ШКОЛЬНИКУ
О МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ

В. А. УФНАРОВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АКВАРИУМ

АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДАВСКОЙ ССР

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт математики с вычислительным центром

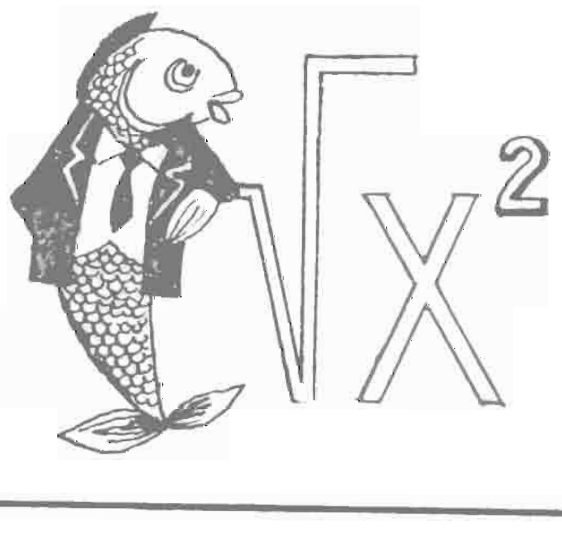
КИШИНЕВ «ШТИИНЦА»
1987

О МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ ШКОЛЬНИКУ

В. А. УФНАРОВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АКВАРИУМ

Под редакцией
доктора физико-математических наук
Ю. М. Рябухина



ББК 22.1
У 83

УДК 51

Книга посвящена нескольким ярким фрагментам из различных областей математики. В каждой задаче указывается не только решение, но и тот путь, по которому к нему можно прийти. Изложение материала свободное. Поэтому читатель может почувствовать, как именно рождаются решения математических задач.

Книга рассчитана на широкий круг лиц, интересующихся математикой, в первую очередь — школьников старших классов, а также на будущих абитуриентов и участников олимпиад.

Рецензенты

кандидат технических наук
Ю. Н. Печерский
кандидат физико-математических наук
И. М. Гоян

У $\frac{1702010000-200}{М755(10)-87}$ 86—87

Предисловие

Водных животных, способных причинить вред человеку, можно разделить на четыре основные категории: кусающие, во главе с пресловутой акулой; колющие, которые впрыскивают жертвам яд; ядоносные, которые, если их съесть, вызывают болезненные ощущения или смерть; оглушающие, которых отличает способность оглушать или убивать генерируемым ими электрическим током.

Т. Дозье. Опасные морские создания

Прекрасен и необъятен математический океан. Однако мало кому удается безболезненно достичь его глубин и познать всю ту красоту, которая сокрыта на его дне. Но если посчастливилось окунуться в захватывающий мир математического творчества, то уже почти невозможно удержаться от желания хоть как-то показать другому великолепную структуру математики. И если нет возможности увлечь читателя за собой в глубины этого океана (а не каждому дано преодолеть волны математических формул и мыслей, да при этом не испугаться его подводных обитателей), то собрать маленький и спокойный аквариум симпатичных жителей математических морей уже под силу. За прозрачным отшлифованным стеклом мир математики будет не столь пугающим даже для начинающего, но столь же блистательным для каждого, кто умеет видеть красоту. А она, красота, и есть содержание математики.

Итак, читатель, ты приглашаешься на безобидную, но, хочется верить, небесполезную прогулку по уголкам математического аквариума.

Несколько слов о том, как написана книга. Главная цель ее — показать, как именно рождаются решения задач. Как из грубых, запутанных рассуждений и поисков получаются коротенькие, чистые решения, единственный недостаток которых — непонятно, как их можно придумать сразу. К сожалению, именно такие «очищенные» решения и приводятся в большинстве учебников, поэтому в данной книге их почти не будет. Зато к большинству разобранных задач будет приложен несколько необычный текст, называемый «поиском решения». Именно этот текст и определил особенности (а значит, как недостатки, так и достоинства) изложения материала.

Теперь — для кого написана книга .Основной читатель — это школьник старших классов, будущий абитуриент и, возможно, уже участник математических олимпиад. Кроме того, книга предназначена учителям математики и просто тем, кто влюблен в нее. В соответствии с этим в книге выделено три уровня изложения, которые легко определить по задачам, приведенным в первой вступительной главе. Главный читатель — это тот, кому понятна первая задача. Что-то разобравшие во второй задаче и готовые взяться за третью, словом, читатели, почувствовавшие вкус к олимпиадным задачам, определяют второй уровень. Третий уровень составляют читатели, для которых понятен набросок решения четвертой задачи. Такой уровень нужен только в отдельных местах книги, которые к тому же можно безболезненно пропустить. В любом случае основные усилия были приложены к тому, чтобы читать было интересно даже в тех местах, где уровень изложения не соответствует уровню подготовки читателя.

Многие главы, особенно первые, содержат полезный материал для абитуриентской практики. По ходу текста для самостоятельного решения предлагаются задачи (разного уровня), но задачи главы «Тренажер» имеют прежде всего олимпиадную направленность.

Обязательно ли решать задачи? Это зависит от того, что Вы хотите получить от книги. Если Вы настроились полистать ее, чтобы полюбоваться картинками и насладиться отдельными местами текста (а такой способ чтения нисколько не предосудителен, так как особенно приятен), то вполне достаточно знакомства с формулировками — может быть, они вызовут у Вас улыбку необычностью постановки задачи. Если Ваш интерес методологический, то есть «устройство аквариума и выбор рыбок» Вас волнует больше, чем их «жизнь», то и тут вряд ли у Вас появится желание решать что-то, хотя не исключено, что какая-то из задач Вас привлечет особенно сильно. Ну а если Вы решили использовать книгу как отправную точку путешествия в математический океан? Что ж, тогда задачи лучше решать, но не все и не сразу. Попробовать «на вкус» можно много, но лучше поначалу выбрать те, которые кажутся особенно привлекательными или совсем простыми, и на них потратить побольше времени. Самая большая польза будет от решения тех задач, которые в книге разобраны. Если каждое решение читать только после того, как попытаешься его сам найти, то эффект будет максимальным. Правда, следовать этому совету намного труднее, чем давать его...

Надо отметить, что книга рассчитана скорее на многоразовое пользование, чем на одноразовое прочтение. В определенной мере она может служить справочником-коллекцией различных математических методов решения задач. Поэтому некоторые места специально написаны в полурекламном стиле: чтобы идея или метод пробились в подсознание и через некоторое время Вам мучительно вспоминалось: что-то я по этому поводу где-то читал. И, может быть, тогда Вам захочется перелистать страницы еще раз. Во всяком случае сделать это будет нетрудно, так как зависимость одной главы от другой — минимальная.

Ну а теперь — к делу!

1

На газете до Венеры

Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда.

А. П. Чехов. Письмо к ученому соседу

...Поскольку подошло время футбольного матча, Вы оторвались от газеты и сложили ее пополам. Немного поразмыслив, Вы решили, что не помешает взять газету с собой, и, сложив ее еще несколько раз, затиснули в карман. И тут родилась

Задача. А какова будет толщина газеты, если ее сложить 50 раз?

Конечно, в какой-то момент газету уже и не согнешь, но, в крайнем случае, ее можно и разрезать. Итак, читатель, оцени на глаз, какова же будет толщина: 10 см? 1 м? 100 м? 1986 км? Может, больше? Может, до Венеры хватит?

Решение. Как ни странно, понадобится только арифметика, да еще немного веры в правильность вычислений. Итак, если сложить газету один раз, то она станет толще вдвое, если два раза — то в четыре, то есть 2^2, три раза дадут два в третьей степени..., десять — два в десятой, пятьдесят — два в пятидесятой (2^{50}). Чтобы упростить счет, заметим, что 2^{10} — это 1024, то есть приблизительно 10^3. Значит, толщина газеты увеличится не меньше чем в 10^{15} раз, ибо $2^{50}=(2^{10})^5$ больше, чем $(10^3)^5=10^{15}$. Если считать, что толщина газеты равняется 0,1 мм, то общая толщина оказывается равной 10^{14} мм, или 10^{11} м, или 10^8 км — итого сто миллионов километров — только ненамного меньше, чем расстояние до Солнца, но до Венеры (в противостоянии) наверняка хватит.

Задача эта достаточно проста и общеизвестна, чтобы на ее примере попробовать проанализировать, в чем состоят сильные и слабые стороны математического рассуждения. В чем сильные стороны — в общем-то понятно: недоступная с первого взгляда постановка задачи оказалась сведенной к совершенно стандартным и заурядным вычислениям. Хитрость-то, однако, заключается в том, что математика здесь выступает в двух обличьях: как элементарная математика (то есть тот самый набор стандартных вычислений) и как искусство сводить более сложиую задачу к более простой. Именно это искусство и составляет основную сложность и содержание математического рассуждения, и именно ему труднее всего научить. К сожалению, довольно-таки большой груз элементарных навыков и сведений, необходимых для свободного владения основным искусством, производит на учащихся столь тяжкое впечатление, что математика так и остается для них набором запутанных формул и непонятных рассуждений. В то же время математик-профессионал, как правило, формул не помнит, а рассуждения придумывает сам, запоминая только идеи. Надо ли говорить, что это намиого экономичнее и полезнее! Автор считал бы основную цель, поставленную перед собой при написании этой книги, достигнутой, если бы ему удалось привить читателю вкус к искусству решать задачи «методом идей».

Поговорим немного и о слабостях. Пожалуй, одним из наиболее уязвимых мест математического подхода является то, что процесс абстракции, присущий математическому подходу, зачастую может увести за пределы реального мира даже в тех случаях, когда решаются вполне реальные задачи. Приведенная задача как раз служит показательным образцом такого рассуждения. Ведь ни один здравомыслящий человек ие согласится, что это (совершенно строгое с математической точки зреиия) вычисление приводит к достоверным результатам. Хотя указать ошибку вроде тоже трудно. Более того, для этой же задачи, но с десятью складываниями результат не вызовет никаких сомиений. Так с какого же момента пропадает вера в правдоподобность результата? Вместо ответа другой вопрос: а какова будет площадь сложенной газеты?

Как и каждая слабость, эта слабость доставляет удовольствие. Удовольствию пренебречь здравым смыслом и проследить, куда могут завести строгие и чопорные математические методы, мы и посвятим эту короткую главу, разобрав несколько задач, ответ в которых неприемлем с точки зрения нормальиого человека (это не значит, что математики ненормальные!). Если отдельные места покажутся читателю сложными, он может читать их как художественный текст, поскольку эта глава только вступительная, а большинство последующих написано о вещах более знакомых и так, чтобы их понимание требовало не столько знаний, сколько желания понять.

Задача о кирпичной лестнице. Когда барону Мюнхгаузену надоело летать на ядре, он изобрел новый способ узнавать, что делается во вражеской крепости. Для этого Мюнхгаузен решил построить кирпичную лестницу, кладя один кирпич на другой ступеньками, как на рис. 1, благо кирпичей было сколько угодно. К несчастью, цемента в его распоряжении не оказалось, так что кирпичи могли держаться только за счет силы тяжести. Барону предложили построить что-нибудь понадежнее, но он заявил, что и без цемента сможет построить лестницу, вполне достаточную, чтобы преодолеть «несколько жалких миль». Сильно ли заврался барон Мюнхгаузен? Другими словами, насколько вправо может быть сдвинута кирпичная лестница, если считать, что каждый кирпич имеет по 30 см в длину? (Подчеркнем, обсуждается только математический вопрос, именно способ, когда каждый кирпич, опираясь лишь на один, сдвинут немного вправо относительно него. Что же касается архитектурных подходов к этой задаче — как именно построить надежную лестницу, то автору довелось услышать множество красивейших проектов, самый простой из которых — засыпать ров перед крепостью, а если понадобится, и саму крепость, пользуясь тем, что кирпичей неограниченное количество.)

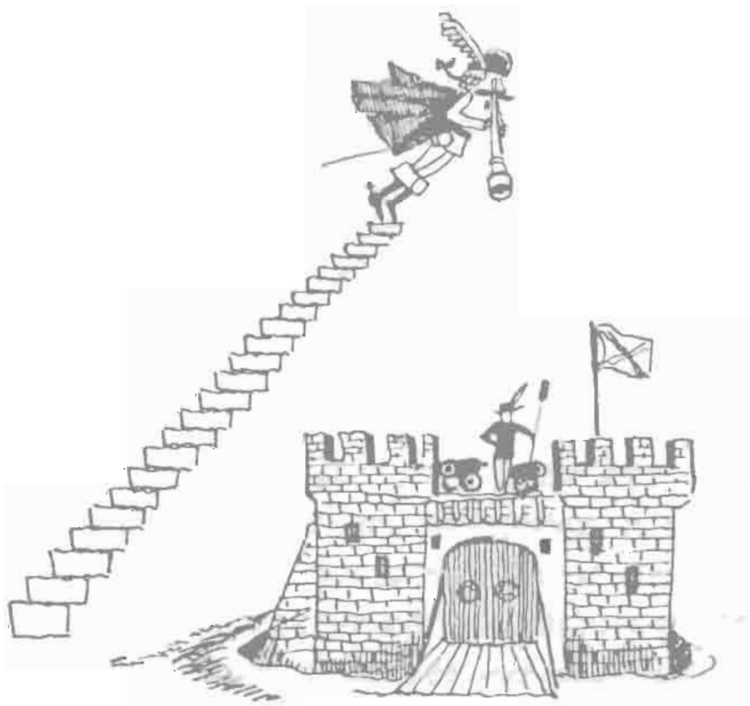


Рис. 1. Кирпичная лестница разведчика Мюнхгаузена

Прежде чем читать решение, попытайтесь самостоятельно сделать набросок вычислений или начните строить лестницу из косточек домино.

Решение. То, что с практической точки зрения проект барона Мюнхгаузена, как всегда, безнадежен — сомнений не вызывает. Гораздо труднее поверить в то, что чисто теоретически барон совершенно прав: как бы далеко ни была расположена крепость, все равно до нее на такой лестнице можно добраться (при достаточно большом количестве кирпичей) и оказаться в точности над ней. Чтобы убедиться в этом, проанализируем, насколько вправо можно отодвигать кирпичи. Если кирпичей под рукой нет, возьмем домино или, на худой конец, просто стопку книг. Главное условие — это условие равновесия. Постараемся понять, в чем оно состоит. Из школьного учебника мы смутно помним о том, что для равновесия нужно, чтобы центр тяжести находился под ногами, точнее — проектировался на подошвы ног. Но это для человека. Значит, для лестницы необходимо, чтобы ее центр тяжести проектировался на самый нижний кирпич. Попробуем на практике. С двумя кирпичами оптимальный результат достигается довольно-таки быстро: достаточно один из кирпичей сместить относительно другого ровно на половину. Хорошо! Попробуем сверху положить еще один и тоже сместить его на половину в ту же сторону. Рушится. Странно. А если меньше сместить? Тоже рушится. А если совсем чуть-чуть? Опять падает. Почему? Ну конечно же, центр тяжести системы из двух кирпичей находится совсем не там, где у одного! А где, кстати? Несложный подсчет показывает, что центр тяжести системы из двух кирпичей, один из которых смещен наполовину, смещен ровно на четверть относительно нижнего кирпича. Что же делать? Получается где-то так: только ты уравновесишь кирпичи, как следующий кирпич грозит разрушить всю конструкцию. (В этот момент задачу уже не очень хочется решать.) Попробуем все-таки установить три кирпича. Итак, первый — внизу, второй — смещен на четверть вправо, третий — вправо еще на полкирпича. Итого сдвинулись вправо на 7,5 плюс 15, то есть на 22,5 см. Это уже что-то! Самое интересное, что верхние два кирпича стоят, как и раньше, — смещенные на половину. И тут — идея: а что, если следующий, четвертый, кирпич класть не сверху, а подкладывать снизу! Куда? Вычисление несложное (проведите его самостоятельно) и показывает, что у нас появилась возможность сдвинуться на одну шестую. Следующий кирпич мы опять будем подкладывать снизу и сдвинемся уже иа одну восьмую и так далее по четным числам (подсчет мы опускаем по причине известности задачи, а на картннку стоит посмотреть — рис. 2).

Единственный вопрос, который осталось решить, уже не имеет никакого отношения к кирпичам — насколько большой может быть сумма чисел, обратных четным? «Умножив» вопрос иа два, получим равносильный: насколько большой может быть сумма $1+1/2+1/3+$ $+1/4+...+1/k$ при неограничениом возрастании k? Эта сумма настолько знаменита, что имеет свое собственное имя — «гармонический ряд» (при неограничеином числе членов бесконечные суммы переименовываются в ряды). Пожалуй, нет смысла повторять миогократно написанное доказательство того, что этот ряд расходится, или, другими словами, что указанная сумма может быть сделана неограниченно большой. Доказательство можно найти в любом учебнике по высшей математике в главе «Ряды». Суть же доказательства читатель поймет на кирпичах. Если не стремиться к самому крайнему положению, то достичь крепости можно и таким способом: самый верхний кирпич сдвинут на 1/2, следующий — на 1/4, два следующих — на 1/8, четыре последующих — на 1/16 и так далее по степеням двойки. Читатель должен сам убедиться в том, что при этом способе мы сдвигаем кирпичи не так сильно (и, значит, тем более остаемся в равновесии), а то, что сдвиг будет сколь угодно большой, можно проверить несложным расчетом: сдвинув на 1/4, получим 7,5 см. Два сдвига на 1/8 дают еще 7,5 см, четыре сдвига на 1/16 — еще 7,5 см. Вот так, по 7,5 см мы н наберем сколько иам надо. Стало быть, и до крепости доберемся.

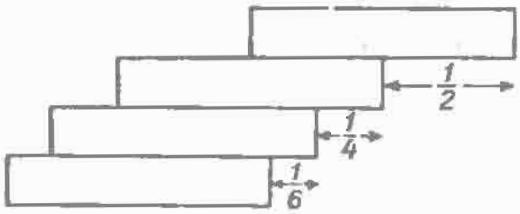


Рис. 2. Шаткое равновесие

Вопрос для искушенных в математических тонкостях: а с какой высоты придется смотреть на крепость барону Мюнхгаузену при самом оптимальном варианте? Может, лестница до Венеры достанет?

Следующая симпатичная задача заимствована из книги М. Гарднера о математических парадоксах «А ну-ка догадайся!».

Задача. Представим себе резиновый шнур длиной 1 км. По нему не торопясь, со скоростью 1 см/с, ползет червяк. Ясно, что не скоро, но до конца он доползет. Для того чтобы жизнь не казалась ему раем, каждую секунду шнур дополнительно растягивают на 1 км. Спрашивается, доползет ли он в таких усложненных условиях?

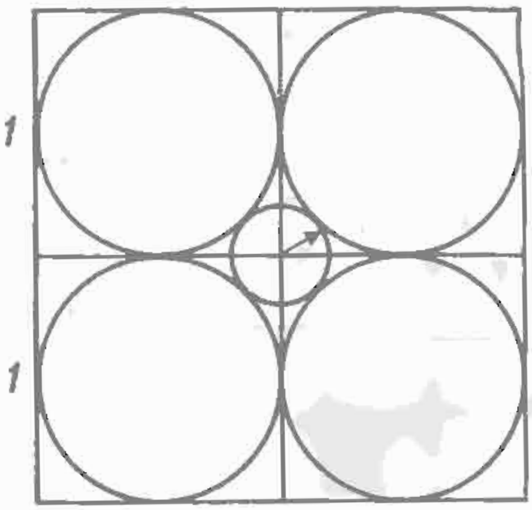


Рис. 3. К чему стремится радиус r_k внутренней сферы?

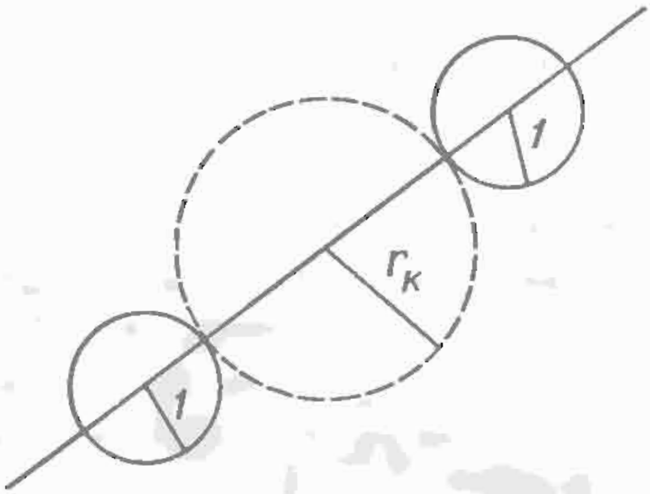


Рис. 4. А вот как все выглядит на диагонали

Не желая лишать читателя удовольствия самостоятельно найти решение и отсылая его за ним к книге М. Гарднера, все же заметим, что при растяжении шнура червяк тоже немного переносится, а тогда идея гармонического ряда снова может оказаться небесполезной.

Последняя *задача* — для проверки интуиции тех, кто уверенно овладел многомерными пространствами. Итак, представим себе k-мерный куб с длиной ребра, равной 2. Этот куб разбит естественным образом на 2^k маленьких кубиков со стороной, равной 1 (автор представлять себе k-мерные кубы не умеет, поэтому предпочитает изображать картинку (см. рис. 3) на двумерном, то есть на квадрате). В каждый из этих кубиков вписана сфера (естественно, k-мерная сфера единичного радиуса).

Существуют две сферы, которые касаются всех этих сфер: одна, большая, касается внутренним образом, другая, меньшая,— внешним. Пусть r_k — радиус меньшей и $r = \lim_{k\to\infty} r_k$. Избавим читателя от необходимости вычислять этот предел, а сразу сообщим ему, что он перечислен в следующем ряду: —1, 0, 1/2, 1, 10, бесконечность. Вопрос на интуицию читателя: чему же он все-таки равен? Рекомендуется расставить ответы в порядке правдоподобности, начиная с наименее правдоподобного. Считать запрещается.

Решение. Интуиция подводит очень многих. Правильный ответ — бесконечность. Убедиться в этом нетрудно, если рассмотреть диагональ куба. Ее длина $2\sqrt{k}$ стремится к бесконечности. На ней располагаются три окружности: две радиусом 1 и одна радиусом r_k, касающаяся двух предыдущих (рис. 4). А тогда нетрудно понять, чему равен радиус r_k и почему он стремится к бесконечности. Интуиция же не срабатывает потому, что трудно себе представить, как сфера, казалось бы, находящаяся внутри, может выйти за пределы куба.

2

Искусство обозначать, или принцип «бяки»

Придайте глубины печать
Тому, чего нельзя понять.
Красивые обозначенья
Вас выведут из затрудненья.

Гете. Фауст

Цель настоящей главы — показать ту огромную роль, которую играет в математике, казалось бы, бессмысленное искусство правильно выбирать обозначения. В известной мере это — даже основное умение, которым должен владеть математик.

Для начала убедимся, что не все равно даже то, как обозначать числа. Вспомним о римской нумерации. На первый взгляд нет большой разницы между обозначениями XX и 20. Однако попробуйте, например, умножить XX и IX, не переходя к обычным обозначениям! Тут-то и выясняется, что каждое обозначение имеет свои достоинства и недостатки, а потребность в каком-либо обозначении определяет степень удобства работы с ним. Так, может быть, все дело в том, что есть плохие и хорошие обозначения, и, значит, надо пользоваться хорошими и не пользоваться плохими? Нет, и здесь все не так просто. Например, не так уж трудно убедиться, что десятичная система тоже не идеальна, например, с точки зрения ЭВМ. Действительно, чтобы работать с десятью цифрами, их надо хотя бы различать, а как это реализовать так, чтобы надежность была высока? Гораздо проще было бы, если бы цифр было только две: 0 и 1. Тогда имеется и надежная интерпретация: есть ток или нет тока. Весьма удобна также таблица умножения: $0\times0=0$, $0\times1=0$, $1\times1=1$. И никаких проблем! Читатель может доставить себе удовольствие, придумав самостоятельно, какими техническими средствами эту таблицу можно реализовать. Как ни странно, трудности возникают при сложении, точнее, только в одном месте: сколько будет $1+1$? От цифры 2 мы ведь уже отказались. Что же делать? А что, если положить $1+1=10$? (другими словами, *обозначить* двойку комбинацией 10). Сколько же будет тогда дважды два? В нашем привычном мире это — четыре, а $10 \times 10 = 100$. Кроме того, такое умножение соответствует введенному закону умножения. Нам просто не остается никакого другого выхода, как *обозначить* число четыре через 100. Дальше уже проще. Дважды четыре — восемь, значит, так как $10 \times 100 = 1000$, то 1000 есть обозначение для числа восемь. Точно так же 10000 — обозначение для 16 и так далее по степеням двойки. Ну а как же теперь обозначать, скажем, пятерку? Да очень просто. Раз $5 = 4 + 1$, то пятерка представляется комбинацией цифр $101 = 100 + 1$. Точно так же тройку придется обозначать 11. Ну и так далее. Все? Если бы! Пока это только интуитивный набросок хорошей идеи. А чтобы реализовать ее строго, надо четко решить следующие вопросы.

Определение. Требуется дать однозначное определение каждого числа, желательно единообразное по форме (пока это сделано только для степеней двоек).

Корректность. Требуется доказать, что данное обозначение согласуется с введенными операциями умножения и сложения, например, что $5 = 2 + 3$. Ведь последнее равенство мы тоже вполне могли бы взять за основу обозначения для числа 5, но где гарантия, что получилось бы то же самое? (Вопросы корректности, обычно редко принимаемые во внимание, на самом деле, одни из самых тонких.)

На самом деле большинство читателей уже давно поняли, что речь идет о хорошо известной двоичной системе счисления. Поэтому не стоит делать вид, будто бы мы совершили какое-то открытие и что все указанные вопросы — проблемы. Для читателей, сталкивающихся с этим впервые, напомним, как легко и естественно вводится двоичная система счисления. Если ABC — десятичная запись какого-то числа k, то $k = 100A + 10B + C$, что в общем-то понятно, ибо A — число сотен, B — десятков, C — единиц. В двоичной же записи $k = 4A + 2B + C$, причем A, B, C — цифры, не больше единицы. (Здесь 4 и 2 записаны в десятичной системе. Если и их записать в двоичной, то получится $100A + 10B + C$.)

Все это известно, но, чтобы заронить у читателя капельку сомнения, поставим следующий вопрос: а что получилось бы, если бы мы положили в качестве обозначения для двойки сочетание 11? А если 110, 1000? Тут вопросы определения и корректности — огромный простор для деятельности читателя. Маленькая подсказка: правило перенесения единицы в следующий разряд в общем-то ни на чем не основано. Почему, в самом деле, мы обязаны ее прибавлять? Тогда комбинация 110 приведет к системе счисления с основанием (—2) и с совершенно нестандартными законами сложения и умножения многозначных чисел (а понять суть законов деления — это целое исследование).

Вернемся, однако, к анализу удобства обозначений. Так ли уж хороша двоичная система? Все-таки не слишком: уж больно длинными бывают обозначения совсем коротких чисел (сколько цифр, например, в двоичной записи числа 9999?). Поэтому человек тоже не испытывает особого удовольствия при общении с машиной на ее двоичном языке. Оказывается, наиболее приемлемой для обоих является система счисления, в основу которой положена степень двойки, скажем, 8 или 16. С одной стороны, запись довольно компактна для человека, с другой — переход в двоичную систему происходит мгновенно — надо только переписать каждую цифру. Например, 55 в восьмеричной системе счисления переводится как 101101. В десятичной системе нет даже намека на такое удобство. Там 55 переводится как 110111. Остается только сожалеть, что у нас на руках десять пальцев, а не восемь (кроме удобства общения с машиной нам это облегчило бы труд по запоминанию таблицы умножения).

Вот еще один интересный пример, подсказанный ЭВМ. Как записывать отрицательные числа? Мы это делаем просто — с помощью знака, и нам кажется, что это удобно. А как это делает ЭВМ? Ответ оказывается нетривиальным. Прежде всего отметим, что в любой ЭВМ отведено строго определенное количество разрядов, скажем k, для каждого числа. В каждом из разрядов хранится цифра 0 или 1. Один, самый старший, разряд отведен под знаки. Казалось бы, чего же более: 0 — это плюс, 1 — минус, и все в порядке. Однако в машине так просто решается вопрос только с положительными числами: последние разряды заняты значащими цифрами, а первые, включая знаковый, занимают незначащие нули. Если же число отрицательное, то вместо него записывается двоичное представление числа, равного разности 2^k и исходного числа. Как следствие, в знаковом разряде оказывается единица. (Надо помнить, что при этом запрещается использовать для работы на ЭВМ числа бо́льшие, чем $2^{k-1}-1$.) Для ясности приведем пример. Допустим, что в машине под каждое число отводится четыре разряда (хилая машина!). Тогда число +5 будет в ней храниться как 0101, а —3 — как 1101.

Зачем нужны такие хитрости? А вот зачем. При таком способе хранения отрицательные числа ничем не отличаются от положительных с точки зрения операций сложения. Попробуйте и убедитесь, что обычные правила сложения автоматически следят за знаками и дают верные результаты. Следует только помнить, что при переполнении, когда мы обязаны выйти за границу k-го разряда, эта необходимость попросту игнорируется: если некуда записывать, то и не будем! А представьте себе, как неприятно было бы в противном случае: каждый раз надо было прежде всего смотреть, какие знаки у складываемых чисел, и в зависимости от этого выбирать законы сложения. Люди-то к такому привыкли, но это не самое большое неудобство, к которому они привыкли.

Этим запас обозначений для чисел, однако, далеко не исчерпан. Вот еще несколько примеров.

Задача. Доказать, что любое натуральное число k однозначно представимо в виде $A\times 1!+B\times 2!+C\times 3!+\ldots$, где A не превосходит единицы, B — двух, C — трех и так далее. Напомним, что в таком контексте восклицательный знак называется факториалом и $k!$ обозначает произведение всех чисел от 1 до k включительно. Например, $4!=1\times 2\times 3\times 4=24$, $21=3\cdot 3!+1\cdot 2!+1\cdot 1!$

Система счисления, вводимая этой задачей, называется факториальной и, как ни удивительно, очень удобна для решения на ЭВМ важной задачи определения простых делителей заданного натурального числа, да и вообще полезна, в частности, для всяких олимпиадных задач. Следующая задача должна вызвать законное негодование просвещенного читателя.

Задача. Доказать, что любое натуральное число однозначно раскладывается в произведение своих простых делителей.

Позвольте, но это же известно еще из школы! Правильно, известно, но все-таки вряд ли Вы, уважаемый читатель, знакомы с соответствующим доказательством. Попробуйте показать это самостоятельно, не пользуясь ничем, кроме определения простого числа как числа, имеющего ровно два натуральных делителя — себя и единицу. А вот такой факт, что если произведение двух чисел делится на 5, то и один из сомножителей делится на 5, на веру не принимайте — его тоже надо доказывать. Да не забудьте проверить оба утверждения: во-первых, что разложение действительно существует, а во-вторых, что оно единственно! Заметим, что если бы оба факта были так тривиальны, как это кажется, то знаменитая проблема Ферма была бы решена еще во времена Куммера (хотя какая тут взаимосвязь — разговор особый и не для этой книги). Читатель, заинтригованный именами Ферма и Куммера, может обратиться, например, к книге М. М. Постникова «Теорема Ферма».

Теперь в нашем распоряжении еще один способ обозначать числа — как последовательности A, B, C, ... , где A — количество двоек, B — троек, C — пятерок, в разложении данного числа k в произведение простых. Например, числу 84 соответствует последовательность 2, 1, 0, 1, ... (остальные нули), а последовательностью 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ... зашифровано число 210. Для закрепления — две простые *задачи*: во-первых, показать, что в любой такой последовательности — только конечное число элементов, не равных нулю, во-вторых, зашифровать k-ю степень тысячи.

Есть ли, однако, какой-то смысл в обозначении одного числа целой последовательностью чисел? Есть! Это обозначение чрезвычайно удобно для мультипликативных задач, то есть для таких, в которых речь идет только об операциях, связанных с умножением и делением. Ведь произведению двух чисел соответствует почленное сложение последовательностей — очень удобно. (А как на этот язык переводится деление, нахождение общего кратного, общего делителя?) Но немультипликативные задачи не всегда есть смысл решать, основываясь на таком обозначении. Даже простейший вопрос, какой из двух данных последовательностей отвечает бо́льшее число, очень нетривиален. Например, какое число больше — зашифрованное сотней единиц подряд, идущих от начала, или одной единицей, стоящей на тысячном месте? Все сказанное еще раз подтверждает: *каждое обозначение хорошо на своем месте и для каждой задачи имеет смысл прежде всего продумать, а в каких обозначениях ее лучше всего решать?*

Чтобы сказанное не осталось пустыми словами, постараемся отрепетировать один прием искусства обозначения, особенно ценный для абитуриента. Самое главное — это вовремя ввести обозначения. А чтобы знать, когда это «вовремя» наступило, каждый абитуриент должен усвоить *принцип бяки:*

УВИДЕЛ БЯКУ — ОБОЗНАЧЬ!

Как понимать столь сомнительно сформулированный «рецепт»? Прежде всего, так: если задача выглядит столь отпугивающе, что даже не хочется за нее браться, хотя Вы точно знаете, что решение (причем несложное) у нее есть (типичная ситуация для абитуриента), то это скорее всего означает, что в задаче Вас напугала какая-то бяка. Ее и надо обозначить.

Пример. Решить уравнение

$$2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3.$$

Можно было бы, конечно, выбрать пример и пострашнее, но усваивать идеи лучше на простых. Итак, предположим, что нас напугала эта задача. Ищем бяку. Вот она — синус, да еще в квадрате. Значит, сразу ее и обозначаем через y. Следующий (и очень важный) вопрос — что еще через эту бяку можно выразить? Такой целенаправленный вопрос позволяет довольно скоро припомнить основное тригонометрическое тождество и выразить квадрат косинуса через $1-y$. В результате уравнение приобретает вид

$$2^y+2^{1-y}=3.$$

Стала ли задача легче (хотя бы на вид)? Без сомнения! Это хороший признак правильно выбранного обозначения. Что делать дальше? Опять ищем бяку. На сей раз верный кандидат на нее — 2^y. Обозначив бяку через z, попробуем выразить через нее оставшиеся. Опять же нацеленность на бяку поможет нам скорее вспомнить свойства показательной функции и прийти к уравнению

$$z+\frac{2}{z}=3.$$

А это уже почти квадратное уравнение, которое рекомендуется дорешать самому, не забыв затем найти по z неизвестное y, а по y — искомое x.

Внимание, читатель! Если ты ничего не понял в приведенном решении, то прежде всего попытайся найти его сам, пользуясь всем, что понять все-таки удалось. Если и после этого ничего не понятно, то тебе необходим основательный ликбез с помощью обычного школьного учебника, по крайней мере, в том случае, когда впереди — вступительные экзамены. Впрочем, это не означает, что дальнейшее чтение бесполезно.

Вернемся к самому примеру. Можно ли было обозначить только синус? Конечно, ведь после этого задача все равно стала бы проще (к этому мы и стремимся — ведь все мы умеем решать только простые задачи, а учимся искусству сводить к ним сложные). А можно ли было обозначить самую большую бяку — $2^{\sin^2 x}$? Это еще лучше, но только важно не увлекаться и подбирать обозначения так, чтобы через них все можно было выразить, а умение сразу увидеть, как выразить через одну достаточно большую бяку все остальные, приходит только после достаточно продолжительной тренировки.

Теперь о другой причине целесообразности использования принципа бяки. Она скорее из области психологии. Наш мозг устроен так, что мы не способны сразу решать многоидейные, многоходовые задачи. Обычно мы, глядя на то, что имеем, ищем первую идею. Зафиксировав ее в уме (а предпочтительнее — на бумаге), мы уже способны увидеть следующую идею и т. д. Между прочим, стоит отметить, что в процессе поиска идей полезно «раскручивать» задачу не только с начала, но и с конца (типичная постановка вопроса: а чего хватило бы, чтобы решить задачу?).

Так вот, независимо от того, с начала или с конца мы беремся за задачу, очень важно увидеть первый, а еще лучше — основной шаг. Но что значит увидеть? Это означает увидеть что-то знакомое. А раз так, то первоочередная задача — привести все в более или менее привычную форму. Именно для этой цели и используются всевозможные обозначения. Кроме того, они позволяют сократить и упростить заданную информацию.

Теперь несколько практических рекомендаций по использованию принципа бяки. *Первая рекомендация:* прежде чем решать задачу, посмотрите, что в ней можно обозначить. *Вторая:* чем бо́льшую бяку Вы сумеете обозначить, тем легче придется дальше. Единственное ограничение — после введенного нового обозначения старая переменная по возможности должна исчезнуть (если Вы ввели новый y, то, будьте добры, постарайтесь, чтобы все оказалось выраженным через y). *Третья:* очень полезно вместе с обозначением описывать также его свойства. Например, если Вы обозначили $\sin x$ через y, то полезно тут же выписать, что y заключен между 1 и (-1). Впоследствии Вам это может помочь отбросить лишние корни или, наоборот, подсказать единственное решение.

Пример. Решить уравнение

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\sin y=0.$$

Грубое решение. На этом этапе мы будем искать только идею, позволив себе рассуждать нестрого. Сразу видны две независимые бяки $\sin x$ и $\sin y$, которые мы тут же обозначим буквами a и b соответственно, отметив на всякий случай, что они заключены между 1 и (-1). Теперь уравнение примет вид

$$|a-b|+ab=0.$$

Так как модуль неотрицателен, то, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы ab было отрицательным, то есть a и b должны иметь разные знаки. После этого мы можем считать, что от модуля мы взяли все возможное, и попробовать его проигнорировать, то есть рассмотреть уравнение $a-b+ab=0$. Из него получаем $a=b/(1+b)$. Так как b не меньше (-1), то отсюда сразу видно, что a и b должны иметь одинаковый знак, то есть решений нет.

«Чистка» решения. Во-первых, надо исправить все нестрогости. Прежде всего припомнить, что кроме отрицательных и положительных чисел бывают также и нули. Тогда кое-какие решения все-таки появятся (какие?). Во-вторых, честно проделать работу с модулем, рассмотрев, как и полагается, два случая: когда $a-b$ больше нуля и когда не больше. При этом оказывается, что они очень похожи, так что сразу приходит мысль свести второй случай к первому. Так, например, если поменять одновременно знак у a и b, то второй случай сведется к первому, то есть достаточно рассматривать только один случай. Наконец, можно проанализировать, так ли уж существенно были использованы ограничения на величину a и b. И, самое главное, найти новое и более короткое решение. Результатом подобной чистки может быть какое-нибудь такое

Решение. Если $\sin x=0$, то автоматически $\sin y=0$, откуда легко найти x и y. Аналогично при $\sin y=0$. Поэтому можем считать, что оба выражения ненулевые. Докажем, что в этом случае решений нет. Действительно, заметим прежде всего, что $\sin x$ и $\sin y$ должны иметь разный знак, так как модуль неотрицателен. Далее, поменяв, если надо, у x и y знаки, мы можем опустить знак модуля и переписать уравнение так:

$$(1-\sin x)(1+\sin y)=1.$$

Теперь видно, что оба сомножителя слева одновременно либо больше единицы, либо меньше. И то и другое ведет к противоречию.

Контрольный вопрос к читателю: была ли использована специфика синусов и можно ли таким же способом решать неравенство? Кстати, с неравенством эта задача была предложена десятиклассникам на Всесоюзной олимпиаде 1985 года.

К сожалению, в большинстве учебников можно найти только рафинированные решения, которые настолько отличаются от первоначальных, что удрученному читателю остается только удивляться: и как это люди придумывают такое, а затем прийти к грустному выводу, что эта наука не по его способностям. Ничего удивительного, ведь в таких решениях не только спрятан ход мысли, приведший к основной идее, но и саму идею-то не разыщешь. В частности, автор надеется, что приведенное «очищенное» решение представляет собой как раз подобный образец математического садизма (проведите эксперимент на Ваших друзьях: кто из них поймет это решение, не читая предшествующего текста?). На самом деле, никто не умеет сразу придумывать сложные решения. К ним приходят постепенно и простыми неторопливыми шагами, часто очень грубыми и неловкими, а иногда вообще ошибочными. В этой книге мы постараемся решать задачи именно так: грубо, неловко, но чтобы к основной идее приходить ясно и четко. А «чистку» решения мы иногда и вообще не будем проводить, оставляя ее в качестве упражнения. Приведем еще один пример и еще один рецепт.

Вначале — рецепт: *если бяк много, на старшую надо разделить.* Идея этого — в уменьшении количества бяк. Обычно она безотказно срабатывает в задачах типа

$$9^x+4^x=2(6^x),$$

где после деления на старшую бяку можно ввести одну новую — $(2/3)^x$ и получить квадратное уравнение. Теперь — пример.

Задача. Решить уравнение

$$3^x+4^x=5^x.$$

Поиск решения. В таком примере и рука-то не поднимается что-то обозначить: слишком много бяк. Стоп-стоп! Был какой-то совет по этому поводу: если бяк много, то на старшую надо разделить. Почему бы не попробовать? Тогда получится

$$(3/5)^x+(4/5)^x=1.$$

Стала ли задача легче? Трудно сказать. Может быть, но куда идти дальше, все равно не видно. Что еще можно сделать? Искать хоть что-то знакомое. Знакома только комбинация цифр 3, 4, 5. Это вроде бы как-то связано с египтянами. Ба, так это же египетский треугольник: если стороны треугольника равны 3, 4, 5, то он прямоугольный (почему?). А зачем он нам? Да вроде бы ни к чему, хотя... Ну да, конечно, по крайней мере, одно решение этой задачи он дает: $x=2$. Ну что ж, и на том спасибо. Интересно, а еще какие-то решения есть? А вдруг нет, тогда можно было бы попробовать это доказать и этого было бы достаточно. Но как доказывать подобные вещи? И вообще, почему в голову пришла мысль, что решений больше нет? Во всяком случае, понятно, почему нет больших решений: правая часть исходного уравнения, конечно же, растет быстрее — больно уж солидная фигура пять в степени x. Хотя... А как бы это строго доказать? Сыграть на монотонности? А как? И левая, и правая части монотонно растут, и еще неизвестно, какая быстрее.

В этот момент наш взгляд должен упасть на уравнение с поделенной старшей бякой — и, ура, тут уже с монотонностью проблем нет. Правая часть — единица, то есть константа, а левая — монотонно убывает (таковы уж свойства показательной функции). Значит, через единицу она пройдет лишь один раз, то есть решение, если оно существует, только одно. А решение есть — это мы уже знаем: $x=2$.

«Чистка» решения предоставляется читателю, вместо нее проведем небольшой анализ того, как мы вышли на решение. Отметим следующие моменты. Во-первых, сам принцип бяки вроде бы и не использовался, но зато помог нам косвенным образом. Во-вторых, обратим внимание на нешаблонный путь доказательства — сначала решение угадывается (любым способом — от метода математической индукции до «метода» математической интуиции), а затем доказывается, что других решений попросту нет. Надо сказать, что в настоящей математической работе в отличие от абитуриентской практики этот метод играет определяющую роль, причем зачастую кроме ответа надо угадать еще и задачу, то есть четко сформулировать вопрос (а это ох как не просто!).

Третье и очень важное обстоятельство — нам очень помогло то, что второе уравнение было уже выписано, хотя с самого начала от него толку не было. Сформулируем это в виде правила:

ЛЮБУЮ ИДЕЮ НАДО ДОВЕСТИ ДО КОНЦА И ЗАПИСАТЬ.

Этот рецепт нужно неукоснительно соблюдать только из-за того, что наше внимание не способно управляться с несколькими объектами: две идущие подряд простые идеи найти труднее, чем одну сложную. Единственный способ сделать это — выписать первую идею. Освободив от нее голову, мы окажемся более способны на поиск второй.

Прежде чем переходить к олимпиадным вариациям на тему обозначений, хотелось бы обратиться к начинающим педагогам и отчаявшимся студентам и школьникам. Речь пойдет только о вещах совершенно элементарных, но зачастую очень трудно понимаемых, поэтому последующий материал будет представлять интерес скорее методический.

Начнем с контрольного вопроса:

$$f(x)=\frac{1+x}{2x+1}.$$

Не читая дальше, ответьте, чему равно $f(-\frac{1}{x})$? Если вы ответили $-\frac{2x+1}{1+x}$, читайте дальнейшее очень внимательно — это очень важно для Вас. Все дело в том, что, как показывает опыт преподавания, одним из самых трудных барьеров в овладении математикой является... неумение подставить в формулу. Да-да-да, именно это, казалось бы, тривиальное умение подставлять в формулы оказывается нетривиальным, и ему надо обучать в первую очередь. На самом деле это — загадка чисто философского плана: переход от общего к частному сложнее перехода от частного к общему, как бы это ни казалось удивительным. Но к делу. Рецепт замены очень прост: *подставить в формулу нечто вместо x значит во всех местах формулы, где встречается x, вместо x на-*

писать это нечто, причем взятое в скобках. Затем надо раскрыть скобки и произвести упрощения.

Например, в нашем случае мы получим

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1+(-1/x)}{2(-1/x)+1}$$

и после упрощения придем к $\frac{x-1}{x-2}$. Вроде бы несложно, но отметим два обстоятельства. Во-первых, если бы мы не писали скобок, ничего хорошего у нас бы не вышло (уберите в приведенном примере скобки — получится ахинея). Во-вторых, чрезвычайно существенно, что мы выписали то, что получилось после замены. Как уже говорилось, важно освободить голову — тот же переход в уме с бóльшей вероятностью привел бы к ошибке. Конечно, понадобится несколько репетиций, чтобы усвоить этот простой, но важный прием, но они, репетиции, вообще нужны — вот о чем часто забывают.

Теперь о другой педагогической трудности. Представьте себе следующий диалог.

Вы. Известно, что x — отрицательное число. Каким будет число $(-x)$?

Школьник. Отрицательным.

Вы (несколько озадаченно). Почему?

Школьник. Потому что минус впереди.

Как, спрашивается, выпутаться из такой ситуации? Конечно, можно прибегнуть к суровому внушению: «Ну сколько раз тебе говорить? Запомни раз и навсегда...» Но результат будет только локальный. Суть-то в том, что школьник... прав. Точнее, прав на своем уровне знаний. А чтобы убедиться в этом, рассмотрим выражение $-(-1-2)$. В этом ничем на вид не примечательном выражении имеются три знака «минус». Удивительно, однако, что все эти три минуса совершенно различные, они просто одинаковые обозначения разных вещей. Минус, который стоит перед единицей, — признак отрицательного числа, минус перед двойкой — операция вычитания, а вот первый минус, перед скобкой, —

это минус, обозначающий совсем другую операцию — операцию изменения знака у числа. С этим минусом удобнее всего знакомиться с помощью калькулятора: на большинстве из них есть два минуса — простой и второй, обозначаемый обычно значком /—/. При нажатии кнопочки с таким значком число на индикаторе меняет знак. Так вот в выражении $-x$ используется как раз такой минус, но школьник этого не знает, а потому интерпретирует минус единственно известным ему способом — как признак отрицательного числа. Достаточно один раз ему это объяснить, и трудностей со знаками больше не будет (совет проверен на практике; диалог, впрочем, тоже имел место в действительности).

Мы подошли здесь к вопросу о культуре обозначений. Важно не только *что* обозначать, но и *как*. Для каждого класса задач есть свои наиболее применяемые обозначения. Например, n — обычное обозначение для натуральных чисел, ε — для сколь угодно малых положительных. Причина такого консерватизма все та же — важно освободить голову от дополнительного обдумывания ситуации, и если обозначения будут стандартными, то гораздо быстрее будут вспоминаться и более надежно применяться стандартные методы и идеи. Но это еще не все. Обозначение должно нести какой-то смысл и помогать пониманию. Вот еще один пример из практики. Автор, пытаясь объяснить, что такое прямая и обратная теоремы, говорил так: «Предположим, что A и B — какие-то утверждения. Прямая теорема: если A, то B. Как будет звучать обратная?» В большинстве случаев ответом служило молчание. И лишь гораздо позже была найдена правильная формулировка. Вот она: «Предположим, что у нас есть какая-то теорема. Например, такая: если тра-та-та, то ту-ру-ру. Это прямая теорема. А как будет звучать обратная?» Отвечали чаще всего хором: «Если ту-ру-ру, то тра-та-та». А в чем разница? Только в осмысленности обозначения. Обозначение A безлико, обозначение тра-та-та уже подразумевает некоторое высказывание, ассоциируется с живой речью.

Наконец, несколько слов об обозначениях в производных. Там принцип бяки — основной, но для того, чтобы его умело применить, надо сначала... переписать всю таблицу производных. Делается это так: берется любая формула и преобразуется — вместо x пишется y, а в конце (и это самое главное) дописывается y'. Например, вместо формулы $(\sin x)'=\cos x$ надо записать $(\sin y)'=$ $=\cos y\cdot y'$. А теперь — очередной рецепт: *если производной данной функции нет в таблице производных, но можно что-то обозначить, то это и делается, и тогда вместо стандартной таблицы используется новая.*

Пример. Допустим, что надо вычислить $(\sin x^2)'$. Немедленно обозначаем $y=x^2$. Тогда имеем $(\sin y)'=\cos y\cdot y'$. После этого подставляем (в скобках!) $\cos(x^2)(x^2)'$. Последний шаг — второе вычисление производной: $\cos(x^2)2x$.

Прием этот очень прост, стандартен и требует только небольшой тренировки. Но, усвоив его, читатель перестанет делать стандартные ошибки типа $(\sin 2x)'=\cos 2x$ (а в чем, кстати, ошибка?) и с помощью нескольких обозначений сможет запросто вычислять и более сложные производные типа $(\cos(\sin(\cos 3e^x)))'$.

Вернемся, однако, к обещанным олимпиадным идеям. Под олимпиадным решением мы будем понимать применение стандартного метода в нестандартной ситуации и, что гораздо более редко, но более ценно,— нестандартные методы.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}+7x+\frac{7}{x^2}\right)=49+7x^2+\frac{7}{x}+x+\frac{2}{x}.$$

Поиск решения. С первого взгляда на этот пример становится не по себе — слишком уж много всего наворочено. Однако давайте всмотримся внимательнее. Ясно, что не приведены все подобные. Особенно подозрительно то, что не приведена к лучшему виду сумма $\frac{7}{x}$ и $\frac{2}{x}$. Это явно намек, но на что? Каков смысл в $\frac{7}{x}$? Еще есть $\frac{7}{x^2}$. И вообще слишком много семерок, 49 — это тоже семь в квадрате. Но какой от них толк? Попытаться вынести? А что делать с $\sqrt{2}$? Может, как-то разложить на множители? А как? Элементарные подступы не срабатывают. Вернемся к $\frac{7}{x}$ и $\frac{2}{x}$. Возможно, в $\frac{2}{x}$ какой-то смысл? Есть еще $\sqrt{2}$. И даже в слишком больших количествах. А все же почему так много семерок? Не может быть, чтобы в этом числе был какой-то глубокий смысл. Но может, смысл в том, что семерок много? Возможно, но как его искать? А что, если... обозначить? Только что? $x+\frac{1}{x}$? Неясно. Обозначать надо бяку. А что здесь бяка? Семерка? А что, если в самом деле? Не зря же она так выделяется. Обозначим на секунду семерку через a. А какой в этом смысл? Однако любую идею, даже самую безумную, надо довести до конца и записать. Тем более, что идея очень смешная — обозначить семерку через a. Получим

$$\sqrt{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}+ax+\frac{a}{x^2}\right)=a^2+ax^2+\frac{a}{x}+x+\frac{2}{x}.$$

Ну, и что хорошего? Ниче... Стоп! Это же... квадратное уравнение относительно a! А что, если его решить? То получатся... два корня (найди их сам, достаточно подготовленный читатель, это тоже нетривиально). А после исходное уравнение разложится на множители:

$$\left(7-\sqrt{2}x+\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{\sqrt{2}}{x^2}+x^2\right)=0,$$

и дальше — уже стандартная работа (для достаточно подготовленного читателя).

Разумеется, это — очень нетривиальный пример, и, чтобы придумать такое решение, надо «съесть не одну собаку» вида

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4,$$

в котором первое, что надо сделать,— это обозначить обычное число $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ буквой, например буквой a. Тогда легче увидеть, что второе число будет записываться как $1/a$ и, значит, мы имеем дело с уравнением вида

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = 4,$$

на которое, по крайней мере, приятнее смотреть. Думаем, читатель и сам сумеет довести пример до конца, а также с удовольствием решит пример, в котором в правой части вместо 4 стоит 2^x.

А в целом можно сформулировать такой рецепт: *обозначать полезно не только неизвестные и сложные выражения, но и вполне конкретные числа.*

Коль скоро мы коснулись темы «Корни», то (хотя и не по теме) сформулируем еще один полезный практический совет: *разность корней просит сумму, и наоборот.* Поясним это на примере.

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$.

Даже плохо владея свойствами пределов, за этот пример можно смело браться.

Решение. Наверху разность корней домножим на сумму (а чтобы было честно — домножим и снизу). Цель — получить в числителе разность квадратов:

$$\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \frac{2+x-(2-x)}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$

Сократить на x и подставить 0 вместо x просто и для неподготовленного читателя.

Очень полезны обозначения в работе с обратными тригонометрическими функциями. «Страшное» заклинание, что арксинус — это функция, обратная синусу, никак не помогает в решении задач. Зато очень часто помогает такой простой совет: *в задачах в которых встретился* $\arcsin x$, *надо сразу ввести обозначение* $y = \arcsin x$ *и работать с системой*

$$\begin{cases} \sin y = x, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для arccos$x$ *система немного другая:*

$$\begin{cases} \cos y = x, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Пример. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. Работаем по рецепту. Вводим два новых обозначения: $y = \arcsin x$; $z = \arccos x$. Тогда имеем две системы:

$$\begin{cases} \sin y = x; \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos z = x, \\ 0 \leqslant z \leqslant \pi. \end{cases}$$

Зная только это, нужно доказать, что

$$y + z = \frac{\pi}{2}.$$

В такой форме работа уже намного привычнее и глазу приятнее. Сразу запишем равенство $y = \dfrac{\pi}{2} - z$, к которому просится приписаться синус:

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

или, по формулам приведения, $\sin y = \cos z$, то есть $x = x$. Все? Ну нет. Когда требуется что-то доказать, используют три пути: первый — исходя из чего-то заведомо верного, выводить то, что нам нужно. Обычно это очень сложно. Путь второй: исходя из того, что нам нужно, попытаться получить что-нибудь верное, а затем убедиться, что возможно вернуться к исходному утверждению (по существу, это вариация первого пути, в которой облегчен поиск пути). Путь третий — доказательство от противного (предположим, что это неверно, и получим противоречие) — об этом разговор особый в специальной главе.

А пока ясно, что мы явно пошли по второму пути. Можно ли вернуться к исходному утверждению? Мы редко задаем себе такие вопросы, потому что обычно пользуемся обратимыми, равносильными преобразованиями. Зато это — одна из наиболее распространенных причин абитуриентских ошибок. Вот типичная ошибка: $\sqrt{x}<-1 \Rightarrow x<1$, тогда как на самом деле решений нет вообще (корень не может быть меньше отрицательного числа). Причина ошибки — необратимость перехода при возведении в квадрат. В нашем случае неочевиден переход от равенства $\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$ к равенству $y=\frac{\pi}{2}-z$. Осуществим его. Если синусы равны, то углы могут и отличаться. Но тогда ясно — здесь и сработают вторые условия:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - z \leqslant \frac{\pi}{2},$$

так что углы тоже должны равняться.

Решение, которое приведено, несомненно, не самое короткое, но одно из самых естественных с точки зрения удобства понимания.

Итак, $\arcsin x$, $\arccos y$, $\operatorname{arctg} x$. Чтобы не иметь с ними трудностей — лучше сразу их обозначить.

Полезное закрепительное *упражнение*. Доказать, что

$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$ при $x \geqslant 0$;

$2\arcsin x=\arccos(1-2x^2)$ при $x \geqslant 0$;

$\arcsin x+\arcsin y=\arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Какие обычные тригонометрические формулы скрыты под этими «масками»? Придумайте сами несколько подобных тождеств.

Раз уж речь зашла о тригонометрии, то нельзя не сказать несколько слов о методе дополнительного угла — одного из мощнейших средств решения простейших тригонометрических уравнений. Идея метода состоит в свертке выражения вида $a\sin x+b\cos x$ в одну функцию с помощью введения дополнительного угла, который находят по ходу вычислений. Делают это так. Сначала за скобки выносят $\sqrt{a^2\times b^2}$ (зачем — прояснится позже, выносить надо не думая). Чтобы все было честно, внутри скобок мы обязаны на это же выражение разделить. Тогда получим

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Теперь вводим обозначения $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$; $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Рассматривая эти уравнения как систему, мы можем найти одно ее решение (много нам не надо), обычно — $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, так что дополнительный угол φ мы уже знаем. А теперь, зачем он нужен? После подстановки наше выражение имеет вид

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x),$$

а с помощью формулы синуса суммы получаем окончательную свертку: выражение свернулось в $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+x)$, чего мы и добивались. Вначале — конкретный пример.

Задача. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=1.$$

Мы намеренно выбрали самое заурядное уравнение, потому что к задачам такого типа то и дело сводятся сложные. Потому решать их следует автоматически:

1. $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2\Rightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right).$

Имеем два уравнения: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\varphi$; $\frac{1}{2}=\sin\varphi$. Понятно, что в качестве φ можно взять $\arcsin\frac{1}{2}$, то есть $\pi/6$. Тогда

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=1;\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1;$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};\ x+\frac{\pi}{6}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n;$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

Ответ получен быстро и четко.

Метод дополнительного угла научит совершенно автоматически сворачивать часто встречающиеся выражения типа $\sin x\pm\cos x$, $\sin x\pm\sqrt{3}\cos x$ (а как они свернутся?).

Теперь можно ответить, зачем понадобился фокус с корнем квадратным. Причина очень проста — мы не можем что попало обозначать синусом и косинусом хотя бы потому, что каждый из них по абсолютной величине не превосходит единицы. А указанная нормировка не только гарантирует это, но и обеспечивает также основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Приведем один олимпиадный пример.

Задача. Доказать неравенство при a, b, $c>0$:

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos(\alpha+\beta)\geqslant-\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}.$$

Поиск решения. Прежде всего для обозримости избавимся от косинуса суммы:

$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\alpha\cos\beta-c\sin\alpha\sin\beta$.

Стало ли лучше? Не похоже. Попробуем вынести что-нибудь за скобки. Получится

$\cos\alpha\,[a+c\cos\beta]-\sin\alpha\,[c\sin\beta]+b\cos\beta$.

Спрашивается, что с этим можно сделать? Не видно. Плохо, что зависимость именно от двух переменных α и β. Вот если бы была только одна, то можно было бы и производную позвать на помощь. Вот, например, хорошо бы избавиться от α. А за счет чего? Найти минимум выражения. Но что-то знакомое в такой постановке есть: искали же мы максимумы тригонометрических выражений типа $2\sin x+3\cos x$, и получался при этом $\sqrt{13}$. А как это делалось? Ну, конечно же, методом дополнительного угла! А разве здесь можно? Здесь же функции, а не числа. А, собственно говоря, почему нельзя? Возьмем и попробуем. Что за корень мы должны вынести за скобки?

$$\sqrt{(a+c\cos\beta)^2+(c\sin\beta)^2}=\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}.$$

Хорошо, а то, что останется в скобках, свернется в синус:

$$\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}\sin(\alpha+\varphi)+b\cos\beta.$$

Что такое φ, нам даже сейчас неинтересно, главное, что такой угол существует, а что он на самом деле, неважно. Так как $\sin(\alpha+\varphi)\geqslant-1$, то остается доказывать неравенство уже для выражения $-\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}+b\cos\beta$. Стала ли задача легче? На вид, конечно, нет — потерялась симметрия. Но по существу — да. Ведь остался только один параметр, значит, задача уже техническая. Ее, например, можно сделать с помощью производной, но нам пока не хочется. А что, если применить принцип бяки? Самое время. Что обозначим? Конечно же, весь корень! Итак,

$$\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta}=x;$$

$$a^2+c^2+2ac\cos\beta=x^2;$$

$$\cos\beta=\frac{x^2-a^2-c^2}{2ac}.$$

Значит, нас интересует минимум выражения

$$-x+\frac{b}{2ac}(x^2-a^2-c^2)=\frac{b}{2ac}\left(x^2-\frac{2ac}{b}x-a^2-c^2\right).$$

Но ведь это — квадратный трехчлен! Его минимум можно найти любым стандартным школьным способом (например, производной), но мы предпочтем элегантный фокуснический метод выделения полного квадрата:

$$\frac{b}{2ac}\left[x^2-\frac{2ac}{b}x+\frac{a^2c^2}{b^2}-\frac{a^2c^2}{b^2}-a^2-c^2\right]=$$

$$=\frac{b}{2ac}\left[\left(x-\frac{ac}{b}\right)^2-\frac{a^2c^2+a^2b^2+c^2b^2}{b^2}\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b}{2ac}\left(-\frac{a^2c^2+a^2b^2+c^2b^2}{b^2}\right)=-\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}.$$

Решение нуждается совсем в небольшой чистке. В качестве комментария хотелось бы отметить, что пренебрегли мы параметром α по точной границе: равенство $\sin(\alpha+\varphi)=-1$ вполне было возможно, так что улучшить оценку было бы нельзя. А вот всегда ли квадрат, которым мы пренебрегли, может обратиться в нуль — об этом предлагается поразмышлять читателю.

Эту несколько подзатянувшуюся главу уже пора заканчивать, хотя принцип бяки еще неоднократно появится на наших страницах. Но чтобы заронить в читателе еще одну каплю сомнения насчет того, все ли он понимает в обозначениях, процитируем замечательный отрывок из книги Дж. Б. Россера «Логика для математиков»:

«...если у нас утверждение типа „3 больше 9/12“ о рациональном числе 9/12, содержащее некоторое имя „9/12“ этого рационального числа, то мы можем заменить это имя любым другим именем того же рационального числа, например, „3/4“. Когда же мы рассматриваем утверждение типа „3 делит знаменатель 9/12“ о некотором имени некоторого рационального числа, и наше утверждение содержит некоторое имя этого имени, то это имя можно заменить другим именем того ж имени, но, вообще говоря, нельзя заменить именем другого имени, хотя бы это другое имя было именем того же рационального числа».

3

Умение сделать вид

...способность к галлюцинациям составляет его преимущество перед теми, кто ею не обладает; ибо он видел многое, чего другие не видят...

Р. Музиль. Человек без свойств

Об этом техническом приеме мало кто подозревает, но пользуются им все уже начиная со школы. Состоит он в следующем: чтобы решить задачу, надо прежде всего сделать вид, что она уже решена. Именно так мы решаем задачи типа «Определить скорость велосипедиста в стоячей воде, если...». Что же именно мы делаем? По давно усвоенной привычке пишем: «Пусть x — скорость велосипедиста. Тогда...».

А теперь, отбросив на время все, чему нас так хорошо научили, спросим себя: а что, собственно, мы делаем? Берем какую-то букву x, которую непонятно за что называем скоростью, составляем какое-то уравнение, как-то манипулируем им и внезапно объявляем: скорость велосипедиста такая-то. А, собственно, на основании чего? И чем мы вообще занимались? И кто он такой, этот мистер Икс?

А произошло следующее: мы сделали вид, что решили задачу, договорились, будто бы x — это скорость. Для чего? А для того, чтобы лучше узнать, какими свойствами должна обладать эта скорость. Ведь что-то про нее уже известно. Например, что это — число, причем не просто число, а удовлетворяющее условиям задачи. А раз это число, то с ним можно делать всяческие числовые манипуляции: переносить, делить, возводить в квадрат. Поэтому x — это только маска для числа. Она нужна для того, чтобы удобно было следить за правильностью операций. Что нам дает x? Некую определенность. Наш x — уже почти существующий объект, во всяком случае, он обладает некоторыми свойствами. Если было бы не страшно запутаться, то можно было бы так и сказать: x — это набор свойств искомой величины скорости, по которым он должен восстанавливаться. Более того, самая главная заслуга мистера Икс — это то, что он показывает, чем искомая скорость быть не может. Другими словами, когда в процессе решения мы установили, что $x=2$, то это означает, что скорость не может равняться ничему другому, кроме двух. Реально требуется еще и проверка, а может ли он равняться двум (должен — это еще не значит, что может).

Основное удобство — единообразие метода и разработанный формализм. Мы не знаем, как решать в общем виде задачи про скорости, но знаем, как решать в общем виде квадратные уравнения: значит, вместо обучения частному искусству решения задач про скорости нам надо овладеть гораздо более простой частной задачей сведения задачи про скорости к задачам про уравнения, для которых у нас есть довольно общая теория и методика.

Чтобы не говорить только об уравнениях, приведем следующую задачу.

Задача. Что больше — $1-\sqrt[3]{3}$ или $1-\sqrt{2}$?

Поиск решения. В задачах такого типа всегда удобен стандартный прием: сделать вид, будто бы мы уже знаем знак неравенства, поставив вместо него вопросительный знак, и оперировать с неравенством как с обычным, пока знак не прояснится. При этом смена знака неравенства, как и в обычном случае, должна сопровождаться переворачиванием, что становится ясно из дальнейшего:

$$1-\sqrt[3]{3} \;?\; 1-\sqrt{2}; \quad -\sqrt[3]{3} \;?\; -\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{3} \;¿\; \sqrt{2}; \quad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \;¿\; \left(\sqrt{2}\right)^6; \quad 3^2 \;¿\; 2^3.$$

Мы получили очевидное неравенство $9>8$. Значит, знак ¿ заменяется на $>$, а знак ? на $<$. Таким образом, это и есть ответ в нашей задаче.

Комментарий. Интересно, как оформляются решения таких задач. Строго говоря, весь ход рассуждений следует проводить задом наперед, то есть исходя из последнего верного и очевидного неравенства построить в обратном порядке всю цепочку, пока не получим требуемое неравенство. Вне всякого сомнения, когда увидишь подобное решение, искусство создавать такие доказательства кажется недостижимым. Но как только мы заглянули за кулисы — все прояснилось. Единственное, за чем следует особенно следить — это чтобы в обратном порядке цепочку провести было возможно.

А теперь поговорим об одном из самых важных приемов по части умения делать вид. Речь пойдет о методе математической индукции. Прием этот простой и стандартный, хотя и требует некоторого навыка работы с ним. Тем не менее, он встречается настолько часто, а усваивается настолько плохо, что заслуживает гораздо более тщательного объяснения, чем это обычно принято в учебниках. Рассмотрим отдельно суть метода и его техническое исполнение.

Идею метода очень легко можно объяснить на примере лестницы. Предположим, Вы хотите научить ребенка ходить по ней. Вы должны научить его всего двум вещам: как сделать первый шаг и как переступить со ступеньки на ступеньку. Как только это усвоено — ребенок способен подняться на любую высоту. Другое дело, что нужно еще научить его спускаться самостоятельно, но это к

Индукционная лестница

методу индукции уже отношения не имеет. (Хотя чуть ниже мы покажем и как спускаться с индукционной лестницы.)

Точно такая же схема действий применяется для доказательств утверждений по индукции. Ступеньками здесь служат натуральные числа. Первый шаг — подъем на единицу называется базой индукции, переход со ступеньки на ступеньку, то бишь с натурального числа на натуральное,— индукционным переходом.

А теперь как это делается на практике. Прежде всего о признаках задачи, для которой может оказаться полезной индукция. Признак этот довольно простой: в формулировке присутствует какое-то натуральное число — обычно n или k. Стандартное начало: «Доказать, что для любого натурального k...». Иногда k может отсутствовать, но фигурирует какое-нибудь большое число, скажем 1986. Это — верный признак того, что можно попробовать доказать утверждение для произвольного k, и индукция здесь часто хороший помощник. Наконец, последнее: доказательство по индукции проходит «бесплатно». Если оказывается, что задачу можно решить и без индукции, то за то, что Вы стали вести доказательство по индукции, «платить» не придется — доказательство все равно пройдет.

Теперь о порядке действий. Прежде всего — четкая формулировка. Она должна зависеть от одного натурального параметра, скажем, k. Далее четко формулируется утверждение для $k=1$ и (чаще всего — запросто) доказывается. Этим выполняется первый этап — база индукции. Наконец, основной этап — индукционный переход. Суть его очень проста: считайте, что Вы решаете ту же самую задачу, но за то, что Вы когда-то доказали утверждение для $k=1$, Вам теперь облегчают задачу, добавляя одно сильное условие. Вот как это выглядело бы на числовых примерах. Вместо «Докажите для 1985 жирафов» Вам предлагают доказать облегченную задачу: «Пользуясь тем, что для 1984 жирафов уже доказано, докажите для 1985 жирафов». Ясно, что вторая формулировка хотя и длиннее, но зато есть шанс с ней проще справиться за счет умелого сведения случая 1985 жирафов к случаю 1984. Быть может, такое сведение и не получится, но в любом случае попробовать свести надо: это может оказаться проще, чем просто решать исходную задачу.

При работе с произвольным k применяется следующий формализм. Формулируется утверждение задачи при $k—1$, взятом вместо k. (См., кстати, главу об обозначениях, где напоминается, как подставлять в формулу. Как ни странно, именно этот момент часто вызывает трудности в овладении методом индукции.) А затем эту новую формулировку берут в качестве дополнительного условия задачи: делается вид, что это — уже верное утверждение, доказательство которого мы знаем. Далее можно поступать двояко. Путь первый — спокойно решать задачу, не обращаясь к этому дополнительному условию или используя его только в редких случаях. Путь второй: сконцентрировать свои усилия на поиске сведения всего доказательства к этому дополнительному условию, надеясь, что бо́льшая часть доказательства в нем уже заложена (когда это действительно так, сведение обычно дается без труда). Продемонстрируем сказанное на очень простом примере.

Задача. Доказать, что сумма последовательных нечетных чисел, начиная с 1, — точный квадрат.

Поиск решения. Для индукционного доказательства задача еще, конечно же, не готова: отсутствует натуральный параметр k. Попробуем несколько улучшить формулировку. Как записать сумму последовательных чисел, точнее — нечетных чисел. Как записать нечетное число вообще? В общем виде это понятно: $2k+1$ или $2k-1$. Выберем, например, последнюю форму. Тогда задача будет звучать так: «Доказать, что сумма $1+3+5+...+(2k—1)$ является точным квадратом». Эта формулировка уже значительно лучше, однако если мы возьмемся за ее доказательство вот в таком виде, то успех нас ждет не скорый. Причина — в неопределенности формулировки «точный квадрат». Чтобы индукционное рассуждение проходило плавно, ему нужна определенность. Поэтому начнем... угадывать точную формулу этого квадрата. Да, именно угадывать, и в индукционных задачах это применяется сплошь и рядом: сначала угадывают точную формулу, пользуясь при этом малыми значениями k, а уже затем доказывают. Угадать несложно: $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$. Несложное сравнение с формулой показывает, что ожидаемый квадрат — это k^2.

Итак, новая формулировка: «Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$». Это мы будем уже доказывать по индукции. Вначале — легкий шаг по доказательству базы индукции. Формулируем: $1=1^2$. А куда делись тройки и пятерки? А их и не должно быть. Просто мы несколько злоупотребляли нашей записью в виде $1+3+\ldots$, не особенно заботясь о том, что последний член должен быть все-таки больше всех предыдущих. Для больших k это было бы не страшно, но зато облегчало понимание. А для маленьких k наступила расплата за нашу беззаботность: если бы мы продолжали писать в прежнем духе, то получилось бы $1+3+\ldots+1$, что, конечно же, явная бессмыслица — должен быть написан только один член. Это — сознательная неточность, нередко культивируемая в математике ради ясности или удобства. Типичный пример другой такой неточности — выражение «функция x^2». Никакая это не функция — это значение функции в точке x. А функция — это $(\ )^2$. Но представляете, как было бы неудобно иметь дело с такими функциями. Точно так же и здесь имеет место заведомая неточность. Но если бы мы писали просто $1+\ldots+2k-1$, насколько туманнее был бы для нас закон последовательности. И последнее, что же все-таки с этой неточностью делать? А вот что: определять все по последнему члену. При $k=1$ в нашем случае последний член равен 1, значит, и оканчиваться наша сумма обязана единицей.

Теперь, когда база индукции уже доказана (а доказать равенство $1=1^2$ несложно), мы можем приступить к индукционному переходу. Прежде всего формулируем утверждение для $k-1$:

$$1+3+5+\ldots+[2(k-1)-1]=(k-1)^2.$$

Теперь мы должны решить задачу, сделав вид, что только что выписанное равенство уже нами доказано. Прежде всего раскроем внутренние скобки в дополнительном индукционном предположении:

$$1+3+5+\ldots+(2k-3)=(k^2-2k+1).$$

Сравнив с тем, что нам надо доказать, мы найдем много общего, а именно, что все члены, кроме последнего, входят в выписанную формулу. Перепишем это, чтобы стало лучше видно:

$$1+3+5+\ldots+(2k-3)+(2k-1)=k^2.$$

Сейчас хорошо видно, как доказывать это равенство: надо просто подставить в его левую часть предыдущее. В результате получим, что в доказательстве нуждается гораздо более простая формула:

$$(k^2-2k+1)+(2k-1)=k^2.$$

Раскрыв скобки, мы получим желаемое.

Чтобы у читателя не создалось впечатления, что его одурачили (естественный вопрос: а когда же мы все-таки доказали основное утверждение про сумму? Не потому ли оно доказалось, что мы попросту предположили его по существу уже доказанным), вернемся к нашей аналогии с лестницей и посмотрим, что же все-таки произошло. В каком случае было излишне делать вид? Заведомо, при $k=2$. Тогда наше доказательство совершенно справедливо и честно. Предположение при $k=1$ мы действительно доказали, и оно настоящее. Значит, указанное доказательство для $k=2$ совершенно справедливо (можно подставить $k=2$ в доказательство и прочитать его — попробуй, читатель!). Но тогда мы можем им, как доказанным, пользоваться для доказательства утверждения при $k=3$. Вспомогательное утверждение при $k=2$ уже верно и так далее — вверх по лестнице. Другими словами, мы заменили бесконечное множество однотипных доказательств всего одним (бессмысленно отдельно учить ребенка, как взбираться на пятую ступеньку и отдельно — как на седьмую, разумнее научить его переступать со ступеньки на ступеньку).

Последняя трудность. Она на уровне обозначений. Дело в том, что очень часто индукционный шаг совершают не от $k-1$ к k, а от k к $k+1$. При этом поступают так. То, что сформулировано в задаче, считают уже доказанным, а доказывают утверждение задачи при $k+1$, взятом вместо k (примеры Вы найдете в других главах). Для начинающего это особенно неприятная трудность психологического характера: зачем решать задачу после того, как мы уже предположили, что она решена? Хочется думать, что читатель уже сможет ответить на этот почти риторический вопрос. А для закрепления — задача.

Задача. Доказать, что сумма кубов последовательных чисел, начиная с 1,— точный квадрат.

Займемся теперь геометрическими мотивами в искусстве делать вид.

Задача. В тетраэдре суммы противоположных ребер равны. Доказать, что окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются (рис. 5).

Поиск решения. «В одну телегу впрячь неможно коня и трепетную лань». Как же нам совместить два столь, казалось бы, несовместимых условия? Одно условие довольно-таки просто, зато второе, насчет окружностей, незнакомо. С него и надо начинать. Попытаемся его расшифровать и перевести как-то иначе. Что значит, что окружности касаются? Раз они лежат в разных гранях, это возможно только в одном случае, когда точка касания — это точка касания ребер окружностями. Другими словами, требуется, чтобы расстояние от вершины до точки касания было одинаковым для каждой окружности. Если так, то мы должны задать себе новый вопрос: а чему равно это расстояние? Задача стала чисто планиметрической. Дан треугольник, в который вписана окружность (см. рис. 6). Требуется найти расстояния от вершин до точек касания, если известны... скажем, ребра. Сделаем вид, что мы знаем длины ребер, и попытаемся найти

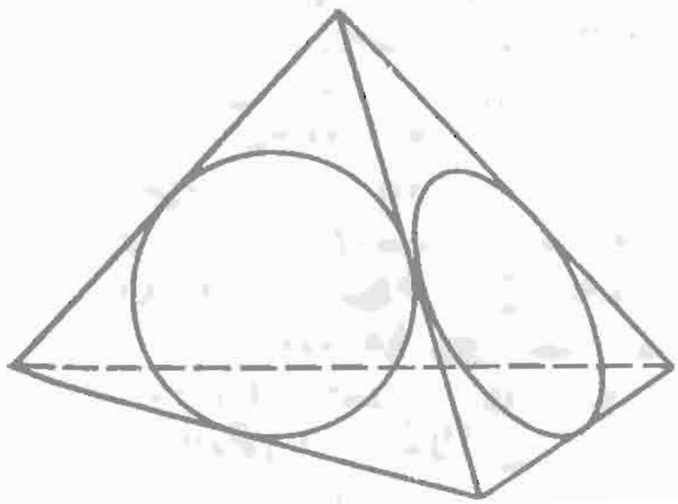


Рис. 5. Касание окружностей из разных граней

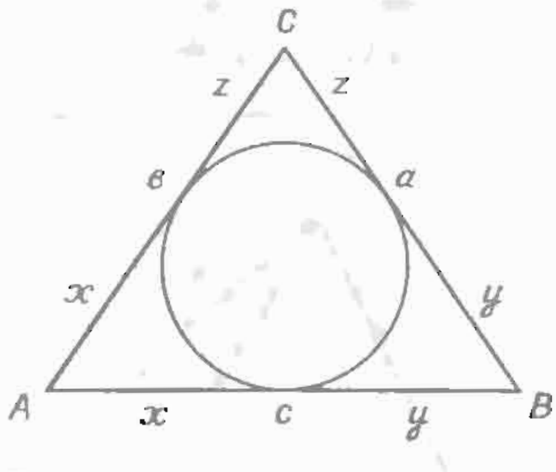


Рис. 6. Касательные и их отрезки

нужные расстояния. Как будем искать? Можно, конечно, применить «суровую» тригонометрию, отыскав все углы, радиус вписанной окружности и затем уже нужные отрезки. Путь не из легких, хотя и надежный. А нельзя ли попроще? Какие свойства есть у наших отрезков? Прежде всего, они — касательные. Что мы знаем про касательные к данной окружности? Что они, проведенные из одной точки, равны между собой. Это хорошее свойство. И даже понятно, как его здесь применить. Обозначим все отрезки буквами. Их шесть штук — три пары равных. Обозначим разные отрезки x, y, z. А теперь... сделаем вид, что мы их знаем, а наши стороны — a, b, c — нет. Вычислим стороны через отрезки. Имеем

$$x+y=c, \quad x+z=b, \quad y+z=a.$$

Отсюда уже легко получаются нужные решения. Самый изящный способ такой: сложив все уравнения и обозначив, как обычно, через p полупериметр, получим

$$x+y+z=p.$$

Вычитая из этого уравнения предыдущие, находим

$$z=p-c, \quad y=p-b, \quad x=p-a.$$

Это и есть формулы для вычисления расстояния от вершин до точек касания. Запоминаются они довольно легко: именно такие выражения входят в формулу Герона для площади треугольника. Такая связь, кстати сказать, — источник новых задач.

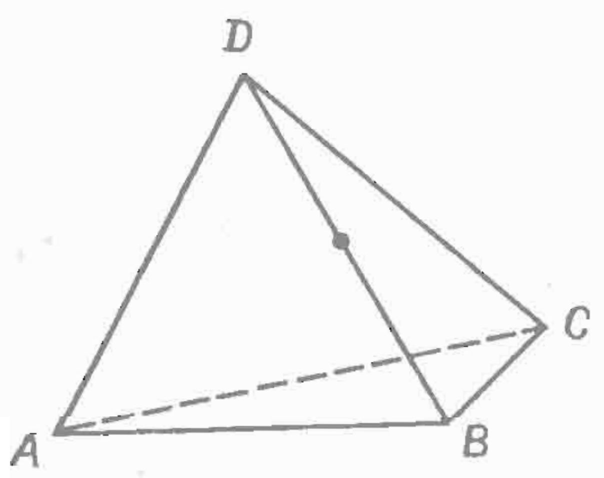


Рис. 7. И снова тетраэдр

Теперь мы в состоянии взяться за задачу про тетраэдр (рис. 7). Рассмотрим картинку. Сторон мы не знаем, но сделаем вид, что знаем. Пусть $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Сумму противоположных сторон, которая одинакова и которую мы тоже не знаем, обозначим через x. Тогда $AD=x-a$, $BD=x-b$, $CD=x-c$.

В треугольнике ABC расстояние от вершины A до точки касания по ребру AB равняется, согласно проделанным выше вычислениям, $p-a$, то есть $\frac{b+c-a}{2}$. Если же рассмотреть треугольник ABD, то точно такие же вычисления дадут, что расстояние от вершины A до точки касания этой второй окружности равно $\frac{AD+AB-BD}{2}$, то есть $\frac{(x-a)+c-(x-b)}{2}$. Раскрывая скобки, получаем, что эти два, вообще говоря, разных расстояния совпадают. А это именно то, что нам требовалось: окружности касаются в одной точке.

Отметим, что нам понадобилось вводить все три отрезка, чтобы вычислить их длину. Так бывает нередко: чтобы решить задачу, надо решить полную задачу.

Понятно, в чем состояло искусство делать вид. Мы вычисляли что-то, хотя нам ничего не было задано. Тем не менее, мы сделали вид, что кое-что знаем. В результате мы, конечно же, ничего и не вычислили, но зато установили связи между разными понятиями. А именно это нам и требовалось.

Поразительно, но этот простой прием с трудом усваивается школьниками в геометрических задачах, прежде всего — в стереометрических. Возможно, дело в конкретности геометрических понятий, но большинство школьников в геометрии способны манипулировать только конкретными числами либо, напротив, ограничиваться одними доказательствами. А мощным алгебраическим методам места не находится. В то же время они помогают получать результат в половине случаев, хотя не всегда так изящно, как в красивых геометрических доказательствах с дополнительными построениями, поворотами и прочими удивительными преобразованиями.

Обсудим это подробнее. Алгебраический подход предполагает известное планирование, и в этом его сила. Поясним сказанное. Прямоугольный треугольник задается двумя параметрами, например двумя катетами, катетом и площадью, высотой и одним из углов, и так далее. Поэтому первый шаг в овладении методом — обучение искусству находить по любым двум элементам другие. Требуется перерешать десятка три-четыре задач такого типа. После этого мы можем смотреть на любую задачу, в которой встретился прямоугольный треугольник, так: знаем ли мы про него какие-нибудь два параметра? Если да, то мы немедленно делаем вид, что знаем все про этот треугольник. Происходит это во время планирования решения задачи. Например, мы решаем задачу про равнобедренный треугольник. Тут же проводим высоту. Получаем два прямоугольных треугольника. Первое, на что мы смотрим, не сводятся ли условия нашей задачи к каким-то двум условиям про прямоугольный треугольник. Если да, то мы уже знаем, что задачу решим. План решения такой: свести дело к прямоугольному треугольнику, получить два параметра, по ним вычислить все что нужно в прямоугольном треугольнике, а затем уже и в равнобедренном.

Тем самым задачи про равнобедренный треугольник — это чаще всего задачи про прямоугольный треугольник. Произвольный треугольник требует трех параметров. Очень важная тренировка (порядка сотни разнообразных задач) — находить по любым трем параметрам другие. Точнее, достаточно научиться по ним вычислять три стороны (это первый цикл задач) и по трем сторонам вычислять какие-то другие параметры (это второй цикл задач). На самом деле, некоторые из этих задач неразрешимы, но в учебниках таких обычно не бывает.

Итак, предположим, что и этим искусством читатель овладел. Тогда уже можно объяснить суть алгебраического подхода к решению задач по геометрии. Прежде всего читаем условия задачи и пытаемся представить себе, насколько жесткой она является. Это означает, что мы чисто интуитивно пытаемся оценить, однозначно ли задается задача нашими условиями, или объектов, описанных условиями, может быть несколько. Если задание нежестко, то добавляем себе новые параметры: обозначаем неизвестными какие-то наиболее удобные для нас элементы. Вводим их столько, сколько нужно для жесткости.

Дальше — самый важный этап. Некоторые из данных могут быть неудобными в качестве параметров, то есть обычно сами эти данные Вы легко вычисляете (скажем, площадь описанного круга), но что-то выражать через них Вам непривычно и неудобно. Вот тут-то должно проявиться основное искусство: Вы должны вместо этих, не удобных для Вас, параметров ввести новые, через которые Вы, как Вам кажется, сможете вычислить если не все, то, по крайней мере, гораздо больше. Вводите их как неизвестные, а те, известные, через них вычисляете (похожая ситуация описана в главе об искусстве перевода). Вот здесь начинается технический этап. Легко сказать — вычисляете, но непросто это сделать. Тут и нужен плановый подход. По тем параметрам, которые Вы считаете для себя как бы известными (в них могут входить и на самом деле известные), Вы прикидываете, что Вы можете узнать: треугольник за треугольником. Где-то так: «У этого прямоугольного треугольника я знаю два параметра, значит, узнаю высоту. Эта высота входит в состав того треугольника как медиана. Там, кроме этой медианы, я знаю две другие, значит, знаю все. Так, тогда я знаю этот угол, а с его помощью и вот этой стороны узнаю площадь другого прямоугольного треугольника — она мне задана с самого начала: значит, получил уравнение».

Вот это и есть основная цель — получение уравнений. Когда Вы получите столько уравнений, сколько было неизвестных параметров, Вы решите систему, найдете параметры и... прочитаете, что же спрашивается в задаче. Поскольку параметры Вы выбрали себе сами, и удобные, значит, то, что спрашивается, Вы вполне вычислите. А если требуется что-то доказать, то проблем тоже не должно возникать: надо только подставить вычисленные связи в требуемое утверждение, и все лишнее должно сократиться. Именно так мы поступили в предыдущей задаче. Но к делу. Возьмем первый попавшийся под руку пример из любого пособия для поступающих.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE. Определить величину угла ACB.

Поиск решения. Прежде всего рисуем чертеж (рис. 8). Полезный совет: в чертежах надо начинать с наиболее трудных условий. Скажем, в этой задаче надо начинать не с треугольника, а с двух перпендикулярных линий. А потом уже попытаться подогнать треугольник под требуемые условия, то есть чтобы одна из линий оказалась биссектрисой, а вторая — медианой.

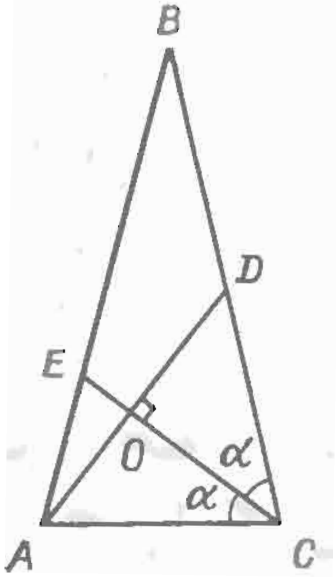


Рис. 8. Медиана и биссектриса перпендикулярны

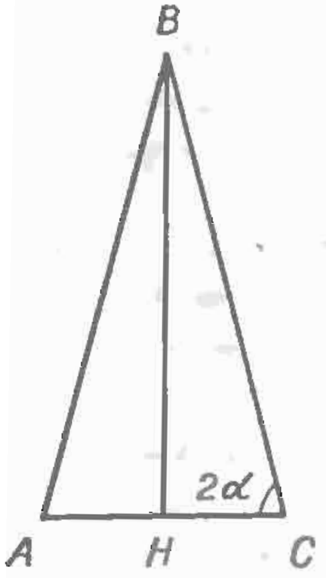


Рис. 9. Равнобедренный треугольник — это два прямоугольных треугольника

Итак, чертеж построен. Определяем степень жесткости. Задано всего одно условие — перпендикулярность. Значит, задача задана нежестко. И это понятно: спрашивается только значение угла, то есть треугольник можно заменить на подобный. Вообще говоря, равнобедренный треугольник требует двух параметров. Их мы и введем: угол α, равный углам AOC и COD, и отрезок CD, который мы обозначим через x. Теперь подумаем, как нам использовать то, что дано — перпендикулярность. Просто вычислять угол между медианой и биссектрисой неприятно (хотя в принципе возможно). Гораздо удобнее поступать по аналогии с построением чертежа: не получать уравнение, что угол между ними равен 90°, а получить уравнение, пользуясь другой точкой зрения: прямая, проведенная перпендикулярно биссектрисе CE, является медианой.

Теперь строим план. В треугольнике COD мы знаем два параметра, значит, знаем все. В частности, знаем OC. Тогда знаем весь треугольник AOC, в частности сторону AC. (Можно было бы это заметить и проще, увидев, что треугольник ACD — равнобедренный. Но мы сделаем вид, что всякая геометрическая интуиция нам чужда — это должно само собой получиться из алгебры с тригонометрией.) Итак, знаем AC, значит — знаем треугольник

ABC, благо угол ACD, равный 2α, мы знаем, а для равнобедренного треугольника требуется только два параметра. А тогда знаем BC, и можем записать условие того, что AD медиана: BC должно быть вдвое больше, чем CD. Это и будет требуемым уравнением.

Реализуем этот план. Итак, CD — это x и гипотенуза треугольника COD. Катет этого треугольника вычисляется по формуле $OC = x\cos\alpha$. В треугольнике AOC, наоборот, OC является катетом, и исходя из него можно вычислить гипотенузу: $AC = \frac{OC}{\cos\alpha}$, или $AC = \frac{x\cos\alpha}{\cos\alpha} = x$ — обещанное доказательство равнобедренности получилось. Теперь, как вычислить BC? Сделаем отдельный чертеж (рис. 9). Золотое правило в геометрических задачах:

ОПУСТИ ВЫСОТУ!

Здесь оно работает автоматически, так как мы помним, что надо сводить равнобедренный треугольник к прямоугольному. Имеем: CH — половина AC, то есть $x/2$. Треугольник CHB прямоугольный. В нем мы знаем катет CH и угол 2α. Легко находим гипотенузу: $BC = \frac{CH}{\cos 2\alpha}$, или $BC = \frac{x}{2\cos 2\alpha}$. Осталось записать условие того, что AD — медиана, то есть D — середина отрезка, или $BC = 2CD$. Распишем полученное уравнение:

$$\frac{x}{2\cos 2\alpha} = 2x, \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{4}.$$

Как и следовало ожидать, x сократился. Остальное уже интереса не представляет. Приведем еще один стереометрический пример.

Задача. Плоские углы при вершине пирамиды прямые, S_0 — площадь основания, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней. Доказать, что $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Поиск решения. В первую очередь — чертеж (рис. 10). Задано только три параметра — углы. Ясно, что до жесткости еще далековато. Какие выберем параметры, чтобы задача стала жесткой и удобной? Явно напрашиваются ребра AD, BD, CD. Обозначим их x, y, z. Когда они заданы, конструкция полностью определена.

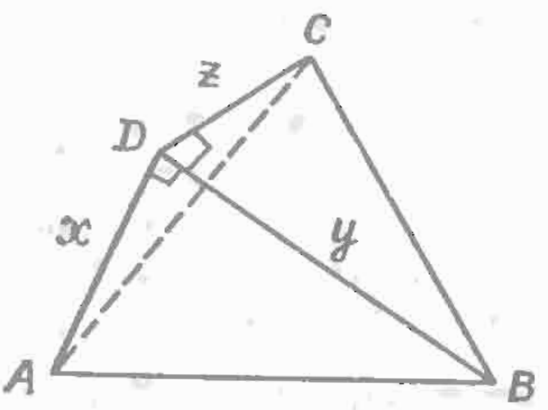


Рис. 10. Когда боковые ребра перпендикулярны...

Теперь составляем план действий. Все боковые треугольники — прямоугольные, то есть для каждого из них нужно по два параметра, и они у нас есть. Значит, про них мы все знаем. Далее, благодаря этому мы знаем три нижних ребра. Следовательно, нам все известно про нижний треугольник. Теперь читаем, что там спрашивается в задаче? Ах, про площади... Тогда сразу приступаем к реализации плана.

По теореме Пифагора находим три нижних ребра:

$$AB=\sqrt{x^2+y^2};\quad BC=\sqrt{y^2+z^2};\quad CA=\sqrt{z^2+x^2};$$

по формуле Герона — площадь нижнего треугольника:

$$S_0=\sqrt{\frac{AB+BC+CA}{2}\cdot\frac{AB+BC-CA}{2}\cdot\frac{AB+CA-BC}{2}\times\times\frac{BC+CA-AB}{2}}.$$

А формулы для площадей верхних прямоугольных треугольников очевидны:

$$S_1=\frac{xy}{2},\quad S_2=\frac{yz}{2},\quad S_3=\frac{xz}{2}.$$

Осталось подставить все в требуемую формулу и убедиться, что она справедлива: $16S_0^2=[(AB+BC)^2-CA^2]\,[CA^2-(AB-BC)^2]=$
$=[2AB\cdot BC+(AB^2+BC^2-CA^2)]\,[2AB\cdot BC-(AB^2+BC^2-CA^2)]=$
$=4(AB\cdot BC)^2-(AB^2+BC^2-CA^2)^2=4(x^2+y^2)(y^2+z^2)-$
$-(x^2+y^2+y^2+z^2-x^2-z^2)^2=$
$4(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=16(S_1^2+S_2^2+S_3^2)$.

Комментарии. Конечно же, задачи предложены не самые трудные, но, честное слово, взятые наугад. Более того, часто все равно требуются дополнительные построения, потому как треугольников не хватает, особенно это нужно в стереометрии. Там стандартный план действий — рассматривать разнообразные «вырезки» из картины — всевозможные сечения. Очень полезно их вырисовывать на отдельных чертежах, а не высматривать все на одном, стереометрическом, чаще всего и без того не слишком ясном. Ну и, конечно же, не обязательно ограничиваться треугольниками. Нужны также и окружности (один параметр), параллелограммы (сколько параметров?) и так далее. Последний совет — никогда не следует рисовать сферу. Вполне достаточно ее центра, соединенного с несколькими нужными точками. Иногда бывают полезны окружности, получающиеся при разных сечениях, но сама сфера только запутает чертеж.

Читатель, конечно, понимает, что описанная метода — отнюдь не панацея от всех бед, а просто хороший инструмент, которым рекомендуется владеть или хотя бы подозревать о его существовании.

Расскажем еще об одном симпатичном приеме решения вопросов, очень часто вызывающих трудности. Трудности эти связаны с необходимостью вычислять, в каком отношении делится тот или иной отрезок, а прием носит название метода центра тяжестей. Продемонстрируем его на стандартном примере.

Задача. В треугольнике ABC проведены медиана AD и такая прямая BE, которая делит площадь треугольника ABC в отношении 2:1 (треугольник ABE больший). Пусть O — точка пересечения прямых AD и BE. В каком отношении делит площадь треугольника ABC прямая CO?

Решение. Прежде всего расправимся с нерадостным условием «делит площадь в отношении 2:1». На самом деле надо считать, что сказано следующее: точка E делит отрезок AC в отношении 2:1. Почему? Да просто потому, что посчитать площадь можно через произведение основания на высоту, а высота — общая... (Эта очень примитивная мысль эксплуатируется в абитуриентских задачах нещадно. Удивительно, однако, что многим школьникам она совершенно незнакома. Только учитывая это обстоятельство, мы вообще сформулировали задачу на языке площадей.) Точно

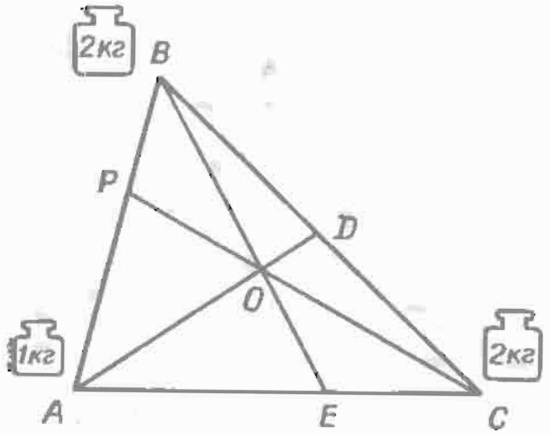


Рис. 11. Метод центров тяжести

таким же образом мы выясняем, что спрашивают нас о том, в каком отношении делит отрезок AB точка P (см. рис. 11). Именно такую задачу мы самым волшебным образом сейчас решим.

Представим себе, что в вершине A стоит гирька весом 1 (скажем, килограмм или пуд), а в каждой из вершин B и C — по гирьке весом 2. Где находится центр тяжести трех гирек? Две гирьки по 2 можно с успехом заменить одной гирькой весом 4 в точке D — центре тяжести этих двух гирек. Значит, центр тяжести находится на прямой AD. Посмотрим на все это с другой точки зрения. Центр тяжести двух гирек в вершинах A и C находится как раз в точке E, так как она делит отрезок AC именно в том отношении, в каком относятся веса гирек. Значит, эти две гирьки можно заменить на одну весом 3 в точке E. Вывод — центр тяжести находится также на прямой BE. Но тогда ему некуда деться: он должен находиться на пересечении прямых AD и BE, то есть в точке O. А теперь раскрутим все в обратном порядке .Тогда центр тяжести лежит на прямой CP. Значит, точка P делит отрезок AB в таком отношении, в каком относятся веса гирек в точках A и B: $AP:BP=2:1$.

Замечания. Прежде всего отметим, что попутно мы получили возможность выяснить другие, не интересовавшие нас доселе вопросы. Например, мы можем узнать, в каком отношении делит точка O отрезок AD — в отношении 4:1, так как в точке D нам пришлось ставить гирьку весом 4. Точно так же отрезок BE точка O делит в отношении 3:2.

Во-вторых, отметим, что свойствами медианы как таковыми мы не пользовались. Мы использовали только то, в каком отношении делит точка D сторону BC. Понятно, что это отношение могло бы быть другим — ход решения ничуть бы не изменился.

Единственное, чему осталось научиться — как подбирать гирьки. Это-то как раз очень просто: так, чтобы центр тяжести попал в нужную нам точку, причем одну гирьку можно брать произвольного веса, а остальные сами определятся. Чтобы не ходить далеко за примерами, предположим, что на том же чертеже $AE:EC=15:7$, а $BD:DC=9:8$. Числа другие, а чертеж почти тот же. Итак, берем в A любую гирю, скажем, весом 1. Какую гирю надо взять в C? Это ясно — чтобы отношение ее веса к 1 равнялось отношению $AE:EC$. Вывод — в C нужна гиря весом 15/7. Теперь что поставить в B? Скажем, x. Что требуется? Требуется, чтобы отношение весов B и C, то есть x и 15/7 равнялось отношению длин отрезков DC к BD, то есть 8:9. Решая пропорцию $x:15/7=8:9$, находим $x=40/21$. А теперь мы знаем отношение отрезков BP к AP, которое равно $1:x$, то есть 21:40. Для закрепления — упражнения.

Задача. Доказать, что медианы в любом треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1 в точке пересечения.

Задача. Доказать, что в любом тетраэдре отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани, пересекаются в одной точке и делятся в отношении 3:1 в точке пересечения.

Задача. Из вершин A, B, C треугольника ABC проведены прямые, делящие его площадь в отношении 2:1. Найти площадь образовавшегося внутри треугольника.

Овладев методом, читатель свободно сможет решать не только такие задачи, но и задачи в стереометрии, где требуется вычислить, в каком отношении находятся какие-нибудь объемы или отрезки.

И последний штрих — векторы. Как их применять и в каких задачах? Совет — *нежесткие задачи любят векторы.* Например, все, что перечислено выше в методе центров тяжестей, решается также и с помощью векторов. Идея тут такая: вводится необходимое количество векторов, чтобы задача стала жесткой, и все через них выражается.

Задача. Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков

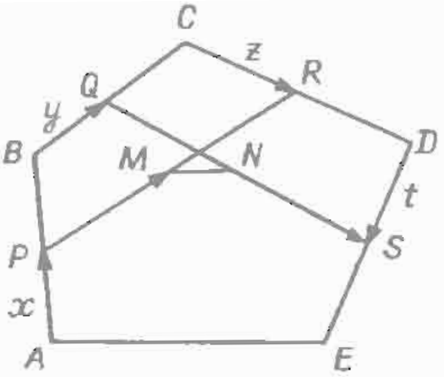


Рис. 12. Векторы в действии

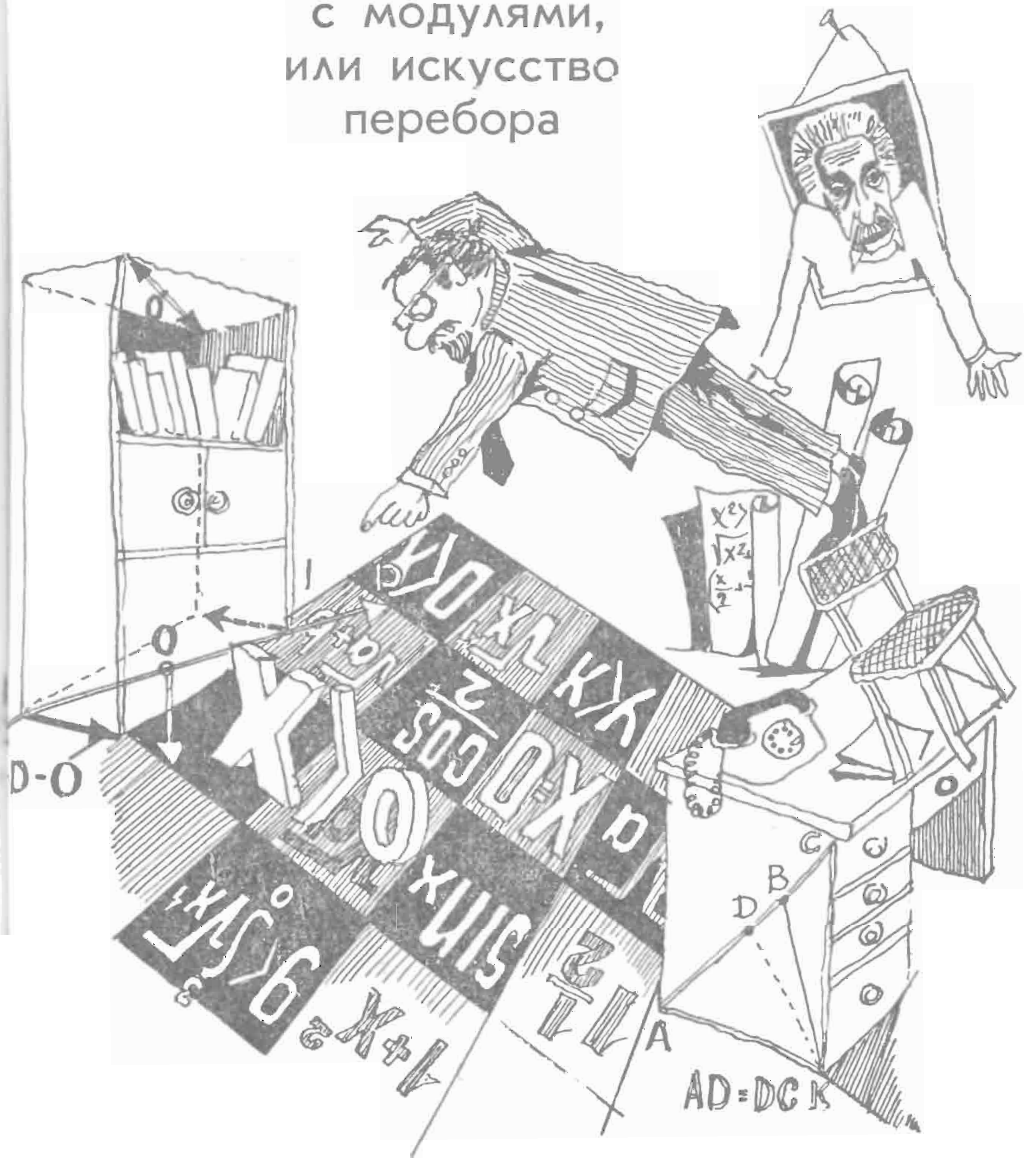
снова соединены. Доказать, что последний отрезок параллелен отрезку AE и равен $1/4\ AE$ (рис. 12).

Решение. Вводим четыре вектора $x=\overline{AP}$, $y=\overline{BQ}$, $z=\overline{CR}$, $t=\overline{DS}$. Тогда из пятиугольника $ABCDE$ имеем $\overline{AE}=2x+2y+2z+2t=$ $=2(x+y+z+t)$. Далее, из четырехугольника $PBCR$ находим $\overline{PR}=x+2y+z$. Аналогично из другого четырехугольника $QCDS$: $\overline{QS}=y+2z+t$. Таким образом, мы знаем векторы $\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{PR}=y+\frac{x+z}{2}$ и $\overline{NS}=\frac{1}{2}\overline{QS}=z+\frac{1}{2}(y+t)$. Теперь из шестиугольника $APMNSE$ легко получаем $\overline{MN}=\overline{AE}-$ $-\overline{AP}-\overline{PM}-\overline{NS}-\overline{SE}=\frac{1}{2}(x+y+z+t)=\frac{1}{4}\overline{AE}$, что и требовалось доказать.

На самом деле этот пример — только ничтожная часть могущества векторного метода, но более подробный разговор о векторах занял бы слишком много места и времени. А нам пора переходить к другим главам.

4

Как бороться с модулями, или искусство перебора



Divide et impera
(Разделяй и властвуй)

Опытный репетитор любит использовать на первом занятии задачи с модулем. Девяносто пять процентов, что новый ученик не будет иметь даже представления о том, как браться за задачи типа

$$|1-x|+|3-2x|=1+|x^2-3|.$$

Между тем рецепт решения настолько примитивен, что в трех случаях из четырех домой ученик придет не только с умением решать подобные задачи, но и с твердым убеждением, что наконец-то он встретил человека, по-настоящему разбирающегося в мудреной науке математике (в оставшемся одном случае из четырех опытный репетитор под благовидным предлогом от ученика отказывается). Суть же рецепта одна — перебор. Умение перебирать варианты составляет еще одну важную профессиональную черту математика. Умение это складывается, во-первых, из готовности решиться на перебор, а во-вторых, способности его сократить. Чтобы проиллюстрировать это, мы поступим как опытный репетитор и начнем с модулей.

Самое главное — это хорошо разобраться с его определением. Интуитивно оно понятно, модуль — это «число без знака» (вопиюще неграмотная фраза, но, как это часто бывает, хорошо передающая суть понятия). Проблема, однако, в том, что это «определение» прекрасно для конкретных чисел ($|-3|=3$), но совершенно неработоспособно, когда мы имеем дело с неизвестными (чему равен $|1-x|$?). Поэтому мы должны сознаться: на самом деле мы не знаем, что это такое,— и попытаться придумать новое, более работоспособное определение, а если придумать трудно, то заглянуть в книгу, где можно найти что-нибудь подобное:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На первый взгляд, радости немного: такое короткое обозначение так длинно и непонятно объясняется. Но на то оно и обозначение: короткие вещи нет смысла обозначать! Давайте хотя бы проверим, что для чисел такое определение совпадает с нашим интуитивным. Например, чему равен модуль числа 3? Оно положительно, значит, читаем первую строчку и получаем само 3. Годится! А теперь чему равен модуль числа —3? Сейчас —3 исполняет роль x, и оно отрицательно, следовательно, мы должны перейти ко второй строчке и написать $-x$, то есть $-(-3)$. Но ведь это действительно равно 3, как и должно быть. Надо же!

Трюк этот настолько неочевиден, что мы должны с самого начала усвоить, что случаи, когда x больше либо равен 0 и когда меньше, настолько разнятся друг от друга, что рассматривать их всегда следует по отдельности. Сформулируем в виде рецепта.

Во всех задачах с модулем (скажем, с $|x|$) основной метод состоит в том, что рассматриваются два случая, когда: 1) $x \geqslant 0$ — тогда во всех местах знак модуля попросту заменяется на скобки; 2) $x<0$ — тогда во всех местах вместо $|x|$ пишем $(-x)$ (обращаем внимание на скобки!).

Окончив решение в каждом из двух случаев, не забываем проверить, что решения удовлетворяют выбранным условиям ($x \geqslant 0$ и $x<0$ соответственно). Все, что не подходит, отбрасывается. Общий ответ «склеивается» из ответов двух частных случаев.

Пример. Доказать, что $|-x|=|x|$.

Трудно поверить, но это — теорема, интуитивно очевидная, но... как ее все-таки доказывать? Только по рецепту!

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \geqslant 0$. Тогда $|x|=x$. С другой стороны, $-x \leqslant 0$, так что для вычисления модуля мы должны пойти по второй строке определения, откуда $|-x|=-(-x)=x$, и тем самым совпадение доказано.

2. Пусть $x<0$. Тогда $|x|=-x$. С другой стороны, $-x>0$, так что $|-x|=-x$. Таким образом, и здесь равенство получено и теорема доказана: в обоих случаях $|x|=|-x|$.

Мы специально провели очень подробное доказательство, чтобы читатель имел перед глазами ясный образец работы с модулем и понял основной принцип: рассмотреть два случая, модуль уничтожить и ... властвовать!

Немедленное *упражнение:* доказать, что $|x| \geqslant 0$.

Возникают, конечно же, вопросы. Ну ладно, с $|x|$ понятно, но что делать с $|x^2-1|$? А принцип бяки на что! Достаточно (даже мысленно) обозначить x^2-1 через y и рассмотреть случаи $y<0$ и $y \geqslant 0$, то есть $x^2-1<0$ и $x^2-1 \geqslant 0$, ну а дальше уже модуля не будет.

Еще один вопрос: а что делать, когда модулей слишком много? Например, как доказывать неравенство $|x|+|y| \geqslant |x+y|$? Рассмотрение всех возможностей для модулей потребует $2^3=8$ вариантов. Конечно, можно попробовать, но не хочется. А хочется как-то сократить этот перебор. За счет чего? Конечно же, за счет техники сокращения перебора. Коль скоро это — техника, самое разумное — попросту продемонстрировать ее, показав несколько стандартных, но эффективных приемов.

Первый прием — симметрия. Как только мы заметили симметрию, надо сразу попробовать ее использовать. Использование чаще всего состоит в том, что мы лишаем x и y равноправия за счет какого-то более выгодного для нас условия. При этом расхожими являются фразы типа «пользуясь симметрией, можем считать...», «так как x и y равноправны, имеем право...», которые всегда означают одно: если нужное нам условие не выполняется, то выполняется противоположное, и мы можем просто переобозначить x через y, а y через x и все равно получим нужное нам условие (так как задача симметрична, то от такого переобозначения она не изменится!).

В нашем случае мы, например, можем считать, что $x \geqslant y$ (потому что если это не выполнено, то выполнено $y \geqslant x$ и можно переобозначить). Это уже существенно сокращает количество вариантов, так как если $y \geqslant 0$, то автоматически $x \geqslant 0$ и $x+y \geqslant 0$, а если $x \leqslant 0$, то y, $x+y \leqslant 0$.

Второй прием. Его можно было бы назвать примерно так: манипуляции со знаками и использование четных свойств функций. Ему обычно сопутствуют выражения типа «пользуясь четностью (нечетностью) функции, можем считать, что ...», смысл которых обычно состоит в том, что нет надобности рассматривать оба случая (больше нуля и меньше нуля), так как доказательства в них проходят почти слово в слово (с точностью до очевидных операций со знаками). Если угодно, можно считать, что вторая задача сводится к первой с помощью переобозначения $-x$ на x.

Чтобы разобрать это подробнее, надо немного поговорить о четных и нечетных функциях. Удивительно, но эти простые понятия вызывают гораздо больше недоразумений, чем можно было бы от них ожидать. Первая трудность, видимо, лингвистического порядка: как-то по самому звучанию кажется, что любая функция либо четная, либо нечетная, что на самом деле не так: большинство функций вообще не имеют четности.

Но пора перейти к определениям. В любом учебнике можно найти формальное

Определение. Функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x)=f(x)$, и нечетной, если $f(-x)=-f(x)$.

Неформально и более понятно это означает следующий рецепт:

ПРОВЕРКА НА ЧЕТНОСТЬ.

Чтобы определить четность функции заданной формулой, надо сделать следующее:

1. Во всех местах, куда входит x, заменить x на $(-x)$ (в скобках!).

2. Раскрыть скобки, произвести упрощения, стараясь истребить все минусы в скобках.

3. Если в результате получится та же формула, с которой мы начинали, то она — четная.

4. Если же нет, то надо устроить еще и сравнение с формулой, получающейся из исходной заключением ее в скобки и приписыванием знака «минус» впереди: нельзя ли после раскрытия скобок получить совпадение. Если да, то функция нечетная.

5. Наконец, если ни тот ни другой случай не имеет места, то и функция не имеет четности.

Например, функция $x^4-|x|$ четная, так как $(-x)^4-|(-x)|=$ $=x^4-|x|$, а $x^3-\sin x$ — нечетная, ибо $(-x)^3-\sin(-x)=-x^3-$ $-(-\sin x)=-x^3+\sin x$, а с другой стороны, $-(x^3-\sin x)=-x^3+$ $+\sin x$. Наконец, функция x^2-x+4 не имеет четности. Действительно, $(-x)^2-(-x)+4=x^2+x+4$. На исходную функцию не похоже. Не похоже и на функцию $-(x^2-x+4)=-x^2+x-4$, так что никакой четности нет и в помине.

Стандартный список четных функций: константы, четные степени (x^2, x^4,...), $|x|$, $\cos x$. Нечетные функции: нечетные степени (x, x^3, $1/x$,...), $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

Резюмируя, можно сказать, что нечетные функции — это те, которые знак «минус» (—) «уважают» (выносят перед собой), четные — те, которые его игнорируют. Действие же функции без четности неопределенно.

На практике удобно использовать свойства четных и нечетных функций для упрощения выражений (возьмите хотя бы $|-x|$ и $|x|$) и, как уже говорилось, сокращения перебора. Интересно, однако, попрактиковаться и в абстрактном определении, поработав с абстрактной функцией $f(x)$.

Задача. Сумма функций одинаковой четности — функция той же четности.

Доказательство. Одинаковая четность означает, что либо обе они четные, либо обе нечетные. Рассмотрим, например, случай обеих нечетных функций (случай четных — упражнение). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные. Надо сказать, что $(f+g)(x)$ тоже нечетная. Итак, имеем $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$, и надо доказать, что $(f+g)(-x)=-(f+g)(x)$. Но это действительно нетрудно проверить: $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+(-g(x))=-f(x)-$ $-g(x)=-(f(x)+g(x))=-(f+g)(x)$.

Задачи для читателей

1. Что можно сказать о сумме нечетной и четной функций?

2. Докажите следующую таблицу умножения для четности произведения (а также деления):

	ч	н
ч	ч	н
н	н	ч

В таблице: ч — чет, н — нечет, например, (четная) $\times$ (нечетная) = нечетная. Приведенную таблицу сравните с таблицей

	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

Сравнение объясняет, почему слово «нечетный» часто обозначают минус единицей, а «четный» — плюс.

3. Может ли функция быть четной и нечетной одновременно?

4. Что можно сказать о производных с точки зрения четности?

5. Функции $f(x)$ и $1/f(x)$ одинаковой четности?

Эти задачи существенно расширяют запас четных и нечетных функций. Например, ясно, что функция $\dfrac{x^{1986}-|x^3|+5}{\sin 3x}$ является нечетной.

Очень красива следующая задача, неожиданная хотя бы потому, что, как уже говорилось, большинство функций не имеют четности.

Теорема. Любая функция $f(x)$ однозначно представима в виде суммы четной и нечетной функции.

Например, вышеуказанная функция x^2-x+4 раскладывается так: $(x^2+4)+(-x)$. Прежде чем прочесть решение, читатель должен поискать его сам.

Поиск решения. Как всегда, когда задача на уровне определений, надо просто хорошо понять, что требуется. Вроде бы понятно: надо, чтобы f представлялась в виде суммы какой-то четной функции f_1 и нечетной f_2. Запишем $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Пока никаких идей. Но запишем еще и условия четности: $f_1(-x)=$ $=f_1(x)$; $f_2(-x)=-f_2(x)$. Если долго смотреть на эти формулы, то должна прийти в голову и четвертая, явно дополняющая их до гармонии: $f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$. (Это просто исходная формула, в которой вместо x подставлено $(-x)$). И тут... мы получили систему из четырех уравнений и четырех неизвестных, коими являются $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(-x)$, $f_2(-x)$. Решить ее уже несложно, мы это предоставим читателю, а сами выпишем только ответ:

$$f(x)=\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)+\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right).$$

Разумеется, эта формула и есть все доказательство, но если бы мы сразу ее выписали, чему бы научило такое доказательство?

О четности мы еще поговорим в других главах, а пока вернемся к манипуляциям со знаками в задаче про неравенство с модулями.

Приведем полное решение, учитывающее как симметрию, так и четность.

Доказательство неравенства $|x|+|y|\geqslant|x+y|$. Пользуясь четностью функции модуль, мы можем с самого начала считать, что $x+y\geqslant0$ (другими словами, если это не так, то переобозначаем x на $-x$ и y на $-y$, от чего условия задачи не изменятся). Это условие симметрично, так что дополнительно можем считать, что $x\geqslant y\Rightarrow x\geqslant0$ (иначе $x+y<0$). Значит, нам осталось доказать неравенство $x+|y|\geqslant x+y$ (мы воспользовались свойствами модуля), то есть $|y|\geqslant y$, которое есть равенство в случае $y\geqslant0$ и очевидно в случае, если $y<0$ (так как $|y|\geqslant0$).

Упражнение. Построить график функции $|x|+|y|=1$. Это упражнение хорошо объясняет геометрическую природу четности графиков.

Итак, мы выяснили, что бороться с модулями надо с помощью перебора вариантов. Покажем теперь, как сокращать перебор в том случае, когда модулей много. Решающую роль в этом играет метод интервалов.

Сначала — магическое заклинание. Вот что следует, не думая, писать, когда решаешь задачи с модулями:

«Найдем точки, где модули обращаются в нуль... (находим). Отметим эти точки на числовой прямой (отмечаем). Тогда прямая разобьется на несколько интервалов. Решая задачу в каждом из интервалов по отдельности, получаем совокупность систем...».

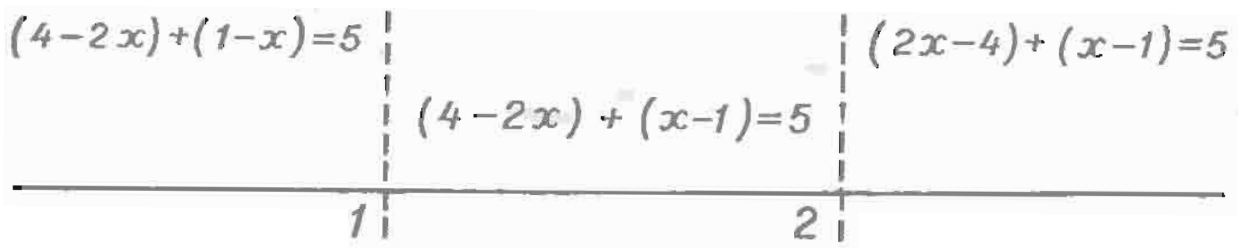
А вот как это делается на конкретных примерах. Чтобы не загромождать книгу ненужными и безыдейными техническими вычислениями, мы будем считать, что и два модуля — это уже много, тем более, что и здесь достигается некая экономия.

Задача. Решить уравнение

$$|2x-4|+|x-1|=5.$$

Прямой перебор потребует четыре варианта (при трех модулях их было бы уже восемь). Метод интервалов требует только трех (и четырех — для трех модулей).

Начнем. Найдем точки, где модули обращаются в нуль — это точки $x=2$ и $x=1$. Отметив их на числовой прямой, получим три



Метод интервалов

интервала. Решая задачу в каждом из интервалов по отдельности, получаем совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 2,\\ (2x-4)+(x-1)=5;\end{cases}\\ \begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 2,\\ (4-2x)+(x-1)=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 1,\\ (4-2x)+(1-x)=5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Особых комментариев здесь не требуется. Рассмотрим, например, вторую систему. В ней выражение под знаком первого модуля отрицательно (чтобы проверить, можно подставить любую точку из интервала, например 1, 5), а под знаком второго модуля — положительное число. В соответствии с этим и раскрыты оба модуля. Ну а дальше уже без модулей делать нечего. Два решения $x=0$ и $x=10/3$. Отметим, что вторая система решений не дала (помешало неравенство). Бывает также, что одно и то же решение появляется в двух системах: в одной оно отбрасывается неравенством, а в другой нет. Наконец, иногда уравнение вообще «пропадает». В этом случае следует руководствоваться неравенством, так что в ответе у уравнения может оказаться целый интервал.

При указанной методике, когда вся совокупность равенств и неравенств выписывается сразу, писать приходится немного больше, но зато очень редко допускаются ошибки. Чаще же опытные люди выписывают только один раз неравенство, а затем работают только с уравнением и... в конце забывают проверить, удовлетворяет ли ответ неравенству.

Два простых *упражнения* (первое — с подвохом):

$$|x-1|+|x|=1;$$
$$|x^2-1|+|x|+|x-3|=6.$$

Говоря о методе интервалов, нельзя не упомянуть о методе интервалов в решении неравенств. Ужасает, когда учащийся решает неравенство вида $\frac{x(x-2)}{x-1}<0$ следующим образом: «Чтобы дробь была отрицательна, надо, чтобы либо числитель был отрицательный, а знаменатель положительный, либо числитель отрицателен, а знаменатель положителен...». Не надо уподобляться народному лекарю Богомолу из книги «Золотой ключик, или приключения Буратино», который рассуждал так: «Одно из двух — или пациент жив, или он умер. Если он жив — он останется жив или он не останется жив. Если он мертв — его можно оживить или нельзя оживить». Тем более, что результат таких рассуждений (лечить «или касторкой или не касторкой») обычно достаточно убог.

Правильно и грамотно такие задачи решаются методом интервалов, а вот как — это дело каждого незнающего: он обязан изучить этот исключительно важный для каждого учащегося метод по любому пособию или учебнику. Можно даже самому придумать этот метод, руководствуясь методом интервалов для модулей. Мы же лучше займемся фальшивомонетчиками.

Задача. Перед Вами 12 монет, ничем не отличающихся друг от друга по виду. Одна из них фальшивая — она легче или тяжелее, чем остальные, но что именно — неизвестно. Требуется с

Где фальшивая монета?

помощью трех взвешиваний на рычажных весах найти эту монету и заодно выяснить, легче она или тяжелее остальных.

Поиск решения. Попробуем бездумно сразу положить шесть монет на одну чашу весов, шесть на другую и... И что дальше? Какая-то чаша перевесит, но мы даже не знаем, в какой из них монета фальшивая. Да-а-а. Впрочем, разузнать, в какой половине была фальшивая монета, можно во время следующего взвешивания: достаточно взять любые шесть монет с одной из чашек, разделить их на тройки и сравнить. Если вес одинаков, то фальшивая монета одна из оставшихся шести, и мы даже узнаем, легче фальшивая монета или тяжелее. Если же нет, то фальшивая монета в одной из этих двух троек. Но вот в какой? Да, понятно, что за одно взвешивание ни ту ни другую проблему не решить. Значит, не тот путь. Что же делать? Перебирать все возможные начальные взвешивания? Малоперспективно. Пожалуй, надо пока накопить некоторый статистический материал, а именно, что можно сделать за два взвешивания? В самом деле, сколько монет поддается проверке за два взвешивания? Если монеты две... то вообще ничего не узнаешь, сколько ни взвешивай. Гм, почему бы это? А если три? А-а-а, вот в чем дело: тут уже есть по крайней мере две хорошие монеты, и мы их вполне можем выделить в тот момент, когда весы уравновесятся (равновесие могут дать только хорошие монеты).

Итак, как мы поступим в случае трех монет? Первый шаг ясен: кладем на весы по монете. В случае равенства оставшаяся — фальшивая, а эти хорошие. На следующем шаге сравниваем фальшивую с хорошей и выясняем, легче она или тяжелее. Отлично. А если неравенство? Тогда оставшаяся — хорошая. Заменяем ее на одну из тех, что лежат на чашах, и... все в порядке: равенство — фальшивую сняли и мы уже знаем, легче она или тяжелее (по результатам предыдущего взвешивания), неравенство — на чаше фальшивая монета. Прекрасно!

Попробуем разобраться с четырьмя монетами. Если положить при первом взвешивании только по одной монете на каждую чашу, то неприятным вариантом будет равенство. Тогда останутся две монеты и одно взвешивание. Тут нельзя получить полную информацию: если мы возьмем из этих оставшихся на весы только одну монету и получим равенство, то вторая будет фальшивой, но мы так и не узнаем, легче она или тяжелее. А если возьмем обе? На разные чаши класть их нет смысла: получим неравенство, ну и что? На одну — тем более: мы, конечно, узнаем, легче фальшивая монета или тяжелее, но какая из них — ни за что. Таким образом, надо при первом же взвешивании класть все четыре монеты на весы: две с одной стороны, две с другой. Ясное дело, получим неравенство и останется всего одно взвешивание. Нет, не хватит, не может хватить в принципе. Значит, вывод грустный: нельзя оставлять четыре монеты после первого взвешивания. Но тогда надо взвешивать по пять или по шесть. По шесть мы уже пробовали — не получается. По пять? В случае равенства одна из двух оставшихся фальшивая, и узнать, какая именно, за два взвешивания реально: надо сравнивать с хорошими. А вот если неравенство, то уже тяжко. Ведь не получено почти никакой информации, и если мы займемся одной половиной, то за одно взвешивание все равно про нее все не узнаем. А плохая монета вполне может быть одной из пяти оставшихся. Не выходит. Впрочем, есть идея: поменять местами по две монеты. Тогда если неравенство поменяет знак, то фальшивая — одна из этих четырех, а если нет, то одна из шести тех, которые мы не трогали. Но определить за одно взвешивание — из шести монет — никогда! Что ж, выходит, не решается задача. Но этого не может быть, не зря же нас заставили ее решать. Значит, где-то в рассуждениях ошибка.

Просмотрим весь ход рассуждений заново (а еще полезнее в таких случаях заново записывать, не глядя в предыдущее, чего мы, правда, делать не будем). Итак... Первый подозрительный момент: почему все-таки для двух монет задача неразрешима? С одной стороны, понятно, а с другой — то и дело сравниваем две монеты. Может, тут-то и есть заковырка? В самом деле, почему ровно для двух монет не разрешима, а если их больше, то... Грандиозно! Ведь точно такая же ошибка сделана в другом месте, когда мы решили, что нельзя сводить дело к четырем монетам. Там же не просто четыре монеты будет, а еще и восемь настоящих! А с их помощью что-нибудь хорошее можно сделать. Что? Просмотрим быстренько наш анализ, где она, голубушка, хорошая монетка, нас из беды может выручить? Да, только в одном месте — ее сразу надо класть на весы, а одну из четырех подозреваемых не брать. Теперь, если равенство — все в порядке: невзятая четвертая и есть фальшивая. А если неравенство? Тогда... можно попробовать сделать то же, что мы уже пробовали: сравнить две подозреваемые с одной чаши. Если неравенство, то..., понятно, фальшивая среди них, и предыдущее взвешивание указало — легче она или тяжелее, значит, можно выбрать ее. Если же равенство, то фальшивая — оставшаяся на другой чаше, и опять же ясно, легче она или тяжелее. Ура! Теперь первое взвешивание в нашей задаче понятно: надо взвешивать по четыре монеты. В случае равенства мы уже знаем, как поступать (а случай неравенства читатель разберет сам).

Приходится просить у читателя прощение за несколько тяжеловесный текст. Остается только надеяться, что он все же попробовал хоть немного порешать задачу самостоятельно если не с монетами, то с карандашом и бумагой. Быть может, этот текст запутан так, как обычно бывают запутаны наши мысли, а может, все объясняется проще: кто ясно мыслит, тот ясно излагает!

Если же серьезно, то в этом фрагменте автор пытался показать, как именно возникают ошибки и как стоит их исправлять. Умение исправлять ошибки гораздо ценнее умения их не делать, и ему в отличие от второго *можно* научиться.

Следует обратить внимание на то, как решалась проблема перебора. Мы не бросились сразу в полный перебор, хотя отказать себе в первом шаге было трудно и не нужно. Зато, как только возникал маленький перебор (случай трех, четырех монет), мы его проводили полностью и со всей тщательностью (от того и в тексте перегрузка). Только после этих попыток, нащупав наиболее предпочтительные ходы перебора, мы ринулись на основной случай.

Хочется надеяться, что задача (а ей не один век) понравилась читателю и он попробует найти общее решение: какое максимальное число монет можно проверить на наличие одной фальшивой с помощью k взвешиваний. (Пока мы установили, что это 4 при $k=2$ и 12 при $k=3$. Точнее, мы установили, что эти числа подходят, но еще не убедились в их максимальности.) Полное решение опубликовано в книге Жана-Клода Байифа «Логические задачи».

Приведем еще один типичный пример переборной задачи.

Задача. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучу шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хоть один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько таких шаров в куче). Доказать, что менее чем за семь проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров. Доказать, что если шаров 19, то за восемь проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

Эта задача несколько труднее и непривычнее, но решать ее очень приятно. Опять же, рекомендуется сформулировать и решить общий случай (для двух радиоактивных шаров). Мы, однако, эту задачу решать не будем, а перейдем к следующей поразительной по своей постановке задаче.

Задача. Представим себе разговор трех математиков. Чтобы они обрели право гражданства, дадим каждому имя и фамилию: Коля Загадочный, Вася Суммирующий и Петя Множитель. Итак, между ними произошла следующая увлекательная беседа:

Коля. Друзья! Я загадал два натуральных числа.

Петя. Разных?

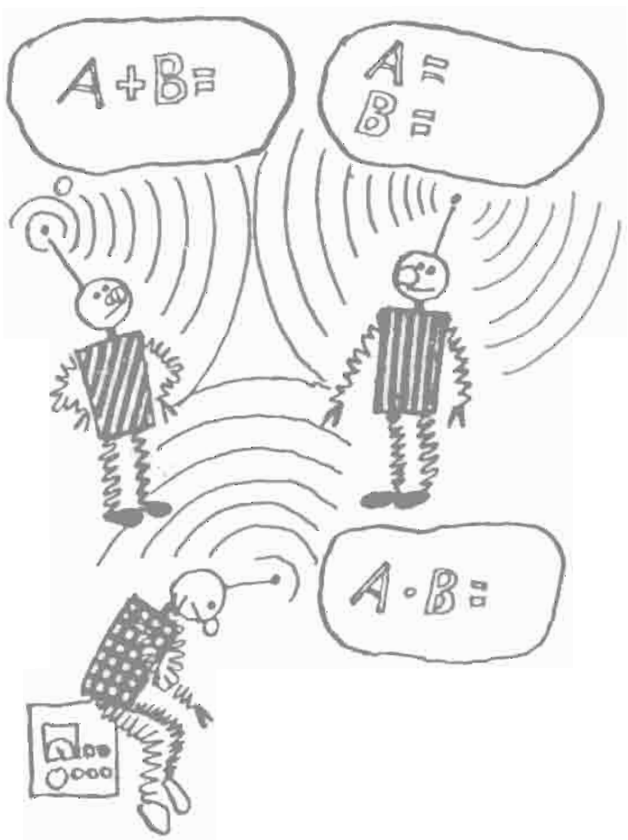
Коля. Не скажу. Может быть, и одинаковых.

Вася. А что скажешь?

Коля. А скажу вот что: их сумму и произведение.

Петя. Ну-у, это неинтересно, это все равно что сказать сами числа — систему уравнений уж мы как-нибудь решим.

Вася. Не говоря уже о теореме Виета, по которой их можно найти сразу, решив квадратное уравнение.



Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

Коля. Вы зря торопитесь, друзья. Все дело в том, что одному из вас я скажу сумму, а другому — произведение, так что каждый из вас будет знать только по одному числу.

Петя. Ну, говори же быстрей.

Коля. Тебе, дорогой товарищ Множитель, я, конечно же, скажу произведение этих чисел (говорит ему на ухо, после чего лицо у Пети вытягивается). Ну что, знаешь ты, какие я числа задумал?

Петя. Не-а.

Коля. Еще бы! А тебе, Вася Суммирующий, я, естественно, скажу сумму (говорит ему на ухо, после чего лицо у Васи тоже вытягивается). Ну что, знаешь, какие это числа?

Вася. Конечно, нет. Можно подумать, что ты и сам этого не знаешь.

Коля. Я-то знаю, но надо, чтобы и Петя знал! Кстати, Петя, ты все еще не знаешь, что за числа я задумал?

Петя. Увы.

Коля. А ты, Вася?

Вася. Спроси-ка лучше Петю.

Коля. Ну и спрошу. Как, Петя, ты уже знаешь эти числа?

Петя. Знаю!

Вася. Ну, тогда и я знаю!

Спрашивается, что же за числа задумал Коля Загадочный и как его друзья отгадали их?

Поиск решения. Конечно же, в первую очередь хочется посоветовать читателю самостоятельно понять суть дела: уж больно завлекательная задачка! Но если у него нет на это времени, что ж, приглашаем его искать вместе.

Первое подозрение, что здесь какое-то жульничество: из ничего не возникает что-то! Откуда, в самом деле, Петя мог узнать то, чего он не знал раньше? Не подмаргивали же, в самом деле, Петя с Васей друг другу. Приходится допустить, что нет. (Кстати, самое трудное в этой задаче — поверить в нее!) Как же тогда за нее браться? Попробуем перебор. Какими могли бы быть числа? Самый простой вариант: 1 и 1. Но тогда Множитель сразу бы догадался, да и у Суммирующего бы сомнений в том, что это за числа, не было. То же самое можно было бы сказать о варианте 1 и 2: оба ответят с первого раза, и по сумме и по произведению числа легко отгадываются. Ладно. Если же 1 и 3, то Петя все равно ответит сразу, а вот Вася не будет знать, что за числа: то ли 2 и 2, то ли 1 и 3 — в обоих случаях сумма равняется четырем. Интересно! А если числа 2 и 2 — то тут уже замолчат оба. Так, понятного мало, но зато есть четкий вопрос: когда именно мог бы ответить правильно Петя Множитель уже с первого раза? Ну что ж, здесь ответ очевиден: когда он услышал от Коли число, являющееся простым (или единицу). Во всех остальных случаях он ничего путного сказать не может: могут быть два разных разложения на множители. Даже четверку можно представить как дважды два и как четыре, умноженное на один. Ясно. А в каком случае Вася может с первого же раза заявить, что он знает числа? Конечно же, только тогда, когда сумма маленькая: 1, 2, 3. Ой, 1 даже не может быть. И все? Нет, если он услышал, что Петя заявил, не раздумывая, будто он знает числа, то он тут же должен сообразить, что их произведение — простое число (иначе, как бы Петя догадался?), и, может быть, сумел бы догадаться. Ну, конечно, например, если бы он знал, что сумма 4, и услышал, что Петя знает числа, то он моментально понял бы, что это 1 и 3, так как второй вариант 2 и 2 невозможен, ибо произведение было бы непростым. Точно так же он разобрался бы с суммой 6: единственный вариант простого числа — это 1 и 5. А вот сумма 5 вообще не могла бы быть. Да, но это все в том случае, когда Петя говорил, что он знает числа — это ведь такая мощная информация! Но Петя-то молчал — какая это информация? Но... Конечно же! Это и есть информация — то, что молчал. Это значит, что он, по существу, передал очень ценную информацию: произведение задуманных чисел *не является* простым числом. Значит, Вася, будучи опрошен первый раз, знал следующее: сумму чисел и то, что их произведение простым числом быть не может. Тогда надо быстро перебрать: для какой суммы он мог бы уже сказать числа при первом же ответе? Числа 2, 3 — это мы уже перебрали. Что следующее? Четыре. Годится! Если бы ему сообщили сумму 4, то он, зная, что произведение — число составное, немедленно объявил бы загаданные числа: 2 и 2. Еще? Пятерка — молчание. Шестерка? Один вариант — 1+5 отбрасывается, но выбрать между 2+4 и 3+3 пока не представляется возможным. Семь, восемь, девять — все это по тем же причинам не подходит. Большие числа, видимо, и проверять не стоит (на этапе поиска решения наверняка, хотя на этапе чистки придется это как-то обосновывать). Вывод: распознать Колины числа после первого вопроса Вася смог бы только в том случае, если бы это было 4 (конечно же, при условии молчания Пети при первом вопросе).

Следующий шаг. В каких случаях Петя установил бы число после второго вопроса? Войдем в его положение. Что нового он узнал к этому времени? Только то, что Вася чисел до сих пор не знает (ситуация, как в кино, «я знаю, что ты знаешь, что я знаю»). Значит, информация только такова: сумма чисел не равняется четырем (иначе Вася не молчал бы). Но это прекрасно! Значит, если бы Пете сообщили произведение 4, то тут-то он бы числа и расшифровал: это оказались бы 1 и 4, потому как 2 и 2 быть не может (сумма 4). Дальнейшее уже ясно. Раз и он промолчал, то Вася догадался, что произведение не 4, и если у него сумма 5, то он при втором вопросе громогласно заявил бы: числа эти суть 2 и 3. Но Вася не проявил такой эрудиции. Тут-то Петя и смекнул, что сумма чисел — не пять. И Петя ответил. А в каком случае он мог это сделать? Да только в одном: когда сообщенное ему произведение равно шести. Тогда вариант 2×3 не годится, так как сумма не 5, и осталось заключить, что искомые числа — это 1 и 6. Все.

Поистине, «все несчастья на Земле от недостатка информации».

Хочется надеяться, что эта задача послужит неплохим источником размышлений. Обобщать ее можно в большом количестве направлений. Заменить сумму на разность, увеличить количество вопросов, запретить одинаковые числа — вот только первые пришедшие в голову способы.

И вновь подчеркнем, что мы не стали делать с самого начала полный перебор. Хотя как раз в подобных задачах полный перебор возможностей самый быстрый (по времени), но не самый короткий (по написанию) способ решения задачи. Здесь по постановке уже чувствовалось, что о больших числах речи быть не может. Почти всегда полезен перебор в задачах про цифры, которых всего десять штук. Например, так можно решать 80% числовых ребусов типа

$$\begin{array}{r} \text{СНЕГ} \\ +\ \text{КРУГ} \\ \hline \text{СПОРТ} \end{array}$$

Поиск решения. Напомним, что в таких задачах одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные — разные (о разных буквах часто забывают).

Разумеется, мы не ринемся сломя голову в полный перебор, а попытаемся вначале проанализировать, что у нас есть. Прежде всего, у нас есть 10 различных букв. Это значит, что все цифры задействованы. Полный перебор всех возможностей занял бы слишком много времени (10! вариантов), поэтому попробуем несколько его ограничить. В первую очередь (это часто первый шаг в таких задачах) смотрим на количество цифр в каждом числе. Явно, что при сложении оно увеличилось. За счет чего? Разумеется, только за счет перенесения единицы в следующий разряд. Поэтому четкий вывод: буква С — это единица. Запишем ее в пример:

$$\begin{array}{r} 1\ldots \\ +\ \ldots. \\ \hline 1\ldots. \end{array}$$

Да, но что можно прибавить к единице, чтобы получилось переполнение и понадобилось переносить единицу в следующий разряд? Из цифр — это только 9. Хотя, может быть и 8, если одна единица перенесется из предыдущего разряда. Значит, здесь два варианта. Что представляет собой буква П в любом из них? Либо 0, либо 1 (может получиться 10 или 11, но не больше, когда к цифре прибавляем единицу, и еще одна единица, быть может, переносится из предыдущего разряда). Но 1 быть ие может — эта цифра уже использована, а разные буквы обозначают разные цифры. Мораль:

П — это 0. Тут небольшая неприятность — надо уметь отличать букву О от цифры 0. Чтобы это сделать, мы будем писать цифру потоньше.

Теперь наш пример выглядит так:

$$+\frac{\begin{matrix}1\text{НЕГ}\\ \text{КРУГ}\end{matrix}}{10\text{ОРТ}}\quad+\frac{\begin{matrix}1\ldots\\ \ldots\end{matrix}}{10\ldots}$$

Причем К — это 8 или 9. Еще одно заключение мы можем сделать, глядя на последние цифры: Т должна быть четной, так как она — последняя цифра суммы Г+Г. При этом Т — не нуль, так как нуль уже занят. Так что для Т только четыре возможности: 2, 4, 6, 8. Бо́льшего рассмотреть пока не удается, и мы вынуждены начать перебор. Сначала прикинем, насколько он велик. Для К — два варианта, для Т — четыре, оставшиеся шесть букв дают 6!=720 вариантов. Многовато, но есть надежда, что при более подробном знакомстве с каждым из них количество вариантов, подлежащих перебору, уменьшится. Да и сейчас оно хоть и очень велико, но уже реально. Начнем. Рассмотрим первый случай.

А. К=8. Тогда для Т остается только три возможности: 2, 4,6. Рассмотрим первую из них:

АА. Т=2. Тогда пример будет выглядеть так:

$$+\frac{\begin{matrix}1\text{НЕГ}\\ 8\text{РУГ}\end{matrix}}{10\text{ОР}2}$$

Для буквы Г могут быть только две возможности: 1 и 6, причем первая исключается. Остается Г=6:

$$+\frac{\begin{matrix}1\,.\,.\,6\\ 8\,.\,.\,6\end{matrix}}{1\,0\,.\,.\,2}$$

Для буквы Р у нас осталось пять возможностей. Переберем их все:

АAA. Р=3. Для того чтобы 1+8 дотянуло до десяти, нам нужно переполнение. Поэтому число Н должно быть достаточно велико. При наших оставшихся возможностях это либо 7, либо 9. Рассмотрим каждую из них.

АААА. Н=7. Имеем:

$$\begin{array}{r} 17.6 \\ +\,83.6 \\ \hline 1\ 0.32 \end{array}$$

Вот и первое противоречие: 3+7=10, так что буква О должна быть либо нулем, либо (если перенеслась единица из предыдущего разряда) единицей. Но и та и другая цифра уже заняты. Этот вариант полностью разобран. Заодно мы отыскали еще одно слабое место, которое тут же попробуем использовать в следующем варианте.

АААБ. Н=9. Тогда буква О должна быть либо двойкой, либо тройкой. Но обе цифры уже заняты. Противоречие. Случай Р=3 полностью разобран. Переходим к следующему.

ААБ. Р=4. Попробуем использовать только что освоенную методику. Для переполнения в разряде нужно либо Н=5, либо Н=7, либо Н=9.

ААБА. Н=5. Тогда Н+Р=9. Чтобы возникло переполнение, нужна еще одна единица и получится 10. Но тогда 0=О, что невозможно.

ААББ. Н=7. Тогда О, либо 1, либо 2 — и то и другое невозможно.

ААБВ. Н=9. Тогда О должно равняться трем либо четырем. Четверка занята, а тройка вполне возможна. Рассмотрим повнимательнее:

$$\begin{array}{r} 19.6 \\ +\,84{,}6 \\ \hline 10342 \end{array}$$

Оставшиеся две цифры 5 и 7 четверку нам не дадут. Это, следовательно, второе слабое место. Запомним.

ААВ. Р=5. Опять возможиы только два кандидата иа роль Н: 7 и 9.

ААВА. Н=7. Тогда вынужденно О=3. Имеем

$$\begin{array}{r} 17.6 \\ +85.6 \\ \hline 10352 \end{array}$$

Увы, 4 и 9 с оставшимися для них ролями не справляются. Опять подводит второе слабое место. А не попробовать ли в следующем разборе сразу на нем сыграть?

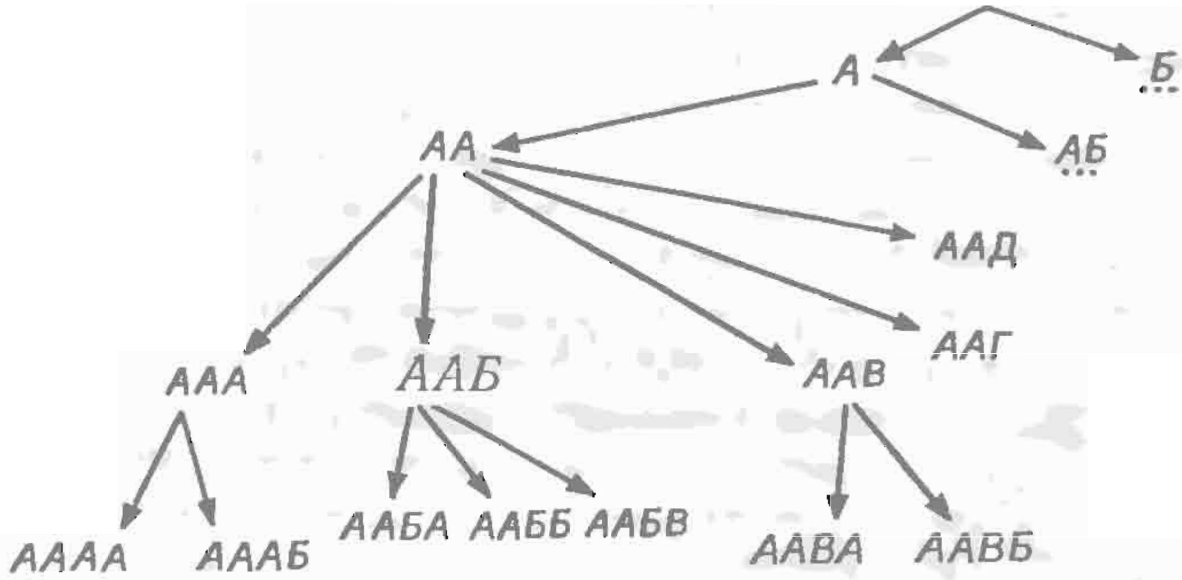
ААВБ. Н=9. С учетом переноса единицы сумма Е+У должна, оказывается, оканчиваться на 4. Из цифр, которые остались в нашем распоряжении (3, 4, 7), такого не соорудишь. Да, второе слабое место оказывается еще более слабым, чем первое. Надо было с него и начинать! Ничего, попробуем делать так в следующих вариантах.

ААГ. Р=7. Тогда сумма Е+У должна оканчиваться на 6. В нашем распоряжении цифры 3, 4, 5, 9. Легко видеть, что такого не получится.

ААД. Р=9. Тогда сумма Е+У должна оканчиваться на 8. Единственный вариант получить это — 3+5. Тогда для цифр Н и О остаются кандидаты 4 и 7. Ни так, ни эдак не получится.

Вариант АА полностью рассмотрен. Оказалось, что он невозможен. Мы не будем утомлять читателя перебором оставшихся вариантов. Если он захочет, то проделает эту работу самостоятельно.

Так много было написано не случайно. Хотелось бы все-таки показать пример настоящего перебора, который проводит в своей работе математик (хотя, конечно, не для таких задач). Более того, этот пример — поиск решения так и рождался, как здесь написано, непосредственно при написании текста главы. Хотелось бы обратить внимание на следующие моменты. Во-первых, когда мы начали перебор — когда он стал казаться реальным (скажем, за несколько дней непрерывной работы) и когда уже не было видно реальных путей его сокращения. Во-вторых, заметьте, что эти реальные пути открылись уже после того, как мы начали пе-



Лексикографический перебор

ребор. Ведь последние варианты мы уже разбирали гораздо эффективнее, чем первые. И третье. Хочется обратить внимание на способ нумерации вариантов — как в словаре. При этом, когда мы рассматривали вариант ААВБ, к нему относилось все, что сказано в пунктах А, АА, ААВ, но не относилось сказанное в пункте, скажем, ААБ. Это — довольно удобный способ нумерации вариантов в переборных задачах (а если не следить за их нумерацией, неминуемо запутаешься и какой-нибудь случай да прозеваешь), и называется он лексикографическим.

Невозможно окончить эту главу, не сказав хотя бы нескольких слов о той исключительно важной роли, которую играет метод перебора сегодня. Еще лет 30 назад перебор, в котором надо было разобрать миллион вариантов, считался практически неосуществимым. Это значительно ограничивало возможности метода, и в серьезных задачах к нему прибегали только в самых крайних случаях, когда ничего другого найти просто не удавалось. Причем задача уже с сотней вариантов считалась очень тяжелой, а об умельцах, способных разобрать десять тысяч вариантов, ходили легенды. Причину этого понять несложно: даже если считать, что один вариант отнимет только час, то сто часов рутинной, однообразной работы, как правило, требующей скрупулезной точности — это суровое наказание.

С появлением ЭВМ ситуация коренным образом переменилась. Сейчас, когда быстродействие даже персональных компьютеров измеряется миллионами операций в секунду, возможности перебора существенно расширились. Никто уже не боится миллиона вариантов, если ... он умеет программировать, потому что главная задача в методе перебора сегодня — правильно выбрать и запрограммировать алгоритм перебора, а скрупулезно точно считать варианты, не засыпая при этом от скуки однообразия, будет машина. Чтобы не ходить далеко за примерами, заметим, что рассмотренный спортивно-числовой ребус решался автором отнюдь не так, как он тут выше писал. Просто минут за 15 прямо за пультом ЭВМ была набрана примитивнейшая программа перебора вариантов, еще минут 15 она отлаживалась, а на счет времени ушло меньше, чем на прочтение этого предложения...

5

О противных доказательствах

— Откуда вы знаете, что я не в своём уме? — спросила Алиса.
— Конечно, не в своем, — ответил Кот. — Иначе как бы ты здесь оказалась?

Л. Кэрролл. Алиса в стране чудес

Эта глава призвана убедить читателя, что самый удобный и самый элегантный способ доказательства — это доказательство от противного. Начнем со следующего ошеломляющего факта.

Утверждение. Любую теорему, которую вообще можно доказать, можно доказать и рассуждением от противного.

Доказательство. Рассмотрим теорему, которую можно как-то доказать. Приведем для нее следующее доказательство от противного.

Предположим противное — что теорема не верна. Докажем ее (ведь это сделать по условию как-то можно). Получим, что она верна, что есть явное противоречие с тем, что она не верна. Следовательно, наше предположение оказалось неверным и на самом деле теорема верна. Утверждение доказано.

Упражнение. Доказать само утверждение методом от противного.

Понятно, что все это скорее шутка, чем серьезная аргументация, но шутка с долей истины (все, между прочим, совершенно строго и верно). Попробуем теперь разобраться более глубоко, что представляет собой прием доказательства от противного и какие удобства он нам действительно обеспечивает.

Кратко — суть метода. Берется утверждение теоремы. Выражается сомнение, что оно истинно, и четко формулируется то, что должно было бы быть вместо него (магическая фраза: предположим, что напротив...). Тогда, в дополнение к условиям задачи, мы получаем в свое распоряжение еще одно (на самом деле не существующее, но это нас мало беспокоит). Манипулируя всем этим, стремятся получить какую-нибудь математическую бессмыслицу — невозможное условие, равенство, утверждение и тому подобное, одним словом — противоречие: иногда — с самим этим дополнительным предположением, а иногда — вообще с чем-то из другой области. (В теории групп довольно-таки часто противоречием является какой-нибудь факт из алгебраической теории чисел.)

Самое замечательное, что можно по-прежнему доказывать теорему — противоречие будет с предположением о том, что она не верна. Основное достоинство метода — широта. Вместо узкой цели — доказательства конкретного факта — у нас грандиозный выбор: отыскать противоречие с любым разделом математики. Основное удобство — у нас условий на одно больше, а самое главное, это дополнительное условие может оказаться гораздо более сильным, чем исходные, потому что позволяет строить несуществующие объекты (а про несуществующий объект можно доказать любой факт, другое дело — как). И еще раз повторим — можно и просто доказать саму теорему, но имея в запасе на одно предположение больше. Начнем с одного из самых древних образцов «противного» доказательства.

Теорема. Простых чисел бесконечно много.

Поиск решения. Как подступиться к этой задаче? Первая и естественная попытка — построить простые числа конструктивно одно за другим. Мы опустим сей «судорожный» этап, так как этого пока не умеет делать никто — никому не известна удобная единая формула для простых чисел (хотя есть замечательный результат Матиясевича: существует многочлен от нескольких переменных, значения которого при различных натуральных аргументах — все простые числа, и только они). Можно как-то связать простые числа с рядами (так поступил в своем доказательстве Эйлер), но надо хотя бы знать, что это за зверь такой — ряд.

А что если предположить противное? Предположим, что, напротив, простых чисел конечное число. Тогда есть и последнее (вот он — несуществующий объект!). Ну-у вообще это как-то несолидно — что же после него не будет ни одного простого числа? Тогда все, что больше него, должно делиться на одно из этого конечного списка простых чисел? Ну это уж вряд ли! Наверняка можно соорудить такое число, чтобы оно не делилось ни на одно из них. Вообще для любого конечного набора чисел можно найти такое число, которое ни на одно из них не делится — это ясно! Например, взять их все, перемножить и прибавить единицу. Вот и все — тут-то и будет противоречие.

Чистка решения предоставляется читателю.

Этот пример не только убедительно демонстрирует преимущества несуществующих объектов, но и отчетливо показывает главный недостаток доказательств от противного — их неконструктивность. Зачастую из доказательства нельзя извлечь ничего кроме самого утверждения. Например, в нашем случае мы ни насколько не продвинулись к пониманию того, как уже устроены простые числа. Этот недостаток настолько серьезно беспокоил многих крупных математиков, что возникли целые течения в математике (в первую очередь, интуиционизм), представители которых считали неправомочными доказательства от противного. А в самом деле, что из того, что я получил противоречие? Это только доказывает, что отрицание утверждения ложно, но отнюдь не то, что утверждение верно. И как тут не вспомнить о том, как Ходжа Насреддин был судьей. «Ты прав»,— сказал он первому из спорящих, которые попросили рассудить их. «Ты прав», —сказал он и второму. Это все слышала его жена и с удивлением спросила Ходжу: «Как же так, один говорит одно и ты с ним соглашаешься, второй — прямо противоположное, но ты и ему говоришь, что он прав. Разве так может быть?» — «Ты тоже права»,— успокоил ее Насреддин. Но, читатель, не бойся — интуиционизм не настолько повлиял на математику: большинство математиков не нашли причин отказываться от такого удобного и важного метода, тем более, что он еще ни разу не подводил на практике. И не подведет, если им правильно пользоваться.

Очень поучительно сравнение с методом математической индукции. Имеется очень надежный и мощный инструмент решения задач индукционного типа, но не поддающихся индукционным рассуждениям (во всяком случае, стандартным). Это — метод минимального контрпримера.

Технически метод выглядит так: «Предположим противное. Тогда существует контрпример к условиям задачи. Рассмотрим минимальный такой контрпример...» Другими словами, мы, во-первых, берем несуществующий объект, а во-вторых, выбираем самый-самый такой объект. Типичное противоречие обычно заключается в том, что удается доказать, что вопреки нашему предположению (и нам на радость!) он не самый-самый.

Главных моментов здесь два: первый — правильный выбор понятия минимальный (минимальный в смысле чего — это всегда надо четко оговорить и убедиться, что он действительно обязан существовать); второй — организовать способ построения по данному объекту еще меньшего и организовать спуск от первого ко второму (поэтому данный метод, по существу, идентичен методу бесконечного спуска, открытому еще Ферма).

Рассмотрим теперь конкретную, хорошо известную и довольно трудную задачу.

Задача. При дворе короля Артура собралось $2k$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $k—1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

Поиск решения. Первая попытка, конечно, индукционная. Поначалу кажется, что она должна сработать. Ну, в самом деле, высадим на время из-за стола двух врагов, оставшихся $2k—2$ рыцаря по индукционному предположению рассадить можно, а этих как-нибудь втиснем — для каждого из них место, где сидят рядом два его друга, должно найтись.

Увы, это только на первый взгляд. При более тщательном рассмотрении выясняется, что индукционный переход не может быть применим: для того чтобы рассадить $2k—2$ рыцаря, у каждого из них должно быть не более $k—2$ врага, а в наших условиях их вполне может оказаться и $k—1$. Вот так-то!

Это очень неприятный психологический момент. Казалось, что задача вот-вот решится с помощью индукции, но на деле такого не происходит, она «выскальзывает» из рук, причем даже не понятно, как с этим бороться. Индукция (во всяком случае естественная — по k) не срабатывает. Что же делать?

Попробуем от противного. Тогда, как ни рассаживай, все равно рядом окажутся враги. Попробуем рассадить их хотя бы максимально благоприятным образом, так, чтобы сидящих рядом враждующих пар оказалось минимальное число. Такая расстановка, очевидно, существует, хотя, конечно, их может быть и несколько — с таким числом пар.

Рассмотрим ее. Появилась смутная надежда выйти на решение. Нам нужно попытаться эту расстановку улучшить, то есть пересадить несколько человек так, чтобы число сидящих рядом враждующих пар уменьшилось. Короче говоря, нам нужно уменьшить минимальный контрпример, что и приведет нас к желанному противоречию.

Теперь давайте думать, за счет чего мы можем улучшить расположение. Во-первых, надо рассадить хотя бы одну пару врагов. Во-вторых, надо постараться не приобретать новых, так что желательно общий порядок не слишком ломать. Точнее, надо постараться не ломать никаких других соседств, кроме тех, которые поломаются из-за того, что мы должны будем переселить хотя бы одного из пары врагов.

Тут одно из двух. Либо мы решим, что это попросту невозможно (попробовав простые пересадки одного из двух рядом сидящих врагов), либо (хотя такой ход психологически довольно трудно найти) сообразим, что наиболее благоприятными будут перестройки такого вида, как на рис. 13. Возьмем дугу окружности и пересадим в ней всех в обратном порядке. Тогда соседи поменяются только у двух крайних: у A и у H.

Практически задача уже решена: мы нашли довольно разумный способ улучшать расстановку, и осталось убедиться, что условия задачи действительно позволяют сделать это. На всякий случай, мы все же приведем часть «очищенного» решения.

Рассмотрим пару врагов X, A, сидящих рядом. У X по крайней мере k друзей из оставшихся $2k$—2 рыцаря. У каждого из этих k друзей рассмотрим следующего, кто сидит за ним по часовой стрелке. Так как их все-таки больше, чем врагов у A, то по крайней мере один из них — друг A. Итак, обязательно найдется такая пара H, Y, сидящих друг за другом по часовой стрелке, причем H — друг X, а Y — друг A. Перевернув дугу AH, мы уменьшим число враждующих пар (рис. 14). Замечательное качество этого решения — его конструктивность (конструкция

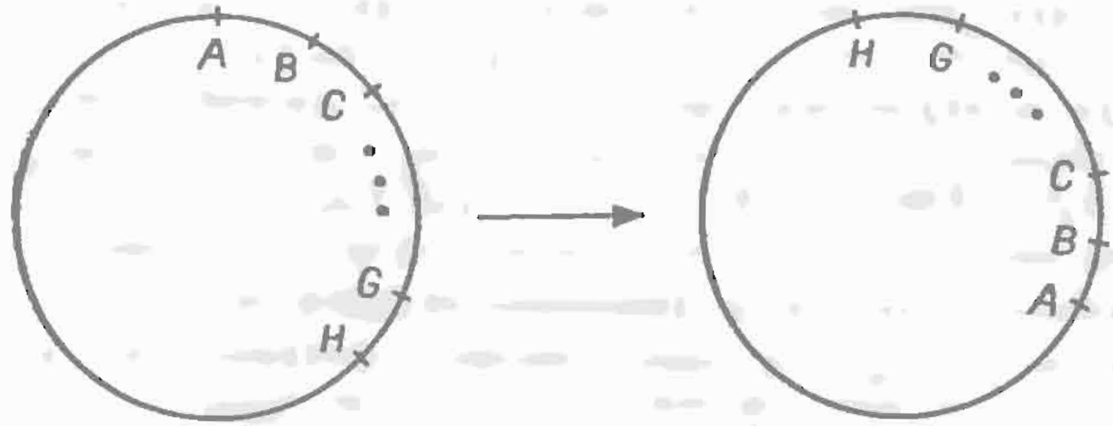


Рис. 13. Перевернем дугу окружности

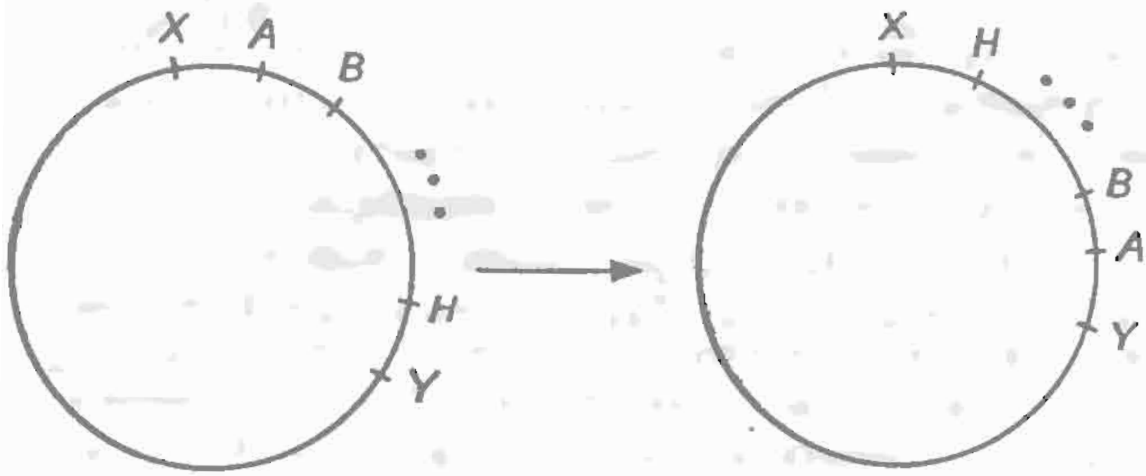


Рис. 14. А кто соседи?

улучшения применима и к существующим объектам), но, как уже говорилось, это редкое качество для такого подхода.

Достоинства метода налицо: там, где не было индукции, мы легко обошлись почти индукционными рассуждениями. Задним числом уже можно было бы сконструировать и индукционное доказательство с индукцией по числу враждующих пар, но с самого начала такую индукцию очень трудно придумать. Да и задним числом не просто — попробуй, читатель!

Есть и еще одно важное достоинство у метода минимального контрпримера, использованное в данном решении. Дело в том, что мы совсем не обязаны с самого начала задумываться, в каком смысле пример является минимальным. Наоборот, при поиске решения поступают так: берется минимальный контрпример (минимальный — пока еще не известно, в каком смысле) и анализируется, что можно с ним делать. Нашли какой-то способ преобразования и тут же смотрим: а что при этом уменьшается? Если что-то уменьшается, то вот в этом смысле и будем считать пример минимальным. Единственная забота — убедиться, что такой минимум существует. Например, в нашей задаче он существовал уже потому, что любое множество натуральных чисел обладает минимальным числом. А вот пример ошибочного рассуждения.

Псевдозадача. Доказать, что все целые числа — четные.

Псевдорешение. Предположим противное. Возьмем тогда минимальный контрпример — минимальное нечетное число. Отнимем от него 2 и получим меньшее нечетное число. Противоречие. В чем ошибка? Не существует минимального. Контрпримеров к условиям задачи много, но не существует минимального.

Еще одну тонкость читатель должен понять сам, разобрав, почему не проходит то же рассуждение для натуральных чисел (*псевдозадача:* все натуральные числа — четные).

Но это, пожалуй, все тонкости. В целом метод минимального контрпримера трудности не составляет и является одним из самых мощных и надежных помощников в различных областях математики. Рассмотрим еще одну достаточно сложную задачу.

Задача. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{N}$ — иррациональное число при любом натуральном N.

Поиск решения. Сама формулировка задачи просит начать с индукционных попыток. Начнем с базы индукции. Нужно доказать, что $\sqrt{2}$ — число иррациональное, что было известно еще древним грекам. Сейчас это доказательство стало считаться стандартным. Проведем его, слегка, впрочем, видоизменив с точки зрения нашего подхода в этой главе.

Пусть, напротив, $\sqrt{2}$ — число рациональное. Тогда его можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Так как подобных записей, вообще говоря, может быть несколько (например, $\frac{2p}{2q}$), то выберем среди них минимальную, например с точки зрения $p+q$. Она у данного рационального числа существует. Тогда имеем $2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 2q^2=p^2\Rightarrow p$ делится на $2\Rightarrow p=2p'\Rightarrow 2q^2=4(p')^2 \Rightarrow q^2=2(p')^2\Rightarrow q$ тоже делится на $2\Rightarrow q=2q'\Rightarrow \frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}=\frac{p'}{q'}$. Получили меньшую запись и требуемое противоречие.

Аналогично проводится доказательство иррациональности чисел вида $\sqrt{m}$, где m — не точный квадрат (упражнение $m=90$).

Следующий шаг: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Попробуем сразу возвести в квадрат: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}\Rightarrow 5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow\sqrt{6}$ — число рациональное. Замечательно! Вроде бы индукционный ход уже нащупан. Но на всякий случай еще один шаг: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+2$ — неинтересно, а вот $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — это уже настоящая проверка. Ну, а теперь — в квадрат: $4+2+3+5+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{6}+$ $+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$. Батюшки! Никаким индукционным переходом здесь и «не пахнет». Да, но что-то искать надо. Может быть, двойку надо было убрать?

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}-2=\frac{p'}{q'}.$$

Но в квадрате опять три корня и более плохих: $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$. Так, а может, оставить опять $\sqrt{2}$ отдельно?

$$\sqrt{2}=\frac{p'}{q'}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\Rightarrow 2=r_1+r_2\sqrt{3}+r_3\sqrt{5}+2\sqrt{15},$$

где r_1, r_2, r_3 — рациональны? Выиграли ли мы хоть что-то? Да вроде нет, разве что корни оказались связанными между собой. Попробуем это использовать. Например, так:

$$\sqrt{3}\,(-2\sqrt{5}-r_2)=r_1-2+r_3\sqrt{5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\,(r_4+r_5\sqrt{5})=r_6+r_7\sqrt{5}.$$

Теперь, если расписать числа (а раньше времени мы этого не делали, чтобы не затенять идеи), то, несомненно, получится, что

$\sqrt{5}$ — рациональное число. Ладно, хоть что-то стало понятно. Постараемся сделать выводы.

Первый вывод. Ясно, что мы решаем не ту задачу. Она плохо сформулирована, слишком частно. Явно, что ведь верен более общий факт. Должно было быть что-то такое: $r_2\sqrt{2}+r_3\sqrt{3}+r_4\sqrt{4}+\ldots$ $\ldots+r_N\sqrt{N}$ — иррациональное число при любых рациональных числах r_i. Хотя... хотя это не верно. Например, $2\sqrt{2}-\sqrt{8}=0$. Спокойствие. Эту неприятность надо как-то обойти. Где-то так: избавиться от квадратов под корнем. Сформулируем.

Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — различные натуральные числа, каждое из которых не делится на квадрат никакого простого числа. Если $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — какие-то рациональные числа, не все равные нулю, то $r_1\sqrt{n_1}+r_2\sqrt{n_2}+\ldots+r_m\sqrt{n_m}$ — число иррациональное. Похоже на правду? Вполне. Быстренькая проверка: а наша исходная задача из этой вытекает? Вроде бы (а почему, о читатель?). Значит, вот это утверждение и будем пытаться доказывать.

Вернемся к тому доказательству, которое мы уже провели. Индукция вроде бы не прошла, но что-то индукционного типа в рассуждениях промелькнуло. Это верная примета — надо попытаться использовать метод минимального контрпримера. Минимального в смысле чего, пока не ясно. Потом поймем.

Далее, раз уж мы берем контрпример, надо постараться взять пример «со всеми удобствами». Например, было бы удобно, чтобы все r_i были целыми, и этого всегда можно легко добиться, домножив на общий знаменатель. Значит, будем брать минимальный контрпример с целыми коэффициентами.

Так, но что же мы все-таки использовали в уже проведенном доказательстве? Чем числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$ оказались лучше исходных чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$? А-а-а, ясно чем: в них же меньше простых делителей! Прекрасно, значит, берем минимальный контрпример с точки зрения наименьшего количества простых делителей в числах $n_1, n_2, \ldots, n_m$. И тогда вроде бы видно, как действовать дальше: переносим все корни с одним из простых делителей, скажем, p_1, в левую сторону, а все остальное — в правую и возводим в квадрат:

$$[\sqrt{p_1}(r_1+\alpha_1\sqrt{k_1}+\ldots+\alpha_s\sqrt{k_s})]^2=(\beta_1\sqrt{L_1}+\ldots+\beta_t\sqrt{L_t}+r)^2.$$

Теперь простых делителей становится меньше, и все прекрасно. Так мы и поступали выше, перетащив все с $\sqrt{3}$ влево. Значит, схема доказательства уже наметилась. Какие возникнут трудности? Вроде бы только одна, причем та же, что и раньше. Непонятно, как после возведения в квадрат мы покажем, что у нас не получится точное равенство, то есть что не все сократится. В конкретных случаях, таких, как $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, это просто, и то коэффициенты считать противно, но нам-то нужно что-то общее, универсальное!

Правда, какой-то намек виден уже в доказательстве при $\sqrt{2}$ — надо работать на делимости. Да, пожалуй, почти наверняка правая часть после возведения в квадрат не будет делиться на p_1. А если она с самого начала делилась? Тогда... сократим на $\sqrt{p_1}$ и получим меньший контрпример. Значит, наш минимальный контрпример обогатился еще одним свойством: у него минимальна, скажем, сумма модулей всех входящих в него чисел. (Так как мы имеем дело только с натуральными числами и корнями из них, то и такой существует.) Но это — во-вторых, то есть мы ищем минимальный контрпример среди всех контрпримеров с минимальным количеством простых делителей.

Итак, считаем, что правая часть на p_1 не делится, и осталось только показать, что и квадрат тоже не будет делиться. Да..., но это не верно. Например, $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=8+2\sqrt{15}$, и на 2 все делится. Хотя... это свойство числа $p=2$, так как $(a+b)^2=a^2+b^2+$ $+2ab$, что и объясняет его особую роль. Ну, это ерунда — мы всегда можем выбрать другое бо́льшее число. Итак, остается доказать лемму.

Лемма. Если все числа $m_1, \ldots, m_k$ свободны от квадратов и не делятся на $p>2$, а среди целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ хотя бы одно не делится на p, то в выражении $(\alpha_1\sqrt{m_1}+\ldots+\alpha_k\sqrt{m_k})^2$ после раскрытия скобок и приведения подобных найдется коэффициент при каком-то корне, не делящийся на p.

Доказательство. Опять возьмем минимальный контрпример (местного значения для этой леммы, а не тот, который мы «истязали» в общем доказательстве). Тогда опять можем считать, что все α_i на p не делятся (иначе — отбросим $\alpha_i\sqrt{m_i}$). Пусть все m_i расположены в порядке возрастания. Тогда в квадрате у нас будет выражение $2\alpha_{k-1}\alpha_k\sqrt{m_{k-1}m_k}$. С ним ничто не сократится, так как это — самые старшие корни. Но $\alpha_{k-1}\alpha_k$ на p не делится. Значит, это не контрпример. Лемма доказана.

Теперь ясен общий план доказательства основной теоремы. Лемма гарантирует, что после возведения в квадрат у нас справа будет какой-то корень с коэффициентом, не делящимся на p. Слева таких корней нет, значит, мы не все сократим после приведения подобных и, следовательно, получим контрпример с меньшим числом простых делителей (хотя, быть может, с большей суммой модулей, но это-то, во-вторых!). А это нам и надо. Задача решена.

Упражнение. Провести основательную чистку решения. В первую очередь найти ошибку в доказательстве леммы и надлежащим образом исправить ее (что именно — то ли ошибку, то ли лемму?).

Упражнение. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для корней произвольной степени.

Отметим, насколько гибким оказался прием контрпримера. Насколько тесны были бы рамки индукции! Ведь практически все, что мы делали, мы добавляли к свойствам контрпримера.

Следует также обратить внимание на важный прием обобщения задачи: мы ее обобщили, потому что более полно поставленную задачу оказалось легче решить. И часто решающим обстоятельством является именно правильная постановка задачи. В данном случае правильной оказалась постановка в максимальной общности. Причина ясна — рассуждения типа индукционных требуют однородного материала и беспомощны при наличии «дыр».

Вот один простой пример: попробуйте доказать по индукции грубое неравенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}<1000$$

и точное равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}.$$

Вопреки, казалось бы, здравому смыслу более сильная формулировка доказывается намного легче (по индукции).

И последний момент, о котором хотелось бы все же сказать. Обратите внимание, как много было проведено черновой работы, прежде чем мы стали доказывать сам факт. Как и в физике, часто для хорошей теории нужен большой предварительный экспериментальный материал. И даже если его много, он не сразу ложится в гладкую и стройную теорию и почти всегда требует последующего уточнения (сколько неверных гипотез было сформулировано!). А решает все труд.

В заключение — несколько необычных задач для тренировки чувства «противного». Несколько нематематическая природа формулировок делает их не совсем корректными, но зато позволяет «живьем» увидеть суть и границы применимости метода. В качестве компенсации будут даны подсказки, но, право, лучше ими не пользоваться...

Для начала небольшой экскурс в теологию. В старину любили доказывать существование бога. Ради разнообразия поступим наоборот. Как математики, мы должны дать определение. Определим бога самым могущественным способом — как существо, которое может ВСЁ.

Задача. Доказать, что бога нет.

Подсказка. А может ли он придумать задачу, которую никто не сможет решить?

Существенно труднее атеистическая задача: что делать, если человек, которому Вы с сияющим видом расскажете свое решение, усмехнется и скажет: «Ну и что? На то он и бог, чтобы сделать даже то, что невозможно сделать!»?

Обратимся теперь к богу менее могущественному, а именно Зевсу. Согласно греческой мифологии он создал собаку, от которой никто не мог убежать, и лисицу, которую никто не мог догнать. Так уж случилось, что в один прекрасный день эта самая собака бросилась в погоню за «недогоняемой» лисицей. Как

Вы думаете, чем это кончилось? Разрешить это противоречие Зевсу оказалось под силу.

Вместо подсказки: ознакомьтесь с греческой мифологией! Для культурного человека знакомство с нею не менее важно, чем знакомство с теоремой Пифагора.

С парадоксом брадобрея знакомы многие, но в такой постановке она кое для кого может оказаться сюрпризом.

Задача. Один парикмахер как-то заявил, что бреет только тех, кто не может побрить себя сам. Считая это правдой, определите пол брадобрея.

Подсказка. Если он мужчина, то может ли он себя побрить?

И последняя, совсем уж сомнительная

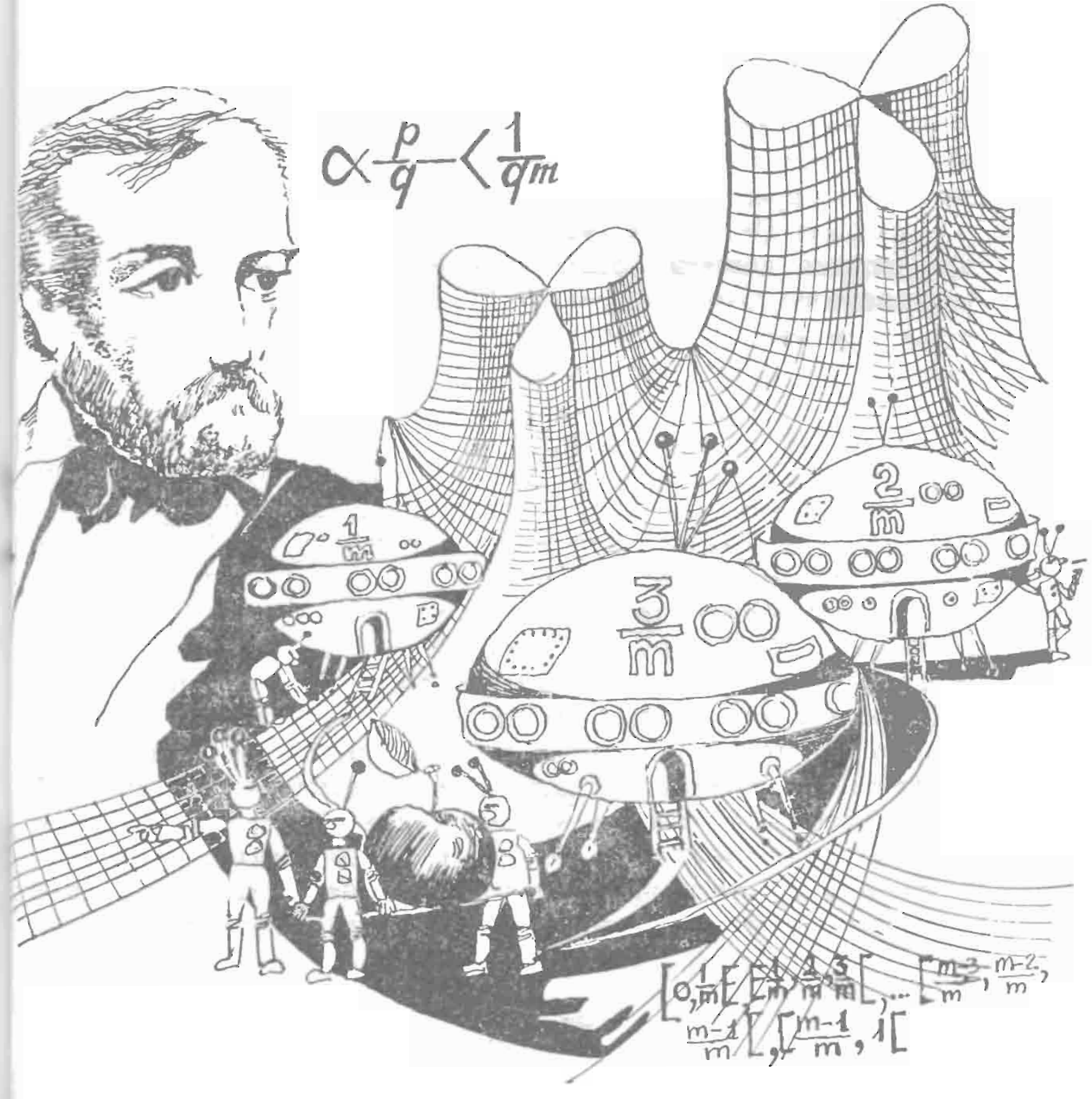
Задача. Доказать, что все числа интересные.

Подсказка. Не правда ли, наименьшее неинтересное число само по себе интересно?

6

Как считать, чтобы не считать

(принцип Дирихле)



И чтоб не краснеть за себя дураку,
Чтоб каждый был выделен, каждый,
На каждого умного по ярлыку
Навешено было однажды.

Б. Ш. Окуджава

Об этом замечательном принципе, носящем имя Дирихле, написано много, написано понятно и хорошо. Однако, поскольку нельзя сказать, что каждый школьник овладел им в совершенстве, автор надеется, что и его добавление в общий котел хоть кому-то, но придется по вкусу.

Наиболее убедительным началом этой темы обычно служит подсчет волос на голове. Для разнообразия придадим ему инопланетную окраску.

Задача. По еще не полученным данным, на голове у каждого жителя планеты Казанг VI вместо волос растут антенны в количестве не более 100 тысяч. По последней переписи, на планете проживает не менее 8 миллионов жителей. Доказать, что найдется 80 обитателей Казанга VI с одинаковым числом антенн на голове.

Небольшое предварительное рассуждение. Задача интуитивно ясна: жителей так много, что если сравнивать число волос-антенн на голове у каждого, то обязательно начнутся повторения. Однако как это доказать строго? Как посчитать, чтобы на самом деле не считать? А вот как: надо только сделать вид, что мы их считаем, и мысленно навесить на каждого по ярлыку.

Решение. Представим себе (мысленно), что у нас есть 100 001 большая клетка (раз это инопланетяне, то можно представить все клетки в виде космолетов). На каждой из них напишем число от 0 до 100 000 включительно. А затем (мысленно) начнем рассаживать инопланетян по клеткам в соответствии с ярлыками. Если у очередного жителя на голове две антенны, то направим его в космолет № 2, если 500 — то в № 500. Лысых, без единой антенны на голове, отправим в нулевую клетку (Кстати, именно из-за лысых задачу пришлось формулировать с привлечением элементов фантастики: для любого восьмимиллионного города Земли аналогичная задача имеет очевидное решение — 80 лысых там всегда найдется. Но, может быть, на Казанге VI с выпадением антенн научились бороться?).

Что теперь означают условия задачи? Только то, что требуется доказать, что хоть в одном из космолетов сидит не менее 80 человек, точнее нечеловек. Но это действительно так: если бы в каждой клетке было бы меньше 80 жителей, то их общее количество не превосходило бы $79 \times 1\,00\,001$, что гораздо меньше восьми миллионов. Задача решена.

Проведенное рассуждение почти дословно можно применить для доказательства следующего, более сухо звучащего факта: *если имеется $kp+1$ предмет p различных сортов, то найдется $k+1$ предмет одного сорта.* Это и есть принцип Дирихле. Докажи его, читатель, для тренировки. Удобно представлять себе даже не формулировку, а само рассуждение. Другими словами, написав «согласно принципу Дирихле существует...», Вы как бы сообщаете пароль, благодаря которому Вас признают способным доказать упомянутое существование по этой стандартной схеме: «Предположим противное. Тогда предметов каждого сорта не более k и их общее количество не превосходит kp, что ведет к противоречию». Чаще всего даже не пишут, что такое k или p, если это ясно из контекста.

Примеры. Согласно принципу Дирихле:

1. Если в p клетках сидит $p+1$ кролик, то хотя бы в одной клетке не меньше двух (считается, что с помощью кроликов удобнее всего демонстрировать этот принцип).

2. Из 11 цифр всегда можно выбрать две одинаковые (не путать цифры с числами).

3. Из 400 учеников школы всегда найдутся два, день рождения у которых одинаковый (хотя год рождения может быть разный). В связи с этой задачей полезно заметить, что даже в одном классе с количеством 30 учеников с вероятностью больше половины найдется совпадение дней рождения (читатель может проверить это на практике, а затем попытаться доказать).

4. Из трех ненулевых чисел всегда найдутся два с одинаковым знаком.

Конечно, в таком явном виде задачи даются редко. Чаще всего требуется самостоятельно определить нужные объекты и нужные классы (сорта) объектов, то есть навесить ярлыки и сосчитать их. Приведем несколько традиционных примеров, которые читатель, прежде чем читать решение, должен порешать сам.

Пример. 1. Доказать, что из $k+1$ числа всегда можно выбрать два, разность которых делится на k.

Поиск решения. Начнем с $k=2$. Из трех чисел всегда найдется два, разность которых делится на два, то есть число четное. Но это понятно. Из трех чисел по принципу Дирихле либо два четных, либо два нечетных. (У нас два ярлыка на числах: четные и нечетные.) Их разность ,конечно же, будет числом четным.

Далее, $k=3$. Есть четыре числа, и требуется убедиться, что найдутся два из них, разность которых делится на 3. Опять, если есть два числа, делящиеся на 3, то все в порядке, а вот если есть два числа, не делящиеся на 3, то этого мало, например это могут быть 4 и 5. Так что рассуждение, как в случае $k=2$, вроде бы не проходит.

Но есть еще одно дополнительное число. Как оно может помочь? Например, 4, 5 и 8 — хорошо (8—5=3). Но 4, 5 и 7 тоже хорошо (7—4). Значит, оно как-то помогает. За счет чего? Вернемся к $k=2$. Там как-то принцип Дирихле помог. Но там ясно было, как делить числа по сортам: четные и нечетные. А тут? Делимость на три — это раз. А неделимость слишком много. А может, неделящиеся тоже разбить на два класса (как раз для принципа Дирихле будет четыре числа и три класса)? А что требуется от такого класса? Чтобы разность любых двух чисел этого класса делилась на 3. Ну что ж, попробуем. Например, в одном классе с числом 4 должны и могут быть 7, 10, 13, ... А в классе с 5 — 8, 11, 14, ... Ну, теперь все понятно. Берем три класса:

0, 3, 6, 9, 12, ...— первый;

1, 4, 7, 10, ... — второй;

2, 5, 8, 11, ... — третий.

Каждому — свое

По принципу Дирихле из четырех чисел хотя бы два «сидят» в одном классе. Все.

Вроде бы даже понятно, как решать в общем случае для произвольного k. Первый класс составят числа, делящиеся на k: 0, k, $2k$, $3k, \ldots$, второй — на единицу больше: 1, $k+1$, $2k+1$, $3k+1, \ldots$, третий — 2, $k+2$, $2k+2$, $3k+2, \ldots$ и так далее. Наконец, последний класс начнется с $k-1$: $k-1$, $k+k-1$, $2k+k-1$, $3k+k-1, \ldots$ Далее опять по принципу Дирихле.

Чистка решения. Осталось навести строгость и понять, что это за классы. Впрочем, об этом можно быстро догадаться: в одном классе находятся числа с одинаковым остатком при делении на k. Тогда чистое короткое решение будет выглядеть так.

Рассмотрим остатки каждого из чисел при делении на k (ярлыки!). По принципу Дирихле найдется два одинаковых, так как всего различных остатков k штук: $0, 1, \ldots, k-1$. Разность чисел с одинаковым остатком делится на k.

Пример 2. В ряд выписано несколько целых чисел A_1, $A_2, \ldots A_k$. Доказать, что найдется несколько подряд идущих чисел (может быть, одно число), сумма которых делится на k.

Поиск решения. Вроде бы явно «пахнет принципом Дирихле». Как навешивать ярлыки, уже понятно: их, как и в предыдущей задаче, определяют остатки при делении на k. Вопрос только в том, что взять в качестве объектов. На первый взгляд, вроде бы неплохо взять все суммы. Таких сумм мы получим с запасом — гораздо больше, чем $k+1$. Подозрительно. Ну хорошо, посмотрим, что делать дальше. Допустим, что есть две суммы с одинаковым остатком. Что с ними можно делать? Взять разность? Но это теперь может не быть суммой. Например, уже $A_1+A_2—A_3$. Да-а-а... Неприятности! Так вот почему сумм так много. А может, не стоит брать все сразу? В этом есть какой-то смысл. Надо брать такие суммы, разность которых тоже будет суммой. Например, A_1+A_2+ $+A_3+A_4$ и A_1+A_2. Что еще к этому можно добавить? $A_1+A_2+A_3$? Вполне. Ведь A_3 и A_4 тоже считаются суммами. Значит, и A_1 можно безбоязненно добавить. Ну и прекрасно. А теперь уже и нетрудно сконструировать требуемые объекты. Вот они: A_1, A_1+A_2, A_1+ $+A_2+A_3$, ..., $A_1+A_2+...+A_k$. Если среди них есть две суммы с одинаковым остатком, то их разность и есть нужная нам сумма, делящаяся на k. Значит, все отлично. По принципу Дирихле найдется два... Стоп! Что за кошмар! Их же только k, а для принципа Дирихле надо $k+1$. Где же взять еще одну сумму? Непонятно. Что ни припишешь — все плохо. Неужели не пройдет? Не может быть! Но хоть что-то есть в этом рассуждении? Да. По крайней мере то, что для того, чтобы у нас не получилось, все остатки должны быть разными. Но остатков — k и сумм тоже k, так что это вполне может быть. А может, остатков не k? Да нет, k. Вот они: 0, 1, 2, ..., $k—1$. Ой, как же все просто! Если есть остаток 0, то сумма, ему соответствующая, будет делиться на k. Вот и все.

Чистка решения. Если хоть один из остатков при делении на k чисел $A_1, ..., A_1+...A_k$ равен нулю, то все в порядке. В противном случае имеем k остатков и $k—1$ возможность для каждого из чисел. По принципу Дирихле найдутся два равных. Соответствующая разность сумм даст сумму, делящуюся на k.

П р и м е р 3. В волейбольном турнире команды играют друг с другом по одному матчу. За победу дается одно очко, за пораже-

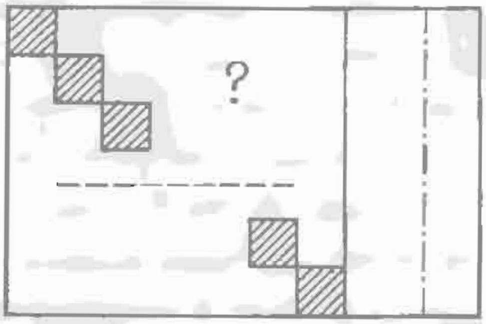


Таблица чемпионата

ние — ноль. Известно, что в один из моментов турнира все команды имели разное количество очков. Сколько очков набрала в конце турнира предпоследняя команда и как она сыграла с победителем?

Поиск решения. На первый взгляд условия задачи почти ничего общего не имеют с вопросом, который в ней ставится. Это наводит на мысль о том, что условие на самом деле гораздо сильнее, чем кажется в первый момент. Видимо, ситуация, когда все команды имеют разное количество очков, встречается настолько редко, что по ней уже можно восстановить все остальные данные. Что же в таком случае бывает часто? Часто хотя бы две команды но имеют одинаковое количество очков. Такая постановка вопроса явно требует принципа Дирихле. А не поступить ли так: попробовать «доказать», что в любой момент времени есть две команды с одинаковым количеством очков. Где-то такое «доказательство» должно «сломаться». Надо отчетливо исследовать этот момент, тут-то и должна проясниться ситуация.

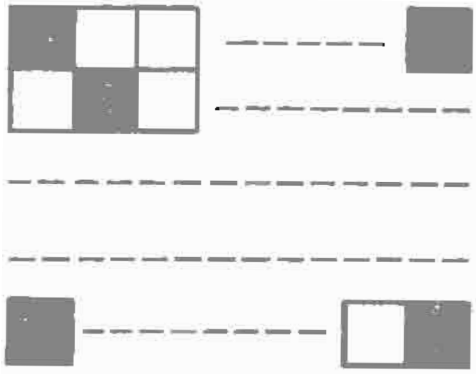
Итак, принцип Дирихле. Вроде бы, все понятно. У каждой команды считаем число очков. Это и будет ее ярлыком. Требуется доказать, что найдется две команды одного «сорта». Посчитаем, сколько команд и сколько сортов. Команд, скажем, k. А сортов тогда... тоже k: от 0 до $k—1$ очков может набрать каждая команда, так как сама с собой она играть не будет. Для принципа Дирихле чуть-чуть не хватает. Вот если бы сократить на один сорт, тогда было бы $k—1$ сорт *и принцип Дирихле бы сработал.* Значит, так как принцип Дирихле применить нельзя, то ни один сорт не сокращается, и это означает, что есть команды всех сортов.

Другими словами, есть команда, которая набрала ноль очков, команда, которая набрала одно, и так далее. В частности, есть команда, которая набрала $k-1$ очко. Так, кое-что проясняется. Например, то, что команда, которая набрала $k-1$ очко, попросту у всех выиграла, иначе, как она набрала свои очки. Тем самым ответ на один из вопросов ясен: предпоследняя команда первой проиграла (если, конечно, в турнире больше двух команд и предпоследняя команда — это не то же самое, что и первая). Займемся вопросом о количестве очков предпоследней. К сожалению, ничего не ясно о моменте времени, когда у всех было разное количество очков. Достоверно только, что в этот момент победитель уже сыграл все партии. А что, если... исключить чемпиона из турнира и его матчи аннулировать? Тогда... тогда можно будет применить индукцию! Команд-то станет меньше. Практически все. Чистка решения и осознание того, что момент в условиях задачи имел место только после окончания турнира, предоставляется читателю.

Мы же сделаем несколько замечаний, касающихся других глав. Во-первых, отметим, какой важной оказалась работа по разделению случаев и насколько разные идеи использовались в каждом из них: если никто не набрал определенного количества очков — принцип Дирихле, если любой набор кем-то получен — индукция. Основная нагрузка легла на принцип Дирихле, индукция же помогла справиться с частностями. Это довольно обычная ситуация: общий случай исследуется с помощью принципа Дирихле, а частные требуют особого разбора. Разумеется, задач на принцип Дирихле в чистом виде мало. Гораздо чаще он используется как вспомогательный прием, как четкое выражение той мысли, что если в нескольких местах чего-то много, то должно быть много и в одном из них. Рассмотрим такую задачу.

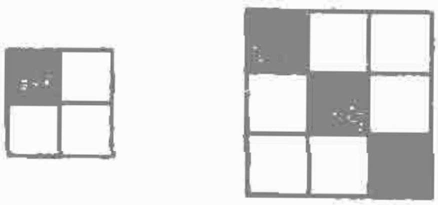
Задача. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в несколько цветов (каждая клеточка — в один из цветов). Доказать, что найдутся четыре клеточки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными стороне одной клеточки.

Поиск решения. Смысл задачи в общем-то ясен: какого-то цвета так много, что наберется и прямоугольник одного цвета. Принци-



Угловые клеточки одного цвета

циальный вопрос: по существу ли бесконечность, или же просто можно ограничиться квадратной доской достаточно большого размера, зависящего от числа красок? Ответ на этот вопрос легко получить, анализируя случай малого числа красок. Постараемся решить задачу для случая двух красок, а потом, если получится, смоделировать соответствующую конечную задачу. Значит, так: квадратик 2×2 можно закрасить без прямоугольников. Квадратик 3×3? Что-то сразу непонятно! Так, если по диагонали поставить один цвет, а остальные шесть клеточек закрасить другим, то прямоугольников не будет. Ничего себе! Если случай 3×3 такой нетривиальный, то что же ждет нас дальше? Квадрат 4×4 что-то уже не кажется легко поддающимся. Да, совсем нелегко то, что казалось легким поначалу. Что же делать? Перебирать случай 4×4? Но там уже довольно хлопотно. Тогда сделаем так: еще немного подумаем, а если никакой идеи не появится, займемся этим перебором. Какая же должна быть отправная точка размышлений? Конечно же, исходная задача. Случай двух красок мы выделили правильно, хотя он оказался более нетривиальным, чем можно бы-



Квадраты маленьких размеров

ло предположить заранее, по сравнению с исходной задачей. Что мы сделали дальше? Стали решать конечную задачу. Это верно. Но откуда взялся квадрат, тем более, что в условиях его нигде не было? Психологически это понятно — квадрат вещь удобная, а главное, привычная. Значит, любовь к привычкам и подвела. Итак, попробуем решать задачу на прямоугольнике. Начнем. Прямоугольник $1\times k$, конечно же, нет даже смысла рассматривать. Рассмотрим прямоугольник $2\times k$. Его тоже, конечно, можно закрасить без прямоугольников одного цвета. Например, так: одну полосу в белый цвет, а вторую $1\times k$ — в черный (пора уже как-то назвать наши цвета). Еще есть способы? Ну, конечно, в шахматном порядке, хотя бы.

Случай $3\times k$. Это уже принципиальней. Правда, 3×3 мы закрашивать умеем. Теперь естественная попытка — приклеивать сбоку по три клеточки (рис. 15). Так, это уже хорошая идея! Можно поставить перед собой четкий вопрос: а когда к прямоугольнику $3\times k$, раскрашенному без прямоугольников, можно приклеить еще три клеточки так, чтобы получился прямоугольник $3\times(k+1)$ без одноцветных прямоугольников. Лучше, пожалуй, решать обратный вопрос: а в каких случаях приклейка этих трех клеточек все портит? Допустим, что они все белые. Тогда одноцветные прямоугольники появились бы в том случае, если бы уже была полоска из трех клеток, две из которых — белые. Здорово! А если приклеиваемая полоска состоит из двух белых и одной черной клеточки? Тогда она испортит картинку хотя бы в том случае, когда уже есть точно такая же полоска. О, есть идея: а что, если доказать, что для достаточно большого k всегда есть две одинаково раскрашенные полоски. Но это же явный принцип Дирихле! Можно даже точно указать число k. Действительно, одну полоску размером 1×3 можно закрасить в два цвета восемью различными способами (для каждой клеточки две возможности, всего — 2^3). Значит, уже прямоугольник 9×3 гарантирует существование нужного одноцветного прямо-

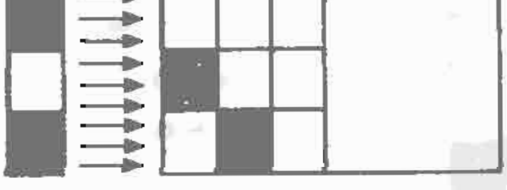


Рис. 15. Что происходит при приклеивании?

угольника: по принципу Дирихле найдутся две одинаковые полоски, а на каждой из них — по две клеточки одного цвета, которые и составят требуемый прямоугольник.

Мы слишком много внимания уделили поиску решения. Так, впрочем, и бывает на самом деле. А теперь приведем очищенное решение.

Решение. Рассмотрим бесконечную полосу шириной $k+1$, а на ней — полоски размером $1\times(k+1)$. Так как таких полосок различных окрасок только конечное число, то найдутся две одинаково раскрашенные полоски. По принципу Дирихле на одной полоске есть две одинаково закрашенные клеточки. Они вместе с такими же клеточками на второй полоске и дадут требуемый прямоугольник.

Комментарии. Стоило ли так долго решать такую простую задачу? Вне всякого сомнения! Автор должен сознаться, что, придумав эту задачу, он нашел совершенно другое решение. Идея его была такова: если взять одну полосу шириной 1, то на ней найдется бесконечное количество клеток одного цвета. Для определенности будем считать, что полоса вертикальная, а клеточки белые. Вычеркнем тогда все горизонтальные полосы, содержащие не закрашенные белым цветом клетки. В результате получим задачу, ничем не отличающуюся от исходной, кроме одного — на плоскости есть одна полоса одного цвета. Затем то же самое можно сделать со следующей вертикальной полосой и так далее, пока не получим $k+1$ полосу. Понятно, что основная идея — в вычеркивании строк. Это не портит, а улучшает задачу (то есть если мы умеем решать «вычеркнутые» задачи, то получаем и решение исходной). Автор надеялся, что естественный путь поиска решения выведет его на идею вычеркивания. Однако, следуя своим собственным рекомендациям, вышел на вышеприведенное, по-видимому, более естественное решение.

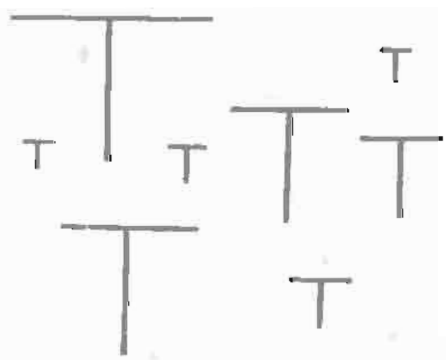
Следующий комментарий касается бесконечной вариации принципа Дирихле: если имеется конечное число классов, а элементов — *бесконечно много, то в одном из классов* бесконечно много элементов. Сказанное понятно, когда сформулировано, но не всегда приходит в голову, когда об этом надо догадаться по ходу решения задачи. Этим принципом мы воспользовались дважды: в решении и в предыдущем комментарии (найдите эти места). Для тех, кто знаком с элементами теории меры и умеет различать бесконечности (в школе этому, правда, не учат), отметим еще одну вариацию принципа Дирихле: если «континуум коликов» (почему-то чаще всего принцип Дирихле демонстрируют именно на кроликах) разбросать по счетному числу ящиков, то в одном из них окажется «континуум кроликов». Придумайте сами задачу на эту тему. Если не можете, то решите такую.

Задача. Можно ли буквами T замостить плоскость? (Предполагается, что буква T — это два отрезка, один из которых расположен вертикально, а второй — горизонтально, и его середина есть начало вертикального отрезка. Отрезки имеют одинаковую длину, но буквы T могут быть разного размера. Конечно же, предполагается, что буквы не пересекаются, но требуется, чтобы через каждую точку плоскости проходила ровно одна буква.) Для простоты рассмотрите вначале случай букв одинакового размера.

Несколько *задач* для всех. Первая простая: докажите, что уже квадрат 5×5 нельзя раскрасить без одноцветных прямоугольников двумя красками. Что можно сказать о прямоугольнике 4×6?

Помочь может и идея вычеркивания. Теперь — сложная.

Задача. Бесконечная клетчатая доска раскрашена в несколько цветов (каждая клеточка — в один цвет). Верно ли, что найдутся четыре клеточки одного цвета, лежащие в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам одной клеточки?



Можно ли заселить плоскость буквами T?

Это задача трудная даже для двух красок. Помочь в ее решении может красивая и очень сложная

Теорема Ван-дер-Вардена. Если множество натуральных чисел разбито на две части, то в одной из этих частей найдутся арифметические прогрессии сколь угодно большой длины.

На самом деле верен гораздо более сильный, но более сухо звучащий результат, носящий такое же название:

Теорема Ван-дер-Вардена. Для любых натуральных чисел k и l существует такое натуральное число n, зависящее от k и l, $n=n(k, l)$, что при разбиении любого отрезка ряда натуральных чисел длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые), по крайней мере, в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.

С доказательством этой и не только этой теоремы можно ознакомиться в небольшой, но очень содержательной и приятно читающейся книге А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел». Несколько применений теоремы Ван-дер-Вардена можно найти в журнале «Квант» и на более высоком уровне изложения — в книге Р. Грэхема «Начала теории Рамсея».

Чтобы оценить нетривиальность теоремы и лучше почувствовать, что именно в ней доказывается, читатель должен хотя бы познакомиться с формулировкой следующей задачи.

Задача. Разбить натуральный ряд на две части, ни одна из которых не содержит бесконечной арифметической прогрессии.

Решение ее несложно, хотя его идея далека от темы данной главы. Гораздо ближе к ней следующая

Задача. Существует ли 1987 подряд идущих составных чисел?

Но и эту задачу мы оставим читателю. Коснемся иных интерпретаций принципа Дирихле.

Задача. Доказать, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площадью, не большей, чем одна шестая площади шестиугольника.

Поиск решения. В воздухе явно носятся идеи типа принципа Дирихле наоборот: если чего-то мало, то в одном из мест недостаточно. У нас шесть диагоналей, отсекающих треугольники.

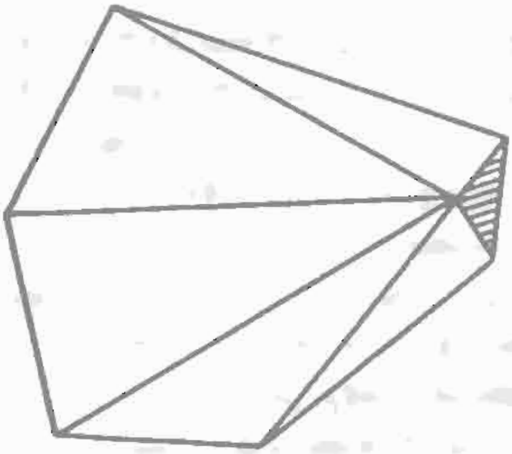


Рис. 16. Первая попытка найти треугольники

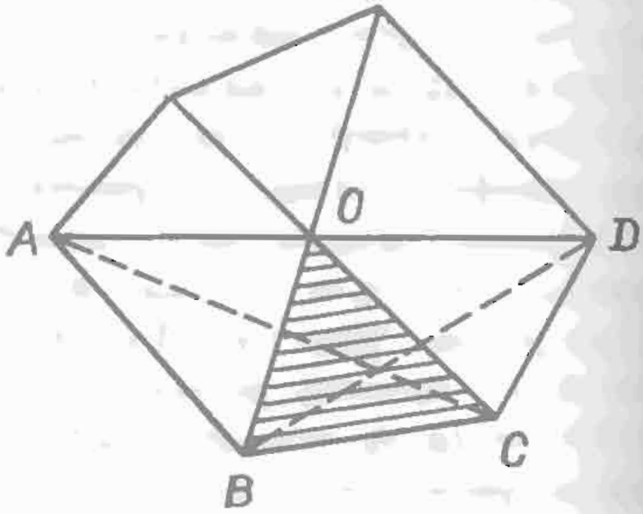


Рис. 17. Главные диагонали пересеклись в одной точке

Если бы все эти треугольники не пересекались — все было бы прекрасно: одна из частей была бы не больше одной шестой (сформулируйте утверждение, из которого это вытекает, по аналогии с принципом Дирихле). Но, увы, треугольники пересекаются. Хорошо бы как-то заменить каждый треугольник на что-то без самопересечений. А главное — такая замена не должна менять площади. Но как это сделать, не видно.

А что если подойти к задаче с обратной стороны: рассмотреть разные способы, как можно разбить шестиугольник на шесть частей, а уже потом придумывать, можно ли эти части как-то связать с нашими треугольниками? Видимо, разумно потребовать некоторой симметрии, иначе слишком много способов разбиения. Правда, симметрия не обязательно должна быть полной: например, три части могут быть одного типа, а три — другого, но это пока неважно. Как же придумать хоть какой-то способ? Вот один: взять какую-то точку внутри шестиугольника и соединить ее с вершинами. Получим шесть треугольников (см. рис. 16). Площадь хотя бы одного из них не больше 1/6. Это хорошо. Но как связать этот треугольник с одним из требуемых? Недолгий анализ *показывает, что никак, если мы возьмем просто* любую точку: можно получить и одну миллионную, если точку брать слишком близко к одной из сторон, а это не для наших треугольников, значит, если идти таким путем, то точку нужно брать удачную, желательно где-то в центре. Но какую же особенную точку можно разыскать в шестиугольнике, причем в произвольном? Если бы в нем хотя бы главные диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекались в одной точке, то эту точку и можно было взять. А что, так и сделаем: будем решать пока более частную задачу, когда главные диагонали пересекаются в одной точке. Если решим ее, то, возможно, хоть какую-то идею найдем, а если не решим, то и общую не решим.

Итак, пусть диагонали пересекаются в одной точке. Образуются шесть треугольников, и площадь одного из них не больше 1/6, предположим, что того, который выделен на рис. 17. Как-то надо суметь связать его с нашими треугольниками. Понятно, что имеет смысл сравнивать его только с ближайшими соседями: треугольниками ABC и DBC. Можно ли надеяться, что площадь одного из них не больше площади треугольника BOC? Очень даже похоже. Значит, попробуем это доказать. Как вообще можно сравнивать между собой площади разных треугольников? Площадь — это полупроизведение основания на высоту. Да, но основание у всех трех треугольников общее, значит, все решают высоты: где высота меньше, там и площадь меньше! Прекрасно, но это же совершенно понятно: так как точка O лежит между A и D, то либо из точки A, либо из D высота будет не больше (интуитивно это и доказательства не требует, а на этапе чистки решения мы в этом наверняка удостоверимся). Значит, все доказано. Еще раз проверим: площадь одного из треугольников, проведенных из точки O, не больше 1/6, например у треугольника BOC. А площадь BOC заключена между площадями ABC и DBC, так как это верно для высот. Значит, площадь одного из этих двух треугольников не больше 1/6. Теперь мы можем попробовать решать общую задачу, когда диагонали не обязательно пересекаются в одной точке. Рисуем картинку (см. рис. 18). Внутри образовался треугольничек. Как это замостить? А может, и не надо? В самом деле, нам и не нужно, чтобы шесть *вспомогательных* треугольников, которые мы построим, покрывали весь шестиугольник: если не покроют, будет еще лучше. А зачем нам

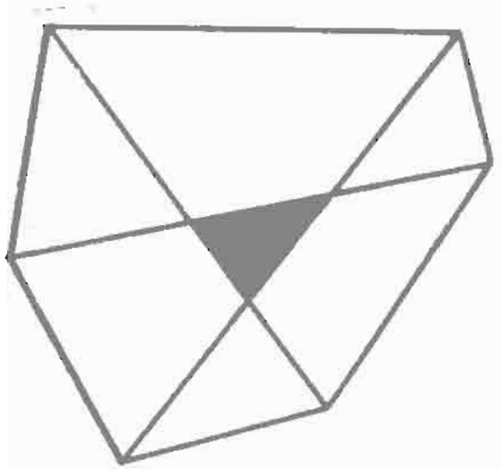


Рис. 18. Пересечения в одной точке не получилось

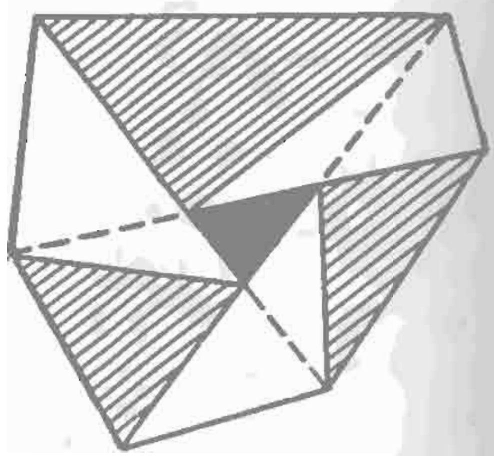


Рис. 19. Нужные треугольники найдены

вообще треугольники? Понятно зачем: они нам помогут прийти к нашим. Но сейчас у нас только три треугольника. Да и те, вроде, не такие, какие нужно, а меньше. А какие нужны? Нужны такие, чтобы мы смогли еще раз провести рассуждение с высотами, как в предыдущем доказательстве, то есть чтобы основанием служила сторона шестиугольника, а вершина лежала на главной диагонали. Имеются ли такие треугольники и такое разбиение? Да, имеются. После сравнительно небольшого раздумья читатель и сам бы его нашел, но, на всякий случай, мы приведем его на последнем рисунке к нашей задаче (рис. 19). Дальнейшее уже понятно и предоставляется читателю.

Проведем анализ решения. Формулировка геометрической интерпретации принципа Дирихле особого внимания не заслуживает (читатель вполне способен сам проинтерпретировать кроликов геометрически). Лучше мы отметим, как именно мы его использовали: он указал нам путь поисков, так как по формулировке задачи чувствовалось, что без него здесь не обойтись. Особо следует сказать о пути решения, который мы выбирали как в этой, так и в предыдущей задаче. В этих двух задачах (да и не только в них!) четко сработал следующий важнейший принцип:

НЕ МОЖЕШЬ РЕШИТЬ ЗАДАЧУ — УПРОСТИ ЕЕ!

Решение всякого рода частных случаев — это основное для активного поиска идей, с одной стороны, и для вчувствования в задачу — с другой. А если упрощенная задача тоже не решается? Еще упростить. И так до тех пор, пока что-то не решится, причем хоть чуть-чуть, но нетривиально. А затем попробовать вернуться назад. Быть может, это уже будет легче, может, мы уже обогатимся за это время новыми идеями и, по крайней мере, будем представлять себе, хоть на что похоже то, что мы ищем. Сравните, насколько труднее было бы искать заключительный чертеж в последней задаче с самого начала. И даже имея его, но не имея в запасе идеи про высоты, решение можно было бы прозевать. А теперь вспомните, что главная трудность в задаче с красками оказалась на уровне двух красок и прямоугольника 3×9. Опять же, как уже было сказано, переход от частного к общему проще, чем наоборот (не одна диссертация была успешно защищена благодаря человеческой способности обобщать!)

Вернемся к последней задаче. Анализируя ее решение, нетрудно составить новую.

Задача. Доказать, что если каждая диагональ выпуклого шестиугольника отсекает от него не меньше одной шестой площади, то большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, делясь в одинаковом отношении, и параллельны сторонам шестиугольника.

Вот примерно как придумываются задачи. Решается какая-то известная задача. Решение анализируется, выясняется, что из него еще можно извлечь, задача переформулируется, и через некоторое время уже не остается ничего общего ни от исходной задачи, ни, как ни странно, от ее решения, так как оно все совершенствуется, совершенствуется... Приведем еще один пример геометрической задачи.

Задача. На планете Тау Кита суша покрывает более половины общей площади планеты. Докажите, что таукитяне могут вырыть шахту, соединяющую сушу с сушей и проходящую через центр планеты.

Поиск решения. Опять же принципом Дирихле «пахнет» с самого начала. Но вот только как до него дотянуться? Ясно, что суши много, и на этом надо сыграть. Далее, когда можно прорыть туннель? Когда обе точки, симметричные относительно центра, лежат на суше, и, собственно, требуется доказать существование двух таких точек. Но как это сделать? У нас только один участок суши. Вот если бы их было хотя бы два, тогда уже можно было бы что-то сделать, пользуясь идеями принципа Дирихле. А что если... самим сделать второй участок? Но как и где? И какой? Какой, пожалуй, ясно: площади больше половины, и тогда по принципу Дирихле эти два участка пересекутся и... должна появиться шахта. Подумаем: итак, у нас есть общая точка для двух разных участков. Какой должна быть эта точка, чтобы по ней можно было бы спроектировать туннель через центр? «По ней», скорее всего, должно означать «через нее»: одна точка точно лежит на суше, тогда другая из второй, нами построенной области должна быть такой, чтобы противоположная точка тоже лежала на суше. Но теперь понятно, как строить вторую область: надо просто взять нашу исходную область суши и симметрично относительно центра ее отразить. Тогда и получим все, что нужно: две области пересекутся. Их общая точка пересечения и берется за основу туннеля: и сама точка — на суше и ей противоположная тоже (по построению второй области).

Вот такие идеи, как симметрия, проектирование, разного рода переносы, очень хорошо сочетаются с идеями принципа Дирихле. То же относится к поворотам и вообще всяческим углам, что демонстрирует следующая известная

Задача. На каждой стороне произвольного четырехугольника, как на диаметре, построена окружность. Доказать, что четыре построенных круга полностью покроют четырехугольник.

Поиск решения. Формулировка задачи непривычна, так что мы прежде всего должны ее понять. Понять нужно, собственно, только одно: как выразить то, что данный круг накрыл данную точку. Сформулируем яснее. Итак, есть отрезок. На нем, как на диаметре, построен круг. Можно ли дать ясный критерий, когда точка попадет внутрь круга? Сразу не видно. Ну хорошо, а когда она лежит на краю круга, на окружности? Ну, это известно. Когда... вписанный угол прямой. Вроде так. Ну а тогда есть вполне правдоподобная рабочая гипотеза: точка покрывается кругом, когда вписанный угол тупой. Какой такой вписанный угол? Что за несуразица? Сконцентрируемся. Теперь все ясно. Соединим нашу точку (назовем ее, скажем, M) с концами A и B отрезка. Для того чтобы точка оказалась на окружности, угол AMB должен быть прямым, чтобы она оказалась снаружи круга — острым, а чтобы внутри — тупым (рис. 20). Вот теперь исследование окончено полностью. Можем вернуться к исходной задаче. Переформулируем ее. Значит, требуется накрыть каждую точку. Вот и докажем, что каждую точку кто-нибудь да накроет. Пусть точку зовут M, а четырехугольник — $ABCD$. Соединим M с вершинами. Если угол AMB будет тупой, то круг от AB накроет M. Аналогичио для других отрезков. Вывод: надо доказать, что есть тупой угол. А сколько углов у нас? Четыре. И их сумма — 360° (рис. 21). Вот и отличио. По принципу Дирихле, хоть один из них — тупой. Хотя, нет, тупой или прямой , иу, все равно, не меньше 90°, а это нам и нужно.

Довольно часто принцип Дирихле применяют для задач на делимость, часто — комбинируя с методом остатков, о котором мы поговорим в другой главе. В соответствующей главе мы поговорим также о задачах, связанных с теорией графов, где принцип Дирихле — один из наиболее надежных помощников. А закончим мы эту главу числовой задачей.

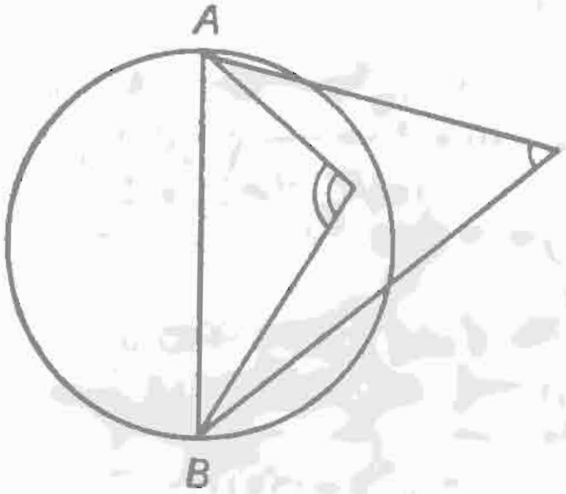


Рис. 20. Как накрыть точку кругом?

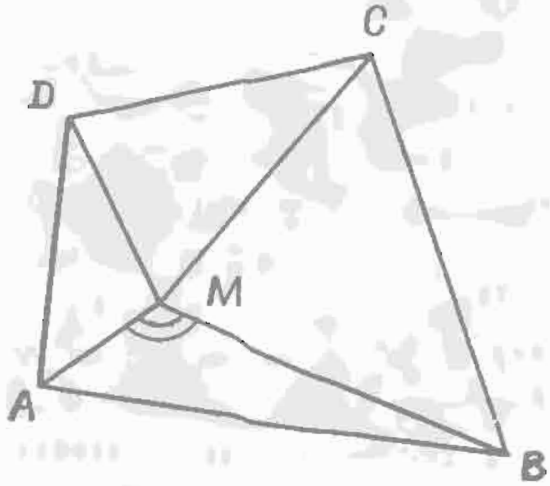


Рис. 21. Один из четырех углов не меньше 90°

Задача. Доказать, что из $k+1$ числа, меньшего $2k$, всегда можно выбрать два, отношение которых — степень числа 2.

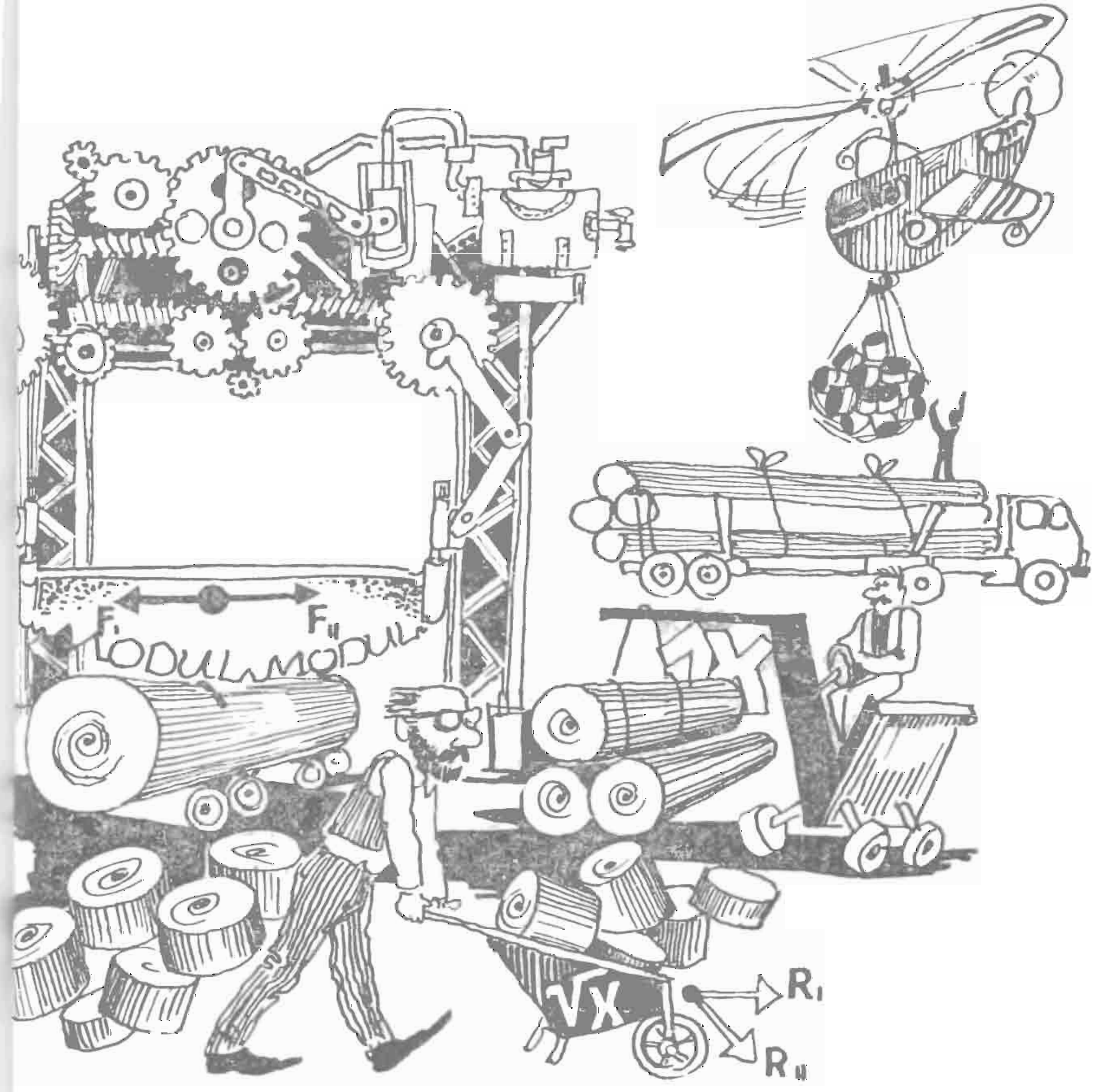
Поиск решения. Понятно, что задача — про принцип Дирихле, но не ясно еще, к чему применять этот принцип. Постараемся проанализировать, что от нас хотят. Чтобы никакие два числа при делении друг на друга не давали степень двойки — мы должны доказать, что такого не получится. Но, предположим, что мы все же решились построить контрпример. Как мы это станем делать? Возьмем какое-нибудь число первым. Что к нему можно добавить? Так, абстрактно, неясно. Возьмем какой-либо числовой, конкретный пример, допустим, 12. Что еще можно добавить? Нет, даже лучше такой вопрос: чего добавлять нельзя? Нельзя, конечно, добавлять 3, 6. А 9 можно. Нельзя 12, не рекомендуется 24, 48 и так далее. Выпишем в ряд: 3, 6, 12, 24, 48. Все ясно — геометрическая прогрессия. Значит, каждое число запрещает появляться остальным числам из той же прогрессии. Минуточку, а что значит той же? Как по данному числу построить его прогрессию? Надо взять все числа, частное от деления на которые — степень двойки (может быть, отрицательная). Если немного поразмышлять, то становится совсем понятным: у каждого числа есть его «корень», который получится, если разделить это число на максимальную степень двойки. Например, у 12 — «корень» тройка, а у 8 — единица. «Корень» у 5 и 40 одинаковый — это число пять.

Теперь можно вернуться к нашей задаче. Уже ясно, что если два числа имеют общий корень, то их отношение — степень двойки. Кроме того, корень — это число нечетное. Нечетных чисел, меньших $2k$, ровно k штук. Значит, по принципу Дирихле, найдутся два числа с одинаковым корнем.

Идея «корня» как основы для сравнения очень часто помогает в решении задач. «Смотри в корень», как говаривал Козьма Прутков. Одна из них, в которой читателю рекомендуется отыскать «корень» самостоятельно, приведена в конце книги. Принцип Дирихле в ней не играет никакой роли.

7

Остатки остатков



Но прежде всего Нума разделил год — в соответствии с движением луны — на двенадцать месяцев, а так как тридцати дней в лунном месяце нет и лунному году недостаёт одиннадцати дней до полного, образуемого кругооборотом солнца, то, вставляя добавочные месяцы, он рассчитал время так, чтобы на каждый двадцатый год любой день приходился на то же самое положение солнца, что и в исходном году, а совокупная продолжительность всех двадцати лет по числу дней была полной.

Тит Ливий. История от основания Рима

Цель этой короткой главы — убедить в необходимости работы с остатками. Вначале — приметы метода:

В ЗАДАЧАХ ПРО ДЕЛИМОСТЬ — ПЕРЕХОДИ К ОСТАТКАМ.

На самом деле это бывает полезно и не только в задачах про делимость, точнее, в тех задачах, где нужно предварительно догадаться, что это — задача на делимость.

Задача. Докажите, что число, записываемое 1985 единицами, 1985 двойками и 1985 нулями, не является кубом натурального числа (порядок цифр несуществен).

Решение. В таких задачах надежный прием — изучать остатки при делении на 3 или на 9. В данном случае предпочтительнее девятка. Каков остаток от деления на 9 нашего числа? Очень просто это выяснить — надо всего лишь взять сумму цифр и ее остаток (если даже читатель не знал этого факта, то с его доказательством он познакомится ниже). Остаток в нашем случае, как несложно посчитать, равен 6, то есть число делится на 3, но не делится на 9 и, стало быть, кубом быть не может. Это был краткий набросок решения, которое должно стать очевидным после внимательного прочтения данной главы.

Теперь — о технике работы с остатками. Прежде всего — как их обозначать. Самый удобный способ — чертой сверху. Другими словами, когда у какого-то числа появилась «над головой» черта, значит, мы смотрим не на число, а на его остаток. Например, если мы изучаем остатки при делении на 3, то правомочна запись $\overline{4}=\overline{1}$, так что дважды два с чертой — это один с чертой ($\overline{2}\times\overline{2}=\overline{1}$). Изредка будет применяться и такая запись, как $a\equiv\equiv b(\mathrm{mod}\,c)$, которая читается так: числа a и b сравнимы по модулю c. А означает эта запись следующее: $(a-b)$ делится на c или, что то же самое, a и b имеют одинаковый остаток при делении на c. Отметим, что в большинстве книг такая запись — основная. Иногда и слово mod опускают.

Наконец, главное — арифметика остатков подчинена обычным правилам сложения и умножения, с единственным добавлением: если результат стал слишком большим, надо переходить к остаткам. Словом, работаем с остатками: от того, что получается, опять берем остатки, проделав что-то с ними, — опять остатки и так далее.

Задача. Доказать, что при любом неотрицательном К число $5^{2К+1}\cdot2^{К+2}+3^{К+2}\cdot2^{2К+1}$ делится на 19.

Посмотрите, как быстро и эффективно решается эта задача одной лишь расстановкой черточек.

Решение. Имеем $\overline{5^{2К+1}}=\overline{5^{2К}\cdot5}=\overline{25^{К}\cdot5}=\overline{6^{К}\cdot5}$. (В последнем равенстве, как и требовалось по методе, мы сразу перешли к остатку, записав 5 вместо 25.) Точно так же $\overline{2^{К+2}}=\overline{2^{К}\cdot4}$; $\overline{3^{К+2}}=\overline{3^{К}\cdot9}$; $\overline{2^{2К+1}}=\overline{4^{К}\cdot2}$. Подставим все это и произведем очевидные преобразования: $\overline{6^{К}\cdot5\cdot2^{К}\cdot4}+\overline{3^{К}\cdot9\cdot4^{К}\cdot2}=\overline{12^{К}\cdot20}+\overline{12^{К}\cdot18}$. Как только получили большое число 20, немедленно заменяем его на остаток: $\overline{12^{К}\cdot1}+\overline{12^{К}\cdot18}=\overline{12^{К}\cdot19}$. Но $\overline{19}=\overline{0}$, так что мы получили, что остаток нашего исходного числа при делении на 19 равен нулю.

Еще несколько простых примеров.

Задача. Доказать, что число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Решение. Стандартный метод в решении задач про цифры — представление данного числа с записью $ABC...$ (k цифр) в виде $A\cdot10^{k-1}+B\cdot10^{k-2}+...$ Если мы ищем остаток данного числа при делении на 9, то попросту «навешиваем» черту: $\overline{A\cdot10^{k-1}+B\cdot10^{k-2}+...}=$

$=\overline{A\cdot 1^{k-1}+B\cdot 1^{k-2}+\ldots}=\overline{A+B+\ldots}$, откуда видно, что само число имеет тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр.

В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно установить признак делимости на 11. Вот пример олимпиадной задачи.

Задача. У числа 2^{1985} вычислили сумму цифр; у полученного числа снова вычисляем сумму цифр и так далее до тех пор, пока мы не получим однозначное число. Какое число получится?

Поиск решения. Непонятно, как подойти к задаче — не считать же, в самом деле, сумму цифр у исходного числа. А как действовать? Какой-то неприятный все-таки процесс. Кстати, для таких случаев есть совет — искать инвариант (см. главу об инвариантах). А что им здесь может быть? Сумма цифр? Так она меняется, и вообще ее-то и нужно найти. Но что-то есть знакомое в этой последовательности действий. Когда-то зачем-то мы ее применяли. Ну, конечно же,— признак делимости на 9: там суммировали цифры, и, если получалось большое число, у него опять суммировали цифры. Так это... как раз то, что нам нужно! Остаток при делении на 9 не меняется — он и есть нужный нам инвариант и, конечно же, та цифра, которая получится в конце. Дело за малым — вычислить этот остаток. Начнем не торопясь: $2^1\equiv 2 \pmod 9$, $2^2\equiv 4 \pmod 9$, $2^3\equiv 8 \pmod 9$, $2^4\equiv 7 \pmod 9$. Последнее понятно, так как остаток 16 при делении на 9 будет 7. А вот дальше — очень полезное замечаньице: уже нет необходимости вычислять 2^5, достаточно просто остаток от 2^4, то есть 7, умножить на 2 и, конечно же, опять взять остаток. Получим 14 и 5 соответственно. Итак, $2^5\equiv 5 \pmod 9$. Точно так же $2^6\equiv 1 \pmod 9$, $2^7\equiv 2 \pmod 9$, $2^8\equiv 2 \pmod 9$. Так, явно начали повторяться. Значит, наша последовательность остатков пойдет периодически, с периодом 6. Теперь уже нетрудно вычислить остаток 1985-й степени. Какой остаток у 1985 при делении на 6? $1985\equiv 5 \pmod 6$. Значит, остаток при делении на 9 числа 2^{1985} тот же, что и у 2^5, то есть 5. Это и есть ответ.

Обратим внимание на то, что по ходу дела пришлось использовать сравнения по разным модулям, из-за чего мы отказались от обозначения с помощью черты. Еще раз подчеркнем: надо стремиться работать только с остатками. Мы, конечно же, могли посчитать 2^5, но уже 2^{50} считать, а потом делить на 9 было бы неприятно. Работа же на остатках от этой неприятности нас избавила. Отметим еще один важный момент: неторопливый анализ последовательности остатков. Так как их мало, то, например, в задачах про последовательности и процессы за поведением остатков можно иногда уследить. Поэтому они часто служат надежным инвариантом.

Про остатки и делимость существует много разных полезных теорем (часть из них приведена в конце книги в виде задач). Но одна из них особенно удобна. Её зовут

Китайская теорема об остатках. Пусть $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа (то есть никакие два из них не имеют общего делителя). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольный набор целых чисел. Тогда существует такое число a, что $a \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Например, заведомо существует число, имеющее остаток 5 при делении на 7, остаток 4 при делении на 13 и остаток 1987 при делении на 10001. Попробуйте его, однако, найти!

Доказательство теоремы предлагаем найти самому читателю (в голове ли, в учебнике по теории чисел — его дело).

Еще один объект приложения метода остатков — целочисленные арифметические прогрессии.

Задача. Пересечение двух возрастающих целочисленных арифметических прогрессий с взаимно простыми разностями — арифметическая прогрессия.

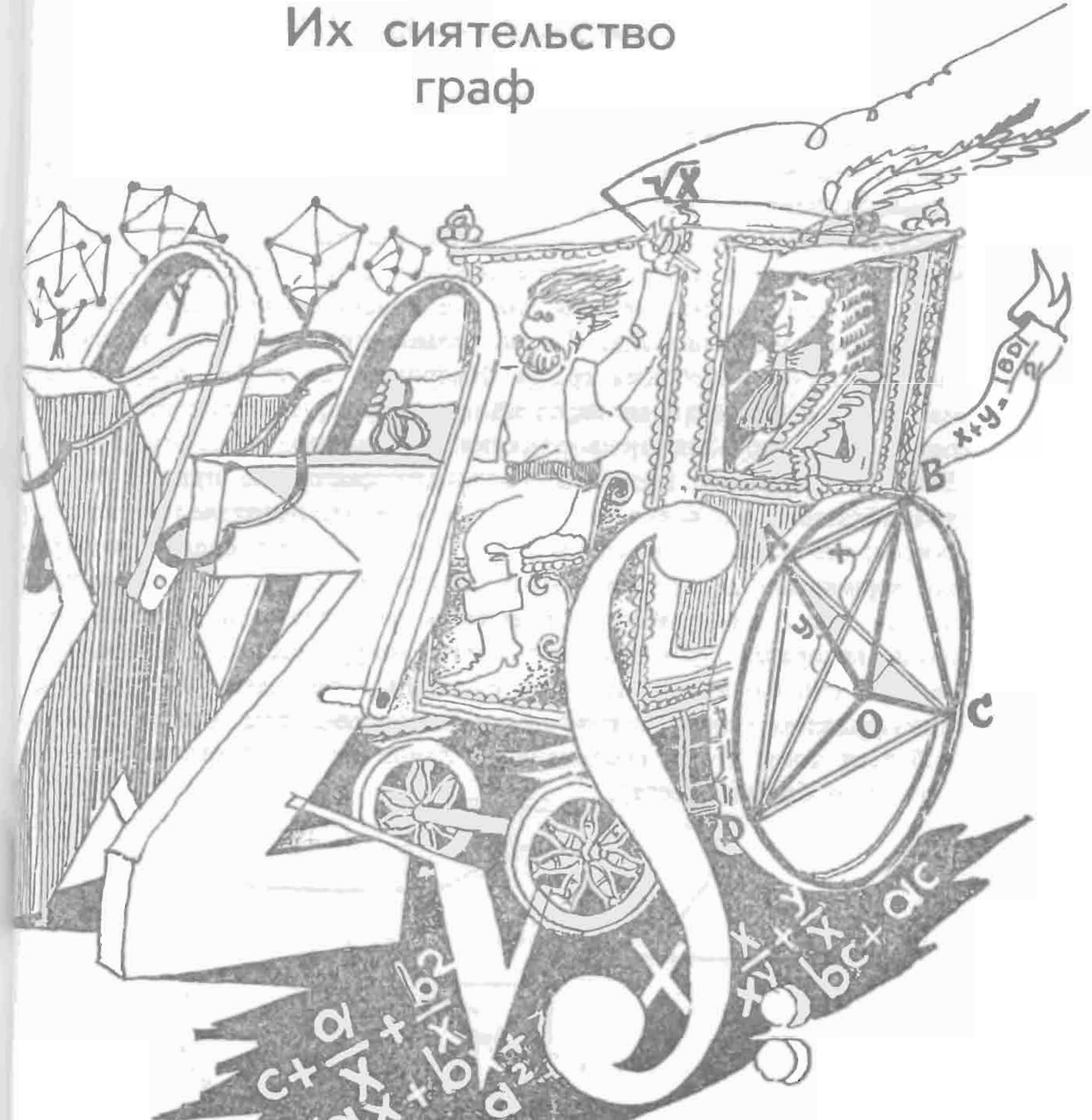
Идея решения основана на простом наблюдении: такая прогрессия получается пересечением двух множеств: первого, состоящего из чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на разность (тот же, что и у первого члена), и второго, состоящего из всех чисел, больших некоторого фиксированного числа (например, первого члена, уменьшенного на единицу). Пересечение двух множеств второго типа есть множество такого же типа. Но при условии взаимной простоты аналогичное утверждение справедливо и для множеств первого типа — достаточно удачно применить китайскую теорему об остатках, и это станет ясным.

Теперь читатель без труда ответит и на следующий вопрос: можно ли натуральный ряд представить в виде объединения арифметических прогрессий с попарно взаимно простыми разностями, большими единицы?

И последний совет — в олимпиадных задачах не забывайте об остатках при делении на 2, то есть о четности и нечетности. Мы постараемся привести такие задачи в других главах.

8

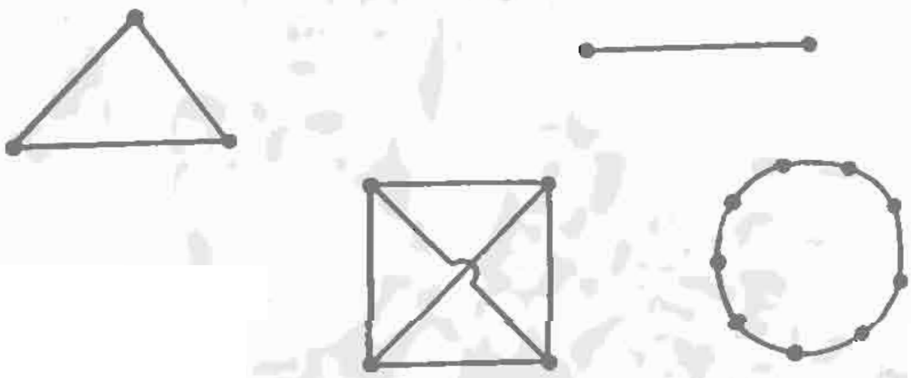
Их сиятельство граф



Как можно без содрогания помыслить о бедствиях, которые способна причинить хотя бы одна опасная связь!

Шодерло де Лакло. Опасные связи

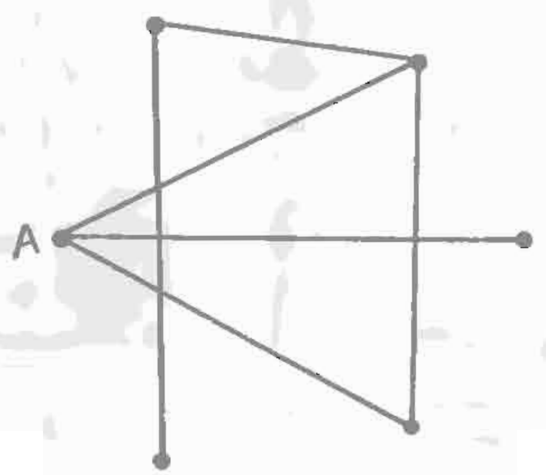
Мы начинаем главу об одном из самых гордых (по названию) обитателей математического аквариума — о графе. Под этим красивым и благозвучным словом скрывается удивительно простое и понятное определение. Граф — это всего-навсего несколько точек, часть из которых друг с другом соединены (не обязательно отрезками, можно просто линиями или же вообще ничем, лишь бы они считались соединенными). Точки называются вершинами, соединяющие линии — ребрами графа. Например, на любой треугольник мы можем смотреть как на граф, у которого три вершины и три ребра. Отрезок — это граф с двумя вершинами и одним ребром. Возьмем квадрат и проведем в нем две диагонали, причем не будем обращать внимания на точку пересечения диагоналей, как бы считая, что они не пересекаются. Тогда получим граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами. Если на окружности нарисуем девять точек, получим граф с девятью вершинами и девятью ребрами, которыми будут служить дуги окружности. Две изолированные точки — это тоже граф с двумя вершинами и без ребер. Еще приятнее строить граф в пространстве: там всегда можно добиться того, чтобы соединяющие линии не пересекались (в пространстве больше места).



Примеры графов

Задача. Доказать, что из шести любых людей найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Поиск решения. Самая главная неприятность в задаче — слишком «нематематическая» постановка вопроса. Что значит «знакомы»? Как это строго записать, какой формулой? А может, и не формулой вовсе, а геометрически? А что, если граф поможет? Надо как-то попробовать поставить в соответствие задаче граф, тогда она, по крайней мере, станет «виднее». Значит, так. Берем шесть точек (по точке на каждого человека) — это вершины. А ребра будем строить так: если люди знакомы между собой, то и точки соединим. Не знакомы — не соединяем. Хорошо! Как же теперь выглядит наша задача в такой интерпретации? А вот как: в любом графе с шестью вершинами найдутся либо три попарно соединенные вершины (по существу, треугольник, хотя, быть может, с кривыми сторонами), либо три попарно не соединенные вершины. Чисто геометрически это довольно ясно: если линий много, то должен быть треугольник, а если мало, то должны появиться три не связанные между собой вершины. Попробуем это как-то более тщательно обосновать. Допустим, что линий много. Например, что из одной вершины их выходит более половины возможного. Всего возможно пять, так как остальных вершин осталось пять, а более половины — это три. Итак, пусть из одной вершины выходит три ребра. Рассмотрим вершины, лежащие на другом конце этих ребер. Если какие-то две из них соединены, то

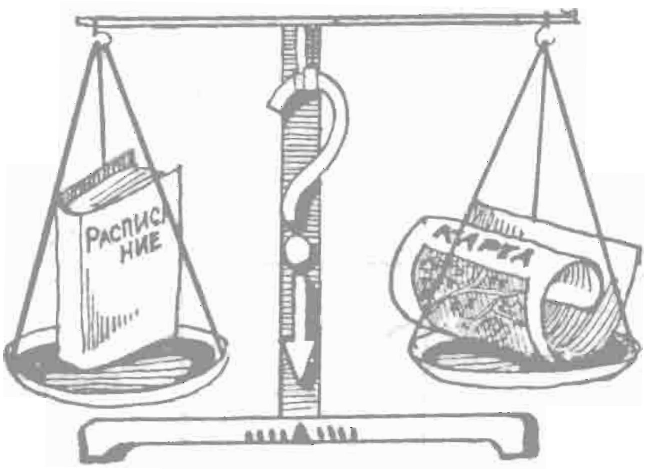


К задаче о знакомствах

и получаем треугольник вместе с двумя ребрами, соединяющими их с исходной вершиной. Значит, они не соединены и... все что надо получено — нашли три вершины, попарно не соединенные. С этим случаем разобрались.

Случай, когда ребер меньше, мы оставим читателю. Заметим только, что этот случай совершенно аналогичен уже рассмотренному. Маленькая подсказка в форме вопроса: что мы получили бы вышеприведенным доказательством, если бы строили граф наоборот, соединяя те вершины, которые соответствуют незнакомым людям? (Такой граф, кстати сказать, называют дополнительным к исходному.)

Что же выяснилось из этого решения? Мы поняли, где и зачем нужен граф. Граф приходит на помощь тогда, когда имеются какое-то множество и связи между его элементами. При этом характер связей несуществен, а важен только один вопрос: есть связь или ее нет. Именно эту ситуацию и отражает адекватно граф. Преимущества такого подхода понятны: мы можем привлечь неплохо развитую у человека геометрическую интуицию, мы можем что-то *увидеть,* а значит, лучше оценить. Чтобы лучше пояснить, за счет чего достигается этот выигрыш, представим себе такую ситуацию. Нужно проложить интересный маршрут на самолете. Вам предлагают две возможности: либо несколько листков бумаги с описанием транспортных схем для каждого из 300



Читать или смотреть?

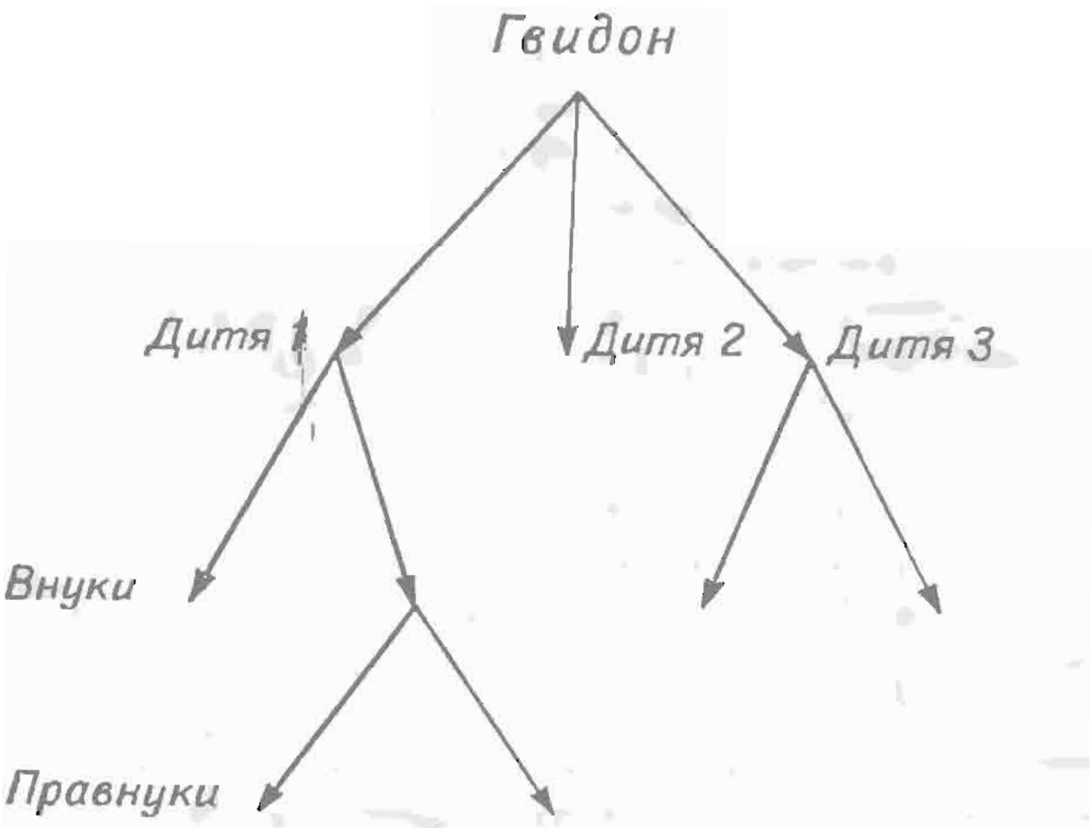
городов выбранной Вами страны (а, как известно, воздушное сообщение есть не везде), либо ту же информацию в виде одной схемы — графа с 300 точками, где ребра означают возможность прямого сообщения. Что Вы выберете? Прикиньте, что даже если в каждом городе только 30 различных рейсов, то уже при этом условии Вам придется прочитать не менее девяти тысяч названий рейсов. А увидеть то же Вы сможете за минуту-другую, если не меньше, особенно если схема будет хорошо сделана. Кстати, это еще одно преимущество графов: их в отличие от абстрактных множеств можно, не изменяя сущности, удобно перерисовывать. Еще хуже абстрактных множеств какие-нибудь вполне конкретные социологические факторы типа образования, наличия телевизора в семье и уровня зарплаты, когда по большому количеству анкет и опросов социологи пытаются понять, связаны они между собой или нет, и если да, то что можно объединить в одну группу признаков, а что — в разные. Без графов в подобных задачах, учитывая их большой объем, можно утонуть. При слишком большом объеме наглядность, правда, теряется. Но в этом случае выручают ЭВМ.

Тем не менее, следует признаться, что в большинстве книг дается абстрактное и негеометрическое определение графа как некоторого множества вершин и некоторого множества пар этих вершин, называемых ребрами. Если это и оправдано в тех случаях, когда книга пишется для специалистов и ее цель — изложение тонких аспектов этой теории, ибо абстрактное определение удобнее для теоретической работы, то рядовой читатель, чтобы суметь пользоваться теорией графов, должен их все-таки видеть геометрически. Главное — не обращать внимания на случайно возникающие точки пересечения ребер, которые не следует считать вершинами — потому-то и удобнее изображать граф в пространстве. (Существуют и много графов, которые даже нельзя изобразить на плоскости без пересечения их ребер не в вершинах.)

Нашей целью, однако, является не изложение теории графов (о ней написано много хороших книг, начиная с книг О. Оре), а тренировка умения увидеть «графскую» сущность в совершенно рядовых, на первый взгляд, задачах.

Задача. У царя Гвидона было три сына. Из его потомков сто имело по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

Поиск решения. Как взяться за задачу — сразу непонятно. Даже в самом начале могут быть совершенно различные ситуации: может, у всех детей Гвидона по два сына, а может — только у одного, а двое — бездетные. Тем не менее, ответ, судя по всему, в любом случае один. Значит, это отражение какого-то общего результата. Только вот о чем, не о детях же? Поищем какую-то общезначимую переформулировку этой задачи. Надо как-то суметь перевести отношение отец—сын, указать на их связь. Связь! А нельзя ли все это изобразить графом? Отчего же: каждому человеку (включая самого Гвидона) построим вершину, но соединять будем только пары вершин отец—сын. Вот и отлично. Теперь перевод. Имеется граф с каким-то числом вершин. Известно, что из одной из них выходит три ребра, а из каждой другой либо два, либо ни одного... Ерунда получается: как же может быть ни одного, если он чей-то сын. А, понятно, каждый из них может быть или не быть отцом, но сыном он точно является, кроме Гвидона, конечно. Значит, одно или три ребра. Ну тогда и Гвидон под это подходит. Итак, с самого начала. Имеется граф с каким-то числом вершин. Известно, что из каждой вершины выходит либо три ребра (таких вершин 101, включая Гвидона), либо ровно одно. Требуется сосчитать число вершин. Правильно ли мы перевели задачу? Равносильна ли она исходной? Что-то подозрительно. Что, значит, любой граф с тремя и одним ребром у вершин отражает какую-нибудь родственную связь? Сомнительно что-то. Попробуем перебрать простейшие случаи графов. Вот, например, тетраэдр. Там в каждой вершине по три ребра. Допустим, что вершина — это Гвидон, три вершины снизу — его сыновья. Что же это получается — каждый из них отец другого? Но это ерунда. Что-то мы недоговорили про свойства нашего графа. Что же именно? А, вот что мы упустили — у каждого потомка есть как бы свой этаж: первое поколение, второе поколение, третье и так далее. Значит, мы должны рисовать этакие многоступенчатые графы. Но это неудобно и не очень общо получается. А что если...



. . . .

Генеалогическое дерево Гвидонов

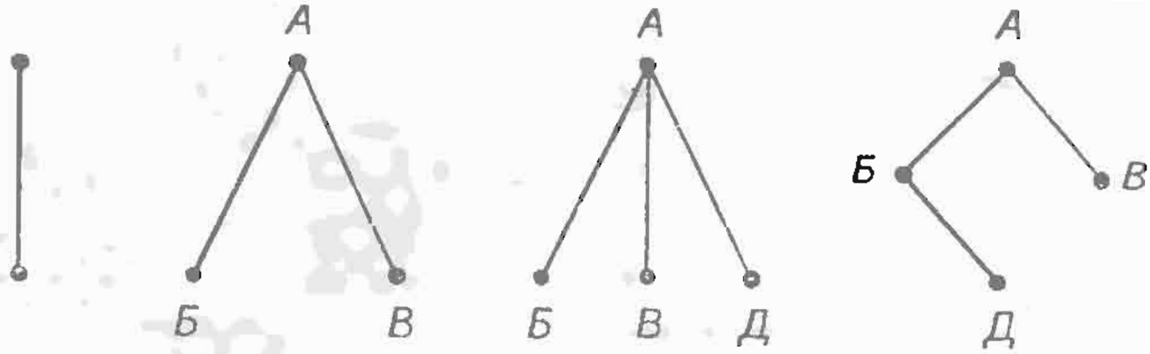
рисовать стрелку на каждом графе от отца к сыну? (Читатель, мы подошли к важному определению. Граф, у которого каждое ребро имеет направление, называется *ориентированным.* Разумеется, в случае ориентированного графа между двумя вершинами могут быть два ребра: туда и обратно.) Тогда мы получим ориентированный граф. И следующий перевод. Имеется ориентированный граф с некоторым числом вершин. Известно, что из одной фиксированной вершины выходят три ребра и ни одно не входит. В каждую из оставшихся вершин входит ровно по одному ребру, а выходит либо два, либо ни одного, причем два ровно у ста штук. Требуется найти число вершин в графе.

Вот теперь понятно, что перевод адекватен. Что же можно сказать о новой задаче? Что в ней можно вычислить? Во-первых — число ребер. Их столько же, сколько и начал. А сколько начал, мы знаем: три — у царя и два, умноженное на сто, у потомков. Итого — 203. Интересно, а что получится, если считать число ребер по концам? Тогда... тогда это будет в точности число потомков: ведь в каждого из них входит ровно по одному ребру, а в царя ни одного. Вывод: у царя 203 потомка.

Ориентированные графы возникают в совершенно различных ситуациях. Типичный пример: автодороги, где, учитывая наличие улиц с односторонним движением, приходится рассматривать именно ориентированные графы. Следующая задача вводит другой важный класс графов, для которого по ходу решения мы докажем одну важную теорему.

Задача. Имеется 100 городов, между некоторыми из них проложены дороги с двусторонним движением. Известно, что из любого города можно попасть в любой другой, причем по единственному маршруту. Сколько имеется дорог?

Поиск решения. Понятно, что число 100 тут ни при чем. Попытаемся построить такие транспортные магистрали вначале для маленького числа городов (двух-четырех), а уж затем попытаемся угадать общий ответ для произвольного числа городов. Для случая двух городов только одна возможность — соединить города между собой, для трех — ответ тоже ясен: два ребра из трех возможных должны быть, а третье — отсутствует (иначе будет два разных маршрута). Да,... интересное замечание: треугольника не может быть и в общем случае по тем же причинам. Значит, граф, отвечающий нашей магистрали, в своем составе не имеет никаких треугольников (напомним, что с точки зрения теории графов треугольник с кривыми сторонами ничем не отличается от треугольников с прямыми — лишь бы стороны были). Ладно, с этим понятно. Теперь случай четырех городов. Как бы поудобнее перебрать возможные ситуации? Пожалуй, лучше всего так. Наверняка есть хоть один город, из которого выходят не менее двух дорог. (Читатель легко сообразит, почему, нарисовав несколько картинок. Да и вообще ему в этой главе рекомендуется рисовать их побольше.) Итак, допустим, что из города А есть дорога в город Б и есть дорога в город В. Между прочим, тогда Б и В между собой не соединены — получился бы злополучный треугольник. (Да, кстати, о треугольниках: любовный треугольник — это типичный случай



Маленькие деревья

ориентированного графа!) Остался город Д. Тут возможны три ситуации: Д соединен с А, Б или с В. Случаи Б и В совершенно симметричны, так что можно рассматривать только один из них. А вот случай с А от них коренным образом отличается. Нетрудно видеть, что больше ребер быть не может: получится либо треугольник, либо квадрат (а квадрат тоже не подходит: тогда будет два разных маршрута из одного города в другой).

Анализ маленьких случаев мы уже окончили. Попробуем сделать определенные выводы. Первый — в нашем графе нет циклов, то есть замкнутых маршрутов. Внимание, читатель, мы добрались до важнейшего определения: связный граф без циклов называется деревом. Связный означает, что граф нельзя разбить на два, не разрывая его в какой-нибудь вершине. Происхождение слова понятно, если нарисовать несколько больших деревьев: явно видны структуры веток. Вывод второй: судя по результатам малой проверки, число ребер на единицу меньше числа вершин. Прикинем, как это можно было бы доказать. Наиболее приемлемый путь — индукция (или метод минимального контрпримера). Чтобы применить то или другое, надо постараться отыскать способ уменьшить число вершин. Тогда число ребер тоже должно уменьшиться на единицу и, самое главное, обязательно должно сохраниться условие задачи. Следовательно, должна найтись вершина, из которой выходит ровно одно ребро. Надежда на это есть, поскольку сказанное верно для малых случаев и так как оно соответствует естественному доказательству. Итак, путь ясен: все силы надо устремить на доказательство следующей полезной леммы.

Лемма. В любом дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (по естественным причинам такую вершину называют висячей).

Поиск доказательства леммы. Естественно попробовать от противного. Допустим, что из каждой вершины выходит не менее двух ребер. Это означает, что мы всегда можем прийти в эту вершину по одной дороге, а уйти по другой. Начнем «гулять». Так как вершин — конечное число, а в соответствии с задачей мы рассматриваем конечное дерево, то рано или поздно попадем в ту вершину, в которой уже бывали однажды. Но это означает наличие замкнутого маршрута, цикла! Противоречие. Лемма доказана.

Вернемся к исходной задаче. Итак, мы нашли вершину с одной дорогой из нее. Выбросили и ее и дорогу — получили меньший граф, для которого все уже можем считать доказанным, например, по индукции. Там уже вершин на одну больше, чем ребер. Значит, и у нас так. Все. Замечаний к решению — два. Первое — в виде вопроса.

Задача. Верна ли лемма для бесконечного дерева?

Второе замечание касается нашего способа обращения с числом 100, данным в исходной постановке вопроса, которое мы сразу заменили на произвольное число. Что мы выиграли от этого? Получили возможность индукционного рассуждения, во-первых, и анализа маленьких ситуаций, во-вторых. Вывод: не решайте задачи с большими конкретными числами. Другое дело, что не всегда вместо конкретного числа можно взять любое, но почти всегда — бесконечный набор однотипно устроенных чисел. Так, например, если в условиях задачи появилось число 1987, то это — надежный признак одного из двух: либо надо решать задачу с произвольным k, либо использовать какие-то свойства делимости, то есть по существу, решая задачу для произвольного k, на что-то там делящегося. Исключения бывают, но редкие.

Приведем классический пример задачи.

Задача. На шахматной доске 3×3 стоят по углам снизу два черных коня, сверху — два белых (рис. 22). За какое наименьшее количество ходов белых и черных коней можно поменять местами?

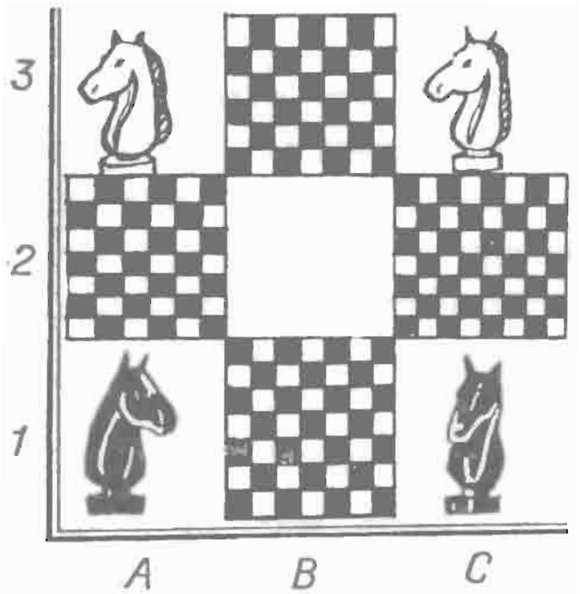


Рис. 22. Как поменять коней местами?

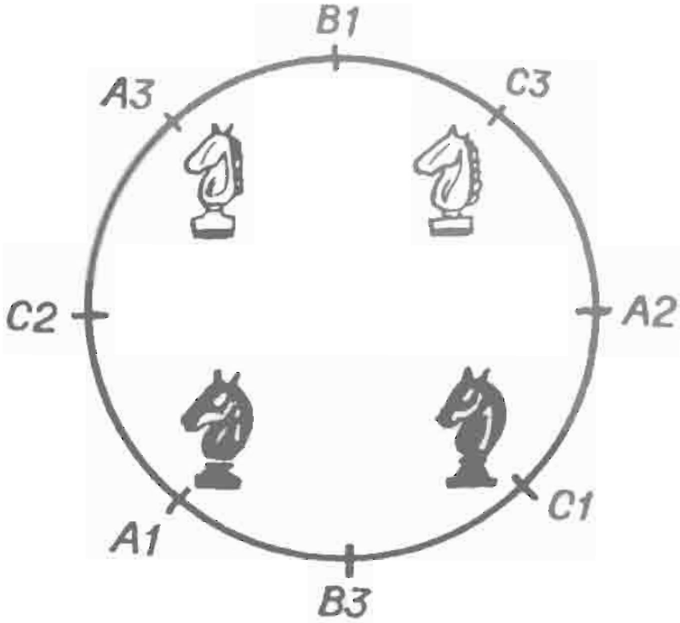


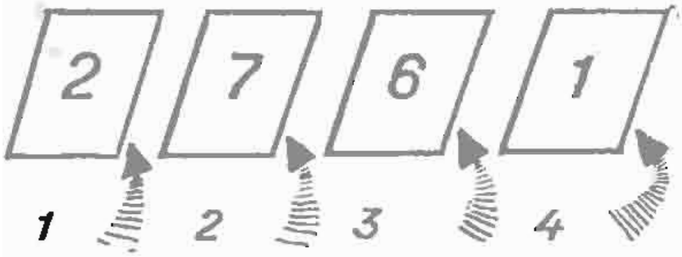
Рис. 23. Кони бегают по кругу

Поиск решения. Сравнительно быстро можно указать одного из нескольких возможных кандидатов на кратчайшую перегруппировку кавалерии. Но вот как можно было бы доказать, что не может быть ничего короче. Это — вопрос вопросов. Попытаемся проанализировать схему коммуникаций. Каждая клетка связана ровно с двумя другими. Связана... А ведь связь — это слово «графское». Не пора ли припомнить теорию графов? Попробуем. Рассмотрим граф с восемью вершинами, каждая из которых отвечает одной из клеточек на краю доски (центральную клетку не будем рассматривать: в нее все равно не попасть). И нарисуем граф связей. Ой, какой красивый граф получается: окружность и на ней восемь точек (рис. 23). Значит, наши ходы конем с этой точки зрения — сдвиг по дуге окружности. А вот в такой интерпретации совершенно ясно, как убедиться, что выбранный способ перегруппировки минимальный (как, читатель, действительно ясно?).

Метод, который мы сейчас привели, по существу есть метод нити и пуговиц, состоящий в следующем: пришить пуговицы, стоящие на клеточках, друг к другу нитками в соответствии со связями. Затем всю эту комбинацию приподнять и распутать, что мы и проделали.

В следующей, неожиданно трудной, задаче (решение все время норовит ускользнуть, хотя кажется, что вот-вот его поймаешь) теорию графов на первый взгляд использовать не придется.

Задача. Пронумеровали, начиная с единицы, бесконечное количество карточек. На лицевой стороне каждой из них написали натуральное число, не равное номеру карточки. Доказать, что можно так выбрать бесконечное количество карточек, что на лицевой их стороне не будет написан ни один из их номеров (другими словами, множество чисел, написанных с одной стороны, не будет пересекаться с множеством чисел, написанных с другой).



Вот числа выстроились в ряд...

Поиск решения. Странная какая-то задача! Утверждение почти очевидно, а доказательство все время из рук выскальзывает. Казалось бы, начни с любой карточки и постепенно добавляй по одной, так нет же, не выходит. Например, стоит только взять первую карточку (с единицей на обратной стороне), и вполне может выясниться, что больше брать ничего нельзя: у всех остальных карточек на лицевой стороне может стоять единица. Из этой ситуации, правда, можно выбраться, но это чересчур уж крайний случай. Вполне может оказаться, что первые пять карточек взять удастся, а шестую — никак. А главное, неуютная какая-то задача: нет привычных объектов, все какие-то карточки, которыми трудно оперировать, особенно если их бесконечное число. Как бы по-другому записать связь между ними? Связь? Так это значит, что можно обратиться за помощью к теории графов! Как? А очень просто. Вершинами будут натуральные числа, а ребрами... карточки! Точнее, если есть карточка с номером, скажем, K, на лицевой стороне которой написано число X, то мы проводим ребро-стрелку из K в X. Граф, стало быть, получится ориентированным. Попробуем начать его рисовать. Берем точку 1, проводим из нее стрелку в..., скажем, K_1. Хорошо. Из K_1 проводим стрелку в K_2, из K_2 — в K_3 и так далее (см. рис. 24). Глядя на эту картинку, уже легко придумать требуемое: надо только взять карточки через одну: с номерами 1, K_2, K_4, K_6 и так далее.

Все? Здравый смысл подсказывает, что как-то слишком уж легко расправились мы со своими проблемами, наверняка где-то ошибка. Вот, например, исходная трудность, когда у всех кар-

$$1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow K_3 \;---$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow \quad ---$$

Рис. 24. Бесконечная цепочка

точек с лицевой стороны написана единица (кроме первой карточки, конечно). Как работает наш метод в этом случае? А... никак! Уже $K_2=1$, и мы никакого бесконечного множества не получили. Да и понятно, в чем дело: вместо длинной цепочки мы получили «свернутую» картинку (рис. 25). А-а-а, теперь-то и стал понятен источник всех наших затруднений: нам необходимо рассматривать два случая, и каждый из них по-разному. С одним случаем все вроде бы понятно: если в нашем графе есть бесконечная длинная цепочка типа той, которая изображена на рис. 24, то, беря номера через один, мы получаем требуемое бесконечное множество, ибо номера, которые мы пропустили, соответствуют в точности обратным сторонам карточек. Второй принципиальный случай — такой бесконечной цепи в нашем распоряжении нет. Тогда есть бесконечно много непересекающихся «колечек» — циклов, как на рис. 26 (рис. 25 — его частный случай). О них нужно поразмышлять отдельно. Впрочем, и размышлять нечего: берем ровно по одному номеру из каждого «колечка» и получаем требуемое множество. Как убедиться? А как, собственно говоря, сейчас формулируется наша задача на «графском» языке?

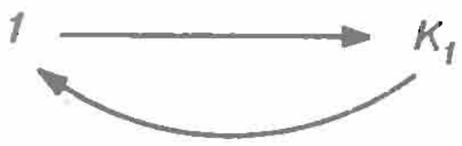
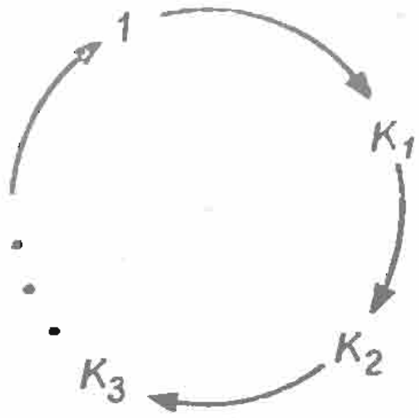


Рис. 25. Зациклились

Рис. 26. Колечко ⟶



Вот как: найти бесконечное множество вершин таких, что каждая стрелка, начинающаяся в одной из вершин этого множества, оканчивается в вершине, не принадлежащей этому множеству.

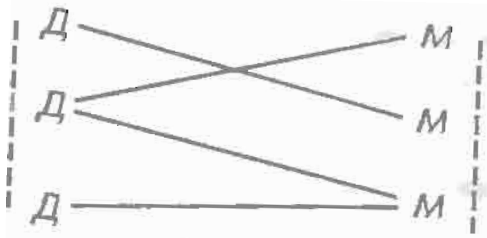
Поскольку все концы стрелок мы в наше множество не допустили, то требуемого добились.

Комментарий. В этой задаче хотелось бы обратить внимание на типичную ситуацию, возникающую при решении математических задач, когда обязательно нужно рассматривать два случая: общий, для которого проходит какое-то общее доказательство, и частный, со своим собственным доказательством. А если такого разделения не делать, то общее единое доказательство провести практически невозможно. Например, эту же задачу можно было бы и по-другому разделить на два случая: когда каждое число написано с обратной стороны только конечное число раз и когда есть число, написанное бесконечное число раз (во втором случае требуемое множество — все эти карточки). Главный признак необходимости такого разделения — «ускользание доказательства» из-за каких-то частных возможностей.

Как граф помогает считать, показывает следующая

Задача. В пионерском лагере каждый мальчик знаком с 10 девочками, а каждая девочка — с 10 мальчиками. Доказать, что мальчиков и девочек в лагере одинаковое число.

Решение. Поиск решения состоит только в том, чтобы догадаться нарисовать граф. А задачи про знакомства просто по своей постановке просят графа. Так вот, предположим, что граф уже нарисован. Вершины — девочки и мальчики, ребра — знакомства,



Девочки и мальчики

то есть соединяем мальчика и девочку ребром тогда и только тогда, когда они знакомы. Граф неориентированный, так как если мальчик знаком с какой-то девочкой, то и, наоборот, девочка знакома с этим мальчиком. Теперь единственный вопрос: сколько получится ребер? У каждого мальчика по 10 знакомых, значит, количество ребер равно количеству мальчиков, умноженному на 10. Точно так же количество ребер равно количеству девочек, умноженному на 10. Но количество ребер всегда одинаково, как ни считай. Получаем, что десятикратное количество мальчиков равно десятикратному количеству девочек, а следовательно, тех и других поровну.

Особенно часто в задачах с «графской сущностью» эксплуатируются идеи четности. Поясним это на двух примерах.

Задача. В некотором царстве, в некотором государстве царь, возненавидев четные числа, издал приказ: в государстве должно быть нечетное число городов, а из каждого города должно выходить нечетное число дорог (каждая дорога соединяет два города). Днями и ночами трудились архитекторы над планом строительства дорог и городов. На что только ни шли они: и проводили из одного города в другой несколько дорог, и даже дороги из одного города — в этот же самый, но все равно у них ничего не получалось. И доложили царю, что архитекторы не могут исполнить волю его величества. Страшно разгневался царь и приказал казнить нерадивых слуг. Но тут на колени упал придворный математик и воскликнул: «О, повелитель, выслушай меня! Твой архитектор невиновен, ибо...» Что же объяснил математик царю?

Поиск решения. Что сказал математик, догадаться несложно. Он доказал, что построить такое государство невозможно. Или, переведя на язык графов, он доказал, что не существует графа с нечетным числом вершин, в котором из каждой вершины выходит нечетное число ребер. Но вот как он это доказал? Поупражнявшись в попытках проектирования плана для пяти городов, из каждого из которых выходит по три дороги, и убедившись, что ничего не получается, надо переходить к поиску доказательства. Хорошо бы сформулировать положительное, а не отрицательное утверждение. Например, такое: если в городе (графе) — нечетное число ребер в каждой вершине, то число вершин — четно. Утверждение такого плана можно было бы доказывать и по индукции. Как это можно осуществить? Надо попытаться сохранить условия индукционного перехода. Значит, удобно выбрасывать по два ребра и вести индукцию по числу ребер. Но можно ли выкинуть несколько ребер так, чтобы из каждой вершины ушло четное число ребер, желательно по два или ни одного? Это удалось бы, если бы был треугольник: его ребра можно было бы выкинуть, и индукционный переход был бы совершен. А если нет треугольника? Тогда есть цикл, и тоже хорошо. А если нет цикла? Тогда мы имеем дело с деревом. А для дерева доказывать проще. Ну, что ж, какой-то разумный план доказательства есть.

Мы отметим для себя эту очень важную схему доказательств. Сначала утверждение доказывается для деревьев. Затем — для произвольного графа индукцией по числу ребер. Если есть цикл, то обычно его можно выбросить и осуществить индукционный переход. Если цикла нет, то есть дерево, для которого уже все доказано. Правда, может оказаться, что деревьев несколько, если нет условия связности графа. Но и этот случай чаще всего легко обрабатываем. Главное для применимости данного метода — выбрасывание цикла должно позволять сохранить предположение индукции.

Чистка решения. Конечно, схема хорошая, но какая-то искусственная. Есть и еще один недостаток — утверждение слишком необщее. Не попробовать ли сформулировать более общее утверждение, справедливое для произвольного графа? А почему бы нет? Например, так. Назовем вершину нечетной, если из нее выходит нечетное число ребер. Вполне правдоподобная гипотеза: число нечетных вершин четно. Это опять же можно доказывать тем же способом. Да, но здесь нет необходимости выбрасывать по два ребра. Можно и одно. Что же тогда происходит? Выбрасывая одно ребро, мы выбрасываем его сразу из двух вершин, и если, например, обе они были нечетными, то станут четными, а если одна четная и одна нечетная, то... ну понятно, в любом случае общая четность не изменится. Стоп, а что значит общая четность? Это, скорее всего, намек на то, что никакой индукции вообще не нужно, и сыграть надо на том, что одно ребро считается дважды. Считается дважды? Вот и посчитаем общее число ребер. Вершин — нечетное число, и сами они нечетные в нашей задаче, а чтобы посчитать число ребер, надо сосчитать число ребер в каждой вершине и... разделить на два (ведь каждую вершину мы считаем дважды) — но общее нечетное число на два ведь не делится!

Чистое решение. Докажем более общее утверждение. В любом государстве число городов с нечетным числом дорог четно (по-прежнему предполагается, что каждая дорога, начавшись в одном из городов государства, оканчивается в каком-то другом городе, а если в том же — «петля», то считается дважды). Для этого определим общее число дорог, вычислив количество дорог в каждом городе, сложив все эти числа и разделив пополам (так как каждую дорогу мы сосчитали дважды: в начале и в конце). Чтобы общее число дорог получилось целым, результат суммирования должен оказаться четным. Значит, городов с нечетным числом дорог — четное число.

Отметим, что царю удалось впоследствии решить все проблемы. Он открыл одну международную трассу, которая начиналась в государстве, а оканчивалась за его пределами...

Комментарии. В этой задаче возник новый тип графа — допускались петли и кратные ребра (из одного города в другой могло вести несколько дорог). Обычно его называют псевдографом. Если допустить еще и ориентацию ребер, то мы получим самый общий вид графов из тех, что мы уже рассмотрели. Следует также обратить внимание на то, как изменились структура и основная идея доказательства в процессе чистки (правда, это тот случай, когда ясность от сказанного только выиграла).

Дойдя до темы четности, невозможно упустить следующую замечательную теорему.

Теорема. Граф можно обойти, пройдя по каждому ребру ровно один раз только в том случае, если нечетных вершин у него не больше двух и он связен. При этом если нечетных вершин две, то маршрут обязан начаться в одной из них, а окончиться в другой; если же ни одной, то маршрут может начаться в любой вершине и в ней же окончиться.

Доказательство. Здесь два утверждения. Первое: если граф такой, то его можно обойти. И второе: если граф можно обойти, то он такой-то. Второе утверждение доказывается совсем просто за счет следующего простого наблюдения: если вершина находится в середине маршрута (то есть не начальная и не конечная), то в нее надо войти и из нее надо выйти. Значит, каждый проход через нее добавляет по два пройденных ребра. Так как все ребра должны быть пройдены, то их у вершины должно быть четное число. Таким образом, нечетной может оказаться только первая или последняя вершина (а на самом деле «и» вместо «или»).

Несколько сложнее со вторым утверждением. Самый четкий путь — индукция по числу ребер. Удобно доказывать все утверждение в целом. База индукции проблем не представляет. Значит, самое важное — отыскать индукционный шаг. Рассмотрим вначале случай всех четных вершин. Выбросим одно ребро. По индукции, получившийся граф обойти можно. (Единственная проблема — связность: надо позаботиться о том, чтобы при выбрасывании ребра граф остался связным. Переложим эту заботу на читателя.) Причем маршрут начнется в одной вершине, а окончится в другой, так как у графа будут две нечетные вершины. Но эти вершины суть концы выброшенного нами ребра. Осталось совершить проход по нему — и обход закончен. Аналогичные рассуждения проходят для случая двух нечетных вершин.

Упражнение. Восстановить строгость в доказательстве и закончить его. Кстати, почему в теореме ни слова не сказано о случае одной нечетной вершины?

Пользуясь этой теоремой, читатель без труда сможет установить, когда фигура является уникурсальной, то есть когда ее можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну и ту же линию дважды. Например, закрытый конверт (прямоугольник с пересекающимися полосками-диагоналями) неуникурсален, а открытый уникурсален (рис. 27). Почему?

Последний вопрос, который мы рассмотрим в этой главе,— это как выйти из лабиринта. Понятно, что на лабиринт мы можем смотреть как на граф. При этом вершинами графа являются комнаты, а ребрами — коридоры лабиринта.

Многие убеждены, что из любого лабиринта можно выйти, пользуясь «правилом правой руки», то есть держаться за одну стенку не отрывая руки. В этом утверждении есть и доля истины: если Вы с самого начала, только войдя в лабиринт, будете пользоваться упомянутым правилом, то это действительно обеспечит Вам выход. Напротив, если Вы решили воспользоваться этим правилом только после того, как заблудились (а до того как-то и нет смысла пользоваться никакими правилами), то тут оно скорее гарантирует Вам, что Вы никогда не выберетесь. В самом деле, рассмотрим простейший лабиринт (см. рис. 28). Находясь во внутреннем кольце, Вы не сможете выбраться и будете блуждать вдоль его стенок.

Возникает вопрос: а можно ли все же как-то выбраться? Ситуация предполагается крайняя: Вы не можете оставлять никаких меток, не говоря уже о возможностях типа «нити Ариад-

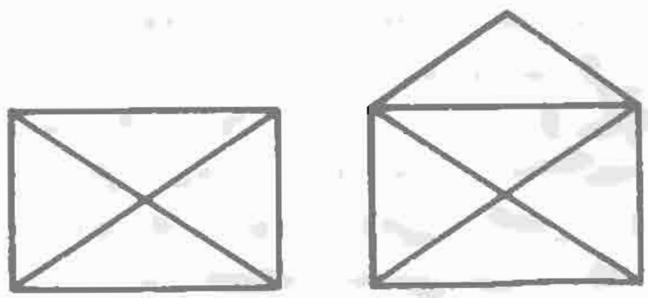


Рис. 27. Какую из фигур можно нарисовать одним росчерком пера?

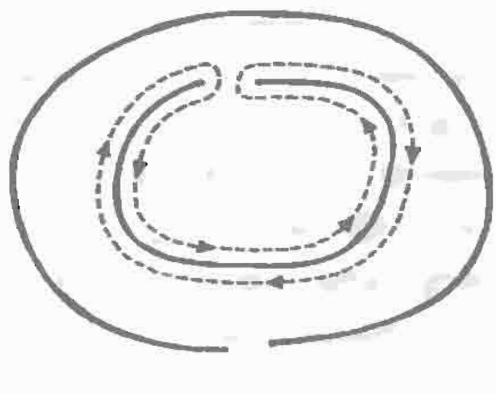


Рис. 28. Бесконечное блуждание по «правилу правой руки»

ны», Вы не способны отличить одну комнату от другой. Единственное, на что Вы способны — это отличить выход. Эти ограничения компенсируются предположением, что у Вас прекрасная память, хотя, как выяснится позднее, и это не обязательно. Итак, как выйти из лабиринта?

Оказывается, выход есть всегда, что неудивительно, и более того, его всегда можно найти, что гораздо поразительнее. К алгоритму, описывающему способ отыскания выхода из любого лабиринта, и приведет нас следующая цепь рассуждений.

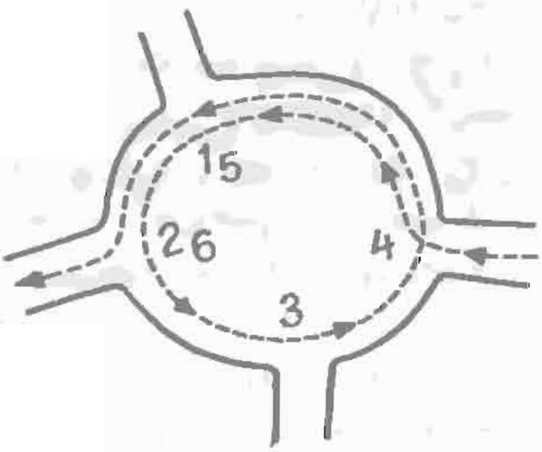
Начнем с описания игры «Лабиринт». Играют двое. Один задумывает лабиринт, рисует его и нумерует в каждой комнате двери способом, известным одному ему. Второй игрок должен выбраться из лабиринта в соответствии со следующими правилами. Первый игрок отмечает его начальное положение. Второй же говорит слова типа «Выхожу из двери номер 3», на что первый отвечает: «Проходишь через дверь номер такой-то» (номер двери, в которую второй входит, первый ищет по своей схеме). Если оказывается, что двери с таким номером нет (номер больше количества дверей в комнате), то об этом сообщается. Сообщается, естественно, и когда первый достигнет выхода.

Игра очень увлекательная, попробуйте — не пожалеете. Эта ситуация в принципе уже хорошо моделирует настоящий лабиринт. Обычно, когда играют, заранее договариваются о том, что комнат и дверей в каждой комнате не больше, чем данные числа. При таких ограничениях искать выход можно по следующему чисто теоретическому рецепту. Заметим, что тогда существует только конечное число лабиринтов. Нарисуем все их планы. Каждый план размножим в количестве, равном количеству вершин, и, отметив на каждом из них вершину, назовем это картой. Теперь способ выхода такой. Берется в руки первая карта и по ней строится план выхода из лабиринта — соответствующий маршрут, то есть последовательность номеров дверей. Эти номера и диктуются. Если выйдем — все в порядке. Если нет — карту выбрасываем, она не та (или та, но с неправильно отмеченной начальной вершиной), и берем следующую. На ней отмечаем уже пройденный маршрут. Если он там невозможен или должен был давно привести к выходу (чего, увы, не произошло), то эту карту тоже выбрасываем и берем следующую. Если же возможен, то отмечаем точку, в которой мы могли бы уже находиться, и из нее планируем новый маршрут к выходу — очередную последовательность дверей. Выйдем — чудесно. Не выйдем — карту долой и берем следующую. На ней опять же отмечаем уже пройденный маршрут, состоящий уже из двух последовательностей дверей, и так далее.

Основная идея в том, что мы либо выберемся, либо рано или поздно доберемся до нужной карты с правильно отмеченной начальной вершиной. Тогда мы уже наверняка выберемся, так как у нас в руках правильная карта. Вот и все.

Ясно, что при этом требуется очень-очень хорошая память — одних карт сколько! Переходя от игры к лабиринту, мы должны только продумать единый способ нумерации. Здесь мы поступим так: введем не абсолютную, а относительную нумерацию дверей — относительно той двери, в которую мы вошли. Сформулируем теперь это в виде задачи.

Задача. Предположим, что путешественник, заблудившись в лабиринте, решил выйти из него, руководствуясь следующим правилом. Он задумал некоторую последовательность натуральных чисел k_1, k_2, k_3, ... Потом вошел в первый попавшийся коридор и, войдя в комнату через дверь, отсчитал от нее k_1 дверей про-



Выбор очередной двери ($k_i=6$)

тив часовой стрелки. В эту дверь он и направился, вышел в другую комнату, отсчитал k_2 дверей против часовой стрелки, считая, естественно, от той двери, в которую вошел, и так далее. Например, пресловутое «правило правой руки» соответствует последовательности 1, 1, 1, ... Требуется доказать, что существует последовательность, обеспечивающая выход из любого лабиринта.

Доказательство. Практически все доказано при анализе игры. Более того, относительная нумерация даже упрощает дело — не требуется нумеровать двери. Осталось лишь разобраться со свойствами конечности: сейчас ведь заранее не известно ограничений на величину лабиринта. Это тоже несложно, и мы просто приведем полное доказательство.

Пронумеруем последовательно все лабиринты: сначала с одной дверью, затем с двумя, тремя и так далее. В каждом из них отметим по одной вершине (начальной) всеми возможными способами. Лабиринт с отмеченной вершиной назовем для удобства схемой. Теперь пронумеруем подряд все схемы: вначале — все схемы первого лабиринта, затем — второго и так далее. Получим бесконечную последовательность схем. Отметим, что при этом мы будем рассматривать только такие схемы, из которых выход, начиная с отмеченной вершины, возможен (в противном случае просто нет смысла рассматривать такую схему). Последовательность будет строиться таким образом. Первые числа — маршрут, обеспечивающий выход по первой схеме. Последующие — маршрут, обеспечивающий выход по второй схеме с учетом уже пройденного пути по первым числам (если же выход по ним уже был обеспечен, то и дописывать в последовательность ничего не будем). Заметим, что такой маршрут существует: например, вернуться назад (имея карту, это можно сделать) к отмеченой точке, а от нее, по условию, можно добраться до выхода. И так далее.

Данная последовательность действительно обеспечивает выход, так как рано или поздно мы доберемся до истинной схемы (но, скорее всего, еще раньше — выйдем).

Подчеркнем, что если бы мы нумеровали лабиринты по количеству вершин, то могли бы не пронумеровать все лабиринты: даже с одной вершиной существует бесконечное число лабиринтов, отвечающих графам с петлями. При нумерации схем мы такую опасность избегаем, так как предполагаем возможность выбраться. И, следовательно, если ребер — конечное число, то и вершин должно быть конечное число.

А нельзя ли обойтись без таких сложных запоминаний и рисунков. После доказанной теоремы — можно.

Задача. Привести конкретный пример указанной последовательности.

Решение. Так как в предыдущей задаче все было основано на конечности, то, стало быть, для лабиринта с числом ребер не выше заданного существует конечная последовательность, обеспечивающая выход из него. Но тогда красивый поворот: любая последовательность, содержащая все конечные последовательности, удовлетворяет условиям предыдущей, а значит, и настоящей задачи. Конкретный пример такой последовательности привести уже нетрудно. Она строится так: сначала все последовательности длины 1 из чисел не больше 1, затем — все последовательности длины 2 из чисел не больше двух и так далее. Вот ее начало: 1; 1,1; 1,2; 2,1; 2,2; 1,1,1; 1,1,2; 1,1,3; 2,1,1... (точка с запятой используется для лучшей видимости закона построения). Существуют и более экономные последовательности, без таких повторов — читатель сам их найдет.

Вот, собственно, и все. Насколько практичен этот алгоритм? Можете проверить на кубике Рубика, который тоже есть лабиринт. Согласно доказанному, алгоритм обеспечивает сборку кубика из любого положения с закрытыми глазами — лишь бы кто-то вовремя сказал, что кубик уже собран. Представляете, сколько на это уйдет времени? Это и есть ответ.

Прежде чем проститься с его сиятельством, несколько тренировочных задач.

Задача. Беспризорник Вася умел из трех окурков делать одну папиросину. Как-то раз он насобирал аж 12 окурков. Сколько папирос ему удалось выкурить?

После того как Вы строго докажете, что указанное Вами число максимально (а с помощью графа получается действительно просто и строго), Вам будет любопытно узнать, что Вася одолжил один окурок у соседа и, выкурив последнюю шестую папиросу, отдал долг. Кстати, эта задача отнюдь не реклама курения.

Задача. В тридевятом царстве есть 101 город. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно с пересадками).

Задача. Можно ли из куска проволоки длиной 120 см сделать, не разламывая ее, каркас куба с ребром 10 см?

Задача о свадьбах. Имеется несколько юношей и девушек. Каждый из них влюблен ровно в двух представителей противоположного пола, причем любовь взаимная (если Вам справедливо кажется, что любить двух сразу невозможно, считайте, что они с Казанга VI). Докажите, что их можно всех переженить по любви. Верно ли это, если каждый любит не менее двух?

Интересно порешать и общую задачу, в которой каждый юноша имеет несколько подруг.

Задача. Докажите, что необходимым и достаточным условием возможности всех переженить является следующее: любые k юношей должны вместе иметь не менее k любимых, где $k=1, 2, \dots, n$ (n — число девушек, равное числу юношей).

Да, чтобы не забыть: многоженство и многомужество на Казанге VI тоже запрещены!

9

Хоть что-то, но неподвижно!

Универсально лишь то, что достаточно для этого грубо.

Поль Валери. Из тетрадей

В этой главе речь пойдет об инвариантах — о том, что не меняется, даже если поменялось все.

Задача. Решить уравнение

$$(x^2+3x-1)^2+3(x^2+3x-1)-1=x.$$

Поиск решения. Стандартное начало — попытаться с ходу угадать корни. Известно, и как это делать: если есть целые решения, то они наверняка — делители свободного члена. Мы пройдем мимо этой возможности — и не потому, что она окажется безуспешной. Как раз наоборот: таким путем решение найти можно, и читатель должен немедленно в этом поупражняться. Но мы сделаем вид, что эта попытка нам успеха не принесла, чтобы поискать другой метод решения.

Как тогда можно по-другому подойти к этому уравнению? Оно явно как-то хитро закручено: неспроста в нем все по нескольку раз повторяется. В чем же чувствуется эта повторяемость? Такое впечатление, будто бы из какого-то другого уравнения это уравнение получили повторением. Нельзя ли сказанное поточнее выразить? В основе повторения явно лежит многочлен $f(x)=x^2+3x-1$. А как повторение выглядит? Будто бы тот же многочлен применили еще раз, но в бо́льшем масштабе. Это уже определеннее. Да, именно так: левая часть уравнения есть не что иное, как $f(f(x))$. Тогда само уравнение выглядит так: $f(f(x))=x$. Прекрасно! Что бы с ним еще можно сделать? Все-таки как-то неестественно две буквы f. Одна — другое дело. А что, почему бы и не рассмотреть уравнение $f(x)=x$? Что могло бы дать такое уравнение? Не связано ли оно как-то с нашим? Чтобы как-то связать, надо попробовать приписать слева и справа еще по одной букве f. Тогда получится $f(f(x))=f(x)$. К сожалению, немножко не то.

А почему не то? Правую часть ведь можно заменить на x, так как $f(x)=x$. И тогда получим в точности исходное уравнение. Ура! Так, а что нам это дает? Ясно что — решения исходного уравнения, по крайней мере два. На самом деле даже больше: многочлен $f(f(x))-x$ должен делиться на многочлен $f(x)-x$, так как корни второго являются корнями первого. Осталось поделить эти два многочлена и получить разложение на множители. Что? Вы не знаете, как делятся многочлены? Да очень просто — так же, как и числа: вот простейший пример, из которого все должно быть ясно:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} x^3-2x^2+x-3 \\ x^3+x^2\phantom{{}-0x^2}+x \end{array} & \left|\begin{array}{l} x^2+x+1 \\ \hline x-3 \end{array}\right. \\
\hline
-\begin{array}{r} -3x^2+0x-3 \\ -3x^2-3x-3 \end{array} & \\
\hline
+3x &
\end{array}
$$

Какие еще могут быть вопросы? Частное при делении многочлена x^3-2x^2+x-3 на x^2+x+1 — многочлен $x-3$, остаток — многочлен $3x$. Вот и все.

Этот прием заслуживает запоминания: часто удается угадать какой-то корень уравнения, скажем, c. Тогда деление на многочлен $x-c$ должно произойти нацело, а степень частного уже будет меньше.

Возвращаясь к нашей задаче, скажем только, что после разложения на множители мы получим два квадратных уравнения, и, стало быть, интерес к задаче должен быть утрачен.

А вот на что стоит обратить особое внимание — так это на уравнение $f(x)=x$. Точка x, являющаяся его решением, называется неподвижной точкой. Неподвижные точки, а в более широком контексте — инварианты, то есть величины, не меняющиеся при преобразованиях, играют настолько важную роль, что, безусловно, заслуживает право на существование такой совет:

ЕСЛИ ЕСТЬ ПРОЦЕСС — ИЩИ ИНВАРИАНТ.

Цель данной главы — привести несколько убедительных примеров в пользу этого правила и обучить читателя использованию инвариантов в нескольких стандартных ситуациях. В отличие от других глав здесь мы начнем с более сложного примера, чем обычно.

Задача. Кубик Рубика повернули нечетное число раз (поворот на 180° считается за два поворота). Доказать, что его нельзя вернуть в исходное состояние за четное число поворотов.

Вначале мы приведем один из возможных образцов решения, а потом расскажем об истинном источнике подобных решений.

Решение. Занумеруем все угловые кубики числами от 1 до 8 и нарисуем между ними стрелочки по следующему правилу: стрелочки проводятся только из кубиков с меньшими номерами в большие. Скажем, из кубика с номером 5 будет выходить три стрелочки, а входить четыре.

Утверждение задачи будет доказано, если мы покажем, что за один поворот переворачивается нечетное число стрелок (имеется в виду, что после поворота стрелки будут нарисованы заново, и новый рисунок сравнивается с прежним).

Приступим к такому доказательству, рассмотрев поворот, скажем, верхней грани. Давайте разберемся, какие могут произойти изменения. На нижней грани изменений, конечно же, не произойдет, так как мы ее не трогали. Обратимся теперь к стрелочкам между вершинами нижней и верхней граней (рис. 29). Здесь изменения уже могут произойти, но докажем, что перевернется четное число стрелок. Действительно, допустим, что было x стрелок снизу вверх и y стрелок сверху вниз. После поворота это число не изменилось, хотя стрелки могли поменяться местами. Пусть K стрелок перевернулось сверху вниз. Чтобы общее число стрелок, смотрящих вверх, не изменилось, необходимо, чтобы столько же стрелок перевернулось снизу вверх. Тогда общее число перевернувшихся стрелок $2K$ — число четное, что и требовалось.

Займемся теперь изменениями на верхней грани. Здесь имеется шесть стрелок — две диагонали и четыре по бокам грани. Докажем, что если боковые стрелки и перевернутся, то в четном числе. Рассуждение будет совершенно аналогичным уже приведенному, но рисунок мы рассмотрим другой (рис. 30). Часть боковых стрелок смотрит по часовой стрелке, а часть — против.

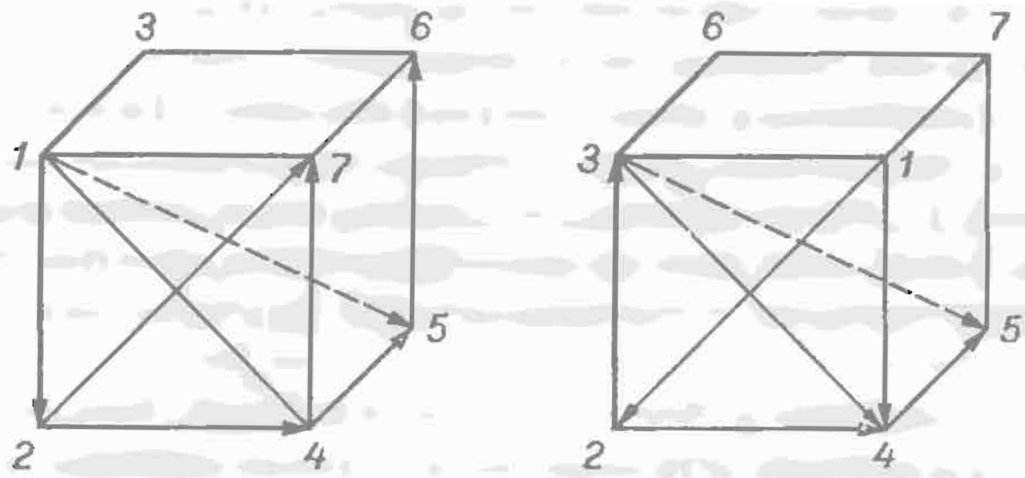


Рис. 29. Часть стрелок переворачивается

После поворота это число не изменится. Теперь пусть K стрелок изменят направление по часовой на направление против часовой. Чтобы общее число стрелок, смотрящих по часовой стрелке, не изменилось, необходимо, чтобы K стрелок развернулось в обратном направлении: с «против» на «по». Итого перевернется $2K$ стрелок — четное число. Осталось разобраться с двумя стрелками на диагоналях. Несложно убедиться, что перевернется ровно одна стрелка. Вывод: общее число перевернувшихся стрелок нечетно, что и требовалось.

Комментарии к решению. Разумеется, такие решения придумываются совсем не во время решения задачи, и даже не в процессе чистки решения, а тогда, когда возникает потребность изложить применение какого-то общего метода к частной задаче, но нет же-

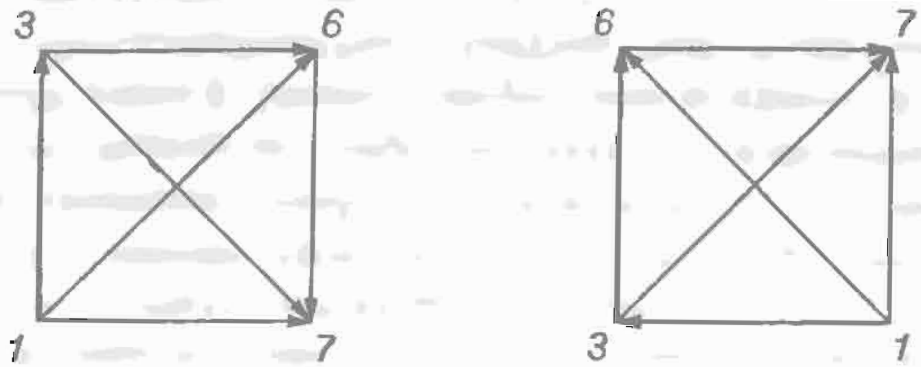


Рис. 30. Перевернулось нечетное число стрелок

ления или не позволяет объем книги рассказывать общий метод. Тогда это общее решение как-то переводят на «детский» язык со всякими стрелочками — лишь бы понятно было. Пример такого перевода и преподнесен ранее. А теперь, если читатель хочет познакомиться с общим методом, он должен сконцентрировать свое внимание: метод несколько суховат. Идея метода состоит в важном понятии четности перестановки. Вот как это понятие вводится.

Предположим, что у Вас имеется K различных предметов. Вы их как-то переставили. Эта перестановка имеет четность, которую обычно обозначают $+1$ или -1. Как ее узнать? Представьте себе, что перестановку Вы делали двумя руками поэтапно, меняя по очереди ровно два предмета. Теперь все зависит от того, сколько таких перестановок по два предмета Вам придется сделать. Если — четное число, то общая перестановка называется четной и ее четность $+1$, если же нечетное, то, разумеется, четность -1.

Например, у Вас было четыре предмета, скажем, арбуз, барабан, вилка и газета, и Вы решили переставить их в обратном порядке: газета, вилка, барабан, арбуз. Какова четность такой перестановки? Очень просто определяется. Первая перестановка — арбуз меняем местами с газетой, для краткости такой обмен обозначим (А, Г). Следующий обмен — (Б, В), и все в порядке. Четность $+1$. Важнейший вопрос: а если бы мы переставили парами как-то по-другому, получили бы ту же четность? Например, будем переставлять только соседей. Вот так: (А, Б), затем (А, В) и (А, Г) — этим мы уже получили порядок Б, В, Г, А. Осталось произвести (Б, В), (Б, Г) и (В, Г). Общее число — шесть штук (кстати, чтобы не называть их штуками: перестановки, которые переставляют ровно два предмета, называются транспозициями). Все равно получили четное число. Значит, в этом случае все в порядке. Оказывается, и всегда все будет в полном порядке: четность не зависит от того, в каком порядке и какими транспозициями пользоваться. Это — важная теорема, доказать которую рекомендуется самому читателю. Собственно говоря, единственное, что она утверждает, это то, что понятие корректно, другими словами, что понятие четности, как мы его ввели,— честно определенное понятие и внутренних противоречий в себе не содержит, а следовательно, имеет право на существование.

Четность — это важнейший инвариант. Практически каждую задачу, где что-то переставляется, имеет смысл оценить с точки зрения четности встречающихся там перестановок. А причина этого проста: закон умножения четностей совпадает с законом умножения плюс-минус единиц: произведение нечетных перестановок, например, четная, а четной на нечетную — нечетная. Стоп! А что это еще такое — произведение перестановок? Это очень просто: произведением двух перестановок называется их последовательное выполнение. По существу мы с ним уже встретились: вышеупомянутая перестановка арбуза и прочего в обратном порядке была реализована как произведение транспозиций: (А, Г) и (Б, В). Не углубляясь больше в произведения (а углубиться можно было бы до понятия группы), отметим только, что произведение перестановок некоммутативно. Говоря по-простому: результат произведения зависит от порядка сомножителей. Например, произведение перестановки (А, Б) на перестановку (Б, В) дает результат В, А, Б, Г, а если сначала делать перестановку (Б, В), а лишь затем — (А, Б), то получится Б, В, А, Г. Есть разница? Но все это не беда, главное, что четность умножается совершенно независимо от этих тонкостей и по уже отмеченным правилам!

Вернемся к задаче про кубик Рубика. Наметанный глаз сразу увидит здесь четность: за один поворот происходит нечетная перестановка угловых кубиков. Значит, результат нечетного числа поворотов — нечетная перестановка, а четного — четная. Вот и все решение!

Чтобы это стало прозрачно и для читателя, предложим ему удобный практический рецепт определения четности, чтобы ему не приходилось мучительно переставлять элементы парами. Идея состоит в разложении любой перестановки в циклы. Чтобы показать, как оно делается, рассмотрим немного более длинную перестановку. Допустим, что начальным был порядок А, Б, В, Г, Д, Е, а после перестановки он оказался таким: В, Е, Г, А, Д, Б. Посмотрим, что делает эта перестановка. А она переводит в В (то есть на месте А оказался элемент В). А куда перешел В? Он перешел в Г. Г куда? Г — обратно в А. Зациклились. Это и есть первый цикл. Записывается он так: (А, В, Г). Есть еще один цикл на оставшихся буквах (Б, Е). Обозначение совпало с обозначением для транспозиции, и это естественно: транспозиция — это цикл длины 2. Итого наша перестановка записывается как произведение двух циклов (А, В, Г) и (Б, Е) — в любом порядке. А куда пропал Д? А он просто остался на месте. Нет необходимости отмечать такие элементы. Подобным образом любую перестановку можно разложить в произведение циклов. А теперь правило: четность цикла противоположна четности его длины. Скажем, цикл длины 7 — четен, а длины 4 — нечетен. А четность произведения уже определить нетрудно. В вышеприведенном примере — это —1, так как цикл длины 3 четен, а длины 2 — нечетен и их произведение — нечетная перестановка.

Теперь уже ясно, как сразу мы догадались, что поворот кубика Рубика — это нечетная перестановка: там же попросту был цикл длины 4, который нечетен.

Чтобы покончить с кубиком Рубика, скажем, что четность — это отнюдь не единственный вариант, с ним связанный. Их там много, и о них можно прочитать, например, в журнале «Квант» (1982, № 8). Там же излагается идея красивейшего алгоритма его сборки: когда на место «загоняются» не кубики, а инварианты. Когда все инварианты будут получены — кубик будет собран. Другое дело, что для реализации этого алгоритма по тем намекам, которые есть в журнале, надо немало потрудиться.

А что касается четности, то нельзя не упомянуть знаменитые «пятнашки» (название, правда, неверное, но употребительное) — игру «15» (рис. 31). Наверное, кое-кто из читателей слышал о знаменитой премии тому, кто придумает способ, как из исходной позиции получить позицию, отличающуюся от исходной только тем, что 14 и 15 в ней переставлены местами. Сейчас нам должно быть понятно, почему премию никто так и не получил: требуется сделать транспозицию, то есть нечетную перестановку, а несложно убедиться, что условия игры в «15» допускают только четные перестановки.

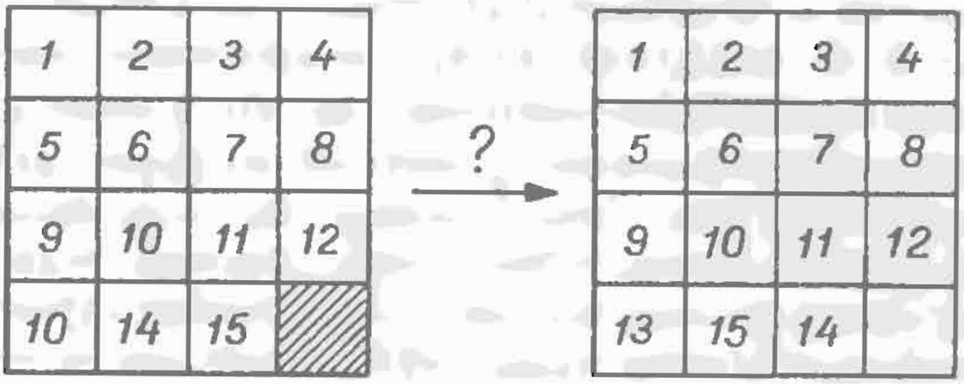


Рис. 31. Игра «15»

Как ни увлекательны эти темы, мы должны перейти к другим.

Задача. На доске написаны три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз, и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа *а*) 2,2,2; *б*) 3,3,3?

Эта задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде 1983 года. Предполагалось, что путь ее решения — так называемый «обратный ход», когда задачу начинают раскручивать с конца: как могло такое получиться, каким был последний ход, каким предпоследний — вот типичные вопросы такого подхода. Каково же было удивление жюри, когда обнаружилось, что многие участники нашли совершенно «прозрачное» решение задачи *а*, которое мы и приведем.

Решение задачи а. После первого же хода мы из чисел 2, 2, 2 получим 2, 2, 3, то есть два четных числа и одно нечетное. Нетрудно видеть, что такой же состав останется и после других ходов — четное число заменяется на сумму четного и нечетного минус единица, то есть четное, а нечетное число подобным образом — на нечетное. Так как в конце мы должны получить три нечетных числа, то это невозможно.

Решение задачи б мы оставим читателю — для овладения методом обратного хода, а сами вернемся к задаче *а*. Что помогло в ее решении? Инвариант. Им оказалось словосочетание «два четных, одно нечетное». Что вообще характерно для инвариантности? Коль скоро она носит универсальный характер, то согласно процитированному эпиграфу из П. Валери инвариантность — это грубость. Причем грубость не по форме, которая может быть сколь угодно изощренной, а по содержанию. Четность — типичный пример. Определение довольно тонкое, но делит все перестановки всего на два класса: очень грубое деление, зато как работает! Именно такие грубые разбиения и служат основой и признаком инвариантов.

Задача. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся малиновыми и так далее). Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Поиск решения. Отдав должное приятной формулировке задачи, все же несколько формализуем ее. Имеется тройка чисел (13, 15, 17). Разрешается делать с ней следующие преобразования: к одному из чисел прибавить двойку, а от двух оставшихся одновременно отнять единицу. Спрашивается, можно ли получить один из наборов: (45, 0, 0); (0, 45, 0) или (0, 0, 45)?

Имеем процесс. Начнем искать инвариант. Прежде всего посмотрим, что можно сделать за один шаг. Можно получить (12, 14, 19)? Видны ли какие-либо грубые неизмененные вещи? Нет, разве что разность между первым и вторым членом не изменилась. А что с ней произойдет при каком-нибудь другом преобразовании? Мы можем получить из исходного набора также набор (12, 17, 16). Что здесь можно сказать относительно разности первого и второго? Она изменилась. Кстати, насколько? На три. Ладно, и третье изменение из исходного: (15, 14, 16). Здесь разность совсем изменилась. А сейчас насколько? Было —2, а стала +1. Разность — 3. Что? Тройка у нас уже встречалась? Когда? В предыдущем случае. Только там в другую сторону. Все равно, что-то в этом есть. Не пора ли перейти к остаткам (см. главу об остатках)? Остатки по модулю три. Исходная тройка чисел преобразуется в набор остатков (1, 0, 2). Требуется получить остатки

(0, 0, 0) во всех трех случаях. Отлично! Что можем получить после первого преобразования? (0, 2, 1), или (0, 2, 1), или... (0, 2, 1) — каким путем не иди! Замечательно! А на следующем шаге? (2, 1, 0). И на следующем шаге опять вернемся в исходное состояние (1, 0, 2). В общем-то понятно: с точки зрения остатков у нас совершается такое преобразование за один ход: к каждому остатку прибавляется 2 (или, что то же самое, с точки зрения остатков при делении на три — отнимается по единице). Теперь понятно, что никогда три нуля мы не получим.

Промежуточное решение найдено. Теперь совсем нетрудно очистить его до конца: инвариант — это разность между первым и вторым членом, взятая по модулю три. Она — всегда единица. Это и есть нужный инвариант, который и покажет, что получить всех хамелеонов одного цвета не удастся (для них значение инварианта равно 0).

Читатель уже понял, что остатки — это замечательный кандидат в инварианты. Поэтому он без труда решит следующие тренировочные задачи:

1. Провести полное исследование: когда из одной тройки чисел можно получить другую (за справками — «Квант». 1985. № 7).

2. На прямой сидят три кузнечика A, B, C. Они начинают играть в чехарду, то есть прыгать один через другого (но не через двух сразу). Смогут ли они через 1987 прыжков оказаться на прежних местах?

3. Круг разбит на шесть секторов, в которых по часовой стрелке расставлены числа 0, 0, 1, 0, 1, 0. Разрешается добавлять по единице к любым двум соседним числам. Можно ли таким образом добиться того, чтобы все числа стали равны?

Более или менее понятно, как использовать инвариант для доказательства разных невозможностей. А может ли идея инварианта оказаться полезной для доказательства возможности чего-либо?

Задача. В таблице $m\times n$ разрешается у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца изменить знак. Доказать, что несколькими такими заменами можно добиться того, чтобы

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & -3 \\ \hline -5 & -6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline -2 & -3 \\ \hline 5 & -6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline -2 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

На путях усовершенствования

сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке была неотрицательна.

Поиск решения. Мы должны выяснить, что происходит за одно преобразование. Часть чисел из положительных становятся отрицательными, а часть, наоборот, — из отрицательных положительными. Может быть, благодаря этому мы можем все числа сделать положительными? Хорошо бы. Проверим на примере. Если у нас таблица 2×2 и стоят три единицы, а одна — минус единица, то... единиц с минусом всегда будет либо одна, либо три (кто не верит — пусть проверит). Да, обидно. Хорошая была идея.

А что еще? Процесс какой-то, может, инвариант поискать. Что не меняется? Модуль произведения всех чисел. А если размеры четны, то и произведения как построчные, так и постолбцовые (а это правильное слово — постолбцовые?). Неясно. Как же добиться улучшения? Может быть, количество отрицательных чисел уменьшать? Да, неплохо бы, но и это может ничего не дать: не исключено, что останется только одно отрицательное число, но зато какое... Но ведь хоть что-то должно улучшаться. А что, если делать просто: как только встречается отрицательная сумма в строке или столбце, так и меняем знак в этом месте. Надо понять на примерах, чем плоха такая примитивная тактика.

К большому удивлению, все примеры приводят к благополучному исходу: в конце концов все строки и столбцы становятся хорошими, причем в каком бы порядке мы не действовали, лишь бы из отрицательной суммы делали положительную.

Тогда это надо строго доказать. Но за счет чего? А что, собственно, может помешать? Ну, например, можем зациклиться: вынуждены будем поочередно менять то, скажем, первый столбец, то первую строку. Хотя похоже, что такого происходить не может: в наших примерах (надеемся, что у читателя наготове свои примеры) не было даже намека на возможность такой ситуации. Каким-то образом все непрерывно улучшается. Но как это выразить конкретно? Что может улучшиться? Что-то грубое, какой-то обычный инвариант. Ну конечно же — сумма всех чисел! С каждой такой операцией она увеличивается. Это гарантируст нас от зацикливания. А что еще? Гарантирует нам конец — эту сумму нельзя увеличивать бесконечно. Почему? Да просто потому, что различных таблиц можно получить из нашей только конечное число.

Проанализируем решение. Четко можно сформулировать два правила. Первое: *чтобы понять, почему получится что-то хорошее, надо увидеть, что улучшается.* Другими словами, надо искать какой-то показатель качества, гарантирующий нам шаг в нужном направлении. При этом основное требование — улучшение не должно происходить бесконечно, оно должно быть обречено на конечность, иначе мы никогда не доберемся до цели. Где же нам искать такие критерии роста? Здесь второй совет и одновременно ответ на вопрос о полезности идеи инварианта: *то, что в одних задачах инвариант, в других — критерий роста.* Иными словами, характеристики, которые могут улучшаться, но не бесконечно, по своей природе близки к инвариантам. Например, если обычный инвариант — делимость, скажем, на три, то хорошим показателем качества в других задачах может служить делимость на степени тройки: чем на большую степень делится, тем лучше. А если, например, заведомо известно, что число не может быть очень большим, то получаем, что слишком хорошо быть не может: существует степень, на которую наше число уже делиться не может, если это не нуль.

Другие типичные характеристики: разность между наибольшим и наименьшим, площадь, количество «беспорядка» и так далее.

Как всегда — несколько тренировочных задач как на инвариант, так и на процессы с улучшением.

Задача. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавлять по единице к некоторым 23 из них. Доказать, что, повторив эту операцию достаточное число раз, можно сделать все числа равными. Если мы возьмем вместо чисел 35 и 23 произвольные натуральные числа A и B, каким условиям должны они удовлетворять, чтобы условия задачи остались справедливыми?

Задача. В ящик ставим два ящика, в каждый из этих двух ящиков ставим еще два ящика, в каждый из этих четырех — еще два и так далее. После k таких операций получаем 2^k маленьких ящиков. В каждый из них кладем по монете орлом или решкой вверх. Разрешается перевернуть одновременно все монеты в каком-то ящике (любого размера).

1. Доказать, что не более чем за k операций можно уравнять число орлов и решек.

2. За какое наименьшее число переворачиваний можно (при произвольном начальном расположении монет) добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх.

Задача. В банке летают три мухи. Всякий раз, когда мухи со скоростями A и B сталкиваются, они разлетаются со скоростями $\frac{A^2+2AB}{A+B}$ и $\frac{B^2}{A+B}$. Может ли через некоторое время оказаться, что все мухи удвоили свои скорости?

Задача. На плоскости отмечено 100 точек, соединенных попарно пятьюдесятью отрезками. Каждую секунду пара пересекающихся отрезков заменяется на пару непересекающихся отрезков с теми же концами. Докажите, что через несколько секунд пересекающихся отрезков не останется.

10

Живописцы, окуните ваши кисти

Так, например, чёрный цвет служит для выражения горя, красный — величия и страдания, фиолетовый — раскаяния и смирения, зеленый — надежды.

М. К. Претте, А. Капальдо. Творчество и выражение

Для этой главы трудно найти более убедительное начало, чем следующая *задача*, с триумфом обошедшая почти все сборники олимпиадных и занимательных задач.

Из доски 8×8 вырезали два противоположных угла, лежащих на концах одной большой диагонали. Можно ли оставшиеся 62 клеточки покрыть 31 плиточкой размером 2×1?

Поиск решения. Можно или нельзя — что за вопрос такой! Сказали бы сразу — доказать, что можно, или доказать, что нельзя, а тут решай сразу две задачи, и еще неизвестно, какая верная. А почему бы, в самом деле, не попробовать покрыть все плиточками? Нарисуем быстренько. Вот так, так и... Гм, не получилось. А вот здесь надо чуть переделать и тогда... Тогда опять не получится. Может быть, это можно сделать, но очень хитро (было бы просто — не давали бы задачу). А может, нельзя? Да, но как это докажешь? Не перебирать же все возможные способы. А все-таки. 8×8. Что-то знакомое. Шахматная доска. А действительно, почему бы не перенестись на обычную шахматную доску? Значит, так, вырежем мысленно из нее две клеточки: вот эту, беленькую, и вот эту — тоже беленькую (рис. 32). И начнем покрывать. Ну вот, опять осталось две клеточки. Черненькие. А если так? И так остаются. А так? Опять и опять черненькие! Стоп-стоп, в этом что-то есть! Значит, так. Вырезали мы две беленькие клеточки. Осталось, стало быть, 32 черные и 30 белых. А тогда... все понятно! Каждая плиточка покрывает одну белую и одну черную клеточку. Следовательно, 30 плиточек еще как-то уложить можно, а для последней, 31-й, уже не останется белого цвета. Потому-то и не получится. Все.

Итак, задача оказалась решенной только за счет того, что шахматную доску принято раскрашивать. Прием этот — раскраска — один из эффектнейших, и в данной главе мы будем рассматривать именно задачи на раскраску. Часть задач — это те, в которых раскраска — метод решения, а часть — это задачи про раскраску, которые весьма популярны на олимпиадах.

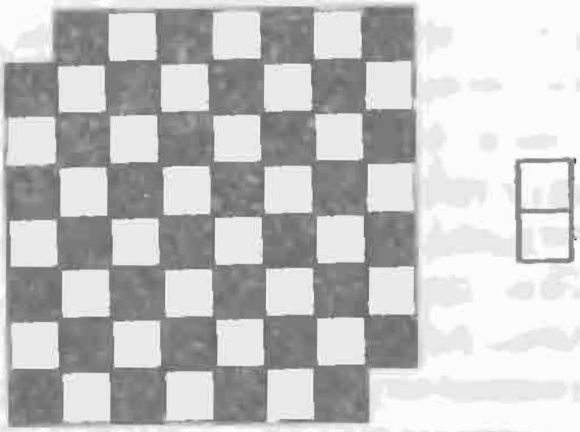


Рис. 32. Противоположные углы вырезаны

Иногда догадаться что-то раскрасить кажется просто невозможным. Ну что, казалось бы, имеет общего с раскраской понятие монотонности?

Задача. Доказать, что из любой последовательности можно, стерев часть ее членов, получить монотонную бесконечную последовательность, то есть невозрастающую или неубывающую.

Поиск решения. К такого рода задачам, когда в ответе может быть либо то, либо другое, очень трудно сразу найти верный подход. Любое начало может привести не к тому случаю. Что же делать? А самое обидное, что по конечному случаю ничего не скажешь: надо смотреть на всю последовательность сразу. А как иметь дело с бесконечным числом объектов, пусть даже членов последовательности? Ну хорошо, допустим, я начну строить какую-то возрастающую последовательность. Откуда я узнаю, что за последним членом есть еще что-то большее или хотя бы не меньшее? Вот если бы я знал это заранее, то... Интересно, а как я могу это знать заранее? Вполне могу — это очень простой вопрос: есть за данным членом последовательности кто-то больший или нет. А что, если, в самом деле, все такие члены как-то заранее выделить? Как только, покрасить, что ли? А почему бы и нет? Итак, возьмем и покрасим все члены последовательности, за которыми есть члены, бóльшие, чем они сами... Тогда... могут быть два случая: покрашенных бесконечно много или только конечное число. Какой случай проще (вообще-то хорошо, что их два — это дает надежду на два разных вывода, что и требуется по условиям)? Пожалуй, хочется начать с конечного. Значит, пусть только конечное число точек покрасилось. Сотрем их сразу, чтобы не мешали. Оставшиеся — непокрашенные. А что значит, что данный член последовательности не удалось закрасить? Это значит, что нет за ним члена, бо́льшего, чем он, то есть все, что дальше — меньше: чем дальше, тем меньше (там же тоже непокрашенные). И это прекрасно: получаем невозрастающую последовательность. Еще раз. Берем первый член. За ним — не больше его. Берем второй. А если он покрашен? Нет, мы их уже выбросили. Значит, он тоже непокрашен, и за ним — меньшие. Да, таким образом подряд наберем невозрастающую последовательность. Прекрасно! А теперь неплохо бы заняться вторым случаем, пожалуй, основным: покрашенных членов бесконечно много. Тогда естественно попробовать и взять их все в качестве возрастающей последовательности. Попробуем. Берем первый член. За ним должен быть бо́льший его. Берем тот. За ним... Минуточку, а если тот непокрашен? Плохо. А если взять сразу покрашенное число, то, которое следующее. Тогда почему оно будет больше, чем первое? М-да, запутались.

Что же делать-то? Первый-то случай как хорошо прошел. Такое впечатление, что надо было как раз незакрашенные и закрашивать. А что — и закрасим, скажем, в зеленый цвет, который цвет надежды. Четко: закрасим в зеленый цвет все те точки, которые не больше, чем все последующие. Откуда-то взялись какие-то точки. Надо же, как трудно красить числа! Ну ладно, пусть называются точками. Хоть крокодилами, лишь бы задача решилась!

Что же мы имеем? Если зеленых точек много, то доказывать мы умеем. Много — это сколько? Чтобы незеленых было только конечное число. А меньше нельзя? Смотрим на доказательство... Вполне можно. Если зеленых точек бесконечно много, то все рассуждение проходит: они сами и образуют монотонную невозрастающую последовательность. Да, а почему такое неравноправие: надо бы тогда особым цветом, скажем, красным, покрасить и те точки, за которыми все члены строго большие. Тогда если будет бесконечное множество красных элементов последовательности, то тоже отлично: они дадут возрастающую последовательность.

А зачем нам все же красные точки? Без них можно обойтись. Ну-ка, внимательно. Если зеленых бесконечно много, то все в порядке, если — конечное число, то их надо бы стереть. Тогда все оставшиеся — незеленые, то есть то, что мы раньше называли покрашенными (запутаться можно)! Еще несколько минут внимания. Сконцентрировались. Итак, все точки незеленые. За каждой есть большая. Вот так и будем их брать. Первую — любую. За ней есть большая. Она тоже незеленая. За ней тоже есть большая, и тоже незеленая. Вот так и построим!

Комментарий. Не правда ли, мучительны поиски истины? Конечно же, все это можно было бы пригладить, например не упоминать про так и не понадобившийся красный цвет. Можно было и вовсе изложить изящное очищенное решение (читатель, хочется верить, приведет его сам, тем более, что оно может пригодиться для одной из задач в конце книги), но хотелось показать честный путь рождения решения. Особенно то, как поначалу чуждая идея раскраски стала основной, естественной и даже чуть было не заслонила путь к решению (красный цвет). А сколько еще опущено мыслей, догадок и просто отвлечений в сторону. А все это — тоже необходимые элементы творчества. Об этом невозможно написать, и единственная разумная альтернатива — попытаться передать *состояние.* Впрочем, не это ли цель искусства?

В рассмотренной задаче мы раскрашивали числа. Иногда, наоборот, приходится из красок делать числа.

Задача. Каждая вершина правильного $2K$-угольника раскрашена в один из $2K$ цветов, причем все вершины в разный цвет. Второй точно такой же $2K$-угольник тоже раскрасили каким-то образом теми же $2K$ красками (опять же разные вершины — в разный цвет) и положили сверху на первый. Доказать, что, не переворачивая, верхний $2K$-угольник можно повернуть так, что, по крайней мере, в двух местах цвета вершин совпадут.

Решение. Приведем сразу решение задачи, а лишь после этого скажем несколько слов о его поиске. Прежде всего докажем полезную лемму.

Лемма. Натуральные числа 1, 2, ..., $2K$ расставили в каком-то порядке, и из каждого числа вычли его порядковый номер. Доказать, что из этих $2K$ разностей найдутся две с одинаковым остатком при делении на $2K$.

Доказательство леммы. Предположим противное. Тогда все остатки разные: от 0 до $2K-1$ (должны присутствовать все остатки, так как разностей $2K$ штук — принцип Дирихле, см. соответствующую главу). Рассмотрим сумму всех этих разностей. С одной стороны, она должна равняться нулю, так как это просто разность двух одинаковых сумм — чисел от 1 до $2K$, только суммирование происходило в разном порядке. Посмотрим, однако, на эту разность с точки зрения остатков (не вредно заодно просмотреть главу об остатках). По идее, это должна быть сумма всех остатков от 0 до $2K-1$ включительно. Но эта сумма равна по формуле суммы прогрессии

$$0+1+2+ \dots +2K-1=(2K-1)\,2K/2,$$

то есть $(2K-1)K$. Но последнее число никак на $2K$ делиться не может, так как первый сомножитель нечетен. Мы получили противоречие: с одной стороны, сумма равняется нулю, а с другой — остаток этой суммы разностей не равен нулю. Данное противоречие и доказывает лемму.

Вернемся теперь к нашей задаче. Заменим каждую краску на натуральное число. Таким образом, в вершинах у нас будут стоять натуральные числа от 1 до $2K$ включительно, при этом мы можем считать, что внизу они расположены последовательно по часовой стрелке, а вверху как-то переставлены. По лемме, найдутся две разности между нижними и верхними числами с равными остатками при делении на $2K$. Пусть этот остаток равен P. Поворот верхнего $2K$-угольника на угол $\frac{P\pi}{K}$ будет требуемым. Действительно, если остаток равен нулю, то совпадение уже есть, а после поворота на $\frac{\pi}{K}$ все остатки, кроме нулевого, умень-

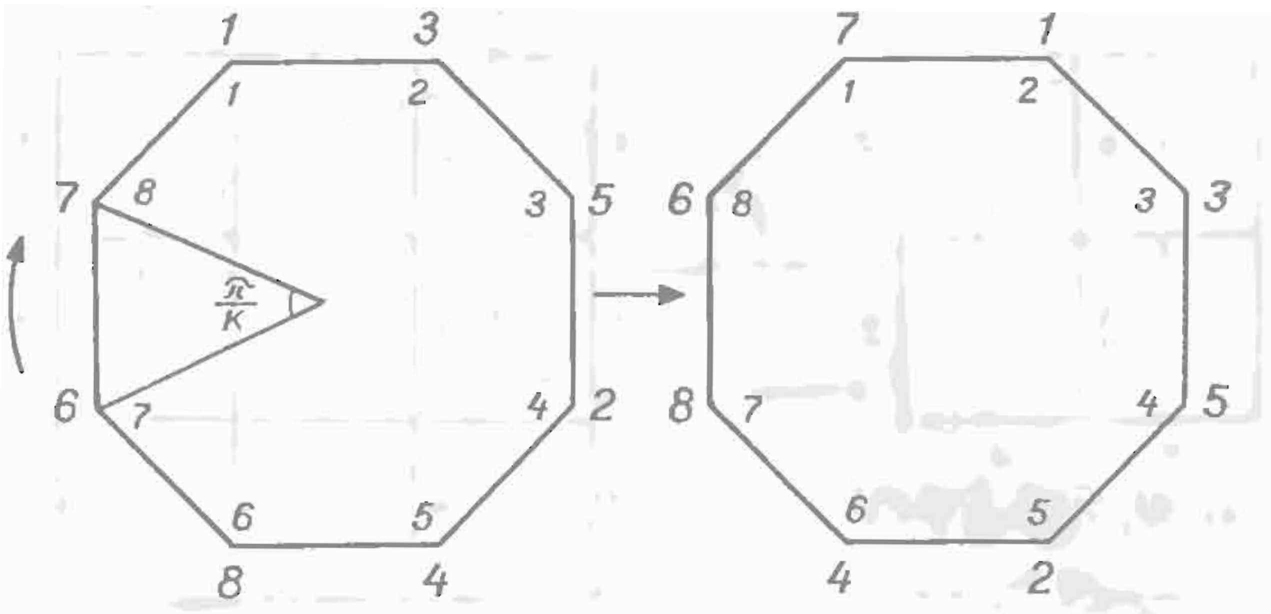


Рис. 33. До и после поворота

шаются на 1 (поворот производится по часовой стрелке — см. рис. 33).

Насколько реально придумать такое решение? Прямо сразу, вот в таком виде — практически невозможно. А придумываются подобные решения примерно так: поначалу изучается случай четырех- и шестиугольников. Для них как-то строится очень корявое доказательство. Довольно-таки быстро приходит необходимость обозначать краски буквами, а еще лучше — цифрами. Повертев немного эти многоугольники, очень скоро начинаешь разбираться, что для того, чтобы не получилось совпадения цветов, необходимо, чтобы при каждом повороте совпадал только один цвет, точнее — ровно один. Вполне можно приглядеться и к тому, как определить нужный поворот для совпадения нужного цвета — по разности между двумя числами. Однако трудности с отрицательными числами неминуемо выводят на остатки, а тут уже рукой подать до леммы. Что касается самой леммы, то как найти ее доказательство, объяснить труднее. Тут где-то должен сказаться опыт работы с остатками, без него сложнее. Впрочем, это — тема другой главы.

Следующая задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде 1984 года.

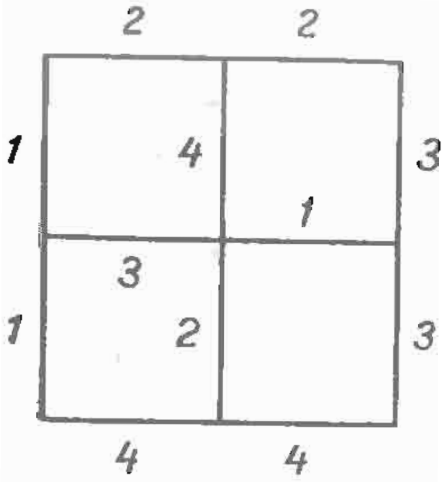


Рис. 34. Случай 2×2

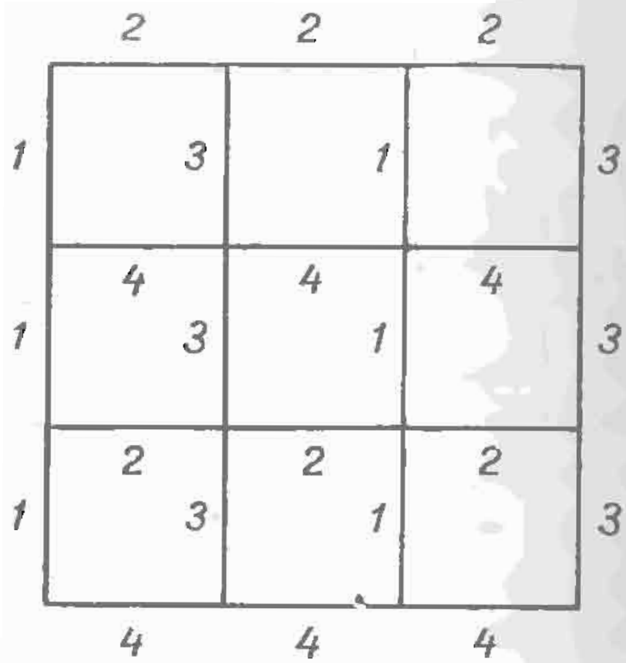


Рис. 35. Случай 3×3 ⟶

Задача. Имеется много одинаковых квадратных плиточек и четыре краски. Разрешается окрашивать каждую плиточку в четыре цвета (по ребрам) и приклеивать их друг к другу ребрами одного цвета. Требуется склеить прямоугольник размером $m\times n$, каждая сторона которого была бы одного цвета, причем чтобы все цвета были разные. Для каких m и n это можно сделать?

Поиск решения. Такие задачи, конечно же, приятнее всего начинать с маленьких примеров и простейших переборов. Довольно быстро будут установлены первые факты. Скажем, несложно склеить квадратик размером 2×2 (рис. 34). Конечно же, вместо красок мы пишем на картинке числа: от 1 до 4. Нетрудно построить также квадратик 3×3 (рис. 35). Он строится всего из двух типов раскрашенных плиток, симметричных друг другу. Совсем нетрудно понять после этого, что так можно раскрасить любой прямоугольник, оба размера которого — нечетные числа. Далее будем считать, что один из размеров всегда четен.

Теперь начинается более подробный анализ. Начнем с полосы $1\times2k$ (рис. 36). Увы, довольно скоро приходится убедиться, что ничего не получается: если задать цвета сторон полосы, то внутренние плиточки определяются однозначно и цвет 1 в вертикали должен появляться через раз. Но тогда, так как вертикальных

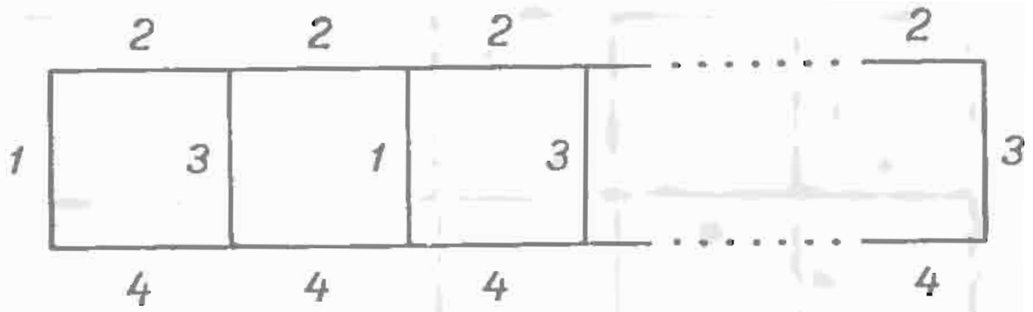


Рис. 36. Полоска шириной 1

линий $2k\times1$, крайняя справа линия тоже должна быть цвета 1, что невозможно.

Следующий шаг — полоски $2\times2k$ и $2\times(2k+1)$. Предоставим читателю самому разобраться, как раскрашиваются прямоугольники $2\times2k$, а с их помощью — вообще любой прямоугольник с обеими четными сторонами. Отметим только пользу от раскрасок такого типа, как на рис. 37,— это не то, что нам нужно, но из таких можно клеить нужные.

Остался самый трудный этап: одна сторона четная, другая — нечетная. Случай 2×3 никак не хочет получаться. Но почему?

Приходится еще раз вернуться к случаю $1\times2k$. Может быть, там хоть что-то прояснится, может, именно там идея. В самом деле, почему $1\times(2k+1)$ получается, а $1\times2k$ — нет. Может быть, идея в чередовании? Может быть, это вполне отвечало бы духу проблемы. Но что может чередоваться? Там чередовались через раз единицы, а в общем случае этого может не быть: там плиточки не обязательно однозначно восстанавливаются. Впрочем, если в первой вертикальной линии сплошные единицы (см. рис. 38), то в следующей их нет. А в третьей? Вполне может быть. И вообще, где уловить разницу в вертикальной длине? Если горизонтальная длина четна, то почему должно существовать какое-то доказательство для нечетной вертикальной длины, не

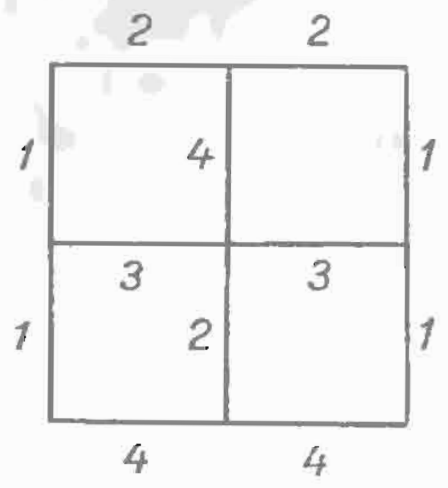


Рис. 37. Вспомогательный квадрат

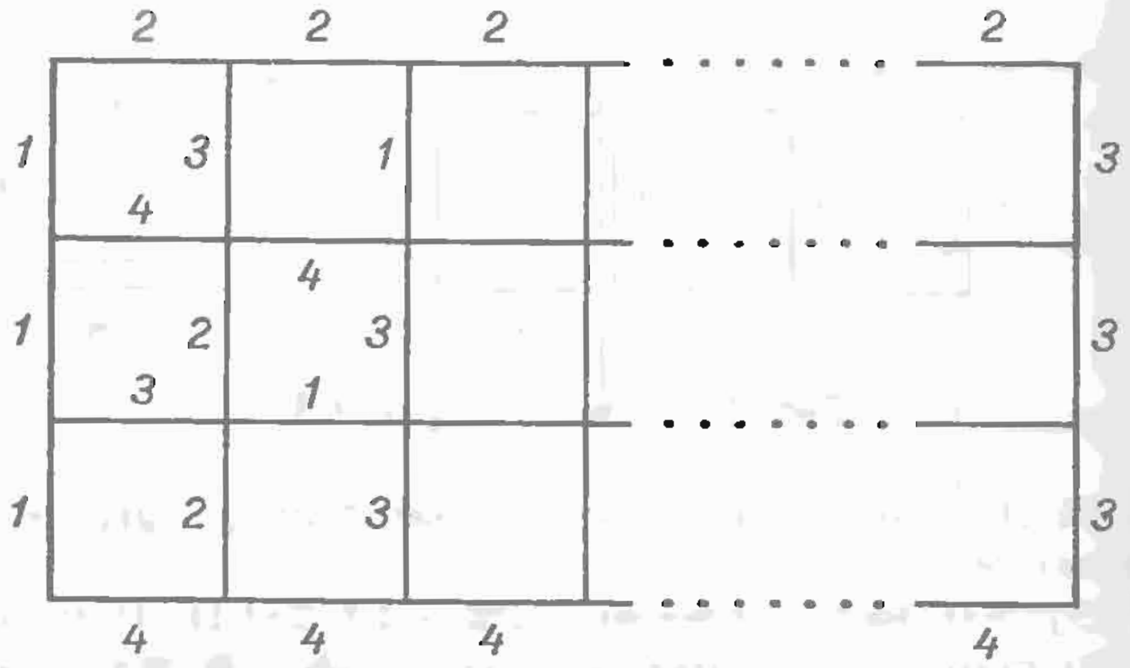


Рис. 38. Четность количества единиц по вертикали чередуется

проходящее для четной? Если и существует, то только за счет этой разницы: чет-нечет. Значит, нужно искать нечетное число. Но чего? А может, как раз единиц? А что, идея! Если в первом вертикальном слое нечетное число единиц, то во втором должно быть четное, а в следующем — опять нечетное: так это и есть нужное нам чередование! Правда, все это пока бездоказательно, но идея хороша. Попробуем воплотить ее в жизнь. Конечно же, вначале убеждаемся на конкретных примерах, что наша догадка о чередовании чет-нечет, действительно, разумна (этот этап мы опустим), и лишь после этого находим строгое рассуждение. Примерно такое: в одной вертикальной полосе шириной 1 — нечетное число плиток, следовательно, и нечетное число единиц. Горизонтальные единицы склеиваются по две, а сверху и снизу они отсутствуют. Следовательно, на двух соседних вертикальных линиях — нечетное число единиц. Отсюда и чередование.

Чистку решения мы опускаем, при желании решение можно отыскать в «Кванте» (1984. № 11).

Если в этой задаче нам помогла четность, то в следующей, наоборот, раскраска помогает установить четность. Задача была предложена участникам Ленинградской олимпиады.

Задача. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах, длины всех сторон которого — целые числа. Доказать, что его периметр четен (сторона клетки равна единице) (рис. 39).

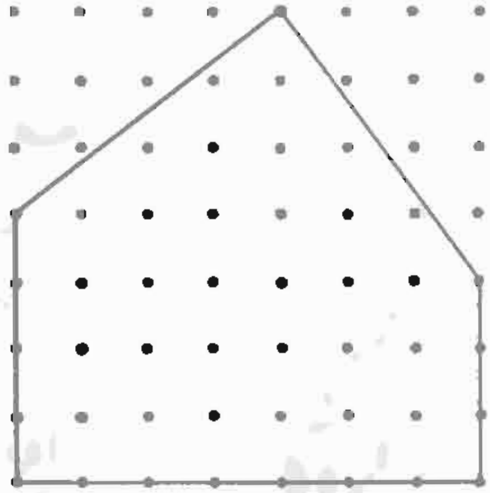


Рис. 39. Вершины пятиугольника в узлах сетки

Приведем изящное решение, взятое из книги «Избранные задачи Ленинградских олимпиад», выпущенной для учащихся заочной математической школы и летнего математического лагеря при ЛГУ в 1984—1985 годах.

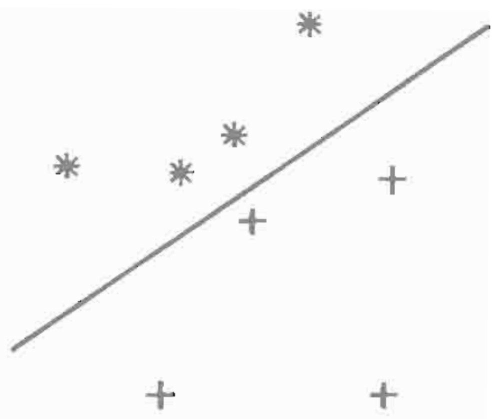
Решение. Раскрасим узлы в шахматном порядке. Построим на сторонах пятиугольника, как на гипотенузах, прямоугольные треугольники с катетами, идущими по сторонам клеток, и пройдем последовательно по этим десяти катетам. Так как в конце мы вернемся в узел, из которого вышли, то пройдем четное число узлов (при переходе от узла к соседнему цвет узла меняется). Поэтому сумма катетов четна. Четность гипотенузы (то есть стороны пятиугольника) равносильна четности суммы квадратов катетов, то есть четности суммы катетов. Отсюда периметр пятиугольника имеет ту же четность, что и сумма катетов.

Коротко, ясно и очень эффектно! Конечно, первый раз придумать такое решение очень сложно, но когда идея раскраски станет привычной — подобные решения будут приходить в голову сравнительно естественно.

Часто, однако, встречаются миражи методов. Кажется, задача, без сомнения, на этот метод, а действительиость разочаровывает: идея решения совершенно иная. Вот пример из этой же книги.

Задача. Существует ли одиннадцатигранник, каждая грань которого имеет четное число ребер?

Автор потратил несколько часов, раскрашивая то грани, то ребра, то вершины, будучи твердо уверен, что раскраска — эффектнейший прием решения такого рода задач. А на самом деле...



Два множества отделены

Что было на самом деле, должен понять сам читатель, который решит эту задачу.

Задач о раскраске не сосчитать, и рассказать о них достаточно подробно трудно, потому как по своей непохожести они подобны произведениям искусства. Закончим же мы главу заданием на раскраску.

Задача. На плоскости дано k точек (k не меньше пяти). Доказать, что их можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакая прямая не могла бы отделить все точки одного цвета от другого, как на рисунке.

Вместо решения — маленькая подсказка: докажите, что если никакие три точки не лежат на одной прямой, то найдутся четыре, лежащие в вершинах выпуклого четырехугольника.

11

Кирпич в луже и таинство перевода

Правда, в голове у меня теперь полно всяких мыслей... только вот о чем они — не знаю!

Л. Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Эта глава — об умении по-новому взглянуть на задачу. Умение это настолько нетривиально, что совершенно непонятно, как ему все-таки можно научить. Непонятно, впрочем, как вообще можно чему-нибудь *научить*. Ведь самое поразительное в обучении это то, что обучаешься даже тому, чему тебя *никто* не учил. Об этом феномене стоит сказать еще несколько слов. Надо хорошо себе представить, что процесс обучения вообще, а математике в частности — это отнюдь не равномерный, а скорее скачкообразный процесс. На каждом очередном этапе овладения знанием достигаешь некоторого критического порога, когда уже кажется: «Все. Больше не могу. Это выше моего понимания. Это вообще невозможно понять». Это всегда очень трудный момент. И всегда, хочется подчеркнуть — *всегда*, причина такого непонимания — неосвоенные мелочи. Каждая новая ступенька знания имеет в своей основе совершенно элементарные технические факты и приемы. Они хоть и элементарные, но технические. Это значит, что сущность каждого из них (а их много) должна быть тщательно проработана. Только после того как эта система элементарных знаний и понятий войдет «в кровь», будут пониматься, а главное, чувствоваться сложные определения и теоремы. Очень хорошо чувствуется этот порог, через который как-то нужно перешагнуть, в анализе. Иногда достаточно уяснить всю глубину понятия предела, чтобы и производная и интеграл перестали представлять собой проблему. Вот только глубина эта почти неисчерпаема.

Одну из книг по математике автор читал восемь раз. Ни в одном из первых семи ему не удалось продвинуться даже на пятую часть книги, хотя он затрачивал на это поистине титанические усилия. Книга была невероятно сложной. Восьмую попытку отделило от седьмой около четырех-пяти месяцев. За это время было изучено достаточно много материала из совсем других областей математики, так что принципиально ничего нового по содержательной части этой книги не прибавилось. Каково же было удивление автора, когда он открыл книгу в восьмой раз и понял, что она совершенно тривиальна, хотя и написана несколько сжато. Где, как, когда произошло это чудесное превращение? На это ответить невозможно. Можно только сказать, что семикратный труд все же не прошел даром: основные понятия «вошли в кровь» и закрепились другими разделами математики, произошел так называемый рост культуры, математической культуры. И вот это в первую очередь и хотелось подчеркнуть. Читатель! В любой области человеческой деятельности надо стремиться в первую очередь к росту культуры, к пониманию и вчуствованию в мелочи и нюансы, которые определяют все. И этого достичь *можно*. У каждого — свои способности и склонности, а значит, у каждого свой путь к достижению культуры (и по времени и по маршруту), но нет такого знания, которое познано одним человеком и не может быть познано другим. Познанное — познаваемо. Другое дело, что почти нет хороших учебников.

Проницательные читатели уже, наверное, сообразили, что этот монолог — свидетельство беспомощности обучить искусству менять точку зрения. Единственная возможность, которая осталась, это делать, как древние математики — показывать яркий чертеж-иллюстрацию с надписью «Зри!». По этому пути мы и пойдем.

Перед нами задача, причем в нашем распоряжении нет стандартного рецепта, как ее решать. Значит, надо напрягать фантазию и, наконец, думать. Но как? Где может зацепиться наша мысль?

Представим себе большую лужу. Ну, не очень большую, но такую, что одним прыжком преодолеть ее не удастся. Как же тогда быть? Вот это мы хорошо знаем: надо найти подходящий кирпич, бросить его в середину лужи, и — можно прыгать.

Точно такой же математический кирпич надо отыскать и для нашей математической задачи. Что требуется от такого кирпича? Во-первых, чтобы до него можно было допрыгнуть, во-вторых, чтобы с него уже можно было соскочить на другую сторону.

Или, на худой конец, если лужа великовата, чтобы с него можно было швырять кирпичи дальше, так, чтобы обеспечить в конце концов пешеходную дорожку.

Главный признак этого кирпича: сам по себе он нам не нужен, хотя без него мы тоже обойтись не можем. Типичный образец подобного кирпичепроизводства реализован в принципе «бяки» (см. соответствующую главу): мы заводим новую букву y, через которую выражаем всю задачу, и решаем ее в терминах y, получая наконец, что y равен тому-то и тому-то (прыжок на кирпич), и возвращаемся к исходному x (прыжок с кирпича на другую сторону). В результате и в условиях, и в ответе фигурирует только x, а y, который сыграл основную роль, остается за кулисами (в процессе чистки решения его удается иногда и из решения успешно «изгнать»).

Давайте рассмотрим внимательно следующую типичную задачу, подобную которой тысячами штампуют для абитуриентов.

Задача. Выразить $\log_6 80$ через $a=\log_{12} 75$ и $b=\log_{50} 120$.

Поиск решения. На первый взгляд, вроде бы никаких простых формул здесь нет. Зато есть ценный совет: *все логарифмы полезно приводить к одному основанию (пользуясь, если надо, формулой* $\log_y x=\dfrac{\log_c x}{\log_c y}$, *которая легко запоминается: то, что было сверху, остается выше, то, что было снизу — ниже).*

Попробуем последовать этому совету. Какое выбрать основание? Конечно, 2 — оно чаще всего встречается. Итак, перепишем задачу: выразить $\dfrac{\log_2 80}{\log_2 6}$ через $a=\dfrac{\log_2 75}{\log_2 12}$ и $b=\dfrac{\log_2 120}{\log_2 50}$. Мало-мальский опыт работы с логарифмами подсказывает, что имеет смысл произвести „очистительные работы“: $a=\dfrac{\log_2 3\cdot 25}{\log_2 3\cdot 4}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 25}{\log_2 3+\log_2 4}=$ $=\dfrac{\log_2 3+2\log_2 5}{\log_2 3+2}$. Точно так же $b=\dfrac{3+\log_2 3+\log_2 5}{1+2\log_2 5}$. А найти требуется $\dfrac{4+\log_2 5}{1+\log_2 3}$. И вот теперь, хотя на вид задача стала более громоздкой, она проясняется — видно, что два кирпича, которые нам так нужны, это $x=\log_2 3$ и $y=\log_2 5$. Действительно, если мы их знаем, то знаем и ответ, который будет равен $\frac{4+y}{1+x}$ (как сойти с кирпичей, уже понятно). Но уже становится понятным, как добраться до самих кирпичей. По условию,

$$a=\frac{x+2y}{x+2};\quad b=\frac{3+x+y}{1+2y},$$

а это не что иное, как система уравнений на x и y. Решая ее, мы вычисляем x и y через a и b, а это и есть нужный нам этап пути.

Разумеется, довести решение до конца — прерогатива читателя, а мы займемся анализом и выводами.

Прежде всего отметим, что и x и y нам понадобились только временно, а в окончательный ответ они не вошли, но их помощь оказалась существенной, так как просто угадать ответ было бы затруднительно. Кстати сказать, отыскать x и y было делом тоже нетривиальным. Просто оно было стандартным, потому и прошло сравнительно легко.

Подметим также, как удачно мы «сделали вид» и получили систему относительно x и y. Не должен выпасть из поля зрения ценный и поучительный шаг стандартизации — в данном случае приведения к одному основанию. Наконец, самый важный момент. Был осуществлен *перевод* Пожалуй, это — наиболее принципиальное действие: вместо того чтобы решать задачу в исходных терминах, мы перевели ее на новый язык. При этом она стала более понятной, потому что данный язык более приспособлен для ее решения. Если угодно, можно сформулировать это так:

ПРИНЦИП ПЕРЕВОДА.

Для каждой задачи существует оптимальный язык, на котором ее следует решать. Важнейший этап решения задачи — поиск такого языка и последующий перевод.

Не обязательно, чтобы задача сразу решалась. Достаточно, чтобы она стала легче (одного кирпича может и не хватить). Более того, хорошо даже если мы просто увидим задачу с другой стороны (мы можем найти и не тот кирпич, зато понять, куда нужно кидать следующий).

Несколько утрируя ситуацию, можно сказать, что вся математика в принципе основана на умении создавать новые языки и разработке технических средств в каждом из этих языков. (Отметим, что по такому же пути пошло и программирование.) Действительно, о чем же шла речь во всех главах этой книги, если не об искусстве перевода. Что иначе представляет собой метод окраски или метод минимального контрпримера, если не умение создавать новые точки зрения.

По аналогии с обычными и программистскими языками следует четко разделить три уровня владения языком.

Уровень пассивного владения. Это когда Вы можете понять решение, написанное на данном языке.

Уровень активного владения. Это когда Вы сами можете решать задачи, пользуясь данным языком. Между этими уровнями — огромный промежуток. Одно дело прочитать (пусть даже длинное и сложное) доказательство и совсем другое — провести самостоятельно хотя бы маленькое доказательство. Пассивного уровня достигают, слушая лекции и читая книги, активного — решая задачи и упражнения.

Кстати, большой недостаток задачника — приведенные решения, так как слабовольного читателя они наводят на приятное пассивное овладение предметом. Правда, хорошие решения — это также большое преимущество: чтобы научиться решать, надо иметь хоть какие-то образцы.

Есть еще третий, высший, уровень, который можно назвать творческим. Это когда создается сам язык: выдвигаются новые понятия и концепции. Каждый такой язык, каждая новая точка зрения — это новый шаг в математике.

Изложению тех или иных языков, по существу, посвящена вся книга, а в этой главе мы немного поговорим о выборе и переводе.

Вначале о переводе. На самом деле, не так просто четко сформулировать, что значит перевести на другой язык. Попробуем сделать это на примере задач про прогрессию. Метод решения 98% таких задач четко укладывается в следующий совет.

Все условия задачи следует выразить через первый член и разность (для геометрической прогрессии — знаменатель), а если неизвестно число членов, то иногда и через n — их количество. В результате должна получиться система уравнений. Решая ее, находим эти величины и смотрим, что спрашивается в задаче. Что бы ни спрашивалось, через вычисленные неизвестные это найти можно.

Основывается этот совет на простом наблюдении: через первый член a_1, разность d (или знаменатель q) и число n можно выразить любое понятие из области арифметических и геометрических прогрессий.

Удобно вообразить себе следующую картину. Перед Вами представитель племени, в языке которого только три понятия: a_1, d, n,— да еще арифметические знаки (вообще арифметика). Вы должны ему объяснить условия задачи на его языке. Как только Вы это сделаете — получите систему уравнений для нахождения ваших основных кирпичей a_1, d, n. Переводить можно свободно: предложение за предложением, и, если Вы еще не твердо знаете язык, со словарем, то есть предварительно просмотрев все «незнакомые слова» и переведя их. Приведем один совершенно стандартный пример.

Задача. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов ее членов — 48. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Поиск решения. Задача стандартная. Значит, сразу вводим a_1 — первый член и q — знаменатель прогрессии. Работаем со словарем. Насчет суммы бесконечной прогрессии проблем с переводом нет. По формуле из учебника она равняется $\frac{a_1}{1-q}$. Значит, часть первого предложения до запятой переводится для нашего туземца так: $\frac{a_1}{1-q}=12$. Сумма квадратов — это «незнакомое слово», готовой формулы нет. С другой стороны, это бесконечная сумма, а мы кроме бесконечной геометрической прогрессии других бесконечных сумм не проходили в школе. Видать, это тоже должна быть прогрессия. Допустим, что так (докажем позже). Первый член ее понятен — a_1^2. А знаменатель? По аналогии должно быть q^2. А почему? Да, а что такое знаменатель? Это отношение соседних членов. Например, второй член разделить на первый или третий на второй и так далее. В нашем случае второй член $(a_1q)^2$. Делим на первый и получаем то, что и требовалось,— q^2. Для контроля третий делим на второй: $(a_1q^2)^2/(a_1q)^2=q^2$. Отлично! Заодно готово доказательство, что квадраты — это тоже геометрическая прогрессия, потому что отношение каждого к предыдущему — постоянное число. Надо только это слегка подчистить с точки зрения строгости индукцией или как-нибудь еще. Ладно, это потом. Окончим перевод первого предложения. На туземном языке получаем $\dfrac{a_1^2}{1-q^2}=48$. Все, получили систему уравнений. Немедленно решим ее хотя бы подстановкой a_1 из первого уравнения во второе. Находим $\dfrac{[12(1-q)]^2}{1-q^2}=48 \Rightarrow q=$ $=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a_1=6$. А теперь можно посмотреть, и что спрашивается. Ну, здесь перевод простой: спрашивается сумма 10 членов геометрической прогрессии. Это сразу находим по формуле $S_{10}=a_1\dfrac{1-q^{10}}{1-q}=$ $=\dfrac{3069}{256}$. Конечно же, чистить решение мы не будем. Отметим только некоторые моменты. Технические трудности могут возникать в трех местах. Во-первых, при переводе слов (как в данном примере с квадратами). Во-вторых, при решении системы уравнений. Не исключено, что найти числовые значения a_1, q не удастся, но удастся получить только связь между ними, которая обеспечит нужное сокращение при подстановке в ответ (образец: найти знаменатель бесконечно убывающей прогрессии, зная, что ее сумма вдвое больше суммы первых k членов). И, в-третьих, иногда надо еще догадаться, что задача — на прогрессию. Немало абитуриентов оказались шокированы задачей, в которой им просто предлагалось разделить два числа: 8,0(48) и 0,0(04) (числа в скобках означают, конечно же, период бесконечной деситичной дроби). И те, кто не сообразил, что имеют дело с двумя прогрессиями (точнее, с одной прогрессией и одной почти прогрессией — почему?), не досчитались баллов.

А теперь поговорим о тонком искусстве поиска нужного языка. Уже последний пример на деление показывает важность владения этим искусством. Основное здесь — быть полиглотом, но это не все. А что еще, будет видно, хочется надеяться, из дальнейшего достаточно сложного примера, в котором честно продемонстрированы мучительные поиски нужного языка. Уровень изложения будет довольно высоким. Поэтому можно при первом чтении непонятные места пропускать, стараясь уловить только процесс рождения основной идеи, более тщательно прочитав только отступление в сторону о симметрии, написанное более доступным языком.

Задача. Указать какую-либо пару натуральных чисел (a, b), такую, что:

1. Число $ab(a+b)$ не делится на 7.
2. Число $(a+b)^7-a^7-b^7$ делится на 7^7.

Ответ обосновать (Международная математическая олимпиада. 1984 год).

Поиск решения. Здесь будет приведен настоящий поиск, проведенный самим автором непосредственно перед написанием этой главы (даже, можно сказать, во время ее написания), правда, конечно, без судорог и метаний, свойственных всякому поиску.

Во-первых, можно попробовать поперебирать. Прямой перебор — это занятие для трудолюбивых, но не слишком полезное. Желательно хотя бы осмыслить перебор. Прежде всего, ясно, что надо переходить на работу с остатками. Только вот при делении на что? Остатки при делении на 7 как-то мало интересны. По малой теореме Ферма (см. упражнения в конце книги), $a^7 \equiv a(7)$; $b^7 \equiv b(7)$; $(a+b)^7 \equiv a+b(7)$ (обозначения см. в главе об остатках), так что все это выражение на 7 и так делится. Интересно попробовать остатки при делении на 49. По формуле бинома Ньютона (для тех, кто ее не знает — после раскрытия скобок),

$$(\alpha+7k)^7=\alpha^7+7\alpha^6\cdot 7k+7^2(\ldots),$$

так что седьмая степень любого числа A имеет при делении на

49 тот же остаток, что и седьмая степень остатка A при делении на 7. Таким образом, возможны остатки седьмых степеней только следующего вида: 0, 1, 30, 31, 18, 19, 48 (от $0^7, 1^7, \ldots, 6^7$). Считать надо, собственно, только остатки 2^7 и 3^7, а остальные по формуле $(7-a)^7 \equiv -a^7 \equiv (49-a^7)$. Теперь составим таблицы. Первая — таблица сложения остатков при делении на 7:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	6	0	1	2
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4
6	0	1	2	3	4	5

Теперь строим таблицу, в которой на пересечении столбцов и строк x и y стоят значения остатков $(x+y)^7$ при делении на 49. Получаем эту таблицу, просто заменяя в предыдущей таблице каждое число на остаток его седьмой степени:

	1	2	3	4	5	6
1	30	31	18	19	48	0
2	31	18	19	48	0	1
3	18	19	48	0	1	30
4	19	48	0	1	30	31
5	48	0	1	30	31	18
6	0	1	30	31	18	19

Наконец, построим таблицу для x^7+y^7 (в соответствии с законами сложения остатков при делении на 49 слева и снизу для удобства указаны остатки седьмых степеней):

		1	2	3	4	5	6
(1)	1	2	31	32	19	20	0
(30)	2	31	11	12	48	0	29
(31)	3	32	12	13	0	1	30
(18)	4	19	48	0	36	37	17
(19)	5	20	0	1	37	38	18
(48)	6	0	29	30	17	18	47
		1	30	31	18	19	48

Теперь мы легко выловим возможных кандидатов — они имеют следующие остатки при делении на 7: (1,2), (1,4), (2,4), (3,5), (3,6), (5,6). Именно в этих местах таблицы совпадают, так что вопрос о делимости на 7^2 мы полностью разрешили. К сожалению, их слишком много, чтобы смело начать делать второй шаг — искать возможных кандидатов при делении на 7^3. Точнее, ясно, что перебор мы значительно сократили, и, в принципе, следующий шаг уже осуществим, но он пока выглядит чересчур трудоемким. Значит, прежде чем решиться на него, надо обдумать другие возможные переводы задачи.

Что значит «делится на 7^7»? Вот если бы на 10^{10}, так это просто — десять нулей в конце, и все проблемы долой! О! Так ведь обязательно нужно все перевести в семеричную систему счисления. На языке семеричной системы делимость на 7^7 — это очень простой факт: последние семь цифр должны быть нулями. Но окупится ли переход в семеричную систему? Пожалуй, да. Сложный вопрос о делимости заменится вопросом о наличии нулей, а сложение станет наглядным: будет виднее, что нужно складывать, чтобы добиться нужного результата.

Теперь технический вопрос: как переводить в семеричную систему? Есть два пути: первый — быстро создать таблицу умножения в семеричной системе. Это, пожалуй, в любом случае не помешает (читатель, попробуй сам и сравни):

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Второй путь — переводить степени из десятичной системы в семеричную. Приступим. Начнем с $2^7=128$. Делим с остатком: $128=7\times18+2$. Значит, последняя цифра — 2. Далее: $18=7\times2+4$. Получили предпоследнюю цифру 4 и первую 2. Итак, $128_{10}=242_7$. Точно так же 3^7 запишется как 6243_7. Теперь, действительно, видно, что $(1+2)^7-1^7-2^7$ делится на 7^3 (в семеричной разности получится 6000_7), но делимости на 7^4 уже нет. Эту работу можно продолжить. Видно, что она — хорошее подспорье к тому, что мы уже нашли, но не понятно еще, как окончить эту задачу. Опять же, прежде чем продолжать поиски, надо еще раз продумать ситуацию: все ли мы использовали? Интересный вопрос: а как еще можно было бы доказать делимость на 7 без малой теоремы Ферма? Ну, например, взять и непосредственно раскрыть скобки — обязательно должно было бы получиться. Это будет просто одним из свойств многочленов. Многочлены, многочлены... Что-то вертится в голове знакомое. А, наверное, это — симметрические многочлены!

Сделаем, читатель, отступление в сторону и расскажем о важном техническом приеме, особенно ценном для абитуриента, но немаловажном и для опытного математика. Речь пойдет о симметрических многочленах. Сначала — что это такое. Определение несложное: многочлен от x и y называется симметрическим, если, поменяв в нем местами буквы x и y, мы все равно получим тот же многочлен. Например, x^3+xy+y^3 — симметрический, а x^2+y — нет. Имеется два простейших симметрических многочлена: $u=x+y$ и $v=xy$. Они называются элементарными. Решающую роль в методе играет важная

Теорема. Любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные симметрические.

Метод же состоит в следующем. Как только Вы увидели, что в Вашей задаче присутствуют только симметрические многочлены, Вы обязаны немедленно ввести обозначения $u=x+y$ и $v=xy$ и выразить всю задачу через них. Метод гарантирует, что хуже не станет, так как степень уравнений должна понизиться, ибо мы вводим обозначение второй степени. Немедленно приведем стандартный закрепляющий пример (не будем обращать внимания на то, что мы еще не разобрали основную задачу — очень уж метод важный).

Задача. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A^2+B^2=13; \\ A^3+B^3=19. \end{cases}$$

Решение. Моментально вводим обозначения: $U=A+B$ и $V=AB$. Теорема гарантирует, что через них все можно выразить. Как это сделать? Нетрудно видеть, что $U^2=(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$, то есть $A^2+B^2=U^2-2V$. С суммой кубов поступим аналогично: по формуле для суммы кубов $A^3+B^3=(A+B)(A^2+B^2-AB)=U(U^2-3V)$. Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} U^2-2V=13; \\ U(U^2-3V)=19. \end{cases}$$

Решая ее, подставляем V из первого уравнения во второе и получаем кубическое уравнение, один корень которого легко угадывается — это $U=1$ (остальные определяются после понижения степени уравнения путем разложения на множители). Находим U, V, а по ним — уже сразу A и B.

Заметив, что метод симметрических функций применим и для бо́льшего числа переменных (для K переменных нужно K элементарных симметрических функций, которыми могут служить коэффициенты при t^i в разложении многочлена $(t+x)(t+y)(t+z)\ldots$ по степеням t), читатель получит в свое распоряжение мощный метод решения задач и от бо́льшего числа переменных, входящих в уравнения симметрично. Мы же вернемся к прерванной на время задаче. Установив, что она симметрична, мы должны использовать элементарные симметрические функции. Итак, вводим: $u=a+b$, $v=ab$. Надо нам выразить через них $(a+b)^7-a^7-b^7$. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, мы представим наше выражение в виде $7a^6b+\binom{7}{2}a^5b^2+\binom{7}{3}a^4b^3+\binom{7}{4}a^3b^4+\binom{7}{5}a^2b^5+\binom{7}{6}ab^6=7ab\times(a^5+b^5)+21a^2b^2(a^3+b^3)+35a^3b^3(a+b)$. Теперь предварительно следует решить, каким образом можно выразить через элементарные функции сумму a^5+b^5. Самый простой путь — использовать уже полученные в предыдущей задаче выражения для суммы квадратов и суммы кубов и рассмотреть их произведение: $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2=a^5+b^5+a^2b^2(a+b)$, откуда $a^5+b^5=(u^2-2v)u(u^2-3v)-v^2u=u[u^4-5u^2v+5v^2]$. Теперь наше выражение приводится к виду

$$7uv[u^4-5u^2v+5v^2]+21v^2u(u^2-3v)+35v^3u=7uv[u^4-5u^2v+$$
$$+5v^2+3vu^2-9v^2+5v^2]=7uv(u^4-2u^2v+v^2)=7uv(u^2-v)^2.$$

Вот это уже то, что нам надо! Мы можем сделать основополагающий вывод: для того чтобы исходное выражение делилось на 7^7, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 7^3 выражение u^2-v. Это уже вполне можно решить прямым перебором. Попробуем, однако, еще больше его сократить. Прежде всего вернемся к нашим исходным буквам a и b. Тогда мы приходим к такому выводу: наши буквы должны быть таковы, чтобы a^2+ab+b^2 делилось на 7^3. Хорошо? Хорошо, но можно лучше: можно, чтобы разность кубов a^3-b^3 делилась на 7^3. А вот это уже совершенно понятный перебор — короткий и ясный. Надо только выписать кубы. Конечно же, используя накопленный опыт предыдущих идей, мы будем выписывать не только десятичные, но и семеричные разложения чисел — кубов. Вот таблица первых 20 кубов в десятичной и в семеричной системе счисления:

1	1	1
2	8	11
3	27	36
4	64	121
5	125	236
6	216	426
7	343	1000
8	512	1331
9	729	2061
10	1000	2626
11	1331	3611
12	1728	5016
13	2197	6256
14	2744	11000
15	3375	12561
16	4096	14641
17	4913	20216
18	5832	23001
19	6859	25666
20	8000	32216

Теперь осталась очень простая задача по перебору — смотреть, у каких пар чисел одинаковые последние цифры (их три). Прикинуть можно довольно-таки быстро: это будут пары чисел (1,18) и (17,20). Поскольку нам нужна всего одна такая пара чисел, задача полностью решена.

Но возникает естественный вопрос: а нельзя ли найти все такие пары чисел? Что ж, и это сделать можно, причем довольно-таки быстро. Прежде всего, понятно, что если одна пара образует решение, то добавление к ней чисел, кратных 7^3 (к каждому числу пары можно добавлять свое кратное), тоже дает подходящую пару. Таким образом, мы обязаны отыскать только те пары, где каждое из чисел меньше 7^3. Но и это еще не все. Заметим, что любую пару можно умножить на любое число и получить тоже хорошую пару. Например, не считая, мы можем заявить, что (2, 36) — это тоже хорошая пара. Так как числа мы рассматриваем только взаимно простые с 7, то можно и «делить» (в арифметике остатков). Вывод: достаточно отыскать только те пары, в которых первым числом является единица. Но и тут перебор нужен неполный. Ранее проведенное исследование об остатках при делении на 7^2 показывает, что второе число обязано иметь остаток при делении на 7, равный 2 или 4. Теперь перебор совсем сокращен. Последнее техническое замечание: при вычислении кубов в семеричной системе счисления надо следить только за последними тремя цифрами. Тогда за разумное время можно найти все возможные варианты второго числа. Кроме 18 это еще 324. Тем самым общий ответ записывается так:

$$\begin{cases} a = k + 343l; \\ b = 18k + 343n; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = k + 343l; \\ b = 324k + 343l. \end{cases}$$

Автор должен заметить, что сам он, однако, степени не считал, перепоручив это машине (программа составлялась не более 15 минут и потребовала около 30 строк на языке Бейсик).

Хочется верить, что из приведенного решения видно, как рождаются разнообразные подходы к задаче и как, в конце концов, они успешно комбинируются для получения решения. Конечно же, в процессе оформления (чистки) почти все это исчезает и остается короткое изящное решение, до которого, быть может, и можно додуматься сразу. Казалось бы, только и нужно, что правильно поставить вопрос. Но, как справедливо заметил Роберт Шекли в своем рассказе «Верный вопрос»: «Чтобы правильно задать вопрос, нужно знать большую часть ответа».

Рассмотрим теперь еще одну задачу, в которой проявляется нетривиальное искусство перевода.

Задача. Последовательности A_k и B_k строятся по следующему закону:

$$A_1=1,\ B_1=\sqrt{2};$$

$$A_{k+1}=\min(A_k,\ B_k),\quad B_{k+1}=|B_k-A_k|.$$

1. Доказать, что A_k отлично от нуля при всех k.
2. Доказать, что последовательность A_k стремится к нулю.
3. Доказать, что последовательность

$$C_k=(A_1)^2+(A_2)^2+(A_3)^2+\ldots+(A_k)^2$$

имеет предел, и найти этот предел.

В этой задаче мы не будем проводить поиск решения, а сразу приведем чистое решение. Зато будет объяснено, как эта задача придумывалась.

Решение 1. Разумеется, надо сыграть на иррациональности. Кратчайший путь такой: доказать по индукции, что отношение $B_k:A_k$ — число иррациональное. Более строго, по индукции будут доказаны сразу два утверждения: что A_k не равно нулю и что указанное отношение иррационально. (Утверждение о неравенстве нулю необходимо для того, чтобы мы имели право говорить о частном. Про несуществующий объект можно ведь доказать что угодно.)

База индукции очевидна: при $k=1$ оба утверждения не подлежат сомнению. Индукционный переход трудностей также не составляет. Итак, предположим, что для некоторого k утверждение уже доказано. Наша задача — вывести аналогичное утверждение для $k+1$. Прежде всего сформулируем, что именно требуется доказать. Нужно убедиться, что A_{k+1} не равно нулю, а отношение $B_{k+1}:A_{k+1}$ иррационально. При этом разрешается пользоваться, как доказанным, утверждением о том, что A_k не равно нулю и о том, что отношение $B_k:A_k$ иррационально. Приступаем к доказательству. Прежде всего заметим, что B_k не равно нулю (иначе требование иррациональности $B_k:A_k$ оказалось бы нарушенным). Теперь попробуем посмотреть, что из себя представляет A_{k+1}. Это либо B_k, либо A_k — в зависимости от того, что из них меньше. В любом случае равенство нулю невозможно: про B_k только что доказали, а про A_k известно из индукционного предположения. Так что первая часть доказана. Докажем вторую часть — об иррациональности. Так как $B_{k+1}=\pm(B_k-A_k)$, то мы должны убедиться в иррациональности отношений $(B_k-A_k):B_k$ и $(B_k-A_k):A_k$. Но отняв единицу от первого выражения и прибавив единицу ко второму, мы все сведем к вопросу о рациональности выражений $A_k:B_k$ и $B_k:A_k$ соответственно. Но и то и другое выражение иррационально согласно предположению индукции. Тем самым наше утверждение окончательно доказано.

2; 3. Эти пункты будут доказываться одновременно. Решение будет неожиданно коротким после следующего красивого перевода. Рассмотрим прямоугольник со сторонами A_1 и B_1. Для удобства нарисуем его в системе координат так: отметим точку с координатами (B_1, A_1) и проведем через нее прямые, параллельные осям координат. В результате получится прямоугольник с нужными нам сторонами. Меньшая его сторона будет по определению равняться A_2. Отсечем от прямоугольника квадрат со стороной A_2. Он будет иметь площадь как раз $(A_2)^2$. Останется прямоугольник со сторонами A_2 и B_2 (рис. 40). С ним проведем ту же самую операцию: отсечем квадрат площадью $(A_3)^2$ и так далее. Нетрудно понять, как устроена последовательность квадратов: сначала они выстраиваются горизонтально справа налево до того момента, когда очередной такой же квадрат поместиться не может. Тогда размер квадрата уменьшается, и они начинают спускаться сверху вниз, опять

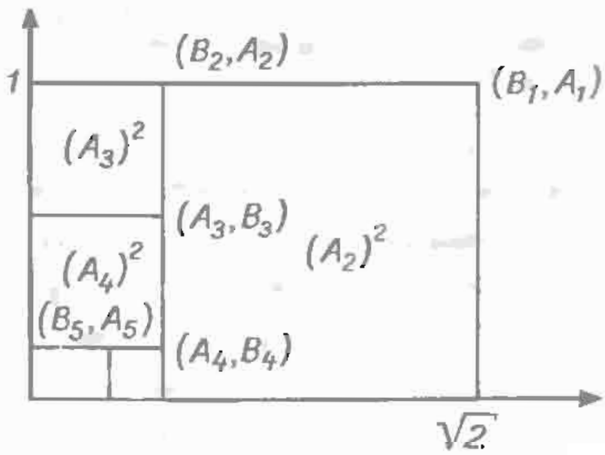


Рис. 40. Заполнение прямоугольника квадратами

же — до насыщения. Затем опять — справа налево и так далее. На рисунке указаны также координаты угловых точек — это либо (A_k, B_k), либо (B_k, A_k).

Докажем, что A_k стремится к нулю. Интуитивно это ясно, а строго — делается так. Так как последовательность A_k монотонная, то достаточно доказать, что она не ограничена снизу никаким положительным числом. Это же становится понятным, как только мы примем во внимание тот факт, что все квадраты содержатся в прямоугольнике без пересечения и их согласно пункту 1 бесконечно много: ведь в данный прямоугольник нельзя втиснуть бесконечно много квадратов площадью больше некоторого фиксированного числа. Теперь вычислим предел. Уже понятно, что он равен площади прямоугольника плюс $(A_1)^2$. Для строгого доказательства достаточно убедиться, что разность между площадью прямоугольника и суммой $(A_2)^2+(A_3)^2+(A_4)^2+ \ldots +(A_k)^2$ стремится к нулю. Убедимся в этом. Во-первых, она монотонно убывает. Во-вторых, что она из себя представляет? Это — площадь прямоугольника со сторонами A_{k+1}, B_{k+1}. Так как первая величина стремится к нулю, а вторая ограничена, то, следовательно, и площадь стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Комментарии. Конечно, можно было бы продемонстрировать поиск решения. Ясны даже первые шаги: взять в качестве начального значения два целых числа и посмотреть, как устроена последовательность. На самом же деле в таком порядке задача придумывалась. Дело, вообще говоря, обстояло так: читая книгу Дейкстры о программировании, автор встретился с этим замечательным алгоритмом. Использовался он... для нахождения наименьшего общего делителя двух натуральных чисел. (Проведя несколько пробных испытаний, читатель сам поймет, как его искать, пользуясь указанными последовательностями.) Алгоритм хорошо интерпретировался геометрически, и автору пришло в голову попытаться понять, а что будет в случае иррациональности. Когда картинка была нарисована, осталось только придумать, что спрашивать в этой задаче. Самым симпатичным показалось суммирование квадратов. Потом возник вопрос о строгом доказательстве — и на свет появились пункты 1,2. Затем каждый из них пришлось решить, так как в книге Дейкстры, конечно же, никакого намека на такие задачи не было. Вот, собственно, и вся история. На этом можно было бы и закончить, если бы, когда книга уже писалась, автору не пришел в голову еще один неожиданный поворот.

Вопрос, породивший это новое направление размышлений, следующий: а нельзя ли заранее точно указать, сколько именно квадратиков нужно для насыщения в очередной серии заполнения прямоугольников (вертикальной или горизонтальной). Тот же вопрос в алгебраической интерпретации зазвучал так: нельзя ли заранее указать те места, где A_k не равно A_{k+1}. Начнем с натуральных чисел: пусть первая пара (12,42). Тогда последовательность пар (A_k, B_k) будет дальше выглядеть так: (12,30), (12,18), (12,6), (6,6), (0,6) — и дальше стабилизация. Итого: 12 повторилось трижды, 6 и 0 — по разу. Не записать ли эту последовательность? Имеем: 3,1,1. Где-то такие последовательности встречались (во всяком случае — автору). Где же? Еще один толчок — наблюдение, которое показывает, что чертеж может быть увеличен или уменьшен гомотетией. Этому отвечают умножения или деления исходной пары на одно и то же число. Скажем, пара (24,48) все равно приведет к такому же результату: последовательности 3,1,1. Это можно выразить так: указанная последовательность зависит только от отношения $B_1:A_1$. Это что-то жгуче напоминает. Где строится последовательность натуральных чисел исходя из одного данного числа, причем оказывается конечной, если это число рационально, и бесконечной, если иррационально? Ну, конечно же, именно там — в цепных дробях!

Напомним читателю, как они выглядят. Например, наша последовательность 3,1,1 отвечает такой цепной дроби:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},$$

а более длинная последовательность 3,3,7,4 отвечает дроби

$$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}.$$

Эти примеры, хочется верить, ясно объясняют, как строить цепную дробь по последовательности. Самое же замечательное в том, что если сосчитать первую дробь (по обычным правилам арифметики), то мы получим 7/2, то есть как раз 42/12. Вывод: последовательность длин серий квадратов в точности отвечает разложению числа $B_k:A_k$ в цепную дробь. (Автор не претендует на то, что он уже доказал. Более того, задачу строгого доказательства автор оставляет читателю в качестве очень полезного рассуждения — польза проявится в том, что он поймет, как непросто записывать доказательства совершенно понятных вещей.) Но раз так, то мы уже можем ответить на все интересующие нас вопросы, как только научимся разлагать $\sqrt{2}$ в цепную дробь — она, конечно, окажется бесконечной. Разложение такое хорошо известно:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

Доказать это можно очень изящно: если обозначить цепную дробь, стоящую справа, через X, то легко видеть, что X удовлетворяет уравнению $X-1=\frac{1}{X+1}$, решения которого суть $\pm\sqrt{2}$. (Отметим, впрочем, что это — нестрогое доказательство, потому что задействована бесконечность. Строгое требует обоснования из теории пределов.)

Вывод. В нашей исходной задаче процесс построения квадратиков будет идти так: один квадратик располагается горизонтально, затем два — вертикально, затем два — горизонтально, затем опять два — вертикально и так далее.

Нашей целью не является изложение красивого и мощного аппарата цепных дробей. Прочитать о них можно в разных книгах, например в книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби», и почти в любом учебнике по теории чисел. Пусть читатель сам попробует разложить в цепную дробь корень из трех и корень кубический из двух — в награду за это он получит их наилучшие приближения. Мы же хотели только подчеркнуть, как красиво и неожиданно могут переводиться задачи.

Следующий пример был предложен на Всесоюзной математической олимпиаде 1984 года.

Задача. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25; \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9; \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Вычислите величину $xy+2yz+3zx$.

Поиск решения. С первого взгляда такая система не производит эстетического впечатления: трудно даже придумать, за что тут можно уцепиться. Попытки решить систему в лоб мы опустим. Может, что-то обозначить? Явно напрашивается на обозначение $y/\sqrt{3}$, хотя непонятно, что это может дать, кроме чистого удовлетворения тем, что все квадраты будут без коэффициентов. Непонятно, но сделать надо — и записать! Итак, вводим новую переменную $t=y/\sqrt{3}$ и получаем такую систему:

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{3}\,xt + t^2 = 25; \\ t^2 + z^2 = 9; \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Что с ней можно сделать? Не видно по-прежнему. Давайте тогда смотреть, что есть знакомого. Знакома комбинация 9, 16, 25 — египетский треугольник. Но зачем он нам? А что делать с $\sqrt{3}$?

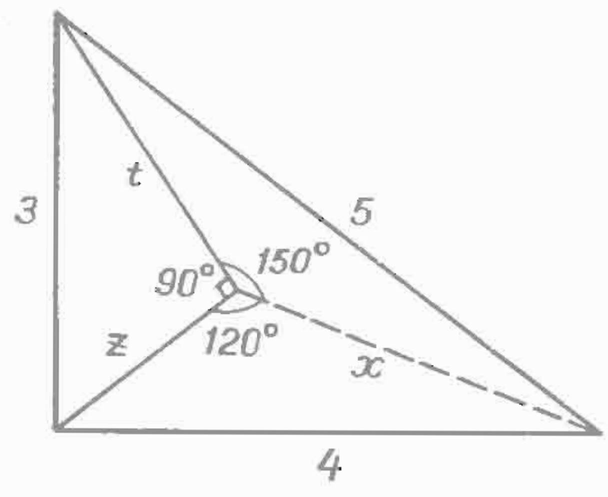


Рис. 41. Геометрическая интерпретация системы уравнений

Где вообще такая величина хоть как-то встречается? Ну разве что в тригонометрии. Косинус 30° вроде бы равняется $\sqrt{3}/2$. А зачем нам это? Ладно, смотрим еще. Выделяется второе уравнение: сумма квадратов дает третий квадрат. И еще одно такое же равенство мы уже отмечали — в египетском треугольнике: $3^2+4^2=5^2$. Интересно, а что если это геометрически проинтерпретировать? Нельзя ли перевести задачу на геометрический язык? Попробуем. Значит, есть два треугольника, у которых одна общая сторона длиной 3. Как их нарисовать: один внутри другого или снаружи? Попытаемся внутри, чтобы попробовать связать с другими сторонами (рис. 41). А что, интересно получилось. А не дадут ли два оставшихся уравнения что-то подобное? Так ведь они... теорема косинусов в чистом виде. А с какими углами? Косинусы равны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Но сумма углов тогда в точке 0 получится в точности 360°. Прекрасно! Значит, догадка оказалась верной — чертеж соответствует нашей задаче. А теперь осталось выяснить, что спрашивается в задаче с геометрической точки зрения. А спрашивается, как читатель сам легко убедится — площадь большого треугольника с точностью до коэффициента. Ответ — $24\sqrt{3}$.

В этой главе можно было бы написать о многом. Например, о замечательном переводе задачи про разрезание квадрата на неравные меньшие в задачу об электрических цепях и законах Кирхгофа (об этом, впрочем, замечательно написано в книге М. Гарднера «Математнческие головоломки и развлечения»). Или... Но объем каждой книги и тем более главы ограничен, так что мы должны проститься с этой увлекательной темой.

12

Тренажер

В задачах тех
Ищи удачи,
Где получить
Рискуешь сдачи.

П. Хейн. Груки

Эта глава — тренировочная. Она предназначена для тех, кто решил начать подготовку к математической олимпиаде. Сборников задач олимпиадного характера достаточно много. Но их все равно не хватает, тем более, что переиздаются они редко, а школьников, открывающих для себя олимпиадную математику, становится все больше.

Особенность главы «Тренажер» в том, что она состоит только из задач. Рекомендуется рассматривать задания — по 10 подряд идущих задач — на две недели. В каждой десятке задачи более или менее объединены по смыслу, и в каждой имеются задачи от очень простых до очень сложных. Бо́льшая часть задач хорошо известна, но есть и совершенно новые. Не беда, если какие-то задачи не будут получаться. Часть из них потом все равно решится, часть будет найдена в каком-нибудь другом сборнике, а часть..., может быть, будет решена в следующей книге автора (если он таковую напишет). А теперь приступим к изложению задач.

1. Доказать, что для каждого натурального числа k существует число, составленное только из единиц и нулей и делящееся на k.

2. Доказать, что из $k+1$ числа, меньшего $2k$, всегда можно выбрать два, отношение которых — степень числа два, и всегда можно выбрать три числа, одно из которых равно сумме двух других.

3. На шахматной доске 8×8 стоит 31 пешка. Доказать, что найдется «уголок», склеенный из трех клеток, на котором не стоит пешка.

4. Вокруг каждой точки с целочисленными координатами нарисована одинаковая окружность. Доказать, что, каким бы ма-

леньким ни был взят радиус этой окружности, любая прямая, проходящая через начало координат, пересечет бесконечно много окружностей.

5. Доказать, что существует степень двойки, начинающаяся 1986 девятками.

6. Шахматист играет для тренировки не менее одной партии в день. При этом, чтобы не переутомиться, он играет не более 12 партий в неделю. Доказать, что найдется несколько последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

7. В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них лежат в круге радиусом 1/7.

8. Даны 20 различных натуральных чисел не больших 70. Доказать, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел найдется по крайней мере четыре равных. Можно ли уменьшить число 20 в этой задаче?

9. Доказать, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

10. Имеется неограниченное число кубиков черного и белого цвета. Нужно построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик в башне граничил с четным числом белых, а каждый белый — с нечетным числом черных. При любом ли заданном слое такую башню (конечной высоты) можно построить?

11. На доске написаны числа 1,2, ..., 1985. Разрешается стереть любые два, записав вместо них абсолютную величину их разности. Доказать, что нельзя добиться, чтобы на доске остался один нуль.

12. В k стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких k можно за конечное число шагов слить всю воду в один стакан?

13. В ряд выписаны 2^k натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители этих чисел, то среди них будет не более k различных. Доказать, что из данного ряда можно выб-

рать несколько стоящих подряд чисел так, что их произведение будет точным квадратом.

14. Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра (0, 1, 2,… 9), причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек?

15. Каждый человек, когда-либо живший на Земле, сделал определенное число рукопожатий. Доказать, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

16. Каждый из 77 человек, сидящих за круглым столом, задумал по целому числу. Затем каждый написал сумму чисел его соседей слева и справа. Доказать, что хотя бы кто-нибудь не написал 1985.

17. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

18. Доказать, что сумма $1/2+1/3+1/4+ \ldots +1/K$ ни при каком K не является целым числом.

19. Имеется много одинаковых кубиков и шесть красок. Разрешается окрашивать каждый кубик в шесть цветов и приклеивать друг к другу кубики гранями одного цвета. Требуется склеить параллелепипед размером $m \times n \times k$, каждая грань которого была бы одного цвета, причем все цвета должны быть разными. Для каких m, n, k это можно сделать?

20. На бесконечной шахматной доске стоит нечетное число фигур. Доказать, что рядом хотя бы с одной фигурой — четное число соседей (0, 2, 4, 6 или 8).

21. Доказать, что любую сумму больше 7 коп. можно заменить монетами достоинством в 3 и 5 коп.

22. Доказать, что в любом множестве натуральных чисел можно выбрать конечное число таких чисел, чтобы все остальные получались из них с помощью сложения (каждое число может быть использовано несколько раз).

23. Доказать, что для любых двух целых чисел m и n с наи-

большим общим делителем d существуют такие целые числа a и b, что $d=am+bn$.

24. Выписать таблицу умножения и сложения для остатков при делении на натуральное число p ($p=2, 3, 4, \ldots 13$). Для каких p у каждого остатка есть обратный, то есть такой, что их произведение равно 1 (как остаток)? Сформулировать соответствующую гипотезу для произвольного p и доказать ее.

25. Доказать малую теорему Ферма: если p — простое число, то p-я степень любого натурального числа имеет при делении на p тот же остаток, что и само число. Попытаться обобщить эту теорему на случай произвольного числа p.

26. Доказать теорему Вильсона: число p просто тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ делится на p.

27. Доказать, что существует миллиард последовательных составных чисел.

28. Множество целых чисел таково, что разность любых двух чисел из этого множества также принадлежит ему. Описать все такие множества.

29. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы тринадцати шестнадцатых степеней натуральных чисел.

30. Доказать, что каждое натуральное число разлагается в произведение своих простых множителей, причем единственным образом.

31. Доказать, что шахматный конь не может обойти доску $4\times k$ так, чтобы, побывав на каждом поле ровно один раз, последним ходом вернуться в исходную клетку.

32. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки плюс и минус, как показано на рисунке:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}$$

Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак в любой угловой клетке). Доказать, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

33. На бесконечной клетчатой доске расставлены в клеточках вещественные числа. Доказать, что найдется хотя бы одно число, которое не меньше по крайней мере четырех из восьми окружающих его чисел.

34. Доказать, что из k^2+1 последовательно записанного числа можно выбрать $k+1$ число, которые идут либо в порядке убывания, либо в порядке возрастания.

35. Все наборы (любой конечной длины) из двух цифр 0 и 1 каким-то образом разбиты на два класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность из нулей и единиц можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, может быть, первого куска, принадлежат одному классу.

36. Каждое из натуральных чисел закрашено в один из k цветов. Доказать, что можно найти сколь угодно длинную арифметическую прогрессию конечной длины, все члены которой — одного цвета.

37. Разбить множество натуральных чисел на два подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию. Можно ли это сделать для геометрических прогрессий?

38. Семнадцать математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые два переписываются на одном из трех языков. Доказать, что найдутся трое, которые переписываются на одном языке.

39. Каждая точка плоскости раскрашена в один из двух цветов. Доказать, что найдется правильный треугольник, вершины которого одного цвета. Верно ли это для k цветов?

40. На отрезке длиной 1 выбрано несколько маленьких отрезочков и покрашено. Известно, что сумма длин покрашенных отрезков превосходит 1/2. Доказать, что найдутся две покрашенные точки на расстоянии ровно 1/2.

41. Можно ли сложить кирпич из кубиков разного размера?

42. Последовательность A_k строится по такому закону: $A_{k+1} = |A_k| - A_{k-1}$. Доказать, что, какими бы ни были A_1 и A_2, последовательность все равно будет периодической.

43. На множестве целых чисел ввели новую операцию:

$$m * n = \begin{cases} \dfrac{m+n}{2} + a, \text{ если } m+n \text{ четно;} \\ \dfrac{m+n+1}{2} + b, \text{ если } m+n \text{ нечетно} \end{cases}$$

(a, b — фиксированные целые числа). Пусть M — множество чисел, получающееся из нуля с помощью операции $*$. Доказать, что для любых двух чисел из M их сумма также принадлежит M.

44. Можно ли выбрать миллион натуральных чисел так, чтобы никакая сумма нескольких из этих чисел не была полным квадратом?

45. Доказать, что $\lg\operatorname{tg}1^0 + \lg\operatorname{tg}2^0 + \ldots + \lg\operatorname{tg}89^0 = \lg\operatorname{tg}1^0 \cdot \lg\operatorname{tg}2^0 \times \times \lg\operatorname{tg}3 \ldots \lg\operatorname{tg}89^0$.

46. Числа 1, 2, 3, ... $2k$ разбиты на две группы по k чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots b_k$ — числа второй группы, записанные в убывающем порядке. Доказать, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_k - b_k| = k^2.$$

47. Последовательность x_n строится так: $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Доказать, что эта последовательность сходится, и вычислить ее предел.

48. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что любая другая получается из нее вычеркиванием:

а) некоторых членов;

б) конечного числа членов?

49. Программист Петя задумал написать программу, которая дала бы возможность вычислительной машине печатать одну за другой цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Доказать, что даже если бы машина не ломалась, то Петина затея все равно бы не удалась, и рано или поздно машина напечатала бы неверную цифру.

50. Можно ли из какой-то точки провести к графику многочлена K-й степени больше, чем k касательных?

51. Доказать, что для любых двух многочленов от одной переменной F_1 и F_2 существует многочлен $g(Y_1, Y_2)$ такой, что $g(F_1, F_2)\equiv 0$. Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для бо́льшего числа переменных.

52. Каждому натуральному числу $K\leqslant 100$ поставлено в соответствие некоторое натуральное число $F(K)$, также не превосходящее 100. Строится последовательность: $A_1=1$, $A_2=F(A_1)$, $A_3=F(A_2)$, $A_4=F(A_3)$, ... Докажите, что найдется номер $N\leqslant 100$, для которого $A_N=A_{2N}$.

53. Доказать неравенство при $x\geqslant 0$:

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

54. Доказать, что если уравнение

$$x^k+ax^{k-1}+bx^{k-2}+\dots=0$$

имеет ровно k различных решений, то $a^2 > \frac{2k}{k-1}b$.

55. Решить уравнение $2x^x=\sqrt{2}$.

56. Доказать, что существует такое простое число p, что $\sqrt{p}^{\,\sqrt{2}}$ иррационально.

57. Можно ли множество всех натуральных чисел больше 1 разбить на два непустых подмножества так, чтобы для любых двух чисел a и b из одного множества число $ab-1$ принадлежало другому.

58. Доказать, что числа a, b, c имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$ab+bc+ca>0;$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0.$$

59. Найти цифры a и b такие, для которых

$$\sqrt{0,\overline{aaaa\ldots}}=0,\ bbbb\ldots$$

60. Найти функцию $f(x, y)$ такую, что неравенство $f(x, y)>0$ задает первый квадрант (не включая оси). Докажите, что $f(x, y)$ не может быть многочленом.

61. Можно ли через каждую точку внутри данного треугольника провести по две прямые так, чтобы никакие три из полученного множества прямых не пересекались в одной точке и никакие две не были параллельны?

62. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника с целыми площадями. Доказать, что площадь четырехугольника — число составное.

63. Можно ли на числовой прямой расположить три отрезка четной длины так, чтобы пересечение любых двух из них имело нечетную длину?

64. Длины двух медиан треугольника меньше 1. Может ли его площадь равняться $\log_8 6$?

65. Точка O обладает тем свойством, что любая прямая, проходящая через нее, делит площадь данного многоугольника пополам. Верно ли, что O — центр симметрии?

66. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны между собой, то он — равнобедренный.

67. Круг разрезан на несколько частей (отрезками прямых и дугами окружностей — для определенности). Можно ли из них сложить другую выпуклую фигуру?

68. Равносторонний треугольник полностью покрыт пятью меньшими одинаковыми равносторонними треугольниками. Докажите, что его можно покрыть и четырьмя такими треугольниками.

69. На плоскости расположено K точек. Известно, что расстояние между любыми двумя из них не больше 1 и для любой точки существует другая из этого множества на расстоянии ровно 1. Докажите, что все они лежат в вершинах выпуклого многоугольника.

70. Для каждых двух из трех произвольных окружностей проведены общие хорды. Доказать, что эти три хорды пересекаются в одной точке.

71. Доказать, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом.

72. Петя и Вася придумали такую игру. Петя задумал число — 1, 2 или 3, а Вася должен отгадать это число, имея право только на один вопрос, причем такой, на который Петя может ответить лишь «да», «нет» или «не знаю». Помогите Васе.

73. Петя и Вася затеяли игру на шахматной доске размером $K \times P$ по следующим правилам: сначала Петя ставит на свободную клетку шахматного коня, затем Вася делает из этой клетки ход конем по шахматным правилам, потом ход конем делает Петя и так далее. При этом запрещается занимать то место, где конь уже побывал. Кто не сможет сделать очередного хода, считается проигравшим. Кто им окажется?

74. Можно ли связать три карандаша нитями так, чтобы связаны были только их концы, а карандаши не касались друг друга (расстояние между ними — не менее 1 см), но конструкция тем не менее была жесткой (ее можно было подбросить в воздух и поймать такой же)?

75. Все вершины параллелограмма имеют целые координаты. Доказать, что его площадь — целое число. Верно ли аналогичное утверждение в пространстве?

76. Последовательность A_k строится по следующему закону. Произвольное число B разбивается на два любых слагаемых. В качестве A_1 берется их произведение. Затем одно из слагаемых опять делится на два и произведение этих новых слагаемых прибавляется к A_1. Результатом будет A_2. Точно так же поступаем и дальше: если B уже представлено в виде суммы нескольких слагаемых, то одно из них разбивается на два и очередное A_k получается из предыдущего прибавлением произведения двух новых слагаемых. Доказать, что если величина наибольшего из слагаемых стремится к нулю, то последовательность A_k имеет предел, зависящий от числа B, но не зависящий от способа разбиения.

77. В городе H, чтобы обойти по кругу вокруг любого перекрестка, надо четное число раз перейти дорогу. (В частности, там

нет тупиков.) Доказать, что любой замкнутый маршрут по городу H приводит к необходимости четное число раз переходить дорогу.

78. В окружности через фиксированную точку O проводятся пары попарно перпендикулярных хорд. Доказать, что сумма квадратов их длин — величина постоянная.

79. В алфавите языка племени Мумбо-Юмбо всего три буквы: A, B и C. Любая комбинация букв обозначает какое-то понятие, причем разные слова могут обозначать одно и то же понятие — быть синонимами. Кроме того, если к синонимам приписать с одинаковой стороны одинаковые буквы, то получившиеся слова тоже будут синонимами. Исследователям удалось установить, что синонимами являются следующие пары: AB и C; BC и A; CA и B, но слова AB и BA синонимами не являются. Сколько всего понятий в языке племени Мумбо-Юмбо?

80. Полтора землекопа за полтора часа выкопали полторы ямы. Сколько ям выкопают за два часа два землекопа?

81. Проекции некоторого тела на две разные плоскости — круги. Доказать, что радиусы этих кругов одинаковы.

82. Клоп умеет ползать по любой поверхности (даже переползать через края) и прыгать вертикально вниз, но не умеет плавать. Как спастись от клопа?

83. Вы пускаете мыльные пузыри. Доказать, что в любой момент времени хотя бы один из них виден Вам целиком (его не закрывает никакой другой). Верно ли аналогичное утверждение, если пузыри имеют не форму шара, а форму куба?

84. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, соединяющие её с вершинами. Отрезки прямых между вершинами и точкой стерли, так что треугольник разбился на три четырехугольника. Доказать, что если в два из них можно вписать окружность, то это же верно и для третьего.

85. Решить уравнение

$$x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=\frac{1}{8}.$$

86. Назовем слова перестановочными, если два слова, получающихся их склейкой в равном порядке, будут одинаковыми. Например, слова ПАПА и ПА перестановочны: при любой склейке получается ПАПАПА. А вот МЯУ и КИС неперестановочны: слова МЯУКИС и КИСМЯУ различаются. Требуется доказать, что если есть три таких слова, что первое перестановочное со вторым, а второе с третьим, то и первое слово перестановочно с третьим.

13

Намеки

Простейший способ состоит в том, что гадающий с маху раскрывает какую-нибудь книгу и смотрит, о чем идет речь на открытой странице; что там написано, того и следует ожидать.

Настольная книга атеиста. Мантика

В этой совсем коротенькой главе содержатся кратчайшие указания к большинству предложенных задач предыдущей главы.

1. Разность чисел вида 111... 11000...0, остатки, принцип Дирихле.

2;3. Принцип Дирихле.

4;5. Читай Лемана — «Сборник задач московских олимпиад».

6. Рассмотрите остатки при делении на 20 за три недели.

7. Разбейте квадрат на 25 квадратов.

8. $3\cdot1+3\cdot2+ \ldots +3\cdot6+7+1$ больше 70. Принцип Дирихле здесь играет роль миража.

9. Покрасьте совпадающие цифры.

10. Постройте бесконечную башню и найдите одинаковые слои.

11. Ищи инвариант!

12. Обратите задачу: один стакан разлить поровну.

13. Рассмотрите представление чисел последовательностями, как в главе об обозначениях, по показателям простых делителей, их — по модулю 2 и выпишете друг под другом.

14. Докажите, что сумма номеров мест четна и нечетна одновременно.

15. Граф с нечетными вершинами.

16. Четность.

18. Рассмотрите максимальную степень двойки.

19. Похожая задача разбиралась в главе о раскраске.

20. См. пункт 15.

21. «Остатки при делении на 3».

22. Воспользуйтесь 23-й задачей и остатками при делении на a_1. Покажите, что получится любой.

23. Рассмотрите все такие суммы и воспользуйтесь задачей 28.

24. Гипотеза: p — простое число. Используйте пункт 23.

25. Обобщение — см. про функцию Эйлера в любой книжке по теории чисел или в «Кванте».

26. Перемножьте все остатки: у каждого есть обратный, кроме —1.

27. $10^9!+K$.

28. Две разности — это сумма, затем найдите минимальное по модулю число. Докажите, что все на него делится.

29. Рассмотрите остатки при делении на 16 или 17.

31. Две раскраски. Первая — две внутренние полосы черные. Вторая — шахматиая.

32. Количество минусов в неугловых боковых клетках иечетно.

33. Рассмотрите квадрат 4×4 без угловых клеток.

34. Похожая задача — в главе о раскраске.

35. Покрасьте в один цвет все те места, начиная с которых все конечные последовательности — в первом классе. Другой цвет — то же самое для второго класса. Рассмотрите случай конечного и бесконечного числа покрашенных мест.

37. Каждое подмножество должно содержать достаточно много подряд идущих чисел.

38. Используйте первую задачу главы о графах.

39. Рассмотрите правильный шестиугольник с центром.

40. Сверните отрезок в окружность и симметрично отразите.

41. Нет. Докажите, что на самом маленьком иижнем кубике должен стоять еще меньший, а на нем — еще меньше и так далее.

42. Последовательность периодична с периодом 9.

43. Докажите, что $m*\,n+k=(m+k)*\,(n+k)$, а затем индукцией по длине представления y, что $x+y$ лежит в M.

45. $\mathrm{tg}\,45^\circ=1$.

46. Попробуйте поменять два числа.

47. У этой последовательиости есть неподвижная точка — число π.

48. *а* — да, *б* — нет.

49. У машины конечное число состояний, и она способна напечатать только периодическую дробь.

50. Нельзя, так как многочлен K-й степени имеет не более чем K корней.

53. Проинтегрируйте несколько раз иеравенство $\cos x < 1$.

54. Производная и индукция.

55. Угадайте два корня и покажите, что больше нет.

56. Иначе $\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ должно быть рациональным.

58. Устройте перебор.

59. Сверните дроби, как прогрессии.

60. Докажите, что если $f(x, y)$ — многочлен, то он делитси на xy, и найдите многочлен меньшей степени.

61. Касательные к окружности.

62. Попарные произведения противоположных площадей равны.

63. Нет.

64. Докажите, что меньший треугольник, образованный медианами, имеет площадь не больше 1/9.

66. Читайте Г. Коксгера «Новые встречи с геометрией».

68. Рассмотрите три вершины и три середины.

69. Пересеките круги.

70. Три полусферы, построенные по окружностям, пересекаются в одной точке.

71. Те цифры, которые встречаются конечное число раз, надо расположить впереди, остальные — чередовать.

72. «Я тоже задумал одно из чисел: 1,5 и 2,5. Твое число больше?»

73. Все зависит от четности $K \times P$. При четности доску надо разбить на пары.

74. Да. В идеале достаточно 9 нитей, но лучше использовать все 12.

75. Если (a, b), (x, y) — координаты направляющих векторов, то площадь равна модулю числа $ay - bx$.

76. Рассмотрите равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом B. Его площадь и есть искомый предел.

77. Докажите по индукции, что карту города можно раскрасить в два цвета.

79. Ответ — 8.

Вместо заключения

К переводу своей статьи известный английский математик Джон Литлвуд написал примечания: «Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод этой статьи. Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод предыдущего замечания. Я весьма благодарен проф. Риссу за перевод предыдущего замечания».

Почему этим Литлвуд и ограничился?

Факультативный курс математики для 6—7-х классов в задачах (Ленинград, 1985)

Один из моих друзей — по профессии живописец, и мне не раз случалось заходить в его мастерскую. Каждый раз он показывал мне свои новые работы и спрашивал мое мнение о них. Будучи совершенным дилетантом в живописи, я, тем не менее, совершенно беззастенчиво критиковал его. К моему величайшему удивлению, после моей критики он часто исправлял сделанное. Надо ли говорить о том, что через некоторое время я почувствовал себя тонким знатоком искусства. А однажды я даже спросил его: «Как же так, ты — профессионал, а я в живописи — нуль. Тем не менее, я говорю тебе о недостатках, и ты их исправляешь. Неужели ты сам их не видишь?» Его ответ навсегда лишил меня иллюзий: «Конечно, вижу, — спокойно сказал он, — но если даже *ты* их замечаешь, значит, это надо исправлять!»

Теперь, находясь в роли автора, я хотел бы воспользоваться опытом моего друга. Я буду благодарен всем читателям, которые пришлют мне свои замечания, тем более, что критиковать есть что. Мне было бы приятно получить не только критику, но и предложения по усовершенствованию текста или пожелания по включению в него иных тем и методов.

Рукопись была прочитана не только редакторами и рецензентами, но и добровольно взявшими на себя такую ношу А. Е. Колесниковым, Е. Н. Захаровой, С. Е. Рукшиным. Контрольным читателем, перерешавшим большую часть задач, был десятиклассник

Вадим Зудилин. Все они внесли множество ценнейших предложений по усовершенствованию книги. Им — особая благодарность.

Я весьма признателен также тем, с кем обсуждались только фрагменты книги. Вообще, я благодарен всем друзьям и близким, которые мужественно выдержали тот период времени, когда со мной нельзя было говорить ни о чем другом, кроме этой книги.

И о задачах. Их по ходу текста разбросано более двухсот. Часть из них являются оригинальными (около одной пятой всего количества), другие — либо широко известными, либо извлеченными из процитированных в книге источников, в первую очередь из двух брошюр заочной математической школы при ЛГУ: одной, процитированной в эпиграфе к этой главе, а другой — в главе о раскраске. Наконец, очень много задач было взято из замечательной книги Н. Б. Васильева и П. П. Савина «Избранные задачи математических олимпиад», давно ставшей библиографической редкостью.

И последнее. Автор просит извинения за то, что его «я» слишком часто проскальзывало на этих страницах, пусть и не всегда от первого лица. Да и вообще за все то, что могло шокировать читающего, ибо это издержки огромного желания сделать книгу интересной. Насколько это удалось — судить самому читателю.

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-популярное издание

Виктор Анатольевич Уфнаровский
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АКВАРИУМ

Утверждено к изданию
Редакционно-издательским советом АН МССР

Редактор *Л. Н. Морозова.* Художник *Б. К. Свинорез.* Художественный редактор *И. А. Ростова.* Технический редактор *А. Я. Гольденберг.* Корректоры *Е. В. Жмурова, А. Л. Меламед*

ИБ № 3239

Сдано в набор 18.05.87. Подписано к печати 13.11.87. АБ09306. Формат $70\times\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 1. Литературная гарнитура. Печать высокая. Усл. печ. л. 9,45. Усл. кр.-отт. 9,8. Уч.-изд. л. 10,55. Тираж 14705. Заказ 699. Цена 50 коп.

Издательство «Штиинца», 277028. Кишинев, ул. Академика Я. С. Гросула, 3

Типография издательства «Штиинца». 277004, Кишинев ул. Берзарина, 8.