_{n-2}, \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1+t_{n-1}}{1-t_{n-1}}} \frac{e^{iqt_{n-1}} dt_{n-1}}{(t_{n-1} + \widehat{t}_{n-2})(t_{n-1} + \widehat{\alpha})} = \quad (10.1.10)$$

$$= \int_1^{1+i\delta} \frac{h(t_{n-1})dt_{n-1}}{(t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)} + \int_{1+i\delta}^{1+i\infty} \frac{h(t_{n-1})dt_{n-1}}{(t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)}, \quad \delta \geq 0.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \sqrt{1 + \alpha} I(t_{n-2}, \alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \sqrt{1 + \alpha} \int_1^{1+i\delta} \frac{h(t_{n-1}) dt_{n-1}}{(t_{n-1} + t_{n-2})(t_{n-1} + \alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 + \alpha} \sqrt{2} e^{iq}}{1 + t_{n-2}} \int_1^{1+i\infty} \frac{dt_{n-1}}{\sqrt{1 - t_{n-1}}(t_{n-1} + \alpha)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \varphi_n(\alpha, \alpha_0) e^{iq(n-1)} &= - \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 + \alpha} \sqrt{1 + \alpha_0}}{2(i\pi)^{n-1}} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1) h(t_2) \dots h(t_{n-2}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}}{(t_1 + \alpha_0)(t_2 + t_1)(t_3 + t_2) \dots (t_{n-3} + t_{n-4})(t_{n-2} + t_{n-3})} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} e^{iq}}{\sqrt{1 - t_{n-1}} (t_{n-1} + \widehat{\alpha})(t_{n-2} + 1)} dt_{n-1}. \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Применяя интегральную теорему Коши к третьей строке выражения (10.1.11), получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(-1, \alpha_0) &= \varphi_{n-1}(1, \alpha_0), \\ \varphi_n(\alpha, -1) &= \varphi_{n-1}(\alpha, 1) \end{aligned} \right\} \quad (10.1.12)$$

и, кроме того,

$$\varphi_1(-1, \alpha_0) = 0, \quad \varphi_2(-1, \alpha_0) = \varphi_1(1, \alpha_0) = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha_0}}. \quad (10.1.13)$$

Используя (10.1.8) и (10.1.12), можно доказать, что

$$\Phi(\alpha, \alpha_0) = \Phi(\alpha_0, \alpha) \quad (10.1.14)$$

и

$$\Phi(\pm 1, \alpha_0) = 0, \quad \Phi(\alpha, \pm 1) = 0. \quad (10.1.15)$$

Равенство (10.1.14) является формулировкой принципа взаимности. Первая часть соотношения (10.1.15) означает непрерывность рассеянного поля в плоскости $y = 0$ при $|z| > l$, а вторая часть этого соотношения

показывает, что при скользющем облучении не возникает рассеянное поле.

С помощью преобразований, аналогичных тем, которые мы совершили с функцией χ_n в § 8.6, можно показать, что

$$|\varphi_n(\alpha, \alpha_0)| < \sqrt{1 + \frac{\pi}{q}} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\pi}{2q}} \right)^{n-3}. \quad (10.1.16)$$

Таким образом, ряд (10.1.4), как и ряд (8.5.1) для тока, имеет мажорирующую геометрическую прогрессию со знаменателем (8.6.11) и, следовательно, сходится абсолютно и равномерно при любых значениях $q > 0$.

§ 10.2. Асимптотические представления для функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$

10.2.1. Асимптотические ряды для функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$

Применяя лемму 2 из § 9.1 к функциям $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$, можно получить следующие асимптотические разложения при $q \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha, \alpha_0) &\sim \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{i^m} \times \\ &\times \left[\sqrt{1 + \alpha} \varphi_q^{(m)}(q, \alpha_0) - \sqrt{1 + \alpha_0} \varphi_q^{(m)}(q, -\alpha) \right], \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

где a_m — коэффициенты ряда Тейлора

$$\sqrt{1+t} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (t-1)^m, \quad (10.2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(\alpha, \alpha_0) &\sim \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{n-3}(q, 1) + \frac{\sqrt{1+\alpha} \sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{i\mathbf{q} \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \hat{u}_m(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha)(t_{n-1} + \alpha_0) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)}, \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

где

$$\hat{u}_m(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right]^m \hat{f}_n(1, 1, \dots, 1), \quad (10.2.4)$$

$$\hat{f}_n(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \frac{\sqrt{1+t_1} \sqrt{1+t_{n-1}}}{(t_2+t_1)(t_3+t_2) \dots (t_{n-1}+t_{n-2})} \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)^{3/2}, \quad (10.2.5)$$

$$\hat{f}_3(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{1+t_1} \sqrt{1+t_2}}{t_1+t_2}. \quad (10.2.6)$$

Первое слагаемое в формуле (10.2.3) показывает, что в первом приближении дифракция краевых волн происходит так же, как и дифракция плоских волн. Остальные слагаемые учитывают более сложную структуру краевых волн и выражаются через производные от интегралов Френеля с помощью функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$, определяемых согласно (9.2.6) и (9.2.9).

Формула (10.2.3) представляет полное асимптотическое разложение функции $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$. Теперь наша цель состоит в выводе простого приближения, аналогичного (9.4.10) и (9.4.12), для функции $\chi_n(z, \alpha)$. Оставляя лишь член с $m = 1$ в ряде (10.2.3), получаем

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0) \approx \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{n-3}(q, 1) + T_{1\varphi}, \quad (10.2.7)$$

где

$$T_{1\varphi} = \frac{\sqrt{1+\alpha} \sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \hat{u}_1(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha)(t_{n-1} + \alpha_0) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)}, \quad (10.2.8)$$

$$\hat{u}_1(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right] \hat{f}_n(1, 1, \dots, 1) \quad (10.2.9)$$

и функция \hat{f}_n задается выражением (10.2.5). Очевидно, что в точке $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 1$

$$\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial t_2} = \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial t_3} = \dots = \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial t_{n-2}}. \quad (10.2.10)$$

Тождественные $n - 3$ производные в формуле (10.2.10) дают $n - 3$ тождественных интеграла в функции $T_{1\varphi}$. После подстановки (10.2.9) в (10.2.8) получаем

$$T_{1\varphi} = \varphi^{n-3}(q, 1) \left\{ O \left[\varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \right] + O \left[\varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0) \varphi(q, \alpha) \right] + \right. \\ \left. + (n - 3) \varphi^{n-4}(q, 1) O \left[\varphi_q^{(1)}(q, 1) \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \right] \right\}. \quad (10.2.11)$$

Последующая подстановка $T_{1\varphi}$ в (10.2.7) дает приближение

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0) = \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{n-3}(q, 1) \left\{ 1 + O \left[\frac{\varphi_q^{(1)}(q, \alpha)}{\varphi(q, \alpha)} \right] + \right. \\ \left. + O \left[\frac{\varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0)}{\varphi(q, \alpha_0)} \right] + (n - 3) O \left[\frac{\varphi_q^{(1)}(q, 1)}{\varphi(q, 1)} \right] \right\}. \quad (10.2.12)$$

Из формул (9.3.2) и (9.3.10) следует, что

$$\frac{\varphi_q^{(1)}(q, \alpha)}{\varphi(q, \alpha)} = \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{q}} O \left[\frac{1 + \sqrt{q(1 + \alpha)}}{1 + q(1 + \alpha)} \right] \leq O \left[\frac{1}{q} \right], \quad (10.2.13)$$

$$\frac{\varphi_q^{(1)}(q, 1)}{\varphi(q, 1)} = O \left[\frac{1}{q} \right]$$

для $q \gg 1$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$. Это дает асимптотическое выражение

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0) = \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{n-3}(q, 1) \left\{ 1 + O \left[\frac{n}{q} \right] \right\}, \quad (10.2.14)$$

которое выполняется при $n = 3, 4, 5, \dots$, $q \gg n$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Введем функцию

$$U_{s,n}(\alpha, \alpha_0) = \varphi_s(\alpha, \alpha_0) - \frac{\varphi_n(1, \alpha) \varphi_n(1, \alpha_0)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \left[\frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right]^{s-n-1}, \quad (10.2.15)$$

которая понадобится нам в дальнейшем для изучения асимптотических выражений при $q \rightarrow \infty$.

10.2.2. Оценка функции $U_{n,2}(\alpha, \alpha_0)$

Поскольку $\varphi_1(1, 1) = 1$, то

$$U_{n,2}(\alpha, \alpha_0) = \varphi_n(\alpha, \alpha_0) - \varphi_2(1, \alpha)\varphi_2(1, \alpha_0)\varphi_2^{n-3}(1, 1), \quad (10.2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(1, \alpha) &= \frac{\sqrt{2(1+\alpha)}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)} f_2(t) dt}{\sqrt{1-t} t + \alpha}, \\ f_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(\alpha, \alpha_0) &= \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \hat{f}_n(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha)(t_{n-1} + \alpha_0) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)}. \end{aligned} \quad (10.2.18)$$

Функция $U_{n,2}$ может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} U_{n,2}(\alpha, \alpha_0) &= \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \mathcal{X}_{n,2}(t_1, \dots, t_{n-1}) \times \\ &\times [F_{n,2}(t_1, \dots, t_{n-1}) - 1] dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}, \end{aligned} \quad (10.2.19)$$

где

$$\mathcal{X}_{n,2}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{2^{n-2} \prod_{s=1}^{n-1} f_2(t_s) e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)}}{(t_1 + \alpha)(t_{n-1} + \alpha_0) \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{1-t_p} \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)}, \quad (10.2.20)$$

$$F_{n,2}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{(1+t_1)(1+t_{n-1}) \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)^2}{2^{n-2} (t_1+t_2)(t_2+t_3) \dots (t_{n-2}+t_{n-1})} \quad (10.2.21)$$

$n=4,5,\dots$

и

$$F_{n,2}(1, 1, \dots, 1) = 1, \quad F_{3,2}(t_1, t_2) = \frac{(1+t_1)(1+t_2)}{2(t_1+t_2)}. \quad (10.2.22)$$

Можно показать, что в окрестности точки $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 1$ разложение $F_{n,2} - 1$ в ряд Тейлора начинается с квадратичных членов и имеет вид

$$F_{n,2}(t_1, \dots, t_{n-1}) - 1 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n-2} (t_m - 1)(t_{m+1} - 1) + \dots \quad (10.2.23)$$

Поэтому, применяя лемму 2 из § 9.1 к $U_{n,2}$ при $q \rightarrow \infty$, получаем

$$U_{3,2}(\alpha, \alpha_0) \sim -\frac{1}{4} \varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0), \quad (10.2.24)$$

$$U_{4,2}(\alpha, \alpha_0) \sim -\frac{1}{4} \varphi_q^{(1)}(q, 1) \left[\varphi(q, \alpha) \varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0) + \varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \right],$$

$$U_{n,2}(\alpha, \alpha_0) \sim -\frac{1}{4} \varphi^{(n-5)}(q, 1) \varphi_q^{(1)}(q, 1) \times \left[\varphi(q, \alpha) \varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0) \varphi(q, 1) + \right. \\ \left. + \varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi(q, 1) + (n-4) \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi_q^{(1)}(q, 1) \right]. \quad (10.2.25)$$

10.2.3. Асимптотическое представление для $\varphi_{n+m}(\alpha, \alpha_0)$

В соответствии с (10.2.15) функция $U_{n+m,n}$ равна

$$U_{n+m,n}(\alpha, \alpha_0) = \varphi_{n+m}(\alpha, \alpha_0) - \frac{\varphi_n(1, \alpha) \varphi_n(1, \alpha_0)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \left[\frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right]^{m-1}. \quad (10.2.26)$$

Нас интересует асимптотическое представление этой функции для $q \gg m+n$. Для этого подставим (10.2.14) в (10.2.26):

$$U_{n+m,n}(\alpha, \alpha_0) = \varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{m+n-3}(q, 1) (1 + \rho_{m+n}) - \\ - \frac{\varphi(q, \alpha) \varphi(q, \alpha_0) \varphi^{2n-4}(q, 1) (1 + \rho_n)^2}{\varphi^{(n-2)m}(q, 1) (1 + \rho_{n-1})^m} \varphi^{(n-1)(m-1)}(q, 1) (1 + \rho_n)^{m-1},$$

где $q \gg m + n$ и

$$\rho_n = O\left(\frac{n}{q}\right).$$

В результате имеем

$$|U_{n+m,n}(\alpha, \alpha_0)| \leq O\left[\frac{m+n}{q} |\varphi(q, \alpha)\varphi(q, \alpha_0)\varphi^{m+n-3}(q, 1)|\right] \quad (10.2.27)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{n+m}(\alpha, \alpha_0) - \frac{\varphi_n(1, \alpha)\varphi_n(1, \alpha_0)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \left[\frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right]^{m-1} \right| &\leq \\ &\leq \frac{O\left[q^{-\frac{n+m-1}{2}}\right]}{\left[1 + \sqrt{q(1+\alpha)}\right] \left[1 + \sqrt{q(1+\alpha_0)}\right]} \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

для $q \gg m + n$. Это неравенство играет фундаментальную роль при выводе приближенных выражений для диаграммы рассеяния. Подробное исследование формул (10.2.25) и (10.2.28) при $n = 2$ показывает, что (10.2.28) дает завышенную оценку для разности в левой части. Оказывается, что в данном случае эта разность в q раз меньше по сравнению с оценкой (10.2.28).

§ 10.3. Первое приближение для диаграммы рассеяния

На основании (10.2.1)

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha, \alpha_0) &\sim \frac{\sqrt{2}}{\alpha - \alpha_0} \left[\sqrt{1 + \alpha}\varphi(q, \alpha_0) - \sqrt{1 + \alpha_0}\varphi(q, \alpha) \right] + \\ &+ \frac{1}{\alpha - \alpha_0} O\left[\sqrt{1 + \alpha}\varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0) - \sqrt{1 + \alpha_0}\varphi_q^{(1)}(q, \alpha) \right] \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

при $q \gg 1$. Преобразуем первый член в правой части:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \alpha}\varphi(q, \alpha_0) - \sqrt{1 + \alpha_0}\varphi(q, \alpha) &= \\ &= \sqrt{1 + \alpha} \left[\varphi(q, \alpha_0) - \sqrt{\frac{1 + \alpha_0}{2}}\varphi(q, 1) \right] - \\ &- \sqrt{1 + \alpha_0} \left[\varphi(q, \alpha) - \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}}\varphi(q, 1) \right]. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Но

$$\begin{aligned} \varphi(q, \alpha) - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi(q, 1) &= (1-\alpha) \frac{\sqrt{1+\alpha}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)}}{\sqrt{1-t}(t+\alpha)(t+1)} dt = \\ &= \frac{1-\alpha}{2} \varphi(q, \alpha) + (1-\alpha) O\left[\varphi_q^{(1)}(q, \alpha)\right] \quad \text{при } q \gg 1. \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Поэтому, подставляя (10.3.3) в (10.3.2), получим для $\varphi_2(\alpha, \alpha_0)$ следующее асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha, \alpha_0) \sim \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[(1-\alpha_0) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi(q, \alpha_0) - (1-\alpha) \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{2}} \varphi(q, \alpha) \right] + \\ + \frac{1}{\alpha - \alpha_0} O\left[\sqrt{1+\alpha} \varphi_q^{(1)}(q, \alpha_0) - \sqrt{1+\alpha_0} \varphi_q^{(1)}(q, \alpha)\right] \quad \text{при } q \gg 1. \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Эта формула имеет ту же погрешность, что и (10.3.1), но оказывается более удобной при вычислении характеристики рассеяния.

Подставляя теперь в формулы (10.1.3) и (10.1.4) выражение (10.3.4) и пользуясь для функций $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$ первым членом асимптотического разложения (10.2.7) при $n = 3, 4, \dots$, находим

$$\Phi(\alpha, \alpha_0) = \Phi_1(\alpha, \alpha_0) + P_1(\alpha, \alpha_0), \quad (10.3.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\alpha, \alpha_0) &= \tilde{\Phi}_1(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Phi}_1(-\alpha, -\alpha_0), \\ P_1(\alpha, \alpha_0) &= \tilde{P}_1(\alpha, \alpha_0) + \tilde{P}_1(-\alpha, -\alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (10.3.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\alpha, \alpha_0) &= -\frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha + \alpha_0} e^{i\kappa(\alpha+\alpha_0)} + \\ &+ \frac{e^{iq} e^{i\kappa(\alpha-\alpha_0)}}{\alpha + \alpha_0} \left[(1+\alpha_0) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi(q, -\alpha_0) - (1-\alpha) \sqrt{\frac{1-\alpha_0}{2}} \varphi(q, \alpha) \right] - \\ &- \frac{e^{2iq} e^{i\kappa\alpha}}{\mathcal{D}_1} \varphi(q, \alpha) [\varphi(q, \alpha_0) e^{i\kappa\alpha_0} - \varphi(q, -\alpha_0) \varphi(q, 1) e^{iq - i\kappa\alpha_0}], \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

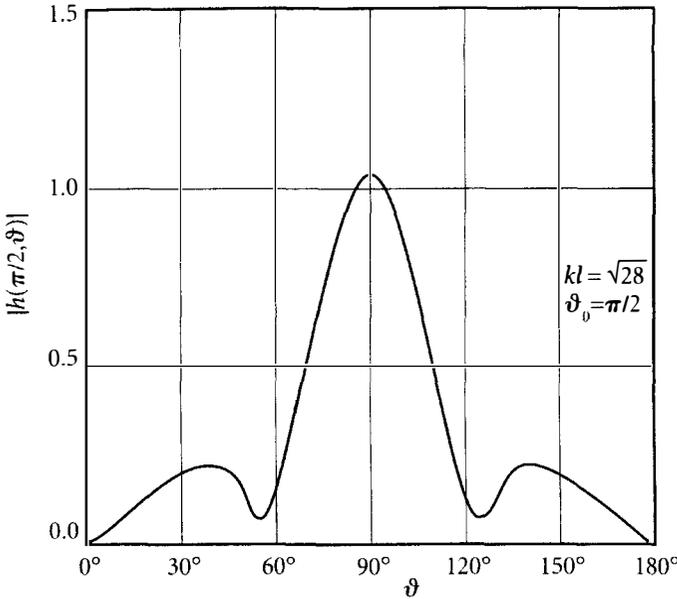


Рис. 10.3.1. Диаграмма рассеяния плоской волны на ленте при нормальном падении

а резонансный знаменатель

$$\mathcal{D}_1 = 1 - \varphi^2(q, 1)e^{i2q} \tag{10.3.8}$$

совпадает с аналогичной величиной (9.5.6) для тока.

Напомним, что функция $\varphi(q, \alpha)$ выражается через интеграл Френеля по формуле (9.2.9) и принимает значение $\varphi(q, -1) = 1$. Учитывая это свойство функции $\varphi(q, \alpha)$, нетрудно показать, что

$$\Phi_1(\pm 1, \alpha_0) = \Phi_1(\alpha, \pm 1) = 0. \tag{10.3.9}$$

Таким образом, полученная приближенная формула удовлетворяет строгим соотношениям (10.1.15). Кроме того, она удовлетворяет также и принципу взаимности

$$\Phi_1(\alpha, \alpha_0) = \Phi_1(\alpha_0, \alpha). \tag{10.3.10}$$

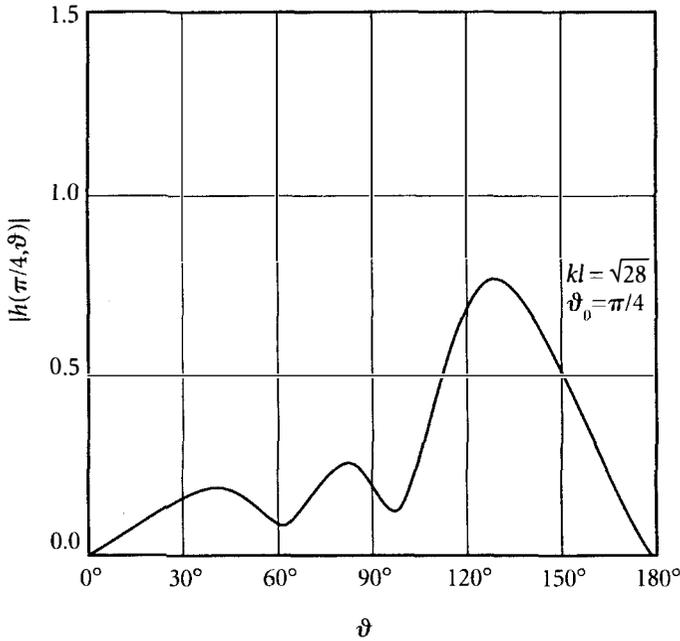


Рис. 10.3.2. Диаграмма рассеяния плоской волны на ленте при наклонном падении

Абсолютная погрешность первого приближения $\tilde{P}_1(\alpha, \alpha_0)$ имеет согласно (9.3.2) и (10.3.4) следующую оценку:

$$\tilde{P}_1(\alpha, \alpha_0) = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}O(\sqrt{q})}{[1+q(1+\alpha)][1+q(1+\alpha_0)]} \text{ при } q \gg 1. \quad (10.3.11)$$

Кроме того, из (10.3.9) и (10.3.5) следует также, что

$$P_1(\alpha, \pm 1) = P_1(\pm 1, \alpha_0) = 0. \quad (10.3.12)$$

На рис. 10.3.1 и 10.3.2 построены графики функции

$$h(\vartheta_0, \vartheta) = \frac{1}{iq} \Phi_1(\alpha, \alpha_0) \quad (10.3.13)$$

при $\vartheta_0 = \pi/4$ и $\vartheta_0 = \pi/2$. Оказывается, что уже при $kl = \sqrt{28}$ они в пределах графической точности совпадают с точными кривыми для

функции h , которые были вычислены по строгим рядам, полученным методом разделения переменных в эллиптической системе координат.

Интересно отметить, что полученная здесь функция $\Phi_1(\alpha, \alpha_0)$ полностью совпадает с выражением (7.8.10), найденным выше на основе физических соображений, и, следовательно, оценка (10.3.11) служит строгим обоснованием этого приближенного выражения.

Формула (10.3.7) не отличается по степени сложности от выражения, полученного в работе Хаскинда и Вайнштейна [122], но имеет более высокую точность. В частности, для интегрального поперечника рассеяния

$$S(\alpha_0) = -\frac{2}{k} \operatorname{Im}\{\Phi(-\alpha_0, \alpha_0)\} \quad (10.3.14)$$

формула (10.3.7) дает согласно (7.8.18) при нормальном падении ($\alpha_0 = 0$) плоской волны выражение

$$S(0) = 4l \left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(q - \pi/4)}{q^{3/2}} + \frac{2 \cos(2q)}{\pi q^2} + O(q^{-5/2}) \right]. \quad (10.3.15)$$

Тогда как из результатов работы [122] следует

$$S(0) = 4l \left[1 + \frac{\sin 2q}{2\pi q} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(q - \pi/4)}{q^{3/2}} + \frac{7 \cos(2q)}{8\pi q^2} + O(q^{-5/2}) \right]. \quad (10.3.16)$$

Как и следовало ожидать, выражение (10.3.15) совпадает с известной формулой (31.5), приведенной в книге [121]. А выражение Хаскинда и Вайнштейна (10.3.16) правильно описывает только первый член асимптотического разложения, не зависящий от kl , т. е. член, соответствующей приближению геометрической оптики. Лишь в случае $\sin 2q = 0$ она дает также и первый поправочный член порядка $(kl)^{-3/2}$. В связи с выражением (10.3.16) интересно также оценить погрешность наших формул, опубликованных в [5, 13]. Можно показать, что согласно этим формулам

$$S(0) = 4l \left[1 + \frac{\sin 2q}{\pi q} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(q - \pi/4)}{q^{3/2}} + \frac{\cos(2q)}{\pi q^2} + O(q^{-5/2}) \right]. \quad (10.3.17)$$

Сравнивая теперь выражения (10.3.16) и (10.3.17) с точной формулой (10.3.15), мы видим, что формула (10.3.17), найденная на основе физических соображений, и формула Хаскинда—Вайнштейна (10.3.16), полученная существенно более сложным путем, имеют одинаковый порядок погрешности.

§ 10.4. N -е приближение для диаграммы рассеяния

10.4.1. Вывод приближенной формулы

Оставим n первых членов в ряде (10.1.4), а для остальных воспользуемся асимптотическим представлением (10.2.28). Полученные при этом результаты для функции (10.1.3) представим в виде

$$\Phi(\alpha, \alpha_0) = \Phi_n(\alpha, \alpha_0) + P_n(\alpha, \alpha_0), \quad (10.4.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n(\alpha, \alpha_0) &= \tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Phi}_n(-\alpha, -\alpha_0), \\ P_n(\alpha, \alpha_0) &= \tilde{P}_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{P}_n(-\alpha, -\alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (10.4.2)$$

Причем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0) &= e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \varphi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - \\ &- \frac{(-1)^n e^{i\kappa\alpha} \varphi_n(1, \alpha) \varphi_n(1, \beta_n)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n(1, 1) e^{iq}}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right]^{m-1} e^{iqn + i\kappa\beta_n} + \\ &+ \frac{(-1)^n e^{i\kappa\alpha} \varphi_n(1, \alpha) \varphi_n(1, -\beta_n) \varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}^2(1, 1)} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n(1, 1) e^{iq}}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right]^{m-2} e^{iq(n+1) - i\kappa\beta_n} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0) &= e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \varphi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - (-1)^n \frac{e^{iqn}}{\mathcal{D}_n} \times \\ &\times \left[\varphi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \varphi_n(1, -\beta_n) \frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right] \frac{\varphi_n(1, \alpha)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{i\kappa\alpha}, \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

где $\beta_n = (-1)^n \alpha_0$,

$$\mathcal{D}_n = 1 - \left[\frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq} \right]^2 \quad (10.4.4)$$

и $n = 2, 3, 4, \dots$. Можно показать, что полученное выражение (10.4.2) для Φ_n удовлетворяет теореме взаимности

$$\Phi_n(\alpha, \alpha_0) = \Phi_n(\alpha_0, \alpha). \quad (10.4.5)$$

10.4.2. Проверка граничных условий

Из формулы (10.4.3) видно, что рассеянное поле можно искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n(\alpha, \alpha_0) = & e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \varphi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} + \\ & + e^{-i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \varphi_m(-\alpha, \beta_m) e^{iq(m-1) + i\kappa\beta_m} + \\ & + A\varphi_n(1, \alpha) e^{i\kappa\alpha} + B\varphi_n(1, -\alpha) e^{-i\kappa\alpha}. \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Накладывая на функцию $\Phi_n(\alpha, \alpha_0)$ требование

$$\Phi_n(\pm 1, \alpha_0) = 0, \quad (10.4.7)$$

получим систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A + B \frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq} &= -(-1)^n \frac{\varphi_n(1, \beta_n)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iqn + i\kappa\beta_n}, \\ A \frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq} + B &= -(-1)^n \frac{\varphi_n(1, -\beta_n)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iqn - i\kappa\beta_n}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4.8)$$

Откуда

$$\begin{aligned} A(\beta_n) &= \frac{-(-1)^n e^{iqn}}{\varphi_{n-1}(1, 1) \mathcal{D}_n} \left[\varphi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \frac{\varphi_n(1, -\beta_n) \varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right], \\ B(\beta_n) &= A(-\beta_n). \end{aligned} \quad (10.4.9)$$

Подставляя величины A и B в выражение (10.4.6), убеждаемся, что оно совпадает с (10.4.2), где $\Phi(\alpha, \alpha_0)$ определяется согласно (10.4.3). Таким образом, найденное приближенное выражение удовлетворяет строгому соотношению

$$\Phi_n(\pm 1, \alpha_0) = \Phi_n(\alpha, \pm 1) = 0. \quad (10.4.10)$$

10.4.3. Оценка погрешности

Абсолютная погрешность n -го приближения определяется в основном погрешностью $(n+1)$ -го члена, то есть значением $U_{n+1, n}(\alpha, \alpha_0)$. Поэтому

в соответствии с формулами (10.2.27) и (10.2.28) имеем оценку

$$|\tilde{P}_n(\alpha, \alpha_0)| = O[U_{n+1,n}(\alpha, \alpha_0)] \leqslant \frac{O\left[q^{-\frac{n}{2}}\right]}{\left[1 + \sqrt{q(1 + \alpha)}\right] \left[1 + \sqrt{q(1 + (-1)^n \alpha_0)}\right]}, \quad (10.4.11)$$

где $n = 2, 3, \dots$ и $q \gg n$. При $n = 2$ эту оценку можно уточнить, если учесть асимптотические представления (10.2.27) и (9.3.2). Оказывается, что

$$|\tilde{P}_2(\alpha, \alpha_0)| = O[U_{3,2}(\alpha, \alpha_0)] \leqslant \frac{\sqrt{1 + \alpha} \sqrt{1 + \alpha_0} O(q^{-1})}{[1 + q(1 + \alpha)][1 + q(1 + \alpha_0)]} \text{ при } q \gg 1. \quad (10.4.12)$$

Кроме того, из формул (10.1.15), (10.4.1) и (10.4.10) следует

$$P_n(\alpha, \pm 1) = P_n(\pm 1, \alpha_0) = 0. \quad (10.4.13)$$

Это равенство и соотношение (10.4.12) показывают, что оценка (10.4.11) является, по-видимому, завышенной.

Таким образом, найденное n -е приближение (10.4.3) позволяет разделить диаграмму рассеяния в дальней зоне с точностью до любой заданной степени $(kl)^{-n/2}$ при $2kl \gg n$. Погрешность данного приближения при заданном значении q можно сделать (согласно (10.1.16) и (10.4.11)) как угодно малой, увеличивая число n . Однако практическую ценность полученные выражения могут иметь только при $2kl \gg n$, когда для вычисления функций φ_n можно пользоваться асимптотическими формулами, а сами функции убывают с ростом n достаточно быстро.

10.4.4. Интегральный поперечник рассеяния

В заключение параграфа проведем проверку наших результатов. Для этого уточним формулу (10.3.15), используя приближение второго порядка для вычисления более полного асимптотического разложения интегрального поперечника рассеяния (10.3.14) при нормальном падении плоской волны. Согласно (10.4.2) и (10.4.3)

$$\Phi_2(\alpha, \alpha) = \tilde{\Phi}_2(\alpha, \alpha) + \tilde{\Phi}_2(-\alpha, -\alpha), \quad (10.4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\alpha, \alpha) &= -\varphi_1(\alpha, \alpha)e^{iq\alpha} + \varphi_2(\alpha, -\alpha)e^{iq-} \\ &\quad - \frac{e^{i2q}}{\mathcal{D}_2} [\varphi_2^2(1, \alpha)e^{iq\alpha} - \varphi_2(1, \alpha)\varphi_2(1, -\alpha)\varphi_2(1, 1)e^{iq}], \end{aligned} \quad (10.4.15)$$

$$\mathcal{D}_2 = 1 - \left[\frac{\varphi_2(1, 1)}{\varphi_1(1, 1)} e^{iq} \right]^2, \quad \varphi_1(\alpha, \alpha) = \frac{1 + \alpha}{2\alpha}, \quad \varphi_1(1, 1) = 1. \quad (10.4.16)$$

Полагая $\alpha = 0$ в (10.4.14), получим

$$\Phi_2(0, 0) = -1 - iq + 2\varphi_2(0, 0)e^{iq} - 2 \frac{\varphi_2^2(1, 0)e^{i2q}}{1 + \varphi_2(1, 1)e^{iq}}, \quad (10.4.17)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(1, 0) &= \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)}}{\sqrt{1-t} t \sqrt{1+t}} dt, \\ \varphi_2(0, 0) &= \frac{1}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{e^{iq(t-1)}}{t^2} dt, \\ \varphi_2(1, 1) &= \frac{2}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)}}{\sqrt{1-t} (1+t)^{3/2}} dt. \end{aligned} \right\} \quad (10.4.18)$$

При $q \gg 1$ эти выражения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(1, 0) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} q^{-1/2} + \frac{5}{8} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} q^{-3/2} + O(q^{-5/2}), \\ \varphi_2(0, 0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} q^{-1/2} + \frac{7}{4} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} + O(q^{-5/2}), \\ \varphi_2(1, 1) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-1/2} + \frac{3}{8} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} + O(q^{-5/2}). \end{aligned} \right\} \quad (10.4.19)$$

Определяя с помощью этих выражений функцию $\Phi_2(0, 0)$ и подставляя затем ее в формулу (10.3.14), находим искомое асимптотическое разложение для интегрального поперечника рассеяния

$$S(0) = 4l \left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(q - \pi/4)}{q^{3/2}} + \frac{2 \cos 2q}{\pi q^2} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(3q + \pi/4) - (7\pi/4) \cos(q + \pi/4)}{q^{5/2}} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin 4q - (5\pi/2) \sin 2q}{q^3} + O(q^{-7/2}) \right]. \quad (10.4.20)$$

Как и следовало ожидать, полученное выражение для S полностью совпадает с асимптотическим представлением (31.5) из книги [121].

§ 10.5. Зависимость между приближенными выражениями для тока и диаграммы рассеяния

Выше мы нашли независимым путем приближенные выражения для плотности тока, возбуждаемого на ленте, и для диаграммы рассеяния в дальней зоне. Выясним теперь вопрос, какая связь существует между этими выражениями.

Из формул (10.1.1), (10.1.3) и (8.4.7) следует, что

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = 2\pi i k \sqrt{1 - \alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(k\alpha, k\alpha_0) e^{i k \alpha_0 n}. \quad (10.5.1)$$

Но на основании (8.3.1), (8.3.2) это выражение можно переписать как

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0) = i k \sqrt{1 - \alpha^2} e^{i k \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}(z, \alpha_0) e^{-i k z \alpha} dz. \quad (10.5.2)$$

Величина $\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0)$ выражается через функции $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$, а $\tilde{J}(z, \alpha_0)$ — через функции $\chi_n(z, \alpha_0)$. Связь между функциями φ_n и χ_n определяется согласно (8.5.7), (10.1.7) формулами

$$\chi_n(z, \alpha_0) e^{i k z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k z t} \frac{\varphi_n(t, \alpha_0)}{\sqrt{1 - t^2}} dt, \quad (10.5.3)$$

$$\varphi_n(\alpha, \alpha_0) = -i k \sqrt{1 - \alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k (1 - \alpha) z} \chi_n(z, \alpha_0) dz. \quad (10.5.4)$$

Подставляя теперь в выражение (10.5.2) функцию (9.6.3), с помощью формулы (10.5.4) получаем

$$\tilde{\Phi}'_n(\alpha, \alpha_0) = e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \varphi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - (-1)^n \frac{e^{iqn}}{\tilde{D}_n} \times \quad (10.5.5)$$

$$\times \left[\chi_n(2l, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \chi_n(2l, -\beta_n) \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right] \frac{\varphi_n(1, \alpha) e^{i\kappa\alpha}}{\chi_{n-1}(2l, 1)}.$$

Так как $\varphi_n(1, \alpha) \neq \chi_n(2l, \alpha)$, то очевидно, что

$$\tilde{\Phi}'_n(\alpha, \alpha_0) \neq \tilde{\Phi}_n(\alpha_0, \alpha), \quad (10.5.6)$$

где $\tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0)$ определяется формулой (10.4.3) и, кроме того,

$$\Phi'_n(\alpha, \alpha_0) \neq \Phi'_n(\alpha_0, \alpha), \quad (10.5.7)$$

где

$$\Phi'_n(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Phi}'_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Phi}'_n(-\alpha, -\alpha_0). \quad (10.5.8)$$

Ясно также, что функция $\Phi'_n(\alpha, \alpha_0)$ не удовлетворяет граничным условиям (10.1.15). Таким образом, непосредственное интегрирование приближенных формул для тока, погрешность которых может быть как угодно малой, приводит к выражениям для диаграммы рассеяния, которые не удовлетворяют принципу взаимности и граничным условиям.

Этот результат является довольно неожиданным и поэтому интересным. Хорошо известно, что интегрирование тока $j^{(0)}(z, \alpha_0)$, соответствующего приближению физической оптики, дает выражение для диаграммы, которое не удовлетворяет принципу взаимности и граничным условиям (см., например, [13]). Аналогичный факт был обнаружен нами для тонкого вибратора [14]. Ожидалось, однако, что если ток вычислить более точно, то интегрируя его, можно получить выражения, которые будут удовлетворять принципу взаимности и граничным условиям. Теперь мы видим, что такие надежды не оправдались.

В связи с этим приобретает важную роль разработка методов, которые бы позволяли по приближенным выражениям для тока находить рассеянное поле, удовлетворяющее принципу взаимности и граничным условиям. Примером такого метода может служить развитая выше, в главе 7, физическая теория излучения.

Вернемся теперь снова к выражению (10.5.5) и оценим разность

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}'_n(\alpha, \alpha_0) - \tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0) &= (-1)^n \varphi_n(1, \alpha) e^{iqn+i\kappa\alpha} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\varphi_{n-1}(1, 1) \mathcal{D}_n} \left[\varphi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \varphi_n(1, -\beta_n) \frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{iq-i\kappa\beta_n} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\chi_{n-1}(2l, 1) \hat{\mathcal{D}}_n} \left[\chi_n(2l, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \chi_n(2l, -\beta_n) \frac{\chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq-i\kappa\beta_n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

Согласно формулам (9.4.8), (9.4.10) и (10.2.14)

$$\begin{aligned} \chi_n(2l, \alpha) &= \varphi(q, \alpha) \varphi^{n-1}(q, 1) \left[1 + O\left(\frac{n}{q}\right) \right], \\ \varphi_n(\alpha, 1) &= \varphi(q, \alpha) \varphi^{n-2}(q, 1) \left[1 + O\left(\frac{n}{q}\right) \right] \end{aligned} \quad (10.5.10)$$

при $q \gg n$. С помощью этих соотношений можно показать, что при $q \gg n$

$$\left| \frac{\chi_n(2l, \beta_n)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} - \frac{\varphi_n(1, \beta_n)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} \right| \leq \frac{O(q^{-1})}{1 + \sqrt{q(1 + \beta_n)}}, \quad (10.5.11)$$

$$|\mathcal{D}_n - \hat{\mathcal{D}}_n| \leq O(q^{-2}), \quad (10.5.12)$$

$$\left| \frac{\chi_n(2l, -\beta_n) \chi_n(2l, 1)}{\chi_{n-1}^2(2l, 1)} - \frac{\varphi_n(1, -\beta_n) \varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}^2(1, 1)} \right| \leq \frac{O(q^{-3/2})}{1 + \sqrt{q(1 - \beta_n)}}. \quad (10.5.13)$$

Следовательно,

$$\left| \tilde{\Phi}'_n(\alpha, \alpha_0) - \tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0) \right| \leq \frac{O(q^{-n/2})}{\left[1 + \sqrt{q(1 + \alpha)} \right] \left[1 + \sqrt{q(1 + (-1)^n \alpha_0)} \right]} \quad (10.5.14)$$

для $q \gg n$. Сравнивая это неравенство с (10.4.11), мы видим, что $\tilde{\Phi}'_n$ совпадает с $\tilde{\Phi}_n$ с точностью до величины порядка $\tilde{P}_n(\alpha, \alpha_0)$, т. е. порядка погрешности, с которой определена функция $\tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0)$

Вычислим теперь ток на ленте, исходя из приближенных выражений для диаграммы рассеянного поля в дальней зоне. Согласно (10.5.2) имеем

$$\bar{J}(z, \alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-l)\alpha} \frac{\tilde{\Phi}(\alpha, \alpha_0)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} d\alpha. \quad (10.5.15)$$

Подставляя сюда приближенное выражение $\tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0)$ из (10.4.3), находим

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_n(z, \alpha_0) &= -e^{ikz} \sum_{m=1}^n (-1)^m \chi_m(z, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} + (-1)^n \frac{e^{iqn}}{\mathcal{D}_n} \times \\ &\quad (10.5.16) \\ &\times \left[\varphi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \varphi_n(1, -\beta_n) \frac{\varphi_n(1, 1)}{\varphi_{n-1}(1, 1)} e^{i\varphi - i\kappa\beta_n} \right] \frac{\chi_n(z, 1)}{\chi_{n-1}(2l, 1)} e^{ikz}. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с выражением (9.6.3), мы видим, что они отличаются. Следовательно, ток

$$J'_n(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}'_n(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}'_n(l - z, -\alpha_0), \quad (10.5.17)$$

вычисленный по как угодно точным выражениям для диаграммы рассеяния, не обращается в нуль на краях ленты и отличен от нуля на всей ленте при скользящем падении плоской волны:

$$J'_n(\pm l, \alpha_0) \neq 0, \quad J'_n(z, \pm 1) \neq 0. \quad (10.5.18)$$

Т.е. ток $J'_n(z, \alpha_0)$ не удовлетворяет краевым и предельным условиям (8.5.19), (8.5.20).

С помощью соотношений (10.5.11), (10.5.12) и (10.5.13) нетрудно показать, что

$$\tilde{J}'_n(z, \alpha_0) - \tilde{J}_n(z, \alpha_0) = O \left[\tilde{R}_n(z, \alpha_0) \right] \quad (10.5.19)$$

при $q \gg n$ и $0 \leq z \leq \infty$, где функция $\tilde{R}_n(z, \alpha_0)$ определяется формулой (9.6.13). Иначе говоря, ток $\tilde{J}'_n(z, \alpha_0)$, вычисленный по диаграмме $\tilde{\Phi}_n(\alpha, \alpha_0)$, отличается от тока $\tilde{J}(z, \alpha_0)$ на величину порядка его погрешности.

§ 10.6. Дополнительные замечания

- Некоторые результаты этой главы были опубликованы в работах [18, 22, 24].
- Первое приближение, полученное по формуле (10.3.6), было использовано в [67] для вычисления рассеянного поля. Как показано в работе [68], данные на рис. 8 из [67], использующие (10.3.6), являются результатом неправильных численных расчетов в [67].

Глава 11

Дифракция плоской волны на ленте, ориентированной в направлении поляризации (граничная задача Дирихле)

Выше, в главах 8–10, мы рассмотрели асимптотическое решение граничной задачи Неймана. Ниже будет изложено в более краткой форме аналогичное исследование для граничной задачи Дирихле.

§ 11.1. Формулировка и решение функциональных уравнений

Пусть плоская волна

$$E_x = e^{-ik(z\alpha_0 + y\sqrt{1-\alpha_0^2}) - i\omega t}, \quad H_x = 0, \quad \alpha_0 = \cos \vartheta_0 \quad (11.1.1)$$

падает на идеально проводящую ленту с координатами $y = 0$, $-\infty \leq x \leq \infty$, $-l \leq z \leq l$. Так же как и в § 8.2, можно показать, что краевые волны рассеянного поля обладают свойствами симметрии. Поэтому ток, возбуждаемый на ленте падающей волной (11.1.1), мы можем представить в виде

$$j_x(z, \alpha_0) = \frac{c}{2\pi} J(z, \alpha_0), \quad (11.1.2)$$

где

$$J(z, \alpha_0) = j^{(0)}(z, \alpha_0) + \tilde{J}(z+l, \alpha_0) + \tilde{J}(l-z, -\alpha_0). \quad (11.1.3)$$

Здесь

$$j^{(0)}(z, \alpha_0) = \sqrt{1-\alpha_0^2} e^{-ikz\alpha_0} \quad (11.1.4)$$

соответствует току, возбуждаемому на неограниченной плоскости ($-\infty \leq z \leq \infty, y = 0$), а величина

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, \alpha_0) \quad (11.1.5)$$

описывает волны, возникающие при последовательной дифракции на краях ленты.

Представим далее парциальную краевую волну тока в виде интеграла Фурье

$$j_n(z, \alpha_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(t, k\alpha_0) e^{izt} dt \quad (11.1.6)$$

и обозначим через $\mathbf{E}_n(z, y, \alpha_0)$ электрический вектор поля, излучаемого этим током. Тангенциальная компонента E_x согласно (1.2.2) равна

$$E_x = ikA_x, \quad (11.1.7)$$

где

$$A_x = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} j_n(\zeta, \alpha_0) H_0^{(1)} \left(k \sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2} \right) d\zeta. \quad (11.1.8)$$

Подставляя сюда выражение (8.3.5) для функции Ханкеля, получим

$$A_x = i \int_{-\infty}^{\infty} G_n(w, k\alpha_0) \frac{e^{i(vy+wz)}}{v} dw, \quad y \geq 0. \quad (11.1.9)$$

Поэтому

$$E_{nx}(z, 0, \alpha_0) = -k \int_{-\infty}^{\infty} G_n(t, k\alpha_0) \frac{e^{izt}}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt. \quad (11.1.10)$$

В результате условия

$$J(z, \alpha_0) = 0 \quad \text{при } |z| > l, \quad (11.1.11)$$

$$E_{nx}(\zeta, 0, \alpha_0) = 0 \quad \text{при } \zeta > 0 \quad (11.1.12)$$

приводят нас к рекуррентной системе функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, k\alpha_0) e^{i\zeta t} dt &= -j^{(0)}(\zeta - l, \alpha_0), \quad \zeta < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [G_n(t, k\alpha_0) + G_{n-1}(-t, -k\alpha_0) e^{-i2lt}] e^{i\zeta t} dt &= 0, \\ \zeta < 0, \quad n = 2, 3, \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} G_n(t, k\alpha_0) \frac{e^{i\zeta t}}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt &= 0, \quad \zeta > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (11.1.13)$$

где контур интегрирования проходит по вещественной оси и огибает точку ветвления $t = -k$ сверху, а точку ветвления $t = k$ — снизу.

Применяя далее к этой системе метод факторизации, находим

$$G_1(k\alpha, k\alpha_0) = \frac{1}{2\pi i k} \frac{\sqrt{1 - \alpha} \sqrt{1 - \alpha_0}}{\alpha + \widehat{\alpha}_0} e^{i k \alpha_0}, \quad (11.1.14)$$

$$G_n(t, k\alpha_0) = -\frac{\sqrt{k-t}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2lu}}{\sqrt{k-u}(u-t)} G_{n-1}(-u, -k\alpha_0) du, \quad (11.1.15)$$

$n=2,3,\dots$

Здесь, как и раньше, символы \frown и \smile указывают, с какой стороны контур интегрирования огибает соответствующий полюс.

§ 11.2. Диаграмма рассеяния и уравнение краевых волн

Согласно (11.1.7), (11.1.9) поверхностные токи $j_n(z+l, \alpha_0)$ и $j_n(l-z, -\alpha_0)$ излучают соответственно поле

$$\left. \begin{aligned} E_{nx} &= -k \int_{-\infty}^{\infty} G_n(w, k\alpha_0) \frac{e^{ivy}}{v} e^{iw(z+l)} dw, \\ E_{nx} &= -k \int_{-\infty}^{\infty} G_n(-w, -k\alpha_0) \frac{e^{ivy}}{v} e^{iw(z-l)} dw, \end{aligned} \right\} y \geq 0, \quad (11.2.1)$$

где $v = (k^2 - w^2)^{1/2}$ и $\text{Im } v \geq 0$. Поэтому полное рассеянное поле при $y \geq 0$ можно представить в виде

$$E_x = -e^{ik(-z\alpha_0 + y\sqrt{1-\alpha_0^2})} - k \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n(w, k\alpha_0) e^{iwl} + G_n(-w, -k\alpha_0) e^{-iwl} \right] \frac{e^{i(vy+wz)}}{v} dw. \quad (11.2.2)$$

Полагая здесь

$$w = k \cos \tau, \quad v = k \sin \tau, \quad z = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

и применяя метод перевала [78], получим для рассеянного поля в дальней зоне выражение

$$E_x = 2\pi i k \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n(k\alpha, k\alpha_0) e^{ik\alpha} + G_n(-k\alpha, -k\alpha_0) e^{-ik\alpha} \right] \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (11.2.3)$$

где $\alpha = \cos \vartheta$ и $\alpha_0 = \cos \vartheta_0$.

Введем функцию

$$G(\alpha, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(k\alpha, k\alpha_0). \quad (11.2.4)$$

В соответствии с выражением (11.1.15) члены этого ряда определяются рекуррентной формулой

$$G_n(k\alpha, k\alpha_0) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqu}}{\sqrt{1+u(u+\hat{\alpha})}} G_{n-1}(ku, -k\alpha_0) du, \quad (11.2.5)$$

где $q = 2\kappa = 2kl$ и точка ветвления $u = -1$ обходится сверху, полюс $u = -\alpha$ сверху и точка ветвления $u = 1$ снизу. Следовательно, ряд (11.2.4) можно рассматривать как ряд Неймана для интегрального уравнения

$$G(\alpha, \alpha_0) = \tilde{G}_1(k\alpha, k\alpha_0) + \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqu}}{\sqrt{1+u(u+\hat{\alpha})}} G(u, -\alpha_0) du, \quad (11.2.6)$$

где

$$\tilde{G}_1(k\alpha, k\alpha_0) = \frac{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\alpha_0}}{\alpha + \alpha_0} e^{ik\alpha_0}. \quad (11.2.7)$$

Это интегральное уравнение впервые было получено (для функции $G(-\alpha, \alpha_0)$) иным путем в работе [124] и использовалось затем в работах [122, 125, 134] для асимптотического решения задачи о дифракции на ленте. Однако сущность уравнения оставалась завуалированной. Наш вывод вскрывает его физический смысл. Член ряда Неймана порядка n для этого уравнения описывает диаграмму краевой волны n -го порядка. Поэтому уравнение (11.2.6), как и уравнение (8.4.10), можно назвать *уравнением краевых волн*.

§ 11.3. Ряд последовательных приближений и интегральное уравнение для тока

11.3.1. Ряд по функциям $\xi_n(z, \alpha_0)$ и некоторые свойства этих функций

Пользуясь формулами (11.1.5), (11.1.6) и (11.1.14), (11.1.15), можно получить следующее выражение для тока:

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = e^{ikz} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \xi_m(z, -\beta_m) e^{iq(m-1) - ik\beta_m}, \quad (11.3.1)$$

где, по-прежнему, $\beta_m = (-1)^m \alpha_0$ и

$$\xi_1(z, \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz(t-1)} \frac{\sqrt{1-t}}{t + \widehat{\alpha}} dt, \quad (11.3.2)$$

$$\xi_2(z, \alpha) e^{iq+ikz} = -\frac{1}{2(\pi i)^2} \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikzt_2} \frac{\sqrt{1-t_2}}{t_2 + \widehat{t_1}} dt_2, \quad (11.3.3)$$

$$\begin{aligned} \xi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= -\frac{1}{2(\pi i)^n} \times \\ &\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t_1)g(t_2)\dots g(t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha)(t_2 + t_1)(t_3 + t_2)\dots (t_{n-1} + t_{n-2})} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikzt_n} \frac{\sqrt{1-t_n}}{t_n + \widehat{t_{n-1}}} dt_n, \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

где

$$g(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} e^{igt}, \quad q = 2\kappa, \quad \kappa = kl. \quad (11.3.5)$$

Перепишем эти выражения для положительных значений z :

$$\xi_1(z, \alpha) = \sqrt{2}\psi(kz, \alpha), \quad \psi(kz, \alpha) = \frac{i}{\sqrt{2(1+\alpha)}} \varphi_{kz}^{(1)}(kz, \alpha), \quad (11.3.6)$$

$$\xi_2(z, \alpha) e^{iq+ikz} = \frac{1}{(\pi i)^2} \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t_1) dt_1}{t_1 + \alpha} \int_1^{1+i\infty} e^{ikzt_2} \frac{\sqrt{1-t_2}}{t_2 + t_1} dt_2, \quad (11.3.7)$$

$$\begin{aligned} \xi_n(z, \alpha) e^{iq(n-1)+ikz} &= \frac{1}{(\pi i)^n} \times \\ & \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t_1)g(t_2)\dots g(t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha)(t_2 + t_1)(t_3 + t_2)\dots (t_{n-1} + t_{n-2})} \times \\ & \times \int_1^{1+i\infty} e^{ikzt_n} \frac{\sqrt{1-t_n}}{t_n + t_{n-1}} dt_n, \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

где интегрирование ведется по левому берегу разреза от $1 \rightarrow 1+i\infty$, где $\arg\{(1-t)^{1/2}\} = -\pi/4$, а функция $\varphi_q^{(1)}(q, \alpha)$ — производная от интеграла Френеля (см. (9.2.6), (9.2.9)).

Из этих формул следует, что при $z > 0$ и $z \rightarrow 0$

$$\xi_n(z, \alpha) = O\left(\frac{1}{\sqrt{kz}}\right) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \quad (11.3.9)$$

т. е. каждая парциальная краевая волна тока вблизи ребра ленты имеет ту же особенность, что и первичная волна Зоммерфельда.

Кроме того, из приведенных выше формул (11.3.2), (11.3.3) и (11.3.4) вытекают при $z < 0$ соотношения

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(z, \alpha) &= \sqrt{1+\alpha} e^{-ikz(1+\alpha)}, \\ \xi_n(z, \alpha) &= \xi_{n-1}(2l-z, \alpha) e^{-i2kz}, \end{aligned} \right\} z < 0 \quad (11.3.10)$$

с помощью которых нетрудно проверить, что $J(z, \alpha_0) = 0$ при $|z| > l$.

11.3.2. Интегральное уравнение для тока

Умножая обе части равенства (11.1.15) на e^{izt} и интегрируя затем по t в пределах от $-\infty$ до ∞ , получим рекуррентную формулу для тока

$$j_n(z, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s - 2l, z) j_{n-1}(s, -\alpha_0) ds, \quad (11.3.11)$$

где

$$K(x, z) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \sqrt{k - t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{\sqrt{k - u} u - t} du, \quad (11.3.12)$$

причем

$$K(x, z) = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad (11.3.13)$$

$$K(x, z) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+z)u} du = -\pi \delta(x + z) \quad \text{при } z < 0. \quad (11.3.14)$$

Следовательно, формулу (11.3.11) можно преобразовать к виду

$$j_n(z, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(x, z) j_{n-1}(2l + x, -\alpha_0) dx, \quad (11.3.15)$$

откуда, в частности, вытекает равенство

$$j_n(z, \alpha_0) = -j_{n-1}(2l - z, -\alpha_0) \quad \text{при } z < 0. \quad (11.3.16)$$

Очевидно, что ряд

$$j(z, \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(z, \alpha_0) \quad (11.3.17)$$

можно рассматривать как ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода

$$j(z, \alpha_0) = j_1(z, \alpha_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(x, z) j(2l + x, -\alpha_0) dx, \quad (11.3.18)$$

где

$$j_1(z, \alpha_0) = -\sqrt{1 - \alpha_0} \xi_1(z, \alpha_0) e^{ikz + i\kappa\alpha_0}. \quad (11.3.19)$$

Применяя к результатам Шварцшильда [139] теорему двойственности, можно далее показать, что результирующая краевая волна тока (11.3.17) удовлетворяет уравнению (11.3.18) с ядром

$$\hat{K}(x, z) = \sqrt{\frac{x}{z}} \frac{e^{ik(x+z)}}{x+z} \quad \text{при } x > 0 \text{ и } z > 0. \quad (11.3.20)$$

Выкладки, аналогичные тем, которые были приведены нами в § 8.7, позволяют убедиться в эквивалентности ядер (11.3.12) и (11.3.20). Таким образом, как в случае граничной задачи Неймана, наше решение (11.3.1) оказывается эквивалентным решению Шварцшильда и отличается от него только формой записи. Шварцшильд доказал равномерную сходимость своего решения, поэтому мы не будем останавливаться на этом вопросе, тем более, что в главе 8 уже был указан путь такого доказательства.

Выше мы получили формальное решение функциональных уравнений для граничной задачи Дирихле и установили связь этого решения с другими известными работами. Перейдем теперь к асимптотическому исследованию найденного решения.

§ 11.4. Асимптотические представления для функций $\xi_n(z, \alpha)$

Применяя к функциям $\xi_n(z, \alpha)$ при $z \geq 0$ лемму 2 из § 9.1, можно получить следующие асимптотические разложения при $q \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \xi_2(z, \alpha) \sim & \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi(kz, 1) + \\ & + \frac{1}{i\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{i^m} \frac{\partial^m \psi(q, \alpha)}{\partial q^m} \int_1^{1+i\infty} e^{ikz(t-1)} \sqrt{1-t} d_m(t) dt, \end{aligned} \quad (11.4.1)$$

где $d_m(t)$ — коэффициенты ряда Тейлора

$$(1+x)^{-1/2}(x+t)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(t)(x-1)^m \quad (11.4.2)$$

и

$$\begin{aligned} \xi_n(z, \alpha) \sim & \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi^{n-2}(q, 1)\psi(kz, 1) + \\ & + \frac{1}{(i\pi)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_1^{1+i\infty} e^{ikz(t_n-1)} \sqrt{1-t_n} dt_n \times \\ & \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \frac{\prod_{s=1}^{n-1} \sqrt{1-t_s} v_m(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha) \prod_{s=2}^{n-1} (1+t_s)}, \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} v_m(t_1, t_2, \dots, t_n) = & \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \\ & \left. + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right]^m g_n(1, 1, \dots, 1, t_n), \end{aligned} \quad (11.4.4)$$

$$g_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{(1+t_1)^{-1/2} \prod_{s=2}^{n-1} \sqrt{1+t_s}}{(t_1+t_2)(t_2+t_3) \dots (t_{n-1}+t_n)}. \quad (11.4.5)$$

$n=3, 4, \dots$

Согласно формуле (11.3.6) здесь

$$\psi(q, \alpha) = \frac{1}{i\pi\sqrt{2}} \int_1^{1+i\infty} e^{iq(t-1)} \frac{\sqrt{1-t}}{t+\alpha} dt = \frac{i}{\sqrt{2(1+\alpha)}} \varphi_q^{(1)}(q, \alpha). \quad (11.4.6)$$

Правая часть формулы (11.4.1) и каждый член ряда в (11.4.3) выражаются через сумму произведений однократных интегралов типа $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ и

$$\frac{\sqrt{2}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iz(t-1)}}{\sqrt{1-t}} \frac{t-1}{(1+t)^m} dt = \frac{1}{i} \frac{d}{dz} \hat{\varphi}_m(z), \quad (11.4.7)$$

где $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ и $\hat{\varphi}_m(z)$ определяются согласно (9.2.6) и (9.2.7). Нужно подчеркнуть, что хотя эти функции выглядят громоздкими, они могут быть выражены лишь через интегралы Френеля, степенные и экспоненциальные функции q, α и z (см., например, формулы (9.2.10)–(9.2.13)).

Природа возникновения функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ и $\hat{\varphi}_m(z)$ была изложена в § 9.2. Функции $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ порождаются членами $(t_s - 1)^m$ в ряде Тейлора (11.4.4). Функции $\hat{\varphi}_m(z)$ возникают за счет дифференцирования формулы (11.4.5) по переменной t_{n-1} , которая связана с переменной t_n множителем $(t_{n-1} + t_n)^{-1}$. Производная m -го порядка этого множителя в точке $t_{n-1} = 1$ порождает величину $(1 + t_n)^{-m}$ и, следовательно, функцию $\hat{\varphi}_m(z)$.

Асимптотические свойства функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ описываются формулой (9.3.2), тогда как асимптотическое поведение функций $d\hat{\varphi}_m(z)/dz$ следует прямо из (11.4.7). Вводя новую переменную $x = z(t - 1)$, немедленно получаем

$$\frac{d}{dz}\hat{\varphi}_m(z) = O\left[z^{-3/2}\right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (11.4.8)$$

Полагая $z = 0$ в (11.4.7), видим, что

$$\frac{d}{dz}\hat{\varphi}_m(z) = O[1] \quad \text{при } m = 2, 3, 4, \dots \quad \text{для } z \rightarrow 0. \quad (11.4.9)$$

В соответствии с (9.2.7) и (9.3.11) находим соотношение

$$\frac{d}{dz}\hat{\varphi}_1(z) = \frac{d}{dz}\varphi(z, 1) = O\left[z^{-1/2}\right] \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (11.4.10)$$

В этой главе функции $\psi(kz, \alpha)$ играют ключевую роль. Их поведение определяется формулой (11.4.6) и асимптотическими свойствами функций $\varphi(kz, \alpha)$ из (9.3.1), (9.3.2) и (9.3.11). В соответствии с этими выражениями

$$\psi(q, \alpha) = O\left[\frac{q^{-1/2}}{1 + q(1 + \alpha)}\right], \quad (11.4.11)$$

$$\psi_q^{(1)}(q, \alpha) = \frac{\partial}{\partial q}\psi(q, \alpha) = O\left[\frac{q^{-3/2}}{1 + q(1 + \alpha)}\right]$$

для $q \gg 1$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$. Из сопоставления функций $\psi(kz, 1)$ и $d\hat{\varphi}_2(kz)/dkz$ также следует, что

$$d\hat{\varphi}_2(kz)/dkz = O[\psi(kz, 1)] \quad \text{при } kz \rightarrow \infty, \quad (11.4.12)$$

$$\left[\frac{d\hat{\varphi}_2(kz)}{dkz} / \psi(kz, 1)\right] \rightarrow 0 \quad \text{при } kz \rightarrow 0. \quad (11.4.13)$$

Эти две асимптотики могут быть объединены соотношением

$$\left| \frac{d}{dkz} \hat{\varphi}_2(kz) \right| \leq O[\psi(kz, 1)] \quad \text{при } 0 \leq kz \leq \infty. \quad (11.4.14)$$

Используя эти асимптотические выражения для функций $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$, $\hat{\varphi}_m(kz)$ и $\psi(q, \alpha)$, можно вывести ключевые приближенные выражения для функций $\xi_n(z, \alpha)$, подобные приближениям из главы 9. Рассмотрим следующее приближенное выражение:

$$\xi_n(z, \alpha) \approx \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi^{n-2}(q, 1)\psi(kz, 1) + T_{1\xi}, \quad (11.4.15)$$

где

$$T_{1\xi} = \frac{1}{(i\pi)^n} \int_1^{1+i\infty} \sqrt{1-t_n} e^{ikz(t_n-1)} dt_n \times \\ \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \frac{\prod_{s=1}^{n-1} \sqrt{1-t_s} v_1(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha) \prod_{s=2}^{n-1} (1+t_s)}, \quad (11.4.16)$$

$$v_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \right. \\ \left. + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right] g_n(1, 1, \dots, 1, t_n). \quad (11.4.17)$$

Функция g_n определяется формулой (11.4.5). Нужно отметить, что она содержит множитель $(t_{n-1} + t_n)^{-1}$, который связывает t_{n-1} с t_n и порождает множитель $(1+t_n)^{-2}$ в функции v_1 и множитель $d\hat{\varphi}_2(kz)/dkz$ в функции $T_{1\xi}$. Опуская другие детали вычислений, которые были ранее изложены в главе 9, приведем окончательную асимптотическую оценку для $T_{1\xi}$:

$$T_{1\xi} = \psi(kz, 1)\psi^{n-3}(q, 1) \times \\ \times \left\{ O \left[\psi_q^{(1)}(q, \alpha)\psi(q, 1) \right] + (n-2) O \left[\psi(q, \alpha)\psi_q^{(1)}(q, 1) \right] + \right. \\ \left. + \psi(q, \alpha)\psi_q^{(1)}(q, 1) O \left[\frac{d\hat{\varphi}_2(kz)/dkz}{\psi(kz, 1)} \right] \right\}. \quad (11.4.18)$$

После подстановки этого результата в (11.4.15) последнее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_n(z, \alpha) \approx & \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi^{n-2}(q, 1)\psi(kz, 1) \times \\ & \times \left\{ 1 + O\left[\frac{\psi_q^{(1)}(q, \alpha)}{\psi(q, \alpha)}\right] + (n-2)O\left[\frac{\psi_q^{(1)}(q, 1)}{\psi(q, 1)}\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\psi_q^{(1)}(q, 1)}{\psi(q, 1)}O\left[\frac{d\hat{\varphi}_2(kz)/dkz}{\psi(kz, 1)}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.4.19)$$

Асимптотические оценки, приведенные в (11.4.11) и (11.4.14), позволяют упростить это выражение:

$$\xi_n(z, \alpha) \approx \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi^{n-2}(q, 1)\psi(kz, 1) \left\{ 1 + O\left[\frac{n}{q}\right] \right\} \quad (11.4.20)$$

при $q \gg n$, $0 \leq z \leq \infty$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Используя эти формулы, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \xi_{n+m}(z, \alpha) - \frac{\xi_n(z, 1)\xi_n(2l, \alpha)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} \left[\frac{\xi_n(2l, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} \right]^{m-1} \right| \leq \\ \leq |\psi(q, \alpha)\psi(kz, 1)\psi^{m+n-2}(q, 1)| O\left(\frac{n+m}{q}\right) \end{aligned} \quad (11.4.21)$$

или

$$\begin{aligned} \left| \xi_{n+m}(z, \alpha) - \frac{\xi_n(z, 1)\xi_n(2l, \alpha)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} \left[\frac{\xi_n(2l, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} \right]^{m-1} \right| \leq \\ \leq O\left[\frac{q^{-3(m+n-1)/2}}{\sqrt{kz(1+kz)} [1+q(1+\alpha)]} \right] \end{aligned} \quad (11.4.22)$$

при $q \gg n + m$ и $0 \leq z \leq \infty$. Представленные здесь асимптотические выражения (11.4.20) и (11.4.22) играют важную роль при выводе приближенных выражений для тока.

§ 11.5. Первое приближение для тока

Представим ток (11.3.1) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{J}(z, \alpha_0) = & -\sqrt{1 - \alpha_0} e^{i\kappa\alpha_0} \xi_1(z, \alpha_0) e^{ikz} + \\ & + e^{ikz} \sqrt{1 + \alpha_0} e^{-i\kappa\alpha_0} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \xi_m(z, -\alpha_0) e^{iq(m-1)} - \\ & - e^{ikz} \sqrt{1 - \alpha_0} e^{i\kappa\alpha_0} \sum_{m=3,5,\dots}^{\infty} \xi_m(z, \alpha_0) e^{iq(m-1)}. \end{aligned} \quad (11.5.1)$$

Подставляя сюда первые члены асимптотических представлений (11.4.1), (11.4.20), получим

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = \tilde{J}_1(z, \alpha_0) + \tilde{R}_1(z, \alpha_0), \quad (11.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(z, \alpha_0) = & -\sqrt{2(1 - \alpha_0)} \psi(kz, \alpha_0) e^{i\kappa\alpha_0 + ikz} + \frac{\sqrt{2}}{\mathcal{D}_1} \psi(kz, 1) e^{iq} \times \\ & \times [\sqrt{1 + \alpha_0} \psi(q, -\alpha_0) e^{-i\kappa\alpha_0} - \sqrt{1 - \alpha_0} \psi(q, \alpha_0) \psi(q, 1) e^{i\kappa\alpha_0 + iq}] e^{ikz}, \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

$$\mathcal{D}_1 = 1 - \psi^2(q, 1) e^{i2q}, \quad (11.5.4)$$

а абсолютная погрешность имеет величину

$$\tilde{R}_1(z, \alpha_0) = O \left\{ \frac{q^{-3/2}}{\sqrt{kz(1+kz)[1+q(1-\alpha_0)]}} \right\} \quad (11.5.5)$$

при $q \gg 1$ и $0 \leq z \leq \infty$. Полная нормированная плотность тока (11.1.3) имеет в данном приближении следующий вид:

$$J(z, \alpha_0) = J_1(z, \alpha_0) + R_1(z, \alpha_0), \quad (11.5.6)$$

где

$$J_1(z, \alpha_0) = \sqrt{1 - \alpha_0^2} e^{-ikz\alpha_0} + \tilde{J}_1(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}_1(l - z, -\alpha_0), \quad (11.5.7)$$

$$R_1(z, \alpha_0) = \tilde{R}_1(z + l, \alpha_0) + \tilde{R}_1(l - z, -\alpha_0). \quad (11.5.8)$$

Полученные выражения интересно сравнить с результатами работы [125], где вычислено несколько первых членов асимптотического разложения при $q \gg 1$. Заменяя в формуле (11.5.3) z на $l - z$, α_0 на $-\alpha_0$ и полагая $k(l - z) \gg 1$ и $q(1 \pm \alpha_0) \gg 1$, находим следующую величину для волны тока, бегущей от конца $z = l$:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\zeta, \alpha_0) = & \frac{e^{i3\pi/4} \sqrt{1 - \alpha_0}}{2\sqrt{\pi} (1 + \alpha_0)} e^{ikl\alpha_0} \left[1 - i \frac{3}{2k\zeta(1 + \alpha_0)} \right] \frac{e^{ik\zeta}}{(k\zeta)^{3/2}} - \\ & - \frac{i \sqrt{1 + \alpha_0}}{32\pi (1 - \alpha_0)} \frac{e^{ikl(2 - \alpha_0) + ik\zeta}}{(kl)^{3/2} (k\zeta)^{3/2}}, \quad \zeta = l - z. \end{aligned} \quad (11.5.9)$$

Эта же формула получается из выражений (26), приведенных в работе [125], если там устранить опечатки, именно, формулы (26-2) и (26-3) следует писать там в виде

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_2(x|\alpha_0) &= 3 \frac{e^{i3\pi/4} \sqrt{1 - \alpha_0}}{4\sqrt{\pi} (1 + \alpha_0)^2} \frac{e^{i\epsilon(\alpha_0 - x + 1)}}{(1 - x)^{5/2}}, \\ \hat{\psi}_3(x|\alpha_0) &= \frac{1 \sqrt{1 + \alpha_0}}{32\pi (1 - \alpha_0)} \frac{e^{-i\epsilon(\alpha_0 + x - 3)}}{(1 - x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

§ 11.6. N -е приближение для тока

Оставим в ряду (11.3.1) n первых членов, а для остальных воспользуемся асимптотическим представлением (11.4.22). В результате для полного тока получим выражение

$$J(z, \alpha_0) = J_n(z, \alpha_0) + R_n(z, \alpha_0), \quad (11.6.1)$$

где

$$J_n(z, \alpha_0) = \sqrt{1 - \alpha_0^2} e^{-ikz\alpha_0} + \tilde{J}_n(z + l, \alpha_0) + \tilde{J}_n(l - z, -\alpha_0), \quad (11.6.2)$$

$$R_n(z, \alpha_0) = \tilde{R}_n(z + l, \alpha_0) + \tilde{R}_n(l - z, -\alpha_0), \quad (11.6.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n(z, \alpha_0) = & e^{ikz} \sum_{m=1}^n (-1)^m \xi_m(z, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - \\ & - (-1)^n \frac{e^{iqn}}{\tilde{D}_n} \left[\sqrt{1 - \beta_n} \xi_n(2l, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 + \beta_n} \xi_n(2l, -\beta_n) \frac{\xi_n(2l, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right] \frac{\xi_n(z, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} e^{ikz}, \end{aligned} \quad (11.6.4)$$

$$\beta_n = (-1)^n \alpha_0,$$

$$\hat{D}_n = 1 - \left[\frac{\xi_n(2l, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq} \right]^2 \quad \text{при } n = 2, 3, \dots \quad (11.6.5)$$

Абсолютная погрешность $\tilde{R}_n(z, \alpha_0)$ имеет при $q \gg n$ и $0 \leq z \leq \infty$ следующую оценку сверху:

$$\left| \tilde{R}_n(z, \alpha_0) \right| \leq O \left\{ \frac{q^{-3n/2}}{\sqrt{kz(1+kz)} [1+q[1+(-1)^n \alpha_0]]} \right\}. \quad (11.6.6)$$

§ 11.7. Ряд по функциям $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ для диаграммы рассеяния

В соответствии с формулой (11.2.3) рассеянное поле в дальней зоне равно

$$E_x = -\Psi(\alpha, \alpha_0) \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (11.7.1)$$

где $\alpha = \cos \vartheta$ и $\alpha_0 = \cos \vartheta_0$,

$$\Psi(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Psi}(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Psi}(-\alpha, -\alpha_0), \quad (11.7.2)$$

$$\tilde{\Psi}(\alpha, \alpha_0) = \sqrt{1-\alpha} e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sqrt{1+\beta_m} \psi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1)-i\kappa\beta_m}. \quad (11.7.3)$$

Функции $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ имеют следующий вид:

$$\psi_1(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{\alpha + \alpha_0}, \quad \psi_2(\alpha, \alpha_0) e^{iq} = \frac{1}{\pi i} \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t) dt}{(t+\alpha)(t+\alpha_0)}, \quad (11.7.4)$$

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) e^{iq(n-1)} = \frac{1}{(i\pi)^{n-1}} \times \quad (11.7.5)$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{g(t_1)g(t_2)\dots g(t_{n-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{(t_1+\alpha_0)(t_2+t_1)(t_3+t_2)\dots (t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)},$$

где $g(t)$ определяется формулой (11.3.5), а интегралы берутся вдоль левого берега разреза от $1 \rightarrow 1+i\infty$, где $(1-t)^{1/2} = [(1-t)^{1/2}] e^{-i\pi/4}$.

Очевидно, что функции $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ симметричны,

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) = \psi_n(\alpha_0, \alpha), \quad (11.7.6)$$

и, следовательно, диаграмма рассеяния удовлетворяет принципу взаимности, т. е.

$$\Psi(\alpha, \alpha_0) = \Psi(\alpha_0, \alpha). \quad (11.7.7)$$

В соответствии с работой Шварцшильда [139], ряд (11.7.3) сходится абсолютно и равномерно при любых значениях $q > 0$.

Заметим далее, что функции $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi_n(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{2} \psi_{n-1}(1, \alpha_0), \quad (11.7.8)$$

пользуясь которым можно убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi(\alpha, \alpha_0) = 0. \quad (11.7.9)$$

Последняя формула означает непрерывность рассеянного поля в плоскости $y = 0$ при $|z| > l$. Действительно, компонента H_z рассеянного поля пропорциональна производной

$$\frac{\partial}{\partial y} E_x = -\sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} E_x.$$

Требование непрерывности поля при $y = 0, |z| > l$ эквивалентно условию $H_z = 0$, т. е. условию (11.7.9).

§ 11.8. Асимптотические представления функций $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$

Применяя к функциям $\psi_n(\alpha, \alpha_0)$ лемму 2 из § 9.1, можно получить следующие асимптотические (в смысле Пуанкаре) разложения при $q \rightarrow \infty$:

$$\psi_2(\alpha, \alpha_0) \sim \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{i^{m+1}} \left[\frac{\varphi_q^{(m+1)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} - \frac{\varphi_q^{(m+1)}(q, \alpha_0)}{\sqrt{1 + \alpha_0}} \right], \quad (11.8.1)$$

где b_m — коэффициенты ряда Тейлора

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t}} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (t - 1)^m; \quad (11.8.2)$$

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) \underset{n=3,4,\dots}{\sim} \frac{1}{2} \psi(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \psi^{n-3}(q, 1) + \frac{1}{(i\pi)^{n-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \times \quad (11.8.3)$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s-1)} \frac{\prod_{s=1}^{n-1} \sqrt{1-t_s} \hat{v}_m(t_1, \dots, t_{n-1}) dt_1 \dots dt_{n-1}}{(t_1 + \alpha_0)(t_{n-1} + \alpha) \prod_{s=2}^{n-2} (1+t_s)},$$

где

$$\hat{v}_m(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \left[(t_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + (t_{n-1} - 1) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \right]^m \hat{g}_n(1, 1, \dots, 1), \quad (11.8.4)$$

$$\hat{g}_3(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{1+t_1} \sqrt{1+t_2} (t_1+t_2)}, \quad (11.8.5)$$

$$\hat{g}_n(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \underset{n=4,5,6,\dots}{=} \frac{1}{(t_1+t_2)(t_2+t_3) \dots (t_{n-2}+t_{n-1})} \sum_{s=2}^{n-2} \sqrt{1+t_s}, \quad (11.8.6)$$

а функция $\psi(q, \alpha)$ определяется формулой (11.3.6). Очевидно, что каждый член ряда (11.8.3), как показано в (9.2.6), есть сумма произведений однократных интегралов типа $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$.

Мы опускаем детали асимптотического анализа первого члена с $m = 1$ в ряде (11.8.3). Этот анализ подобен тому, который был проделан подробно в §§ 9.4, 10.2 и 11.4. Используя результаты этого подхода, мы получаем

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{2} \psi(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \psi^{n-3}(q, 1) \times \left\{ 1 + O \left[\frac{\psi_q^{(1)}(q, \alpha)}{\psi(q, \alpha)} + \frac{\psi_q^{(1)}(q, \alpha_0)}{\psi(q, \alpha_0)} \right] + (n-3) O \left[\frac{\psi_q^{(1)}(q, 1)}{\psi(q, 1)} \right] \right\}. \quad (11.8.7)$$

Принимая во внимание (11.3.6) и (11.4.11), находим

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{2} \psi(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \psi^{n-3}(q, 1) \{1 + O[n/q]\} \text{ при } q \gg n. \quad (11.8.8)$$

И, наконец, пользуясь этой формулой, нетрудно получить другое важное асимптотическое соотношение:

$$\left| \psi_{n+m}(\alpha, \alpha_0) - \frac{\psi_n(1, \alpha)\psi_n(1, \alpha_0)}{\psi_{n-1}(1, 1)} \left[\frac{\psi_n(1, 1)}{\psi_{n-1}(1, 1)} \right]^{m-1} \right| \leq \\ \leq \frac{qO \left[q^{-3(m+n-1)/2} \right]}{[1 + q(1 + \bullet)][1 + q(1 + \alpha_0)]} \quad \text{при } q \gg n + m. \quad (11.8.9)$$

Уточним это неравенство для значения $n = 2$. С этой целью изучим асимптотическое поведение функции

$$\mathcal{V}_{n,2}(\alpha, \alpha_0) = \psi_n(\alpha, \alpha_0)\psi_1^{n-2}(1, 1) - \psi_2(1, \alpha)\psi_2(1, \alpha_0)\psi_2^{n-3}(1, 1). \quad (11.8.10)$$

Пользуясь интегральными выражениями (11.7.4) и (11.7.5), представим (11.8.10) в виде

$$\mathcal{V}_{n,2}(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{(i\pi)^{n-1}} \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \mathcal{K}_{n,2}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \times \\ \times [F_{n,2}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) - 1] dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}, \quad (11.8.11)$$

где

$$\mathcal{K}_{n,2}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \\ = \frac{e^{iq \sum_{s=1}^{n-1} (t_s - 1)} \prod_{s=1}^{n-1} \sqrt{1 - t_s}}{(t_1 + \alpha_0)(t_{n-1} + \alpha) \prod_{s=1}^{n-1} (1 + t_s)^{3/2} \prod_{s=2}^{n-2} (1 + t_s)} \quad (11.8.12)$$

и функция $F_{n,2}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ определяется формулами (10.2.21) и (10.2.22). Разложение функции $F_{n,2} - 1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 1$ имеет вид (10.2.23). Учитывая эти замечания и применяя к функции $\mathcal{V}_{n,2}$ лемму 2 из §9.1, получим при $q \gg n$ следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V}_{3,2}(\alpha, \alpha_0) &\sim -\frac{1}{16} \psi_q^{(1)}(q, \alpha) \psi_q^{(1)}(q, \alpha_0), \\ \mathcal{V}_{4,2}(\alpha, \alpha_0) &\sim -\frac{1}{32} \psi_q^{(1)}(q, 1) \left[\psi(q, \alpha) \psi_q^{(1)}(q, \alpha_0) + \psi_q^{(1)}(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \right], \end{aligned} \right\} \quad (11.8.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n,2}(\alpha, \alpha_0) \underset{n=4,5,\dots}{\sim} & -\frac{1}{2^{n+1}} \psi_q^{(1)}(q, 1) \psi^{n-5}(q, 1) \times \\ & \times \left\{ (n-4) \psi(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \psi_q^{(1)}(q, 1) + \right. \\ & \left. + \psi(q, 1) \left[\psi(q, \alpha) \psi_q^{(1)}(q, \alpha_0) + \psi_q^{(1)}(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \right] \right\}. \quad (11.8.14) \end{aligned}$$

Откуда

$$\psi_3(\alpha, \alpha_0) - \frac{\psi_2(1, \alpha) \psi_2(1, \alpha_0)}{\psi_1(1, 1)} \sim -\frac{1}{8} \psi_q^{(1)}(q, \alpha) \psi_q^{(1)}(q, \alpha_0), \quad (11.8.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(\alpha, \alpha_0) - \frac{\psi_2(1, \alpha) \psi_2(1, \alpha_0)}{\psi_1(1, 1)} \left[\frac{\psi_2(1, 1)}{\psi_1(1, 1)} \right]^{n-3} & \sim \\ \sim -\frac{1}{8} \psi_q^{(1)}(q, 1) \psi^{n-5}(q, 1) \left\{ (n-4) \psi(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \psi_q^{(1)}(q, 1) + \right. \\ & \left. + \psi(q, 1) \left[\psi(q, \alpha) \psi_q^{(1)}(q, \alpha_0) + \psi_q^{(1)}(q, \alpha) \psi(q, \alpha_0) \right] \right\}. \quad (11.8.16) \end{aligned}$$

Пользуясь далее оценками (9.3.2), (11.3.6) и (11.4.11), получаем

$$\begin{aligned} \psi_n(\alpha, \alpha_0) - \frac{\psi_2(1, \alpha) \psi_2(1, \alpha_0)}{\psi_1(1, 1)} \left[\frac{\psi_2(1, 1)}{\psi_1(1, 1)} \right]^{n-3} & = \\ & = \frac{O \left[q^{-3(n-1)/2} \right]}{\left[1 + q(1 + \alpha) \right] \left[1 + q(1 + \alpha_0) \right]} \text{ при } n = 3, 4, \dots \text{ и } q \gg n. \quad (11.8.17) \end{aligned}$$

Найденные выше асимптотические представления позволяют теперь перейти к построению приближенных выражений для рассеянного поля.

§ 11.9. Первое приближение для диаграммы рассеяния

Ограничиваясь в асимптотическом разложении (11.8.1) первым членом, получим

$$\begin{aligned} \psi_2(\alpha, \alpha_0) & = -\frac{\psi(q, \alpha) - \psi(q, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} + \\ & + O \left[\frac{\varphi_q^{(2)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} - \frac{\varphi_q^{(2)}(q, \alpha_0)}{\sqrt{1 + \alpha_0}} \right] \text{ при } q \gg 1. \quad (11.9.1) \end{aligned}$$

Мы хотим построить такое выражение для полного рассеянного поля, которое бы удовлетворяло граничным условиям (11.7.9). С этой целью добавим в правую часть (11.9.1) нулевую величину $\psi(q, 1) - \psi(q, 1)$ и рассмотрим комбинации $\psi(q, \alpha) - \psi(q, 1)$, $\psi(q, \alpha_0) - \psi(q, 1)$. Можно показать, что

$$\psi(q, \alpha) - \psi(q, 1) = \frac{1 - \alpha}{2} \psi(q, \alpha) + (1 - \alpha) O \left[\frac{\varphi_q^{(2)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} \right] \quad \text{при } q \gg 1.$$

Используя эту аппроксимацию, выражение (11.9.1) можно преобразовать (в пределах его погрешности) к виду

$$\begin{aligned} \psi_2(\alpha, \alpha_0) = & -\frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[\frac{1 - \alpha}{2} \psi(q, \alpha) - \frac{1 - \alpha_0}{2} \psi(q, \alpha_0) \right] + \\ & + O \left[\frac{\varphi_q^{(2)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} \right] + O \left[\frac{\varphi_q^{(2)}(q, \alpha_0)}{\sqrt{1 + \alpha_0}} \right]. \end{aligned} \quad (11.9.2)$$

Подставляя теперь в ряд (11.7.3) выражение (11.9.2) и пользуясь для остальных функций асимптотическим представлением (11.8.8), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\alpha, \alpha_0) = & -\frac{\sqrt{1 - \alpha} \sqrt{1 - \alpha_0}}{\alpha + \alpha_0} e^{i\kappa(\alpha + \alpha_0)} - \\ & - \frac{\sqrt{1 - \alpha} \sqrt{1 + \alpha_0}}{\alpha + \alpha_0} \left[\frac{1 - \alpha}{2} \psi(q, \alpha) - \frac{1 + \alpha_0}{2} \psi(q, -\alpha_0) \right] e^{iq + i\kappa(\alpha - \alpha_0)} - \\ & - \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{2\mathcal{D}_1} e^{i2q} \left[\sqrt{1 - \alpha_0} \psi(q, \alpha_0) e^{i\kappa\alpha_0} - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 + \alpha_0} \psi(q, -\alpha_0) \psi(q, 1) e^{iq - i\kappa\alpha_0} \right] \psi(q, \alpha) e^{i\kappa\alpha}, \end{aligned} \quad (11.9.3)$$

где

$$\mathcal{D}_1 = 1 - \psi^2(q, 1) e^{i2q}. \quad (11.9.4)$$

Замечая, что

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi(q, \alpha) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi(q, \alpha) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.9.5)$$

можно убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_1(\alpha, \alpha_0) = 0, \quad (11.9.6)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, \alpha_0) = \check{\Psi}_1(\alpha, \alpha_0) + \check{\Psi}_1(-\alpha, -\alpha_0). \quad (11.9.7)$$

Абсолютная погрешность данного приближения определяется формулой

$$P_1(\alpha, \alpha_0) = \tilde{P}_1(\alpha, \alpha_0) + \tilde{P}_1(-\alpha, -\alpha_0), \quad (11.9.8)$$

где в соответствии с (11.9.2)

$$\tilde{P}_1(\alpha, \alpha_0) = \frac{O[q^{-1/2}]}{[1 + q(1 + \alpha)][1 + q(1 - \alpha_0)]} \quad \text{при } q \gg 1. \quad (11.9.9)$$

Из формулы (11.9.6) также следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} P_1(\alpha, \alpha_0) = 0. \quad (11.9.10)$$

Для контроля полученных результатов вычислим интегральный поперечник рассеяния

$$S = -\frac{2}{k} \operatorname{Im}\{\Psi(-\alpha_0, \alpha_0)\} \quad (11.9.11)$$

при нормальном ($\alpha_0 = 0$) падении. На основании (11.9.3) имеем

$$\Psi_1(0, 0) = 1 - iq + \left[\psi(q, 0) - \frac{\partial \psi(q, 0)}{\partial \alpha} \right] e^{iq} - \frac{\psi^2(q, 0)}{1 + \psi(q, 1) e^{iq}} e^{i2q}. \quad (11.9.12)$$

Подставляя сюда асимптотики

$$\left. \begin{aligned} \psi(q, 0) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} + O(q^{-5/2}), \\ \frac{\partial \psi(q, 0)}{\partial \alpha} &= -\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} + O(q^{-5/2}), \end{aligned} \right\} \quad (11.9.13)$$

получим для интегрального поперечника следующее выражение:

$$S = 4l \left[1 - \frac{\sin(q - \pi/4)}{\sqrt{2\pi} q^{5/2}} + O(q^{-7/2}) \right], \quad (11.9.14)$$

которое совпадает с двумя первыми членами асимптотической формулы (31.4), приведенной в книге [121].

Найденное нами первое приближение (11.9.3) имеет такой же характер сложности, как формулы из работ [5] и [134], но является по сравнению с ними более точным. Действительно, можно показать, что при нормальном падении плоской волны формулам [5], найденным на основе физических соображений, соответствует величина

$$S = 4l \left[1 - \frac{\sin(q - \pi/4)}{2\sqrt{\pi}q^{5/2}} + O(q^{-3}) \right], \quad (11.9.15)$$

а формулам из работы [134], выведенным на основе интегральных уравнений, величина

$$S = 4l \left[1 - \frac{203 \sin(q - \pi/4)}{128 \sqrt{2\pi}q^{5/2}} + O(q^{-7/2}) \right]. \quad (11.9.16)$$

Заметим теперь, что согласно равенству

$$\frac{S}{4l} = - \frac{\text{Im}\{\Psi(-\alpha_0, \alpha_0)\}}{q} \quad (11.9.17)$$

нормированный интегральный поперечник рассеяния меньше на порядок по сравнению с диаграммой рассеяния. Таким образом, выражения для диаграммы рассеяния, полученные ранее в статьях [5] и [134], имеют одинаковый порядок абсолютной погрешности, равный $(kl)^{-3/2}$. Погрешность же первого приближения (11.9.3) согласно (11.9.9) имеет порядок $(kl)^{-5/2}$ при $q(1 \pm \alpha) \gg 1$ и при $q(1 \pm \alpha_0) \gg 1$.

§ 11.10. N -е приближение для диаграммы рассеяния

Оставляя в ряде (11.7.3) n первых членов и подставляя в остальные асимптотическое выражение (11.8.9), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0) &= \sqrt{1-\alpha} e^{i\kappa\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \sqrt{1+\beta_m} \psi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} \\ &- (-1)^n \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\mathcal{D}_n} \frac{\psi_n(1, \alpha)}{\psi_{n-1}(1, 1)} e^{i(qn+\kappa\alpha)} \times \\ &\times \left[\sqrt{1-\beta_n} \psi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \sqrt{1+\beta_n} \psi_n(1, -\beta_n) \frac{\psi_n(1, 1)}{\psi_{n-1}(1, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n} \right], \end{aligned} \quad (11.10.1)$$

где

$$\mathcal{D}_n = 1 - \left[\frac{\psi_n(1, 1)}{\psi_{n-1}(1, 1)} e^{iq} \right]^2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (11.10.2)$$

Диаграмма рассеяния определяется при этом формулой

$$\Psi(\alpha, \alpha_0) = \Psi_n(\alpha, \alpha_0) + P_n(\alpha, \alpha_0), \quad (11.10.3)$$

где

$$\Psi_n(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Psi}_n(-\alpha, -\alpha_0), \quad (11.10.4)$$

$$P(\alpha, \alpha_0) = \tilde{P}_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{P}_n(-\alpha, -\alpha_0). \quad (11.10.5)$$

Величина P_n характеризует абсолютную погрешность данного приближения и в соответствии с формулой (11.8.9) имеет оценку

$$\left| \tilde{P}_n(\alpha, \alpha_0) \right| \leq \frac{O \left[q^{-(3n-2)/2} \right]}{[1 + q(1 + \alpha)][1 + q(1 + (-1)^n \alpha_0)]}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (11.10.6)$$

при $q \gg n$. Для значения $n = 2$ эту оценку можно уточнить. Принимая во внимание (11.8.15) и (11.4.11) находим, что

$$\left| \tilde{P}_2(\alpha, \alpha_0) \right| \leq \frac{\bullet [q^{-3}]}{[1 + q(1 + \alpha)][1 + q(1 + \alpha_0)]} \quad \text{при } q \gg 1. \quad (11.10.7)$$

Заметим, что $\Psi_n(\alpha, \alpha_0)$ удовлетворяет принципу взаимности и предельным условиям

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_n(\alpha, \alpha_0) = 0, \quad (11.10.8)$$

в чем можно убедиться, если воспользоваться соотношением (11.7.8). Поэтому функция $P_n(\alpha, \alpha_0)$ также удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} P_n(\alpha, \alpha_0) = 0. \quad (11.10.9)$$

Это равенство и соотношение (11.10.7) показывают, что величина погрешности, определяемая согласно (11.10.6), является, по-видимому, завышенной.

В целях контроля полученные результаты интересно сравнить с теми, которые имеются в литературе. Вычислим для этого во втором приближении интегральный поперечник рассеяния при нормальном и скользком направлениях падающей плоской волны. Можно показать, что

$$\Psi_2(0, 0) = 1 - iq + 2\psi_2(0, 0)e^{iq} - 4 \frac{\psi_2^2(1, 0)}{1 + 2\psi_2(1, 1)e^{iq}} e^{i2q}. \quad (11.10.10)$$

Подставляя сюда выражения

$$\psi_2(0, 0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} - \frac{27}{16} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-5/2} + O(q^{-7/2}), \quad (11.10.11)$$

$$\psi_2(1, 0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{4\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} - \frac{21}{32} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-5/2} + O(q^{-7/2}), \quad (11.10.12)$$

$$\psi_2(1, 1) = \frac{e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{2\pi}} q^{-3/2} - \frac{15}{64} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} q^{-5/2} + O(q^{-7/2}), \quad (11.10.13)$$

получим согласно (11.9.11)

$$S = 4l \left[1 - \frac{\sin(q - \pi/4)}{\sqrt{2\pi}} q^{-5/2} + \frac{27}{8} \frac{\sin(q + \pi/4)}{\sqrt{2\pi}} q^{-7/2} - \frac{\cos 2q}{8\pi} q^{-4} + O(q^{-9/2}) \right] \quad (11.10.14)$$

в случае нормального падения плоской волны. В соответствии с (11.10.7) все выписанные здесь члены являются верными.

При скользящем падении плоской волны

$$S = -\frac{2}{k} \operatorname{Im}\{\Psi_2(-1, 1)\}, \quad (11.10.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2(-1, 1) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \left\{ \left[-\sqrt{2(1+\alpha)} \psi_1(-\alpha, -1) e^{-i\kappa(\alpha+1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2(1-\alpha)} \psi_2(\alpha, -1) e^{iq+i\kappa(\alpha-1)} \right] + \frac{8}{\mathcal{D}_2} \psi_2(1, 1) \psi_2^2(1, -1) e^{i2q} \right\}. \end{aligned} \quad (11.10.16)$$

Заметим, что при $q \gg 1$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= -\sqrt{2(1+\alpha)} \psi_1(-\alpha, -1) e^{-i\kappa(\alpha+1)} + \\ &\quad + \sqrt{2(1-\alpha)} \psi_2(\alpha, -1) e^{iq+i\kappa(\alpha-1)} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} e^{-i\kappa(\alpha+1)} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \varphi(q, \alpha) e^{i\kappa(\alpha+1)} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2(1-\alpha)}}{i\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)} f(t) dt}{\sqrt{1-t(t+\alpha)}}, \end{aligned} \quad (11.10.17)$$

где

$$f(t) = -\frac{t-1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{32\sqrt{2}}(t-1)^2 - \frac{5}{128\sqrt{2}}(t-1)^3 + \frac{35}{2^{11}\sqrt{2}}(t-1)^4 + O[(t-1)^5]. \quad (11.10.18)$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \rightarrow -1$ и учитывая формулу

$$\int_1^{1+i\infty} \frac{e^{iq(t-1)}}{\sqrt{1-t}} (t-1)^m dt = \frac{i^{m+3/2}}{q^{m+1/2}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right), \quad (11.10.19)$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma(-1) = & \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} q^{1/2} + \frac{\Gamma(1/2)e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{2}} q^{-1/2} - \frac{3\Gamma(3/2)e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2^4\pi\sqrt{2}} q^{-3/2} - \\ & - \frac{5\Gamma(5/2)e^{i\frac{\pi}{4}}}{2^6\sqrt{2}\pi} q^{-5/2} + \frac{35\Gamma(7/2)e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2^{10}\sqrt{2}\pi} q^{-7/2} + O(q^{-9/2}). \end{aligned} \quad (11.10.20)$$

Асимптотическое разложение для функции $\psi_2(1, 1)$ описывается формулой (11.10.13), а для функции $\psi_2(1, -1)$ такое разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_2(1, -1) = & -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\pi} q^{-1/2} - \frac{3}{2^4} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\pi} q^{-3/2} + \\ & + \frac{45}{2^8} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\pi} q^{-5/2} + O[q^{-7/2}]. \end{aligned} \quad (11.10.21)$$

Подставляя теперь выражения (11.10.13), (11.10.19) и (11.10.21) в формулу (11.10.16), получим с помощью (11.10.15)

$$\begin{aligned} S = & 4t \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} q^{-1/2} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} q^{-3/2} + \frac{3}{64\sqrt{\pi}} q^{-5/2} + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{15}{512} - \frac{\sin(2q + \pi/4)}{8\sqrt{2}\pi} \right] q^{-7/2} - \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{525}{16384} - \frac{21 \cos(2q + \pi/4)}{64\sqrt{2}\pi} \right] q^{-9/2} + O(q^{-11/2}) \right\}. \end{aligned} \quad (11.10.22)$$

Согласно оценке (11.10.7) все выписанные здесь члены асимптотического разложения являются верными. Как и следовало ожидать, наши выражения (11.10.14), (11.10.22) полностью совпадают с аналогичными формулами (31.4) и (31.7), приведенными в книге [121].

§ 11.11. Зависимость между приближенными выражениями для тока и диаграммы рассеяния

На основании соотношений (11.2.3) и (11.7.1) можно записать

$$\tilde{\Psi}(\alpha, \alpha_0) = -2\pi ik \sum_{n=1}^{\infty} G_n(k\alpha, k\alpha_0) e^{ik\alpha}. \quad (11.11.1)$$

С учетом (11.1.5) и (11.1.6) это выражение можно представить в виде

$$\tilde{\Psi}(\alpha, \alpha_0) = -ik e^{ik\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}(z, \alpha_0) e^{-ikz\alpha} dz. \quad (11.11.2)$$

Подставляя сюда приближенное выражение (11.6.4) и учитывая формулы

$$\xi_n(z, \alpha_0) e^{ikz} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikzt} \sqrt{1-t} \psi_n(t, \alpha_0) dt, \quad (11.11.3)$$

$$\psi_n(\alpha, \alpha_0) = -\frac{ik}{\sqrt{1-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz(1-\alpha)} \xi_n(z, \alpha_0) dz, \quad (11.11.4)$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}'_n(\alpha, \alpha_0) &= \sqrt{1-\alpha} \sum_{m=1}^n (-1)^m \sqrt{1+\beta_m} \psi_m(\alpha, -\beta_m) e^{iq(m-1)-ik\beta_m} - \\ &- (-1)^n \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\hat{D}_n} \frac{\psi_n(1, \alpha)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} e^{i(qn+\kappa\alpha)} \times \\ &\times \left[\sqrt{1-\beta_n} \xi_n(2l, \beta_n) e^{ik\beta_n} - \sqrt{1+\beta_n} \xi_n(2l, -\beta_n) \frac{\xi_n(2l, 1)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} e^{iq-ik\beta_n} \right], \end{aligned} \quad (11.11.5)$$

где \hat{D}_n определяется выражением (11.6.5). Сравнение (11.11.5) с (11.10.1) показывает, что функция $\tilde{\Psi}'_n(\alpha, \alpha_0)$ отличается от $\tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0)$. Следовательно, функция

$$\Psi'_n(\alpha, \alpha_0) = \tilde{\Psi}'_n(\alpha, \alpha_0) + \tilde{\Psi}'_n(-\alpha, -\alpha_0) \quad (11.11.6)$$

не будет удовлетворять принципу взаимности и граничным условиям (11.10.8). Таким образом, непосредственное интегрирование приближенных выражений для тока дает диаграмму рассеяния, которая не удовлетворяет принципу взаимности и граничным условиям.

Принимая далее во внимание формулы (11.8.8) и

$$\xi_n(2l, \alpha) = \sqrt{2}\psi(q, \alpha)\psi^{n-1}(q, 1) \left[1 + O\left(\frac{n}{q}\right) \right], \quad (11.11.7)$$

нетрудно убедиться, что при $q \gg n$

$$\left| \frac{\xi_n(2l, \alpha)}{\xi_{n-1}(2l, 1)} - \frac{\psi_n(1, \alpha)}{\psi_{n-1}(1, 1)} \right| \leq \frac{O(q^{-3/2})}{1 + q(1 + \alpha)}, \quad (11.11.8)$$

$$\left| \mathcal{D}_n - \hat{\mathcal{D}}_n \right| \leq O(q^{-4}). \quad (11.11.9)$$

Поэтому

$$\left| \tilde{\Psi}'_n(\alpha, \alpha_0) - \tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0) \right| \leq \frac{O(q^{-(3n-2)/2})}{[1 + q(1 + \alpha)][1 + q(1 + (-1)^n \alpha_0)]}. \quad (11.11.10)$$

Сравнивая это с (11.10.6), мы видим, что $\tilde{\Psi}'_n(\alpha, \alpha_0)$ отличается от функции $\tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0)$ в пределах ее погрешности.

Из формулы (11.11.2) следует, что

$$\tilde{J}(z, \alpha_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0) e^{-ik(l-z)\alpha} d\alpha. \quad (11.11.11)$$

Подставляя приближенное выражение (11.10.1) для диаграммы $\tilde{\Psi}_n(\alpha, \alpha_0)$ и используя (11.11.3), находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_n(z, \alpha_0) &= e^{ikz} \sum_{m=1}^n (-1)^m \sqrt{1 + \beta_m} \xi_m(z, -\beta_m) e^{iq(m-1) - i\kappa\beta_m} - \\ &- (-1)^n \frac{1}{\mathcal{D}_n} \frac{\xi_n(z, 1)}{\psi_{n-1}(1, 1)} e^{i(qn+kz)} \times [\sqrt{1 - \beta_n} \psi_n(1, \beta_n) e^{i\kappa\beta_n} - \\ &- \sqrt{1 + \beta_n} \psi_n(1, -\beta_n) \frac{\psi_n(1, 1)}{\psi_{n-1}(1, 1)} e^{iq - i\kappa\beta_n}]. \end{aligned} \quad (11.11.12)$$

Полученное выражение отличается от функции $\tilde{J}_n(z, \alpha_0)$, определяемой формулой (11.6.4), в пределах погрешности, задаваемой формулой (11.6.6).

§ 11.12. Основные результаты математической теории краевых волн

- Предложенная теория основана на решении функциональных уравнений. Для тока на ленте и для рассеянного поля в дальней зоне получено решение в виде точных и асимптотических рядов.
- Точные ряды выражаются через новые специальные функции, содержащие многократные интегралы. Эти ряды, в отличие от классических рядов по функциям Матье, сходятся тем быстрее, чем короче длина волны.
- Показано, что полученное строгое решение эквивалентно решению Шварцшильда [139] и ряду Неймана для интегрального уравнения, сформулированного К. Вестпаль в работе [124].
- Для токов и диаграмм рассеяния построены равномерные асимптотические разложения. Эти разложения справедливы в произвольной точке наблюдения на ленте и в дальней зоне. Они применимы при произвольных углах облучения и наблюдения, включая направления под углами скольжения. Погрешность полученных формул не превышает величины порядка $(kl)^{-n/2}$ при $kl \gg n$, где n — любое целое положительное число.
- Показано, что непосредственное интегрирование приближенных формул для тока (диаграммы) приводит к таким выражениям для диаграммы рассеяния (тока), которые не удовлетворяют принципу взаимности и граничным условиям.
- Результаты проведенных исследований позволяют дать строгое обоснование приближенных решений, найденных в предыдущих разделах с помощью параболического уравнения и физической теории дифракции. Некоторые результаты этих исследований были опубликованы в [23].
- Развитая здесь математическая теория может быть применена к другим задачам дифракции. В следующей главе мы проиллюстрируем это на примере задачи о дифракции плоской волны на открытом резонаторе.

Глава 12

Дифракция на открытом резонаторе, образованном параллельными лентами

В этой главе мы рассмотрим краевые волны, возбуждаемые плоской волной в волноводе, состоящем из двух параллельных пластин конечного размера. Особенность такой системы заключается в том, что она обладает резонансными свойствами, т. е. способна на некоторых частотах накапливать внутри себя поля с большой энергией. Такой волновод представляет собой простейший случай открытого резонатора, который используются в оптических квантовых генераторах. Собственные колебания такого резонатора впервые были изучены в работе Фокса и Ли [142]. Указанные авторы, исходя из принципа Гюйгенса—Кирхгофа, сформулировали интегральное уравнение и численным путем нашли некоторые его собственные функции и собственные значения. Позднее Вайнштейном [112], на основе физических соображений, было проведено аналитическое исследование собственных колебаний двухмерного плоского резонатора. Заметим также, что одномодовый резонатор, состоящий из плоских пластин с геометрическими параметрами $kb < 3\pi/2$ и $kl \gg 1$ был рассмотрен Джонсом [143] и Вильямсом [144]. Решение задачи для случая $kb \ll 1$ и $kl \ll 1$ было дано Пименовым [145].

Задача о возбуждении такого резонатора плоской волной является менее изученной. Она рассматривалась в работе Фиалковского [147], где были найдены приближенные выражения для резонансной части поля внутри резонатора. Однако эти результаты, полученные с помощью теоремы Фредгольма для интегрального уравнения второго рода, служат в основном для обоснования собственных функций, построенных ранее Вайнштейном [112].

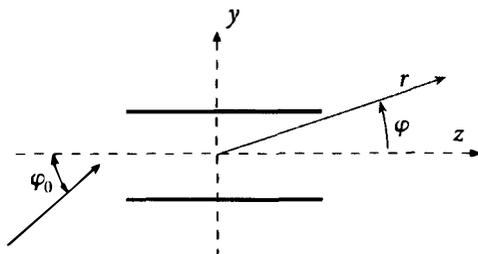


Рис. 12.1.1. К дифракции плоской волны на открытом резонаторе

Нас в данной задаче интересует физическая картина формирования дифракционного поля путем многократной дифракции краевых волн. Именно с такой точки зрения на основе теории, развитой в главах 8-11, исследуются ниже свойства рассеянного поля в дальней зоне и внутри резонатора.

§ 12.1. Вывод основных функциональных уравнений

Рассмотрим дифракцию плоской волны

$$H_{0x} = e^{ik(z \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}, \quad 0 < \varphi_0 < \pi \quad (12.1.1)$$

на двух параллельных (идеально проводящих) пластинах, ориентация которых в свободном пространстве определяется соотношениями

$$-\infty \leq x \leq \infty, \quad -l \leq z \leq l, \quad y = \pm b, \quad (12.1.2)$$

как показано на рис. 12.1.1. Представляя падающую волну в виде

$$H_x = H_{0x}^{(1)} + H_{0x}^{(2)},$$

сведем рассматриваемую задачу к двум следующим:

А) возбуждение открытого резонатора полем

$$H_{0x}^{(1)} = i \sin(ky \sin \varphi_0) e^{ikz \cos \varphi_0}, \quad (12.1.3)$$

Б) возбуждение открытого резонатора полем

$$H_{0x}^{(2)} = \cos(ky \sin \varphi_0) e^{ikz \cos \varphi_0}. \quad (12.1.4)$$

Задача А) соответствует возбуждению системы четным (относительно координаты y) электрическим полем

$$E_z^0 = \frac{2\pi}{ck} g(z) \quad \text{при } y = \pm b, \quad (12.1.5)$$

где

$$g(z) = G(u)e^{iuz}, \quad G(u) = \frac{c}{2\pi} v^0 \cos v^0 b, \quad (12.1.6)$$

$$v^0 = \sqrt{k^2 - u^2}, \quad u = k \cos \varphi_0.$$

Задача Б) соответствует возбуждению системы нечетным (относительно координаты y) электрическим полем

$$E_z^0 = \pm \frac{2\pi}{ck} g(z) \quad \text{при } y = \pm b, \quad (12.1.7)$$

где

$$g(z) = G(u)e^{iuz}, \quad G(u) = \frac{ic}{2\pi} v^0 \sin v^0 b, \quad (12.1.8)$$

$$v^0 = \sqrt{k^2 - u^2}, \quad u = k \cos \varphi_0.$$

Этим термином четного и нечетного возбуждения (по отношению к электрическому полю) мы будем часто пользоваться в дальнейшем. Заметим также, что в соответствии с приведенным выше представлением для падающего поля, рассеянное поле может быть записано в виде $H_x = H_x^{(1)} + H_x^{(2)}$. Здесь $H_x^{(1)}$ возбуждается падающим полем $H_{0x}^{(1)}$, и $H_x^{(2)}$ возбуждается падающим полем $H_{0x}^{(2)}$. Для упрощения выражений мы будем иногда опускать индексы 1 и 2.

В случае четного возбуждения рассеянное поле ищется в виде

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz+vy)} \cos vb \, dw \quad \text{при } y > b, \\ H_x &= -i\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz+vb)} \sin vy \, dw \quad \text{при } -b < y < b, \\ H_x &= \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz-vy)} \cos vb \, dw \quad \text{при } y < -b, \end{aligned} \right\} (12.1.9)$$

где

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \text{Im } v \geq 0. \quad (12.1.10)$$

Контур интегрирования проходит по вещественной оси и огибает разрез $-k \rightarrow -k - i\infty$ сверху, а разрез $k \rightarrow k + i\infty$ снизу. Для функции v выбираем ту ветвь, на которой $v = k$ при $w = 0$. Полю (12.1.9) соответствует поверхностный ток с плотностью

$$j_z = \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{iwz} dw, \quad y = \pm b \quad (12.1.11)$$

и электрическая напряженность

$$E_z = -\frac{2\pi}{ck} \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F(w, u) e^{iwz} dw, \quad y = \pm b, \quad (12.1.12)$$

где

$$L(w) = v(1 + e^{2ivb}) = 2v \cos vbe^{ivb}. \quad (12.1.13)$$

При нечетном возбуждении будем искать рассеянное поле в виде

$$\left. \begin{aligned} H_x &= i\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz+vy)} \sin vb dw \quad \text{при } y > b, \\ H_x &= \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz+vb)} \cos vy dw \quad \text{при } -b < y < b, \\ H_x &= i\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i(wz-vy)} \sin vb dw \quad \text{при } y < -b. \end{aligned} \right\} \quad (12.1.14)$$

Этому полю соответствует при $y = \pm b$ поверхностная плотность электрического тока

$$j_z = \pm \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{iwz} dw \quad (12.1.15)$$

и электрическая напряженность

$$E_z = \mp \frac{2\pi}{ck} \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F(w, u) e^{iwz} dw, \quad (12.1.16)$$

где

$$L(w) = v(1 - e^{2ivb}) = -i2v \sin vbe^{ivb}. \quad (12.1.17)$$

Заметим, что корни уравнения

$$L(w) = 0 \tag{12.1.18}$$

определяют постоянные распространения волн в безграничном плоском волноводе со стенками при $y = \pm b$. В случае четного возбуждения эти корни равны

$$w_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 (2m-1)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \tag{12.1.19}$$

а при нечетном возбуждении

$$w_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 (2m)^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{12.1.20}$$

В случае отрицательного аргумента под корнем w_m определяется как $w_m = i|w_m|$, а в остальных случаях $\text{Im } w_m = 0$, $\text{Re } w_m > 0$. Наряду с этими корнями уравнение (12.1.18) имеет также корни $w = -w_m$. Корень $w_0 = k$ при нечетном возбуждении соответствует чисто поперечной волне.

Накладывая теперь граничные условия

$$j_z = 0 \quad \text{при } y = \pm b \text{ и } |z| > l, \tag{12.1.21}$$

$$E_x + E_z^0 = 0 \quad \text{при } y = \pm b \text{ и } |z| < l, \tag{12.1.22}$$

приводим задачи А) и Б) к решению функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(w, u) e^{i w z} dw = 0, \quad |z| > l, \\ \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F(w, u) e^{i w z} dw = g(z), \quad |z| < l. \end{aligned} \right\} \tag{12.1.23}$$

Решение этих уравнений изучается в следующем параграфе.

§ 12.2. Формулировка и решение функциональных уравнений для краевых волн

Для четного возбуждения падающее поле задается выражением (12.1.3), которое может быть записано в виде

$$H_{0x}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[e^{ik(z \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} - e^{ik(z \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0)} \right]. \tag{12.2.1}$$

Определим вначале ток, который оно возбуждает на поверхности резонатора, если его ширина $2l = \infty$. Резонатор превращается в этом случае в две плоскости, полностью экранирующие друг друга. Очевидно, что ток, возбуждаемый на внешних (освещаемых) сторонах плоскостей ($y = \pm b^\pm$), равен

$$j_z^{(0)} = \frac{c}{4\pi} e^{ik(z \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0)}. \quad (12.2.2)$$

Согласно определению, данному в § 2.1, функцию (12.2.2) можно назвать *равномерной частью тока при четном возбуждении*. *Равномерная часть тока при нечетном возбуждении* равна

$$j_z^{(0)} = \mp \frac{c}{4\pi} e^{ik(z \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0)} \quad \text{при } y = \pm b^\pm. \quad (12.2.3)$$

Результирующая *равномерная* часть тока, возбуждаемая полем (12.1.1), есть сумма токов (12.2.2) и (12.2.3). Как и следовало ожидать, она равна

$$j_z = \begin{cases} 0 & \text{при } y = +b, \\ \frac{c}{2\pi} e^{ik(z \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0)} & \text{при } y = -b. \end{cases} \quad (12.2.4)$$

Выражения (12.2.2) и (12.2.3) удобно записать в единообразной форме

$$j_0 = \frac{G(u)}{L(u)} e^{iuz} \quad \text{при } y = +b \quad (12.2.5)$$

через соответствующие им функции $G(u)$ и $L(u)$.

Пользуясь указанными определениями и учитывая свойство симметрии краевых волн, будем искать ток, возбуждаемый в резонаторе при $y = +b$, в виде

$$j_z = j_0(z, u) + \sum_{n=1}^{\infty} [j_n(z+l, u) + j_n(l-z, -u)], \quad (12.2.6)$$

где $j_0(z, u)$ есть величина (12.2.5), а j_n — краевая волна n -го порядка.

Положим

$$j_n(z, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(w, u) e^{iuz} dw. \quad (12.2.7)$$

Электрическое поле, возбуждаемое этим током в паре с током, текущим по пластине при $y = -b$, согласно (12.1.11) и (12.1.15), будет равно

$$E_{n,z} = -\frac{2\pi}{ck} \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F_n(w, u) e^{iuz} dw, \quad y = \pm b \quad (12.2.8)$$

при четном возбуждении и

$$E_{n,z} = \mp \frac{2\pi}{ck} \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F_n(w, u) e^{i w z} dw, \quad y = \pm b \quad (12.2.9)$$

при нечетном возбуждении.

Замечая, что

$$F_0(w, u) = \frac{G(u)}{L(u)} \delta(u - w), \quad (12.2.10)$$

находим при $y = \pm b$

$$E_{0,z} = -\frac{2\pi}{ck} g(z) \quad \text{при четном возбуждении} \quad (12.2.11)$$

и

$$E_{0,z} = \mp \frac{2\pi}{ck} g(z) \quad \text{при нечетном возбуждении.} \quad (12.2.12)$$

Отсюда следует, что граничные условия

$$E_{0,z} + E_z^0 = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (12.2.13)$$

и

$$E_z + E_z^0 = 0 \quad \text{при } y = \pm b, \quad |z| < l \quad (12.2.14)$$

приводят к требованию

$$E_{n,z} = 0 \quad \text{при } y = \pm b, \quad z > 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (12.2.15)$$

В результате, для определения краевых волн мы получаем следующую систему рекуррентных функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w, u) e^{i w \zeta} dw &= -j_0(\zeta - l, u) \quad \text{при } \zeta < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(w, u) + F_{n-1}(-w, -u) e^{-i 2lw}] e^{i w \zeta} dw &= 0 \\ &\text{при } \zeta < 0, \quad n = 2, 3 \dots, \\ \int_{-\infty}^{\infty} L(w) F_n(w, u) e^{i w z} dw &= 0, \quad \text{при } \zeta > 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (12.2.16)$$

аналогичную системе (8.3.10) в задаче о ленте.

Применяя к этой системе метод факторизации, находим

$$F_1(w, u) = \frac{1}{2\pi i} \frac{G(u)}{L_+(u)L_-(w)} \frac{e^{-iul}}{w - \widehat{u}}, \quad (12.2.17)$$

$$F_n(w, u) = \frac{1}{2\pi i L_-(w)} \int_{-\infty}^{\infty} L_+(t) F_{n-1}(t, -u) \frac{e^{i2lt}}{t + \widehat{w}} dt. \quad (12.2.18)$$

Откуда

$$F_2(w, u) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{G(u)e^{iul}}{L_-(u)L_-(w)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_+(t)}{L_-(t)} \frac{e^{i2lt} dt}{(t + \widehat{w})(t + \widehat{u})}, \quad (12.2.19)$$

$$F_n(w, u) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{G(u)e^{(-1)^n iul}}{L_- [(-1)^n u] L_-(w)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{h}(t_{n-1}) \widehat{h}(t_{n-2}) \dots \widehat{h}(t_1) dt_{n-1} dt_{n-2} \dots dt_1}{(t_{n-1} + \widehat{w})(t_{n-2} + \widehat{t}_{n-1}) \dots (t_1 + \widehat{t}_2)(t_1 + (-1)^n u)}, \quad (12.2.20)$$

где

$$\widehat{h}(w) = \frac{L_+(w)}{L_-(w)} e^{i2lw}. \quad (12.2.21)$$

Факторизация функции $L(w)$, т. е. представление ее в виде произведения

$$L(w) = L_+(w)L_-(w), \quad (12.2.22)$$

описывается в работах Вайнштейна [96, 120]. Функция L_+ голоморфна при $\text{Im } w > -\text{Im } k$ и не имеет там нулей. Функция L_- голоморфна при $\text{Im } w < \text{Im } k$ и не имеет там нулей. В этих работах показано, что

$$L_+(w) = \sqrt{k+w} e^{\chi_+(w)}, \quad L_-(w) = L_+(-w), \quad (12.2.23)$$

где значение $(k+w)^{1/2}$ определяется ветвью с $0 \leq \arg\{k^{1/2}\} < \pi/2$. Кроме того,

$$\chi_+(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty e^{i3\pi/4}}^{\infty e^{-i\pi/4}} \ln(1 \pm e^{i2vb}) \frac{dw}{w-u} + \\ + \begin{cases} 0 & \text{при } \text{Re } u > 0 \\ \ln(1 \pm e^{i2b\sqrt{k^2-u^2}}) & \text{при } \text{Re } u < 0, \\ & 3\pi/4 < \arg(u) < \pi, \end{cases} \quad (12.2.24)$$

причем ветвь логарифма выбирается так, чтобы при $|u| \rightarrow \infty$ в пределах полосы $-\text{Im } k < \text{Im } u < \text{Im } k$ функция $\chi_+(u) \cdot \chi_-(u)$ стремилась к нулю. Для этого мы должны брать главное значение логарифма $\ln z = \ln |z| + i\varphi$, $-\pi < \varphi < \pi$. Верхний (нижний) знак в формуле относится к случаю четного (нечетного) возбуждения.

Первое слагаемое в (12.2.24) может быть приближенно представлено через функцию Вайнштейна

$$U(s, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - e^{i2\pi p - t^2/2}) \frac{dt}{t - se^{i\pi/4}}, \quad (12.2.25)$$

где

$$s = \sqrt{\frac{2b}{k}} u, \quad (12.2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{kb}{\pi} + \frac{1}{2} - \left[\frac{kb}{\pi} + \frac{1}{2} \right] && \text{при четном возбуждении,} \\ p &= \frac{kb}{\pi} - \left[\frac{kb}{\pi} \right] && \text{при нечетном возбуждении.} \end{aligned} \right\} \quad (12.2.27)$$

Здесь $[x]$ обозначает целую часть x .

Абсолютная погрешность, допускаемая при переходе к функции $U(s, p)$, имеет величину порядка $(kb)^{-1}$ при $s = 0$ и $(kb)^{-3/2}$ при $s = (2kb)^{1/2}$. Эта функция была введена и изучена Вайнштейном. Ее таблицы для вещественных значений s и p даны в книгах [96, 120, 146]. Там же приведены асимптотические формулы для $U(s, p)$. В частности,

$$U(s, p) \sim \frac{e^{-i\pi/4}}{s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{U_m(p)}{(se^{i\pi/4})^{2m}} \quad \text{при } s \gg 1, \quad (12.2.28)$$

где

$$U_m(p) = -i \frac{(2m-1)!!}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n\pi p}}{n^{m+3/2}} \quad (12.2.29)$$

и $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$.

Кроме того, функция $U(s, p)$ обладает свойствами

$$\left. \begin{aligned} U(s, N+p) &= U(s, p), \quad N = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ U(-s, p) &= -U(s, p). \end{aligned} \right\} \quad (12.2.30)$$

Подставляя выражения (12.2.23) в (12.2.21), получим

$$\hat{h}(kt) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} e^{igt} e^{\chi_+(kt) - \chi_+(-kt)}, \quad q = 2kl. \quad (12.2.31)$$

Здесь ветвь для $\sqrt{1 \pm t}$ выбирается так, что $\sqrt{1} = 1$. Сравнивая (12.2.31) с выражением (8.3.24), мы видим, что они отличаются лишь медленно меняющимся множителем, имеющим при $kt \neq w_m$ ограниченную величину. Заметим также, что при $kb \rightarrow \infty$ функции $F_n(w, u)$ переходят в соответствующие функции для изолированной ленты, которые образуют равномерно сходящуюся последовательность. Учитывая эти замечания и физические соображения, можно предположить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(w, u)$ равномерно сходится и допускает почленное интегрирование.

В заключение параграфа сформулируем интегральное уравнение для функции

$$\hat{\Phi}(w, u) = L(w) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(w, u). \quad (12.2.32)$$

Обращаясь к формуле (12.2.18), нетрудно видеть, что функция $\hat{\Phi}(w, u)$ удовлетворяет *интегральному уравнению краевых волн*

$$\hat{\Phi}(w, u) = \hat{\Phi}_1(w, u) + \frac{L_+(w)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2lt}}{L_-(t)} \frac{\hat{\Phi}(t, -u)}{t + \hat{w}} dt, \quad (12.2.33)$$

где

$$\hat{\Phi}_1(w, u) = L(w) F_1(w, u). \quad (12.2.34)$$

Оно является аналогом уравнения (8.4.10) в задаче о ленте.

§ 12.3. Строгие выражения для рассеянного поля в дальней зоне и внутри резонатора

В соответствии с формулами (12.1.11), (12.2.6) и (12.2.7) преобразование Фурье для тока можно представить в виде

$$F(w, u) = F_0(w, u) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(w, u) e^{iwl} + F_n(-w, -u) e^{-iwl} \right]. \quad (12.3.1)$$

Подставляя в формулу (12.1.9) это выражение и учитывая соотношение (12.2.10), получим при $y > b$

$$H_x = -\frac{4\pi}{c} \frac{G(u)}{L(u)} \cos v^0 b e^{i(uz+v^0y)} - \quad (12.3.2)$$

$$-\frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \cos v b e^{iv y} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(w, u) e^{iw(z+l)} + F_n(-w, -u) e^{-iw(l-z)} \right] dw.$$

Заметим, что все функции $F_n(w, u)$ пропорциональны величине

$$\frac{1}{L_-(w)} = \frac{L_+(w)}{L(w)} = \frac{L_+(w)}{2v \cos vb} e^{-ivb}, \quad (12.3.3)$$

которая имеет полюсы в точках $w = w_n$. Поскольку эти точки являются корнями уравнения $\cos(vb) = 0$, то ясно, что подынтегральное выражение в формуле (12.3.2) не будет иметь особенностей при $w = w_n$.

Применяя к формуле (12.3.2) метод перевала [78], можно получить следующее выражение для поля в дальней зоне:

$$H_x = \Phi(w, u) \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (12.3.4)$$

Здесь

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (12.3.5)$$

$$\Phi(w, u) = \tilde{\Phi}(w, u) e^{iwl} + \tilde{\Phi}(-w, -u) e^{-iwl}, \quad (12.3.6)$$

$$\tilde{\Phi}(w, u) = \frac{4\pi^2 i}{c} L(w) e^{-ikb \sin \varphi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(w, u), \quad (12.3.7)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} w = k \cos \varphi, \quad u = k \cos \varphi_0, \quad v = k \sin \varphi, \quad v^0 = k \sin \varphi_0, \\ 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \varphi_0 < \pi. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.8)$$

Первое слагаемое в формуле (12.3.6) описывает цилиндрическую волну, уходящую от левого конца резонатора ($z = -l$), а второе — волну от правого конца ($z = l$).

Совершенно аналогично находится рассеянное поле при нечетном возбуждении. Оно также может быть представлено в виде (12.3.4)–(12.3.8) через функции $L(w)$, $L_{\pm}(w)$, $F_n(w, u)$, соответствующие нечетному возбуждению. Здесь необходимо объяснить некоторые детали, относящиеся к вычислению дальнего поля.

Во-первых, в формуле (12.3.2) имеется слагаемое, расположенное вне интегрального выражения. Аналогичное слагаемое имеется в выражении для поля при нечетном возбуждении. Сумма этих двух слагаемых дает плоскую волну, которая существует во всей области $y > 0$ и отличается по знаку от падающей волны, задаваемой формулой (12.1.1).

Во-вторых, слагаемые с $m = 1$ в интеграле (12.3.2) и в аналогичном выражении для нечетного поля содержат полюс при $w = u$. Вследствие этого они создают плоскую волну, которая существует вне зоны тени геометрической оптики позади резонатора. Оказывается, что эта плоская волна полностью «гасит» плоскую волну, упомянутую в первом комментарии.

В результате полное рассеянное поле содержит пучок плоской волны, который «гасит» падающую волну (12.1.1) в зоне геометрической оптики позади резонатора. Однако в дальней зоне угловая ширина этого пучка стремится к нулю, и поэтому он не дает вклад в дальнейшее рассеянное поле.

Перейдем к изучению поля внутри резонатора. Из формул (12.1.9) и (12.3.1) следует, что при четном возбуждении рассеянное поле в области $-b < y < b$ равно

$$H_x = -\frac{4\pi i}{c} \frac{G(u)}{L(u)} \sin v^0 y e^{i(uz+v^0b)} - \quad (12.3.9)$$

$$-\frac{4\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \sin v y e^{ivb} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(w, u) e^{iw(z+l)} + F_n(-w, -u) e^{-iw(l-z)} \right] dw.$$

Изменяя переменную интегрирования с w на $-w$ для второго слагаемого внутри квадратных скобок, получаем

$$H_x = -\frac{4\pi i}{c} \frac{G(u)}{L(u)} \sin v^0 y e^{i(uz+v^0b)} - \quad (12.3.10)$$

$$-\frac{4\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \sin v y e^{ivb} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(w, u) e^{iw(z+l)} + F_n(w, -u) e^{iw(l-z)} \right] dw.$$

Здесь необходимы некоторые комментарии. Во-первых, подынтегральное выражение содержит полюсы w_m , которые являются корнями функции $L(w)$. Для этих значений w_m , как это следует из (12.1.10), (12.1.19) и (12.1.20), величины $v_m^2 = k^2 - w_m^2$ должны быть действи-

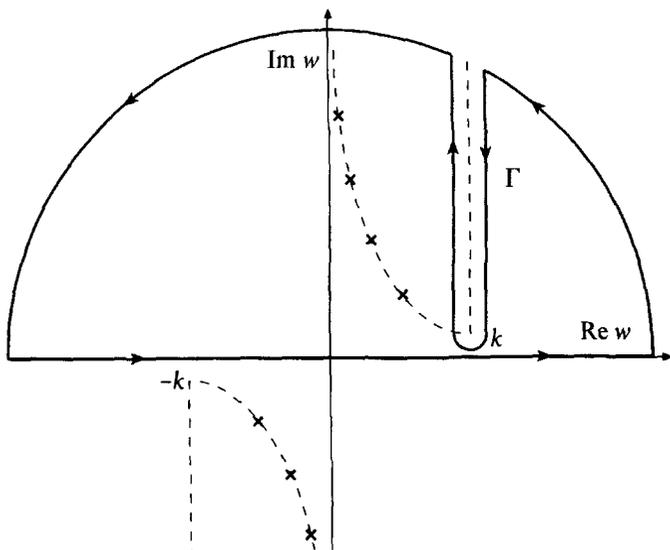


Рис. 12.3.1. Контур интегрирования при преобразовании выражения (12.3.10) к виду (12.3.15)

тельными. Условие $\text{Im } w_m^2 = 0$ приводит к уравнению гиперболы $w_m'' = k'k''/w_m'$, которое описывает расположение показанных на рис. 12.3.1 полюсов. Мы здесь предполагаем временно, что волновое число k имеет малую мнимую часть $0 \leq \text{Im } k \ll 1$. Поэтому все полюсы w_m с $\text{Re } w_m > 0$ лежат выше контура интегрирования, а все полюсы с $\text{Re } w_m < 0$ лежат ниже. Для того чтобы однозначно определить функцию $v = (k^2 - w^2)^{1/2}$, мы вводим разрезы вдоль линий $k \rightarrow k + i\infty$ и $-k \rightarrow -k - i\infty$.

Продолжим анализ формулы (12.3.10). Рассмотрим внимательнее первое слагаемое. С учетом выражений (12.1.6) и (12.1.13) оно равно

$$H_x = -i \sin(ky \sin \varphi_0) e^{ikz \cos \varphi_0} \tag{12.3.11}$$

и, как мы видим, «гасит» первичное поле (12.1.3).

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{\Gamma} \sin vy e^{ivb} F_n(w, u) e^{iw\zeta} dw \quad \text{при } \zeta > 0 \tag{12.3.12}$$

по контуру Γ , охватывающему в положительном направлении разрез $k \rightarrow k + i\infty$ (рис. 12.3.1). Выражение (12.3.12) можно представить в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin v y}{2v \cos v b} \mathcal{H}_+(w, u) e^{i w \zeta} d\zeta, \quad (12.3.13)$$

где

$$\mathcal{H}_+(w, u) = L(w) F_n(w, u). \quad (12.3.14)$$

Согласно (12.2.16) функция $\mathcal{H}_+(w, u)$ голоморфна при $\text{Im } w > 0$ и, следовательно, интеграл (12.3.12) равен нулю. Учитывая этот результат и переходя в формуле (12.3.10) к интегралу по контуру Γ , получим для полного поля внутри резонатора выражение

$$H_x = \frac{8\pi^2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin v_m y}{L'_-(w_m)} e^{i v_m b} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mathcal{F}_n(w_m, u) e^{i w_m(z+l)} + \mathcal{F}_n(w_m, -u) e^{i w_m(l-z)} \right], \quad (12.3.15)$$

в котором

$$|y| < b, \quad |z| < l, \quad (12.3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_n(w, u) &= L_-(w) F_n(w, u), \\ \mathcal{F}_1(w, u) &= \frac{c}{i 8\pi^2} \frac{e^{-i(u+l+v^0 b)}}{w - \hat{u}} \times \begin{cases} L_-(u) & \text{при четном возбуждении,} \\ -L_-(u) & \text{при нечетном возбуждении,} \end{cases} \end{aligned} \right\} (12.3.17)$$

где $v^0 = k \sin \varphi^0$, а $L'_-(w)$ означает производную $L_-(w)$ по аргументу w .

При нечетном возбуждении полное поле внутри резонатора определяется аналогичным выражением:

$$H_x = i \frac{8\pi^2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos v_m y}{L'_-(w_m)} e^{i v_m b} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{F}_n(w_m, u) e^{i w_m(z+l)} + \mathcal{F}_n(w_m, -u) e^{i w_m(l-z)} \right]. \quad (12.3.18)$$

Функцию $L'_-(w)$ можно представить в виде

$$L'_-(w) = \epsilon_m \frac{i 2 w_m b}{L_+(w_m)}, \quad (12.3.19)$$

где

$$\epsilon_0 = 2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 1. \quad (12.3.20)$$

Таким образом, полное поле внутри резонатора является суперпозицией волноводных волн, бегущих от его концов. Заметим, что начиная с некоторого номера m , величины w_m становятся чисто мнимыми и, следовательно, соответствующие им члены ряда, описывающие затухающие волны, будут экспоненциально убывать.

§ 12.4. О физическом смысле и асимптотических разложениях для функции $\mathcal{F}_n(w, u)$

В предыдущем параграфе мы показали, что функция $\mathcal{F}_n(k \cos \varphi, u)$ определяет диаграмму краевой волны n -го порядка, излучающейся в свободное пространство, а функция $\mathcal{F}_n(w_m, u)$ описывает амплитуду краевой волны, распространяющейся внутри резонатора. Изучим эти функции более детально.

Начнем с функции $\mathcal{F}_2(w, u)$. Исходя из формул (12.2.19) и (12.3.17), для нее можно получить выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(w, u) = & \frac{G(u)e^{iul}}{2\pi i L_-(u)} \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{\epsilon_m 2i w_m b} \frac{e^{i2w_m l}}{(w_m + w)(w_m + u)} - \\ & - \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{G(u)e^{iul}}{L_-(u)} \int_k^{k+i\infty} \frac{L_+^2(t)}{\sqrt{k^2 - t^2}} \frac{e^{i2tl} dt}{(t + w)(t + u)}, \end{aligned} \quad (12.4.1)$$

где интеграл берется по левому берегу разреза $k \rightarrow k + i\infty$, где $\arg [(k - t)^{1/2}] = -\pi/4$. Первая строка здесь описывает краевые волны, возникшие при дифракции на левом конце резонатора ($z = -l$) волноводных волн, пришедших от его правого конца ($z = l$). Вторая строка относится ко вторичной краевой волне, порожденной при $z = -l$ вследствие дифракции первичной краевой волны, бегущей от правого конца резонатора по его внешней поверхности ($y = \pm b^\pm$).

Еще более интересная физическая картина содержится в функции $\mathcal{F}_3(w, u)$. Согласно формулам (12.2.20) и (12.3.17) ее можно представить

в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_3(w, u) = & \frac{G(u)e^{-iul}}{2\pi i L_-(u)} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{m_2} \frac{L_+^2(w_{m_2})}{L'(w_{m_2})} \frac{e^{i2w_{m_2}l}}{(w_{m_2} + w)} \sum_{m_1} \frac{L_+^2(w_{m_1})}{L'(w_{m_1})} \frac{e^{i2w_{m_1}l}}{(w_{m_1} + w_{m_2})(w_{m_1} - u)} - \right. \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{L_+^2(t)}{\sqrt{k^2 - t^2}} \frac{e^{i2lt}}{(t + w)} \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_ml}}{(w_m + t)(w_m - u)} - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_ml}}{(w_m + w)} \int_k^{k+i\infty} \frac{L_+^2(t)}{\sqrt{k^2 - t^2}} \frac{e^{i2lt}}{(t + w_m)(t - u)} + \\
 & \left. + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_k^{k+i\infty} \frac{L_+^2(t_2)}{\sqrt{k^2 - t_2^2}} \frac{e^{i2lt_2}}{(t_2 + w)} \int_k^{k+i\infty} \frac{L_+^2(t_1)}{\sqrt{k^2 - t_1^2}} \frac{e^{i2lt_1}}{(t_1 + t_2)(t_1 - u)} dt_1 \right\}. \quad (12.4.2)
 \end{aligned}$$

Поясним смысл этой формулы. Первая строка здесь описывает краевые волны, возникшие следующим образом. Падающая волна, ударившись в левый конец резонатора ($z = -l$), возбуждает внутри резонатора волноводные волны (с номером m_1). Каждая из этих волн, добрав до противоположного конца резонатора ($z = l$), порождает, в свою очередь, бесконечное множество новых волноводных волн (с номером m_2). Эти последние бегут к противоположному концу резонатора и излучаются в окружающее пространство. Описанная картина схематически изображена на рис. 12.4.1, а.

Вторая строка в формуле (12.4.2) имеет следующий смысл (см. рис. 12.4.1, б). Первичные волноводные волны возбуждают при дифракции на правом конце резонатора вторичные краевые волны, распространяющиеся по внешней стороне резонатора. Эти волны, достигнув противоположного конца, порождают третичную краевую волну, излучающуюся в свободное пространство.

Переходим к третьей строке (см. рис. 12.4.1, в). Падающая волна создает на внешней поверхности резонатора первичные краевые волны. Достигнув противоположного конца резонатора, они возбуждают внут-

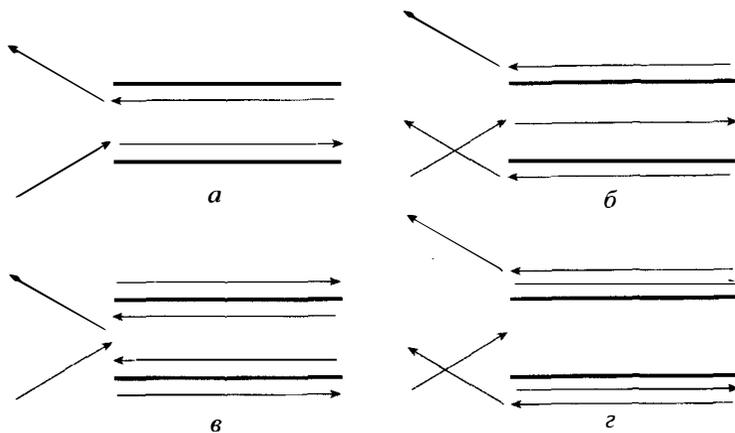


Рис. 12.4.1. Схема волн, описываемых функцией $\mathcal{F}_3(w, u)$

ри него волноводные волны. Последние бегут к противоположному концу резонатора и излучаются в окружающее пространство. Описывать подробно смысл последней строки в формуле (12.4.2) мы уже не будем, он ясен из рис. 12.4.1, з.

Остальные функции $\mathcal{F}_n(w, u)$ качественно не отличаются от функции $\mathcal{F}_3(w, u)$. Они имеют лишь более сложную структуру, состоящую из большего числа тех же элементов, которые входят в $\mathcal{F}_3(w, u)$ и схематически изображены на рис. 12.4.1. Заметим также, что интегралы по разрезу всегда связаны с краевыми волнами, бегущими по внешней поверхности резонатора, и перейдем к вопросу об асимптотических представлениях для них.

Функции $\mathcal{F}_m(w, u)$ содержат многократные интегралы типа

$$\hat{\varphi}_n(\alpha, \alpha_0) e^{iq(n-1)} = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times$$

$$n=3,4,\dots,m-1 \tag{12.4.3}$$

$$\times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{\bar{h}(t_1)\bar{h}(t_2)\dots\bar{h}(t_{n-1})dt_1dt_2\dots dt_{n-1}}{(t_1+\alpha_0)(t_2+t_1)(t_3+t_2)\dots(t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)},$$

где $\bar{h}(t) = h(t) \exp[2\chi_+(kt)]$, а функция $h(t)$ определяется согласно (8.3.24). Следовательно,

$$\hat{\varphi}_n(\alpha, \alpha_0) e^{iq(n-1)} = \frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{(i\pi)^{n-1}} \times \int_1^{1+i\infty} \dots \int_1^{1+i\infty} \frac{h(t_1)h(t_2)\dots h(t_{n-1})dt_1dt_2\dots dt_{n-1} e^{2\sum_{s=1}^{n-1} \chi_+(kt_s)}}{(t_1+\alpha_0)(t_2+t_1)(t_3+t_2)\dots(t_{n-1}+t_{n-2})(t_{n-1}+\alpha)}, \quad (12.4.4)$$

где $\alpha = \cos \varphi$, $\alpha_0 = \cos \varphi_0$, $q = 2kl$, а интегралы берутся по левому берегу разреза $1 \rightarrow 1+i\infty$. Сравнивая выражение (12.4.4) с (10.1.7), мы видим, что оно отличается от последнего только дополнительным множителем $\exp[2\sum \chi_+(kt_s)]$. Поскольку этот множитель является ограниченной аналитической функцией переменных t_s , к интегралу (12.4.4) можно применить лемму 2 из § 9.1 об асимптотических разложениях при $q \gg 1$. Очевидно, что асимптотическое разложение функции $\hat{\varphi}_n(\alpha, \alpha_0)$ легко построить, исходя из аналогичного разложения функции $\varphi_n(\alpha, \alpha_0)$. Для этого достаточно ввести дополнительный множитель $\exp[2(n-1)\chi_+(k)]$ в первое слагаемое формулы (10.2.3) и дополнительный множитель

$$e^{2\sum_{s=1}^{n-1} \chi_+(kt_s)}$$

в правую часть формул (10.2.5) и (10.2.6). Главный член найденного таким путем разложения имеет вид

$$\hat{\varphi}_n(\alpha, \alpha_0) \sim \varphi(q, \alpha)\varphi(q, \alpha_0)\varphi^{n-3}(q, 1)e^{2(n-1)\chi_+(k)} \quad \text{при } q \gg 1, \quad (12.4.5)$$

$n=3,4,\dots$

где функции $\varphi(q, \alpha)$ по-прежнему определяются формулами из §§ 9.2 и 9.3.

Приведенные соображения позволяют в принципе построить при $kl \gg 1$ асимптотические ряды для функций $\mathcal{F}_n(w, u)$. Однако при этом возникают следующие трудности. Первая — сложная комбинационная структура функций $\mathcal{F}_n(w, u)$, которая отражает взаимодействие большого числа волн различного типа, возбуждаемых в резонаторе. Вторая трудность заключается в том, что функция $\chi_+(kt)$ не является табулированной. Табулировано лишь ее приближенное выражение — функция $U(s, p)$. Причем

$$e^{\chi_+(k)} = e^{U(\sqrt{2kb}, p)} \left\{ 1 + O\left[(kb)^{-3/2}\right] \right\}. \quad (12.4.6)$$

Поэтому, пользуясь функцией Вайнштейна U , мы можем корректно определить ограниченное число членов асимптотического разложения для функции $\mathcal{F}_n(w, u)$. Так, например, полагая

$$\chi_+(kt) = U(\sqrt{2kbt}, p),$$

можно получить следующее асимптотическое разложение для функции

$$\mathcal{F}_2(w, u) \sim \frac{G(u)e^{iu l}}{2\pi i L_-(u)} \left\{ \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{(w_m + w)(w_m + u)} - \frac{1}{2(w - u)} \sum_{m=0} a_m \left[\frac{\varphi_q^{(m)}(q, \alpha_0)}{\sqrt{1 + \alpha_0}} - \frac{\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)}{\sqrt{1 + \alpha}} \right] \right\} \quad (12.4.7)$$

при $q = 2kl \rightarrow \infty$, где $\varphi_q^{(m)}(q, \alpha)$ есть производные интеграла Френеля и определяются формулой (9.2.6). Коэффициенты a_m являются коэффициентами ряда Тейлора

$$\sqrt{1 + t} e^{2U(\sqrt{2kbt}, p)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (t - 1)^m. \quad (12.4.8)$$

Нетрудно показать, что при $kb \gg 1$ коэффициент a_1 содержит член порядка $(kb)^{-1/2}$, коэффициент a_2 включает член порядка $(kb)^{-1}$, а в коэффициент a_3 входит член порядка $(kb)^{-3/2}$. Но в силу соотношения (12.4.6) коэффициент a_0 определен с погрешностью $(kb)^{-3/2}$. Следовательно, мы не имеем права удерживать в (12.4.7) уже члены с коэффициентом a_3 .

Учитывая, однако, то обстоятельство, что свойства резонатора определяются в основном волноводными волнами, мы проведем дальнейший анализ функций $\mathcal{F}_n(w, u)$, пренебрегая в них всеми интегралами по разрезу, т.е. пренебрегая взаимодействием волн по внешней стороне резонатора.

§ 12.5. Приближенные выражения для диаграмм рассеяния и амплитуд краевых волн

Опуская в формуле (12.2.18) члены порядка $(kl)^{-1/2}$, т.е. пренебрегая взаимодействием волн по внешней стороне резонатора, можно получить следующее рекуррентное соотношение для функций $\mathcal{F}_n(w, u)$:

$$\mathcal{F}_n(w, u) = \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{(w_m + w)} \mathcal{F}_{n-1}(w_m, -u). \quad (12.5.1)$$

Амплитуды волноводных волн удобно представить в виде

$$\mathcal{F}_n(w_{m_n}, u) = \sum_{m_{n-1}} R_{m_{n-1}, m_n} \mathcal{F}_{n-1}(w_{m_{n-1}}, -u) \quad (12.5.2)$$

или

$$\mathcal{F}_n(w_{m_n}, u) = \sum_{m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_1} R_{m_{n-1}, m_n} R_{m_{n-2}, m_{n-1}} \dots R_{m_1, m_2} \times \\ \times \mathcal{F}_1(w_{m_1}, -(-1)^n u), \quad (12.5.3)$$

где

$$R_{m,n} = \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{(w_m + w_n)}, \quad (12.5.4)$$

$$L'(w_m) = \epsilon_m \cdot i2w_m b, \quad (12.5.5)$$

а суммирование ведется по всем индексам m_v , принимающим значения $1, 2, 3, \dots$. При нечетном возбуждении эти индексы, согласно (12.1.20), принимают также значение, равное нулю. Функцию $R_{m,n}$ естественно назвать коэффициентом трансформации волноводной волны с номером m в волноводную волну с номером n , возникающую в результате дифракции на концах резонатора. Изучим свойства этих коэффициентов.

Прежде всего покажем, что конструкцию выражения (12.5.4) можно объяснить, исходя из простых физических соображений. Согласно (12.3.15) волноводная волна номера m , бегущая от края $z = -l$, определяется выражением

$$\frac{\sin v_m y}{w_m b} L_+(w_m) e^{i w_m (z+l)}$$

и может быть представлена в виде суммы волн Бриллюэна

$$\frac{e^{i w_m l}}{2i w_m b} L_+(w_m) \left[e^{i(w_m z + v_m y)} - e^{i(w_m z - v_m y)} \right],$$

распространяющихся под углом φ_m ($w_m = k \cos \varphi_m$, $v_m = k \sin \varphi_m$) к оси z (рис. 12.5.1). Рассмотрим дифракцию на полуплоскости $y = b$, $-\infty \leq z \leq l$ плоской волны, описываемой первым слагаемым в этой формуле. При дифракции на полуплоскости возбуждается краевая цилиндрическая волна, амплитуда которой в направлении φ_n пропорциональна произведению

$$\frac{L_+(w_m)}{2i w_m b} \frac{\sqrt{k + w_m} \sqrt{k + w_n}}{w_m + w_n} e^{i2w_n l}.$$

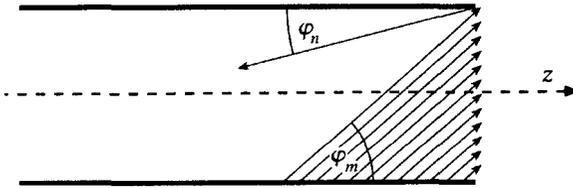


Рис. 12.5.1. К дифракции волны Бриллюэна на конце открытого резонатора

Корень $\sqrt{k + w_{m,n}}$ здесь можно рассматривать как «зародыш» функции

$$L_+(w_{m,n}) = \sqrt{k + w_{m,n}} e^{U(s_{m,n,p})}.$$

Кроме того, при четном возбуждении $2iw_m b = L'(w_m)$. Таким образом, мы видим, что произведение $R_{m,n} L_+(w_n)$, определяющее амплитуду n -й волны, пропорционально амплитуде цилиндрической волны, возникшей при дифракции m -й волны на конце резонатора и распространяющейся в направлении $\varphi_n = \arccos(w_n/k)$, которое соответствует направлению волны Бриллюэна для n -й волноводной волны. Перейдем теперь к количественной оценке коэффициентов $R_{m,n}$.

Присвоим индекс j распространяющейся волноводной волне с самым высоким номером $m = j$. Тогда все волны с номером $m < j$ будут распространяющимися, а волны с номером $m > j$ затухающими. Предположим далее, что частота падающей волны близка к критической частоте j -й волны. В этом случае $w_j \approx 0$ и, следовательно, на основании (12.1.19), (12.1.20)

$$\frac{kb}{\pi} + \frac{1}{2} = j + p \quad \text{при четном возбуждении,} \quad (12.5.6)$$

$$\frac{kb}{\pi} = j + p \quad \text{при нечетном возбуждении,} \quad (12.5.7)$$

где $p < 1$. Очевидно, что целые числа j при четном и нечетном типах возбуждения могут не совпадать. Кроме того, $j \gg 1$ при условии $kb \gg 1$, которое мы будем предполагать выполненным. Оказывается, что определенная таким образом j -я волна обладает особыми свойствами, которые выделяют ее среди всех остальных волноводных волн. Действительно, так как

$$w_j = \sqrt{\frac{k}{2b}} \sqrt{4\pi p}, \quad w_m = \sqrt{\frac{k}{2b}} \sqrt{4\pi(j-m)} \quad \text{при } 0 < |j-m| < j, \quad (12.5.8)$$

то величина (12.2.26) принимает значения

$$s_j = \sqrt{4\pi p} < 1, \quad |s_m| \approx \sqrt{4\pi|j-m|} \gg 1 \quad \text{при } 0 < |j-m| < j. \quad (12.5.9)$$

Поэтому (см. [96, 120])

$$\left. \begin{aligned} 2U(s_j, p) &\approx \ln \frac{2s_j^2}{i} + i(i+1)\beta_0 s_j, \quad \beta_0 = 0.824, \\ U(s_m, p) &\approx 0 \quad \text{при } j-m \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.5.10)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} |R_{j,j}| &\approx 1, \quad |R_{m,m}| \leq |R_{m,j}|, \\ |R_{j,m}| &\approx \frac{s_j}{\sqrt{\pi|j-m|}} \quad \text{при } 0 < |j-m| < j, \\ |R_{m,j}| &\approx \frac{1}{\epsilon_m 4\pi|j-m|} \quad \text{при } 0 < |j-m| < j. \end{aligned} \right\} \quad (12.5.11)$$

Наряду с этими оценками полезны также формулы

$$R_{j,j} \approx -e^{i(M+\beta_0+i\beta_0)s_j}, \quad M = \sqrt{\frac{2k}{b}}l, \quad (12.5.12)$$

$$R_{j,m} = \frac{2w_j}{w_m + w_j} R_{j,j}, \quad (12.5.13)$$

$$R_{m,n} \approx \frac{R_{m,j}}{1 + w_n/w_m}. \quad (12.5.14)$$

Таким образом, все коэффициенты $R_{m,n}$ оказываются малыми по сравнению с $R_{j,j}$, модуль которого близок к единице. В силу этого j -я волна слабо трансформируется в другие типы волн и слабо излучается в окружающее пространство. Волны других номеров $m \neq j$, напротив, хорошо излучаются из резонатора, так как слабо отражаются от его концов и слабо трансформируются в остальные типы волн. Полученные результаты позволяют приближенно просуммировать многократные ряды (12.5.3) для функций $\mathcal{F}_n(w_m, u)$.

Начнем с оценок для функции $\mathcal{F}_2(w_{m_2}, u)$. Представим ее в виде

$$\mathcal{F}_2(w_{m_2}, u) = R_{j,m_2} \mathcal{F}_1(w_j, -u) + \sum_{m_1}' R_{m_1, m_2} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, -u), \quad (12.5.15)$$

где штрих означает, что при суммировании следует пропустить слагаемое с индексом $m_1 = j$. Пусть $0 < |j - m_2| < j$, тогда в силу (12.5.11)

$$\mathcal{F}_2(w_{m_2}, u) = O\left(\frac{s_j}{\sqrt{\pi(j - m_2)}}\right) + \sum'_{m_1} O\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(j - m_1)}}\right). \quad (12.5.16)$$

Если же $m_2 = j$ и $0 < |j - m_1| < j$, то

$$\mathcal{F}_2(w_j, u) = O(1) + \sum'_{m_1} O\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(j - m_1)}}\right). \quad (12.5.17)$$

При достаточно малых значениях s_j члены ряда в формуле (12.5.16) могут оказаться одного порядка с первым слагаемым. Поэтому при $m_2 \neq j$ мы не можем отбросить ряд в формуле (12.5.15).

Займемся далее функцией \mathcal{F}_3 . Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(w_{m_3}, u) = & R_{j,m_3} R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_j, u) + R_{j,m_3} \sum'_{m_1} R_{m_1,j} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, u) + \\ & (12.5.18) \\ & + \sum'_{m_2} R_{m_2,m_3} R_{j,m_2} \mathcal{F}_1(w_j, u) + \sum'_{m_2} R_{m_2,m_3} \sum'_{m_1} R_{m_1,m_2} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, u). \end{aligned}$$

При $0 < |j - m_{1,2,3}| < j$, соблюдая тот же порядок слагаемых, имеем.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(w_{m_3}, u) = & O\left[\frac{s_j}{\sqrt{\pi(j - m_3)}}\right] + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left(\frac{s_j}{\sqrt{j - m_3}}\right) \sum'_{m_1} O\left(\frac{1}{j - m_1}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \sum'_{m_2} O\left[\frac{s_j}{(j - m_2)^{3/2}}\right] + \frac{1}{(4\pi)^2} \sum''_{m_2, m_1} O\left[\frac{1}{(j - m_2)(j - m_1)}\right]. \end{aligned}$$

Если же $m_3 = j$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(w_j, u) = & O(1) + \frac{1}{4\pi} \sum'_{m_1} O\left(\frac{1}{j - m_1}\right) + \\ & + \frac{1}{4\pi^{3/2}} \sum'_{m_2} O\left[\frac{s_j}{(j - m_2)^{3/2}}\right] + \frac{1}{(4\pi)^2} \sum''_{m_2, m_1} O\left[\frac{1}{(j - m_2)(j - m_1)}\right]. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка $(j - m_2)^{-1}(j - m_1)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(w_m, u) = R_{j,m} \left[R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_j, u) + \sum'_{m_1} R_{m_1,j} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, u) \right] + \\ + \mathcal{F}_1(w_j, u) \sum'_{m_1} R_{m_1,m} R_{j,m_1}. \quad (12.5.19) \end{aligned}$$

Аналогичные оценки можно провести и для функций $\mathcal{F}_{4,5,6\dots}$. Такие оценки показывают, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(w_m, u) = R_{j,m} R_{j,j}^{n-3} \times \\ \times \left[R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_j, -(-1)^n u) + \sum'_{m_1} R_{m_1,j} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, -(-1)^n u) \right] + \\ + R_{j,j}^{n-3} \mathcal{F}_1(w_j, -(-1)^n u) \sum'_{m_1} R_{m_1,m} R_{j,m_1}, \quad (12.5.20) \end{aligned}$$

пренебрегая при $m \neq j$ членами типа

$$\frac{s_j}{(j - m_1)^{5/2}}, \quad \frac{s_j^2}{(j - m_1)^2}, \quad \frac{1}{(j - m_1)^2}, \quad m_1 \neq j,$$

а также малыми величинами более высокого порядка.

Для расшифровки физического смысла этой формулы удобно ввести следующую символику. Будем понимать под символом $m^{(n)}$ волноводную волну с номером m , которая n раз пробежала по отрезку волновода, отражаясь от его концов. Трансформацию m -й волны в ν -ю волну изобразим в виде $m \rightarrow \nu$. Тогда первое слагаемое первой строки в (12.5.20) можно наглядно представить с помощью преобразования

$$j^{(n-1)} \rightarrow m,$$

которое показывает, что возникшая при первичной дифракции j -я волна $n - 1$ раз пробежала между концами резонатора и при последнем отражении возбудила m -ю волну. Слагаемые, относящиеся к ряду из квадратных скобок, описывают следующие преобразования волн:

$$m_1^{(1)} \rightarrow j^{(n-2)} \rightarrow m, \quad m_1 \neq j.$$

И, наконец, последнему слагаемому в формуле (12.5.20) соответствуют преобразования

$$j^{(n-2)} \rightarrow m_1^{(1)} \rightarrow m, \quad m_1 \neq j.$$

Обратим внимание на следующий деликатный момент. Переходя от формулы (12.5.3) к выражению (12.5.20), мы пренебрегли, в частности, рядом

$$\sum'_{m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_1} R_{m_{n-1}, m} R_{m_{n-2}, m_{n-1}} \dots R_{m_1, m_2} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, -(-1)^n u), \quad (12.5.21)$$

где суммирование осуществляется по всем значениям индексов, кроме $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = j$. При достаточно малых значениях величины s_j члены ряда (12.5.21) сравнимы с некоторыми из удержанных в (12.5.20). Однако, как мы увидим сейчас, рядом (12.5.21) можно тем не менее пренебречь при вычислении результирующей краевой волны $\sum_{n=1} \mathcal{F}_n(w_m, u)$, которая нас интересует в конечном счете.

Действительно, пользуясь формулой (12.5.20), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \mathcal{F}_n(w_m, u) &= \mathcal{F}_1(w_m, u) + \mathcal{F}_2(w_m, u) + \frac{1}{\mathcal{D}_j} \left[\mathcal{F}_1(w_j, u) + \right. \\ &+ R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_j, -u) \left. \right] \left(R_{j,m} R_{j,j} + \sum'_{m_1} R_{m_1, m} R_{j, m_1} \right) + \\ &+ \frac{R_{j,m}}{\mathcal{D}_j} \sum'_{m_1} R_{m_1, j} \left[\mathcal{F}_1(w_{m_1}, u) + R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_{m_1}, -u) \right], \quad (12.5.22) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_j = 1 - R_{j,j}^2. \quad (12.5.23)$$

Выясним, какой вклад в ряд $\sum_{n=1} \mathcal{F}_n(w_m, u)$ могут дать отброшенные члены (12.5.21). Это проще всего сделать, взяв из (12.5.21) слагаемое

$$R_{m,m}^{n-1} \mathcal{F}_1(w_m, -(-1)^n u), \quad m \neq j. \quad (12.5.24)$$

При вычислении $\sum_{n=1} \mathcal{F}_n(w_m, u)$ такое слагаемое дает дополнительное выражение

$$\frac{R_{m,m}^2}{\mathcal{D}_m} [\mathcal{F}_1(w_m, u) + R_{m,m} \mathcal{F}_1(w_m, -u)], \quad m \neq j, \quad (12.5.25)$$

где

$$\mathcal{D}_m = 1 - R_{m,m}^2. \quad (12.5.26)$$

Но согласно условиям задачи $|R_{j,j}| = 1$ и $|R_{m,m}| \ll 1$. Поэтому ясно, что величиной (12.5.25) можно пренебречь по сравнению с (12.5.22).

§ 12.6. Резонансная часть поля внутри резонатора

Выражение (12.5.22) вместе с формулами (12.3.15) и (12.3.18) определяет поле внутри резонатора. Резонансная часть этого поля имеет вид

$$H_x = \frac{i\alpha_j}{\mathcal{D}_j} R_{j,j} e^{-ikb \sin \varphi_0} \sum_m^j (-1)^m \frac{\sqrt{1 + \alpha_m} \psi_+(k\alpha_m)}{\epsilon_m k b \alpha_m} \times \left\{ \begin{array}{l} \sin(v_m y) \\ \cos(v_m y) \end{array} \right\} \left[A(m, \beta) e^{ik(z+l)\alpha_m} + A(m, -\beta) e^{ik(l-z)\alpha_m} \right], \quad (12.6.1)$$

где

$$\alpha_m = w_m/k = \cos \varphi_m, \quad v_m = k \sin \varphi_m, \quad \beta = u/k = \cos \varphi_0, \quad (12.6.2)$$

$$\epsilon_0 = 2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 1,$$

$$A(m, \beta) = B(m, \beta) + R_{j,j} B(m, -\beta), \quad (12.6.3)$$

$$B(m, \beta) = \sqrt{1 - \beta} \psi_-(k\beta) e^{-ikl\beta} \left[\frac{R_{j,j}}{(\alpha_m + \alpha_j)(\alpha_j - \beta)} + \frac{1}{\alpha_m + \alpha_j} \sum_{m_1}^{j-1} \frac{R_{m_1,j}}{\alpha_{m_1} - \beta} + \frac{1}{\alpha_j - \beta} \sum_{m_1}^{j-1} \frac{R_{m_1,m}}{\alpha_{m_1} + \alpha_j} \right]. \quad (12.6.4)$$

Мы опустили здесь верхние индексы в величинах $\alpha_m^{(1,2)}$, $v_m^{(1,2)}$, $\psi_{\pm}^{(1,2)}$, $R_{j,j}^{(1,2)}$, $R_{m,n}^{(1,2)}$ и $D_j^{(1,2)}$, которые соответствуют компонентам поля $H_x^{(1,2)}$.

В выражении (12.6.1) множитель $\sin(v_m y)$ соответствует полю $H_x^{(1)}$, а множитель $\cos(v_m y)$ соответствует полю $H_x^{(2)}$.

Кроме того, при четном возбуждении

$$\left. \begin{aligned} v_m^{(1)} &= \sqrt{k^2 - [w_m^{(1)}]^2} = \frac{\pi}{2b}(2m - 1), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ j^{(1)} &= \left[\frac{kb}{\pi} + \frac{1}{2} \right], \quad p^{(1)} = \frac{kb}{\pi} + \frac{1}{2} - j^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (12.6.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_-^{(1)}(k\alpha) &= \psi_+^{(1)}(-k\alpha), \\ \psi_+^{(1)}(k\alpha) &= e^{U(\sqrt{2kb}\alpha, p^{(1)})} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{при } \alpha > 0 \\ (1 + e^{i2kb\sqrt{1-\alpha^2}}) & \text{при } \alpha < 0 \end{array} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (12.6.6)$$

а при нечетном возбуждении

$$\left. \begin{aligned} v_m^{(2)} &= \sqrt{k^2 - [w_m^{(2)}]^2} = \frac{\pi}{2b}(2m) = \frac{\pi}{b}m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ j^{(2)} &= \left[\frac{kb}{\pi} \right], \quad p^{(2)} = \frac{kb}{\pi} - j^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (12.6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_-^{(2)}(k\alpha) &= \psi_+^{(2)}(-k\alpha), \\ \psi_+^{(2)}(k\alpha) &= e^{U(\sqrt{2kb}\alpha, p^{(2)})} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{при } \alpha > 0 \\ (1 - e^{i2kb\sqrt{1-\alpha^2}}) & \text{при } \alpha < 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.6.8)$$

Упрощенный вариант формулы (12.6.1), связанный с использованием приближенных соотношений (12.5.8), был получен ранее иным путем в работе [147], но содержит там некоторые опечатки.

При выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} (M + \beta_0)s_j &= (2n + 1)\pi, \quad s_j = \sqrt{4\pi p} = \sqrt{2kb}\alpha_j \ll 1 \\ \beta_0 &= 0.824, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12.6.9)$$

в соответствии с формулой (12.5.12),

$$R_{j,j} \approx 1 - \beta_0 s_j, \quad D_j \approx 2\beta_0 s_j, \quad (12.6.10)$$

система становится резонансной для j -й волны, которая симметрична относительно оси z :

$$H_{x,j} = \frac{(-1)^n M \cos(w_j z) e^{i(kb+\pi/4)}}{(2n+1)\pi\beta_0} \frac{e^{i(kb+\pi/4)}}{\sqrt{kb}} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(v_j y) \\ i \cos(v_j y) \end{array} \right\} e^{-ikb \sin \varphi_0} \times \\ \times \left\{ T(\alpha_j, \beta) + T(\alpha_j, -\beta) + \sum_{m_1}^{j-1} R_{m_1,j} [T(\alpha_{m_1}, \beta) + T(\alpha_{m_1}, -\beta)] \right\}, \quad (12.6.11)$$

где

$$T(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\alpha-\beta} \psi_-(k\beta) e^{-ikl\beta}, \quad T(\alpha_j, \pm\alpha_j) = O(\sqrt{k\beta}). \quad (12.6.12)$$

Полагая здесь $\varphi_0 = \pi/2$, мы получаем формулу Фиалковского [147]

$$H_x = \frac{(-1)^n M}{(n+1/2)\pi\beta_0} \left\{ \begin{array}{l} -\sin v_j y \\ i \cos v_j y \end{array} \right\} \cos w_j z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.6.13)$$

где M — большой параметр (см. (12.5.12)), который указывает на концентрацию поля в резонаторе.

При выполнении условий

$$\left. \begin{array}{l} (M + \beta_0) s_j = 2n\pi, \quad s_j = \sqrt{4\pi\rho} = \sqrt{2kb}\alpha_j \ll 1 \\ \beta_0 = 0.824, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\}, \quad (12.6.14)$$

если

$$R_{j,j} \approx -1 + \beta_0 s_j, \quad D_j \approx 2\beta_0 s_j, \quad (12.6.15)$$

система становится резонансной для j -й волны, которая антисимметрична относительно оси z :

$$H_{x,j} = \frac{(-1)^n M \sin(w_j z) e^{i(kb+\pi/4)}}{2n\pi\beta_0} \frac{e^{i(kb+\pi/4)}}{\sqrt{kb}} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(v_j y) \\ i \cos(v_j y) \end{array} \right\} e^{-ikb \sin \varphi_0} \times \\ \times \left\{ T(\alpha_j, \beta) - T(\alpha_j, -\beta) - \sum_{m_1}^{j-1} R_{m_1,j} [T(\alpha_{m_1}, \beta) - T(\alpha_{m_1}, -\beta)] \right\}. \quad (12.6.16)$$

Этот резонанс может наблюдаться при освещении резонатора под углом $\varphi_0 < 90^\circ$ и $w_j l/2 \approx \pi/2$. Второе условие выполняется при $M(\pi\rho)^{1/2} \approx \pi$. При $\varphi_0 = 90^\circ$ этот резонанс не существует ($H_{x,j} = 0$), поскольку

$$T(\alpha_m, +0) = T(\alpha_m, -0). \quad (12.6.17)$$

Заметим, что падающее поле $H_{0x}^{(1,2)}$ не рассеивается, если $\varphi_0 = \varphi_m^{(1,2)} = \arccos(w_m^{(1,2)}/k)$ при $m = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае пластины резонатора располагаются в узлах падающего электрического поля $E_{0z}^{(1,2)}$ и не возмущают падающего поля. Отметим, что формулы (12.6.1), (12.6.11) и (12.6.16) были выведены при условии

$$u = k \cos \varphi_0 \neq w_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, j-1 \quad (12.6.18)$$

и поэтому не применимы в случае $\varphi_0 = \varphi_m^{(1,2)}$ или $\varphi_0 = \pi - \varphi_m^{(1,2)}$ при $m = 0, 1, 2, \dots, j-1$. Это замечание справедливо и для результатов, полученных в [147].

Изучим как происходит исчезновение рассеянного поля $H_{0x}^{(1,2)}$ при $u \rightarrow w_m^{(1,2)} \geq 0$ и $\varphi_0 \rightarrow \varphi_m^{(1,2)} \geq 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots, j-1$). Для этого воспользуемся строгими формулами (12.3.15), (12.3.17), (12.3.18) и асимптотическими формулами (12.5.1), (12.5.2), (12.5.3), в которых пренебрегается всеми многократными краевыми волнами, бегущими по внешней поверхности пластин резонатора ($y = \pm b^\pm$).

В соответствии с формулами (12.3.15) и (12.3.18) полное поле имеет вид

$$H_x^{total} = \frac{8\pi^2}{c} \sum_m \frac{L_+(w_m)}{\epsilon_m i 2w_m b} \left\{ \begin{array}{l} \sin v_m y \\ i \cos v_m y \end{array} \right\} e^{i v_m b} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{F}_n(w_m, u) e^{i w_m(z+l)} + \mathcal{F}_n(w_m, -u) e^{i w_m(l-z)} \right], \quad (12.6.19)$$

где верхние индексы опущены.

Используя соотношения

$$\mathcal{F}_1(w, w_m) = 0 \quad \text{при } w \neq w_m, \text{ включая } w \rightarrow w_m, \quad (12.6.20)$$

$$\lim_{u \rightarrow w_m} \mathcal{F}_1(w_m, u) = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{cL'(w_m)}{8\pi^2 i L_+(w_m)} e^{-i(w_m l + v_m b)}, \quad (12.6.21)$$

$$R_{m,n} \mathcal{F}_1(w_m, w_m) = -\mathcal{F}_1(w_n, -w_m) \quad (12.6.22)$$

и формулы (12.5.1), (12.5.2) и (12.5.3), получим

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}_n(w_m, w_\nu) = -\mathcal{F}_{n-1}(w_m, w_\nu), \quad n = 3, 5, 7, \dots \\ \mathcal{F}_n(w_m, -w_\nu) = -\mathcal{F}_{n+1}(w_m, -w_\nu), \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right\} \nu = 0, 1, 2, 3, \dots, j. \quad (12.6.23)$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, w_\nu) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, -w_\nu) &= 0, \end{aligned} \right\} \nu = 0, 1, 2, 3, \dots, j \quad (12.6.24)$$

и

$$\begin{aligned} H_x^{total} &= \frac{8\pi^2}{c} \frac{L_+(w_m)}{\epsilon_m i 2w_m b} \left\{ \begin{array}{l} \sin v_m y \\ i \cos v_m y \end{array} \right\} e^{i v_m b} \mathcal{F}_1(w_m, w_m) e^{i w_m(z+l)} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} i \sin v_m y \\ \cos v_m y \end{array} \right\} e^{i w_m z} = \left\{ \begin{array}{l} H_{0x}^{(1)} \\ H_{0x}^{(2)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (12.6.25)$$

Если $\varphi_0 \rightarrow \pi - \varphi_m^{(1,2)}$ и $u \rightarrow -w_m^{(1,2)}$, то формула (12.6.19) переходит в

$$\begin{aligned} H_x^{total} &= \frac{8\pi^2}{c} \frac{L_+(w_m)}{\epsilon_m i 2w_m b} \left\{ \begin{array}{l} \sin v_m y \\ i \cos v_m y \end{array} \right\} e^{i v_m b} \mathcal{F}_1(w_m, w_m) e^{i w_m(l-z)} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} i \sin v_m y \\ \cos v_m y \end{array} \right\} e^{-i w_m z} = \left\{ \begin{array}{l} H_{0x}^{(1)} \\ H_{0x}^{(2)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (12.6.26)$$

Следовательно, при углах падения $\varphi_0 = \varphi_m^{(1,2)}$ и $\varphi_0 = \pi - \varphi_m^{(1,2)}$, относящихся к направлениям волн Бриллюэна, падающее поле $H_{0x}^{(1,2)}$ не испытывает дифракцию на резонаторе. В этом случае краевые волны попарно компенсируют друг друга и полное поле внутри резонатора в точности совпадает с падающим полем $H_{0x}^{(1,2)}$. Подчеркнем здесь, что числа $w_m^{(1)}$ и $w_m^{(2)}$ различаются. Поэтому, когда рассеянное поле $H_x^{(1)}$ исчезает, рассеянное поле $H_x^{(2)}$ существует и наоборот.

§ 12.7. Излучение из открытого резонатора

Поле в дальней зоне определяется формулами (12.3.4)–(12.3.8) через функции $L(w)F_n(w, u)$. Последние с погрешностью порядка $(kl)^{-1/2}$

можно представить (см. (12.5.1)) в виде

$$\frac{1}{2\sqrt{k}}L(w) F_n(w, u) = \sum_m \mathcal{P}(w_m, w) \mathcal{F}_{n-1}(w_m, -u), \quad (12.7.1)$$

где величину

$$\mathcal{P}(w_m, w) = \frac{L_+(w)}{2\sqrt{k}(w_m + w)} \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} e^{i2w_m l} \quad (12.7.2)$$

естественно назвать диаграммой излучения волны с номером m из полубесконечного плоского волновода. Физические рассуждения, изложенные на первых страницах § 12.5, показывают, что именно величина $\mathcal{P}(w_m, w)$ пропорциональна амплитуде краевой волны, которая возникает при дифракции m -й волны Бриллюэна на крае резонатора.

Запишем с помощью (12.7.1) выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{k}}L(w) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(w, u) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{k}}L_+(w) \mathcal{F}_1(w, u) + \sum_m \mathcal{P}(w_m, w) \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, -u). \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

Входящий сюда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, -u)$$

приближенно описывается формулой (12.5.22). Заметим, что резонансные члены там по своей величине разделяются на группы. Оставляя для простоты только главные из них, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, -u) = \mathcal{F}_1(w_m, -u) + \mathcal{F}_2(w_m, -u) + \\ + \frac{R_{j,j}^2}{\mathcal{D}_j} [\mathcal{F}_1(w_j, -u) + R_{j,j} \mathcal{F}_1(w_j, u)]. \end{aligned} \quad (12.7.4)$$

С помощью этого выражения и формул (12.7.3), (12.7.4) и (12.3.7) нетрудно найти диаграмму результирующей волны, излучаемой левым концом резонатора ($z = -l$) в окружающее пространство:

$$\tilde{\Phi}(w, u) = \sum_{n=1}^3 \tilde{\Phi}_n(w, u) + \tilde{\Phi}_D(w, u), \quad w = k \cos \varphi, \quad u = k \cos \varphi_0, \quad (12.7.5)$$

где

$$\tilde{\Phi}_1(w, u) = \pm \frac{L_+(w)L_-(u)}{2(w-u)} e^{-i(ul+\xi)}, \quad \xi = kb(\sin \varphi + \sin \varphi_0), \quad (12.7.6)$$

$$\tilde{\Phi}_2(w, u) = \pm \sqrt{k} L_+(u) \sum_m^j \frac{\mathcal{P}(w_m, w)}{w_m + u} e^{i(ul-\xi)}, \quad (12.7.7)$$

$$\tilde{\Phi}_3(w, u) = \pm \sqrt{k} L_-(u) \sum_m^j \sum_{m_1}^j \frac{\mathcal{P}(w_m, w)}{w_{m_1} - u} R_{m_1, m} e^{-i(ul+\xi)}, \quad (12.7.8)$$

$$\tilde{\Phi}_D(w, u) = \pm \sqrt{k} \frac{R_{j,j}^2}{D_j} \left[\frac{L_+(u)}{w_j + u} e^{iul} + R_{j,j} \frac{L_-(u)}{w_j - u} e^{-iul} \right] \mathcal{P}(w_j, w) e^{-i\xi}. \quad (12.7.9)$$

Верхний индекс здесь берется, если резонатор возбуждается полем $H_{0x}^{(1)}$, а нижний индекс берется, если резонатор возбуждается полем $H_{0x}^{(2)}$. Функции $\tilde{\Phi}_{1,2,3}$ представляют диаграмму излучения краевых волн первого, второго и третьего порядка соответственно. Функция $\tilde{\Phi}_D$ описывает резонансную часть излучения, созданную всеми волноводными волнами с индексом j и порядком $n > 3$.

Заметим, что формула (12.7.5) при подстановке в (12.3.6) дает выражение для диаграммы направленности полного рассеянного поля

$$\tilde{\Phi}(w, u) = \tilde{\Phi}(w, u) e^{iwl} + \tilde{\Phi}(-w, -u) e^{-iwl}, \quad (12.7.10)$$

$$w = k \cos \varphi, \quad u = k \cos \varphi_0,$$

которая в точности удовлетворяет теореме взаимности, т.е. $\tilde{\Phi}(w, u) = \tilde{\Phi}(u, w)$.

Перейдем к физическому анализу выражения (12.7.5). Рассмотрим сначала функцию $\tilde{\Phi}_1$, которой соответствует рассеянное поле

$$H_x = \pm \frac{L_-(u)L_+(w)}{2(w-u)} e^{-ik(l \cos \varphi_0 + b \sin \varphi_0)} \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{i(wl-vb)}, \quad (12.7.11)$$

где $w = k \cos \varphi$ и $v = k \sin \varphi$. Пусть далее $\pi/2 < \varphi < \pi$ и $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$, тогда $w < 0$ и $u < 0$ и

$$H_x = \frac{\sqrt{k+w}\sqrt{k-u}}{2(w-u)} \left[e^{i(wl+vb)} \pm e^{i(wl-vb)} \right] \times$$

$$\times \frac{e^{-ik(l \cos \varphi_0 + b \sin \varphi_0)} e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{U(\sqrt{(2b/k)w,p}) - U(\sqrt{(2b/k)u,p})}. \quad (12.7.12)$$

Мы видим, что рассеянное поле есть сумма двух краевых волн, уходящих от ребер $y = \pm b, z = -l$. Диаграмма направленности этих волн пропорциональна диаграмме цилиндрической волны, возникающей при дифракции плоской волны на изолированной полуплоскости. Заметим, что впервые такое представление поля в виде суммы двух краевых волн было дано Вайнштейном [96, 120] при исследовании излучения из открытого конца волновода. Он же обратил внимание на важную роль краевых волн в задачах дифракции.

В случае, когда $kb \gg 1$ и стенки резонатора далеко разнесены, функции $U(\sqrt{2b/k}w, p)$ и $U(\sqrt{2b/ku}, p)$, учитывающие их взаимодействие, близки к нулю. Поэтому, складывая поля (12.7.12) при четном и нечетном типах возбуждения, находим

$$H_x = \frac{2 \cos(\varphi/2) \sin(\varphi_0/2)}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} e^{-ik(l \cos \varphi_0 + b \sin \varphi_0)} \frac{e^{i(k\bar{r} + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k\bar{r}}} \quad (12.7.13)$$

для полной краевой волны первого порядка, где

$$\bar{r} = \sqrt{(y+b)^2 + (z+l)^2}$$

представляет расстояние от левого конца нижней пластины. Как и следовало ожидать, мы получили цилиндрическую волну от изолированной полуплоскости $y = -b, -l \leq z \leq \infty$, на которую падает плоская волна (12.1.1). При условии $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ левый конец верхней пластины ($z = -l, y = +b$) находится в тени и не дает вклад в рассеянное поле в рамках рассматриваемого приближения.

Возвращаясь к выражению (12.7.5) заметим далее, что

$$\mathcal{P}(w_m, w) = \frac{\cos(\varphi/2) \cos^2(\varphi_m/2) e^{2ikl \cos \varphi_m}}{i\sqrt{2} \epsilon_m kb (\cos \varphi + \cos \varphi_m) \cos \varphi_m} e^{2U(s_m, p) + \chi_+(w)} \quad (12.7.14)$$

и

$$\mathcal{P}(w_m, -w_m) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_m/2) e^{i2kl \cos \varphi_m + U(s_m, p)}, \quad (12.7.15)$$

где

$$s_m = \sqrt{\frac{2b}{k}} w_m, \quad w_m = k \cos \varphi_m, \quad (12.7.16)$$

$$\operatorname{Re} w_m \geq 0, \quad s = \sqrt{\frac{2b}{k}} w, \quad w = k \cos \varphi.$$

Формулы (12.7.14), (12.7.15) показывают, что диаграмма излучения m -й волноводной волны, набегающей на левый конец резонатора, имеет

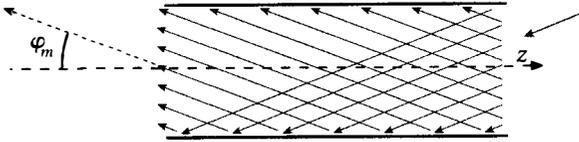


Рис. 12.7.1. Излучение волн Бриллюэна из открытого конца резонатора

максимум вблизи направления $\varphi = \pi - \varphi_m$. Это явление легко объяснить, исходя из физических соображений. Волноводную волну номера m можно рассматривать как суперпозицию двух плоских волн (волн Бриллюэна), распространяющихся под углом φ_m к оси z (см. рис. 12.7.1). У открытого конца резонатора волна Бриллюэна представляет собой плоский участок синфазной поверхности, наклонной по отношению к оси резонатора. Хорошо известно, что максимум излучения, испускаемого такой поверхностью, направлен по нормали к ней, т.е. как раз в направлении $\varphi = \pi \pm \varphi_m$. Из этих соображений следует, что такое явление происходит лишь при излучении волны из открытого конца резонатора, когда источник поля расположен между пластинами.

В задаче рассеяния, которую мы изучаем в этой главе, источники полей являются внешними для резонатора. Этими источниками являются волны $H_{0x}^{(1)}$ и $H_{0x}^{(2)}$. В предыдущем параграфе показано, что эти волны не рассеиваются резонатором, когда их направления совпадают с направлением волноводных мод $\varphi_m^{(1)} = \arccos(w_m^{(1)}/k)$ и $\varphi_m^{(2)} = \arccos(w_m^{(2)}/k)$. В соответствии с теоремой взаимности, рассеянные поля $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$ будут в точности равны нулю в направлениях $\varphi = \pm\varphi_m^{(1)}, \pi \pm \varphi_m^{(1)}$ и $\varphi = \pm\varphi_m^{(2)}, \pi \pm \varphi_m^{(2)}$ соответственно. Отсюда следует, что излучение из концов открытого резонатора с внутренним источником и рассеяние внешнего поля на открытых концах существенно различаются. Там, где излучение из резонатора имеет максимум, рассеянные поля $H_x^{(1,2)}$ из открытых концов в точности равны нулю!

В результате можно сформулировать следующее строгое утверждение:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(1)}(\pm w_m^{(1)}, u) &= \Phi^{(1)}(w, \pm u_m^{(1)}) = 0, \\ \Phi^{(2)}(\pm w_m^{(2)}, u) &= \Phi^{(2)}(w, \pm u_m^{(2)}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.7.17)$$

Продемонстрируем это утверждение с помощью асимптотических выра-

жений (12.5.1)–(12.5.3). Поскольку функции $\Phi^{(1,2)}(w, u)$ являются симметричными, то есть $\Phi^{(1,2)}(w, u) = \Phi^{(1,2)}(u, w)$, то достаточно рассмотреть рассеяние лишь в направлении падения $\varphi_0 = \varphi_N^{(1,2)}$, где $0 \leq \varphi_N^{(1,2)} \leq \pi/2$ и $u = w_N^{(1,2)} > 0$, $N = 1, 2, 3, \dots, j$.

Опуская верхние индексы и используя (12.3.6), можно представить диаграмму направленности (12.3.7) в виде

$$\Phi(w, w_N) = \tilde{\Phi}(w, w_N)e^{iwl} + \tilde{\Phi}(-w, -w_N)e^{-iwl}, \quad (12.7.18)$$

где

$$\tilde{\Phi}(w, w_N) = i \frac{4\pi^2}{c} e^{-ikb \sin \varphi} L_+(w) \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w, w_N). \quad (12.7.19)$$

С помощью (12.5.1) ряды могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w, w_N) &= \\ &= \mathcal{F}_1(w, w_N) + \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{w_m + w} \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_{n-1}(w_m, -w_N) = \\ &= \mathcal{F}_1(w, w_N) + \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{w_m + w} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(w_m, -w_N). \end{aligned} \quad (12.7.20)$$

В соответствии с формулами (12.6.20) и (12.6.24) эта величина равна нулю и поэтому $\tilde{\Phi}(w, w_N) = 0$. Заметим, что сингулярности при $w = -w_m$ в (12.7.20) подавляются множителем $L_+(-w_m) = 0$ в формуле (12.7.19).

Диаграмма направленности излучения от правого конца ($z = +l$) резонатора может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(-w, -w_N) &= i \frac{4\pi^2}{c} e^{-ikb \sin \varphi} L_-(w) \times \\ &\times \left\{ \mathcal{F}_1(-w, -w_N) + \mathcal{F}_2(-w, -w_N) + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n(-w, -w_N) \right\}. \end{aligned} \quad (12.7.21)$$

Используя (12.5.1), (12.6.20), (12.6.24) и (12.3.17), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(-w, -w_N) &= \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{w_m - w} \mathcal{F}_1(w_m, w_N) = \\ &= -\mathcal{F}_1(-w, -w_N), \end{aligned} \quad (12.7.22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n(-w_m, -w_N) &= \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{w_m - w} \sum_{n=3} \mathcal{F}_{n-1}(w_m, w_N) = \\ &= \sum_m \frac{L_+^2(w_m)}{L'(w_m)} \frac{e^{i2w_m l}}{w_m - w} \sum_{n=2} \mathcal{F}_n(w_m, w_N) = 0. \end{aligned} \quad (12.7.23)$$

Сингулярности при $w = w_m$ подавляются множителем $L_-(w_m) = 0$ в (12.7.21). Формулы (12.7.22) и (12.7.23) показывают, что $\tilde{\Phi}(-w, -w_m) = 0$. Поэтому как рассеянное поле $H_x^{(1,2)}$ вне резонатора, так и рассеянное поле $H_x^{(1,2)}$ внутри резонатора равны нулю, когда они возбуждаются падающей волной $H_{0x}^{(1,2)}$ в направлении углов Бриллюэна $\varphi_m^{(1,2)}$. Это происходит вследствие попарной компенсации краевых волн, как показано в (12.6.23).

Однако асимптотические формулы (12.7.5) и (12.7.9) не обеспечивают точного равенства нулю рассеянного поля $H_x^{(1,2)}$, возбуждаемого внешним полем $H_{0x}^{(1,2)}$, падающим под углами Бриллюэна. Причина этого состоит в нарушении условий компенсации (12.6.23) для краевых волн порядка $n \geq 3$. В этом случае результирующее поле совпадает с краевыми волнами третьего и более высоких порядков.

Очевидно, что амплитуда краевых волн третьего порядка мала. Величина резонансной части этого поля определяется с помощью оценок, справедливых при условиях (12.6.9) и (12.6.14):

$$\frac{1}{\sqrt{k}} L_+(w_j) = O(s_j), \quad \sqrt{k} \frac{L_+}{w + w_j} = O(\sqrt{kb}), \quad w = w_j, \quad (12.7.24)$$

$$\lim_{w \rightarrow w_j} \sqrt{k} \frac{L_-(w)}{w - w_j} = \sqrt{k} \frac{i2w_j b}{L_+(w_j)} = O(\sqrt{kb}), \quad (12.7.25)$$

$$\frac{1}{D_j} \mathcal{P}(w_j, w) = \begin{cases} O(1) & \text{при } |w| \approx w_j, \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{kb}}\right) & \text{при } |w| \gg w_j. \end{cases} \quad (12.7.26)$$

В соответствии с этими оценками

$$\Phi_D(w, u) = O\left(\frac{1}{\sqrt{kb}}\right) \quad \text{при } |w| \gg w_j, \quad |u| \gg u_j, \quad (12.7.27)$$

$$\Phi_D(w, u) = O(1) \begin{cases} \text{при } |w| \gg w_j, & |u| \approx w_j, \\ \text{при } |w| \approx w_j, & |u| \gg w_j, \end{cases} \quad (12.7.28)$$

$$\Phi_D(w, u) = O(\sqrt{kb}) \quad \text{при } |w| \approx w_j, \quad |u| \approx u_j. \quad (12.7.29)$$

Следовательно, функция $\Phi_D(w, u)$ имеет наибольшее значение при $|w| \approx w_j, |u| \approx u_j$. Резонансное поле в этой системе возбуждается критическими волнами с индексом j . Поэтому наиболее интенсивное возбуждение происходит, когда резонатор освещается плоскими волнами под углом φ_0 , близким $\pm\varphi_j, \pi \pm \varphi_j$. В соответствии с теоремой взаимности излучение из резонатора оказывается наиболее интенсивным вблизи углов $\varphi = \pm\varphi_j, \pi \pm \varphi_j$.

Напомним, что диаграмма полного рассеянного поля имеет вид

$$\Phi(w, u) = \Phi^{(1)}(w, u) + \Phi^{(2)}(w, u), \quad (12.7.30)$$

где функция $\Phi^{(1)}$ отвечает четному, а функция $\Phi^{(2)}$ нечетному возбуждению, создаваемому падающим электрическим полем (12.1.5) и (12.1.7) соответственно. Здесь $w = k \cos \varphi, u = k \cos \varphi_0$ и функции $\Phi^{(1,2)}(w, u)$ определяются формулами (12.7.5)–(12.7.9), которые выполняются при $y > b$, т. е. при $0 < \varphi < \pi$. Мы предполагаем также, что $0 < \varphi_0 < \pi/2$. Для вычисления поля в области $-\pi < \varphi < 0$ следует использовать свойства симметрии

$$\Phi^{(1)}(-\varphi) = -\Phi^{(1)}(\varphi), \quad \Phi^{(2)}(-\varphi) = \Phi^{(2)}(\varphi). \quad (12.7.31)$$

Заметим, что диаграммы $\tilde{\Phi}_1(w, u)$ и $\tilde{\Phi}_1(-w, -u)$ для краевых волн первого порядка, рассеянных левым и правым концами резонатора, сингулярны в направлении основного теневого лепестка ($\varphi = \varphi_0$), где $w = u$. Эти сингулярности, однако, компенсируют друг друга и их сумма равна

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(u, u) &= \tilde{\Phi}_1^{(1)}(u, u)e^{iul} + \tilde{\Phi}_1^{(1)}(-u, -u)e^{-iul} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2 \sin \varphi_0} + \left[ikl + \frac{d}{d\beta} U(\sqrt{2kb}\beta, p^{(1)}) \right] \sin \varphi_0 \right\} \times \\ &\times (1 + e^{i2kb \sin \varphi_0}) + ikb \cos \varphi_0 e^{i2kb \sin \varphi_0}, \end{aligned} \quad (12.7.32)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(u, u) &= \tilde{\Phi}_1^{(2)}(u, u)e^{iul} + \tilde{\Phi}_1^{(2)}(-u, -u)e^{-iul} = \\ &= - \left\{ \frac{1}{2 \sin \varphi_0} + \left[ikl + \frac{d}{d\beta} U(\sqrt{2kb}\beta, p^{(2)}) \right] \sin \varphi_0 \right\} \times \\ &\times (1 - e^{i2kb \sin \varphi_0}) + ikb \cos \varphi_0 e^{i2kb \sin \varphi_0}. \end{aligned} \quad (12.7.33)$$

Здесь $\beta = \cos \varphi_0$, и $p^{(1,2)}$ определяется формулами (12.6.5), (12.6.7) и

$$\frac{1}{\sqrt{2kb}} \frac{d}{d\beta} U(\sqrt{2kb}\beta, p) = \frac{e^{-\pi/4}}{2\pi} U'_0(p) + \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^{-i2\pi p+t^2/2} - 1)(t - se^{i\pi/4})}, \quad (12.7.34)$$

где $s = \sqrt{2kb}\beta$ и

$$U'_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{e^{-i2\pi p+t^2/2} - 1} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi pn}}{\sqrt{n}}. \quad (12.7.35)$$

Более подробно функции Вайнштейна $U(s, p)$ описаны в приложении В в [96].

Учитывая формулы (12.7.32) и (12.7.33), введем нормированную диаграмму рассеяния

$$h(w, u) = \frac{\Phi(w, u)}{ikd} = h^{(1)}(w, u) + h^{(2)}(w, u), \quad (12.7.36)$$

где

$$h^{(1,2)}(w, u) = \tilde{h}^{(1,2)}(w, u)e^{iwl} + \tilde{h}^{(1,2)}(-w, -u)e^{-iwl}, \quad (12.7.37)$$

$$\tilde{h}^{(1,2)}(w, u) = \frac{\tilde{\Phi}^{(1,2)}(w, u)}{ikd}, \quad d = 2(l \sin \varphi_0 + b \cos \varphi_0). \quad (12.7.38)$$

В случае, когда $\operatorname{tg} \varphi_0 > b/l$, параметр d равен ширине того участка плоской волны, который падает непосредственно на сам резонатор. Этот параметр можно также интерпретировать как ширину геометрической зоны тени позади резонатора.

Величина $2d$ представляет собой первый член высокочастотного асимптотического разложения для интегрального поперечника рассеяния

$$S = 2d \operatorname{Re} \{h(k \cos \varphi_0, k \cos \varphi_0)\}. \quad (12.7.39)$$

Используя формулы (12.7.5)–(12.7.9), находим, что функция \tilde{h} равна

$$\tilde{h}^{(1,2)}(w, u) = \sum_{n=1}^3 \tilde{h}_n(w, u) + \tilde{h}_D^{(1,2)}(w, u). \quad (12.7.40)$$

В соответствии с оценками (12.7.27)–(12.7.29) резонансная часть функции $\tilde{h}^{(1,2)}(w, u)$ достигает максимального значения вблизи $|w| \approx w_j$, $|u| \approx w_j$, то есть при $\varphi \approx \varphi_j$, $\pi \pm \varphi_j$ и $\varphi_0 \approx \varphi_j$, где

$$\max |h_D(w, u)| = O \left[\frac{1}{M} \right]. \quad (12.7.41)$$

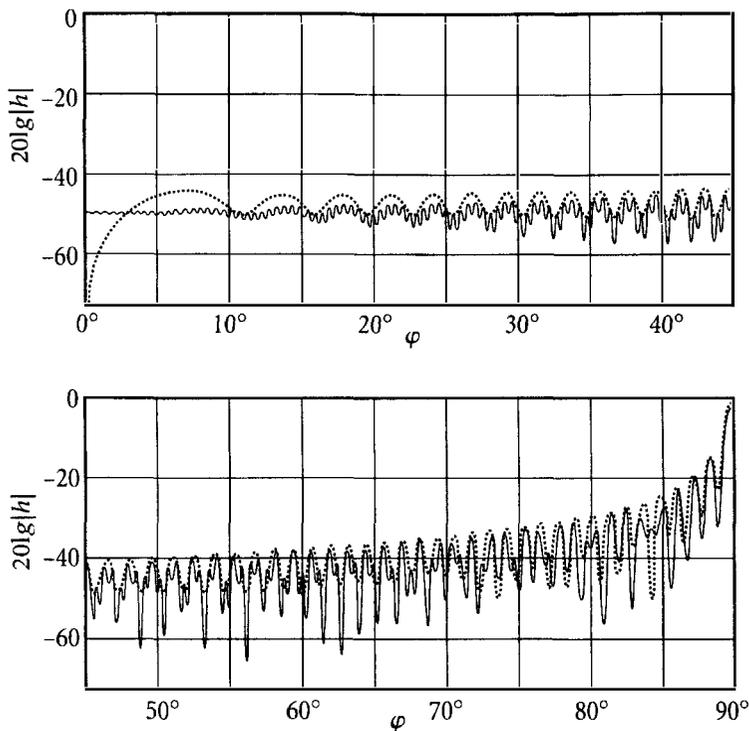


Рис. 12.8.1. Сплошной линией показана функция $20 \lg |h_1^{(1)}|$, которая определяет полное поле краевых волн первого порядка, расходящихся от обоих концов резонатора. Пунктирной линией изображена функция $20 \lg |h_0|$, которая определяет поле, рассеянное одиночной лентой ($y = -b$, $|z| \leq l$) при облучении ее плоской волной

§ 12.8. Результаты численных расчетов

В этом параграфе представлены результаты численных расчетов функции $|h(w, u)|$ при нормальном падении плоской волны, когда $\varphi_0 = \pi/2$ и $u = k \cos \varphi_0 = 0$.

На рис. 12.8.1 и 12.8.2 показаны результаты расчетов для резонатора с параметрами $kb = 100\pi$ и $kl = 50\pi$, для которых в работах [142] и [147] исследовались собственные колебания. В этом случае $h^{(2)}(w, 0) = 0$ и $h(w, 0) = h^{(1)}(w, 0)$. Сплошной линией на рис. 12.8.1 обозначена функция $20 \lg |h_1^{(1)}|$, которая соответствует диаграмме полного поля краевых волн первого порядка, расходящихся от обоих концов резонатора.

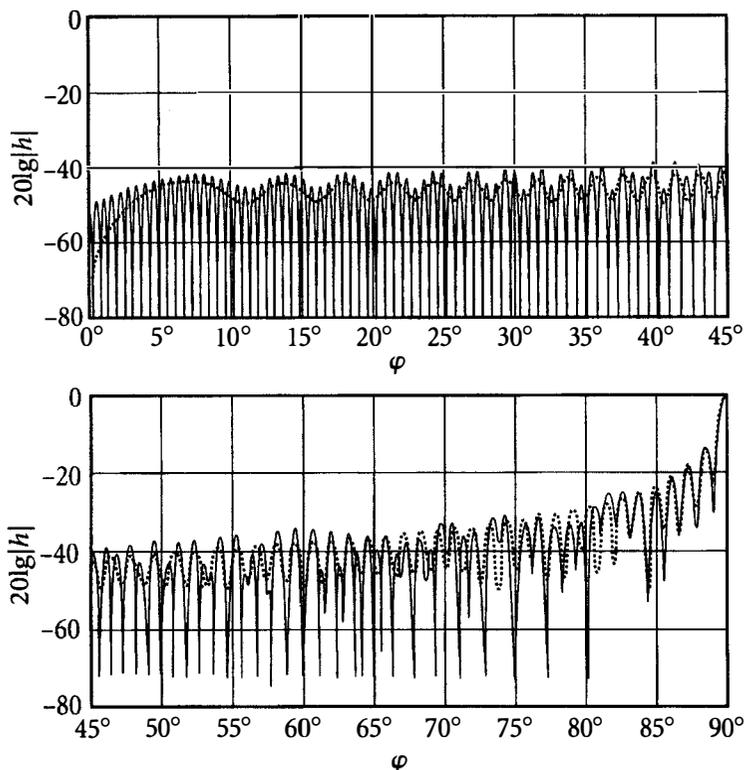


Рис. 12.8.2. Сплошной линией показано суммарное поле, излучаемое краевыми волнами первого и второго порядков. Пунктирная линия изображает диаграмму направленности $20 \lg |h_{\bullet}|$ поля, рассеянного одиночной лентой ($y = -b$, $|z| \leq l$), при возбуждении ее плоской падающей волной [26]

На рис. 12.8.2 сплошная линия обозначает суммарное поле от краевых волн первого и второго порядков. Краевые волны третьего порядка и резонансная часть $h_D^{(1)}$ практически не влияют на диаграмму рассеяния при выбранных параметрах kb и kl . Оказывается, что в этом случае $|h_3^{(1)}| \approx 10^{-4}$ и $|h_D^{(1)}| \approx 10^{-5}$. Малые значения $|h^{(1)}|$ обусловлены малым значением $R_{j,j} \approx 0.1$. Функция $|h^{(1)}|$ быстро осциллирует при изменении угла φ и равна нулю для углов Бриллюэна

$$\varphi = \varphi_n^{(1)} = \arcsin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2kb} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, j. \quad (12.8.1)$$

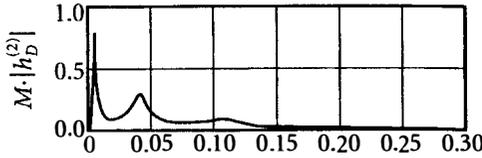


Рис. 12.8.3. Произведение $M|h_D^{(2)}(0,0)|$ для значений $kl = 50\pi$, $kb = (100 + p)\pi$ и $0 \leq p \leq 0.3$ [26]

Для сравнения пунктирной линией на рис.12.8.1 и 12.8.2 изображена функция $20 \lg |h_0|$, которая соответствует диаграмме направленности поля, рассеянного одиночной лентой ($y = -b$, $|z| \leq l$), возбуждаемой той же самой падающей плоской волной. В интервале $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ кривая для h_0 близка к огибающей максимальных значений функции $h^{(1)}$. Обе кривые плавно сливаются при увеличении угла φ .

Вторая компонента рассеянного поля $h^{(2)}(w, 0)$ появляется, если $kb \neq n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. На рис. 12.8.3 изображено произведение $M|h_D^{(2)}(0,0)|$ для $kl = 50\pi$, $kb = (100 + p)\pi$ и $0 \leq p \leq 0.3$. На этой кривой видны отчетливые резонансные пики вблизи значений $p = p_n \ll 1$, которые удовлетворяют условиям (см. формулу (12.6.9))

$$(M + \beta_0)\sqrt{4\pi p_n} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (12.8.2)$$

когда

$$h_D^{(2)}(0,0) \approx \frac{1}{M\beta_0} [R_{j,j}^{(2)}]^3 \approx \frac{1}{M\beta_0}, \quad R_{j,j}^{(2)} \approx 1 - \beta_0\sqrt{4\pi p}. \quad (12.8.3)$$

Интегральный поперечник рассеяния определяется формулой

$$S = 4l \operatorname{Re}\{h^{(1)}(0,0) + h^{(2)}(0,0)\}. \quad (12.8.4)$$

Для использованных выше параметров $kl = 50\pi$, $kb = (100 + p)\pi$ и $p \ll 1$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\left. \begin{aligned} h^{(1)}(0,0) &\approx 1, & h^{(2)}(0,0) &= O(p) + O\left[\frac{\sqrt{p}}{M}\right], \\ h_{2,3}^{(2)}(0,0) &= O\left[\frac{\sqrt{p}}{M}\right], & h_D^{(2)}(0,0) &= O\left[\frac{1}{M}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.8.5)$$

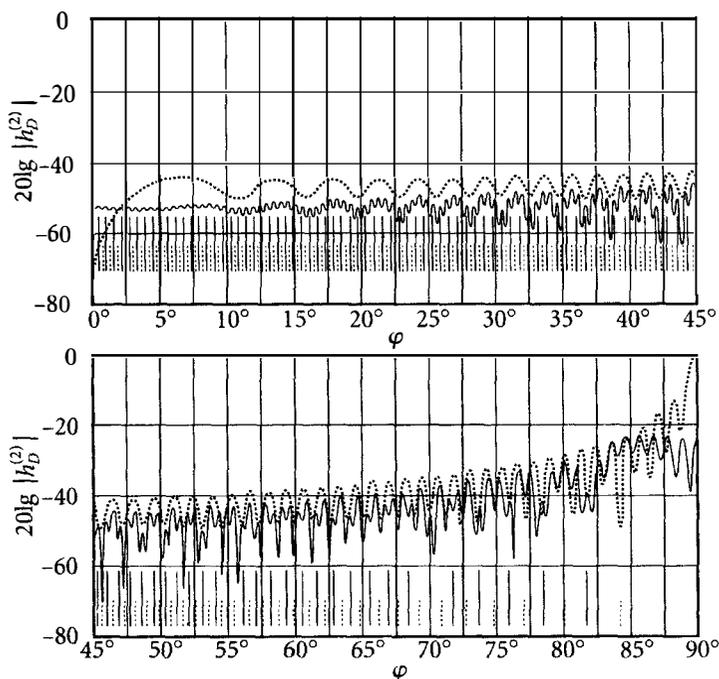


Рис. 12.8.4. Сплошная линия показывает пространственное распределение резонансного излучения $h_D^{(2)}(w, 0)$ для значений $kl = 50\pi, kb = (100 + p)\pi$ и $p = 0.005$. Пунктирная кривая изображает диаграмму рассеяния от одной нижней пластины ($y = -b, |z| \leq l$). Сплошные вертикальные отрезки обозначают расположение нулей ($\varphi = \varphi_m^{(2)}$) функции $h^{(2)}(w, 0)$, и пунктирные вертикальные отрезки показывают расположение нулей ($\varphi = \varphi_m^{(1)}$) функции $h^{(1)}(w, 0)$ [26]

Согласно этим оценкам

$$S = 4l \operatorname{Re}\{h^{(1)}(0, 0) + h^{(2)}(0, 0)\} = 4l \left\{ 1 + O\left[\frac{1}{M}\right] \right\} \quad (12.8.6)$$

даже в резонансном случае, когда $p^{(2)} = p_n$. Следовательно, для данного типа открытого резонатора, состоящего из плоских параллельных пластин (с параметром $M \gg 1$), резонансная часть интегрального поперечника рассеяния мала по сравнению с его не резонансной частью, вызванной рассеянием от освещенной внешней стороны резонатора.

Другое интересное наблюдение следует из рис. 12.8.2. В соответствии с (12.8.6) интегральный поперечник рассеяния резонатора почти равен

интегральному поперечнику рассеяния одиночной ленты. Это означает, что полная энергия, рассеянная резонатором, и полная энергия, рассеянная одиночной лентой, практически равны. Однако диаграмма резонатора $h^{(1)}$ содержит намного больше минимумов, чем диаграмма ленты h_0 . Из этих двух фактов следует, что максимумы в диаграмме резонатора $h^{(1)}$ должны быть выше по сравнению с максимумами в диаграмме ленты h_0 . Это ясно видно на рис. 12.8.2, особенно в интервале $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$.

Пространственное распределение резонансного излучения $h_D^{(2)}(w, 0)$ показано сплошной линией на рис. 12.8.4 для значений $kl = 50\pi$, $kb = (100 + p)\pi$ и $p = 0.005$, что близко к значению $p = 0.0046$, соответствующему первому резонансному пику на рис. 12.8.3. Сплошные вертикальные отрезки на рис. 12.8.4 обозначают расположение нулей ($\varphi = \varphi_m^{(2)}$) функции $h^{(2)}(w, 0)$, и пунктирные вертикальные отрезки показывают расположение нулей ($\varphi = \varphi_m^{(1)}$) функции $h^{(1)}(w, 0)$. Как и прежде, пунктирная кривая изображает диаграмму рассеяния от одной нижней пластины ($y = -b, |z| \leq l$). Как и ожидалось, наиболее интенсивное резонансное излучение $h_D^{(2)}(w, 0)$ наблюдается в интервале $\varphi_j^{(2)} \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Можно предположить, что в пределах графической точности функция $|h^{(1)}(w, 0)|$, изображенная на рис. 12.8.2, не изменится, если значение $kb = 100\pi$ заменить величиной $kb = 100.005\pi$. Сравнение рис. 12.8.2 и рис. 12.8.4 показывает, что диаграмма резонансного излучения $|h_D^{(2)}(w, 0)|$ качественно близка к диаграмме $|h^{(1)}(w, 0)|$ почти во всем диапазоне углов φ , за исключением углов, близких к главному лепестку. Огибающая максимумов диаграммы $|h^{(1)}(w, 0)|$ лежит выше огибающей диаграммы $|h_D^{(2)}(w, 0)|$. Эта разница составляет 10 дБ для большей части диапазона углов и достигает 15 дБ для $\varphi = 7^\circ$ и 25 дБ для $\varphi = 90^\circ$.

§ 12.9. Основные результаты

- Исследовано поле, рассеянное резонатором, образованным двумя параллельными пластинами. Это поле состоит из двух компонент $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$ с различным типом симметрии относительно центральной плоскости резонатора. Найдены точные и асимптотические выражения для поля внутри и вне резонатора. Установлены следующие свойства этого поля.

- Резонансные частоты полей $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$ различаются. Одновременно находиться в резонансе эти поля не могут.
- Резонанс в системе является результатом синфазной интерференции критических волноводных волн, отраженных от открытых концов резонатора.
- Диаграммы рассеяния компонент $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$ имеют нулевые значения в направлении соответствующих волн Бриллюэна, $\varphi_0 = \varphi_n^{(1,2)}$.
- Компоненты $H_x^{(1)}$ или $H_x^{(2)}$ полностью исчезают как внутри, так и вне резонатора, когда направление падающей волны приближается к соответствующим углам Бриллюэна ($\varphi \rightarrow \varphi_m^{(1,2)}$). Это явление является следствием того, что пластины резонатора оказываются в узлах касательной компоненты электрического поля падающих волн $H_{0x}^{(1)}$ и $H_{0x}^{(2)}$.
- Влияние резонанса на рассеянное поле пренебрежимо мало вблизи основного теневого лепестка, но может быть заметным в боковых лепестках. Основной вклад в рассеянное поле создается краевыми волнами первого и второго порядка, принадлежащими к нерезонансной компоненте. Ее максимумы превышают максимумы резонансной компоненты для большинства направлений рассеяния.
- Для данного типа резонатора, состоящего из двух параллельных пластин, полная энергия рассеянного поля (вне резонатора), содержащаяся в резонансной компоненте поля, всегда мала по сравнению с полной энергией нерезонансной компоненты в том случае, когда $kd \gg 1$, где $d = 2(l \sin \varphi_0 + b \cos \varphi_0)$ и $\operatorname{tg} \varphi_0 > b/l$.

§ 12.10. Дополнительные замечания

- Некоторые результаты этой главы были опубликованы ранее в [26].
- Общие свойства других типов открытых резонаторов рассмотрены в книгах [112, 113] и [148]. Однако там основное внимание уделяется изучению собственных колебаний. Эта глава, напротив, посвящена изучению рассеивающих свойств открытых резонаторов. Именно такие свойства наиболее важны для радиолокации.
- Отметим также исследование резонансного рассеяния на решетках [148] и анализ дифракции на концах открытых волноводов [149].

Заключение

Предлагаемая монография посвящена систематическому изучению краевых волн и их роли в формировании дифракционного поля. Ниже кратко излагаются ее основные результаты.

В главе 1 исследовано поле, рассеянное «черными» телами, поверхность которых считается идеально поглощающей (с коэффициентом отражения, равным нулю). Это поле концентрируется в окрестности геометрооптической границы тени и называется теньвым излучением. Это излучение является составной частью полей, рассеиваемых всеми большими (по сравнению с длиной волны) непрозрачными телами. В случае металлических тел теньвое излучение переносит половину всей рассеянной энергии.

Этот результат представляется фундаментальным. Он показывает, что даже с применением идеальных поглощающих покрытий, наносимых на металлические тела, их полная рассеянная мощность может быть уменьшена только в два раза. Это означает, что против бистатического радара (с разнесенными в пространстве передатчиком и приемником) невозможно полностью замаскировать отражающий объект при помощи любых поглощающих покрытий.

Развитая в книге теория дифракции на черных телах дает объяснение таким известным явлениям, как дифракция Френеля и рассеяние вперед (forward scattering). Первое есть результат интерференции теньвого излучения с падающей волной, а второе фактически представляет собой теньвое излучение в направлениях его наибольшей интенсивности.

Отметим также следующие свойства черных тел. Различные тела, создающие одинаковую тень, создают одинаковое рассеянное поле (теорема о теньвом контуре). Черные тела не отражают электромагнитные волны в направлении на радар. Однако в некоторых других направлениях они рассеивают больше энергии, чем такие же металлические тела. Это наблюдение согласуется с известным фактом, что радиопоглощающие покрытия могут увеличивать рассеянное поле в направлениях, соответствующих минимумам диаграммы рассеяния.

В данной книге главным образом исследуется дифракция на идеально проводящих телах с острыми изломами (ребрами) на их поверхности. В главах 2–7 излагается физическая теория дифракции (ФТД). Здесь представлены ее основные идеи и результаты, а также дано ее развитие с привлечением метода параболического уравнения для исследования многократной дифракции (глава 6). Предварительно этот метод апробируется на решении классической задачи о дифракции на клине (глава 5).

В приближении ФТД вычислены радиолокационные поперечники рассеяния для таких тел вращения, как конечный конус, параболоид, сферический сегмент и комбинация, состоящая из двух соосных конусов с разными углами раствора. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными эксперимента. Расчеты выполнены при учете только первичных краевых волн. Для больших (по сравнению с длиной волны) отражающих тел краевыми волнами высоких порядков можно пренебречь. Однако их влияние необходимо учитывать в случае дифракции на телах, которые имеют выраженные резонансные свойства.

Примером таких тел служат тонкие проводники конечных размеров (вибраторы). Многократная дифракция краевых волн в вибраторах исследована в приближении ФТД с использованием метода параболического уравнения (главы 6 и 7). Для рассеянного поля получены приближенные выражения, обладающие ценными свойствами. Они справедливы для вибраторов любой длины, как для длинных проводников, так и для коротких диполей. Они пригодны для любых направлений облучения и рассеяния и удовлетворяют принципу взаимности. Полученные выражения согласуются со строгой теорией, основанной на решении интегральных уравнений.

Наряду с аналитическими исследованиями в книге предложен метод экспериментального измерения той части рассеянного поля, которая излучается «неравномерной» (по терминологии ФТД) компонентой поверхностного тока. Показано, что именно эта компонента является причиной деполяризации радиолокационного сигнала, отраженного от металлических тел.

Теория, развитая в главах 6 и 7, дает приближенное описание многократных краевых волн. Более точное исследование таких волн, основанное на строгом решении функциональных уравнений, проведено в главах 8–11 для задачи о дифракции на ленте. Здесь получены новые точные и асимптотические выражения для тока и для рассеянного поля. Эти выражения удовлетворяют принципу взаимности, граничным условиям и применимы для произвольных направлений возбуждения и рассеяния. Погрешность асимптотических формул не превышает величины

порядка $(kl)^{-n/2}$ при условии $2kl \gg n$, где n — любое положительное целое, k — волновое число и $2l$ — ширина ленты.

Теория, также основанная на решении функциональных уравнений, построена в главе 12 для задачи о дифракции на открытом резонаторе, образованном двумя параллельными пластинами. Здесь показано, что резонансное увеличение поля в такой системе является следствием синфазной интерференции критических волноводных мод, многократно отраженных от открытых концов резонатора. Получены асимптотические выражения для поля внутри и вне резонатора. Исследовано влияние резонанса в системе на величину рассеянного поля в дальней зоне. Показано, что это влияние пренебрежимо мало вблизи главного (теневого) лепестка диаграммы рассеяния, но может быть заметным в боковых лепестках. Установлены новые физические явления, связанные с направлениями волн Бриллюэна.

Теоретические подходы и их результаты, изложенные в этой книге, могут быть полезны при исследовании дифракции на других, более сложных рассеивающих телах и структурах.

Список литературы

1. Young T. On the Theory of Light and Colours. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **91**, Part 1, 1802, pp. 12–48.
2. Young T. *A Course of Lectures on Natural Philosophy and Mechanical Arts*. London, 1807.
3. Уфимцев П. Я. Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах. Часть I. Дифракция на клине и ленте. *ЖТФ*, **27**, №8, 1957, с. 1840–1849.
4. Уфимцев П. Я. Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах. Часть II. Дифракция на диске и конечном цилиндре. *ЖТФ*, **28**, №11, 1958, с. 2604–2616.
5. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция на ленте. *ЖТФ*, **28**, №3, 1958, с. 569–582.
6. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция на диске. *ЖТФ*, **28**, №3, 1958, с. 583–591.
7. Майзельс Е. Н., Уфимцев П. Я. Отражение электромагнитных волн круговой поляризации от металлических тел. *Радиотехника и электроника*, **5**, №12, 1960, с. 1925–1928.
8. Уфимцев П. Я. Симметричное облучение конечных тел вращения. Доклад на 1-ом Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Одесса, 1960.
9. Уфимцев П. Я. Рассеяние плоских волн на тонких цилиндрических проводниках. Доклад на 1-ом Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Одесса, 1960.

10. Майзельс Е. Н., Уфимцев П. Я. Отражение электромагнитных волн круговой поляризации от металлических тел. Доклад на 1-ом Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Одесса, 1960.
11. Уфимцев П. Я. Об отражении металлическими телами радиоволн круговой поляризации. *Радиотехника и электроника*, **6**, №12, 1961, с. 2094–2095.
12. Уфимцев П. Я. Симметричное облучение конечных тел вращения. *Радиотехника и электроника*, **6**, №4, 1961, с. 559–567.
13. Уфимцев П. Я. *Метод краевых волн в физической теории дифракции*. — М.: Советское радио, 1962. (см. исправление в статье [51]).
[Переведена на английский язык в США: U.S. Air Force, Foreign Technology Division (National Air Intelligence Center), Wright-Patterson AFB, Ohio, 1971. Technical Report AD-733203, Defense Technical Information Center of USA, Cameron Station, Alexandria, VA, 22304-6145, USA].
14. Уфимцев П. Я. Дифракция плоских электромагнитных волн на тонком цилиндрическом проводнике. *Радиотехника и электроника*, **7**, №2, 1962, с. 260–269.
15. Уфимцев П. Я. Физическая теория дифракции. Доклад на 2-ом Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Горький, 1962.
16. Уфимцев П. Я. Поперечная диффузия при дифракции на клине. *Радиотехника и электроника*, **10**, №6, 1965, с. 1013–1022.
17. Уфимцев П. Я. Исследование ближнего поля вибратора и тока в нем. Доклад на 3-м Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Харьков, 1967.
18. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте. *Радиотехника и электроника*, **13**, №10, 1968, с. 1867–1869.
19. Уфимцев П. Я. Волны тока в тонком проводе и на ленте. *ЖВМ и МФ*, **8**, №6, 1968, с. 1368–1376.
20. Уфимцев П. Я. Дифракция электромагнитных волн на черных телах и на полупрозрачных пластинах. *Известия высших учебных заведений, Радиофизика*, **11**, №6, 1968, с. 912–931.

21. Уфимцев П. Я. Методы физической теории дифракции. В сб.: Лекции 1-ой Всесоюзной школы-семинара по дифракции и распространению волн, (Паланга-1965). — М.-Харьков: 1968.
22. Уфимцев П. Я. Асимптотическое исследование задачи о дифракции на ленте. *Радиотехника и электроника*, **14**, №7, 1969, с. 1173–1185.
23. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте в случае граничных условий Дирихле. *Радиотехника и электроника*, **15**, №5, 1970, с. 914–923.
24. Уфимцев П. Я. Асимптотические разложения в теории дифракции плоской волны на ленте. *ДАН СССР*, **187**, №6, 1969, с. 1257-1260.
25. Уфимцев П. Я. Три лекции по физической теории дифракции. 3-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Ленинград-Петродворец, 20 мая – 6 июня 1972 г. — Л.: ЛГУ, 1972.
26. Уфимцев П. Я. Дифракционное поле открытого резонатора. *Радиотехника и электроника*, **19**, №5, 1974, с. 980–994.
27. Kottler F. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. *Annalen der Physik*, **70**, no. 6, 1923, pp. 405–456.
28. Kottler F. Electromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. *Annalen der Physik*, **71**, no. 15, 1923, pp. 457–508.
29. Bakker B. V. and Copson E. T. *The Mathematical Theory of Huygen's Principle*. Oxford, 1939.
30. Neugebauer H. E. T. Diffraction of Electromagnetic Waves Caused by Apertures in Absorbing Plane Screens. *IRE Transaction on Antennas and Propagation*, **AP-4**, no.2, 1956, pp. 115–119.
31. Neugebauer H. E. T. Extension of Babinet's Principle to Absorbing and Transparent Materials, and Approximate Theory of Backscattering by Plane, Absorbing Disks. *Journal of Applied Physics*, **28**, no. 3, 1957, p. 302.
32. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1941.
33. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. *Антенны сантиметровых и дециметровых волн, ч.1*. — М.: ВВИА им Н. Е. Жуковского, 1955.

34. Захарьев Л. Н., Леманский А. А. К задаче о дифракции на «черном» теле. *Радиотехника и электроника*, **14**, №11, 1969, с. 1932–1942.
35. Захарьев Л. Н., Леманский А. А. *Рассеяние волн черными телами*. — М.: Советское радио, 1972.
36. Pauli W. On Asymptotic Series for Functions in the Theory of Diffraction of Light. *Physical Review*, **54**, no. 2, 1938, p. 924.
37. Weston V. H. Theory of Absorbers in Scattering. *IRE Transactions AP-11*, no. 5, 1963, pp. 578–584.
38. Macdonald H. M. The effect produced by an obstacle on a train of electric waves. *Phil. Trans. Royal Soc. Lond. Series A, Math. Phys. Section.*, **212** (1913), pp. 299–337, 1912.
39. Уфимцев П. Я. Черные тела и теневое излучение. *Радиотехника и электроника*, **34**, №12, 1989, с. 2519–2527.
40. Ufimtsev P. Ya. Comments on Diffraction Principles and Limitations of RCS Reduction Techniques. *Proceedings of the IEEE*, **84**, no. 12, 1996, pp. 1830–1850.
41. Ufimtsev P. Ya. Primary Shadow Radiation and Classical Models of Black Screens. *Electromagnetics*, **16**, no. 2, 1996, pp. 91–112.
42. Macdonald M. *Electric Waves*, Cambridge: The University Press, 1902.
43. Frank F. and Mizes R. V., Eds. *Die Differential — und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vol 2, Physical Part. New York: Dover Publications, 1961. На русском языке: Франк Ф., Мизес Р. *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики (ч.2)*. ОНТИ, 1937.
44. Felsen L. B. Backscattering from Wide-Angle and Narrow-Angle Cones. *Journal of Applied Physics*, **26**, no. 3, 1955, pp. 138–151.
45. Паныч О. И. Влияние неравномерной составляющей тока, текущего вблизи острого конуса. *Радиотехника и электроника*, **13**, №7, 1968, с. 1190–1202.
46. Siegel K. M., Goodrich R. F., Weston V. H. Comments on far field scattering from bodies of revolution. *Applied Science Review Section B*, **8**, 1959, pp. 8–12.

47. Keller J. B. Backscattering from a finite cone. *IRE Transactions* **AP-8**, no. 2, 1960, pp. 175–182.
48. Keller J. B. Backscattering from a finite cone — Comparison of theory and experiment. *IRE Transactions*, **AP-9**, no. 4, 1961, pp. 411–412.
49. Schensted C. E. Electromagnetic and acoustic scattering by a semi-infinite body of revolution. *Journal of Applied Physics*, **26**, no. 3, 1955, pp. 306–308.
50. Белкина М. Г. Дифракция электромагнитных волн на диске. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. —М.: Советское радио, 1957, с. 148–174.
51. Ufimtsev P. Ya. Comments on Comparison of Three High-Frequency Diffraction Techniques. *Proceedings of the IEEE*, **63**, no. 12, 1975, pp. 1734–1737.
52. Breinbjerg O., Rahmat-Samii Y., and Appel-Hansen J. *A theoretical Examination of the Physical Theory of Diffraction and Related Equivalent Currents*. Report 339, Electromagnetics Institute, Technical University of Denmark, May, 1987.
53. Breinbjerg O. *Equivalent Edge Currents Analysis of Electromagnetic Scattering by Plane Structures*. (Ph. D. diss., Electromagnetics Institute, Technical University of Denmark, March, 1991).
54. Pelosi G., Selleri S., and Ufimtsev P. Ya. Newton's Observations of Diffracted Rays. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **40**, no. 2, 1998, pp. 7–14.
55. Калашников А. Дифракция Гуи-Зоммерфельда. *Журнал русского физико-химического общества. Физический отдел*, **44**, №3, 1912, с. 137–144.
56. Rubinowicz A. Zur Kirchhoffschen Beugungstheorie. *Annalen der Physik Folge*, **4**, Band 73, 1924, pp. 339–364.
57. Keller J. B. Geometrical Theory of Diffraction. *Journal of the Optical Society of America*, **52**, no. 2, 1962, pp. 116–130.
58. Keller J. B. Diffraction by an Aperture. *Journal of Applied Physics*, **28**, no. 4, 1957, pp. 426–444.
59. Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. Experimental Detection of the Edge-Diffraction Cone. *Proceedings of the IEEE*, **60**, no. 11, 1972, p. 1448.

60. Ufimtsev P. Ya. Rubinowicz and the Modern Theory of Diffracted Rays. *Electromagnetics*, **15**, no. 5, 1995, pp. 547–565.
61. Буторин Д. И., Уфимцев П. Я. Явные выражения для акустической краевой волны, рассеянной элементом ребра. *Акустический журнал*, **32**, №4, 1986, с. 450–456.
62. Буторин Д. И., Мартынов Н. А., Уфимцев П. Я. Асимптотические выражения для элементарной краевой волны. *Радиотехника и электроника*, **32**, №9, 1987, с. 1818–1828.
63. Ufimtsev P. Ya. Theory of Acoustical Edge Waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, **86**, no. 2, 1989, pp. 463–474.
64. Ufimtsev P. Ya. Elementary Edge Waves and the Physical Theory of Diffraction. *Electromagnetics*, **11**, no. 2, 1991, pp. 125–160.
65. Ufimtsev P. Ya. and Rahmat-Samii Y. The Physical Theory of Slope Diffraction. Special Issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications*, **50**, nos. 5–6, 1995, pp. 487–498.
66. Mitzner K. M. *Incremental Length Diffraction Coefficients*. Technical Report AFAL-TR-73-26, Northrop Corporation, Aircraft Division, April, 1974.
67. Shore R. A. and Yaghjian A. D. Incremental Diffraction Coefficients for Plane Conformal Strips with Application to Bistatic Scattering from the Disk. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **6**, no. 3, 1992, pp. 359–396.
68. Ufimtsev P. Ya. Comments on Incremental Diffraction Coefficients for Plane Conformal Strips with Application to Bistatic Scattering from the Disk. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **14**, 2000, pp. 873–879.
69. Tiberio R. and Maci S. An Incremental Theory of Diffraction: Scalar Formulation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **42**, no. 5, 1994, pp. 600–612.
70. Tiberio R., Maci S., and Toccafondi A. An Incremental Theory of Diffraction: Electromagnetic Formulation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **43**, no. 1, 1995, pp. 87–96.
71. Michaeli A. Elimination of Infinities in Equivalent Edge Currents. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **AP-34**, no. 7, 1986, pp. 912–918.

72. Michaeli A. Elimination of Infinities in Equivalent Edge Currents: Physical Optics Components. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **AP-34**, no. 8, 1986, pp. 1034–1037.
73. Breinbjerg O. Higher Order Equivalent Edge Currents for Fringe Wave Radar Scattering by Perfectly Conducting Polygonal Plates. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **40**, no. 12, 1992, pp. 1543–1554.
74. Johansen P.M. Uniform Physical Theory of Diffraction Equivalent Edge Currents for Truncated Wedge Strips. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **44**, no. 7, 1996, pp. 989–995.
75. Ufimtsev P. Ya. Fast Convergent Integrals for Nonuniform Currents on Wedge Faces. *Electromagnetics*, **18**, no. 3, 1998, pp. 289–313. [Авторское примечание: см. *Electromagnetics* 19, no. 5, 1999. Последний множитель в (3) должен иметь вид $\exp[-ikr \sin \gamma_0 \cos(\alpha - \varphi_0)]$.]
76. Kouyoumjian R. G. and Pathak P. H. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface. *Proceedings of the IEEE*, **62**, 1974, pp. 1448–1461.
77. McNamara D. A., Pistorius C. W. I., and Malherbe J. A. G. *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction*, Boston-London: Artech House, 1990.
78. Copson C. T. *Asymptotic Expansions*. Cambridge: The University Press, 1965.
79. Tran H. B. and Kim T. J. *Monostatic and Bistatic Radar Cross Section Analysis*. Vol. 1 — High Frequency Electromagnetic Scattering Theory. Technical report NOR-82-215, Northrop Corporation, 1982.
80. Babich V.M., et. al. Numerical Calculation of the Diffraction Coefficients for an Arbitrary Shaped Perfectly Conducting Cone. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **44**, no. 5, 1996, pp. 740–747.
81. Blume S. and Krebs V. Numerical Calculation of Dyadic Diffraction Coefficients and Bistatic Radar Cross Section for Perfectly Conducting Semi-Infinite Elliptic Cone. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **46**, no. 3, 1998, pp. 414–424.
82. Chytil B. *Depolarization of randomly spaced scatterers*. Práce ÚŘE-CSAV, no. 20. Prague, 1961.

83. Chytil B. *Polarisation-dependent scattering cross-sections*. Práce ÚRE-CSAV, no. 21. Prague, 1961.
84. Beckmann P. *The Depolarization of Electromagnetic Waves*. Boulder: The Golem Press, 1968.
85. Леонтович М. А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли. *Изв. АН СССР, Сер. физ.*, **8**, 1944, с. 16–22.
86. Леонтович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. *ЖЭТФ*, **16**, №7, 1946, с. 557–573.
87. Фок В. А. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела. *Изв. АН СССР, Сер. физ.*, №2, 1946, с. 171–186.
88. Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. 1. Параболическое уравнение в лучевых координатах. *Радиотехника и электроника*, **6**, №8, 1961, с. 1247–1258.
89. Вайнштейн Л. А., Малюжинец Г. Д. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. 2. Асимптотические законы дифракции в полярных координатах. *Радиотехника и электроника*, **6**, №9, 1961, с. 1489–1495.
90. Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции коротких волн на выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной. *Радиотехника и электроника*, **8**, №3, 1963, с. 363–388.
91. Малюжинец Г. Д. Доклад на Всесоюзном совещании по вопросам электрических колебаний и волн, Горький, 1946. См. также статью: «Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга)», *УФН*, **69**, №2, 1959, с. 321–334.
92. Буслаев В. С. О формулах коротковолновой асимптотики в задачах дифракции на выпуклых телах. *Вестник ЛГУ*, №13, 1962, с. 5–21.
93. Буддырев В. С. Коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца. *ДАН СССР*, **163**, №4, 1965, с. 853–860.

94. Молотков И. А. Дифракция на выпуклом контуре с плавно изменяющимся радиусом кривизны и импедансом. В сб.: Проблемы математической физики, 2, Изд ЛГУ, 1967, с. 124–132.
95. Schensted C. E. Approximate method for scattering problems. *IRE Transactions*, **AP-4**, no. 3, 1956, pp. 240–242.
96. Вайнштейн Л. А. *Теория дифракции и метод факторизации*. — М.: Советское радио, 1966.
97. Попов А. В. Численное решение задачи дифракции на клине методом поперечной диффузии. *Акустический журнал*, **15**, №2, 1969, с. 265–274.
98. Fock V. A. and Vainshtein L. A. Proceedings of Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas: Copenhagen, June 25–30, 1962. Oxford: Pergamon Press, 1963, pp. 11–25.
99. Zhu N. Y. and Landstorfer F. M. Numerical Study of Diffraction and Slope Diffraction at Anisotropic Impedance Wedge by the Method of Parabolic Equation: Space Waves. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **45**, no. 5, 1997, pp. 822–828.
100. Pelosi G., Selleri S., and Graglia R. D. Numerical Analysis of the Diffraction at an Anisotropic Impedance Wedge. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **45**, no. 5, 1997, pp. 767–771.
101. The Centennial of Sommerfeld's Diffraction Problem, Special Issue. *Electromagnetics*, **18**, no. 2, 1998.
102. Pelosi G., Manara G., and Nepa P. Electromagnetic Scattering by a Wedge with Anisotropic Impedance Faces. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **40**, no. 6, 1998, pp. 29–34.
103. Уфимцев П. Я., Яковлева Г. Д. Параксиальные пучки волн в регулярных и нерегулярных волноводах. *Радиотехника и электроника*, **22**, №3, 1977, с. 451–465.
104. Полянский Е. А. К вопросу о связи между решениями уравнений Гельмгольца и Шрёдингера. *Акустический журнал*, **20**, №1, 1974, с. 142–143.
105. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. I. Ток и импеданс передающего вибратора. *ЖТФ*, **29**, №6, 1959, с. 673–688.

106. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. II. Ток в пассивном вибраторе и излучение передающего вибратора. *ЖТФ*, **29**, №6, 1959, с. 689–699.
107. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. III. Вариационный метод и его применение к теории идеального и импедансного проводов. *ЖТФ*, **31**, №1, 1961, с. 29–50.
108. Hallen E. *Exact solution of the antenna equation*. Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, no. 183, 1961.
109. Ufimtsev P. Ya. and Krasnozhen A. P. Current Waves in a Straight Thin Wire Resonator with Finite Conductivity. *Electromagnetics*, **12**, no. 2, 1992, pp. 121–132.
110. Ufimtsev P. Ya. and Krasnozhen A. P. Scattering from a Straight Thin Wire Resonator. *Electromagnetics*, **12**, no. 2, 1992, pp. 133–146.
111. Shamansky H. T., Dominek A. K., and Peters L., Jr. Electromagnetic Scattering by a Straight Thin Wire. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **AP-37**, no. 8, 1989, pp. 1019–1025.
112. Вайнштейн Л. А. *Открытые резонаторы и открытые волноводы*. — М.: Советское радио, 1966.
113. Babich V. M. and Buldyrev V. S. *Asymptotic Methods in Short Wave Diffraction Theory*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1989.
114. Вайнштейн Л. А. *Электромагнитные волны*. — М.: Советское радио, 1957.
115. Фиалковский А. Т. Рассеяние плоской электромагнитной волны на тонком цилиндрическом проводнике конечной длины. *ЖТФ*, **36**, №10, 1966, с. 1744–1751.
116. Вайнштейн Л. А. Статические задачи для полого цилиндра конечной длины. *ЖТФ*, **32**, №10, 1962, с. 1165–1173.
117. Леонтович М. А., Левин М. Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. *ЖТФ*, **14**, №9, 1944, с. 481–506.
118. Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. II. Численные результаты для пассивного вибратора. *ЖТФ*, **37**, №7, 1967, с. 1181–1188.

119. Lindroth K. Reflection of electromagnetic waves from thin metal strips. Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, no. 91, 1955.
120. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. — М.: Советское радио, 1953.
121. King R. W. P. and Wu Tai-Tsun. *The Scattering and Diffraction of Waves*. Cambridge: Harvard University Press, 1959.
122. Хаскинд М. Д., Вайнштейн Л. А. Рассеяние плоской волны на щели и ленте. *Радиотехника и электроника*, **9**, №10, 1964, с. 1800–1811.
123. Millar R. F. Diffraction of a Wide Slit and Complementary Strip. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **54**, no. 4, 1958, pp. 476–511.
124. Westpfahl K. Zur Theorie einer Klasse von Beugungsproblem mittels singular Integralgleichungen. *Annalen der Physik*, **4**, Heft 5–6, 1959, pp. 283–351.
125. Lüneburg E. and Westpfahl K. Beugung am Streifen: Hochfrequenz — Asymptotik und Kleinmasche Lösung. *Annalen der Physik*, **21**, Heft 1–2, 1968, pp. 12–25.
126. Kieburz R. B. Construction of asymptotic solutions to scattering problems in the Fourier transform representation. *Applied Scientific Research*, **12**, no. 3, 1965, pp. 221–234.
127. Stockel H. Beugung am Spalt. *Annalen der Physik*, **16**, Heft 5–6, 1965, pp. 209–219.
128. Hansen E. B. Scalar Diffraction by an Infinite Strip and a Circular Disc. *Journal of Mathematics and Physics*, **41**, no. 3, 1962, pp. 229–245.
129. Гринберг Г. А. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственных ей проблем. *ЖТФ*, **27**, №11, 1957, с. 2595–2605.
130. Гринберг Г. А. Метод решения дифракционных задач для плоских идеально проводящих экранов, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. *ЖТФ*, **28**, №3, 1958, с. 542–568.
131. Гринберг Г. А. Дифракция электромагнитных волн на полосе конечной ширины. *ДАН СССР*, **129**, №2, 1959, с. 295–298.

132. Курицын В. Н. К решению «ключевой» задачи для дифракции на идеальной проводящей полосе. *ЖТФ*, **31**, №12, 1961, с. 1485–1490.
133. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. *ЖТФ*, **35**, №3, 1965, с. 381–389.
134. Фиалковский А. Т. Дифракция плоских электромагнитных волн на щели и ленте. *Радиотехника и электроника*, **11**, №2, 1966, с. 178–186.
135. Боровиков В. А. Дифракция плоской волны на отрезке. *ДАН СССР*, **159**, №4, 1964, с. 711–714.
136. Боровиков В. А. *Дифракция на многоугольниках и многогранниках*. — М.: Наука, 1966.
137. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. В кн.: Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Советское радио, 1970.
138. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. *ДАН СССР*, **37**, 1942, с. 147.
139. Schwarzschild K. Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. *Mathematische Annalen*, **55**, 1902, pp. 177–247.
140. Braunbek W. Neue Näherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm. *Zeitschrift für Physik*, **127**, no. 4, 1950, pp. 381–390.
141. Braunbek W. Zur Beugung an der Kreisscheibe. *Zeitschrift für Physik*, **127**, no. 4, 1950, pp. 405–415.
142. Fox A. G. and Li T. Resonant Modes in Maser Interferometer. *Bell Systems Technical Journal*, **40**, no. 2, 1961, pp. 453–458.
143. Jones D. S. Diffraction by a Waveguide of Finite Length. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **48**, 1952, pp. 118–134.
144. Williams W. E. Diffraction by Two Parallel Planes of Finite Length. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **50**, 1954, pp. 309–318.
145. Пименов Ю. В. Плоская задача дифракции электромагнитных волн на двух идеально проводящих полосах конечной ширины, расположенных одна под другой. *ЖТФ*, **29**, №6, 1959, с. 711–715.

146. Нефедов Е. И. *Пятизначные таблицы дифракционной $U(s, p)$ -функции Вайнштейна*. — М.: Наука, 1969.
147. Фиалковский А. Т. Дифракция плоских волн на открытом резонаторе, образованном параллельными лентами. *ЖТФ*, **39**, №5, 1969, с. 865–874.
148. Shestopalov V. P. and Shestopalov Y. V. *Spectral Theory and Excitation of Open Structures*. The Institute of Electrical Engineers. Norfolk, U. K.: Galliard Ltd., 1996.
149. Rozzi T. and Mongiardo M. *Open Electromagnetic Waveguides*. The Institute of Electrical Engineers. Exeter, England: Short Run Press Ltd., 1997.
150. Кюркчан А. Г., Демин Д. Б. Моделирование характеристик рассеяния волн телами с поглощающим покрытием и «черными» телами. *ЖТФ*. **74**, №2, 2004, с. 24–31.
151. Ярыгин А. П. Применение метода краевых волн к задачам дифракции на телах, находящихся в плавно неоднородной среде. *Радиотехника и электроника*, **17**, №10, 1972, с. 1601–1609.
152. Guiraud J. L. Une approche spectrale de la théorie physique de la diffraction. *Annales des Telecommunications*, **38**, no. 3-4, 1983, pp. 145–157, Mars-Avril.
153. Balling P. Fringe-currents effects on reflector antenna cross-polarization. *Electromagnetics*, **15**, no. 1, 1995, pp. 55–69.
154. Andersh D. J., Hazlett M., Lee S. W., Reeves D. D., Sullivan D. P. and Chu Y. X-PATCH: A high-frequency electromagnetic-scattering code and environment for complex three-dimensional objects. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **36**, no. 1, February 1984, pp. 65–69.
155. Duan D. W., Rahmat-Samii Y. and Mahon J. P. Scattering from a circular disk: Comparative study of PTD and GTD techniques. *Proceedings of IEEE*, **79**, no. 10, 1991, pp. 1472–1480.
156. Весник М. В. Использование двумерных решений в трехмерных задачах. *Радиотехника и электроника*, **38**, №8, 1993, с. 1416–1423.
157. Idemen M., Buyukaksoy A. High-frequency surface currents induced on a perfectly conducting cylindrical reflector. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **AP-32**, no. 5, 1984, pp. 501–507.

158. Brown R. T. Treatment of singularities in the physical theory of diffraction. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **AP-32**, no. 6, 1984, pp. 640–641.
159. Bouche D. P., Bouquet J. J., Manene H. and Mittra R. Asymptotic computation of the RCS of low observable axisymmetric objects at high frequency. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **40**, no. 10, 1992, pp. 1165–1174.
160. Bouche D. P., Molinet F. A., Mittra R. Asymptotic and hybrid techniques for electromagnetic scattering. *Proc. IEEE*, **81**, no. 12, 1993, pp. 1658–1684.
161. Габриэлян Д. Д., Тарасенко О. М., Шацкий В. В. Использование представления краевых волн в сочетании с методом интегральных уравнений при решении задач дифракции на идеально проводящих телах сложной формы. *Радиотехника и электроника*, **36**, №6, 1991, с. 1159–1163.
162. Hansen T. B., Shore R. A. Incremental length diffraction coefficients for the shadow boundary of a convex cylinder. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **46**, no. 10, 1998, pp. 1458–1466.
163. Wang D. S., Medgyesi-Mitschang L. N. Electromagnetic scattering from finite circular and elliptic cone. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **AP-33**, no. 5, 1985, pp. 488–497.
164. Skyttemyr S. S. Cross polarization in dual reflector antennas — A PO and PTD analysis. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **AP-34**, no. 6, 1986, pp. 849–853.
165. Murthy P. K., Thiele G. A. Non-uniform currents on a wedge illuminated by a TE-plane wave. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **AP-34**, no. 8, 1986, pp. 1038–1045.
166. Cote M. G., Woodworth M. B., Yaghjian A. D. Scattering from perfectly conducting cube. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **36**, no. 9, 1988, pp. 1321–1329.
167. Akashi T., Ando M., Kinoshita T. Effects of multiple diffraction in PTD analysis of scattered field from a conducting disk. *Trans. IEICE*, **E 72**, no. 4, 1989, pp. 259–261.

168. Ando M., Kinoshita T. *PO and PTD analysis in polarization prediction for plane wave diffraction from large circular disk*. Digests of 1989 IEEE AP/S, Int. Symp., June 26–30, 1989, San Jose, California.
169. Ando M., Kinoshita T. Accuracy comparison of PTD and PO for plane wave diffraction from large circular disk. *Trans. IEICE*, **E 72**, no. 11, 1989, pp. 1212–1218.
170. Youssef N.N. Radar cross section of complex targets. *Proc. IEEE*, **77**, May 1989, pp. 722–734.
171. Ando M. *Modified physical theory of diffraction*. In Analysis Methods for EM Wave Problems, E. Yamashita, Ed. Boston/London: Artech House, 1990.
172. Vasil'ev E. N., Solodukhov V. V., Fedorenko A. I. The integral equation method in the problem of electromagnetic waves diffraction by complex bodies. *Electromagnetics*, **11**, no. 2, 1991, pp. 161–182.
173. Kim S. Y., Ra J. W., Shin S. Y. Diffraction by an arbitrary-angled dielectric wedge: Part II — Corrections to physical optics solution. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **39**, no. 9, 1991, pp. 1282–1292.
174. Ruis J. M., Ferrando M., Jofre L. GRECO: Graphical electromagnetic computing for RCS prediction in real-time. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **35**, no. 2, 1993, pp. 7–17.
175. Ruis J. M., Ferrando M., Jofre L. GRECO: High-frequency RCS of complex radar targets in real-time. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **41**, no. 9, 1993, pp. 1308–1319.
176. Martinez-Burdalo M., Martin A., Villar R. Uniform PO and PTD solution for calculating plane wave backscattering from a finite cylindrical shell of arbitrary cross section. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **41**, no. 9, 1993, pp. 1336–1339.
177. Бахрах Л. Д., Ярмахов И. Г. Исследование дифракции электромагнитных волн на щелях в экранах конечной толщины. *Радиотехника и электроника*, **38**, №2, 1993, с. 213–218.
178. Corona P. et al. Accurate evaluation of backscattering by 90° dihedral corners. *Electromagnetics*, **13**, no. 1, 1993, pp. 23–36.

179. Domingo M., Torres R. P. and Catedra M. F. Calculation of the RCS from the interaction of edges and faces. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **42**, no. 6, 1994, pp. 885–898.
180. Alintas A., Buyukdura O. M. and Pathak P. H. An extension of the PTD concept for aperture radiation problems. *Radio Science*, **29**, no. 6, 1994, pp. 1403–1407.
181. Domingo M. et al. Computation of the RCS of complex bodies modeled using NURBS surfaces. *IEEE Trans. Antennas & Propagation Magazine*, **37**, no. 6, 1995, pp. 36–47.
182. Asvestas J. S. A class of functions with removable singularities and their application in the physical theory of diffraction. *Electromagnetics*, **15**, no. 2, 1995, pp. 143–155.
183. Vermersch S., Sesques M. and Bouche D. Computation of the RCS of coated objects by a generalized PTD approach. *Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects. Annales des Telecommunications*, **50**, no. 5–6, May-June 1995, pp. 563–572.
184. Ufimtsev P. Ya. and Rahmat-Samii Y. Physical theory of slope diffraction. *Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects. Annales des Telecommunications*, **50**, no. 5–6, May-June 1995, pp. 487–498.
185. Rius J. M., Vall-Llossera M. and Cardama A. GRECO: Graphical processing methods for high-frequency RCS prediction. *Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects. Annales des Telecommunications*, **50**, no. 5–6, May-June 1995, pp. 551–556.
186. Boutillier M. and Blondell-Fournier M. A. CAD-based high-frequency RCS computing code for complex objects. *Sermat, Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects. Annales des Telecommunications*, **50**, no. 5–6, May-June 1995, pp. 536–539.
187. Polycarpov A. C., Balanis C. A. and Bitcher C. R. Radar cross section of trihedral corner reflectors using PO and MEC. *Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects. Annales des Telecommunications*, **50**, no. 5–6, May-June 1995, pp. 510–516.
188. Syed S. S. and Volakis J. L. PTD analysis of impedance structures. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **44**, no. 7, 1996, pp. 983–988.

189. Johansen P. M. Uniform physical theory of diffraction equivalent edge currents for implementation in general computer codes. *IEEE Antennas & Propagation. Soc. Symp. Digests*, **2**, July 21–26, 1996, Baltimore, MD, pp. 784–787.
190. Johansen P. M. *Time-domain incremental diffraction coefficients for edges*. USNC/URSI Radio Science Meeting, Digests, July 21–26 1996, Baltimore, MD, p. 381.
191. Kim J. J. and Kesler O. B. *Hybrid scattering analysis (PTD+UFIM) for large airframe with small details*. USNC/URSI Radio Science Meeting, Digests, July 21–26 1996, Baltimore, MD, p. 263.
192. Wolf P. A new approach to edge diffraction. *SIAM, J. Appl. Math.*, **15**, no. 6, 1967, pp. 1434–1469.
193. Tran Van Nhieu M. Diffraction by plane screens. *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**, no. 2, 1995, pp. 796–806.
194. Tran Van Nhieu M. Diffraction by the edge of a three-dimensional object. *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, no. 1, 1996, pp. 79–87.
195. Уфимцев П. Я. *Теория дифракционных краевых волн в электродинамике*. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
196. Уфимцев П. Я. *Основы физической теории дифракции*. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
197. Ufimtsev P. Ya. *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*. — Hoboken, N. J.: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
198. Ufimtsev P. Ya. *Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics: Origination and Validation of the Physical theory of Diffraction*. Revised printing.— Raleigh, NC: Scitech Publishing Inc., 2009.
199. Ufimtsev P. Ya. New insight into the classical Macdonald Physical Optics approximation. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **50**, no. 3, June 2008, pp. 11–20. Corrections in *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **50**, no. 4, August 2008, p. 65.
200. Ufimtsev P. Ya. On polarization coupling in the PO and PTD approximations. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **56**, no. 12, December 2008.

201. Bernard J. M. L., Lyalinov M. A., Zhu N. Y. Analytical-numerical calculation of diffraction coefficients for a circular impedance cone. *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, **56**, no. 6, 2008, pp. 1616–1623.
202. Molinet F. A., Andronov I. V., Bouche D. *Asymptotic and Hybrid Methods in Electromagnetics*. — London: IEE, 2005.
203. Kravtsov Yu. A., Zhu N. Y. *Theory of Diffraction: Heuristic Approaches*. Alpha Science Series on Wave Phenomena, 2010.
204. Весник М. В. Аналитическое решение граничных задач теории дифракции методом обобщенного эйконала. *Радиотехника и электроника*, **48**, № 9, 2003, с. 1078–1084.
205. Весник М. В. Получение дифракционных коэффициентов для двумерного полубесконечного идеально проводящего рассеивателя при помощи метода обобщенного эйконала. *Электромагнитные волны и электронные системы*, **9**, №11, 2004, с. 23–29.
206. Весник М. В. Аналитическое решение задачи дифракции электромагнитной волны на двумерной идеально проводящей полуплоскости методом обобщенного эйконала. *Радиотехника и электроника*, **53**, №1, 2008, с. 1–13.
207. Araydin G., Sevgi L. A novel split-step parabolic-equation package for surface-wave propagation prediction along multiple mixed irregular-terrain paths. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, **52**, no. 4, August 2010, pp. 90–97.
208. Kirchhoff G. R. Zur Theorie der Lichtstrahlen. *Annalen der Physik*, **18** (4) 1883, pp. 663–695.
209. Levy M. *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*.— London: IEE, 2000.

Приложение 1.

Связь между гауссовой системой единиц (СГС) и международной системой (СИ)

Гауссова система единиц широко используется в теоретической физике. Она часто называется абсолютной симметричной системой. Эта система построена на трех независимых основных единицах: *сантиметр* (см), *грамм* (г), *секунда* (с) и обозначается ниже символом СГС. Все электромагнитные единицы являются производными от этих трех основных единиц и устанавливаются с помощью физических законов, которые определяют соотношения между ними. Многие гауссовы единицы не имеют названий.

Приведенные ниже таблицы показывают соотношения между электромагнитными единицами в гауссовой системе (СГС) и в международной системе (СИ), в которой основными единицами являются *метр* (м), *килограмм* (кг), *секунда* (с) и *ампер* (А). Здесь также приведены таблицы с основными формулами (для электромагнитных полей и их источников), которые часто используются в данной книге. Эти формулы записаны в обеих системах единиц.

Основные электромагнитные единицы

Символ	Физическая величина	Название в СГС	Единица СГС	Единица СИ
q	заряд	—	$\frac{1}{3}10^{-9}$ Кл	кулон (Кл)
ρ	плотность заряда	—	$\frac{1}{3}10^{-3}$ Кл/м ³	Кл/м ³
J	ток	—	$\frac{1}{3}10^{-9}$ А	ампер (А)
j	плотность тока	—	$\frac{1}{3}10^{-5}$ А/м ²	А/м ²

Основные электромагнитные единицы

Символ	Физическая величина	Название в СГС	Единица СГС	Единица СИ
j	поверхностная плотность тока	—	$\frac{1}{3}10^{-7}$ А/м	А/м
ϕ	электрический потенциал	—	300 В	вольт (В)
E	напряженность электрического поля	—	$3 \cdot 10^4$ В/м	В/м
D	электрическая индукция, или вектор электрического смещения	—	$3 \cdot 10^4$ В/м	Кл/м ²
H	напряженность магнитного поля	Эрстед	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^3$ А/м	А/м
B	магнитная индукция	Гаусс	10^{-4} Тл	тесла (Тл)
—	энергия	эрг	10^{-7} Дж	джоуль (Дж)
—	плотность энергии	эрг/см ³	0.1 Дж/м ³	Дж/м ³
—	поток мощности	эрг/с	10^{-7} Вт	ватт (Вт)
—	плотность потока мощности	эрг/(с · см ²)	10^{-3} Вт/м ²	Вт/м ²

**Гармонические электромагнитные поля ($e^{-i\omega t}$)
в свободном пространстве (пустоте)**

Система СГС	Система СИ
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e - ik\mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^e - i\omega\epsilon_0\mathbf{E}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m + ik\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}^m + i\omega\mu_0\mathbf{H}$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho^e$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^e}{\epsilon_0}$
$\nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi\rho^m$	$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho^m}{\mu_0}$
c — скорость света	

**Уравнения состояния, или материальные уравнения,
для свободного пространства**

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{D} = \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$
$\mathbf{B} = \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$
$\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9}$ Фарад/метр $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Генри/метр	

Уравнения непрерывности ($e^{-i\omega t}$)

Система СГС	Система СИ
$\nabla \cdot \mathbf{j}^e = i\omega\rho^e$	$\nabla \cdot \mathbf{j}^e = i\omega\rho^e$
$\nabla \cdot \mathbf{j}^m = i\omega\rho^m$	$\nabla \cdot \mathbf{j}^m = i\omega\rho^m$

Формулы для поля в свободном пространстве ($e^{-i\omega t}$)

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}^m +$ $+ \frac{i}{k} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^e) + k^2 \mathbf{A}^e]$	$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}^m +$ $+ \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^e) + k^2 \mathbf{A}^e]$
$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}^e +$ $+ \frac{i}{k} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^m) + k^2 \mathbf{A}^m]$	$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}^e +$ $+ \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^m) + k^2 \mathbf{A}^m]$
$\mathbf{A}^{e,m} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}^{e,m} \frac{e^{ikR}}{R} dv$	$\mathbf{A}^{e,m} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{j}^{e,m} \frac{e^{ikR}}{R} dv$
$k = \frac{\omega}{c}$	$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

Вектор Пойнтинга

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}$	$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}$

Эквивалентные поверхностные токи

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{j}^e = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]$	$\mathbf{j}^e = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]$
$\mathbf{j}^m = -\frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$	$\mathbf{j}^m = -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$
Здесь \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали к той стороне поверхности, по которой текут эквивалентные токи.	

Волновые поля, создаваемые источниками в свободном пространстве (дальние поля)

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{k}}$

**Волновые поля, создаваемые источниками
в свободном пространстве (дальние поля)**

Система СГС	Система СИ
$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$
Здесь $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор в направлении распространения волны.	

Приложение 2.

Ключевая теорема эквивалентности

Пусть в свободном пространстве имеются сторонние электрические и магнитные токи с объемной плотностью $\mathbf{j}^{e,m}$. С помощью произвольной воображаемой поверхности S разделим пространство на две области V и W с источниками $\mathbf{j}_V^{e,m}$ и $\mathbf{j}_W^{e,m}$ (см. рис. 1.2.1). Выберем точку наблюдения P внутри области W (вне области V). Определим две единичные нормали к поверхности S . Нормаль \mathbf{n} направим внутрь области V , а нормаль $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$ — внутрь области W . На стороне поверхности S , обращенной к области V , зададим поверхностные токи с плотностью

$$\mathbf{j}_{S,n}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{j}_{S,n}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (\text{П2.1})$$

Здесь векторы

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_V + \mathbf{E}_W, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_V + \mathbf{H}_W \quad (\text{П2.2})$$

обозначают *полное* электромагнитное поле, созданное *всеми* сторонними источниками, расположенными как в области V , так и в области W . Напоминаем, что здесь, как и во всей данной книге, используются гауссова система единиц (СГС) и зависимость от времени в виде $\exp(-i\omega t)$.

Обозначим через \mathcal{E}_V , \mathcal{H}_V поле, создаваемое в точке P токами $\mathbf{j}_V^{e,m}$, находящимися в области V . Символами \mathcal{E}_S , \mathcal{H}_S обозначим поле, создаваемое в точке P поверхностными токами $\mathbf{j}_S^{e,m}$, которые согласно формуле (П2.2) определяются, в свою очередь, как источниками $\mathbf{j}_V^{e,m}$, так и $\mathbf{j}_W^{e,m}$. Используя векторную формулу Грина [32], можно доказать следующую ключевую теорему (теорему 1).

Теорема 1. В области W сумма полей, излучаемых порознь токами $\mathbf{j}_V^{e,m}$ и $\mathbf{j}_S^{e,m}$, равна нулю:

$$\mathcal{E}_V(P) + \mathcal{E}_S(P) = 0, \quad \mathcal{H}_V(P) + \mathcal{H}_S(P) = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Здесь

$$\mathcal{E}_{V,S} = -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_{V,S}^e + k^2 \mathbf{A}_{V,S}^e) - \nabla \times \mathbf{A}_{V,S}^m, \quad (П2.4)$$

$$\mathcal{H}_{V,S} = -\frac{1}{ik}(\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}_{V,S}^m + k^2 \mathbf{A}_{V,S}^m) + \nabla \times \mathbf{A}_{V,S}^e,$$

$$\mathbf{A}_V^{e,m} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}^{e,m} \frac{e^{ikr}}{r} dV, \quad \mathbf{A}_S^{e,m} = \frac{1}{c} \oint_S \mathbf{j}_S^{e,m} \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (П2.5)$$

Все дифференциальные операции производятся здесь по координатам точки наблюдения $P(x, y, z)$. Величина e^{ikr}/r есть функция Грина свободного пространства, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ — расстояние между точками наблюдения и интегрирования.

В формулах (П2.3) предполагается, что функция e^{ikr}/r всюду конечна и непрерывна в области V вместе со своими первой и второй производными. Это условие выполняется для точек наблюдения P , находящихся вне области V .

Однако точку P можно поместить **и в область** V , но тогда ее следует окружить поверхностью сферы σ бесконечно малым радиусом и заменить в формулах (П2.3–П2.5) поверхность S поверхностью $S + \sigma$. Можно показать, что интегралы по сфере σ в пределе, когда ее радиус стремится к нулю, оказываются равными **полному** полю со знаком минус:

$$\mathcal{E}_\sigma(P) = -\mathbf{E}(P), \quad \mathcal{H}_\sigma(P) = -\mathbf{H}(P). \quad (П2.6)$$

Заметим, что при вычислении этих пределов используются калибровочные соотношения Лоренца

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\sigma^{e,m} = ik\Phi_\sigma^{e,m}, \quad (П2.7)$$

где величины

$$\Phi_\sigma^{e,m} = \oint_\sigma \rho^{e,m} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (П2.8)$$

суть скалярные потенциалы полей, создаваемых поверхностными зарядами

$$\rho_S^e = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad \rho_S^m = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}). \quad (П2.9)$$

В этом случае соотношения (П2.3) преобразуются к виду

$$\mathcal{E}_V(P) + \mathcal{E}_S(P) = \mathbf{E}(P), \quad \mathcal{H}_V(P) + \mathcal{H}_S(P) = \mathbf{H}(P). \quad (П2.10)$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия ключевой теоремы (П2.3, П2.10).

А. Эквивалентные поверхностные токи

Перепишем соотношения (П2.3) для полей в области W в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_V = -\boldsymbol{\mathcal{E}}_S, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_V = -\boldsymbol{\mathcal{H}}_S. \quad (\text{П2.11})$$

Зададим поверхностные токи

$$\mathbf{j}_{S,N}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{j}_{S,n}^e, \quad \mathbf{j}_{S,N}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{j}_{S,n}^m \quad (\text{П2.12})$$

на стороне поверхности S , обращенной к области W . Обозначим излучаемое ими поле через $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}$. Очевидно, что оно отличается лишь знаком от поля, порождаемого токами (П2.1):

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N} = -\boldsymbol{\mathcal{E}}_S, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N} = -\boldsymbol{\mathcal{H}}_S. \quad (\text{П2.13})$$

Согласно (П2.11) оно полностью эквивалентно полю, излучаемому сторонними источниками, находящимися в области V :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_V, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_V. \quad (\text{П2.14})$$

Этот результат дает основание называть поверхностные токи (П2.12) *эквивалентными токами*.

Соотношения (П2.14) представляют собой одну из известных формулировок теорем эквивалентности. Ее замечательным свойством является то, что поле, создаваемое в точке наблюдения P эквивалентными токами (П2.12), не зависит от формы поверхности S . Эту поверхность можно деформировать как угодно, разумеется сохраняя неизменным положение сторонних источников $\mathbf{j}_V^{e,m}$ и $\mathbf{j}_W^{e,m}$. При этом их поле $\mathbf{E}_{V,W}$, $\mathbf{H}_{V,W}$ на поверхности S естественно изменяется, соответственно изменяются там и поверхностные токи $\mathbf{j}_{S,N}^{e,m}$, но величина излучаемого ими поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}(P)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}(P)$ остается постоянной.

Б. Отсутствие обратных волн в однородном пространстве

В соответствии с формулой (П2.2) поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}(P)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}(P)$ в области W можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}^{(V)} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}^{(V)} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)} \quad (\text{П2.15})$$

Здесь верхние индексы у слагаемых указывают на их происхождение. Поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{S,N}^{(V)}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{S,N}^{(V)}$ возбуждается эквивалентными поверхностными токами

$$\mathbf{j}_{S,N}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{H}_V], \quad \mathbf{j}_{S,N}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{E}_V], \quad (\text{П2.16})$$

где величины \mathbf{E}_V , \mathbf{H}_V представляют поле в свободном пространстве, порождаемое *только* сторонними источниками $\mathbf{j}_V^{e,m}$ из области V . А поле $\mathcal{E}_{S,N}^{(W)}$, $\mathcal{H}_{S,N}^{(W)}$ излучается эквивалентными поверхностными токами

$$\mathbf{j}_{S,N}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{H}_W], \quad \mathbf{j}_{S,N}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{N} \times \mathbf{E}_W], \quad (\text{П2.17})$$

которые в свою очередь определяются полем \mathbf{E}_W , \mathbf{H}_W сторонних источников $\mathbf{j}_W^{e,m}$ из области W .

С учетом (П2.15) соотношения эквивалентности (П2.14) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_V = \mathcal{E}_{S,N}^{(V)} + \mathcal{E}_{S,N}^{(W)}, \quad \mathcal{H}_V = \mathcal{H}_{S,N}^{(V)} + \mathcal{H}_{S,N}^{(W)}. \quad (\text{П2.18})$$

Изменим теперь положение или величину хотя бы одного из источников $\mathbf{j}_W^{e,m}$. Очевидно, что при этом изменится поле \mathbf{E}_W , \mathbf{H}_W на поверхности S и, следовательно, изменятся как токи (П2.17), так и излучаемое ими поле $\mathcal{E}_{S,N}^{(W)}$, $\mathcal{H}_{S,N}^{(W)}$. Обозначим его новые значения через $\tilde{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)}$. Теперь соотношения (П2.18) принимают следующий вид:

$$\mathcal{E}_V = \mathcal{E}_{S,N}^{(V)} + \tilde{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)}, \quad \mathcal{H}_V = \mathcal{H}_{S,N}^{(V)} + \tilde{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)}. \quad (\text{П2.19})$$

Сравним соотношения (П2.18) и (П2.19). Их левые части и первые члены в правых частях одинаковы. Вторые же члены различаются: $\tilde{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)} \neq \mathcal{E}_{S,N}^{(W)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)} \neq \mathcal{H}_{S,N}^{(W)}$. Однако, вычитая (П2.19) из (П2.18), мы приходим к противоположному заключению: $\tilde{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)} = \mathcal{E}_{S,N}^{(W)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)} = \mathcal{H}_{S,N}^{(W)}$. Возникшее противоречие означает, что данные поля тождественно равны нулю:

$$\mathcal{E}_{S,N}^{(W)}(P) \equiv \tilde{\mathcal{E}}_{S,N}^{(W)}(P) \equiv 0, \quad \mathcal{H}_{S,N}^{(W)}(P) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_{S,N}^{(W)}(P) \equiv 0. \quad (\text{П2.20})$$

Напомним, что здесь точка наблюдения P находится в той же области W , где располагаются сторонние источники $\mathbf{j}_W^{e,m}$.

С физической точки зрения данный результат можно трактовать как отсутствие *обратных* волн в однородном пространстве. Это означает, что эквивалентные токи, находящиеся на поверхности S , не излучают *обратно* в ту область, откуда пришло возбуждающее их поле от реальных источников. Данное явление есть результат коллективного действия всех эквивалентных источников, расположенных на поверхности S . Каждый эквивалентный источник излучает поле во всех направлениях, включая и область, содержащую реальные источники, но в этой области

его поле полностью гасится коллективным излучением всех остальных эквивалентных источников.

Факт взаимного гашения обратных волн, излучаемых эквивалентными источниками, позволяет также выяснить смысл ключевой теоремы для поля в области V . Как показано выше, это поле описывается формулами (П2.10):

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_V(P) + \mathbf{E}_S(P), \quad \mathbf{H}(P) = \mathcal{H}_V(P) + \mathcal{H}_S(P).$$

Поля $\mathbf{E}_S(P)$ и $\mathcal{H}_S(P)$ опять можно представить в виде суммы

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_S^{(V)} + \mathbf{E}_S^{(W)}, \quad \mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^{(V)} + \mathcal{H}_S^{(W)}.$$

Теперь уже слагаемые $\mathbf{E}_S^{(V)}$ и $\mathcal{H}_S^{(V)}$ играют роль обратных волн и следовательно равны нулю. Слагаемые же $\mathbf{E}_S^{(W)}$ и $\mathcal{H}_S^{(W)}$, согласно теореме эквивалентности, определяют поле \mathbf{E}_W , \mathcal{H}_W , создаваемое источниками, которые находятся в области W . В результате, как и следовало ожидать, полное поле в области V равно сумме полей, которые излучаются источниками $\mathbf{j}_V^{e,m}$ и $\mathbf{j}_W^{e,m}$ (находящимися соответственно в областях V и W):

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_V + \mathbf{E}_W, \quad \mathbf{H}(P) = \mathcal{H}_V + \mathcal{H}_W. \quad (\text{П2.21})$$

Это представление справедливо и на границе области V , где оно полностью согласуется с исходными значениями (П2.2) для поля на поверхности S .

В заключение отметим, что соотношения эквивалентности получены выше в общем случае, когда сторонние источники находятся в обеих областях (V и W). В случае же, когда источники располагаются только в одной из этих областей, указанные соотношения являются очевидными следствиями ключевой теоремы (П2.3, П2.10). В § 1.2 они представлены в виде теорем 2 и 3.

Авторский и предметный указатель

- Andronov I. V., 355
Apaydin G., 355
- Babich V. M., 344, 347
Bakker B. B., 340
Beckmann P., 345
Bernard J. M. L. 355
Blume S., 344
Bouche D., 10,355
Bowman J. J., 28
Breinbjerg O., 342, 344
- Chytil B., 344
Copson E. T., 340
- Dominek A. K., 347
- F-117 Stealth, 13, 14, 21, 22
Felsen L. B., 341
Frank F., 341
- Graglia R. D., 346
Grumman, 14
- Hallen E., 347
Hansen E. B., 348
Harvey Project, 21
Honl H., 27
- James G. L., 30
Johansen P. M., 344
Jones D. S., 349
- Keller J. B., 342
Kiebertz R. B., 348
- Kim T. J., 344
King R. W. P., 27, 348
Kirchhoff G. R., 5, 10, 24, 32, 33,
34, 59, 61, 355
Kottler F., 340
Kouyoumjian R. G., 344
Krasnozhen A. P., 347
Kravtsov Yu. A., 355
Krebs V., 344
- Lüneburg E., 348
Landstorfer F. M., 346
Levy M., 355
Li T., 349
Lindroth K., 348
Lyalinov M. A., 355
- Macdonald H. M., 5, 10, 24, 32, 33,
34, 41, 61, 63, 341
- Malherbe J. A. G., 344
Manara G., 346
Maue A. W., 27
McNamara D. A., 30
Mentzer J. R., 27
Michaeli A., 343
Millar R. F., 348
Mitra R., 29
Mitzner K. M., 18, 23, 343
Mizes R. V., 341
Molinet F. A., 355
Mongiardo M., 350
Moore R. D., 23
Munk B. A., 22

- Nepa P., 346
 Neugebauer H. E. T., 340
 Noble B., 28
 Northrop Corporation, 13, 14, 18,
 343, 344
 Overholser D., 21
 Pathak P. H., 344
 Pauli W., 45, 134, 135, 165, 341
 Pelosi G., 342, 346
 Peters L., Jr., 347
 Pistorius C. W. I., 30
 Rahmat-Samii Y., 29, 342
 Rich B., 13
 Rozzi T., 350
 Schensted C. E., 342, 346
 Schroeder B., 21
 Selleri S., 342, 346
 Senior T. B. A., 28, 342
 Sevgi L., 355
 Shamansky H. T., 347
 Shestopalov V. P., 350
 Shestopalov Y. V., 350
 Shore R. A., 343
 Siegel K. M., 341
 Stratton J. A., 340
 Tran H. B., 344
 Ufimtsev P. Ya., 341, 343, 354
 Uslenghi P. L. E., 28, 29, 342
 Weston V. H., 341
 Westpfahl K., 27, 348
 Wiener–Hopf Technique., 28
 Williams W. E., 349
 Wu T. T., 27
 Yaghjian A. D., 343
 Young T., 338
 Zhu N. Y., 346, 355
 Бабине принцип, 34
 Бекер, 34
 Белкина М. Г., 91, 342
 Бененсон Л. С., 340
 Боровиков В. А., 28, 30, 198, 349
 Браунбек, 219
 Бриллюэн
 волна, 310, 311, 324
 дифракция, 321
 направление, 320, 334, 337
 углы, 326, 330, 334
 Булдырев В. С., 345
 Буслаев В. С., 345
 Буторин Д. И., 343
 ближнее поле, 143, 160, 165, 339
 бомбардировщик В-2 Stealth, 13,
 23
 Вайнштейн Л. А., 23, 29, 128,
 165, 188, 190, 195, 253,
 291, 298, 323, 345
 Весник М., 13, 32, 355
 Вестпфаль К., 290
 вектор-потенциал, 72, 74, 110,
 118, 159
 запаздывающий, 144
 взаимности
 принцип, 31, 167, 168, 176,
 182, 193, 195, 241, 251,
 259, 278, 288, 336
 теорема, 167, 168, 173, 175,
 254, 322, 327
 возбуждение, 147, 292
 Гельмгольц
 теорема, 34, 36, 59
 уравнение, 127, 165, 345
 элементарные волны, 92

- Грин
теорема, 35
функция, 35
- Гринберг Г. А., 198, 348
- Гуляев Ю. В., 9, 12
- Гюйгенса—Кирхгофа принцип, 291
- гамма-функция, 134
- гауссова система единиц, 26, 58, 355
- геометрическая оптика, 43, 104, 105, 139, 205, 253, 302, 328
- главный теневой лепесток, 49, 50, 52, 55, 57, 59, 334, 337
- Дирихле граничная задача, 198, 263, 340
- двойственности теория, 57, 58, 197, 216, 270
- деполяризация
отраженная волна, 122, 124
рассеянное поле, 123
- диаграмма рассеяния, 278, 285
диска, 54
лента, 252
проводящая лента, 50
черная лента, 50
черных пластин, 60
- диполь
излучаемое поле, 175
наводимый ток, 175
пассивный, 185
рассеянное поле, 185
- дифракционные лучи, 60
конус, 69
- дифракция
ГТД, 29, 31, 92
на ленте, 264
- полубесконечный провод, 151
- равномерная асимптотическая теория, 29
- спектральная теория, 29
- ФТД, 13, 15, 23, 25, 28, 62, 92, 125, 336
- диффузия
поперечная, 40, 60, 139, 163, 339
продольная, 129
- Жу, 32
- Захарьев Л. Н., 41, 341
- Зоммерфельд А., 34, 63, 128, 135, 141, 162, 198, 268, 342
- западывающий векторный потенциал, 62, 167, 201
- импеданс поверхностный, 17
- импедансные граничные условия, 16
- Калашников А., 91, 342
- Келлер, 30, 91, 92
- Кинбер Б. Е., 30
- Кирхгоф, 24, 33, 34, 37, 195
черный экран, 33, 34, 37
- Кирхгофа—Макдональда
модель, 24, 34, 37, 41, 59
приближение, 32, 61, 195
- Копсон, 34
- Котлер, 24, 33, 34, 39, 40
- Коши теорема, 145, 209, 243
- Кравцов, 32
- Курицын В. Н., 198, 349
- конус
отраженный сигнал, 79
полубесконечный, 76

- формула, пригодная для любого угла раствора, 80
- эффективная поверхность рассеяния, 79
- краевые волны, 24, 27, 60, 63, 67, 92, 141, 163, 199, 238, 263, 320
- n -го порядка, 179
- в резонаторе, 291, 305, 306, 329
- вторичные, 154, 170, 184
- высшие порядки, 165, 230, 238
- диаграмма излучения, 322
- дифракция, 245
- на концах пассивного вибратора, 183
- на ленте, 162
- на проводнике конечной длины, 148
- излом, 71
- лента, 191
- Ньютона работа, 91
- параболическое уравнение, 165, 196
- первичные, 126, 170, 184, 191
- попарная компенсация, 326
- ребра на вогнутой поверхности, 93
- свойство симметрии, 200, 296
- третьего порядка, 170, 178
- четвертого порядка, 179
- элементарные, 17, 92
- краевые токи, 17, 166
- Левин М. Л., 57, 60, 188, 347
- Лежандра
- полиномы, 56
- функции, 127
- Леманский А. А., 41, 341
- Леонтович М. А., 127, 188, 345
- Майзельс Е. Н., 23, 115, 338, 339
- Макдональд 34, 37, 41, 63, 195
- Максвелла
- двойственность, 57, 58
- уравнения, 35, 39, 61, 69, 104
- Малюжинец Г. Д., 128, 133, 345
- Мартынов Н. А., 343
- Матье функция, 198, 290
- Молинет, 32
- Молотков И. А., 346
- метод
- Бореля, 137
- Винера—Хопфа—Фока, 202
- вариационный, 181, 347
- медленно меняющихся амплитуд, 169
- медленно меняющихся функций, 147
- опорной волны, 141
- отражений, 137
- параболического уравнения, 25, 127, 128, 133, 141, 143, 156, 159, 162, 196, 236, 336, 345
- погрешность, 136
- перевала, 99, 134, 205, 266, 301
- факторизации, 29, 148, 180, 202, 265, 298
- Неймана
- граничная задача, 197, 198
- ряд, 206, 215, 217, 266, 267, 269, 290
- Нойгебауер, 34
- Ньютон, 91
- Пименов Ю. В., 291, 349
- Полянский Е. А., 346

- Попов А. В., 128, 346
Попов Г. Я., 198, 349
Пуанкаре, 228, 278
- параболоид вращения, 83
плотность потока энергии, 42, 160, 188
полубесконечный проводник
дифракция, 151
полный ток, 150
полусфера
эффективная поверхность рассеяния, 88
поперечник рассеяния, 77, 79, 83, 85, 187, 194, 253, 256, 283, 285, 328, 332
диск, 85
дифракционный предел, 25
конечный цилиндр, 83
конус, 79
параболоид вращения, 85
проводящее тело, 43
тело вращения с изломами, 75
черное тело, 42
проводящая лента
диаграмма рассеяния, 50
проводящий диск, 54, 75, 77, 86, 91
- Риман
пространство, 60
черный экран, 60
Рубинович А., 91
- радиопоглощающие покрытия, 24, 25, 59, 335
рассеяние вперед, 59, 60, 335
резонансные свойства
вibrator, 149
лента, 236
резонатор, 291
тонкие цилиндрические про-
водники, 165
резонансные частоты, 333
резонансный
знаменатель, 155, 182, 251
- СГС, 355
СИ, 355
- сходимость
абсолютная и равномерная, 214
- Тейлора ряд, 134, 223, 226, 230, 244, 248, 278, 280, 309
- теневое излучение, 59, 60, 335, 341
второго порядка, 60
первого порядка, 60
теневого контур, 39, 40, 43, 48
теорема, 39, 55
- ток
диполь, 174
краевой, 109, 154, 155
лента, 161
неравномерная часть, 16, 25, 62, 63, 69, 72, 88, 90, 99, 107, 109, 112, 120, 121, 124, 166
равномерная часть, 16, 25, 62, 65, 68, 75, 80, 87, 109, 117, 123, 166, 296
- токи
геометрической оптики, 62
физической оптики, 62
- Уфимцев П. Я., 13–15, 19, 21, 22, 28, 30, 338, 340, 341, 343, 354
- уравнение краевых волн, 206, 267, 300

- Фельд Я. Н., 340
- Ферма принцип, 91
- Фиалковский А. Т., 198, 291, 318,
347, 349, 350
- Фогт, 34
- Фок В. А., 23, 202, 345, 349
- Френель
дифракция, 59, 195, 335
интеграл, 191, 229–231, 245,
251, 268, 271, 309
- физическая оптика, 85, 91
приближение, 16, 61, 76, 79,
99
- физическая теория дифракции,
ФТД, 22, 28, 92, 125, 195,
336, 339
- функция
Бесселя, 52, 56, 127
Вайнштейна, 166, 309, 328
Ханкеля, 56, 144, 264
- Хаскинд М. Д., 198, 253, 348
- цилиндр
полубесконечный, 149

Чугунова Л. С., 23

черная лента, 49

 диаграмма рассеяния, 49

 рассеянное поле, 48

черная полуплоскость, 43, 46, 48

черное тело, 33, 40

черный диск, 50, 52, 55

 эффективная поверхность
 рассеяния, 53

черный экран, 41

Шварцшильд К., 215, 219, 270,
278, 290

эффективная поверхность рас-
сеяния, 53, 82, 188

 коническое тело, 106

 конус, 79

 параболоид, 86

 полусфера, 88

 сферический сегмент, 89

Яковлева Г. Д., 346

В книге изучается дифракция электромагнитных волн на телах, больших по сравнению с длиной волны. Развиваются приближенные и строгие методы исследования. Полученные результаты проливают свет на природу таких явлений, как дифракция Френеля, теневое излучение, деполяризация обратного рассеяния, процесс формирования краевых волн и т. д.

Книга предназначена для радиофизиков и радиоинженеров, а также для преподавателей вузов, аспирантов и студентов при изучении антенн, дифракции радиоволн и стелс-технологии по созданию объектов, невидимых для радаров.

Петр Яковлевич Уфимцев широко известен своими работами по теории дифракции и распространения электромагнитных и акустических волн. В частности, разработанная им физическая теория дифракции (ФТД) была с успехом использована в США при создании объектов, не видимых для радаров, в частности stealth aircraft.

П. Я. Уфимцев сотрудничал с рядом исследовательских и научных институтов, включая Институт радиотехники и электроники АН СССР (Москва), Московский авиационный институт, Калифорнийский университет (Лос-Анджелес, Ирвайн). Он читал курсы лекций по ФТД в Калифорнийском университете (Лос-Анджелес, 1991), в Сингапурском национальном университете (1993), в Институте технологий ВВС США (Дейтон, Огайо, 1994, 1999), в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (2007) и в Университете Сиены (Сиена, Италия, 2008).

За выдающиеся научные достижения П. Я. Уфимцеву присуждена Государственная премия СССР (Москва, 1990), он награжден медалью Л. Р. Груммана (Нью-Йорк, 1991) и медалью за научные достижения XX века (Кембридж, Великобритания, 1996). Он также является членом Академии электромагнетизма (Массачусетский технологический институт, США, 1989), Американского института аэронавтики и астронавтики (Associated Fellow of AIAA, 1992), Института инженеров по электротехнике и электронике (Fellow of IEEE, 1999).

ISBN 9785996306343



9 785996 306343