

Ю.А. Устинов

ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРОВ



Ю.А. УСТИНОВ

ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРОВ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003

УДК 539.3
ББК 22.251
У80

Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 128 с. — ISBN 5-9221-0448-9.

В монографии на основе операторной формы метода однородных решений осуществлено построение решений Сен-Венана для цилиндра, естественно закрученного стержня, винтовой пружины, кругового кольца и цилиндра с винтовой анизотропией. Перечисленная группа тел объединена понятием «псевдоцилиндры». Для любого псевдоцилиндра показано, что решение Сен-Венана является линейной комбинацией двенадцати элементарных однородных решений, которые в монографии названы элементарными решениями Сен-Венана. Построение этих решений сведено к двумерным задачам на сечении. Разработаны аналитические и численные методы интегрирования этих задач. Теория иллюстрируется конкретными примерами.

Для специалистов в области теории упругости, аспирантов и студентов, специализирующихся в этой области.

Ил. 13. Библиогр. 86 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Основы метода однородных решений для упругого цилиндра	11
§ 1. Операторная форма записи уравнений теории упругости	11
§ 2. Однородные решения и их свойства	14
§ 3. Тензор Грина для бесконечного цилиндра	19
Глава 2. Статическая задача для упругого цилиндра	23
§ 4. Элементарные решения статической задачи и их интегральные свойства	23
§ 5. Общее представление решения трехмерной задачи и обоснование принципа Сен-Венана	31
§ 6. Тензор Грина для цилиндра конечной длины. Асимптотический анализ решения	34
Глава 3. Гармонические колебания упругого цилиндра	42
§ 7. Дисперсионные соотношения и элементарные решения Сен-Венана в случае низкочастотных гармонических колебаний цилиндра	42
§ 8. Вывод уточненных частотных уравнений	47
Глава 4. К теории естественно закрученных стержней	54
§ 9. Основные геометрические соотношения	54
§ 10. Основные соотношения теории упругости для естественно закрученного стержня и постановка краевых задач	56
§ 11. Однородные элементарные решения Сен-Венана естественно закрученного стержня	59
§ 12. Вариационная постановка двумерных задач на сечении	64
§ 13. Основные свойства элементарных решений Сен-Венана. Матрица жесткостей	67

§ 14. Решение трехмерной задачи и обоснование принципа Сен-Венана для ЕЗС	69
§ 15. Метод малого параметра (случай малой «крутки»)	71
Глава 5. Задачи Сен-Венана для винтовой пружины и кольца	80
§ 16. Винтовая пружина	80
§ 17. Элементарные решения Сен-Венана	84
§ 18. Вариационная постановка двумерных задач на сечении	87
§ 19. Решение Сен-Венана для пружины и его интегральные свойства	89
§ 20. Исследование решения Сен-Венана для пружины методом малого параметра	92
§ 21. Однородные решение для кругового кольца	96
§ 22. Задачи о дислокациях	103
Глава 6. Задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией	109
§ 23. Основные соотношения теории упругости в случае винтовой анизотропии и постановка задачи	109
§ 24. Элементарные решения Сен-Венана СВА	112
§ 25. О методах построения элементарных решений и некоторые результаты численного анализа	116
Список литературы	121

Предисловие

Настоящая книга посвящена развитию метода однородных решений и построению на его основе решений задач Сен-Венана для:

- цилиндра;
- естественно закрученного стержня;
- цилиндрической пружины;
- кругового кольца и цилиндра с винтовой анизотропией

(последние четыре типа тел для краткости объединены термином *псевдоцилиндры*).

Все задачи рассматриваются на основе единого подхода, широко использующего спектральную теорию несамосопряженных операторов. Показано, что во всех случаях решение Сен-Венана является линейной комбинацией двенадцати элементарных решений (в монографии для них используется аббревиатура ЭРСВ — элементарные решения Сен-Венана), половина из которых описывает смещение цилиндра как твердого тела, другая — напряженно-деформированное состояние с главным вектором и главным моментом напряжений в сечении псевдоцилиндра, отличным от нуля. Построение последней группы сведено к четырем двумерным задачам. Дается вариационная постановка этих задач. Строго обосновывается, что оставшая часть решения трехмерной задачи, не включающая в себя линейную комбинацию ЭРСВ, экспоненциально убывает по мере удаления от торцов псевдоцилиндра.

Приводится пример поперечного сечения цилиндра, для которого показатель экспоненты можно сделать малым, и тем самым доказывается условность классической формулировки принципа Сен-Венана. Для замкнутого кругового кольца с произвольным поперечным сечением показано, что напряженно-деформированное состояние, вызванное дислокациями Вольтерра, описывается ЭРСВ. Рассмотрен ряд конкретных задач, для построения которых использованы асимптотические и численные методы. Проводится анализ областей применимости некоторых приближенных теорий стержней.

В книге принята сквозная нумерация параграфов и двойная — формул, утверждений и замечаний.

Автор приносит глубокую благодарность профессору А. О. Ватульяну за то, что он любезно согласился прочесть черновой вариант монографии и сделал ряд полезных замечаний, Н. В. Курбатовой за

расчеты на основе МКЭ и большую редакционную работу, а также своим ученикам А. Н. Друзь, Д. П. Каргину, С. Н. Медянику за совместную работу.

Большинство результатов, которые приводятся в этой книге, были получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Автор решился объединить эти результаты в монографию благодаря поддержке декана механико-математического факультета Ростовского государственного университета Я. М. Ерусалимского, за что и благодарен ему.

Введение

В 1856 г. были опубликованы два знаменитых мемуара Сен-Венана [82, 83], заложившие основы прикладной теории упругости (широкому кругу читателей на русском языке они стали доступны благодаря переводу Г.Ю. Джанелидзе [60]). Результаты исследований, изложенные в этих трудах, под названием *задачи Сен-Венана* вошли практически во все учебники по теории упругости (начиная с изданной в 1862 г. книги Клебша «Теория упругости твердых тел» и переизданной в 1883 г. в переводе Сен-Венана [77] с громадным количеством комментариев, едва не превышающих основной объем). Клебшем же и был введен термин «задачи Сен-Венана», который включает в себя задачи о растяжении, кручении, чистом изгибе и изгибе перерезывающей силой цилиндра (призмы) с произвольным основанием, боковая поверхность которого свободна от напряжений.

Работам Сен-Венана предшествовал длительный период становления классической теории стержней Бернулли–Эйлера. Классическая теория стержней и стержневых систем своими корнями уходит в XVII–XVIII века и тесно связана с развитием математики в целом, особенно с такими ее разделами, как дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, спектральная теория операторов (задачи устойчивости и колебаний балок, впервые рассмотренные Эйлером). Основы для ее развития заложили Галилей, Мариотт, Гук. Последующее ее развитие в XVIII–XIX веках связано с именами выдающихся математиков, механиков и физиков, таких, как Яков Бернулли, Эйлер, Лагранж, Кулон, Навье, Коши, Сен-Венан, Кирхгоф, Клебш [24–26, 44, 52, 60, 61].

Одним из основных факторов, стимулирующих развитие теории, был и остается широкий спектр приложений. С первых шагов инженерной деятельности человечество широко использует стержни в качестве элементов конструкций. В строительстве это балки, колонны, арки, элементы ферм и каркасов высотных зданий. Стержни являются основными несущими элементами в конструкциях кораблей, самолетов, ракет. Они используются в качестве волноводов и резонаторов в современных устройствах и приборах, в качестве образцов при исследовании физико-механических свойств различных материалов. Лопасти винтов самолетов и вертолетов, сверла, винтовые пружины, камертон — все это стержни.

Важнейшей проблемой теории стержней является формулировка различных вариантов краевых задач, оценка области их применимости и развитие аналитических и численных методов их решения. Этой проблеме посвящены сотни работ. Достаточно подробные обзоры имеющейся литературы содержатся в [15, 35, 36, 44, 62]¹⁾.

Можно выделить два основных направления в развитии теории стержней, особенно в той ее части, которая касается вывода определяющих соотношений. Первое направление берет свое начало в работах Якова Бернулли и основано на априорном принятии гипотез относительно напряженно-деформированного состояния стержня. По-видимому, первая четкая формулировка гипотез классической теории стержней принадлежит Сен-Венану [60]. При таком подходе задача определения напряженно-деформированного состояния стержней сводится к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные математические модели принято называть *одномерными*. Однако уже Кулон понимал (в его эпоху построение классической теории еще не было завершено), что теория изгиба Бернулли–Эйлера применима для достаточно тонких призматических тел, у которых длина существенно больше характерного линейного размера поперечного сечения. Поэтому уже в XIX веке делаются первые попытки построения уточненной теории изгиба для коротких стержней, позволяющей учесть влияние дополнительных факторов на напряженно-деформированное состояние.

Второе направление связано с развитием методов интегрирования трехмерных уравнений теории упругости. Начало этого направления связано с именами выдающихся французских математиков и механиков Навье, Коши и особенно Сен-Венана. Первые двое совместно с Пуассоном являются основоположниками математической теории упругости. Именно Коши принадлежит первая попытка исследовать задачу кручения стержня с прямоугольным поперечным сечением на основе уравнений теории упругости. Из построенного им приближенного решения вытекает, что поперечные сечения не остаются плоскими. Этот результат был использован Сен-Венаном для построения более полной теории кручения и изгиба призматических стержней. В основе этой теории лежит полуобратный метод построения решений трехмерных уравнений теории упругости и «принцип упругой равнозначности статически эквивалентных систем сил». Более общая формулировка этого принципа, названного *принципом Сен-Венана*, была дана учеником Сен-Венана Буссинеском. Как показывает дальнейшая история развития теории упругости, полуобратный метод и принцип Сен-Венана стали важным инструментом исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел. Историческое значение работы [82, 83] состоит еще и в том, что впервые появилась возможность провести анализ классической теории кручения и изгиба стержней на

¹⁾ Елисеев В. В. Одномерные и трехмерные задачи в механике упругих стержней: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Л., 1991. — 300 с.

основе трехмерных уравнений теории упругости. В частности, были окончательно решены проблемы определения жесткости на кручение прямолинейного стержня с некруговым поперечным сечением, а определение касательных напряжений при кручении и изгибе поперечной силой сведено к решению двумерных задач Неймана. Успех в применении полуобратного метода для исследования напряженно-деформированного состояния цилиндра во многом был предопределен тем, что напряжения на площадках, параллельных образующей, в решении Сен-Венана равны нулю. Это обусловлено относительной простотой формы тела. Попытки применения полуобратного метода к телам более сложной формы оказались менее плодотворными.

Принцип Сен-Венана привлекал внимание многих отечественных и зарубежных ученых. Его обоснованию посвящены работы [4, 50, 70, 84] и др. Обзор более ранних работ содержится в [23]. Однако следует заметить, что этот принцип не является универсальным и в ряде случаев требует существенной корректировки. Примеры, иллюстрирующие это утверждение, можно найти в [2, 71].

Основное содержание настоящей книги посвящено построению и анализу решений Сен-Венана для естественно закрученного стержня, винтовой пружины, части кругового кольца и цилиндрического стержня с винтовой анизотропией. Все эти тела объединены термином *псевдоцилиндры*. Для достижения основной цели широко используется метод однородных решений, спектральная теория операторов, асимптотические методы. Эти методы показали свою эффективность в теории пластин и оболочек при исследовании проблемы предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным [1, 3, 11, 12].

В теории стержней истоки метода однородных решений следует искать в работах Похгаммера [80], Кри [76] и В. К. Проконова [58]. Широкое развитие этот метод получил в связи с анализом волновых полей в цилиндрических телах. Достаточно подробные обзоры литературы по его применению имеются в [13, 18]. В книге [13] также дается современное изложение метода однородных решений для цилиндрических тел из произвольного анизотропного материала.

Впервые построение решений Сен-Венана для цилиндра с произвольным поперечным сечением на основе метода однородных решений было осуществлено в работе [41]. В ней было показано, что эти решения являются линейной комбинацией двенадцати элементарных решений, соответствующих двенадцатикратному нулевому собственному значению спектральной задачи на сечении, которая получается в результате разделения переменных. Ранее аналогичный подход был применен в [11, 68]. В этих работах при исследовании трехмерной задачи для поперечно неоднородной плиты было показано, что так называемые бигармонические решения, с одной стороны, по своим интегральным свойствам являются аналогом решений Сен-Венана, с другой — элементарными решениями, соответствующими кратным нулевым собственным значениям двух спектральных задач.

Излагаемый ниже материал преследует следующие цели:

- на примере цилиндра ознакомить читателя с прямым методом построения решений Сен-Венана, определить их место в точном решении, дать строгое математическое обоснование принципу Сен-Венана и показать условность его классической формулировки на конкретных примерах;
- на примере цилиндра описать новый проекционный метод построения уточненных прикладных теорий стержней и показать, как с помощью асимптотического метода можно получить оценку точности решений;
- опираясь на новый подход, свести построение решений Сен-Венана для псевдоцилиндров к двумерным, а в случае цилиндра с винтовой анизотропией к одномерным краевым задачам;
- показать возможности метода на примере задач о дислокациях Вольтерра в круговом замкнутом кольце с произвольным сечением прутка.

Глава 1

ОСНОВЫ МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

§ 1. Операторная форма записи уравнений теории упругости

На данном этапе будем рассматривать стационарные колебания упругого цилиндра (призмы), заключенного в объем $V = S \times [0, L]$; здесь S — поперечное сечение цилиндра, L — длина цилиндра, ∂S — граница S , $\Gamma = \partial S \times L$ — боковая поверхность цилиндра. Свяжем с этим телом декартову систему координат x_1, x_2, x_3 . Ось $x_3 = x$ параллельна образующей цилиндра, проходит через геометрические центры тяжести сечения, оси x_1 и x_2 направлены по главным осям инерции сечения. Выбранная ориентация системы координат связана лишь с некоторыми удобствами при исследовании поведения изотропного цилиндра и не имеет принципиального значения.

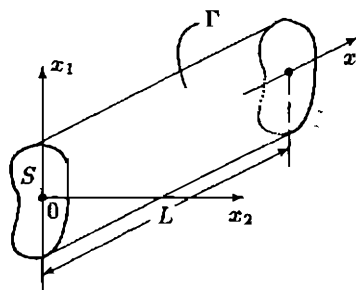


Рис. 1

Материал цилиндра будем считать изотропным с механическими характеристиками ρ, μ, ν , где ρ — плотность материала, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Считая, что все полевые характеристики пропорциональны $e^{-i\omega t}$ (ω — круговая частота, t — время), обозначим через $u = \{u_k\}$ амплитуду вектора смещений, $\hat{e} = \{e_{kl}\}$ — амплитуду тензора деформаций, $\hat{\sigma} = \{\sigma_{kl}\}$ — амплитуду тензора напряжений.

Обозначим через

$$\sigma_k = \sigma_{1k} \dot{i}_1 + \sigma_{2k} \dot{i}_2 + \sigma_{3k} \dot{i}_3$$

вектор напряжений на площадках с нормалью, параллельной орту декартовой системы координат $\dot{i}_k$. Используя введенные обозначения, обобщенный закон Гука запишем в следующем виде:

$$\sigma_k = \mu (B_k u + A_{k3} \partial u), \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2(1+\kappa) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\kappa) \end{vmatrix}, & A_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 2\kappa & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & A_{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$A_{ij} = A_{ji}^*, \quad B_k = A_{k1} \partial_1 + A_{k2} \partial_2, \quad \kappa = \frac{\nu}{1-2\nu}.$$

Здесь и ниже индекс * используется для обозначения сопряженных матриц и операторов (в данном случае A_{ij}^* — транспонированная матрица A_{ij}); греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские — 1, 2, 3.

Уравнение стационарных колебаний

$$\partial_\alpha \sigma_\alpha + \partial_3 \sigma_3 + \rho \omega^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (1.3)$$

после подстановки в него (1.1) запишем в следующем операторном виде относительно вектора $\mathbf{u}$:

$$L(\partial, \omega) \mathbf{u} \equiv -\partial^2 C \mathbf{u} - \partial B \mathbf{u} + A_\omega \mathbf{u} = \mu^{-1} \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

здесь $\mathbf{F}$ — вектор объемных сил,

$$\begin{aligned} M &= A_{33}, \quad B = B_3 - B'_3, \quad B'_3 = -\partial_1 A_{31}^* - \partial_2 A_{32}^*, \\ B'_3 &= -B_3^*, \quad A_\omega = A - \rho \mu^{-1} \omega^2, \quad A = -\partial_\alpha \partial_\beta A_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, т. е.

$$n_\alpha \sigma_\alpha \Big|_\Gamma = 0, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ — единичная внешняя нормаль к Γ .

Подставив в условие (1.6) выражение для σ_α через формулы (1.1), представим также в операторном виде условия отсутствия напряжений на боковой поверхности цилиндра:

$$M(\partial) \mathbf{u} \equiv (\partial G + E) \mathbf{u} \Big|_\Gamma = 0. \quad (1.7)$$

Здесь

$$G = n_\alpha A_{3\alpha}^*, \quad E = n_\alpha \partial_\beta A_{\alpha\beta}.$$

Будем рассматривать u как вектор-функцию $u(x)$ со значениями в гильбертовом пространстве $H = L_2(S)$ со скалярным произведением

$$(u_1, u_2) = \int_S u_1(x) \overline{u_2(x)} dS = \int_S u_{k1} \overline{u_{k2}} dS. \quad (1.8)$$

Здесь и далее в выражениях a_{kj} первый индекс обозначает номер проекции, $\overline{a_{kj}}$ — комплексно-сопряженная величина.

Уравнение (1.4) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по переменной x с постоянными операторными коэффициентами, а граничное условие (1.7) — как уравнение связи. В случае, когда $F = 0$, будет использоваться единая форма записи этих соотношений:

$$L_1(\partial, \omega) u = 0, \quad L_1(\partial, \omega) u \equiv \{L(\partial, \omega) u, M(\partial) u\}. \quad (1.9)$$

Наряду с уравнением (1.9) будем использовать эквивалентную форму уравнений стационарных колебаний в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Введем расширенный шестикомпонентный вектор

$$w = \{u, \sigma\}, \quad (1.10)$$

где

$$\sigma = \mu^{-1} \sigma_3 = C \partial u + B_3 u. \quad (1.11)$$

Используя (1.11), выразим ∂u через u и σ :

$$\partial u = -C^{-1} B_3 u + C^{-1} \sigma. \quad (1.12)$$

Выражая с помощью (1.1), (1.12) σ_α через u , σ и подставляя затем в уравнение (1.3), получаем

$$\partial \sigma + B'_3 C^{-1} B_3 u - A_\omega u - B'_3 C^{-1} \sigma = \mu^{-1} F. \quad (1.13)$$

Объединив (1.12) и (1.13), получаем операторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно w

$$\partial w - T_0 w = K, \quad (1.14)$$

$$T_0 = (T_{\alpha\beta}), \quad K = \{0, \mu^{-1} F\}, \quad T_{11} = -C^{-1} B_3,$$

$$T_{12} = -C^{-1}, \quad T_{21} = -B'_3 C^{-1} B_3 + A_\omega, \quad T_{22} = B'_3 C^{-1}.$$

Граничное условие (1.7) запишется в виде

$$Z w = 0, \quad (1.15)$$

$$Z = (Z_{\alpha\beta}), \quad Z_{11} = Z_{12} = 0, \quad Z_{21} = -G C^{-1} B_3 + E, \quad Z_{22} = G C^{-1}.$$

Таким образом, в гильбертовом пространстве $H_1 = H \oplus H$ шестикомпонентных вектор-функций $v = \{a, b\}$ со скалярным произведением

$$(v_1, v_2)_1 = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) \quad (1.16)$$

на основании дифференциальной формы T_0 и граничного условия (1.14) определим оператор T и запишем уравнения стационарных колебаний в следующей форме:

$$\partial w - Tw = K, \quad Tw = \{T_0 w, Zw\} = 0. \quad (1.17)$$

Запись задач в форме (1.9) и (1.17) удобна тем, что позволяет перенести ряд методов исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений на системы уравнений в частных производных.

§ 2. Однородные решения и их свойства

Однородным решением будем называть любую вектор-функцию u , удовлетворяющую уравнению (1.4), а также вектор-функцию $w(x)$, удовлетворяющую уравнению (1.17) при условии $F = 0$ ($K = 0$). Иными словами, в данном случае однородным является любое решение однородных уравнений теории упругости, удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на боковой поверхности цилиндра.

Будем отыскивать решение уравнения (1.9) в виде

$$u(x) = e^{\gamma x} a(x_1, x_2). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.9), получаем спектральную задачу на сечении цилиндра

$$L_1(\gamma, \omega) a = 0. \quad (2.2)$$

Некоторые общие свойства множества собственных значений $\{\gamma_k\}$ и соответствующего множества собственных и присоединенных векторов описаны в [10, 13, 41]. Ниже они приведены в соответствии с введенной системой обозначений.

Если γ_s — простое собственное значение (с.з.) задачи (2.2), a_s — соответствующий ему собственный вектор (с.в.), то элементарным решением уравнения (1.9), отвечающим с.з. γ_s , называется вектор-функция вида

$$u_s(x) = e^{\gamma_s x} a_s(x_1, x_2). \quad (2.3)$$

Элементарное однородное решение уравнения (1.17) представляет собой вектор-функцию

$$w_s(x) = e^{\gamma_s x} v_s(x_1, x_2), \quad (2.4)$$

причем собственные значения и собственные векторы определяются при решении спектральной задачи

$$Tv - \gamma v = 0. \quad (2.5)$$

Задачи (2.2) и (2.5) эквивалентны, а собственные вектор-функции $\mathbf{a}_s$ и $\mathbf{v}_s$ связаны соотношением

$$\mathbf{v}_s = \{\mathbf{a}_s, (\gamma_s C + B_3)\mathbf{a}_s\}. \quad (2.6)$$

Каждому элементарному решению (2.3) (или (2.4)) соответствует нормальная волна (мода)

$$\mathbf{U}_s(x, t) = \mathbf{a}_s e^{\gamma_s x - i\omega t}, \quad \mathbf{W}_s(x, t) = \mathbf{v}_s e^{\gamma_s x - i\omega t}.$$

Здесь $k_s = -i\gamma_s$ — волновое число.

Пусть γ_s — N -кратное собственное значение задачи (2.2), и пусть $\mathbf{a}_{0,s}^j$ ($j = 1, \dots, n < N$) — множество линейно независимых собственных векторов, соответствующих γ_s . Допустим, что каждому с.в. $\mathbf{a}_{0,s}^j$ соответствует своя система присоединенных векторов $\mathbf{a}_{l,s}^j$ ($l = 1, \dots, p_j$). Системы векторов $\{\mathbf{a}_{l,s}^j\}_{l=0}^{p_j}$ называют *жордановыми цепочками*. Множество элементарных решений уравнения (1.9), соответствующих кратному с.з. γ_s , состоит из следующих вектор-функций:

$$\mathbf{u}_s^j(x) = e^{\gamma_s x} \left[\frac{x^t}{t!} \mathbf{a}_{0,s}^j + \frac{x^{t-1}}{(t-1)!} \mathbf{a}_{1,s}^j + \dots + \mathbf{a}_{t,s}^j \right], \quad t = 0, \dots, p_s^j. \quad (2.7)$$

Всего таких элементарных решений, отвечающих кратному с.з. γ_s , будет $p_s^1 + p_s^2 + \dots + p_s^n = N$, где N — алгебраическая кратность, а n — собственная кратность с.з. γ_s .

Уравнения для определения присоединенных векторов получаются при подстановке (2.7) в уравнение (1.9). В результате имеем следующую рекуррентную систему задач для определения $\mathbf{a}_{l,s}^j$, $l = 0, \dots, p_s^j$:

$$L_1(\gamma_s, \omega) \mathbf{a}_{0,s}^j = 0, \quad L_1(\gamma_s, \omega) \mathbf{a}_{l,s}^j = \{\mathbf{F}_{l,s}^j, \mathbf{f}_{l,s}^j\}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F}_{1,s}^j = (B + 2\gamma_s C) \mathbf{a}_{0,s}^j,$$

$$\mathbf{F}_{2,s}^j = (B + 2\gamma_s C) \mathbf{a}_{1,s}^j + C \mathbf{a}_{0,s}^j,$$

.....

$$\mathbf{F}_{p_s^j,s}^j = (B + 2\gamma_s C) \mathbf{a}_{p_s^j-1,s}^j + C \mathbf{a}_{p_s^j-2,s}^j,$$

$$\mathbf{f}_{l,s}^j = -G \mathbf{a}_{l-1,s}^j|_{\partial S}.$$

Систему собственных и присоединенных векторов $\{\mathbf{a}_{l,s}^j\}$, $l = 0, \dots, p_j$ принято называть *жордановой цепочкой*.

Для разрешимости задач (2.8) необходимо и достаточно выполнение условий

$$(\mathbf{F}_{l,s}^j, \mathbf{a}_{0,s}^j) + (\mathbf{f}_{l,s}^j, \mathbf{a}_{0,s}^j)_{\partial S} = 0. \quad (2.9)$$

Здесь

$$(f, a)_{\partial S} = \int_{\partial S} f \bar{a} ds.$$

Число $p_j^j + 1$ (длина j -й жордановой цепочки) определяется условием

$$d_s^j = (F_{p_j^j, s}^j, a_{0, s}^j) \neq 0, \quad (2.10)$$

что эквивалентно неразрешимости соответствующей краевой задачи.

Элементарные решения уравнения (1.17) строятся аналогично и имеют вид

$$w_s^j(x) = e^{\gamma_s x} \left[\frac{x^t}{t!} v_{0, s}^j + \frac{x^{t-1}}{(t-1)!} v_{1, s}^j + \dots + v_{t, s}^j \right]. \quad (2.11)$$

Собственный и присоединенный векторы определяются решением системы задач

$$T v_{0, s}^j = \gamma_s v_{0, s}^j, \quad T v_{l, s}^j = \gamma_s v_{l, s}^j + v_{l-1, s}^j, \quad l = 1, \dots, p_j^j, \quad (2.12)$$

где

$$v_{l, s}^j = \{a_{l, s}^j, b_{l, s}^j\}.$$

Компоненты векторов $v_{0, s}^j$ по-прежнему выражаются через векторы $a_{0, s}^j$ соотношением (2.6), а присоединенные векторы $v_{l, s}^j$ выражаются через систему векторов $\{a_{l, s}^j\}_{l=1}^{p_j^j}$ следующим образом:

$$v_{l, s}^j = \{a_{l, s}^j, (\gamma_s C + B_3) a_{l, s}^j + C a_{l-1, s}^j\}, \quad l = 1, \dots, p_j^j. \quad (2.13)$$

Введя сквозную нумерацию, обозначим через $\{u_m(x)\}$ ($\{w_m(x)\}$) множество всех элементарных решений уравнения (1.4) ((1.17)). В [13] сформулирована и доказана теорема о полноте этой системы, из которой следует, что любое однородное решение можно искать в виде ряда

$$u(x) = \sum_m C_m u_m(x). \quad (2.14)$$

Здесь C_m — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий на торцах цилиндра $x = 0$, $x = L$. Там же дается метод сведения краевых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_m . При получении этих систем используются соотношения обобщенной ортогональности системы собственных и присоединенных векторов.

2. Система собственных и присоединенных векторов оператора T не обладает обычной ортогональностью, поскольку оператор не является самосопряженным. Однако для этой системы справедливы некоторые соотношения обобщенной ортогональности. В [13] даются

подробные доказательства различных соотношений обобщенной ортогональности. Воспроизведем некоторые из них здесь в несколько измененной форме, которая и будет использоваться ниже.

Рассмотрим оператор T^* , сопряженный к T :

$$T^* \mathbf{v} = \{T'_0 \mathbf{v}, Z' \mathbf{v} = 0\}, \quad (2.15)$$

$$T'_0 = (T'_{\alpha\beta}), \quad Z' = (Z'_{\alpha\beta}),$$

$$T'_{11} = -T_{22}, \quad T'_{12} = T_{21}, \quad T'_{21} = T_{12}, \quad T'_{22} = -T_{11},$$

$$Z'_{11} = Z'_{12} = 0, \quad Z'_{21} = -Z_{22}, \quad Z_{22} = Z_{21},$$

$T_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}$ определены соотношениями (1.14), (1.15).

Введем оператор

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{vmatrix} = -J^* = -J^{-1},$$

где I — единичная (3×3) -матрица. J принято называть симплектической единицей.

Утверждение 2.1. Оператор T является гамильтоновым, т. е.

$$JT = -T^* J. \quad (2.16)$$

Доказательство. С учетом конкретного вида оператора T и самосопряженности операторов B_3, C^{-1}, A_ω имеем

$$\begin{aligned} (JT \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_1 &= \\ &= -(T_{21} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - (T_{22} \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) + (T_{11} \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (T_{12} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \\ &= ((B'_3 C^{-1} B_3 - A_\omega) \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - (B'_3 C^{-1} \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) - \\ &- (C^{-1} B_3 \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (C^{-1} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1, (B'_3 C^{-1} B_3 - A_\omega) \mathbf{a}_2) - \\ &- (\mathbf{b}_1, C^{-1} B_3 \mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_1, B'_3 C^{-1} \mathbf{b}_2) + (\mathbf{b}_1, C^{-1} \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(JT \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, (JT)^* \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, T^* J^* \mathbf{v}_2) = -(\mathbf{v}_1, T^* J \mathbf{v}_2).$$

Следовательно,

$$-T^* J = \begin{vmatrix} B'_3 C^{-1} B_3 - A_\omega & -B'_3 C^{-1} \\ -C^{-1} B_3 & C^{-1} \end{vmatrix},$$

т. е. $JT = -T^* J$, что и требовалось доказать.

Так как оператор T является гамильтоновым, то его собственные значения расположены симметрично в комплексной плоскости γ , т. е.

каждому с.з. γ_k , расположенному в первом квадранте, соответствуют еще три с.з.: $\gamma_{-k} = -\gamma_k$, $\bar{\gamma}_k$, $-\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_{-k}$. Следовательно, оператор T^* будет иметь тот же самый спектр (прямое доказательство этого свойства спектра приведено в [13]).

Утверждение 2.2. Пусть γ_k, γ_l — произвольные с.з. оператора T , $\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$(\mathbf{v}_k, J\mathbf{v}_l)_1 = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_k \neq -\bar{\gamma}_l. \quad (2.17)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$T\mathbf{v}_k = \gamma_k \mathbf{v}_k, \quad T\mathbf{v}_l = \gamma_l \mathbf{v}_l.$$

Далее, с учетом (2.16) получаем

$$\begin{aligned} (T\mathbf{v}_k, J\mathbf{v}_l)_1 &= (\mathbf{v}_k, T^* J\mathbf{v}_l)_1 = -(\mathbf{v}_k, J T\mathbf{v}_l)_1 = \\ &= -(\mathbf{v}_k, \gamma_l J\mathbf{v}_l)_1 = -\bar{\gamma}_l (\mathbf{v}_k, J\mathbf{v}_l)_1 = \gamma_k (\mathbf{v}_k, J\mathbf{v}_l)_1. \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает соотношение (2.17.)

Утверждение 2.3. Пусть γ_k, γ_l — кратные с.з. $\{\mathbf{v}_{s,k}\}, \{\mathbf{v}_{t,l}\}$ ($s = 0, \dots, p_k, t = 0, \dots, p_l$) — соответствующие им жордановы цепочки. Тогда для любой пары корневых векторов имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$(\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_k \neq -\bar{\gamma}_l. \quad (2.18)$$

Доказательство. Рассмотрим различные скалярные произведения $(T\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1, (\mathbf{v}_{s,k}, J T\mathbf{v}_{t,l})_1$. Преобразуем их, используя соотношения (2.12), (2.16), следующим образом:

$$\begin{aligned} (T\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 &= \gamma_k (\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 + (\mathbf{v}_{s-1,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1, \\ (\mathbf{v}_{s,k}, J T\mathbf{v}_{t,l})_1 &= \bar{\gamma}_k (\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 + (\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t-1,l})_1 = (-T\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1. \end{aligned}$$

Складывая первое равенство со вторым, получаем

$$(\gamma_k + \bar{\gamma}_l)(\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 = -(\mathbf{v}_{s-1,k}, J\mathbf{v}_{t,l})_1 - (\mathbf{v}_{s,k}, J\mathbf{v}_{t-1,l})_1. \quad (2.19)$$

Пусть $s = 1, t = 0$; тогда из соотношений (2.17), (2.19) вытекает

$$(\mathbf{v}_{1,k}, J\mathbf{v}_{0,l})_1 = 0.$$

Далее по индукции получаем доказательство соотношения (2.18).

Рассмотрим отдельно частный случай, когда γ_s — чисто мнимое или нулевое кратное значение и ему соответствует одна или несколько жордановых цепочек $\{\mathbf{v}_{l,s}^j\}_{j=0}^{p_l^s}$ ($j = 1, \dots, n$). В рассматриваемых ниже задачах совокупность элементарных решений, которые соответствуют таким собственным значениям, формируют решения Сен-Венана.

Из условий разрешимости задач (2.9) и тождества (2.19) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Пусть γ_s — кратное мнимое (или нулевое) собственное значение оператора T , и пусть $\{v_{l,s}^j\}_{l=0}^{p_s^j}$ — одна из соответствующих ему жордановых цепочек. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$(v_{sk}^j, Jv_{qk}^j)_1 = 0, \quad \text{если } s + q < p_j, \quad (2.20)$$

$$(v_{s+m,k}^j, Jv_{q-m,k}^j)_1 = (-1)^m d_s^j, \quad \text{если } s + q = p_s^j. \quad (2.21)$$

Здесь

$$d_s^j = (v_{p_j}^j, Jv_0^j)_1 = -(a_{p_j}^j, b_0^j) + (b_{p_j}^j, a_0^j).$$

В дальнейшем d_s^j будем называть инвариантом жордановой цепочки.

Описанное выше свойство обобщенной ортогональности (в некоторых работах используется термин *J-ортогональность*) по сути является известным свойством биортогональности систем собственных и присоединенных векторов $\{v_l\}$ оператора T и систем собственных и присоединенных векторов $\{z_k\}$ сопряженного оператора T^*

$$(v_l, z_k)_1 = d_k \delta_{kl}. \quad (2.22)$$

Действительно, пусть v_l — собственный вектор оператора T , соответствующий с.з. γ_l , а z_k — с.в. оператора T^* , соответствующий с.з. γ_k , тогда

$$Tv_l = \gamma_l v_l, \quad T^* z_k = \gamma_k z_k.$$

Используя (2.16), запишем второе равенство в виде

$$JTJz_k = \gamma_k z_k.$$

Обозначим

$$Jz_k = v'_k, \quad z_k = J^{-1}v'_k = -Jv'_k, \quad JTv'_k = \gamma_k z_k, \\ Tv'_k = \gamma_k J^{-1}z_k, \quad Tv'_k = -\gamma_k Jz_k, \quad Tv'_k = -\gamma_k v'_k.$$

Из последнего равенства следует, что $v'_k = Jz_k = v_{-k}$ является с.в. оператора T , соответствующим с.з. $-\gamma_k = \gamma_{-k}$.

Таким образом, соотношения (2.17), (2.18) с учетом того, что

$$Jv_k = -z_k, \quad (2.23)$$

представляют собой свойство биортогональности систем собственных и присоединенных векторов $\{v_l\}$ оператора T и систем собственных и присоединенных векторов $\{z_k\}$ оператора T^* .

§ 3. Тензор Грина для бесконечного цилиндра

В ряде работ рассматривалось построение тензора Грина для бесконечного упругого цилиндра в виде разложений по однородным элементарным решениям [8, 57]. Однако при этом по сути не рассматривался случай, когда спектральная задача на сечении имеет кратные

точки спектра. Тем самым оставался открытым вопрос о построении тензора Грина в случае критических частот и случай статической задачи, поскольку у последней нулевое с.з. имеет алгебраическую кратность, равную 12. Предложенный в [13] метод позволяет построить тензор Грина для упругого цилиндра с учетом кратных с.з.

В дополнение к описанным в §2 свойствам спектра оператора T отметим, что при всяком ограниченном значении частоты ω допускается разбиение спектра на подмножества $\Lambda = \Lambda^0 \cup \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, где Λ^0 — конечное симметричное относительно $\gamma = 0$ множество чисто мнимых с.з.; $\gamma_m^\pm = \pm \gamma_m$, $m = 1, 2, \dots, N$ (к этому подмножеству будем относиться и с.з. $\gamma_0 = 0$); Λ^+ , Λ^- — неограниченные множества комплексных с.з. γ_k^+ , γ_k^- ($\operatorname{Re} \gamma_k^- > 0$, $\operatorname{Re} \gamma_k^+ < 0$), при этом $\gamma_k^- = -\gamma_k^+$.

Случаю, когда групповая скорость $c_g = \omega'(\gamma_s) = 0$, всегда соответствует кратное чисто мнимое или нулевое с.з.

Если обозначить через W множество элементарных однородных решений вида (2.4) и (2.11), то при любой структуре спектра имеет место разбиение $W = W^+ \cup W^-$ [14].

Подмножества W^+ и W^- определяются следующими условиями.

В случае кратного нулевого и простого или кратного чисто мнимого с.з. γ_m элементарные решения разделяются по признаку энергетического излучения:

$$w_m \in W^+, \quad \text{если } P_m > 0, \quad w_m \in W^-, \quad \text{если } P_m < 0,$$

где

$$P_m = \frac{i\omega}{2} (Jw_m, w_m)_1$$

— средний за период поток энергии через поперечное сечение цилиндра, который переносит мода w_m .

В случае комплексных с.з. γ_k

$$w_k \in W^+, \quad \text{если } \gamma_k = \gamma_k^+, \quad w_k \in W^-, \quad \text{если } \gamma_k = \gamma_k^-.$$

Ниже $w_l = w_l^+(w_l^-)$, если $w_l \in W^+(W^-)$.

Учитывая, что $v_l^\pm = w_l^\pm(0) = \{a_l^\pm, b_l^\pm\}$ — следы элементарных решений в сечении $x = 0$, на основании свойств обобщенной ортогональности имеем

$$\begin{aligned} (Jv_m^\pm, v_q^\pm) &= d_m^\pm \delta_{sq}, \quad \text{если } \gamma_m^\pm, \gamma_q^\pm \in \Lambda^0, \\ (Jv_k^\pm, v_l^\mp) &= d_k^\pm \delta_{kl}, \quad \text{если } \gamma_k^\pm, \gamma_l^\pm \in \Lambda^\pm, \\ (Jv_m, v_k^\pm) &= 0, \quad \text{если } \gamma_m \in \Lambda^0, \gamma_k \in \Lambda^\pm. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\operatorname{Im} \gamma_m^+ > 0$, $\operatorname{Im} \gamma_m^- < 0$, $d_m^- = -d_m^+$, $d_k^- = \overline{d_k^+}$.

Рассмотрим область $V_\infty = S \times (-\infty, \infty)$, занятую идеальной упругой средой. Вектор-функцией Грина назовем решение задачи (1.9)

в области V_∞ для сосредоточенной в точке $M'(x'_1, x'_2, 0)$ силы F_0 . При этом

$$F = F_0 \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x). \quad (3.2)$$

Построим решение задачи (1.17), когда правая часть $K = \{0, F\}$, а F определяется выражением (3.2).

Обозначим через $G(x) = G(x_1, x_2, x, x'_1, x'_2, 0)$ вектор-функцию Грина рассматриваемой задачи. Будем отыскивать ее в виде

$$G(x) = \begin{cases} G^+(x) = \sum_l A_l^+ w_l^+(x), & x > 0, \\ G^-(x) = \sum_l A_l^- w_l^-(x), & x < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Так как правая часть уравнения (1.17) пропорциональна $\delta(x)$ (см. (3.2)), то в сечении $x = 0$ решения претерпевает скачок, и поэтому

$$G(+0) - G(-0) = \sum_l A_l^+ w_l^+(+0) - \sum_l A_l^- w_l^-(-0) = K_0, \quad (3.4)$$

$$K_0 = \{0, P_0\}, \quad P_0 = \mu^{-1} F_0 \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2).$$

Используя соотношения обобщенной ортогональности (2.17), (2.18), (2.20), получаем:

в случае, когда $\gamma_m \in \Lambda^0$ (чисто мнимое с. з.),

$$A_m^\pm = \frac{\bar{a}_m^\pm(x'_1, x'_2) F_0}{\mu d_m^\pm}, \quad m = 1, \dots, N; \quad (3.5)$$

в случае, когда $\gamma_k^\pm \in \Lambda^\pm$ (комплексное с. з.),

$$A_k^\pm = \frac{\bar{a}_k^\mp(x'_1, x'_2) F_0}{\mu d_k^\pm}. \quad (3.6)$$

Здесь $a_m^\pm(x'_1, x'_2) = u_m^\pm(x'_1, x'_2, 0)$.

Подставляя (3.5), (3.6) в выражение для вектор-функции Грина (3.3), получим

$$G^\pm(x) = G_S^\pm(x) + G_P^\pm(x),$$

$$G_S^\pm(x) = \pm \sum_m \frac{1}{d_m^\pm} (a_m^\pm(x'_1, x'_2) F_0) w_m^\pm(x), \quad (3.7)$$

$$G_P^\pm(x) = \pm \sum_k \frac{1}{d_k^\pm} (\bar{a}_k^\mp(x'_1, x'_2) F_0) w_k^\pm(x).$$

Введем тензор Грина

$$\hat{G}(x, x') = G_{ij}(x, x') i_i \otimes i_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $G_{ij}(x, x')$ — проекция смещения точки $M(x_1, x_2, x)$ на ось x_i , вызванного единичной силой, направленной вдоль оси x_j и приложенной в точке M' . Делая в (3.6) замену $x = x - x'$ (точкой приложения

силы становится точка с координатами (x'_1, x'_2, x') и выделяя в (3.7) u -компоненту, получим следующие выражения для компонент тензора Грина:

$$G_{ij}^{\pm} = \pm \sum_m \frac{1}{d_m^{\pm}} u_m^{\pm} \bar{a}_{mj}^{\pm}(x'_1, x'_2) \pm \sum_k \frac{1}{d_k^{\pm}} u_k^{\pm} \bar{a}_{kj}^{\mp}(x'_1, x'_2). \quad (3.8)$$

Вектор-функция Грина выражается через тензор Грина $\hat{G}$ следующими соотношениями:

$$G(x, x') = \begin{cases} \hat{G}^+(x, x') F_0, & x > x', \\ \hat{G}^-(x, x') F_0, & x < x', \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\hat{G}^{\pm}(x, x') = \pm \sum_m \frac{1}{d_m^{\pm}} u_m^{\pm}(x) \otimes \bar{a}_m^{\pm}(x') \pm \sum_k \frac{1}{d_k^{\pm}} u_k^{\pm}(x) \otimes \bar{a}_k^{\mp}(x').$$

Глава 2

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В этой главе и далее будет использоваться ряд специальных терминов, требующих предварительного разъяснения:

задача Сен-Венана — трехмерная задача теории упругости для цилиндра (псевдоцилиндра) при отсутствии напряжений на боковой поверхности;

элементарные решения Сен-Венана (ЭРСВ) — группа двенадцати элементарных решений, одна половина которых описывает поступательные перемещения и малые повороты цилиндра как твердого тела, другая — напряженное состояние в поперечном сечении цилиндра с главным вектором и главным моментом, отличными от нуля;

решения Сен-Венана — классические решения задач о растяжении, чистом изгибе, кручении и об изгибе перерезывающей силой призмы (цилиндра), которые впервые были построены Сен-Венаном.

Сен-Венан для построения решений [60], получивших в последствии его имя, использовал приближенный метод, который получил название *полуобратный*. Построенные им решения удовлетворяют граничным условиям на торцах только в интегральном смысле. Опираясь на опыт и гидродинамические аналогии, Сен-Венан сформулировал принцип, вошедший в историю науки как *принцип Сен-Венана*. В процессе развития математических методов решения задач теории упругости этот принцип не раз подвергался критическому анализу, и его строгому математическому обоснованию посвящено немало работ [4, 50, 70, 84]. Ниже дается прямой метод построения этих решений, показывается, что они являются линейной комбинацией ЭРСВ, и приводится новое обоснование принципа Сен-Венана.

§ 4. Элементарные решения статической задачи и их интегральные свойства

1. Для построения ЭРСВ рассмотрим смещение цилиндра как твердого тела

$$\begin{aligned}u_1^0 &= a_1^0 + \omega_2 x - \omega_3 x_2, \\u_2^0 &= a_2^0 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x, \\u_3^0 &= a_3^0 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь a_k^0 — компоненты вектора поступательного перемещения, ω_k — компоненты вектора малого поворота. Очевидно, что вектор $\mathbf{u}^0 =$

$= (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ является однородным решением, поскольку удовлетворяет уравнениям равновесия и однородным граничным условиям на боковой поверхности (1.7). Представим его в следующем виде:

$$u^0 = \sum_{l=1}^6 C_l u_l(x). \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_1(x) &= a_0^1, & u_2(x) &= x a_0^1 + a_1^1, & u_3(x) &= a_0^2, \\ u_4(x) &= x a_0^2 + a_1^2, & u_5(x) &= a_0^3, & u_6(x) &= a_0^4, \\ a_0^1 &= \{1, 0, 0\}, & a_1^1 &= \{0, 0, -x_1\}, \\ a_0^2 &= \{0, 1, 0\}, & a_1^2 &= \{0, 0, -x_2\}, \\ a_0^3 &= \{0, 0, 1\}, & a_0^4 &= \{-x_2, x_1, 0\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$C_1 = a_1^0, \quad C_2 = \omega_2, \quad C_3 = a_2^0, \quad C_4 = -\omega_1, \quad C_5 = a_3^0, \quad C_6 = \omega_3.$$

Из представления (4.2), (4.3) следует, что, во-первых, $\gamma_0 = 0$ является собственным значением; во-вторых, ему соответствуют по крайней мере четыре собственных вектора a_0^j , $j = 1, 2, 3, 4$, и, в-третьих, a_1^1, a_1^2 являются присоединенными векторами. Элементарные решения (4.3) составляют только половину системы ЭРСВ, соответствующих γ_0 . Для определения остальных обратимся к построению жордановых цепочек на основе формул (2.8). Для определения присоединенного вектора a_2^1 , полагая в (2.8) $\gamma_s = 0$ и используя выражения (1.2)–(1.4), (4.3), получаем

$$A a_2^1 = F_2^1, \quad E a_2^1 \Big|_{\Gamma} = f_2^1, \quad (4.4)$$

$$F_2^1 = B a_1^1 + C a_0^1 = \{-2\kappa, 0, 0\}, \quad f_2^1 = -G a_1^1 = \{2\kappa n_1 x_1, 2\kappa n_2 x_1, 0\}.$$

Задача (4.4) имеет следующие решения:

$$a_2^1 = \{\psi_1, \psi_2, 0\}, \quad \psi_1 = \frac{\nu}{2} (x_1^2 - x_2^2), \quad \psi_2 = \nu x_1 x_2. \quad (4.5)$$

Для определения присоединенного вектора a_3^1 имеем

$$A a_3^1 = F_3^1, \quad E a_3^1 \Big|_{\Gamma} = f_3^1, \quad (4.6)$$

$$F_3^1 = \{0, 0, 2x_1\}, \quad f_3^1 = \{0, 0, -n_1 \psi_1 - n_2 \psi_2\}.$$

Из (4.6) следует, что

$$a_3^1 = \{0, 0, \theta_1\}, \quad (4.7)$$

$$\theta_1 : \Delta \theta_1 = 2x_1, \quad \partial_n \theta_1 = -n_\alpha \psi_\alpha, \quad \partial_n = n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2. \quad (4.8)$$

Для присоединенного вектора a_4^1 имеем

$$A_0 a_4^1 = F_4^1, \quad E a_4^1|_{\Gamma} = f_4^1, \quad (4.9)$$

$$F_4^1 = \{-(1+2\kappa)\partial_1\theta_1 - \psi_1, \psi_2, 0\}, \quad f_4^1 = \{-2\kappa n_1\theta_1, 0, 0\}. \quad (4.10)$$

Докажем, что задача (4.9) неразрешима, из чего будет следовать, что вектор-функция a_4^1 не существует. Условие разрешимости (2.9) в данном случае сводится к проверке выполнения равенства

$$\int_S F_4^1 a_0^1 dS - \int_S f_4^1 a_0^1 ds = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя в (4.11) выражения (4.10) и (4.3) и переходя от контурного интегрирования к интегралу по площади, получаем

$$\int_S (\partial_1\theta_1 + \psi_1) dS = 0. \quad (4.12)$$

Покажем, что левая часть равенства равна инварианту жордановой цепочки и поэтому не может обратиться в ноль.

Из соотношений (2.20) следует, что инвариант жордановой цепочки

$$d_1 = (v_0^1, Jv_3^1)_{H'} = -(a_3^1, b_0^1)_H + (b_3^1, a_0^1)_H. \quad (4.13)$$

С другой стороны,

$$d_1 = -(v_1^1, Jv_2^1)_{H'} = (a_2^1, b_1^1)_H - (b_2^1, a_1^1)_H. \quad (4.14)$$

Построим цепочку векторов b_s^1 , $s = 0, 1, 2, 3$, опираясь на формулы (2.13). Имеем

$$\begin{aligned} b_0^1 &= 0, \quad b_1^1 = 0, \quad b_2^1 = \{0, 0, -2(1+\nu)x_1\}, \\ b_3^1 &= \{\partial_1\theta_1 + \psi_1, \partial_2\theta_1 + \psi_2, 0\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Определяя инвариант по формулам (4.13), (4.14), получаем

$$\begin{aligned} d_1 &= \int_S (\partial_1\theta_1 + \psi_1) dS = -(b_2^1, a_1^1)_H = \\ &= -2(1+\nu) \int_S x_1^2 dS = -2(1+\nu)I_2 \neq 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где I_2 — момент инерции сечения относительно оси x_2 .

Таким образом, из (4.16) следует, что задача (4.9) неразрешима и $p_1 = 3$. Аналогичным образом определяются элементы остальных жордановых цепочек.

Имеем

$$\begin{aligned}
 a_0^2 &= \{0, 1, 0\}, \quad a_1^2 = \{0, 0, -x_2\}, \quad a_2^2 = \{\psi_2, -\psi_1, 0\}, \quad a_3^2 = \{0, 0, \theta_2\}, \\
 b_0^2 &= b_1^2 = 0, \quad b_2^2 = \{0, 0, -2(1 + \nu)x_2\}, \\
 b_3^2 &= \{\partial_1 \theta_2 + \psi_2, \partial_2 \theta_2 - \psi_1, 0\}, \quad a_0^4 = \{-x_2, x_1, 0\}, \\
 a_1^4 &= \{0, 0, \varphi\}, \quad b_0^4 = 0, \quad b_1^4 = \{\partial_2 \Phi, -\partial_1 \Phi, 0\}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь функции θ_2 , φ , Φ являются решениями следующих задач:

$$\Delta \theta_2 = 2x_2, \quad \partial_n \theta_2 \Big|_{\partial S} = n_1 \psi_2 - n_2 \psi_1, \tag{4.18}$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \partial_n \varphi \Big|_{\partial S} = \frac{1}{2} \partial_s (x_1^2 + x_2^2), \tag{4.19}$$

$$\Delta \Phi = -2, \quad \partial_s \Phi \Big|_{\partial S} = 0, \quad \partial_1 \varphi = \partial_2 \Phi + x_2, \quad \partial_2 \varphi = -\partial_1 \Phi - x_1. \tag{4.20}$$

Эти формулы позволяют построить недостающие шесть элементарных решений.

Приведем окончательный вид этих решений в новых обозначениях, удобных для дальнейших исследований:

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= a_1, & \sigma_l(x) &= 0, \quad l = 1, \dots, 6, \\
 u_2(x) &= xa_1 + a_2, \quad u_3(x) = a_3, \\
 u_4(x) &= xa_3 + a_4, \\
 u_5(x) &= a_5, \quad u_6(x) = a_6, \\
 u_7(x) &= \frac{x^3}{6} a_1 + \frac{x^2}{2} a_2 + xa_8 + a_7, \quad \sigma_7(x) = xb_8 + b_7, \\
 u_8(x) &= \frac{x^2}{2} a_1 + xa_2 + a_8, & \sigma_8(x) &= b_8, \\
 u_9(x) &= \frac{x^3}{6} a_3 + \frac{x^2}{2} a_4 + xa_{10} + a_9, \quad \sigma_9(x) = xb_{10} + b_9, \\
 u_{10}(x) &= \frac{x^2}{2} a_3 + xa_4 + a_{10}, & \sigma_{10}(x) &= b_{10}, \\
 u_{11}(x) &= xa_5 + a_{11}, & \sigma_{11}(x) &= b_{11}, \\
 u_{12}(x) &= xa_6 + a_{12}, & \sigma_{12}(x) &= b_{12}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

В формулах (4.21)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0^1 &= \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1^1 = \{0, 0, -x_1\}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_0^2 = \{0, 1, 0\}, \\
 \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1^2 &= \{0, 0, -x_2\}, \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_0^3 = \{0, 0, 1\}, \\
 \mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_0^4 + x_{02}\mathbf{a}_0^1 - x_{01}\mathbf{a}_0^2 &= \{-x_2 + x_{02}, x_1 - x_{01}, 0\}, \\
 \mathbf{a}_7 = \mathbf{a}_3^1 &= \{0, 0, \theta_1\}, \quad \mathbf{a}_8 = \mathbf{a}_2^1 = \{\psi_1, \psi_2, 0\}, \\
 \mathbf{a}_9 = \mathbf{a}_3^2 &= \{0, 0, \theta_2\}, \quad \mathbf{a}_{10} = \mathbf{a}_2^2 = \{\psi_2, -\psi_1, 0\}, \\
 \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_1^3 &= \{-\nu x_1, -\nu x_2, 0\}, \quad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1^4 = \{0, 0, \varphi\}, \\
 \mathbf{b}_l &= 0, \quad l = 1, \dots, 6,
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_7 = \mathbf{b}_3^1 &= \{\tau_{11}, \tau_{12}, 0\}, \quad \mathbf{b}_8 = \mathbf{b}_2^1 = \{0, 0, -2(1 + \nu)x_1\}, \\
 \mathbf{b}_9 = \mathbf{b}_3^2 &= \{\tau_{21}, \tau_{22}, 0\}, \quad \mathbf{b}_{10} = \mathbf{b}_2^2 = \{0, 0, -2(1 + \nu)x_2\}, \\
 \mathbf{b}_{11} = \mathbf{b}_1^3 &= \{0, 0, 2(1 + \nu)\}, \quad \mathbf{b}_{12} = \mathbf{b}_1^4 = \{\partial_2 \Phi, -\partial_1 \Phi, 0\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \partial_1 \theta_1 + \psi_1, \quad \tau_{12} = \partial_2 \theta_1 + \psi_2, \\
 \tau_{21} &= \partial_1 \theta_2 + \psi_2, \quad \tau_{22} = \partial_2 \theta_2 - \psi_1,
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 x_{01} &= -\frac{1}{d_2} (\mathbf{b}_9, \mathbf{a}_0^4)_H = -\frac{1}{d_2} \int_S (\tau_{21} x_2 - \tau_{22} x_1) dS, \\
 x_{02} &= -\frac{1}{d_1} (\mathbf{b}_7, \mathbf{a}_0^4)_H = \frac{1}{d_1} \int_S (\tau_{11} x_2 - \tau_{12} x_1) dS,
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

$$d_\alpha = -2(1 + \nu)I_\beta; \quad I_\beta = \int_S x_\alpha^2 dS, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta.$$

Прокомментируем приведенные формулы.

Вектор $\mathbf{a}_6$, являющийся линейной комбинацией собственных векторов $\mathbf{a}_0^1$, $\mathbf{a}_0^2$ и $\mathbf{a}_0^4$, сам является собственным. Постоянные x_{01} , x_{02} выбраны так, чтобы выполнялись следующие свойства ортогональности:

$$(\mathbf{b}_{6+t}, \mathbf{a}_l)_H = d_{ll} \delta_{lt}, \quad t, l = 1, \dots, 6, \tag{4.25}$$

которые создают определенные удобства при построении решений краевых задач.

В формулах (4.25)

$$d_{11} = -d_{22} = d_1, \quad d_{33} = -d_{44} = d_2, \quad d_{55} = d_3 = 2(1 + \nu) |S|, \\ d_{66} = d_4 = -2 \int_S x_\alpha \partial_\alpha \Phi dS = 2 \int_S \Phi dS. \quad (4.26)$$

Постоянные x_{01} , x_{02} имеют размерность длины и называются *координатами центра жесткости* [22].

Исследуем характер напряженного состояния, соответствующего каждому элементарному решению $u_m(x)$. Поскольку первые шесть элементарных решений описывают смещение цилиндра как твердого тела, то речь, естественно, пойдет о последних шести решениях.

Прежде всего заметим, что компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, соответствующие каждому элементарному решению, равны нулю. В этом легко убедиться с помощью формул (1.1). Далее, опираясь на формулы (4.21), (4.22), найдем компоненты главного вектора и главного момента напряжений $\mu\sigma_m(x)$, $m = 7, \dots, 12$, в сечении $x = \text{const}$. Будем использовать обозначения Q_{jt} , M_{jt} , где первый индекс означает проекцию, второй $t = m - 6$. Вычисления проведем по формулам

$$Q_{jt}(x) = (\mu\sigma_{6+t}, a_{2j-1})(x) = \mu \int_S \sigma_{jm}(x) dS, \\ M_{1t} = -(\mu\sigma_m, a_4) = \mu \int_S x_2 \sigma_{3m} dS, \\ M_{2t} = (\mu\sigma_m, a_2) = -\mu \int_S x_1 \sigma_{3m} dS, \quad (4.27) \\ M_{3t} = -(\mu\sigma_m, a_0^4) = \mu \int_S (x_1 \sigma_{2m} - x_2 \sigma_{1m}) dS, \\ \sigma_m = \{\sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m}\}.$$

В случае $t = 1$ имеем

$$Q_{11} = \mu \int_S \tau_{11} dS = \mu \int_S (\partial_1 \theta_1 + \psi_1) dS = \mu d_1 = -EI_2, \\ Q_{21} = \mu \int_S \tau_{21} dS = \mu \int_S \partial_2 \theta_1 dS, \quad Q_{31} = 0, \quad (4.28) \\ M_{11} = 0, \quad M_{21} = EI_1 x, \quad M_{31} = \mu \int_S (x_1 \tau_{12} - x_2 \tau_{11}) dS.$$

Докажем, что $Q_{21} = 0$. Для этого умножим уравнение (4.8) на x_2 и проинтегрируем по S . Учитывая, что $\int_S x_1 x_2 dS = 0$, получаем

$$\int_S x_2 \Delta \theta_1 dS = \int_S x_2 \frac{\partial n}{\partial S} \theta_1 ds - \int_S \frac{\partial}{\partial S} \theta_1 dS = 0.$$

Подставляя в контурный интеграл значение $\frac{\partial n}{\partial S} \theta_1$ из граничного условия (4.8), получаем

$$\int_S \frac{\partial}{\partial S} \theta_1 = - \int_S x_2 n_\alpha \psi_\alpha ds = \int_S \frac{\partial}{\partial S} (x_2 \psi_\alpha) dS = \nu \int_S x_1 x_2 dS = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$Q_{13} = 0, \quad Q_{32} = -EI_1, \quad Q_{33} = 0,$$

$$M_{13} = -EI_2 x, \quad M_{23} = 0, \quad M_{33} = \mu \int_S (x_1 \tau_{22} - x_2 \tau_{21}) dS. \quad (4.29)$$

Итак, для выбранных двух элементарных решений ($m = 7, 9$) напряженные состояния эквивалентны перерезывающим силам, изгибающим моментам и крутящим моментам. При этом, если сечение симметрично относительно оси x_1 , то из простых соображений легко получить $M_{31} = 0$; соответственно, если сечение симметрично относительно оси x_2 , то $M_{32} = 0$. В общем случае в соответствии с формулами (4.24)

$$M_{31} = -\mu d_1 x_{02}, \quad M_{33} = \mu d_2 x_{01}.$$

Как показано в [47], если линию действия перерезывающей силы $Q = i_1 Q_{11} + i_2 Q_{23}$ перенести параллельно так, чтобы она прошла через точку A с координатами x_{01} , x_{02} , то крутящий момент в сечении обратится в нуль. Поэтому точку A принято называть центром жесткости. Для сечений с двумя осями симметрии центр жесткости совпадает с центром тяжести сечения.

Компоненты главных векторов и главных моментов напряжений, соответствующих остальным ЭРСВ, будут следующими:

$$\begin{aligned} Q_{j2} &= 0, & M_{12} &= M_{32} = 0, & M_{22} &= EI_2, \\ Q_{j4} &= 0, & M_{14} &= -EI_1, & M_{24} &= M_{34} = 0, \\ Q_{15} &= Q_{25} = 0, & Q_{35} &= E|S|, & M_{j5} &= 0, \\ Q_{j6} &= 0, & M_{16} &= M_{26} = 0, & M_{36} &= 2\mu d_4. \end{aligned} \quad (4.30)$$

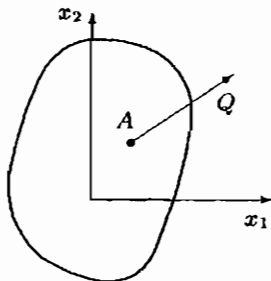


Рис. 2

При выводе этих формул были использованы соотношения

$$\int_S \partial_\alpha \Phi dS = 0, \quad - \int_S x_\alpha \partial_\alpha \Phi dS = 2 \int_S \Phi dS = d_4.$$

Здесь $E = 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга, $|S|$ — площадь поперечного сечения цилиндра.

Докажем первое из приведенных равенств ($\alpha = 1$) (доказательства остальных аналогичны). Имеем

$$\int_S \partial_1 \Phi dS = \int_{\partial S} n_1 \Phi ds = \int_{\partial S} \frac{dx_2}{ds} \Phi ds = - \int_{\partial S} x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0$$

в силу граничного условия (4.20).

Подводя итог проведенному анализу, рассмотрим линейную комбинацию ЭРСВ

$$u_S(x) = \sum_{m=1}^6 C_m u_m(x) + \sum_{m=7}^{12} C_m u_m(x), \quad (4.31)$$

$$\sigma_S(x) = \mu \sum_{m=7}^{12} C_m \sigma_m(x). \quad (4.32)$$

В выражении (4.31) первая сумма описывает перемещение цилиндра как твердого тела, а компоненты главного вектора Q_j и главного момента M_j напряжений $\sigma = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}\}$ в сечении $x = \text{const}$ связаны с постоянными C_m ($m = 7, \dots, 12$) соотношениями

$$\begin{aligned} Q_1 &= -EI_2 C_7, \quad Q_2 = -EI_1 C_9, \quad Q_3 = E|S|C_{11}, \\ M_1 &= -EI_2(C_9 x + C_{10}), \quad M_2 = EI_1(C_7 + C_8), \\ M_3 &= E(I_2 x_{02} C_7 - I_1 x_{01} C_9) + \mu d_4 C_{12}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Обратим внимание на тот факт, что все инварианты жордановых цепочек характеризуют жесткостные свойства стержня: $-Ed_1 = EI_2$, $-Ed_2 = EI_1$ — жесткости на изгиб, $Ed_3 = E|S|$ — жесткость на растяжение; μd_4 — жесткость на кручение (как следует из формул (4.26) d_4 — геометрическая жесткость стержня на кручение).

2. Обратимся к исследованию свойств элементарных решений, соответствующих ненулевой части спектра. Рассмотрим элементарные решения вида

$$\begin{aligned} w_k^\pm(x) &= \{u_k^\pm(x), \sigma_k^\pm(x)\}, \\ u_k^+ &= e^{\gamma_k^+ x} a_k^+, \quad \sigma_k^+ = e^{\gamma_k^+ x} b_k^+, \\ u_k^- &= e^{\gamma_k^-(x-L)} a_k^-, \quad \sigma_k^- = e^{\gamma_k^-(x-L)}, \\ \gamma_k^+ &= \gamma_k, \quad \gamma_k^- = -\bar{\gamma}_k, \quad \gamma_{-k}^+ = \bar{\gamma}_k, \quad \gamma_{-k}^- = -\gamma_k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Докажем, что главный вектор и главный момент каждого такого элементарного решения равны нулю. Обозначим через Q_{jk}^+ , M_{jk}^+ компоненты главного вектора и главного момента вектора напряжений $\mu\sigma_k^+$. В соответствии с формулами (4.27)

$$\begin{aligned} Q_{jk}^+ &= \mu e^{\gamma_k x} (b_k^+, a_{2j-1})_H, & M_{1k}^+ &= -\mu e^{\gamma_k x} (b_k^+, a_4)_H, \\ M_{2k}^+ &= -\mu e^{\gamma_k x} (b_k^+, a_2)_H, & M_{3k}^+ &= -\mu e^{\gamma_k x} (b_k^+, a_0^4)_H. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Вектор-функции $v_k^+ = \{a_k^+, b_k^+\}$ и $v_m = \{a_m, b_m\}_{m=1}^{12}$ принадлежат различным корневым подпространствам, следовательно, согласно утверждениям 2.1, 2.2

$$(v_k^+, Jv_m)_H = (b_k^+, a_m)_H - (a_k^+, b_m)_H = 0. \quad (4.36)$$

Для $m = 1, \dots, 6$ имеем $b_m = 0$, в силу чего из (4.36) вытекает

$$(b_k^+, a_m)_H = 0. \quad (4.37)$$

Следовательно, все выражения (4.35) равны нулю.

§ 5. Общее представление решения трехмерной задачи и обоснование принципа Сен-Венана

1. Рассмотрим уравнение (1.10) и дополним его следующими граничными условиями на торцах цилиндра:

$$u(0) = 0, \quad \mu\sigma(L) = p, \quad (5.1)$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$, L — длина цилиндра вдоль образующей.

Опираясь на теорему о полноте системы элементарных решений [13], решение поставленной задачи можно представить в виде

$$u(x) = u_S(x) + u_P(x). \quad (5.2)$$

Здесь

$$u_S(x) = \sum_{m=1}^6 C_m u_m(x) + \sum_{m=7}^{12} C_m u_m(x-L), \quad (5.3)$$

$$u_P(x) = \sum_k [C_k^+ u_k^+(x) + C_k^- u_k^-(x-L)]. \quad (5.4)$$

В этих выражениях $u_m(x)$ — элементарные решения Сен-Венана; $u_k^\pm(x)$ — элементарные решения, соответствующие ненулевым собственным значениям $\gamma_k^\pm$; C_m , $C_k^\pm$ — постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий (5.1). Ниже будет показано, что среди $\gamma_k^\pm$ нет чисто мнимых, в силу чего решение u_P локализуется у торцов $x = 0$, $x = L$, если цилиндр достаточно длинный. Поэтому эту часть решения трехмерной задачи принято называть погранслоем.

Для вектора σ имеем

$$\sigma(x) = \sigma_S(x) + \sigma_P(x), \quad \sigma_s(x) = \sum_{m=7}^{12} C_m \sigma_m(x-L),$$

$$\sigma_P(x) = \sum_k [C_k^+ \sigma_k^+(x) + C_k^- \sigma_k^-(x-L)].$$

Лишний раз подчеркнем, что векторы σ_m для $m = 1, \dots, 6$ равны нулю, поскольку соответствующие им векторы u_m описывают различные смещения цилиндра как твердого тела.

2. В современном представлении принцип Сен-Венана состоит в том, что напряженно-деформированное состояние, вызванное системой усилий, распределенных по малой площади поверхности тела или в малом объеме внутри тела и статически эквивалентное нулю, локализуется в малой окрестности области приложения усилий. Этот принцип оказывается полезным, если нас не интересуют детали напряженно-деформированного состояния в окрестности области нагружения, а интересует его асимптотическое поведение вдали от нее. В этом случае, как правило, исходную задачу можно заменить более простой. Для полупространства (или массивного тела) распределенную нагрузку — сосредоточенными силами и моментами; для стержня, нагруженного с торцов, применение принципа Сен-Венана эквивалентно замене трехмерного решения, содержащего погранслой, решением Сен-Венана или решением по элементарной теории, основанной на гипотезе плоских сечений.

Выше было показано, что главные векторы и моменты напряжений элементарных решений, отвечающие ненулевым собственным значениям γ_k , равны нулю. Поэтому для полного математического обоснования принципа Сен-Венана необходимо показать, что среди γ_k нет чисто мнимых, ибо для чисто мнимых γ_k соответствующие элементарные решения не затухают при удалении от торцов.

Для доказательства этого свойства спектра положим в уравнении (2.2) $\gamma_k = i\lambda$, $\omega = 0$ и, введя обозначения

$$\nabla a_3 = i_1 \partial_1 a_3 + i_2 \partial_2 a_3, \quad \theta = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2,$$

$$a_0 = i_1 a_1 + i_2 a_2, \quad \|a_0\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2, \quad \|g\|_x^2 = 2 \int_S (x|g|^2) dS,$$

рассмотрим уравнение

$$(L(i\lambda, 0)a, a) = e_0 \lambda^2 + 2e_1 \lambda + e_2, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} e_0 &= \|a_0\|^2 + 2\|a_3\|^2 + \|a_3\|_x^2, & e_1 &= \text{Im}[(\nabla a_3, a_0) + (\theta, a_3)_x], \\ e_2 &= \|\theta\|_x^2 + \|\partial_1 a_1\|^2 + \|\partial_2 a_2\|^2 + \|\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1\|^2 + \|\nabla a_3\|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Докажем, что дискриминант

$$D = e_1^2 - e_0 e_2 \leq 0. \quad (5.7)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$e_1 \leq \|\nabla a_3\| \|a_0\| + \|\theta\|_x \|a_3\|_x. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.6), (5.8) в (5.7), после преобразований получаем

$$D \leq -(\|\nabla a_3\| \|a_3\|_x - \|\theta\|_x \|a_3\|_x)^2 - (\|\partial_1 a_1\|^2 + \|\partial_2 a_2\|^2 + \|\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1\|^2) e_0 - 2\|\nabla(a_3)\|^2 \|a_3\|^2 - \|\theta\|_x^2 (\|a_0\|^2 + \|a_3\|^2) \leq 0. \quad (5.9)$$

Очевидно, что правая часть неравенства (5.9) обращается в нуль только при выполнении условий

$$\nabla a_3 = 0, \quad \partial_1 a_1 = 0, \quad \partial_1 a_2 = 0, \quad \partial_2 a_1 + \partial_1 a_2 = 0,$$

из которых следует, что

$$a_1 = a_1^0 - \omega_3 x_2, \quad a_2 = a_2^0 + \omega_3 x_1, \quad a_3 = a_3^0,$$

т.е. a_1, a_2, a_3 — комбинация компонент собственных векторов $a_0^1, a_0^2, a_0^3, a_0^4$, соответствующих собственному значению $\gamma = 0$ (см. (4.3)). С другой стороны, они являются компонентами вектора твердого смещения плоской фигуры S .

Итак, доказанное неравенство указывает на то, что если приложенные к торцам внешние усилия самоуравновешены, то решение трехмерной задачи экспоненциально убывает по мере удаления от торцов цилиндра. Скорость убывания определяется величиной $\beta = \inf(\operatorname{Re} \gamma_k)$. Так, например, у сплошного однородного цилиндра в случае осесимметричной деформации $\beta = 2,698/R$ ($\nu = 0,25$), в случае кручения $\beta = 3,812/R$, где R — радиус цилиндра.

Однако следует подчеркнуть, что величина показателя затухания погранслоя β существенно зависит от физико-механических свойств материала цилиндра и геометрии поперечного сечения. В работах [2, 71] при исследовании трехмерных задач теории упругости для слоистых пластин и цилиндров с чередующимися жесткими и мягкими слоями установлено, что существует группа элементарных решений с малыми показателями затухания погранслоя. Несмотря на то, что этим элементарным решениям отвечает самоуравновешенное в сечении напряженное состояние, их вклад в общую картину внутреннего напряженного состояния может быть сравним с тем, что дает решение Сен-Венана. В [71] такие решения названы *слабым погранслоем*. Этот термин отражает их слабое затухание по мере удаления от края пластины или торцов цилиндра.

Приведем еще один пример явления *слабого погранслоя*, связанного с геометрией поперечного сечения.

Пусть поперечное сечение стержня представляет собой два круга, соединенных тонкой перемычкой, и пусть на конце $x = L$ стержень загружен системой сил, эквивалентной бимоменту ($M_1 = M$, $M_2 = -M$) (рис. 3). Эта система сил в целом эквивалентна нулю, однако понятно, что вызванное ею напряженно-деформированное состояние может достаточно глубоко проникать при удалении от торца $x = L$, если перемычка достаточно тонкая и длинная.

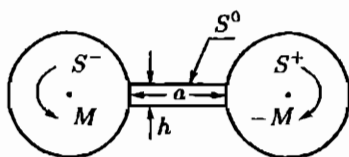


Рис. 3

Асимптотический анализ задачи на сечении (детали доказательства опускаются) показывает, что такой самоуравновешенной системе напряжений соответствует пара элементарных решений

$$u_1^\pm = a_1^\pm(x_1, x_2) \exp(\pm \gamma_1 x),$$

где

$$a^\pm = \{a_1, \pm a_2, 0\},$$

$$a_1 = 0, \quad x_1, x_2 \in S^0, \quad a_1 = \mp x_2 \pm (R + a), \quad x_1, x_2 \in S^\pm,$$

$$a_2 = R - \frac{a}{2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right), \quad x_1, x_2 \in S^0,$$

$$a_2 = \pm x_1 \mp (R + a), \quad x_1, x_2 \in S^\pm,$$

$$\gamma_1 = \sqrt{p} [1 + O(p)], \quad p = \frac{h^3}{3\pi a R^4 (1 - \nu)}.$$

Приведенная формула показывает, что при соответствующем подборе параметров показатель затухания $\beta = \gamma_1$ можно сделать весьма малой величиной.

Рассмотренный пример говорит об условном характере общепринятой формулировки принципа Сен-Венана.

§ 6. Тензор Грина для цилиндра конечной длины. Асимптотический анализ решения

В § 3 были построены вектор-функция Грина и тензор Грина для бесконечного цилиндра. Эту вектор-функцию следует рассматривать как частное решение неоднородной задачи (1.17), которое является составной частью вектор-функции Грина (тензора Грина) различных краевых задач для цилиндра конечной длины.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу для цилиндра конечной длины ($x \in [0, L]$), один торец которого жестко заделан, второй — свободен от напряжений:

$$u(0) = 0, \quad \sigma(l) = 0. \quad (6.1)$$

Пусть цилиндр деформируется под воздействием сосредоточенной силы F_0 , приложенной в точке $O'(x'_1, x'_2, x')$. Введем безразмерные координаты

$$\xi_\alpha = h^{-1}x_\alpha, \quad \xi = h^{-1}x,$$

где h — некоторый характерный линейный размер S , например, $h = \max \rho(A, B)$, $A, B \in \partial S$. При этом для вектора F , определенного формулой (3.2), при переходе к безразмерным координатам получаем

$$F = \frac{F_0}{h^3} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi - \xi'),$$

поскольку $\delta(x)$ — однородная функция порядка $n = -1$.

Решение будем отыскивать в виде

$$w_G(\xi, \xi') = w_{GS}(\xi) + w_{GP}(\xi) + G_S(\xi, \xi') + G_P(\xi, \xi'),$$

$$G_S(\xi, \xi') = G_S^+(\xi, \xi'), \quad \xi > \xi', \quad G_S(\xi, \xi') = G_S^-(\xi, \xi')^+, \quad \xi < \xi',$$

$$G_P(\xi, \xi') = G_P^+(\xi, \xi'), \quad \xi > \xi', \quad G_P(\xi, \xi') = G_P^-(\xi, \xi'), \quad \xi < \xi', \quad (6.2)$$

$$w_{GS}(\xi) = \sum_{m=1}^{12} C_m w_m(\xi), \quad w_{GP}(\xi) = \sum_k [C_k^+ w_k^+(\xi) + C_k^- w_k^-(\xi - l)], \quad (6.3)$$

$$G_S^\pm(\xi, \xi') = \sum_{r=7}^{12} A_r^\pm w_r(\xi - \xi'), \quad G_P^\pm(\xi, \xi') = \sum_k A_k^\pm w_k^\pm(\xi - \xi').$$

Здесь $G(\xi, \xi') = G_S(\xi, \xi') + G_P(\xi, \xi')$ — вектор-функция Грина бесконечного цилиндра; $w_G = w_{GS}(\xi) + w_{GP}(\xi)$ — однородное решение; C_m, C_k — произвольные постоянные. Выражения для $w_m(\xi) = \{u_m(\xi), h^{-1}\sigma(\xi)\}$ получаются путем замены переменных x_1, x_2, x в формулах (4.21)–(4.24) на ξ_1, ξ_2, ξ :

$$w_k^\pm(\xi) = e^{\xi \alpha_k^\pm} v_k^\pm, \quad \alpha_k^\pm = h^{-1} \gamma_k^\pm.$$

Заметим, что в правой части выражения для G_S суммирование ведется только по тем элементарным решениям, для которых соответствующие векторы напряжений σ_r ($r = 7, \dots, 12$) тождественно не равны нулю. Остальная группа элементарных решений ($r = 1, \dots, 6$) описывает твердое смещение цилиндра и потребуются для удовлетворения граничного условия $u(0) = 0$. Для этого достаточно приведенного выше выражения для w_{GS} , содержащего соответствующие элементарные решения.

В рассматриваемом случае Λ^0 состоит из двенадцатикратного с.з. $\gamma_0 = 0$. На основании соотношений обобщенной ортогональности (2.17), (2.18) в результате скалярного умножения (3.4) на Jv_r ,

$r = 1, \dots, 6$ ($\mathbf{v}_r = \{\mathbf{a}_r, 0\}$), и интегрирования по S с учетом (4.25) и выражений (4.26) для d_{mm} получаем

$$A_{r+6}^{\pm} = \pm \frac{\mathbf{a}_r(\xi'_1, \xi'_2) F_0}{2\mu h d_{rr}^0}.$$

Здесь

$$d_{11}^0 = -d_{22}^0 = -d_1^0 = -h^{-4}(1+\nu)I_2,$$

$$d_{33}^0 = -d_{44}^0 = -d_2^0 = -h^{-4}(1+\nu)I_1,$$

$$d_{55}^0 = d_3^0 = h^{-2}(1+\nu)|S|, \quad d_{66}^0 = h^{-4}d_4.$$

Напомним, что I_1, I_2 — моменты инерции поперечного сечения S , $|S|$ — площадь поперечного сечения, d_4 — геометрическая жесткость на кручения, а также заметим, что d_j^0 ($j = 1, 2, 3, 4$) — безразмерные величины.

Обращаясь к конкретному виду векторов $\mathbf{a}_r$ (4.21), имеем

$$\begin{aligned} A_7^{\pm} &= \pm \frac{h^3 F_{01}}{2E I_2}, \quad A_8^{\pm} = \mp \xi'_1 \frac{h^3 F_{03}}{2E I_2}, \\ A_9^{\pm} &= \frac{h^3 F_{02}}{2E I_1^0}, \quad A_{10}^{\pm} = \mp \xi'_2 \frac{h^3 F_{03}}{2E I_1}, \quad A_{11}^{\pm} = \pm \frac{h F_{03}}{2E |S|}, \\ A_{12}^{\pm} &= \mp \frac{h^3 [(\xi_{02} - \xi'_2) F_{01} - (\xi_{01} - \xi'_1) F_{01}]}{2\mu d_4}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для коэффициентов $A_k^{\pm}$ с учетом замены переменных имеем

$$A_k^{\pm} = \pm \frac{h \bar{\mathbf{a}}_k^{\pm}(\xi'_1, \xi'_2) F_0}{\mu d_k^{\pm}}, \quad d_k^{\pm} = \int_{S_0} (\mathbf{a}_k^{\pm} \mathbf{b}_k^{\mp} - \mathbf{a}_k^{\mp} \mathbf{b}_k^{\pm}) d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь S_0 — отображение S при замене переменных x_{α} на ξ_{α} .

Подставим (6.1) в (6.3):

$$\sum_{m=1}^{12} C_m \mathbf{a}_m + \sum_k \left[C_k^+ \mathbf{a}_k^+ C_k^- e^{-\alpha_k^- l} \mathbf{a}_k^- \right] = -\mathbf{G}_u^-(-\xi'), \quad (6.5)$$

$$\sum_{m=7}^{12} C_m \sigma_m(l) + \sum_k \left[C_k^+ e^{\alpha_k^+ l} \mathbf{b}_k^+ + C_k^- \mathbf{b}_k^- \right] = -\mathbf{G}_{\sigma}^+(l - \xi'). \quad (6.6)$$

Здесь $\alpha_k^{\pm} = h\gamma_k^{\pm}$; $\mathbf{G}_u^{\pm}(\xi)$, $\mathbf{G}_{\sigma}^{\pm}(\xi)$, u , σ — компоненты вектор-функции Грина; $l = L/h$.

Функциональные соотношения (6.5), (6.6) можно свести к алгебраическим с помощью разложения по полным в H системам вектор-функций. Выбор этой системы осуществим согласно следующей теореме [13].

Теорема 6.1. Системы векторов

$$M_a^+ = \{a_m, a_k^+\}, \quad M_a^- = \{a_m, a_k^-\}, \quad m = 1, \dots, 6,$$

$$M_b^+ = \{b_m, b_k^+\}, \quad M_b^- = \{b_m, b_k^-\}, \quad m = 7, \dots, 12,$$

являются минимальными и полными в пространстве H .

Иными словами, любой вектор a , проекции которого являются функциями ξ_1, ξ_2 , может быть аппроксимирован в пространстве H линейной комбинацией векторов любой из перечисленных систем.

Последовательно умножая уравнение (6.6) на элементы подмножества a_r , $r = 1, \dots, 6$, и интегрируя по S , с учетом соотношений обобщенной ортогональности получаем

$$\begin{aligned} C_7 &= -A_7, \quad C_8 = \xi'_1 A_7 - A_8, \quad C_9 = -A_9, \\ C_{10} &= \xi'_1 A_9 - A_{10}, \quad C_{11} = -A_{11}, \quad C_{12} = -A_{12}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подстановка (6.7) в (6.6) позволяет упростить последнее до вида

$$\sum_k (C_k^+ e^{\alpha_k^+ l} b_k^+ + C_k^- b_k^-) = -G_{1\sigma}^+ (l - \xi'). \quad (6.8)$$

Скалярное умножение (6.8) на элементы подмножества $\{a_m^-\}$ приводит к алгебраической системе

$$\begin{aligned} \sum_k c_{km}^- C_k^- + \sum_k c_{km}^+ e^{\alpha_k^+ l} C_k^+ &= q_m, \\ q_m &= -\sum_k F_k c_{km}^+ e^{\alpha_k^+ (l - \xi')}, \quad F_k = d_k^{-1} (a_k^-(\xi'_1, \xi'_2) F_0). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Умножая равенство (6.4) последовательно на элементы системы M_b^+ и производя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} C_t + \sum_k (c_{kt}^+ C_k^+ + c_{kt}^- e^{-\alpha_k^- l} C_k^-) &= \frac{1}{d_{tt}^0} \sum_{r=7}^{12} C_r \varphi_{rt} - \frac{1}{d_{tt}^0} \sum_k c_{kt}^- e^{\alpha_k^- \xi'_1} A_k^-, \\ t &= 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$c_{kt}^\pm = (b_{t+6}, a_k^\pm), \quad \varphi_{rt} = (b_{t+6}, u_r(-\xi')),$$

$$\begin{aligned} \sum_k (c_{mk}^+ C_k^+ + c_{mk}^- C_k^-) &= -2\xi'_1 [A_7 c_{m8} + A_9 c_{m10}] + \\ &+ 2 \sum_{r=7}^{12} A_r c_{mr} - \sum_k c_{mk}^+ e^{\alpha_k^- \xi'_1} A_k^-, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$c_{mr} = (b_m^+, a_r),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{71} &= -\frac{\xi'^3}{6} d_1^0 - \xi' \lambda_{11}, & \varphi_{81} &= -\frac{\xi'^2}{2} d_1^0 + \lambda_{11}, & \varphi_{91} &= -\xi' \lambda_{21}, \\
\varphi_{10,1} &= \lambda_{21}, & \varphi_{11,1} &= -\nu \mu_1, & \varphi_{12,1} &= 0, & \varphi_{72} &= \frac{\xi'^2}{2} d_1^0 - \kappa_{11}, \\
\varphi_{82} &= \xi' d_1, & \varphi_{92} &= -\kappa_{12}, & \varphi_{10,2} &= 0, & \varphi_{11,2} &= 0, & \varphi_{12,2} &= \beta_1, \\
\varphi_{73} &= -\xi' \lambda_{12}, & \varphi_{83} &= \lambda_{12}, & \varphi_{93} &= -\frac{\xi'^3}{6} d_2^0 - \xi' \lambda_{22}, \\
\varphi_{10,3} &= \frac{\xi'^2}{2} d_2^0 + \lambda_{22}, & \varphi_{11,3} &= -\nu \mu_2, & \varphi_{12,3} &= 0, & \varphi_{74} &= -\kappa_{21}, & (6.12) \\
\varphi_{84} &= 0, & \varphi_{94} &= \frac{\xi'^2}{2} d_2 - \kappa_{22}, & \varphi_{10,4} &= \xi' d_2^0, & \varphi_{11,4} &= 0, & \varphi_{12,4} &= \beta_2, \\
\varphi_{s5} &= 0, & s &= 7, 8, 9, 10, 12, & \varphi_{11,5} &= -\xi' d_3^0, \\
\varphi_{76} &= 2\xi' D_2, & \varphi_{86} &= -2D_2, & \varphi_{96} &= 2\xi' D_1, \\
\varphi_{10,6} &= -2D_1, & \varphi_{11,6} &= 0, & \varphi_{12,6} &= \xi' d_4^0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\lambda_{1\gamma} &= h^{-6} \int_S (\tau_{\gamma 1} \psi_1 + \tau_{\gamma 2} \psi_2) dS, \\
\lambda_{2\alpha} &= h^{-6} \int_S (\tau_{1\alpha} \psi_2 - \tau_{2\alpha} \psi_1) dS, & \alpha, \gamma &= 1, 2, \\
\mu_\alpha &= h^{-5} \int_S \xi_\gamma \tau_{\gamma\alpha} dS, & \beta_\alpha &= -2(1+\nu) h^{-5} \int_S \xi_\alpha \varphi dS, \\
D_\alpha &= \nu h^{-5} \int_S \xi_\alpha \Phi dS.
\end{aligned}$$

В случае, когда $\varepsilon = l^{-1}$ является малым параметром, полученные выше соотношения позволяют провести асимптотический анализ решения трехмерной задачи и получить точные асимптотические оценки для различных компонент напряженно-деформированного состояния.

Покажем это на примере классических задач Сен-Венана. Для этого во втором граничном условии (6.1) положим

$$\sigma(l) = p(\xi_1, \xi_2), \quad \xi' = l. \quad (6.13)$$

На основании соотношений (6.4) получаем

$$\begin{aligned} A_7 &= \frac{F_1^*}{hEI_2}, \quad A_8 = -\frac{M_1^*}{hEI_2}, \quad A_9 = \frac{F_2^*}{hEI_1}, \quad A_{10} = -\frac{M_2^*}{hEI_1}, \\ A_{11} &= \frac{hF_3^*}{E|S|}, \quad A_{12} = \frac{h^{-1}M_3^* + F_1^*\xi_{02} - F_2^*\xi_{01}}{h\mu d_4}, \\ A_k^\pm &= \pm \frac{h}{\mu d_k^{-1}} \int_{S_0} \mathbf{p}(\xi'_1, \xi'_2) \bar{\mathbf{a}}_k^\mp d\xi'_1 d\xi'_2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_j^* &= \int_S p_j dS, \quad j = 1, 2, 3, \quad M_1^* = - \int_S x_2 p_3 dS, \\ M_2^* &= \int_S x_1 p_j dS, \quad M_3^* = \int_S [(x_{02} - x_2) p_1 - (x_{01} - x_1) p_2] dS. \end{aligned}$$

Из соотношений (6.7) и (6.14) видно, что коэффициенты C_r определяются точно.

Обращаясь к бесконечным системам (6.9), (6.11) и пренебрегая в них суммами, содержащими экспоненциальные множители, можем сделать вывод, что коэффициенты C_k^- имеют порядок $O(1)$ относительно ε , а C_k^+ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} C_k^+ &= \varepsilon^{-1} B_k^{(0)} + B_k^{(1)} + O(e^{-\beta_* t}), \quad \beta_* = \inf_k (\operatorname{Re} \gamma_k^+), \\ B_m^{(0)} &= A_7 c_{m8} + A_9 c_{m10}, \quad B_m^{(1)} = \sum_{r=7}^{12} A_r c_{mr}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Подставляя (6.15) в (6.10), получаем

$$C_t = \sum_{r=7}^{12} (\varphi_{rt} + \varphi'_{rt}) A_r, \quad \varphi'_{rt} = \varepsilon^{-1} \sum_k c_{kt}^+ \varphi_{\alpha k} + \sum_k c_{kt}^+ \varphi_{rk}, \quad \alpha = 7, 9. \quad (6.16)$$

На основании формул (6.12), (6.16) теперь можно легко проанализировать, как влияют в данной задаче экспоненциальные решения (погранслои) на внутреннее деформированное состояние через постоянные C_t , $t = 1, \dots, 6$ (на внутреннее напряженное состояние они не влияют, поскольку напряжения, соответствующие элементарным решениям, содержащим эти коэффициенты, равны нулю). Так, у коэффициентов C_1 и C_3 главные члены имеют порядок $O(\varepsilon^{-3})$, а поправочный член, связанный со слагаемыми $\varphi'_{\alpha t}$, $\alpha = 7, 9$, имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$; у коэффициентов C_2 и C_4 главные члены имеют порядок $O(\varepsilon^{-2})$, поправочные члены — порядок $O(1)$; у коэффици-

ентов C_5, C_6 главные члены имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$, поправочные члены — порядок $O(1)$.

Проведенный анализ позволяет получить точные асимптотические оценки для разностей

$$v_i = u_i - u_i^0, \quad v'_i = u_i - u_i'^0, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0,$$

где u_i, σ_{ij} — компоненты вектора смещений и тензора напряжений точного решения; u_i^0 — компоненты вектора смещений теории Сен-Венана в случае, когда C_t определены без учета погранслоя, т. е.

$$C_t = \sum_{r=7}^{12} \varphi_{rt} A_r, \quad t = 1, \dots, 6, \quad (6.17)$$

$u_i'^0$ — компоненты вектора смещений с учетом погранслоев, т. е. когда коэффициенты C_t определяются по формуле (6.16).

Будем считать, что коэффициенты A_m , $m = 7, \dots, 12$, имеют порядок $O(1)$ относительно параметра ε .

В случае $F_\alpha^* \neq 0$ ($\alpha = 1, 2$), $F_3^* = 0$, $M_i^* = 0$ среди компонент смещений главный порядок ε^{-3} имеет компонента u_α , у напряжений главный порядок ε^{-1} имеет σ_{33} , все остальные напряжения имеют порядок единицы, при этом

$$\varepsilon v_i = O(1), \quad \varepsilon v'_i = O(\chi), \quad \varepsilon \tau_{ij} = O(\chi). \quad (6.18)$$

В случае, когда $F_i^* = 0$, $M_1^* \neq 0$, $M_2^* = 0$, $M_3^* = 0$, главный порядок ε^{-2} имеет u_2 , все напряжения имеют порядок единицы, при этом

$$v_i = O(1), \quad v'_i = O(\chi), \quad \tau_{ij} = O(\chi). \quad (6.19)$$

В случае, когда $F_\alpha^* = 0$, $F_3^* \neq 0$, $M_i^* \neq 0$, главный порядок ε^{-2} имеет смещение u_3 , все напряжения имеют порядок единицы и выполняются оценки (6.19).

В случае, когда $F_i^* = 0$, $M_\alpha^* = 0$, $M_3^* \neq 0$, главный порядок ε^{-2} имеют смещения u_α , все напряжения имеют порядок единицы и выполняются оценки (6.19).

Оценки приведены для $0 < \zeta < 1$, $\zeta = \varepsilon \xi$; $\chi = \exp(-\beta_* l \zeta)$ при $0 < \zeta < 1/2$, $\chi = \varepsilon \exp(-\beta_* l (1 - \zeta))$ при $1/2 < \zeta < 1$.

Таким образом, учет погранслоев при определении смещений в задачах Сен-Венана позволяет получить для смещений более сильные оценки. На оценки для напряжений их учет не влияет.

Определим теперь вектор-функцию Грина теории Сен-Венана рассмотренной краевой задачи как

$$w_G^0 = G_0 + w_0 = \sum_{r=7}^{12} A_r g_r(\xi, \xi'), \quad (6.20)$$

где A_r определяются соотношениями (6.4),

$$g_r = g_r^+, \quad 0 \leq \xi < \xi', \quad g_r = g_r^-, \quad \xi' \leq \xi \leq l,$$

$$g_r^\pm = \delta_{s,r+1} \xi' w_r(\xi) + \sum_{t=1}^6 \varphi_{rt} w_t(\xi) \pm w_r(\xi - \xi'), \quad s = 8, 10.$$

Выделяя из (6.20) u -, σ -компоненты, получаем выражения для тензора смещений и силового тензора:

$$G_u^0 = \sum_{r=1}^{12} g_{ru} \otimes \bar{a}_r, \quad G_\sigma^0 = \sum_{r=7}^{12} g_{r\sigma} \otimes \bar{a}_r, \quad (6.21)$$

где g_{ru} , $g_{r\sigma}$ — u -, σ -компоненты вектора g_r .

Соотношения, подобные (6.21), можно получить и для других типов граничных условий на торцах цилиндра.

Используя принцип суперпозиции, на основании (6.21) можно построить приближенное решение для произвольной гладкой и медленно изменяющейся нагрузки, распределенной по боковой поверхности цилиндра. Таким образом, соотношения (6.21) можно рассматривать как один из вариантов уточненной прикладной теории стержней. Только в отличие от обычных подходов, когда конечный результат формулируется в виде краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (как, например, в теории С.П. Тимошенко [65]), в данном случае конечный результат сформулирован в виде приближенных выражений для вектора смещений и тензора напряжений, которые получены на основе асимптотического анализа решения трехмерной задачи теории упругости.

Глава 3

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУТОГО ЦИЛИНДРА

В данной главе рассматривается вопрос о построении уточненных соотношений для исследования колебаний стержней в области относительно низких частот. Исторические корни этой проблемы восходят к работам Пуассона (1829 г.), Бресса (1859 г.), Похгаммера (1876 г.), Кри (1886 г.), Рэлля (1889 г.), Лэмба (1890 г.), С. П. Тимошенко (1915 г.) [65].

В этих работах были сделаны первые шаги по построению уточненных дисперсионных соотношений продольных, крутильных и изгибных колебаний. Однако как и в перечисленных выше работах, так и во многих более поздних [7, 17, 32, 37, 78], исследования, как правило, ограничиваются построением уточненных дисперсионных соотношений и практически не затрагивают вопросов, связанных с уточнением значений собственных частот, ограничиваясь случаем, когда решение периодически продолжается на всю ось [62]. В настоящей главе на основе метода однородных решений и теории возмущений разрабатывается прикладная теория колебания стержней и на примере консоли исследуются вопросы построения уточненных соотношений для собственных частот и собственных форм колебаний. Предлагаемую ниже теорию условно назовем *динамической теорией Сен-Венана*.

§ 7. Дисперсионные соотношения и элементарные решения Сен-Венана в случае низкочастотных гармонических колебаний цилиндра

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях цилиндра в низкочастотной области. Не принимая каких-либо гипотез относительно распределения смещений и напряжений по сечению стержня, исследуем спектральную задачу (2.2) чисто математическими методами, опираясь на теорию возмущений линейных операторов [19, 20].

Переходя к безразмерным координатам $\xi_i = h^{-1}x_i$, преобразуем уравнения (2.2). Имеем

$$\begin{aligned} L(\alpha, \Omega)\mathbf{a} &\equiv (\alpha^2 C + \alpha B - A + \Omega^2 I)\mathbf{a} = 0, \\ M(\alpha)\mathbf{a} &\equiv (\alpha G + E)\mathbf{a}|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь $\alpha = \gamma h$ — безразмерное волновое число; $\Omega^2 = \rho \mu^{-1} h^2 \omega^2$ — безразмерная частота; h — некоторый характерный линейный размер

поперечного сечения S ; операторы A, B, C определяются соотношениями (1.2), (1.6), в которых частные производные по x заменяются на производные по ξ .

Задачу (7.1) исследуем при малых значениях α и Ω .

В § 4 было установлено, что при $\Omega = 0$ значение $\alpha = 0$ является двенадцатикратным собственным значением, и ему соответствуют четыре жордановы цепочки. Элементарные решения, определяемые ими, описывают изгиб в плоскостях $\xi_1\xi_3$ и $\xi_2\xi_3$, растяжение и кручение стержня. В соответствии с этим следует ожидать, что при малых значениях частоты Ω в упругом цилиндре могут распространяться изгибные, продольные и крутильные волны.

Для построения приближенных выражений дисперсионных уравнений и собственных векторов решения уравнения (7.1) в случаях крутильных и продольных колебаний будем отыскивать в виде

$$\Omega = s_0\alpha + s_1\alpha^3 + \dots, \quad a = \tilde{a}_0 + \alpha\tilde{a}_1 + \alpha^2\tilde{a}_2 + \dots \quad (7.2)$$

В случае изгибных колебаний

$$\Omega = k_0\alpha^2 + k_2\alpha^4 + \dots, \quad a = \tilde{a}_0 + \alpha\tilde{a}_1 + \alpha^2\tilde{a}_2 + \dots \quad (7.3)$$

Опишем процесс построения коэффициентов разложения (7.3) для изгибных колебаний в плоскости $\xi_1\xi_3$.

При подстановке соотношений (7.3) в (7.1) получаем рекуррентную систему задач

$$A\tilde{a}_0 = 0, \quad E\tilde{a}_0|_{\Gamma} = 0,$$

$$B\tilde{a}_0 - A\tilde{a}_1 = 0, \quad (G\tilde{a}_0 + E\tilde{a}_1)|_{\Gamma} = 0, \quad (7.4)$$

$$C\tilde{a}_0 + B\tilde{a}_1 - A\tilde{a}_2 = 0, \quad (G\tilde{a}_1 + E\tilde{a}_2)|_{\Gamma} = 0,$$

$$C\tilde{a}_1 + B\tilde{a}_2 - A\tilde{a}_3 = 0, \quad (G\tilde{a}_2 + E\tilde{a}_3)|_{\Gamma} = 0,$$

$$C\tilde{a}_2 + B\tilde{a}_3 - A\tilde{a}_4 + k_0^2 I\tilde{a}_0 = 0, \quad (G\tilde{a}_3 + E\tilde{a}_4)|_{\Gamma} = 0, \quad (7.5)$$

$$C\tilde{a}_3 + B\tilde{a}_4 - A\tilde{a}_5 + k_0^2 I\tilde{a}_1 = 0, \quad (G\tilde{a}_4 + E\tilde{a}_5)|_{\Gamma} = 0, \quad (7.6)$$

$$C\tilde{a}_4 + B\tilde{a}_5 - A\tilde{a}_6 + k_0^2 I\tilde{a}_2 + 2k_0k_2 I\tilde{a}_0 = 0, \quad (G\tilde{a}_5 + E\tilde{a}_6)|_{\Gamma} = 0. \quad (7.7)$$

Как видно, решениями первых четырех задач (7.4) являются собственные и присоединенные векторы собственного значения $\gamma_0 = 0$ (см. (4.22)), в том числе и жорданова цепочка

$$\tilde{a}_k = a_k^1 = a_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Определяемые ею элементарные решения описывают изгиб в плоскости x_1, x .

Далее, умножим (7.5) скалярно на $a_0^1 = a_1$ и проинтегрируем по S_0 (S_0 — отображение S при переходе к безразмерным координатам ξ_α).

После интегрирования по частям с учетом граничных условий получаем уравнение для определения k_0

$$k_0^2 |S_0| = - \int_{S_0} (\partial_1 \theta_1 + \psi_1) d\xi_1 d\xi_2, \quad |S_0| = \int_{S_0} \xi_1 \xi_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Используя (4.16), имеем

$$k_0^2 = \frac{E_0 I_2^0}{|S_0|}, \quad E_0 = 2(1 + \nu), \quad I_2^0 = \int_{S_0} \xi_1^2 d\xi_1 d\xi_2. \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) дает два значения для k_0 :

$$k_0^+ = k_0 = \sqrt{\frac{E_0 I_2^0}{|S_0|}}, \quad k_0^- = -k_0. \quad (7.9)$$

Далее, на основании (7.7) аналогичным образом получаем

$$k_2 = -\frac{k_0}{2|S_0|} \left\{ \int_{S_0} \psi_1 d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{k_0^2} [(C\tilde{a}_4, \tilde{a}_0) + (B\tilde{a}_5, \tilde{a}_0) - (A\tilde{a}_6, \tilde{a}_0)] \right\}. \quad (7.10)$$

Для нахождения функционалов, стоящих в квадратных скобках, нет необходимости решать краевые задачи относительно $\tilde{a}_4, \tilde{a}_6$. Их значения можно получить следующим образом.

Учитывая, что из краевой задачи (7.5) вытекает равенство нулю третьей компоненты вектора $\tilde{a}_4$, и используя граничные условия задачи (7.7), после интегрирования по частям получаем

$$k_2 = -\frac{k_0}{2|S_0|} \left[\frac{\nu}{2} (I_2^0 - I_1^0) + k_0^2 \int_{S_0} (a_{14} + \partial_1 a_{35}) d\xi_1 d\xi_2 \right]. \quad (7.11)$$

После скалярного умножения (7.6) на $a_1^1 = a_2$ и интегрирования по частям интеграл, содержащийся в (7.11), преобразуется к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} (a_{14} + \partial_1 a_{15}) d\xi_1 d\xi_2 &= 2(1 + \nu) \int_{S_0} \xi_1 \theta_1 d\xi_1 d\xi_2 - k_0 I_2^0 + \\ &+ 2\nu \int_{S_0} (\partial_1 a_{14} + \partial_2 a_{24}) \xi_1 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для определения интеграла, стоящего в правой части выражения (7.12), возвращаемся к задаче (7.5). Умножая уравнение скалярно на $a_2^1 = a_3$, после интегрирования по частям с учетом граничных

условий получаем

$$2\kappa \int_{S_0} (\partial_1 a_{41} + \partial_2 a_{42}) \xi_1 d\xi_1 d\xi_2 = k_0^2 \frac{\nu}{2} (I_2^0 - I_1^0) + \frac{\nu^2}{4} (I_{11}^0 + 2I_{12}^0 + I_{22}^0) + \int_{S_0} (\partial_1 \theta_1 \psi_1 + \partial_2 \theta_1 \psi_2) d\xi_1 d\xi_2 - \frac{4\nu^2}{1-2\nu} \int_{S_0} \xi_1 \theta_1 d\xi_1 d\xi_2, \quad (7.13)$$

Здесь

$$I_{\alpha\beta}^0 = \int_{S_0} \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2 d\xi_1 d\xi_2. \quad (7.14)$$

Подставляя (7.13) в выражение для k_2 и упрощая его, получаем

$$k_2 = -\frac{k_0}{|S_0|} \left\{ I_2^0 (\nu - 1) - \nu I_1^0 + \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\nu^2}{4} (I_{11}^0 + 2I_{12}^0 + I_{22}^0) + \int_{S_0} (2(1+\nu)\xi_1 \theta_1 + \partial_1 \theta_1 \psi_1 + \partial_2 \theta_1 \psi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \right\}. \quad (7.15)$$

Итак, в низкочастотной области приближенное дисперсионное соотношение в случае изгибных колебаний стержня в плоскости $\xi_1 \xi_3$ имеет вид

$$\Omega = k_0 \alpha^2 + k_2 \alpha^4. \quad (7.16)$$

Если в правой части (7.16) ограничиться только первым членом разложения, то получаем дисперсионное соотношение, вытекающее из классической теории изгибных колебаний балки (основанной на гипотезах Бернулли). Второе слагаемое по сути уточняет это соотношение.

Построение приближенных дисперсионных соотношений предпринималось рядом авторов на основе различных дополнительных факторов.

Так, в [62] приведены дифференциальные уравнения поперечных колебаний призматических стержней, полученные на основе учета влияния сил инерции вращения поперечного сечения стержня и сдвиговых деформаций ϵ_{13} , ϵ_{23} . В принятых обозначениях дисперсионное уравнение, вытекающее из теории С. П. Тимошенко, имеет вид

$$\Omega = k_0 \alpha^2 - k_0 \frac{I_2^0}{2|S_0|} \left(1 + \frac{E_0}{k} \right) \alpha^4. \quad (7.17)$$

Здесь k — коэффициент сдвига (отношение среднего значения касательных напряжения σ_{13} в поперечном сечении балки к максимальному их значению) [49]. Как видно, коэффициенты при α^2 в выражениях (7.16) и (7.17) совпадают, а при α^4 существенно различаются.

Обратимся к построению системы элементарных решений Сен-Венана в рассматриваемом случае низкочастотных гармонических колебаний.

Представив волновое число α в виде разложения по степеням Ω :

$$\alpha^2 = t_0 \Omega + t_1 \Omega^2 + \dots \quad (7.18)$$

и подставив (7.18) в (7.16), найдем

$$t_0 = \frac{1}{k_0}, \quad t_1 = -\frac{k_2}{k_0^3}, \quad k_0 = k_0^\pm. \quad (7.19)$$

Из (7.18), (7.19) следует, что каждому значению частоты соответствуют четыре различных волновых числа α :

$$\alpha_1 = \alpha = \sqrt{\Omega k_0} \left(1 - \frac{k_2}{2k_0^2} \Omega \right), \quad (7.20)$$

$$\alpha_2 = -\alpha, \quad \alpha_3 = i\alpha, \quad \alpha_4 = -i\alpha.$$

Ограничиваясь в формуле (7.3) для вектора $\mathbf{a}$ четырьмя членами разложения, для элементарных решений Сен-Венана получаем следующие выражения:

$$\mathbf{u}_k^*(\xi) = e^{\alpha_k \xi} \mathbf{a}_k^*(\xi_1, \xi_2), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (7.21)$$

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_0^1 + \alpha \mathbf{a}_1^1 + \alpha^2 \mathbf{a}_2^1 + \alpha^3 \mathbf{a}_3^1 = (1 + \alpha^2 \psi_1, \alpha^2 \psi_2, -\alpha \xi_1 + \alpha^3 \theta_1),$$

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{a}_0^1 - \alpha \mathbf{a}_1^1 + \alpha^2 \mathbf{a}_2^1 - \alpha^3 \mathbf{a}_3^1 = (1 + \alpha^2 \psi_1, \alpha^2 \psi_2, \alpha \xi_1 - \alpha^3 \theta_1),$$

$$\mathbf{a}_3^* = \mathbf{a}_0^1 + i\alpha \mathbf{a}_1^1 - \alpha^2 \mathbf{a}_2^1 - i\alpha^3 \mathbf{a}_3^1 = (1 - \alpha^2 \psi_1, -\alpha^2 \psi_2, -i\alpha \xi_1 - i\alpha^3 \theta_1),$$

$$\mathbf{a}_4^* = \mathbf{a}_0^1 - i\alpha \mathbf{a}_1^1 - \alpha^2 \mathbf{a}_2^1 + i\alpha^3 \mathbf{a}_3^1 = (1 - \alpha^2 \psi_1, -\alpha^2 \psi_2, i\alpha \xi_1 + i\alpha^3 \theta_1).$$

Соответствующие этим перемещениям векторы напряжений выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^* = e^{\alpha_k \xi} \mathbf{b}_k^*(\xi_1, \xi_2), \quad (7.22)$$

$$\mathbf{b}_1^* = \alpha^2 \mathbf{b}_2 + \alpha^3 \mathbf{b}_3 = (\alpha^3 \tau_{11}, \alpha^3 \tau_{12}, -2(1 + \nu) \alpha^2 \xi_1),$$

$$\mathbf{b}_2^* = \alpha^2 \mathbf{b}_2 - \alpha^3 \mathbf{b}_3 = (-\alpha^3 \tau_{11}, -\alpha^3 \tau_{12}, -2(1 + \nu) \alpha^2 \xi_1),$$

$$\mathbf{b}_3^* = -\alpha^2 \mathbf{b}_2 - i\alpha^3 \mathbf{b}_3 = (-i\alpha^3 \tau_{11}, -i\alpha^3 \tau_{12}, 2(1 + \nu) \alpha^2 \xi_1),$$

$$\mathbf{b}_4^* = -\alpha^2 \mathbf{b}_2 + i\alpha^3 \mathbf{b}_3 = (i\alpha^3 \tau_{11}, i\alpha^3 \tau_{12}, 2(1 + \nu) \alpha^2 \xi_1);$$

τ_{11}, τ_{12} определяются формулами (4.23).

§ 8. Вывод уточненных частотных уравнений

Рассмотрим задачу о построении уточненных соотношений для определения собственных частот изгибных колебаний стержня. Основные идеи метода поясним на примере стержня, один торец которого жестко заделан, а другой свободен (консоль).

1. Возвращаясь к обозначениям собственных и присоединенных векторов (4.22), для удобства последующих вычислений введем на основе (7.21) новую систему элементарных решений

$$u_1 = \frac{1}{2} (u_1^* + u_2^*) = (a_0^1 + \alpha^2 a_2^1) \operatorname{ch} \alpha \xi + \alpha (a_2^1 + \alpha^2 a_3^1) \operatorname{sh} \alpha \xi,$$

$$u_2 = \frac{1}{2} (u_1^* - u_2^*) = (a_0^1 + \alpha^2 a_2^1) \operatorname{sh} \alpha \xi + \alpha (a_1^1 + \alpha^2 a_3^1) \operatorname{ch} \alpha \xi,$$

$$u_3 = \frac{1}{2} (u_3^* + u_4^*) = (a_0^1 - \alpha^2 a_2^1) \cos \alpha \xi - \alpha (a_1^1 - \alpha^2 a_3^1) \sin \alpha \xi,$$

$$u_4 = \frac{-i}{2} (u_3^* - u_4^*) = (a_0^1 - \alpha^2 a_2^1) \sin \alpha \xi + \alpha (a_1^1 - \alpha^2 a_3^1) \cos \alpha \xi.$$

Аналогично,

$$\sigma_1 = \alpha^2 (b_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + \alpha b_3 \operatorname{sh} \alpha \xi), \quad \sigma_2 = \alpha^2 (b_2 \operatorname{sh} \alpha \xi + \alpha b_3 \operatorname{ch} \alpha \xi),$$

$$\sigma_3 = -\alpha^2 (b_2 \cos \alpha \xi - \alpha b_3 \sin \alpha \xi), \quad \sigma_4 = -\alpha^2 (b_2 \sin \alpha \xi - \alpha b_3 \cos \alpha \xi),$$

$$u = \sum_{k=1}^4 C_k u_k, \quad \sigma = \sum_{k=1}^4 C_k \sigma_k. \quad (8.1)$$

Будем считать, что на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$u(0) = 0, \quad \sigma(l) = 0. \quad (8.2)$$

Приближенное решение будем отыскивать в виде (8.1). Чтобы получить алгебраическую систему относительно неизвестных C_k , умножим первое из равенств (8.2) скалярно на векторы b_2 и b_3 и, используя соотношения обобщенной ортогональности, получим два уравнения:

$$C_2 \left(1 + \alpha^2 \frac{d_{32}}{d_1} \right) + C_4 \left(1 - \alpha^2 \frac{d_{32}}{d_1} \right) = 0, \quad (8.3)$$

$$C_1 \left(1 - \alpha^2 \frac{d_{23}}{d_1} \right) + C_3 \left(1 + \alpha^2 \frac{d_{23}}{d_1} \right) = 0,$$

$$d_{23} = \int_{S_0} [\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_1 \partial_1 \theta_1 + \psi_2 \partial_2 \theta_1] d\xi_1 d\xi_2,$$

$$d_{32} = -E_0 \int_{S_0} \xi_1 \theta_1 d\xi_1 d\xi_2.$$

Для получения недостающих двух уравнений, умножим второе граничное условие из (8.2) скалярно на векторы a_0^1, a_1^1 :

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_2 \operatorname{ch} \alpha l + C_3 \sin \alpha l - C_4 \cos \alpha l &= 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha l + C_2 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \cos \alpha l - C_4 \sin \alpha l &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Приравнявая определитель системы уравнений (8.3), (8.4) нулю, получаем следующее характеристическое уравнение относительно α :

$$\begin{aligned} F(v) &= F_0(v) + l^{-2} S_1 F_1(v) + l^{-4} S_2 F_2(v) = 0, \\ F_0 &= \cos v \operatorname{ch} v + 1, \quad F_1(v) = -v^2 \sin v \operatorname{sh} v, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$F_2 = v^4 (\cos v \operatorname{ch} v - 1), \quad v = \alpha l, \quad S_1 = \frac{d_{23} + d_{32}}{d_1}, \quad S_2 = \frac{d_{23} d_{32}}{d_1^2},$$

где $d_1 = E_0 I_2^0$, d_{23} , d_{32} определены формулами (8.3).

В уравнении (8.5) слагаемые, содержащие l^{-2} и l^{-4} , уточняют характеристическое уравнение, вытекающее из классической теории [62].

Корни уравнения (8.5) $v_m = v_m(l)$ могут быть определены численно (при заданном значении параметра l), а при достаточно больших значениях l — по асимптотическим формулам

$$v_m = v_{m0} + l^{-2} v_{m1} + O(l^{-4}), \quad F_0(v_{m0}) = 0, \quad v_{m1} = -S_1 \frac{F_1(v_{m0})}{F_0'(v_{m0})}.$$

Каждому корню v_m на основании (7.17) соответствуют уточненное значение собственной частоты

$$\Omega_m = k_0 \alpha_m^2 + k_2 \alpha_m^4, \quad \alpha_m = \frac{v_m}{l}. \quad (8.6)$$

Аналогичным образом были получены характеристические уравнения для граничных условий

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(l) = 0; \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

В первом случае

$$F(v) = v^4 F_2(v).$$

Во втором

$$\begin{aligned} F(v) &= F_2(v) v^{-4} + 2l^{-2} F_1(v) S_1 - l^{-4} F_2(v) (S_1^2 - 2S_2^2) + \\ &+ 2l^{-6} v^4 F_1(v) S_1 S_2 + l^{-8} v^8 F_2(v) S_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

При вычислении корней для достаточно больших значений l можно ограничиться двумя первыми слагаемыми в уравнении (8.7).

2. В качестве конкретного примера рассмотрим стержень с эллиптическим поперечным сечением. Полуоси эллипса обозначим через a , b и примем $h = a \geq b$.

Колебания рассматриваются в плоскости x_1, x . В этом случае, полагая $h = a$, на основании (7.9), (7.16) и учитывая, что [47]

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \left(-\frac{\nu}{2} + \frac{2a^2(1+\nu)+b^2}{3a^2+b^2} \right) x_1^3 + \\ + \left(1 + \frac{\nu}{2} - \frac{2a^2(1+\nu)+b^2}{3a^2+b^2} \right) x_1 x_2^2 - \frac{2a^2(1+\nu)+b^2}{3a^2+b^2} a^2 x_1,$$

получаем

$$k_0 = \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}, \quad k_2 = k_0 k'_2,$$

$$k'_2 = - \frac{(12+19\nu-3\nu^2)t^4 + (23+55\nu+38\nu^2)+5-14\nu-19\nu^2}{24(1+\nu)(3+t^2)}.$$

Коэффициент S_1 в уравнения (8.5) имеет вид

$$S_1 = \frac{(-\nu+3\nu^2)t^4 + (16+26\nu+10\nu^2)t^2 + 40+83\nu+43\nu^2}{(1+\nu)(3+t^2)}, \quad t = \frac{b}{a}.$$

Замечание 8.1. Выражение для S_2 не приводится, поскольку, как показали расчеты, учет последнего слагаемого в уравнении (8.5) практически не влияет на величины собственных частот для $l \geq 3$.

В табл. 3.1 представлены результаты вычислений (при $\nu = 0,28$) собственных частот колебаний для стержней разной длины ($l = 10, 15, 20, 25, 50$), сечения которых представляют собой эллипсы с разным соотношением полуосей ($t = 1/5, 1/2, 2, 5$).

Таблица 3.1

Собственные частоты для стержня эллиптического поперечного сечения

№	t	l				
		10	15	20	25	50
1	1/5	0,0275	0,00448	0,00112	0,0123	0,0669
	1/2	0,0276	0,00448	0,00112	0,0124	0,007
	2	0,0294	0,00453	0,00113	0,0127	0,00712
	5	0,0404	0,00483	0,00114	0,015	0,00782
2	1/5	0,165	0,0279	0,007	0,0761	0,0433
	1/2	0,168	0,028	0,007	0,0768	0,0435
	2	0,233	0,0298	0,00715	0,0906	0,048
	5	0,627	0,0411	0,00787	0,174	0,0752

Продолжение табл. 3.1

№	t	l				
		10	15	20	25	50
3	1/5	0,449	0,0776	0,0196	0,209	0,1202
	1/2	0,473	0,0783	0,0197	0,215	0,121
	2	0,233	0,0949	0,0206	0,319	0,156
	5	3,82	0,179	0,0262	0,950	0,364
4	1/5	0,867	0,151	0,0384	0,405	0,233
	1/2	0,955	0,154	0,0386	0,525	0,240
	2	2,701	0,208	0,0421	0,813	0,97
	5	13,2	0,538	0,0635	3,15	1,15

Для кругового поперечного сечения ($a = b$) соответственно имеем

$$k_2 = -\frac{15 + 10\nu + 4\nu^2}{24(1 + \nu)} \sqrt{\frac{1 + \nu}{2}}, \quad S_1 = \frac{14 + 27\nu + 14\nu^2}{24(1 + \nu)}.$$

3. В заключение остановимся на оценке области применимости прикладной теории по параметру l . В качестве критерия выберем следующий: допустим, что известны собственные частоты $\Omega_k^* = \Omega_k^*(l)$ трехмерной задачи, соответствующие нижней части спектра, и известны $\Omega_k = \Omega_k(l)$ — собственные частоты, определенные на основе той или иной прикладной теории. Поставим задачу определения первых m частот $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_m$ с относительной погрешностью

$$\left| \frac{\Omega_k - \Omega_k^*}{\Omega_k^*} \right| \leq \Delta_*, \quad k = 1, \dots, m. \quad (8.8)$$

Такой подход требует знания Ω_k^* . При произвольных граничных условиях определение Ω_k^* для кругового цилиндра можно свести к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от α , Ω и l . Формирование такой системы и нахождение на ее основе собственных частот требует значительных усилий. Однако в частном случае граничных условий

$$u_1(0) = u_2(0) = 0, \quad \sigma_{33}(0) = 0,$$

$$u_1(l) = u_2(l) = 0, \quad \sigma_{33}(l) = 0,$$

которые являются трехмерным аналогом свободного опирания, задача существенно упрощается, поскольку в этом случае известны формы свободных колебаний

$$u_\beta = u_{\beta k}(\xi_1, \xi_2) \sin \alpha_k \xi,$$

$$u_3 = u_{3k}(\xi_1, \xi_2) \cos \alpha_k \xi, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{l}.$$

Для стержня с круговым поперечным сечением определение спектра изгибных колебаний сводится к нахождению корней дисперсионного уравнения

$$D(\alpha, \Omega) = 0,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a_{11} = 2J_1(a) - \frac{1}{2} J_1(a) \Omega^2 - \alpha^2 J_1(a) - \frac{\sqrt{2}}{2} J_0(a) \sqrt{b},$$

$$a_{12} = -J_1(c) \Omega^2 + J_1(c) \alpha^2 + 2J_1(c) - J_0(c) c,$$

$$a_{13} = J_0(c) c - 2J_1(c), \quad a_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2} J_0(b) b + 2J_1(b),$$

$$a_{22} = -2J_1(c) + \frac{1}{2} J_1(c) \Omega^2 - \frac{1}{2} J_1(c) \alpha^2 + J_0(c) c,$$

$$a_{23} = -2J_1(c) + \frac{1}{2} J_1(c) \Omega^2 - \frac{1}{2} J_1(c) \alpha^2 + J_0(c) c,$$

$$a_{31} = \frac{i}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2} (J_0(b) b - \sqrt{2} J_1(b)),$$

$$a_{32} = -\frac{\Omega^2 - 2 + \alpha^2}{2\alpha} [iJ_0(c) c - J_1(c)], \quad a_{33} = \frac{i}{2} J_1(c) \alpha,$$

$$a = \frac{2\nu - 1}{\nu - 1} \Omega^2 + \alpha^2, \quad b = \frac{\sqrt{2a}}{2}, \quad c = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}.$$

Каждому значению α_k соответствует счетное множество $\Lambda_k = \{\Omega_{ks}^*\}_{s=1}^\infty$ [10, 18]. Для анализа точности прикладной теории достаточно знать Ω_{k1}^* , которые лежат на первой дисперсионной кривой.

Для любой прикладной теории при свободном опирании формы свободных колебаний изгиба также пропорциональны $\cos \alpha_k \xi$. Собственные частоты при этом определяются равенствами $\Omega = f(\alpha_k)$, где $\Omega = f(\alpha)$ — дисперсионное уравнение.

В случае классической теории

$$f(\alpha) = f_0(\alpha) = k_0 \alpha^2.$$

В случае прикладной теории Сен-Венана

$$f(\alpha) = f_1(\alpha),$$

где $f_1(\alpha)$ — правая часть выражения (7.16); в случае прикладной теории Тимошенко

$$f(\alpha) = f_2(\alpha),$$

где $f_2(\alpha)$ определена правой частью (7.17).

На рис. 4 и рис. 5 приведены графики дисперсионных кривых для двух значений коэффициента Пуассона $\nu = 0,28$, $\nu = 0,49$ соответственно. Кривая 1 соответствует дисперсионной кривой $\Omega = \Omega(\alpha)$ трех-

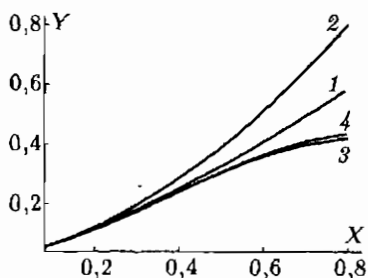


Рис. 4

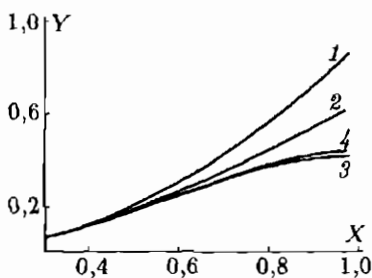


Рис. 5

мерной задачи, кривая 2 — график функции $f_0(\alpha)$, кривая 3 — график функции $f_1(\alpha)$, кривая 4 — график функции $f_2(\alpha)$.

Рассмотрим функции

$$\Delta_r(\alpha) = \left| \frac{f_r(\alpha) - \Omega(\alpha)}{\Omega(\alpha)} \right|, \quad r = 0, 1, 2. \quad (8.9)$$

Функции $\Delta_r(\alpha)$ описывают относительные погрешности при определении частоты в зависимости от волнового числа. Графики их изображе-

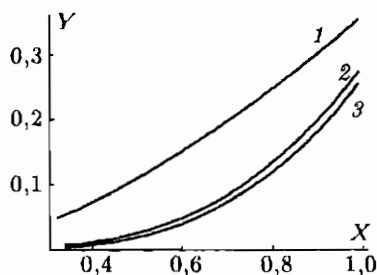


Рис. 6

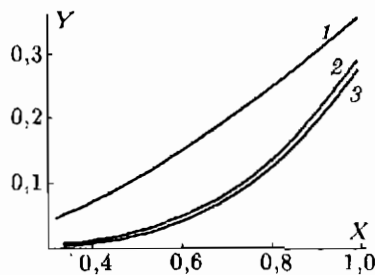


Рис. 7

ны на рис. 6 и рис. 7 (кривая 1 — график функции $\Delta_0(\alpha)$; кривая 2 — график функции $\Delta_1(\alpha)$; кривая 3 — $\Delta_2(\alpha)$).

Задавая относительную погрешность Δ_* и определяя $l = l_m$ из условия

$$\Delta_r(\alpha_m) = \Delta_*, \quad \left(\alpha_m = \frac{\pi m}{l} \right),$$

можно утверждать, что при $l \geq l_m$ значения первых m частот, определенных по соответствующей прикладной теории, удовлетворяют условиям (8.8), поскольку функции Δ_r являются монотонно возрастающими.

В табл. 3.2 приведены значения l_m для трех прикладных теорий и двух значений Δ_* ($\Delta_* = 0,05$, $\Delta_* = 0,1$); $\nu = 0,28$.

Таблица 3.2

	m								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta_* = 0,05$									
$l_m(\Delta_0)$	9,2	19,1	28,3	38,5	47,2	57,7	67,4	76,1	86,3
$l_m(\Delta_1)$	5,3	10,2	15,7	20,3	25,4	31,2	36,4	41,8	46,7
$l_m(\Delta_2)$	4,7	9,2	14,3	19,5	24,3	29,2	34,8	39,2	44,7
$\Delta_* = 0,01$									
$l_m(\Delta_0)$	6,3	13	19	26	32	39	45	52	58
$l_m(\Delta_1)$	4,8	8,5	12,3	16,5	21,4	25,3	29,7	33,4	38,6
$l_m(\Delta_2)$	4,4	8,1	12	16,2	20,1	24,1	28,3	33,2	37,9

Следует подчеркнуть, что из рис. 4 и рис. 5 следует, что классическая теория всегда дает оценку для собственных частот сверху, прикладная теория Сен-Венана и теория Тимошенко — оценку снизу.

Замечание 8.2. При данной погрешности Δ_* классическая теория, как следует из табл. 3.2, имеет более узкую область применимости по параметру l в сравнении с прикладными теориями Тимошенко и Сен-Венана, которые дают оценки для собственных частот снизу. Опираясь на дисперсионное уравнение вида

$$\Omega = f_0(\alpha) = k_0 \alpha^2 (1 - k_v \alpha^2), \quad (8.10)$$

путем подбора коэффициента k_v можно добиться того, чтобы относительная погрешность

$$\Delta_v(\alpha) = \frac{f_v(\alpha) - \Omega^*(\alpha)}{\Omega^*(\alpha)} \quad (8.11)$$

удовлетворяла условиям

$$0 \leq \Delta_v(\alpha) \leq \Delta_* \quad \text{при} \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_v].$$

При выполнении этих условий для собственных частот будут получаться оценки сверху. Подбирая коэффициент k_v , можно получить

$$\alpha_v^* \geq \alpha_T^* (\alpha_S^*),$$

где α_T^* (α_S^*) — значение α , вытекающее из анализа теории Тимошенко (Сен-Венана). При этом при $\alpha \leq \alpha_1$ все прикладные теории становятся равноценными.

На рис. 8 приведены графики функции $\Delta_v(\alpha)$ для двух значений ν : 0,28; 0,49, и $k_v = (41 + 6\nu)/256$.

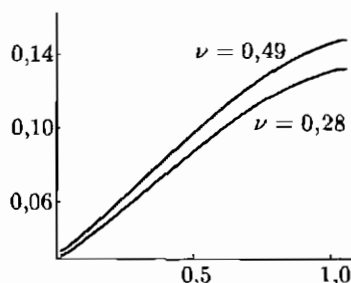


Рис. 8

Глава 4

К ТЕОРИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Под *естественно закрученным стержнем* принято понимать трехмерное тело, которое получается в результате винтового движения вдоль прямолинейной оси некоторой плоской фигуры. Ниже будет дано более подробное геометрическое описание такого тела. В работах П. М. Риза [59], А. Н. Лурье [24–26], Г. Ю. Джанелидзе [23] были сделаны первые попытки построения решений задач Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе естественно закрученных стержней. Наиболее полно были исследованы задачи растяжения и кручения в рамках метода малого параметра, в качестве которого бралась безразмерная «крутка» $\tau_0 = \tau h$; τ — относительный угол закручивания, h — некоторый характерный линейный размер сечения. Попытки исследования задач изгиба без привлечения дополнительных гипотез не привели к существенным результатам. В частности, в работе [6] пространственная задача сводится к труднообозримой системе двумерных уравнений.

Однако потребность в решении конкретных практических задач, связанных с созданием методов расчета напряженно-деформированного состояния витых лопаток осевых компрессоров и газовых турбин, спиральных сверл и т. п. дала существенный толчок в развитии прикладных теорий, в основе которых наряду с понятием «плоское сечение» используется понятие «ортогональное сечение». Наиболее полное развитие эта теория получила в работах [6, 9, 31, 34, 39, 67].

§ 9. Основные геометрические соотношения

В дальнейшем для краткости понятие «естественно закрученный стержень» будем заменять аббревиатурой ЕЗС.

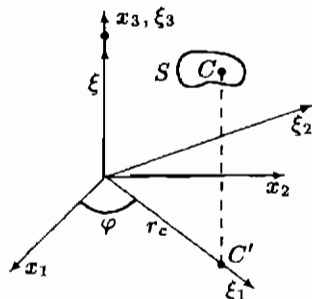


Рис. 9

Пусть $x_1, x_2, x_3 = x$ — декартова система координат с ортами i_1, i_2, i_3 . Объем, занимаемый ЕЗС, получим в результате винтового движения плоской фигуры S , параллельной плоскости $x_1 x_2$, вдоль оси x .

В качестве параметра винта возьмем относительный угол закручивания τ , который принято называть *круткой*. Таким образом, угол поворота сечения,

находящегося на расстоянии x по оси от начала координат, есть $\varphi = \tau x$.

Введем также сопутствующую (подвижную) систему координат $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \xi$ так, что оси ξ_1 и ξ_2 жестко связаны с фигурой S в процессе ее движения. Дополнительно предположим, что центр тяжести S расположен на расстоянии r_c от оси ξ , а оси ξ_α , $\alpha = 1, 2$, направлены по главным осям инерции. Связь между координатами обеих систем определяется соотношениями

$$\xi_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad \xi_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \quad \xi = x_3. \quad (9.1)$$

Орты, определяющие направления осей ξ_α , обозначим e_α . Таким образом,

$$\mathbf{R} = \xi_\alpha e_\alpha + \xi i_3 \quad (9.2)$$

— радиус-вектор произвольной точки области V .

Построим внешнюю нормаль $\mathbf{N}$ к боковой поверхности Γ ЕЗС и определим ее проекции на оси сопутствующей системы координат. Уравнение контура ∂S области S зададим соотношениями

$$\xi_{\alpha 0} = \xi_{\alpha 0}(s),$$

где $\xi_{\alpha 0}$ — координаты точки контура; s — расстояние по дуге контура от некоторой фиксированной точки.

Следующие соотношения определяют касательный $\mathbf{t}$ и нормальный $\mathbf{n}$ орты контура ∂S :

$$\mathbf{t} = \xi'_{\alpha 0} e_\alpha, \quad \mathbf{n} = n_\alpha e_\alpha = \xi'_{20} e_1 - \xi'_{10} e_2, \quad (9.3)$$

где ξ'_{10}, ξ'_{20} — производная ξ_{10}, ξ_{20} по s .

Рассмотрим два сечения ЕЗС, расположенных на расстоянии dx .

Точки сечений A и B будем называть эквивалентными, если им соответствуют одни и те же значения координат ξ_α . Очевидно, что радиусы-векторы $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B$ двух бесконечно близких эквивалентных точек, лежащих на боковой поверхности Γ , связаны соотношением

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + [i_3 + \tau(i_3 \times \mathbf{r}_0)] dx, \quad \mathbf{r}_0 = \xi_{10} e_1 + \xi_{20} e_2. \quad (9.4)$$

Очевидно также, что вектор

$$\mathbf{N} = \mathbf{t} \times (\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A) \quad (9.5)$$

ортогонален к поверхности Γ .

Подставляя (9.3), (9.4) в (9.5), после преобразований получаем следующие выражения для проекций $\mathbf{N}$ на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} N_1 = n_1 = \xi'_{20}, \quad N_2 = n_2 = -\xi'_{10}, \quad N_3 = \tau b_n, \\ b_n = n_2 \xi_{10} - n_1 \xi_{20} = \frac{d}{ds} \left(\frac{r_0 s^2}{2} \right), \quad r_0^2 = \xi_{10}^2 + \xi_{20}^2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Будем считать, что $0 \leq x \leq L$, где L — длина ЕЗС.

§ 10. Основные соотношения теории упругости для естественно закрученного стержня и постановка краевых задач

Для постановки и исследования задачи Сен-Венана приведем основные соотношения теории упругости в подвижной системе координат.

Для этого, опираясь на соотношения (10.2), (10.3), введем основной и взаимный базисы:

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{R}_3 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} = \mathbf{i}_3 - \tau \xi_2 \mathbf{e}_1 + \tau \xi_1 \mathbf{e}_2, \quad (10.1)$$

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{e}_1 + \tau \xi_2 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{R}^2 = \mathbf{e}_2 - \tau \xi_1 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{R}^3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (10.2)$$

Основные соотношения теории упругости: тензор малых деформаций Коши

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T); \quad (10.3)$$

обобщенный закон Гука

$$\hat{\sigma} = 2\mu \left(\hat{\varepsilon} + \kappa (\nabla \mathbf{u}) \hat{E} \right); \quad (10.4)$$

уравнения равновесия

$$\nabla \hat{\sigma} = 0 \quad (10.5)$$

представим в базисе подвижной системы координат, учитывая, что в данном случае метрический тензор $\mathbf{g}$ в смешанном базисе совпадает с единичным ($\mathbf{g}_i^j = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j = \delta_{ij}$), и используя следующее выражение ∇ -оператора в этом базисе:

$$\nabla = \mathbf{R}^j \partial_j = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha + \mathbf{e}_3 (\partial + \tau D), \quad (10.6)$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad \partial = \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad D = \xi_2 \partial_1 - \xi_1 \partial_2.$$

С учетом (10.6) уравнения равновесия можно представить в векторном виде:

$$\partial_\alpha \sigma_\alpha + (\partial + \tau D) \sigma = 0, \quad (10.7)$$

где

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha l} \mathbf{e}_l, \quad \sigma = \sigma_{3l} \mathbf{e}_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (10.8)$$

Проектируя (10.7) на оси сопутствующей системы координат, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial \sigma_{13} + \tau (D \sigma_{13} - \sigma_{23}) &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial \sigma_{23} + \tau (D \sigma_{23} + \sigma_{13}) &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial \sigma_{33} + \tau D \sigma_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Преобразуя (10.3) с учетом (10.6), для компонент тензора деформаций получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} [\partial_1 u_3 + (\partial + \tau D) u_1 - \tau u_2], \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} [\partial_2 u_3 + (\partial + \tau D) u_2 + \tau u_1], \quad \varepsilon_{33} = (\partial + \tau D) u_3.\end{aligned}\quad (10.10)$$

Из (10.4) с учетом (10.6) для компонент тензора напряжений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu [(1 + \kappa) \partial_1 u_1 + \kappa \partial_2 u_2 + \kappa (\partial + \tau D) u_3], \\ \sigma_{12} &= \mu (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \\ \sigma_{22} &= 2\mu [(1 + \kappa) \partial_2 u_2 + \kappa \partial_1 u_1 + \kappa (\partial + \tau D) u_3], \\ \sigma_{13} &= \mu (\partial_1 u_3 - \tau u_2 + (\partial + \tau D) u_1), \\ \sigma_{23} &= \mu (\partial_2 u_3 + \tau u_1 + (\partial + \tau D) u_2), \\ \sigma_{33} &= 2\mu [\kappa \partial_1 u_1 + \kappa \partial_2 u_2 + (1 + \kappa) (\partial + \tau D) u_3].\end{aligned}\quad (10.11)$$

Подстановка (10.11) в (10.9) позволяет представить уравнения равновесия в операторной форме:

$$L_\tau(\partial) \mathbf{u} \equiv \partial^2 C \mathbf{u} + \partial B_\tau \mathbf{u} + A_\tau \mathbf{u} = 0, \quad (10.12)$$

где

$$\begin{aligned}C &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \kappa) \end{vmatrix}, \quad B_{3\tau} = \begin{vmatrix} \tau D & -\tau & \partial_1 \\ \tau & \tau D & \partial_2 \\ 2\kappa \partial_1 & 2\kappa \partial_2 & 2(1 + \kappa) \tau D \end{vmatrix}, \\ B'_{3\tau} &= - \begin{vmatrix} \tau D & -\tau & 2\kappa \partial_1 \\ \tau & \tau D & 2\kappa \partial_2 \\ \partial_1 & \partial_2 & 2(1 + \kappa) \tau D \end{vmatrix}, \quad B_\tau = B_{3\tau} - B'_{3\tau}, \quad A_\tau = \|A_{ij}\|,\end{aligned}\quad (10.13)$$

$$A_{11} = 2(1 + \kappa) \partial_1^2 + \partial_2^2 + \tau^2 (D^2 - 1), \quad A_{12} = (1 + 2\kappa) \partial_1 \partial_2 - 2\tau^2 D,$$

$$A_{13} = \tau(1 + 2\kappa) \partial_1 D, \quad A_{21} = (1 + 2\kappa) \partial_1 \partial_2 + 2\tau^2 D,$$

$$A_{22} = \partial_1^2 + 2(1 + \kappa) \partial_2^2 + \tau^2 (D^2 - 1), \quad A_{23} = \tau(1 + 2\kappa) \partial_2 D,$$

$$A_{31} = \tau(1 + 2\kappa) D \partial_1, \quad A_{32} = \tau(1 + 2\kappa) D \partial_2,$$

$$A_{33} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + 2(1 + \kappa) \tau^2 D^2.$$

Будем считать, что боковая поверхность ЕЗС свободна от напряжений:

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

В скалярном виде с учетом (9.6) это граничное условие имеет вид

$$\begin{aligned} n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} + \tau b_n \sigma_{13} &= 0, \\ n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + \tau b_n \sigma_{23} &= 0, \\ n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + \tau b_n \sigma_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Преобразуем граничные условия (10.14) к операторный виду, используя (9.6) и (10.11). Имеем

$$M_{\tau}(\partial) \mathbf{u} = (\partial G_{\tau} + E_{\tau}) \mathbf{u} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (10.15)$$

$$G_{\tau} = \begin{vmatrix} \tau b_n & 0 & 2\kappa n_1 \\ 0 & \tau b_n & 2\kappa n_2 \\ n_1 & n_2 & 2(1+\kappa)\tau b_n \end{vmatrix}, \quad E_{\tau} = \|E_{ij}\|,$$

$$E_{11} = 2(1+\kappa) n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2 + n_3 \tau^2 b_n D,$$

$$E_{12} = 2\kappa n_1 \partial_2 + n_2 \partial_1 - \tau^2 b_n, \quad E_{13} = 2\kappa n_1 \tau D + \tau b_n \partial_1,$$

$$E_{21} = n_1 \partial_2 + 2\kappa n_2 \partial_1 + \tau^2 b_n, \quad (10.16)$$

$$E_{22} = n_1 \partial_1 + 2(1+\kappa) n_2 \partial_2 + \tau^2 b_n D, \quad E_{23} = 2\kappa n_2 \tau D + \tau b_n \partial_2,$$

$$E_{31} = n_1 \tau D + n_2 \tau + 2\kappa \tau b_n \partial_1, \quad E_{32} = -n_1 \tau + N_2 \tau D + 2\kappa \tau b_n \partial_2,$$

$$E_{33} = n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2 + 2(1+\kappa) \tau^2 b_n D.$$

Объединяя уравнение равновесия (10.12) и граничное условие (10.15), получаем операторное уравнение

$$L_{1\tau}(\partial) \mathbf{u} \equiv \{L_{\tau}(\partial) \mathbf{u}, M_{\tau}(\partial) \mathbf{u}\} = 0. \quad (10.17)$$

Для завершения постановки краевой задачи будем считать, что при $z = 0$ и $z = L$ заданы следующие граничные условия:

$$\mathbf{u}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(L) = \mathbf{p}. \quad (10.18)$$

Обратим внимание на то, что уравнение (10.17) по форме совпадает с уравнением (1.9) для упругого цилиндра, если в последнем $\omega = 0$.

Вводя расширенный вектор

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \partial C \mathbf{u} + B_{3\tau} \mathbf{u}, \quad (10.19)$$

задачу (10.12) можно записать в виде (1.14), (1.15), заменяя операторы A , B_3 , G , E соответственно на A_{τ} , $B_{3\tau}$, G_{τ} , E_{τ} . При этом оператор $T_{0\tau}$ по-прежнему является гамильтоновым.

§ 11. Однородные элементарные решения Сен-Венана естественно закрученного стержня

Для построения системы элементарных решений ЕЗС решение уравнения (10.17) будем отыскивать в виде

$$u(\xi) = e^{\gamma \xi} a, \quad a = a(\xi_1, \xi_2). \quad (11.1)$$

После подстановки (11.1) в (10.17) получаем спектральную задачу на сечении

$$L_{\tau 1}(\gamma)a \equiv \{L_{\tau}(\gamma)a, M_{\tau}(\gamma)a\} = 0. \quad (11.2)$$

1. Остановимся на исследовании задачи (11.2).

Выделим группу однородных элементарных решений Сен-Венана. Для их построения рассмотрим вектор твердого смещения ЕЗС

$$u^0 = a^0 + \omega \times r, \quad (11.3)$$

где $a^0 = \{a_1^0, a_2^0, a_3^0\}$ — вектор поступательного смещения; $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — вектор малого поворота; ω_j, u_{0j} — проекции на оси x_j . Проектируя (11.3) на оси подвижной системы координат, получаем

$$\begin{aligned} u_{\xi 1}^0 &= a_1^0 \cos \varphi + a_2^0 \sin \varphi + (-\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \xi - \omega_3 \xi_2, \\ u_{\xi 2}^0 &= -a_1^0 \sin \varphi + a_2^0 \cos \varphi - (\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi) \xi + \omega_3 \xi_1, \\ u_{\xi}^0 &= a_3^0 + (\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi) \xi_2 + (\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) \xi_1. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Напомним, что $\varphi = \tau \xi$. Используя формулы Эйлера, выражения (11.4) представим в виде

$$\begin{aligned} u_{\xi 1}^0 &= C_1 e^{i\tau \xi} + C_2 e^{-i\tau \xi} + C_3 \xi e^{i\tau \xi} + C_4 \xi e^{-i\tau \xi} - C_6 \xi_2, \\ u_{\xi 2}^0 &= iC_1 e^{i\tau \xi} - iC_2 e^{i\tau \xi} + iC_3 \xi e^{i\tau \xi} - iC_6 \xi e^{-i\tau \xi} + C_6 \xi_1, \\ u_{\xi}^0 &= -C_3 \zeta e^{i\tau \xi} - C_4 \bar{\zeta} e^{-i\tau \xi} + C_5, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi_1 + i\xi_2, \quad \bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2, \quad C_1 = \frac{1}{2}(a_1^0 - ia_2^0), \quad C_2 = \bar{C}_1, \\ C_3 &= \frac{1}{2}(\omega_2 + i\omega_1), \quad C_4 = \bar{C}_3, \quad C_5 = a_3^0, \quad C_6 = \omega_3. \end{aligned}$$

Поскольку любое твердое смещение является однородным решением, а $C_l, l = 1, \dots, 6$, — произвольные постоянные, то на основании (11.5) можно сделать следующие выводы.

Утверждение 11.1. $\gamma = \gamma_0 = 0, \gamma = \gamma_1 = i\tau, \gamma = \gamma_{-1} = -i\tau$ являются собственными значениями (с. з.) спектральной задачи (11.2).

Утверждение 11.2. Собственному значению γ_1 соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_0^1 = a_1 = \{1, i, 0\}, \quad a_1^1 = a_3 = \{0, 0, -\xi_1 - i\xi_2\}. \quad (11.6)$$

Собственному значению γ_{-1} соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_0^2 = a_2 = \{1, -i, 0\}, \quad a_1^2 = a_4 = \{0, 0, -\xi_1 + i\xi_2\}. \quad (11.7)$$

Утверждение 11.3. Собственному значению γ_0 соответствуют два собственных вектора (с. в.)

$$a_0^3 = a_5 = \{0, 0, 1\}, \quad a_0^4 = a_6 = \{-\xi_2, \xi_1, 0\}. \quad (11.8)$$

Однако приведенная система собственных и присоединенных векторов не исчерпывает корневые подпространства соответствующих с. з.

Для построения полных жордановых цепочек, соответствующих с. з. γ_0 , γ_1 и γ_{-1} , воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.8), заменяя в соответствующих формулах операторы A , B , G , E на A_τ , B_τ , G_τ , E_τ . На основе реализации этого алгоритма можно сформулировать ряд утверждений.

Утверждение 11.4. Собственный вектор a_0^1 , помимо присоединенного вектора a_1^1 , имеет еще два присоединенных вектора a_2^1 и a_3^1 , которые определяются решением следующих краевых задач

$$\begin{aligned} L_\tau(i\tau)a_j^1 &= F_j^1, \quad M_\tau(i\tau)a_j^1|_{\partial S} = f_j^1, \\ F_j^1 &= -(2i\tau C + B_\tau)a_{j-1}^1 - Ca_{j-2}^1, \quad f_j^1 = -iG_\tau a_{j-1}^1|_{\partial S}, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (11.9)$$

С учетом конкретного вида векторов a_0^1 , a_1^1

$$F_2^1 = \{2\kappa, i2\kappa, 0\}, \quad f_2^1 = \{2\kappa n_1, i2\kappa n_2, 2\tau(1 + \kappa) b_n \zeta\}.$$

Утверждение 11.5. Собственный вектор a_0^2 , помимо присоединенного вектора a_1^2 , имеет еще два присоединенных вектора, a_2^2 и a_3^2 , которые определяются решением следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} L_\tau(-i\tau)a_j^2 &= F_j^2, \quad M_\tau(-i\tau)a_j^2|_{\partial S} = f_j^2, \\ F_j^2 &= (2i\tau C + B_\tau)a_{j-1}^2 - Ca_{j-2}^2, \\ f_j^2 &= -G_\tau a_{j-1}^2|_{\partial S}, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (11.10)$$

С учетом конкретного вида векторов a_0^2 , a_1^2

$$F_2^2 = \{2\kappa, -2\kappa i, 0\}, \quad f_2^2 = \{2\kappa n_1, -2i\kappa n_2, 2\tau(1 + \kappa) b_n \bar{\zeta}\}.$$

Утверждение 11.6. Собственный вектор $\mathbf{a}_0^3 = \{a_{10}^3, a_{20}^3, a_{30}^3\}$ имеет только один присоединенный вектор $\mathbf{a}_1^3 = \{a_{11}^3, a_{21}^3, a_{31}^3\}$, который определяется решением следующей краевой задачи:

$$A_\tau \mathbf{a}_1^3 = 0, \quad (11.11)$$

$$E_\tau \mathbf{a}_1^3 \Big|_{\partial S} = \mathbf{f}_1^3, \quad \mathbf{f}_1^3 = -G_\tau \mathbf{a}_0^3 = \{2\kappa n_1, 2\kappa n_2, 2(1 + \kappa) b_n \tau\}. \quad (11.12)$$

Утверждение 11.7. Собственный вектор $\mathbf{a}_0^4$ имеет только один присоединенный вектор $\mathbf{a}_1^4$, который определяется решением следующей краевой задачи:

$$A_\tau \mathbf{a}_1^4 = 0, \quad E_\tau \mathbf{a}_1^4 \Big|_{\partial S} = \mathbf{f}_1^4, \quad \mathbf{f}_1^4 = -G_\tau \mathbf{a}_0^4 = \{-\tau b \xi_2, \tau b_n \xi_1, -b\}. \quad (11.13)$$

Ограничимся доказательством утверждения 11.6.

Для доказательства разрешимости задачи (11.11), (11.12) необходимо показать, что

$$Z \equiv (A_\tau \mathbf{a}_1^3, \mathbf{a}_0^3) = 0. \quad (11.14)$$

Подставляя (10.13), (11.8) в (11.11), а также учитывая, что

$$\partial_1 D = D \partial_1 + \partial_2, \quad \partial_2 D = D \partial_2 - \partial_1, \quad (11.15)$$

получаем

$$\begin{aligned} Z &= \int_S (A_{31} a_{11}^3 + A_{32} a_{12}^3 + A_{33} a_{13}^3) dS = \\ &= \int_S \left[\partial_1 (\partial_1 a_{13}^3 + \tau (D a_{11}^3 - a_{12}^3)) + \partial_2 (\partial_2 a_{13}^3 + \tau (a_{11}^3 + D a_{12}^3)) + \right. \\ &\quad \left. + \tau D (2\kappa (\partial_1 a_{11}^3 + \partial_2 a_{12}^3) + 2(1 + \kappa) \tau D a_{13}^3) \right] dS. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Учитывая, что

$$\int_S g D f dS = - \int_S f D g dS + \int_{\partial S} b_n f g ds, \quad (11.17)$$

после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\partial S} \left[n_1 (\partial_1 a_{13}^3 + \tau (D a_{11}^3 - a_{12}^3)) + n_2 (\partial_2 a_{13}^3 + \tau (a_{11}^3 + D a_{12}^3)) + \right. \\ &\quad \left. + \tau b (\partial_1 a_{11}^3 + \partial_2 a_{12}^3 + 2(1 + \kappa) \tau D a_{13}^3) \right] ds = \int_{\partial S} E_\tau \mathbf{a}_1^3 ds. \end{aligned} \quad (11.18)$$

На основе граничного условия (11.12) окончательно имеем

$$\begin{aligned} Z &= - \int_{\partial S} G_{\tau} a_0^3 ds = - \int_{\partial S} [2\kappa(n_1 + n_2) + 2(1 + \kappa) b_n \tau] ds = \\ &= - \int_{\partial S} \left[2\kappa \left(\frac{d\xi_{20}}{ds} - \frac{d\xi_{10}}{ds} \right) + 2(1 + \kappa) \tau \frac{d}{ds} \left(\frac{r_0^2}{2} \right) \right] ds = 0. \end{aligned}$$

Остается показать, что данная жорданова цепочка состоит только из собственного вектора a_0^3 и одного присоединенного a_1^3 . В силу соотношения (2.17) для этого достаточно доказать, что

$$d_3 = (v_0^3, Jv_1^3) \neq 0, \quad (11.19)$$

где

$$v_0^3 = \{a_0^3, 0\}, \quad v_1^3 = \{a_1^3, b_1^3\}, \quad (11.20)$$

$$b_1^3 = (B_{3\tau} + \gamma_0 C) a_1^3 + C a_0^3 = B_{3\tau} a_1^3 + C a_0^3.$$

Введем для a_1^3 промежуточное обозначение a_{τ}^3 . Представим a_{τ}^3 в виде

$$a_{\tau}^3 = \tilde{a}_1^3 + \tau h, \quad \tilde{a}_1^3 = \{-\nu \xi_1, -\nu \xi_2, 0\}, \quad (11.21)$$

где $\tilde{a}_1^3$ — присоединенный вектор задачи растяжения-сжатия цилиндра (гл. 2).

Подставляя (11.21) в (11.11), (11.12), получаем

$$A_{\tau} h = 0, \quad E_{\tau} h = f, \quad f = \{0, 0, -2(1 + \kappa) b_n\}. \quad (11.22)$$

Подставляя (11.21) последовательно в (11.20), (11.19) имеем

$$d_3 = -(a_0^3, b_1^3) = -2(1 + \kappa)|S| + \tau I,$$

$$I = - \int_S [2\kappa(\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2) + 2(1 + \kappa)\tau D h_3] dS.$$

Заметим, что из выражений (11.22) вытекает, что вектор h не зависит от параметра τ . Поэтому по крайней мере для малых τ d_3 не обращается в нуль.

Таким образом, утверждение 11.6 доказано.

2. Элементарными однородными решениями Сен-Венана ЕЗС будем называть множество элементарных решений, соответствующих четырехкратным собственным значениям $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{\pm 1} = \pm i\tau$. Из проведенного выше анализа следует, что это множество состоит из 12 элементарных решений, которые можно представить в виде

$$u_1(\xi) = e^{i\tau\xi} a_1, \quad u_2(\xi) = \bar{u}_1(\xi), \quad u_3(\xi) = e^{i\tau\xi} (\xi a_1 + a_3),$$

$$u_4(\xi) = \bar{u}_3(\xi), \quad u_5(\xi) = a_5, \quad u_6(\xi) = a_6,$$

$$u_7(\xi) = e^{i\tau\xi} \left(\frac{\xi^3}{6} a_1 + \frac{\xi^2}{2} a_3 + \xi a_9 + a_7 \right), \quad (11.23)$$

$$u_8(\xi) = \bar{u}_7(\xi), \quad u_9(\xi) = e^{i\tau\xi} \left(\frac{\xi^2}{2} a_1 + \xi a_3 + a_9 \right),$$

$$u_{10}(\xi) = \bar{u}_9(\xi), \quad u_{11}(\xi) = \xi a_5 + a_{11}, \quad u_{12}(\xi) = \xi a_6 + a_{12}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^1 = \{1, i, 0\}, & a_2 &= a_0^2 = \bar{a}_1, & a_3 &= a_1^1 = \{0, 0, -\zeta\}, \\ a_4 &= a_1^2 = \bar{a}_3, & a_5 &= a_0^3 = \{0, 0, 1\}, & a_6 &= a_0^4 = \{-\xi_2, \xi_1, 0\}, \\ a_7 &= a_3^1, & a_8 &= a_3^2 = \bar{a}_7, & a_9 &= a_2^1, \\ a_{10} &= a_2^2 = \bar{a}_9, & a_{11} &= a_1^3, & a_{12} &= a_1^4. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Определим компоненты тензоров напряжений, соответствующих каждому элементарному решению. Для компонент векторов a_l и тензоров напряжений, соответствующих элементарным решениям с индексом l , введем обозначения $a_{i,l}$, $\sigma_{mn,l}$. Используя формулы (10.11), (11.23), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{mn,l} &= 0, \quad l = 1, \dots, 6, \\ \sigma_{mn,7} &= \mu e^{i\tau\xi} (\xi b_{mn,9} + b_{mn,7}), \quad \sigma_{mn,8} = \bar{\sigma}_{mn,7}, \\ \sigma_{mn,9} &= \mu e^{i\tau\xi} (\xi b_{mn,9}), \quad \sigma_{mn,10} = \bar{\sigma}_{mn,9}, \\ \sigma_{mn,11} &= \mu b_{mn,11}, \quad \sigma_{mn,12} = b_{mn,12}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Подставляя (11.25) в соотношения обобщенного закона Гука (10.11), получаем следующие выражения для следов напряжений:

$$\begin{aligned} b_{11,7} &= 2[(1 + \kappa) \partial_1 a_{1,7} + \kappa \partial_2 a_{2,7} + \tau \kappa (D + i) a_{3,7} + \kappa a_{3,9}], \\ b_{22,7} &= 2[\kappa \partial_1 a_{1,7} + (1 + \kappa) \partial_2 a_{2,7} + \tau \kappa (D + i) a_{3,7} + \kappa a_{3,9}], \\ b_{33,7} &= 2[\kappa (\partial_1 a_{1,7} + \partial_2 a_{2,7}) + \tau (1 + \kappa) (D + i) a_{3,7} + (1 + \kappa) a_{3,9}], \\ b_{12,7} &= \partial_2 a_{1,7} + \partial_1 a_{2,7}, \quad b_{13,7} = \partial_1 a_{3,7} + \tau (D + i) a_{1,7} - \tau a_{2,7} + a_{1,9}, \\ b_{23,7} &= \partial_2 a_{3,7} + \tau a_{1,7} + \tau (D + i) a_{2,7} + a_{2,9}, \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} b_{11,9} &= 2[(1 + \kappa) \partial_1 a_{1,9} + \kappa \partial_2 a_{2,9} + \tau \kappa (D + i) a_{3,9} - \kappa \zeta], \\ b_{22,9} &= 2[\kappa \partial_1 a_{1,9} + (1 + \kappa) \partial_2 a_{2,9} + \tau \kappa (D + i) a_{3,9} - \kappa \zeta], \\ b_{33,9} &= 2[\kappa (\partial_1 a_{1,9} + \partial_2 a_{2,9}) + \tau (1 + \kappa) (D + i) a_{3,9} - (1 + \kappa) \zeta], \\ b_{12,9} &= \partial_2 a_{1,9} + \partial_1 a_{2,9}, \quad b_{13,9} = \partial_1 a_{3,9} + \tau (D + i) a_{1,9} - \tau a_{2,9}, \\ b_{23,9} &= \partial_2 a_{3,9} + \tau a_{1,9} + \tau (D + i) a_{2,9}, \end{aligned} \quad (11.27)$$

$$\begin{aligned}
b_{11,11} &= 2[(1 + \kappa) \partial_1 a_{1,11} + \kappa \partial_2 a_{2,11} + \tau \kappa D a_{3,11} + \kappa], \\
b_{22,11} &= 2[\kappa \partial_1 a_{1,11} + (1 + \kappa) \partial_2 a_{2,11} + \tau \kappa D a_{3,11} + \kappa], \\
b_{33,11} &= 2[\kappa(\partial_1 a_{1,11} + \partial_2 a_{2,11}) + \tau(1 + \kappa) D a_{3,11} + (1 + \kappa)], \quad (11.28) \\
b_{12,11} &= \partial_2 a_{1,11} + \partial_1 a_{2,11}, \quad b_{13,11} = \partial_1 a_{3,11} + \tau D a_{1,11} - \tau a_{2,11}, \\
b_{23,11} &= \partial_2 a_{3,11} + \tau a_{1,11} + \tau D a_{2,11},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{11,12} &= 2[(1 + \kappa) \partial_1 a_{1,12} + \kappa \partial_2 a_{2,12} + \tau \kappa D a_{3,12}], \\
b_{22,12} &= 2[\kappa \partial_1 a_{1,12} + (1 + \kappa) \partial_2 a_{2,12} + \tau \kappa D a_{3,12}], \\
b_{33,12} &= 2[\kappa(\partial_1 a_{1,12} + \partial_2 a_{2,12}) + \tau(1 + \kappa) D a_{3,12}], \quad (11.29) \\
b_{12,12} &= \partial_2 a_{1,12} + \partial_1 a_{2,12}, \quad b_{13,12} = \partial_1 a_{3,12} + \tau D a_{1,12} - \tau a_{2,12} - \xi_2, \\
b_{23,12} &= \partial_2 a_{3,12} + \tau a_{1,12} + \tau D a_{2,12} + \xi_1.
\end{aligned}$$

В дальнейших исследованиях широко будет использоваться следующая векторная форма напряжения $\sigma_{m3,l}$ и связанных с ними следов $b_{m3,l}$ ($m = 1, 2, 3$; $l = 7, \dots, 12$); $\sigma_l = \{\sigma_{13,l}, \sigma_{23,l}, \sigma_{33,l}\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_7(\xi) &= e^{i\tau\xi}(\xi b_9 + b_7), \quad \sigma_8(\xi) = \bar{\sigma}_7(\xi), \quad \sigma_9(\xi) = e^{i\tau\xi} b_9, \quad (11.30) \\
\sigma_{10}(\xi) &= \bar{\sigma}_9(\xi), \quad \sigma_{11}(\xi) = b_{11}, \quad \sigma_{12}(\xi) = b_{12}, \\
b_l &= \{b_{13,l}, b_{23,l}, b_{33,l}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_7 &= b_3^1 = (B_{3\tau} + i\tau C) a_7 + C a_9, \quad b_8 = b_3^2 = \bar{b}_7, \\
b_9 &= b_2^1 = (B_{3\tau} - i\tau C) a_9 + C a_3, \quad b_{10} = b_2^2 = \bar{b}_9, \quad (11.31) \\
b_{11} &= b_1^3 = B_{3\tau} a_{11} + C a_5, \quad b_{12} = b_1^4 = B_{3\tau} a_{12} + C a_6.
\end{aligned}$$

Замечание. Поскольку $u_l(\xi)$ при $l = 1, \dots, 6$ определяют смещения ЭЗС как твердого тела, то $\sigma_l(\xi) = 0$.

§ 12. Вариационная постановка двумерных задач на сечении

Покажем, что краевые задачи (11.9)–(11.13) сводятся к вариационным для неопределенных квадратичных функционалов.

1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$A_\tau a = 0, \quad G_\tau a|_{\partial S} = f, \quad (12.1)$$

которая символизирует задачи (11.11)–(11.13).

Покажем, что краевая задача (12.1) эквивалентна нахождению минимума квадратичного функционала

$$\Phi(a) = \Phi_0(a) - l(a) \quad (12.2)$$

на подпространстве H_* вектор-функций $a \in H$, удовлетворяющих условиям

$$(a, a_0^3)_H = 0, \quad (a, a_0^4)_H = 0. \quad (12.3)$$

В (12.2)

$$\begin{aligned} \Phi_0(a) = \int_S & \left[2\kappa |\partial_\alpha a_\alpha + \tau D a_3|^2 + |\partial_1 a_3 + \tau(D a_1 - a_2)|^2 + \right. \\ & + |\partial_2 a_3 + \tau(a_1 + D a_2)|^2 + 2(|\partial_1 a_1|^2 + |\partial_2 a_2|^2) + \\ & \left. + |\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1|^2 + 2\tau^2 |D a_3|^2 \right] dS, \quad (12.4) \end{aligned}$$

$$l(a) = 2 \int_{\partial S} f_k \bar{a}_k ds.$$

Рассмотрим вариацию

$$\delta \Phi = \delta \Phi_0 - 2 \int_{\partial S} f_k \delta a_k ds. \quad (12.5)$$

Интегрируя (12.5) по частям, получаем

$$\delta \Phi_0 = \int_S A_{ij} a_j \delta a_i dS + \int_{\partial S} E_{ij} a_j \delta a_i ds. \quad (12.6)$$

Подставляя (12.6) в (12.5) и учитывая, что δa_i — произвольные вариации, получаем

$$A_{ij} a_j = 0, \quad E_{ij} a_j|_{\partial S} = f_i,$$

что эквивалентно векторной форме (12.1).

В случае, когда

$$f = f_1^3 = \{2\kappa, 2\kappa, 2(\kappa + 1)b_n\tau\},$$

$$f = f_1^4 = \{-\tau b_n \xi_2, \tau b_n \xi_1, -b_n\},$$

обе задачи разрешимы, а соответствующие линейные функционалы можно представить как в виде контурных интегралов, так и в виде интегралов по области S .

В первом случае

$$l(a) = 4 \int_{\partial S} [\kappa(n_1 a_1 + n_2 a_2) + \tau(1 + \kappa)b_n a_3] ds = \\ = 4 \int_S [\kappa(\partial_1 a_1 + \partial_2 a_2) + \tau(1 + \kappa)Da_3] dS.$$

Во втором случае

$$l(a) = 2 \int_{\partial S} [\tau(-\xi_2 b_n a_1 + \xi_1 b_n a_2) - b_n a_3] ds = \\ = 2 \int_S [\tau(-\xi_2 Da_1 + \xi_1 Da_2 + \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2) - Da_3] dS.$$

Решение каждой задачи может быть представлено в виде

$$a = a_* + C_1 a_0^3 + C_2 a_0^4,$$

где C_α — произвольные постоянные. Дополнительные условия (12.3) позволяют однозначно определить решение.

2. Рассмотрим теперь краевые задачи

$$L_\tau(\pm i\tau)a^\pm = F^\pm, \quad M_\tau(\pm i\tau)a^\pm|_{\partial S} = f^\pm, \quad (12.7)$$

которые символизируют задачи (11.9) и (11.10).

Аналогичными приемами можно показать, что решения $a^\pm$ краевых задач (12.7) эквивалентны решению вариационных задач для функционалов

$$\Phi^\pm(a^\pm) = \Phi_0^\pm(a^\pm) - 2 \operatorname{Re} \int_S F_k^\pm a_k^\pm dS - 2 \operatorname{Re} \int_{\partial S} f_k^\pm a_k^\pm ds. \quad (12.8)$$

Выражения для функционалов $\Phi_0^\pm$ получаются заменами D на $D \pm i$ в формуле (12.4). Построение функционалов $\Phi_0^\pm$ осуществляется с помощью введения вспомогательных векторов

$$a_*^\pm = (Da_1^\pm - a_2^\pm)e_1 + (Da_2^\pm + a_1^\pm)e_2. \quad (12.9)$$

Решение каждой из задач (12.7) может быть представлено в виде

$$a^\pm = a_*^\pm + C^\pm a_0^\pm, \quad a_0^+ = a_0^1, \quad a_0^- = a_0^2;$$

здесь $C^\pm$ — произвольные постоянные.

Квадратичные формы $\Phi_0^\pm$ являются положительно определенными на подпространствах $H^\pm$, элементы которых удовлетворяют условиям

$$(a, a_0^\pm) = 0. \quad (12.10)$$

Приведенная вариационная постановка позволяет, в частности, использовать метод конечных элементов для построения решения конкретных краевых задач.

§ 13. Основные свойства элементарных решений Сен-Венана. Матрица жесткостей

Решением Сен-Венана для ЕЗС будем называть линейные комбинации вида

$$u_S(\xi) = \sum_{l=1}^6 C_l u_l(\xi) + \sum_{l=7}^{12} C_l u_l(\xi - L), \quad \sigma_S(\xi) = \mu \sum_{l=7}^{12} C_l \sigma_l(\xi - L). \quad (13.1)$$

Покажем, что постоянные C_l , $l = 7, \dots, 12$, можно выразить через компоненты главного вектора $\mathbf{Q} = \{Q_{\xi 1}, Q_{\xi 2}, Q_3\} = \{Q_{x1}, Q_{x2}, Q_3\}$ и главного момента $\mathbf{M} = \{M_{\xi 1}, M_{\xi 2}, M_3\} = \{M_{x1}, M_{x2}, M_3\}$ напряжений $\sigma_3 = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}$, действующих в сечении S . Здесь

$$\begin{aligned} Q_{\xi k} &= \int_S \sigma_{k3} dS, \quad M_{\xi 1} = \int_S \xi_2 \sigma_{33} dS, \\ M_{\xi 2} &= - \int_S \xi_1 \sigma_{33} dS, \quad M_3 = \int_S (\xi_1 \sigma_{23} - \xi_2 \sigma_{13}) dS; \end{aligned} \quad (13.2)$$

σ_{k3} — проекции вектора напряжений в сечении $\xi = \text{const}$ на оси сопутствующей системы координат,

$$Q_{x1} = Q_{\xi 1} \cos(\tau \xi) - Q_{\xi 2} \sin(\tau \xi),$$

$$Q_{x2} = Q_{\xi 1} \sin(\tau \xi) + Q_{\xi 2} \cos(\tau \xi).$$

Для этого, используя обозначения гл. 1, введем расширенные векторы

$$\mathbf{v}_l = \{\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l\}$$

и рассмотрим скалярные произведения

$$d_{lq} = (\mathbf{v}_{q+6}, J\mathbf{v}_l)_1, \quad q, l = 1, \dots, 6. \quad (13.3)$$

Учитывая, что $\mathbf{v}_l = \{\mathbf{a}_l, 0\}$, имеем

$$d_{lq} = (\mathbf{b}_{q+6}, \mathbf{a}_l), \quad (13.4)$$

Напомним, что векторы $\mathbf{b}_{q+6}$ определяются группой формул (11.26)–(11.31).

В дальнейшем d_{ql} будем называть *элементами матрицы жесткости* D_g . Для $\tau \neq 0$, согласно утверждениям 2.3, 2.4 гл. 1, можно

показать, что матрица жесткости имеет следующую структуру:

$$D_g = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & d_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{65} & d_{66} \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

Объем вычислений элементов матрицы жесткости существенно уменьшается, если учесть, что

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = -d_{33} = -d_{44} = -d = \int_S \bar{\zeta} b_{33,9} dS, \\ d_{31} &= \overline{d_{42}} = - \int_S \bar{\zeta} b_{33,7} dS, \quad d_{55} = \int_S b_{33,11} dS, \\ d_{56} &= d_{65} = \int_S b_{33,12} dS, \quad d_{66} = \int_S (\xi_1 b_{23,12} - \xi_2 b_{13,12}) dS. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Докажем, что $d_{56} = d_{65}$. На основании соотношений (2.18), (2.20) и с учетом вещественности компонент векторов $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$, $\mathbf{b}_{11}$, $\mathbf{b}_{12}$ получим

$$\begin{aligned} d_{56} &= (\mathbf{b}_{12}, \mathbf{a}_5) = (\mathbf{v}_{12}, J\mathbf{v}_5)_1 = (\mathbf{v}_{12}, JT\mathbf{v}_{11})_1 = (T^*J^*\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{11})_1 = \\ &= (-T^*J\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{11})_1 = (JT\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{11})_1 = (J\mathbf{v}_6, \mathbf{v}_{11})_1 = \\ &= (\mathbf{a}_6, \mathbf{b}_{11}) = (\mathbf{b}_{11}, \mathbf{a}_6) = d_{65}. \end{aligned}$$

Рассмотрим скалярные произведения $(\sigma_s, \mathbf{a}_q)$, $q = 1, \dots, 6$. С учетом конкретного вида векторов $\mathbf{a}_q$, σ_s и структуры матрицы жесткости, получаем

$$-e^{i\tau\eta} \mu dC_7 = Q_{\xi 1} - iQ_{\xi 2}, \quad e^{i\tau\eta} \mu [(d_{31} + \eta d)C_7 + dC_9] = M_{\xi 2} + iM_{\xi 1}, \quad (13.7)$$

$$\mu(d_{55}C_{11} + d_{56}C_{12}) = Q_3, \quad \mu(d_{56}C_{11} + d_{66}C_{12}) = M_3, \quad (13.8)$$

Здесь $\eta = \xi - L$.

Поскольку

$$Q_{\xi 1} - iQ_{\xi 2} = e^{i\tau\eta} (Q_{x1} - iQ_{x2}), \quad M_{\xi 2}(\xi) + iM_{\xi 1} = e^{i\tau\eta} (M_{x2} + iM_{x1}),$$

$$M_{x1} = M_{x1}^* - \xi Q_{x2}, \quad M_{x2} = M_{x2}^* + \xi Q_{x1},$$

M_{x1}^*, M_{x2}^* — изгибающие моменты в сечении $\xi = L$, получаем

$$\mu dC_7 = -Q_{x1} + iQ_{x2}, \quad (13.9)$$

$$\mu dC_9 = M_{x2}^* + iM_{x1}^* + d_{31}(Q_{x1} - iQ_{x2}). \quad (13.10)$$

Формулы (13.7)–(13.10) доказывают, что постоянные C_l , $l = 7, \dots, 12$, определяются только компонентами главного вектора и главного момента напряжений, действующих в поперечном сечении ЕЗС.

§ 14. Решение трехмерной задачи и обоснование принципа Сен-Венана для ЕЗС

Решение трехмерной задачи при отсутствии напряжений на боковой поверхности ЕЗС, как и в случае цилиндра, можно представить в виде

$$u(\xi) = u_S(\xi) + u_P(\xi), \quad \sigma(\xi) = \sigma_S(\xi) + \sigma_P(\xi). \quad (14.1)$$

где $u_S(\xi)$, $\sigma_S(\xi)$ — решения Сен-Венана (13.1),

$$u_P(\xi) = \sum_k [C_k^+ u_k^+(\xi) + C_k^- u_k^-(\xi - L)],$$

$$\sigma_P(\xi) = \sum_k [C_k^+ \sigma_k^+(\xi) + C_k^- \sigma_k^-(\xi - L)].$$

Здесь $w_k^\pm(\xi) = \{u_k^\pm(\xi), \sigma_k^\pm(\xi)\}$ — элементарные решения, соответствующие собственным значениям, отличным от $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_{\pm 1} = \pm i\tau$; $C_l^\pm$, $C_k^\pm$ — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий на торцах $\xi = 0$, $\xi = L$. При удалении от сечений $\xi = 0$ и $\xi = L$ во внутреннюю часть псевдоцилиндра $u_k^\pm(\xi)$ и $\sigma_k^\pm(\xi)$ экспоненциально убывают:

$$u_k^+(\xi) = e^{\gamma_k^+ \xi} a_k^+, \quad u_k^-(\xi - L) = e^{\gamma_k^- (\xi - L)} a_k^-,$$

$$\sigma_k^+(\xi) = e^{\gamma_k^+ \xi} b_k^+, \quad \sigma_k^-(\xi - L) = e^{\gamma_k^- (\xi - L)} b_k^-.$$

Для граничных условий (10.18) можно реализовать алгоритм § 5 сведения краевой задачи к бесконечным системам алгебраических уравнений относительно C_l , C_k . При этом постоянные C_l , $l = 7, \dots, 12$, определяются точно из соотношений (13.6), (13.10), затем вычисляются коэффициенты $C_k^\pm$. Точные значения постоянных C_l , $l = 1, \dots, 6$, входящие в решение Сен-Венана, могут быть найдены только на основе решения бесконечных систем (этот вопрос подробно обсуждался в § 5). Однако для достаточно длинного ЕЗС, как показывает асимптотический анализ этих систем, приближенные их значения определяются следующими соотношениями:

$$C_1 = \left(\frac{1}{6} L^3 C_7 - \frac{1}{2} L^2 C_9 \right) e^{-i\tau L}, \quad C_2 = \overline{C}_1, \quad (14.2)$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} L^2 C_7 e^{-i\tau L}, \quad C_4 = \overline{C}_3, \quad C_5 = -LC_{11}, \quad C_6 = -LC_{12}.$$

Обоснование принципа Сен-Венана в случае ЕЗС можно осуществить методом, изложенным в § 5. Действительно, и в рассматриваемом случае решение трехмерной задачи представимо в виде (5.2)–(5.4), и, следовательно, по-прежнему необходимо доказать, что:

- 1) главные векторы и главные моменты $\sigma_k^\pm(\xi)$ равны нулю;
- 2) среди $\gamma_k^\pm$ нет чисто мнимых, так как для чисто мнимых $\gamma_k^\pm$ соответствующие элементарные решения не затухают при удалении от торцов ЕЗС.

Первое утверждение вытекает из утверждения 2.3 гл. 1 и следующей цепочки равенств:

$$(\mathbf{v}_k^\pm, J\mathbf{v}_l)_1 = (\mathbf{a}_k^\pm, \mathbf{b}_l) - (\mathbf{b}_k^\pm, \mathbf{a}_l) = -(\mathbf{b}_k^\pm, \mathbf{a}_l) = 0, \quad l = 1, \dots, 6.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{b}_l = 0$.

Для доказательства второго утверждения умножим уравнение (11.2) скалярно в H на вектор $\mathbf{a}$. Получаем относительно γ квадратное уравнение

$$g_0 \gamma^2 + g_1 \gamma - g_2 = 0; \quad (14.3)$$

здесь

$$g_0 = (C\mathbf{a}, \mathbf{a}), \quad g_1 = (B_\tau \mathbf{a}, \mathbf{a}), \quad g_2 = (A_\tau \mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

Преобразуем g_1 :

$$g_1 = (B_\tau \mathbf{a}, \mathbf{a}) = (B_{3\tau} \mathbf{a}, \mathbf{a}) - (B'_{3\tau} \mathbf{a}, \mathbf{a}) = (B_{3\tau} \mathbf{a}, \mathbf{a}) - (B_{3\tau} \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \\ = 2i \operatorname{Im} (B_{3\tau} \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2ig.$$

Так как g_1 — чисто мнимая величина, то для доказательства второго утверждения достаточно показать, что дискриминант уравнения (14.3)

$$\Delta = g_1^2 + 4g_0g_2 = 4(-g^2 + g_0g_2) > 0.$$

Представим g_0, g, g_2 в следующем виде:

$$g_0 = c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2,$$

$$g = \operatorname{Im} \left[2 \left(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{a}_0 + \tau D\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \right)_\kappa + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{a}_3 + \tau \mathbf{a}_*, \mathbf{a}_0 \right) + 2\tau (D\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3) \right],$$

$$g_2 = 2f_1^2 + f_2^2 + 2f_3^2 + 2d_1^2 + d_2^2.$$

Здесь

$$c_1 = \|\mathbf{a}_0\|, \quad c_2 = \|\mathbf{a}_3\|, \quad c_3 = \|\mathbf{a}_3\|_\kappa,$$

$$\mathbf{a}_0 = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{a}_* = (Da_1 - a_2)\mathbf{e}_1 + (Da_2 + a_1)\mathbf{e}_2,$$

$$f_1 = \left\| \overset{\circ}{\nabla} a_0 + \tau D a_3 \right\|_{\kappa}, \quad f_2 = \left\| \overset{\circ}{\nabla} a_3 + \tau a_{\star} \right\|, \quad f_3 = \tau \|D a_3\|,$$

$$d_1^2 = \|\partial a_1\|^2 + \|\partial_2 a_2\|^2, \quad d_2^2 = \|\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1\|^2, \quad \overset{\circ}{\nabla} = e_{\alpha} \partial_{\alpha},$$

$$(a, b)_{\kappa} = \kappa \int_S \overline{a} b \, dS, \quad \|a\|_{\kappa}^2 = (a, a)_{\kappa}.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем следующую оценку для g :

$$\begin{aligned} |g| &\leq \left| 2(\overset{\circ}{\nabla} a_0 + \tau D a_3, a_3)_{\kappa} + (\overset{\circ}{\nabla} a_3 + \tau a_{\star}, a_0) + 2\tau (D a_3, a_3) \right| \leq \\ &\leq 2f_1 c_3 + f_2 c_1 + 2f_3 c_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &\geq -(2f_1 c_3 + f_2 c_1 + 2f_3 c_2)^2 + (c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2) \times \\ &\times (2f_1^2 + f_2^2 + 2f_3^2 + 2d_1^2 + d_2^2) = 2(f_1 c_1 - f_2 c_3)^2 + \\ &+ 4(f_1 c_2 - c_3 f_3)^2 + 2(f_2 c_2 - f_3 c_1)^2 + (2d_1^2 + d_2^2)(c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Равенство $\Delta = 0$ возможно лишь при условиях

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad d_1 = d_2 = 0,$$

которые выполняются тогда и только тогда, когда вектор a_0 является линейной комбинацией векторов $a_0^1, a_0^2, a_0^3, a_0^4$. Следовательно, дискриминант обращается в нуль только на собственных векторах, соответствующих собственным значениям $\gamma_0 = 0, \gamma_{\pm 1} = \pm i\tau$, и, значит, остальные собственные значения не могут быть чисто мнимыми. Из выражений (5.2)–(5.4) вытекает, что

$$\sigma(\xi) - \sigma_{\star}(\xi) = O(\exp \gamma_{\star} \theta),$$

$$\gamma_{\star} = \max_k \operatorname{Re} \gamma_k^{+} < 0, \quad \theta = \min(\xi, L - \xi).$$

Эта оценка и обосновывает принцип Сен-Венана.

§ 15. Метод малого параметра (случай малой «крутки»)

1. Основные трудности построения решения Сен-Венана для естественно закрученного стержня связаны с двумерными граничными задачами (11.9)–(11.13), содержащими параметр τ . Построение точных аналитических решений этих задач даже для таких канонических поперечных сечений, как эллипс или прямоугольник, вряд ли возможно. Однако в случае, когда безразмерный параметр $\tau_0 = h\tau \ll 1$, решение этих задач можно свести к рекуррентным системам

плоских и антиплоских задач теории упругости. Поэтому в случае малой «крутки» для ряда конкретных поперечных сечений можно получить приближенные аналитические решения в виде разложений по параметру τ_0 . Реально метод малого параметра реализуем в низких приближениях, поскольку трудности аналитического интегрирования существенно возрастают при построении каждого следующего члена асимптотического разложения.

Преобразуем операторы в уравнениях и граничных условиях (11.9)–(11.13) к безразмерным координатам $\xi_{\alpha 0} = \xi_{\alpha}/h$ и введем безразмерный параметр τ_0 . Легко проверить, что при этом исходный вид операторов не изменится. Поэтому в дальнейшем нулевой индекс опускается.

Будем отыскивать решение в виде

$$a_s = a_s^0 + \tau a_s^1 + \dots, \quad s = 7, \dots, 12. \quad (15.1)$$

Не приводя детали построения отдельных приближений, поясним некоторые особенности применения метода малого параметра в рассматриваемых задачах, которые возникают в случае, когда центр тяжести сечения S не принадлежит винтовой оси ($r_c \neq 0$).

Напомним, что каждая из задач (11.9)–(11.13) является «задачей на спектре», а именно, однородная задача имеет нетривиальное решение и поэтому любой присоединенный вектор в жордановой цепочке определяется с точностью до линейной комбинации собственных векторов (это обстоятельство уже обсуждалось выше в §15 при рассмотрении вариационных постановок этих задач). На первом этапе интегрирования для построения векторов a_s^0 получаем известные краевые задачи, рассмотренные в гл. 2. Это легко понять, поскольку при $\tau = 0$ каждая задача (11.9)–(11.13) для ЕЗС вырождается в соответствующую задачу для цилиндра. Поскольку все решения задач для цилиндра определяют элементы жордановых цепочек, соответствующих с.з. $\gamma_0 = 0$, каждый присоединенный вектор определяется с точностью до линейной комбинации всех собственных векторов $a_0^1 = a_1$, $a_0^2 = a_2$, $a_0^3 = a_5$, $a_0^4 = a_6$. Это обстоятельство необходимо учитывать и выбирать постоянные в этих линейных комбинациях так, чтобы на следующих этапах интегрирования получать корректно разрешимые краевые задачи.

Приближенные решения, построенные на основе двух членов разложений, описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_7^0 &= \{0, 0, \theta\}, & a_7^1 &= \{w_1, w_2, 0\}, & a_8^0 &= \overline{a_7^0}, & a_8^1 &= \overline{a_7^1}, \\ a_9^0 &= \{\Psi_1, \Psi_2, 0\}, & a_9^1 &= \{0, 0, \varphi_1\}, & a_{10}^0 &= \overline{a_9^0}, & a_{10}^1 &= \overline{a_9^1}, \\ a_{11}^0 &= \{-\nu(\xi_1 - r_c), -\nu\xi_2, 0\}, & a_{11}^1 &= \{0, 0, -2(1 + \nu)\varphi\}, \\ a_{12}^0 &= \{0, 0, \varphi\}, & a_{12}^1 &= \{v_1, v_2, 0\}, \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned}
b_7^0 &= \{\partial_1 \theta + \Psi_1, \partial_2 \theta + \Psi_2, 0\}, \\
b_7^1 &= \{0, 0, 2\kappa(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) + 2(1 + \kappa)\omega\}, \quad b_8^0 = \overline{b_7^0}, \quad b_8^1 = \overline{b_7^1}, \\
b_9^0 &= \{0, 0, -2(1 + \nu)\xi_1\}, \quad b_9^1 = \{2(1 + \nu)\partial_1 \varphi_1, 2(1 + \nu)\partial_2 \varphi_1, 0\}, \\
b_{10}^0 &= \overline{b_9^0}, \quad b_{10}^1 = \overline{b_9^1}, \\
b_{11}^0 &= \{0, 0, 2(1 + \nu)\}, \quad b_{11}^1 = \{-2(1 + \nu)\partial_1 \varphi, -2(1 + \nu)\partial_2 \varphi, 0\}, \\
b_{12}^0 &= \{\partial_1 \varphi - \xi_2, \partial_2 \varphi + \xi_1 + a, 0\}, \\
b_{12}^1 &= \{0, 0, 2\kappa(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) + 2(1 + \kappa)D\varphi\}.
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Здесь

$$b_s = b_s^0 + \tau b_s^1, \quad \Psi_1 = \frac{\nu}{2} \zeta^2 - C\xi_2, \quad \Psi_2 = -\frac{i\nu}{2} \zeta^2 + C\xi_1.$$

Функции φ , φ_1 , θ , v_α , w_α определяются решением задач:

$$\Delta \varphi = 0, \quad \partial_n \varphi|_{\partial S} = b_n, \tag{15.4}$$

$$\Delta \varphi_1 = -2ir_c, \quad \partial_n \varphi_1|_{\partial S} = (2(1 + \nu)b_n \zeta + r_c(in_1 + n_2)\zeta)|_{\partial S}, \tag{15.5}$$

$$\Delta \theta = 2z, \quad \partial_n \theta|_{\partial S} = \left(-i\nu\eta^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{\zeta}}{2}\right) + Cb_n\right)|_{\partial S}, \tag{15.6}$$

$$A_{\alpha\beta} v_\beta = -(1 + 2\kappa)\partial_\alpha D\varphi, \tag{15.7}$$

$$E_{\alpha\beta} v_\beta|_{\partial S} = f_{v\alpha}, \tag{15.8}$$

$$f_{v1} = -(2\kappa n_1 D\varphi + b_n(\partial_1 \varphi - \xi_2))|_{\partial S},$$

$$f_{v2} = -(2\kappa n_2 D\varphi + b_n(\partial_2 \varphi + \xi_1 - r_0))|_{\partial S},$$

$$A_{\alpha\beta} w_\beta = F_\alpha, \quad E_{\alpha\beta} w_\beta|_{\partial S} = f_\alpha, \tag{15.9}$$

$$F_\alpha = -(1 + 2\kappa)\partial_\alpha(D + i)\omega,$$

$$f_\alpha = -(2\kappa n_\alpha \omega + b_n b_{\alpha 3})|_{\partial S}, \quad b_{\alpha 3} = \partial_\alpha \theta + \Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_n = n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2, \quad \partial_s = n_2 \partial_1 - n_1 \partial_2,$$

$$D = \xi_2 \partial_1 - \xi_1 \partial_2, \quad \zeta = \xi_1 - r_c + i\xi_2,$$

$$\begin{aligned}
b_n &= n_1 \xi_2 - n_2 (\xi_1 - r_c), \quad \omega = (D + i)\theta + \varphi_1, \\
A_{11} &= 2(1 + \kappa) \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad A_{12} = (1 + 2\kappa) \partial_1 \partial_2 = A_{21}, \\
A_{22} &= \partial_1^2 + 2(1 + \kappa) \partial_2^2, \quad E_{11} = 2(1 + \kappa) n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2, \\
E_{12} &= 2\kappa n_1 \partial_2 + n_2 \partial_1, \quad E_{21} = 2\kappa n_2 \partial_1 + n_1 \partial_2, \\
E_{22} &= n_1 \partial_1 + 2(1 + \kappa) n_2 \partial_2.
\end{aligned}$$

Заметим, что φ — функция деформации сечения призматического стержня, а (15.7), (15.8) — задачи плоской теории упругости с массовыми силами, отличными от нуля.

Постоянная C определяется из условия разрешимости задачи (15.8) и имеет следующий вид:

$$C = 2ir_c(1 + \nu) \frac{I_1}{I_p}, \quad I_1 = \int_S \xi_2^2 dS, \quad I_p = \int_S [(\xi_1 - r_c)^2 + \xi_2^2] dS.$$

Для вычисления элементов матрицы жесткости d_{ij} с асимптотической погрешностью $O(\tau^2)$ не обязательно решать краевые задачи (15.7), (15.8). Для этого достаточно решить более простые задачи (15.4)–(15.6) и использовать некоторые интегральные тождества, которые можно получить, используя уравнения (15.7), (15.8) и асимптотические разложения для следов напряжений b_{ij} . При этом вид матрицы D_g (13.5) существенно изменяется. Ее элементы могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -E(I_p + r_c^2|S|), \quad d_{12} = E(I_1 - I_2 - r_c^2|S|), \quad d_{13} = 0, \\
d_{14} &= \tau\mu \int_S (\partial_1 - i\partial_2)\varphi_1 dS, \quad d_{15} = 0, \quad d_{16} = -i\mu r_0|S|, \\
d_{21} &= d_{12}, \quad d_{22} = d_{11}, \quad d_{23} = \overline{d_{14}}, \\
d_{24} &= 0, \quad d_{25} = 0, \quad d_{26} = i\mu r_0|S|, \\
d_{31} &= -\tau\mu \int_S [2(1 + \nu)(\xi_1 - i\xi_2)\omega + \overline{\Psi_1}\partial_1\varphi_1 + \overline{\Psi_2}\partial_2\varphi_1] dS, \\
d_{32} &= -\tau\mu \int_S [2(1 + \kappa)(\xi_1 - i\xi_2)\overline{\omega} + \overline{\Psi_1}\partial_1\overline{\varphi_1} + \overline{\Psi_2}\partial_2\overline{\varphi_1}] dS, \\
d_{33} &= -d_{11}, \quad d_{34} = -d_{12}, \quad d_{35} = -r_c E|S|, \\
d_{36} &= -2\tau\mu \int_S [\kappa(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) + (1 + \kappa)D\varphi] (\eta_1 + r_c - i\eta_2) dS, \\
d_{41} &= \overline{d_{32}}, \quad d_{42} = \overline{d_{31}}, \quad d_{43} = -d_{12}, \quad d_{44} = -d_{11}, \\
d_{45} &= -r_c E|S|, \quad d_{46} = \overline{d_{36}}, \quad d_{51} = \int_S [2\kappa(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) + \omega] dS,
\end{aligned}$$

$$d_{52} = \overline{d_{51}}, \quad d_{53} = d_{54} = -r_c E|S|, \quad d_{55} = E|S|,$$

$$d_{56} = \tau E(I_p + r_c^2|S| - B), \quad d_{61} = \overline{d_{62}} = iE I_2,$$

$$d_{63} = \overline{d_{64}} = \tau \mu \int_S (\xi_1 \partial_2 - \xi_2 \partial_1) \varphi_1 dS, \quad d_{66} = \mu B.$$

Здесь $E = 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга,

$$B = I_p + r_c^2|S| + \int_S (\xi_1 \partial_2 - \xi_2 \partial_1) \varphi dS, \quad I_2 = \int_S (\xi_1 - r_c)^2 dS.$$

2. В качестве примера рассмотрим задачу Сен-Венана для ЕЗС с эллиптическим поперечным сечением. Будем считать, что винтовая ось проходит через центры поперечных сечений, а уравнение границы ∂S зададим следующим выражением:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - 1 = 0;$$

здесь a, b — полуоси эллипса.

Обратимся к построению решений задач (15.4)–(15.7).

Решение задачи (15.4) хорошо известно [47]. Оно описывает деформацию призматического стержня с эллиптическим поперечным сечением и имеет вид

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \xi_1 \xi_2, \quad (15.10)$$

Для построения решения задачи (15.4) представим функцию φ_1 в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{1r} + i\varphi_{1i}.$$

После разделения в (15.5) мнимой и вещественной частей получаем две задачи Неймана:

$$\Delta \varphi_{1r} = 0, \quad \partial_n \varphi_{1r}|_{\partial S} = 2(1 + \nu)(\xi_1 \xi_2 n_1 - \xi_1^2 n_2), \quad (15.11)$$

$$\Delta \varphi_{1i} = 0, \quad \partial_n \varphi_{1i}|_{\partial S} = 2(1 + \nu)(\xi_2^2 n_1 - \xi_1 \xi_2 n_2). \quad (15.12)$$

Рассмотрим задачу (15.11). Ее решение будем отыскивать в виде

$$\varphi_{1r} = \frac{A}{3} (\xi_2^3 - 3\xi_1^2 \xi_2) + B \xi_2.$$

На контуре эллипса

$$\xi_1 = a \cos t, \quad \xi_2 = b \sin t, \quad n_1 = g_0^{-1} b \cos t, \quad n_2 = g_0^{-1} b \sin t,$$

$$g_0 = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Подставляя в граничные условия (15.11) и преобразуя их с помощью приведенных соотношений и элементарных формул для тригонометрических функций, получаем

$$\begin{aligned} \sin t \left[B + \frac{A}{4} (a^2 - b^2) \right] - \frac{A}{4} \sin 3t (a^2 + 3b^2) = \\ = -\frac{1}{2} (a^2 - b^2) (1 + \nu) [\sin t + \sin 3t]. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin t$, $\sin (3t)$, после преобразований имеем

$$A = \frac{2(1 + \nu)(a^2 - b^2)}{a^2 + 3b^2}, \quad B = -\frac{2(1 + \nu)b^2(a^2 - b^2)}{a^2 + 3b^2}.$$

В результате

$$\varphi_{1r} = \frac{2(1 + \nu)(a^2 - b^2)}{3(a^2 + 3b^2)} (\xi_2^3 - 3\xi_1^2\xi_2) - \frac{2(1 + \nu)b^2(a^2 - b^2)}{a^2 + 3b^2} \xi_2. \quad (15.13)$$

Для функции φ_{1i} аналогичным образом получается следующее выражение:

$$\varphi_{1i} = \frac{2(1 + \nu)(a^2 - b^2)}{3(a^2 + b^2)} (\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2) - \frac{2(1 + \nu)a^2(a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2} \xi_1. \quad (15.14)$$

Обратимся к построению решения задачи (15.6). Отыскивая функцию θ в виде

$$\theta = \theta_r + i\theta_i,$$

после разделения вещественной и мнимой частей получаем две задачи:

$$\Delta\theta_r = 2\xi_1, \quad \partial_n\theta_r = \frac{\nu}{2} (\xi_2^2 - \xi_1^2) n_1 - \nu\xi_1\xi_2n_2, \quad (15.15)$$

$$\Delta\theta_i = 2\xi_2, \quad \partial_n\theta_i = -\nu\xi_1\xi_2n_1 - \frac{\nu}{2} (\xi_2^2 - \xi_1^2) n_2. \quad (15.16)$$

Если θ_r , θ_i отыскивать в виде

$$\theta_r = \chi_r + \frac{2 - \nu}{6} \xi_1^3 + \frac{\nu}{2} \xi_1\xi_2^2, \quad (15.17)$$

$$\theta_i = \chi_i + \frac{2 - \nu}{6} \xi_2^3 + \frac{\nu}{2} \xi_1^2\xi_2, \quad (15.18)$$

то для определения χ_r и χ_i получаем известные краевые задачи Неймана [47], возникающие при исследовании задачи изгиба поперечной силой цилиндрического стержня с эллиптическим сечением

$$\Delta\chi_r = 0, \quad \partial_n\chi_r = -\xi_1^2n_1 - 2\nu\xi_1\xi_2n_2,$$

$$\Delta\chi_i = 0, \quad \partial_n\chi_i = -2\nu\xi_1\xi_2n_1 - \xi_2^2n_2.$$

Решения этих задач имеют следующий вид:

$$\chi_r = -\frac{(1-2\nu)a^2}{3(3a^2+b^2)}(\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2) - \frac{b^2+2a^2(1+\nu)}{3a^2+b^2}a^2\xi_1, \quad (15.19)$$

$$\chi_i = -\frac{(1-2\nu)b^2}{3(a^2+3b^2)}(\xi_2^3 - 3\xi_1^2\xi_2) - \frac{a^2+2b^2(1+\nu)}{a^2+3b^2}b^2\xi_1. \quad (15.20)$$

Построенные решения (15.10), (15.14), (15.19), (15.20) позволяют определить элементы матрицы жесткостей d_{ij} с относительной погрешностью $O(\tau^2)$.

Полагая

$$C_7 = A_1 + iA_2, \quad C_8 = \overline{C_7}, \quad C_9 = A_3 + iA_4,$$

$$C_{10} = \overline{C_9}, \quad C_{11} = A_5, \quad C_{12} = A_6;$$

A_j — вещественные числа, для определения последних получаем следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}A_1 + \tau a_{14}A_4 &= Q_{\xi_1}^*, & \tau a_{41}A_1 + a_{44}A_4 &= M_{\xi_1}^*, \\ a_{22}A_2 + \tau a_{23}A_3 &= Q_{\xi_2}^*, & \tau a_{32}A_2 + a_{33}A_3 &= M_{\xi_2}^*, \\ a_{55}A_5 + \tau a_{56}A_6 &= Q_3^*, & \tau a_{65}A_5 + a_{66}A_6 &= M_3^*. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Здесь $Q_{\xi_i}^*$, $M_{\xi_i}^*$ — проекции главного вектора и главного момента заданных при $\xi = L$ внешних напряжений p на оси сопутствующей системы координат,

$$a_{11} = -a_{33} = -2EI_2, \quad a_{22} = -a_{44} = -2EI_1,$$

$$a_{14} = \frac{1}{2}ES(a^2 - b^2), \quad a_{23} = -\frac{1}{2}\frac{ESb^2(a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2},$$

$$a_{31} = \frac{iES(a^2 - b^2)(g_1a^6 + g_2a^4b^2 + g_3a^2b^4 + g_4b^6)}{12(3a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2)},$$

$$a_{42} = \frac{\mu(a^2 - b^2)(g_4a^6 + g_3a^4b^2 + g_2a^2b^4 + g_1b^6)}{12(3a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2)},$$

$$a_{55} = ES, \quad a_{56} = \frac{\pi Eab(a^2 - b^2)^2}{4(a^2 + b^2)}, \quad a_{66} = \frac{\mu\pi a^3b^3}{4(a^2 + b^2)},$$

$$g_1 = 10 + 16\nu, \quad g_2 = 47 + 29\nu, \quad g_3 = -22 + 6\nu, \quad g_4 = -11 - 3\nu,$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi ab^3, \quad I_2 = \frac{1}{2}\pi a^3b, \quad S = \pi ab.$$

Алгебраические системы (15.21) позволяют получить следующие приближенные формулы (с погрешностью $O(\tau^2)$) для постоянных A_j :

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{Q_{\xi 1}^*}{2EI_2} - \tau \frac{a_{41} M_{\xi 1}^*}{4E^2 I_1 I_2}, & A_2 &= -\frac{Q_{\xi 2}^*}{2EI_1} - \tau \frac{a_{23} M_{\xi 2}^*}{4E^2 I_1 I_2}, \\ A_3 &= \tau \frac{a_{32} Q_{\xi 2}^*}{4E^2 I_1 I_2} + \frac{M_{\xi 2}}{EI_2}, & A_4 &= \tau \frac{a_{41} Q_{\xi 1}^*}{4E^2 I_1 I_2} + \frac{M_{\xi 1}}{EI_1}, \\ A_5 &= \frac{Q_3^*}{ES} - \tau \frac{a_{56} M_3^*}{ESa_{66}}, & A_6 &= -\tau \frac{a_{56} Q_3^*}{ESa_{66}} + \frac{M_3}{a_{66}}. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Расчетные формулы для главных по величине напряжений σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} удобно разбить на две группы.

Первая группа формул описывает напряженное состояние при изгибе ЕЗС. В этом случае имеем

$$\sigma_{13} = 2\mu \sum_{n=1}^2 [S_{nr} T_{n1r} - S_{ni} T_{n1i}], \quad \sigma_{23} = 2\mu \sum_{n=1}^2 [S_{nr} T_{n2r} - S_{ni} T_{n2i}],$$

$$\sigma_{33} = 2\mu \sum_{n=1}^2 [S_{nr} T_{n3r} - S_{ni} T_{n3i}],$$

$$T_{11r} = -\frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{3a^2+b^2} \left[a^2 - \xi_1^2 - \frac{(1-2\nu)a^2\xi_2^2}{2(1-\nu)a^2+b^2} \right],$$

$$T_{11i} = \frac{b^2(1+\nu)+\nu a^2}{(1+\nu)} (a^2+3b^2)\xi_1\xi_2, \quad T_{12r} = \frac{a^2(1+\nu)+\nu b^2}{(1+\nu)(b^2+3a^2)} \xi_1\xi_2,$$

$$T_{12i} = -\frac{2(1+\nu)b^2+a^2}{3b^2+a^2} \left[b^2 - \xi_2^2 - \frac{(1-2\nu)b^2\xi_1^2}{2(1-\nu)b^2+a^2} \right],$$

$$T_{13r} = -2(1+\nu)(\xi-L)\xi_1, \quad T_{13i} = -2(1+\nu)(\xi-L)\xi_2,$$

$$T_{21r} = -\tau \frac{4(1+\nu)(a^2-b^2)}{a^2+3b^2} \xi_1\xi_2,$$

$$T_{21i} = \tau \frac{2(1+\nu)(a^2-b^2)}{a^2+3b^2} (\xi_2^2 - \xi_1^2 - b^2),$$

$$T_{22r} = \tau \frac{2(1+\nu)(a^2-b^2)}{3a^2+b^2} (\xi_1^2 - \xi_2^2 - a^2),$$

$$T_{22i} = -\tau \frac{4(1+\nu)(a^2-b^2)}{3a^2+b^2} \xi_1\xi_2,$$

$$T_{23r} = -2(1 + \nu)\xi_1, \quad T_{23i} = -2(1 + \nu)\xi_2,$$

$$S_{1r} = A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi, \quad S_{2r} = A_3 \cos \varphi - A_4 \sin \varphi,$$

$$\varphi = \tau(\xi - L).$$

Вторая группа формул описывает напряженное состояние при растяжении и кручении ЕЗС:

$$\sigma_{13} = \frac{\tau E A_5 (a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \xi_2 - \frac{2\mu a^2 A_6}{a^2 + b^2} \xi_2,$$

$$\sigma_{23} = \frac{\tau E A_5 (a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \xi_1 + \frac{2\mu b^2 A_6}{a^2 + b^2} \xi_1, \quad \sigma_{33} = E A_5.$$

Глава 5

ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ И КОЛЬЦА

§ 16. Винтовая пружина

Винтовые пружины (в некоторых источниках [51] используется термины *спиральная* или *витая пружина*) широко применяются в различных конструкциях: в качестве амортизаторов в различных механизмах и устройствах, измерительных элементов в приборах и т. п.

Теория винтовых пружин берет свое начало в работе Сен-Венана [81] (ссылка на данную работу взята из [64]). В дальнейшем в рамках классического подхода она совершенствовалась целым рядом ученых. Изложение основ этой теории и библиографию ранних работ можно найти в [63, 64]. Попытки усовершенствования элементарной теории на основе трехмерных уравнений теории упругости для пружины с круговым поперечным сечением витка были предприняты рядом авторов в середине XX века. Некоторые результаты таких исследований и библиография содержатся в [66].

Предлагаемая в этой главе теория, как и для ЕЗС, названа *теорией Сен-Венана* и позволяет существенно расширить область изменения параметров пружины при расчетах напряженно-деформированного состояния.

Винтовую пружину можно рассматривать как частный случай ЕЗС, геометрическое описание которого дано в § 9. Однако более естественным является другой способ ее описания, который оказывается также более удобным для дальнейших исследований.

Пружину будем рассматривать как трехмерное упругое тело, которое получается винтовым движением плоской фигуры S , расположенной в плоскости $\varphi = \text{const}$ цилиндрической системы координат r, φ, z . Обозначим: r_c — расстояние от оси z до центра тяжести фигуры S , h — шаг пружины. Введем сопутствующую систему координат, связанную с цилиндрической соотношениями:

$$\xi_1 = r - r_c, \quad \xi_2 = z - \xi h_0, \quad \xi_3 = \xi = \varphi + 2\pi(m - 1). \quad (16.1)$$

Здесь $\xi_1, \xi_2 \in S$, $\xi \in [0, l]$, $l = 2\pi n + \varphi_0$ ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$), $h_0 = h/2\pi$, $m = 1, \dots, n$; n — число витков в сечении $\varphi = \text{const}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$); переменная ξ определяет сечение пружины, а ξ_1, ξ_2 — точку выбранного сечения, значения $\xi = 0$, $\xi = l$ соответствуют концевым сечениям пружины.

В сопутствующей системе координат $V = S \times [0, l]$ — область, занятая пружиной, $\Gamma = \partial S \times [0, l]$ — боковая поверхность, где ∂S — граница S .

Проекции внешней нормали N к поверхности Γ на орты цилиндрической системы координат

$$e_1 = e_r, \quad e_2 = e_z, \quad e = e_3 = e_\varphi$$

связаны с проекциями единичной внешней нормали $n(n_1, n_2)$ к области S следующими соотношениями:

$$N_1 = n_1, \quad N_2 = n_2, \quad N_3 = -\frac{h_0}{r} n_2.$$

Если учесть, что в базисе e_i

$$\nabla = e_1 \partial_1 + e_2 \partial_2 + e D,$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad D = \frac{1}{r} (\partial - h_0 \partial_2), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \alpha = 1, 2,$$

то компоненты тензора деформаций в этом же базисе выражаются через проекции вектора смещений u_i следующими формулами:

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad e_{33} = Du_3 + \frac{u_1}{r}, \quad (16.2)$$

$$2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1, \quad 2e_{13} = Du_1 + \partial_1 u_3 - \frac{u_3}{r}, \quad 2e_{23} = Du_2 + \partial_2 u_3.$$

Соотношения обобщенного закона Гука имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \left[(1 + \kappa) \partial_1 u_1 + \kappa \left(\partial_2 u_2 + \frac{u_1}{r} \right) + \kappa Du_3 \right], \\ \sigma_{22} &= 2\mu \left[\kappa \left(\partial_2 u_2 + \frac{u_1}{r} \right) + (1 + \kappa) \partial_2 u_2 + \kappa Du_3 \right], \\ \sigma_{33} &= 2\mu \left[\kappa (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + (1 + \kappa) \left(Du_3 + \frac{u_1}{r} \right) \right], \\ \sigma_{12} &= \mu (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \\ \sigma_{13} &= \mu \left(Du_1 + \partial_1 u_3 - \frac{u_3}{r} \right), \quad \sigma_{23} = \mu (Du_2 + \partial_2 u_3). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{r} + \partial_2 \sigma_{12} + D \sigma_{13} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{12} + \frac{\sigma_{12}}{r} + \partial_2 \sigma_{22} + D \sigma_{23} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{13} + 2 \frac{\sigma_{13}}{r} + \partial_2 \sigma_{23} + D \sigma_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Подстановка (16.3) в (16.4) позволяет записать уравнения равновесия в операторном виде:

$$L(\partial)u \equiv \partial^2 C u + \partial B u + A u = 0; \quad (16.5)$$

здесь

$$C = \begin{vmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\kappa)r^{-1} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} -\frac{2h_0}{r} \partial_2 & 0 & (1+2\kappa) \partial_1 - \frac{3+2\kappa}{r} \\ 0 & -\frac{2h_0}{r} \partial_2 & (1+2\kappa) \partial_2 \\ (1+2\kappa) \partial_1 + \frac{3+2\kappa}{r} & (1+2\kappa) \partial_2 & -\frac{4h_0(1+\kappa)}{r} \partial_2 \end{vmatrix},$$

$$A = \|A_{ij}\|,$$

$$A_{11} = 2(1+\kappa) \left(r \partial_1^2 + \partial_1 - \frac{1}{r} \right) + \left(r + \frac{h_0^2}{r} \right) \partial_2^2,$$

$$A_{12} = (1+2\kappa) \partial_1 \partial_2, \quad A_{13} = -h_0 \left[(1+2\kappa) \partial_1 \partial_2 + \frac{3}{r} \partial_2 \right],$$

$$A_{21} = (1+2\kappa)(r \partial_1 \partial_2 + \partial_2), \quad A_{22} = r \partial_1^2 + \partial_1 + 2(1+\kappa) r \partial_2^2 + \frac{h_0^2}{r} \partial_2^2,$$

$$A_{23} = -h_0(1+2\kappa) \partial_2^2, \quad A_{31} = -h_0 \left[(1+2\kappa) \partial_1 \partial_2 + \frac{1}{r} (2\kappa-1) \partial_2 \right],$$

$$A_{32} = -h_0(1+2\kappa) \partial_2^2, \quad A_{33} = r \partial_1^2 + \partial_1 - \frac{1}{r} + r \partial_2^2 + 2 \frac{h_0^2}{r} (1+\kappa) \partial_2^2.$$

Будем считать, что боковая поверхность пружины свободна от напряжений:

$$N \cdot \sigma \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Операторная форма этого граничного условия будет следующей:

$$M(\partial u) = (\partial G + E_\tau) u \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (16.6)$$

$$G = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{h_0}{r} & 0 & 2\kappa n_1 \\ 0 & -\frac{h_0}{r} & 2\kappa n_2 \\ n_1 & n_2 & -\frac{2h_0(1+\kappa)}{r} \end{array} \right\|,$$

$$E = \|E_{ij}\|,$$

$$E_{11} = n_1 \left[2(1+\kappa) \partial_1 + \frac{2\kappa}{r} \right] + n_2 \partial_2, \quad E_{12} = n_1 2\kappa \partial_2 + n_2 \partial_1,$$

$$E_{13} = -\frac{h_0}{r} \left(\partial_1 - \frac{1}{r} \right), \quad E_{21} = n_1 \partial_2 + n_2 2\kappa \left(\partial_1 + \frac{1}{r} \right),$$

$$E_{22} = n_1 \partial_1 + 2(1+\kappa) n_2 \partial_2, \quad E_{23} = -\frac{h_0}{r} \partial_2,$$

$$E_{31} = -\frac{h_0}{r} \partial_1, \quad E_{32} = -\frac{h_0}{r} \partial_2, \quad E_{33} = n_1 \left(\partial_1 - \frac{1}{r} \right) + n_2 \partial_2.$$

Объединяя уравнение равновесия (16.5) и граничное условие (16.6), получаем

$$L_1(\partial) \equiv \{L(\partial)\mathbf{u}, M(\partial)\mathbf{u}\} = 0. \quad (16.7)$$

Для того чтобы данную задачу записать в виде уравнения (1.14) ($K=0$), введем вектор напряжений $\sigma_3 = e_j \sigma_{3j}$ и представим его в следующем виде:

$$\sigma_3 = \mu \sigma, \quad \sigma = \partial C \mathbf{u} + B_3 \mathbf{u};$$

здесь

$$B_3 = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{h_0}{r} \partial_2 & 0 & \partial_1 - \frac{1}{r} \\ 0 & -\frac{h_0}{r} \partial_2 & \partial_2 \\ 2\kappa \partial_1 + \frac{2(1+\kappa)}{r} & 2\kappa \partial_2 & -\frac{2h_0(1+\kappa)}{r} \partial_2 \end{array} \right\|,$$

Далее, как и ранее определим расширенный вектор $\mathbf{w} = \{\mathbf{u}, \sigma\}$, который удовлетворяет однородному уравнению (1.15), а матричная форма оператора B'_3 в данном случае имеет следующий вид:

$$B'_3 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{h_0}{r} \partial_2 & -2\kappa \partial_1 & -\partial_1 + \frac{2(1+\kappa)}{r} \\ 0 & \frac{h_0}{r} \partial_2 & -\frac{2\kappa}{r} \partial_2 \\ -\partial_1 - \frac{1}{r} & -\partial_2 & \frac{2h_0(1+\kappa)}{r} \partial_2 \end{array} \right\|.$$

Заметим, что если в приведенных выше соотношениях положить $h = 0$ ($h_0 = 0$) и число витков $n = 0$, получим постановку задачи для части кругового кольца $V = S \times [0, \alpha]$.

§ 17. Элементарные решения Сен-Венана

Для построения системы ЭРСВ решение уравнения (16.7) будем отыскивать в виде

$$u(\xi) = e^{\gamma \xi} a, \quad a = a(\xi_1, \xi_2). \quad (17.1)$$

После подстановки (17.1) в (16.5) получаем спектральную задачу на сечении

$$L_1(\gamma)a \equiv \{L(\gamma)a, M(\gamma)a\} = 0. \quad (17.2)$$

1. Обратимся к исследованию задачи (17.2).

Для построения однородных элементарных решений Сен-Венана рассмотрим проекции вектора твердого смещения на орты сопутствующей системы координат. Имеем

$$\begin{aligned} u_1^0 &= C_1 e^{i\xi} + C_2 e^{-i\xi} + C_3 e^{i\xi} (h_0 \xi + \xi_2) + C_4 e^{-i\xi} (h_0 \xi + \xi_2), \\ u_2^0 &= C_5 - C_3 r e^{i\xi} - C_4 r e^{-i\xi}, \end{aligned} \quad (17.3)$$

$$u_3^0 = iC_1 e^{i\xi} - iC_2 e^{-i\xi} + iC_3 e^{i\xi} (h_0 \xi + \xi_2) - iC_4 e^{-i\xi} (h_0 \xi + \xi_2) + C_6 r,$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (a_{x1}^0 - i a_{x2}^0), \quad C_2 = \frac{1}{2} (a_{x1}^0 + i a_{x2}^0), \quad C_3 = \frac{1}{2} i (\omega_{x1}^0 - i \omega_{x2}^0),$$

$$C_4 = \frac{1}{2} i (\omega_{x1}^0 + i \omega_{x2}^0), \quad C_5 = a_{x3}^0, \quad C_6 = \omega_{x3}^0,$$

где a_{xj}^0 — проекции вектора поступательного смещения на оси декартовой системы координат x_j ; ω_{xj}^0 — проекции вектора малого поворота.

На основании (17.3) можно сформулировать утверждения.

Утверждение 17.1. Собственными значениями спектральной задачи (17.2) являются

$$\gamma = \gamma_0 = 0, \quad \gamma = \gamma_1 = i, \quad \gamma = \gamma_{-1} = -i.$$

Утверждение 17.2. Собственным значениям γ_1 соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_0^1 = a_1 = \{1, 0, i\}, \quad a_1^1 = a_3 = \{\xi_2, -r, i\xi_2\}. \quad (17.4)$$

Собственному значению γ_{-1} соответствуют собственный и присоединенный векторы

$$a_0^2 = a_2 = \{1, 0, -i\}, \quad a_1^2 = a_4 = \{\xi_2, -r, -i\xi_2\}. \quad (17.5)$$

Утверждение 17.3. Собственному значению γ_0 соответствуют два собственных вектора:

$$a_0^3 = a_5 = \{0, 1, 0\}, \quad a_0^4 = a_6 = \{0, 0, r\}. \quad (17.6)$$

Приведенная система собственных и присоединенных векторов не исчерпывает корневые подпространства соответствующих собственных значений.

Для построения полных жордановых цепочек воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.8). На основе их реализации можно сформулировать следующее

Утверждение 17.4. Собственный вектор a_0^1 помимо присоединенного вектора a_1^1 имеет еще два присоединенных вектора, $a_2^1 = a_9$ и $a_3^1 = a_7$, которые определяются решением следующих краевых задач:

$$L(i)a_9 = F_9, \quad M(i)a_9 \Big|_{\partial S} = f_9, \quad (17.7)$$

$$F_9 = -(2iC + B)a_3 - h_0Ca_1, \quad f_9 = -Ga_3 \Big|_{\partial S},$$

$$L(i)a_7 = F_7, \quad M(i)a_7 \Big|_{\partial S} = f_7, \quad (17.8)$$

$$F_7 = -(2iC + B)a_9 - Ca_3, \quad f_7 = -Ga_9 \Big|_{\partial S}, \quad j = 2, 3,$$

с учетом конкретного вида векторов a_1, a_3

$$F_9 = \left\{ -\frac{i(1+2\kappa)\xi_2}{r} + \frac{h_0}{r}, i(2\kappa-1), \frac{(1+2\kappa)\xi_2}{r} - i\frac{2h_0(1+\kappa)}{r} \right\},$$

$$f_9 = \left\{ -2i\kappa n_1\xi_2 + \frac{h_0\xi_2}{r}, -2i\kappa n_2\xi_2 - h_0, -n_1\xi_2 + n_2r + i2h_0(1+\kappa)\frac{\xi_2}{r} \right\}.$$

Утверждение 17.5. Собственный вектор $a_0^2 = a_2$ помимо присоединенного вектора $a_1^2 = a_4$ имеет еще два присоединенных вектора:

$$a_2^2 = a_{10} = \bar{a}_9, \quad a_2^3 = a_8 = \bar{a}_7.$$

Утверждение 17.6. Собственный вектор $a_0^3 = a_5$ имеет только один присоединенный вектор, $a_1^3 = a_{11}$, который определяется решением следующей краевой задачи:

$$Aa_{11} = 0, \quad Ea_{11} \Big|_{\partial S} = f_{11}, \quad (17.9)$$

$$f_{11} = -Ga_5 = \left\{ 0, -\frac{n_2h_0}{r}, -n_2 \right\}.$$

Утверждение 17.7. Собственный вектор $a_0^4 = a_6$ имеет только один присоединенный вектор $a_1^4 = a_{12}$, который определяется решением следующей краевой задачи:

$$Aa_{12} = \{2r, 0, 0\}, \quad Ea_{12} \Big|_{\partial S} = f_{12}, \quad (17.10)$$

$$f_{12} = -Ga_6 = \left\{ -2\kappa n_1, -2\kappa n_2, -\frac{2(1+\kappa)h_0}{r} \right\}.$$

Утверждения 17.1–17.7 позволяют определить 12 элементарных решений Сен-Венана $u_m, w_m = \{u_m, \sigma_m\}$ ($m = 1, \dots, 12$):

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= e^{i\xi} a_1, \quad u_2(\xi) = \bar{u}_1(\xi), \quad u_3(\xi) = e^{i\xi} (\xi h_0 a_1 + a_3), \\ u_4(\xi) &= \bar{u}_3(\xi), \quad u_5(\xi) = a_5, \quad u_6(\xi) = a_6, \\ u_7(\xi) &= e^{i\xi} \left(\frac{\xi^3}{6} h_0 a_1 + \frac{\xi^2}{2} a_3 + \xi a_9 + a_7 \right), \\ u_8(\xi) &= \bar{u}_7(\xi), \quad u_9(\xi) = e^{i\xi} \left(\frac{\xi^2}{2} h_0 a_1 + \xi a_3 + a_9 \right), \\ u_{10}(\xi) &= \bar{u}_9(\xi), \quad u_{11}(\xi) = \xi a_5 + a_{11}, \quad u_{12}(\xi) = \xi a_6 + a_{12}, \\ \sigma_m(\xi) &= 0, \quad m = 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (17.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_7(\xi) &= e^{i\xi} (\xi b_9 + b_7), \quad \sigma_8(\xi) = \bar{\sigma}_7(\xi), \quad \sigma_9(\xi) = e^{i\xi} b_9, \\ \sigma_{10}(\xi) &= \bar{\sigma}_9(\xi), \quad \sigma_{11}(\xi) = b_{11}, \quad \sigma_{12}(\xi) = b_{12}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

$$b_7 = (B_3 + iC)a_7 + Ca_9, \quad b_8 = \bar{b}_7, \quad b_9 = (B_3 + iC)a_9 + Ca_3,$$

$$b_{10} = \bar{b}_9, \quad b_{11} = B_3 a_{11} + Ca_5, \quad b_{12} = B_3 a_{12} + Ca_6.$$

Используя формулы обобщенного закона Гука (16.3), для каждого элементарного решения (17.11) можно получить соответствующий тензор напряжений. Сохраняя смысл обозначений, принятых в § 11, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{mn,l} &= 0, \quad l = 1, \dots, 6, \\ \sigma_{mn,7} &= \mu e^{i\xi} (\xi b_{mn,9} + b_{mn,7}), \quad \sigma_{mn,8} = \bar{\sigma}_{mn,7}, \\ \sigma_{mn,9} &= \mu e^{i\xi} b_{mn,9}, \quad \sigma_{mn,10} = \bar{\sigma}_{mn,9}, \\ \sigma_{mn,11} &= \mu b_{mn,11}, \quad \sigma_{mn,12} = \mu b_{mn,12}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

$$\begin{aligned}
b_{mn,l} &= b_{mn}(a_l) + c_{mn,l}, \quad l = 7, \dots, 12, \\
b_{11}(a_l) &= 2[(1 + \kappa)\partial_1 a_{1,l} + \kappa \left(\frac{a_{1,l}}{r} + \partial_2 a_{2,l} \right) + \kappa D_l a_{3,l}], \\
b_{22}(a_l) &= 2[\kappa \partial_1 a_{1,l} + (1 + \kappa) \left(\partial_2 a_{2,l} + \frac{a_{1,l}}{r} \right) + \kappa D_l a_{3,l}], \\
b_{33}(a_l) &= 2[\kappa \left(\partial_1 a_{1,l} + \partial_2 a_{2,l} \frac{a_{1,l}}{r} \right) + (1 + \kappa) D_l a_{3,l}], \\
b_{12}(a_l) &= \partial_2 a_{1,l} + \partial_1 a_{2,l}, \quad b_{13}(a_l) = \partial_1 a_{3,l} - \frac{a_{3,l}}{r} + D_l a_{1,l}, \\
b_{23}(a_l) &= \partial_2 a_{3,l} + D_l a_{2,l}, \\
c_{11,7} &= c_{22,7} = \frac{2\kappa a_{3,9}}{r}, \quad c_{33,7} = \frac{2(1 + \kappa) a_{3,9}}{r}, \quad c_{12,7} = 0, \\
c_{13,7} &= \frac{a_{1,9}}{r}, \quad c_{23,7} = \frac{a_{2,9}}{r}, \quad c_{11,9} = c_{22,9} = \frac{2i\kappa\xi_2}{r}, \\
c_{33,9} &= \frac{2i(1 + \kappa)\xi_2}{r}, \quad c_{12,9} = 0, \quad c_{13,9} = \frac{\xi_2}{r}, \quad c_{23,9} = -1, \\
c_{11,11} &= c_{22,11} = c_{33,11} = c_{12,11} = c_{23,9} = 0, \quad c_{13,9} = 1, \\
c_{11,12} &= c_{22,12} = -2\kappa, \quad c_{33,12} = -2(1 + \kappa), \\
c_{12,12} &= c_{13,12} = c_{21,12} = 0.
\end{aligned} \tag{17.14}$$

В формулах (17.14)

$$\begin{aligned}
D_l &= \frac{1}{r} (i - h_0 \partial_2) \quad \text{для } l = 7, 9, \\
D_l &= \frac{1}{r} (-i - h_0 \partial_2) \quad \text{для } l = 8, 10, \\
D_l &= -\frac{h_0}{r} \partial_2 \quad \text{для } l = 11, 12.
\end{aligned}$$

Завершая этот параграф заметим, что и в рассматриваемом случае решение трехмерной задачи для пружины может быть представлено в виде (14.1) и с помощью приемов, описанных в § 14, обосновать основные свойства погранслоистой части решения u_P , из которых вытекают обоснование принципа Сен-Венана.

§ 18. Вариационная постановка двумерных задач на сечении

Как и в случае ЕЗС, краевые задачи (17.7)–(17.10) могут быть сведены к нахождению минимумов квадратичных функционалов. Поскольку метод построения этих функционалов принципиально не от-

личается от метода, изложенного в § 12, не останавливаясь на деталях, приведем окончательные результаты, несущественно видоизменив их форму представления.

Квадратичные функционалы, о которых идет речь, можно представить в общем виде:

$$\Psi_{\beta}(\mathbf{a}_m) = \int_S [W_{\beta}(\mathbf{a}_m) + l_m] dS, \quad \beta = 0, 1. \quad (18.1)$$

Здесь индекс m принимает значения $m = 9$ в случае задачи (17.7), $m = 7$ для задачи (17.8), $m = 11$ для задачи (17.9), $m = 12$ для задачи (17.10),

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{a}) = & \kappa \left| \partial_1 a_1 + \frac{a_1}{r} + \partial_2 a_2 + D_1 a_3 \right|^2 + |\partial_1 a_1|^2 + \left| \frac{a_1}{r} + \partial_2 a_2 \right|^2 + \\ & + |D_1 a_3|^2 + 2 \left(|\partial_2 a_1 + \partial_1 a_2|^2 + \left| D_1 a_1 + \partial_1 a_3 - \frac{a_3}{r} \right|^2 + |D_1 a_2 + \partial_2 a_3|^2 \right), \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} l_9 = & \frac{1}{rr_0^2} \left\{ 2r_0 \left[\operatorname{Im} \left(\kappa \left(\partial_1 a_1 + \frac{a_1}{r} + \partial_2 a_2 + D_1 a_3 \right) + D_1 a_3 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \operatorname{Re} \left(D_1 a_1 + \partial_1 a_3 - \frac{a_3}{r} \right) \right] \xi_2 + \right. \\ & \left. + 4 \operatorname{Re} \left[\xi_2 \left(D_1 a_1 + \partial_1 a_3 - \frac{a_3}{r} \right) - r(D_1 a_2 + \partial_2 a_3) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_7 = & 2 \operatorname{Re} \left[\kappa \left(\partial_1 a_1 + \frac{a_1}{r} + \partial_2 a_2 + D_1 a_3 \right) \bar{a}_{3,9} + D_1 a_3 \bar{a}_{3,9} + \right. \\ & \left. + 2 \left(D_1 a_1 + \partial_1 a_3 - \frac{a_3}{r} \right) \bar{a}_{1,9} + 2(D_1 a_1 + 2(\partial_2 a_3) \bar{a}_{2,9}, \right. \end{aligned}$$

$$l_{11} = 2 \left(D_0 a_1 + \partial_1 a_3 - \frac{a_3}{r} \right), \quad l_{12} = \frac{2\kappa}{r_0} \left(\partial_1 a_1 + \frac{a_1}{r} + \partial_2 a_2 + D_0 a_3 \right).$$

Выражения для $W_0(\mathbf{a})$ получаются заменой в (17.2) оператора D_1 на D_0 .

Напомним, что $a_{j,9}$ — решение задачи (17.7) или соответствующей вариационной задачи,

$$D_1 = \frac{1}{r} \left(i - \frac{h_0}{r} \partial_2 \right), \quad D_0 = -\frac{h_0}{r^2} \partial_2.$$

Замечание 18.1. Вариационные задачи (18.1) в случаях $\beta = 1$, $m = 7, 9$, однозначно разрешимы на подпространстве H_0 вектор-функ-

ций $\mathbf{a} \in H$, удовлетворяющих условию

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1) = \int_S \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}_1 dS = \int_S \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} dS = 0. \quad (18.3)$$

Замечание 18.2. Вариационные задачи (18.1) в случаях $\beta = 0$, $m = 11, 12$, однозначно разрешимы на подпространстве H^0 вектор-функций $\mathbf{a} \in H$, удовлетворяющих условиям

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}_5) = \int_S \mathbf{a} \mathbf{a}_5 dS = \int_S a_2 dS = 0, \quad (18.4)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}_6) = \int_S \mathbf{a} \mathbf{a}_6 dS = \int_S a_3 r dS = 0. \quad (18.5)$$

§ 19. Решение Сен-Венана для пружины и его интегральные свойства

1. Решение Сен-Венана для пружины, как и в случае ЕЗС, определим следующими выражениями:

$$\mathbf{u}_S(\xi) = \sum_{l=1}^6 C_l \mathbf{u}_l(\xi) + \sum_{l=7}^{12} C_l \mathbf{u}_l(\xi - l), \quad (19.1)$$

$$\sigma_S(\xi) = \mu \sum_{l=7}^{12} C_l \sigma_l(\xi - l). \quad (19.2)$$

Опираясь на формулу (19.2), выразим компоненты главного вектора

$$Q_{\xi j} = \int_S \sigma_{j3} dS \quad j = 1, 2, 3, \quad (19.3)$$

и главного момента

$$M_{\xi 1} = \int_S \sigma_{33} \xi_2 dS, \quad M_{\xi 2} = - \int_S \sigma_{33} \xi_1 dS, \quad M_{\xi 3} = \int_S (\xi_1 \sigma_{23} - \xi_2 \sigma_{13}) dS \quad (19.4)$$

через постоянные C_m , $m = 7, \dots, 12$.

Используя обозначения гл. 1, введем расширенные векторы

$$\mathbf{v}_l = \{\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l\}$$

и рассмотрим скалярные произведения

$$d_{mq} = (\mathbf{v}_{q+6}, J \mathbf{v}_l)_m, \quad q, m = 1, \dots, 6.$$

Поскольку $\mathbf{v}_l = \{\mathbf{a}_l, 0\}$, имеем

$$d_{lq} = (\mathbf{b}_{q+6}, \mathbf{a}_l).$$

Используя свойства обобщенной ортогональности в случае кратных собственных значений и выражений (17.4)–(17.6) для векторов $\mathbf{a}_m$ ($m = 1, \dots, 6$), получаем

$$d_{11} = d_{22} = -d_{33} = -d_{44} = -d,$$

$$d = \int_S (\xi_2 b_{13,9} - r b_{23,9} - i \xi_2 b_{13,9}) r dS,$$

$$d_{31} = \bar{d}_{42} = - \int_S (\xi_2 b_{13,7} - r b_{23,7} - i \xi_2 b_{13,7}) r dS, \quad (19.5)$$

$$d_{55} = \int_S b_{13,11} r dS, \quad d_{56} = d_{65} = \int_S b_{13,12} r dS, \quad d_{66} = - \int_S b_{33,12} r^2 dS.$$

Из соотношений (19.5) вытекает, что и в рассматриваемом случае матрица жесткостей D_g сохраняет структуру (13.5).

Далее, подставляя в (19.2) выражения для $\sigma_l(\xi - l)$ (17.12), рассмотрим скалярные произведения

$$(\sigma_S, \mathbf{a}_q) = \int_S \sigma_S \mathbf{a}_q dS, \quad q = 1, \dots, 6.$$

С учетом структуры матрицы жесткостей получаем

$$\begin{aligned} -e^{i\eta} \mu dC_7 &= Q_{\xi 1} - iQ_{\xi 3}, & -e^{-i\eta} \mu dC_8 &= Q_{\xi 1} + iQ_{\xi 3}, \\ e^{i\eta} \mu [(d + \eta d_{31})C_7 + dC_9] &= -M_{\xi 3} - r_c Q_{\xi 2} - iM_{\xi 1}, \\ e^{-i\eta} \mu [(d + \eta \bar{d}_{31})C_7 + dC_9] &= -M_{\xi 3} - r_c Q_{\xi 2} + iM_{\xi 1}, \end{aligned} \quad (19.6)$$

$$\mu(d_{55}C_{11} + d_{56}C_{12}) = Q_{\xi 2}, \quad \mu(d_{56}C_{11} + d_{66}C_{12}) = r_c Q_{\xi 3} - M_{\xi 2}.$$

Здесь $\eta = \xi - l$.

Допустим, что при $\xi = l$ пружина подвержена воздействию внешних усилий с главным вектором $\mathbf{Q}^* = \{Q_{x1}^*, Q_{x2}^*, Q_{x3}^*\}$ и главным моментом $\mathbf{M}^* = \{M_{x1}^*, M_{x2}^*, M_{x3}^*\}$, где Q_{xj}^*, M_{xj}^* — проекции этих векторов на оси неподвижной декартовой системы, у которой ось x_3 совпадает с осью пружины. Обозначим через φ_0 угол между осью ξ_1 и радиусом, соединяющим центр тяжести сечения пружины $\xi = l$ с ее осью. Тогда при $\xi = l$

$$\begin{aligned} Q_{\xi 1}^* &= Q_{x1}^* \cos \varphi_0 + Q_{x2}^* \sin \varphi_0, & Q_{\xi 2}^* &= Q_{x3}^*, \\ Q_{\xi 3}^* &= -Q_{x1}^* \sin \varphi_0 + Q_{x2}^* \cos \varphi_0, & M_{\xi 1}^* &= M_{x1}^* \cos \varphi_0 + M_{x2}^* \sin \varphi_0, \\ M_{\xi 2}^* &= M_{x3}^* + r_c (Q_{x1}^* \sin \varphi_0 - Q_{x2}^* \cos \varphi_0), \\ M_{\xi 3}^* &= -M_{x1}^* \sin \varphi_0 + M_{x2}^* \cos \varphi_0 + r_c Q_{x3}^*. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Если в соотношениях (19.6) положить $\eta = 0$, а правые части преобразовать с учетом (19.7), получим

$$\begin{aligned}\mu dC_7 &= -e^{i\varphi_0}(Q_{x1}^* - iQ_{x2}^*), \quad \overline{C}_7 = \overline{C}_8, \\ \mu dC_9 &= e^{i\varphi_0}[M_{x2}^* + iM_{x1}^* - d_{31}(Q_{x1}^* + iQ_{x2}^*)], \quad C_{10} = \overline{C}_9, \\ \mu(d_{55}C_{11} + d_{56}C_{12}) &= Q_{x3}^*, \quad \mu(d_{56}C_{11} + d_{66}C_{12}) = M_{x3}^*.\end{aligned}\quad (19.8)$$

Подчеркнем, что и в данной задаче из формул (19.8) определяются точные значения C_m ($m = 7, \dots, 12$).

Для того чтобы определить C_m ($m = 1, \dots, 6$), необходимо сформулировать граничные условия при $\xi = 0$. Будем считать, что при $\xi = 0$ заданы условия жесткой заделки, т. е.

$$u(0) = 0. \quad (19.9)$$

Приближенные выражения для C_m ($m = 1, \dots, 6$) из граничных условий (19.9), как и в рассмотренных выше случаях цилиндра и ЕЗС, можно определить с помощью асимптотического метода. При этом для достаточно больших значений безразмерного параметра l , характеризующего длину осевой линии прутка пружины, в первом приближении получаем

$$\begin{aligned}C_1 &= \left(\frac{1}{6}l^3C_7 - \frac{1}{2}l^2C_9\right)e^{-il}, \quad C_2 = \overline{C}_1, \\ C_3 &= -\frac{1}{2}l^2C_7e^{-il}, \quad C_4 = \overline{C}_3, \quad C_5 = -lC_{11}, \quad C_6 = -lC_{12}.\end{aligned}\quad (19.10)$$

После преобразований выражения (19.1) с помощью (17.11) и (19.10) приближенное выражение для вектора смещений определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}u_S &= 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\xi-l)} \left[\frac{C_7}{6}(\xi^3 - 3\xi^2l)a_1 + \frac{C_9}{2}(\xi^2 - 2\xi l)a_3 \right] \right\} + \\ &\quad + C_{11}\xi a_5 + C_{12}\xi a_6. \quad (19.11)\end{aligned}$$

Напряжения по Сен-Венану могут быть вычислены в произвольной точке пружины с помощью формул (17.13) и выражений

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu \operatorname{Re} \{ e^{i(\xi-l)} [(C_7(\xi-l)b_{ij,9} + b_{ij,7}) + C_9b_{ij,9}] \} + \\ &\quad + C_{11}b_{ij,11} + C_{12}b_{ij,12}. \quad (19.12)\end{aligned}$$

Следует подчеркнуть, что формулы (19.8) являются «точными» в том смысле, что постоянные C_m ($m = 7, \dots, 12$) определяются точно через компоненты главного вектора и главного момента внешних усилий; при определении C_m ($m = 1, \dots, 6$) согласно (19.10) это свойство утрачивается.

Как следует из проведенных выше исследований, основные трудности расчета напряженно-деформированного состояния Сен-Венана

связаны с построением решений четырех двумерных краевых задач (17.7)–(17.10). Решение первых двух в совокупности с формулами (17.13), (19.8) и (19.10) описывают напряженно деформированное состояние изгиба пружины, вызванное перерезывающими силами Q_{x1}^* , Q_{x2}^* и изгибающими моментами M_{x1}^* , M_{x2}^* , решения задач (17.9)–(17.10) в совокупности с теми же формулами описывают практически наиболее важное напряженно-деформированное состояние пружины — растяжение-сжатие и закручивание относительно ее оси.

§ 20. Исследование решения Сен-Венана для пружины методом малого параметра

1. Обратимся к исследованию решений задач (17.7)–(17.10) на основе метода малого параметра. Помимо безразмерного параметра l , который характеризует длину $L = 2\pi l r_c$ осевой линии прутка, введем безразмерные параметры и координаты

$$\varepsilon = \frac{a}{r_0}, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi_1}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{\xi_2}{a}. \quad (20.1)$$

Здесь a — характерный линейный размер S .

Преобразуя уравнения и граничные условия (17.7)–(17.10) с учетом (20.1), получаем краевые задачи с параметром ε . Примем ε за малый параметр и будем считать, что $\beta = O(\varepsilon)$. Отыскивая решения в виде рядов по малому параметру, получим рекуррентную систему плоских и антиплоских задач теории упругости с различными правыми частями, вид которых зависит от порядка приближения. Для произвольного сечения S аналитические решения удастся построить только в низких приближениях и получить в явном виде только первые члены асимптотических разложений для напряжений и коэффициентов матрицы жесткости. Аналогичные решения можно получить на основе классической теории криволинейных стержней, опирающейся на гипотезу плоских сечений. Основные трудности связаны с построением решений плоских задач, которые даже для прямоугольного сечения не имеют точных аналитических решений. Применение же численных методов (в частности, МКЭ) для их решения вряд ли целесообразно, поскольку по затратам эквивалентно решению исходных задач. В случае, когда S — круг, явные аналитические выражения можно получить в высоких приближениях.

Не останавливаясь на деталях, приведем асимптотические разложения для коэффициентов матрицы жесткости и напряжений, позволяющие учесть влияние как кривизны (параметр ε), так и шага пружины (параметр β) на напряженно-деформированное состояние.

Ограничимся практически важным случаем, когда $Q_{x1}^* = Q_{x2}^* = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} d_{55} &= \varepsilon^3 \mu \lambda_{22} B_1, & d_{12} &= -\varepsilon^4 \mu \lambda_{12} B_1, \\ d_{66} &= \varepsilon^3 \mu \lambda_{11} B_2, & d_{33} &= d_{44} = d = \varepsilon^4 B_3, \end{aligned} \quad (20.2)$$

$$\sigma_{ij} = Q^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)} + Q^{(2)} \sigma_{ij}^{(2)} + Q^{(3)} (\sigma_{ij}^{(3)} \cos \varphi - \sigma_{ij}^{(3)} \sin \varphi) + \\ + Q^{(4)} (\sigma_{ij}^{(4)} \cos \varphi + \sigma_{ij}^{(4)} \sin \varphi),$$

$$Q^{(1)} = \varepsilon^{-3} Q_{x3}^* B_1 \Omega, \quad Q^{(2)} = \varepsilon^{-3} r_0^{-2} a M_{x3}^* B_2 \Omega,$$

$$Q^{(3)} = \varepsilon^{-4} r_0^{-2} a M_{\xi 1}^* B_3, \quad Q^{(4)} = \varepsilon^{-4} r_0^{-2} a (M_{\xi 3}^* - r_0 Q_{x3}^*) B_3,$$

$$\sigma_{31}^{(1)} = \lambda_{11} f_{31}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{12} f_{31}^{(2)}, \quad \sigma_{32}^{(1)} = \lambda_{11} f_{32}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{12} f_{32}^{(2)},$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \varepsilon \lambda_{11} f_{33}^{(1)} + \varepsilon \lambda_{12} f_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = o(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_{31}^{(2)} = \varepsilon \lambda_{21} f_{31}^{(1)} + \lambda_{22} f_{31}^{(2)}, \quad \sigma_{32}^{(2)} = \varepsilon \lambda_{21} f_{32}^{(1)} + \lambda_{22} f_{32}^{(2)},$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = \lambda_{22} f_{33}^{(2)} + \varepsilon^2 \lambda_{21} f_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = O(\varepsilon^3),$$

$$f_{31}^{(1)} = \alpha_2 - \frac{5}{4} \varepsilon \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \alpha_1^2 \alpha_2, \quad f_{31}^{(2)} = \beta \alpha_2 (1 - \varepsilon \alpha_1),$$

$$f_{32}^{(1)} = -\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{8} (3 + 7\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2) + \frac{\varepsilon^2}{8} (-3\alpha_1 + \alpha_1^3 + 3\alpha_1^2 \alpha_2),$$

$$f_{32}^{(2)} = \beta (1 + 2\nu) \alpha_2, \quad f_{33}^{(1)} = -2\beta \nu \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^2,$$

$$f_{33}^{(2)} = 2(1 + \nu) \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{4} [\alpha_1^2 (4 + 5\nu + 2\nu^2) + 2\nu (3 + 2\nu) \alpha_2^2 - \nu (3 + 2\nu)] + \\ + \frac{\nu \varepsilon^2}{4} [2(1 + 2\nu) \alpha_1^3 - 2(3 + 2\nu) \alpha_1 \alpha_2^2 + (3 + 2\nu) \alpha_1],$$

$$\lambda_{11} = 1 + \frac{\varepsilon^2 (8 + 13\nu + 6\nu^2)}{24(1 + \nu)}, \quad \lambda_{12} = \frac{\beta \nu}{1 + \nu}, \quad \lambda_{21} = \beta \nu,$$

$$\lambda_{22} = 1 + \frac{23}{48} \varepsilon^2, \quad \Omega = \lambda_{11} \lambda_{22} - \varepsilon^2 \lambda_{12} \lambda_{21},$$

$$\sigma_{31}^{(3)} = \frac{1}{\beta} \left[2k\alpha_2 + \varepsilon \left(\nu - \nu k + \frac{3k}{4} \right) \right],$$

$$\sigma_{32}^{(3)} = \beta^{-1} \left\{ -2k\alpha_1 + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \left[\frac{1}{2} (5k + 5k\nu - 6\nu) \alpha_1^2 + \frac{1}{4} (3k + 2k\nu) \alpha_2^2 + \frac{1}{4} (2\nu - 3k - 2k\nu) \right] \right\},$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = \varepsilon k \beta^{-1} [4\kappa \nu (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 2(1 + 2k + \nu) \alpha_1 - 2(1 + \nu)],$$

$$\sigma_{11}^{(3)} = \varepsilon \beta^{-1} \left[\frac{k}{1 + 2\nu} - 4k\kappa \alpha_2^2 - 4\nu \alpha_1 \right],$$

$$\sigma_{22}^{(3)} = \varepsilon \beta^{-1} \left[-\frac{k}{1 + 2\nu} + 4k\kappa \alpha_1^2 - 4\nu \alpha_1 - 4k\beta \right],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(3)} &= \varepsilon 2(k + 2\nu\beta^{-1})\alpha_2, \quad \sigma_{31}^{(4)} = O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{32}^{(4)} = 4\varepsilon k\alpha_2, \\
\sigma_{33}^{(4)} &= 4\beta^{-1}\alpha_2[k + \varepsilon 4(1 + \nu)], \quad \sigma_{11}^{(4)} = -4\varepsilon\nu\beta^{-1}\alpha_2, \\
\sigma_{22}^{(4)} &= 4\varepsilon\beta^{-1}(-4k\theta\alpha_1\alpha_2 + \nu\alpha_2), \quad \sigma_{12}^{(4)} = \varepsilon\beta^{-1} \left[\frac{k(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{1 - 2\nu} - 4\nu\alpha_1 \right], \\
B_1 &= a^{-4}C, \quad B_2 = a^{-4}B_{22}, \quad B_3 = \frac{4CB_{11}}{a^4\beta(C + B_{11})}, \\
k &= \frac{B_{11}}{C + B_{11}}, \quad B_{\alpha\alpha} = 2(1 + \nu) \int_S \xi_\alpha^2 dS.
\end{aligned} \tag{20.3}$$

В формулах (20.3) μC — жесткость на кручение призматического стержня с поперечным сечением S .

Подчеркнем, что приближенные формулы (20.2), (20.3) применимы для пружины с произвольным сечением витка.

В случае, когда S — круг радиуса a , выражения для B_j , k имеют простой вид:

$$B_1 = \frac{\pi}{2}, \quad B_2 = \frac{\pi(1 + \nu)}{2}, \quad B_3 = \pi k, \quad k = \frac{1 + \nu}{2 + \nu}.$$

Однако если кругом является поперечное сечение, ортогональное оси витка пружины, что более соответствует действительности, то область S будет эллипсом с полуосями $a_1 = a$, $a_2 = a\sqrt{1 + \varepsilon^2\beta^2}$ (эти формулы вытекают из простых геометрических соображений: $a_2 = a/\cos\alpha$, $\tan\alpha = h/(2\pi r_0) = \varepsilon\beta$), и следует обратиться к формулам (20.3), положив в них

$$C = \frac{\pi a^4(1 + \varepsilon^2\beta^2)^{3/2}}{2 + \varepsilon^2\beta^2},$$

$$B_{11} = \frac{1}{2}\pi(1 + \nu)(1 + \varepsilon^2\beta^2)^{1/2}, \quad B_{22} = \frac{1}{2}\pi(1 + \nu)(1 + \varepsilon^2\beta^2)^{3/2}.$$

В этом случае погрешность вычислений основных напряжений, вызванных силой Q_{x3} и моментом M_{x3} , по приведенным выше формулам будут иметь погрешность $O(\varepsilon^3)$.

Приведем еще уточненные формулы для наиболее практически важных характеристик пружины, а именно, для ее осадки $\Delta = u_2(l)$ и максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$, вызванных осевой силой. Имеем с погрешностью $O(\varepsilon^3)$

$$\Delta = \frac{nQ_{x3}}{\mu r_0 \varepsilon^2} \delta_1(\varepsilon, \alpha), \quad \tau_{\max} = \frac{Q_{x3}}{\pi a^2 \varepsilon^2} \delta_2(\varepsilon, \alpha), \tag{20.4}$$

$$\delta_1(\varepsilon, \alpha) = X(\lambda_{11} - \varepsilon\lambda_{12}), \quad \delta_2(\varepsilon, \alpha) = X\lambda_{11}\left(1 + \frac{5}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right), \tag{20.5}$$

$$X = \Omega^{-1}(2 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^{-3/2}. \tag{20.6}$$

2. Некоторые результаты численного анализа. Для пружины с эллиптическим и прямоугольным сечением была проведена серия расчетов. В случае эллиптического сечения на основе формул (21.4) анализировалось поведение осадки пружины и максимальных касательных напряжений в зависимости от параметров ε и α . Результаты этих расчетов приведены на рис. 10 в виде зависимости $\delta_1(\varepsilon, \alpha)$ (штриховые линии) и $\delta_2(\varepsilon, \alpha)$ (сплошные линии).

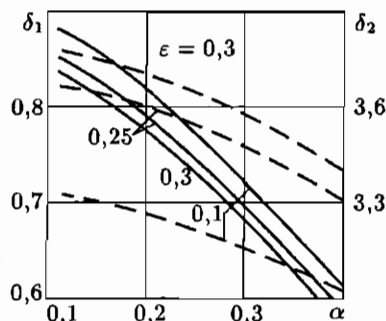


Рис. 10

В случае прямоугольного сечения расчеты проводились на основе МКЭ. В качестве конечного элемента выбирался прямоугольник с четырьмя узловыми точками и решения задач растяжения-кручения пружины, которые ранее были сведены к задачам на сечении (17.9), (17.10), строились как линейные комбинации 12 неизвестных узловых обобщенных перемещений и билинейных базисных функций.

Схема построения системы алгебраических уравнений из условия минимума функционалов (18.1), соответствующих задачам (17.9), (17.10), для всей конечно-элементной сетки стандартная. Однако их специфика ($\gamma = 0$ — двукратное собственное значение) такова, что полученная система вырождена, а именно, ранг расширенной системы порядка n равен $n - 2$. Однозначная разрешимость обеспечивается выполнением двух дополнительных условий (18.4), (18.5), которые учитываются с помощью метода множителей Лагранжа. Результирующая система симметрична, сильно разрежена и теряет не только ленточность, но и положительную определенность, которая свойственна типичным задачам механики деформируемого твердого тела, решаемым с помощью МКЭ. Исходные вариационные уравнения рассматриваемых задач не решаются известными конечно-элементными пакетами. Численное решение системы, в известном смысле [16] неопределенной, осуществляется методом решения Гаусса. В данной ситуации, требующей обеспечить устойчивость метода, отдается предпочтение стратегии полного выбора ведущего элемента; увеличение числа операций является платой за отсутствие симметрии. Вопрос об оптимальном выборе численного решения данной системы может быть предметом дополнительного исследования.

Рассматриваемые задачи иллюстрируются численными расчетами (МКЭ) и с помощью асимптотических формул, что позволяет обозначить границы применения асимптотики.

В табл. 5.1 представлены жесткости d_{ii} , вычисленные для квадратного сечения с точностью до множителя μr_c и порядков k_p при постоянном значении $\beta = 0,159$.

Таблица 5.1

ϵ	$d_{11}(\text{МКЭ})$	$d_{11}(\text{А})$	$d_{22}(\text{МКЭ})$	$d_{22}(\text{А})$	k_p
0,01	1,425	1,400	2,664	2,759	10^{-5}
0,03	1,282	1,260	2,396	2,473	10^{-4}
0,05	3,562	3,500	6,653	6,897	10^{-4}
0,07	6,984	6,860	13,030	13,842	10^{-4}
0,09	1,125	1,134	2,152	2,234	10^{-3}
0,1	1,425	1,400	2,664	2,759	10^{-3}
0,3	1,289	1,260	2,362	2,473	10^{-2}
0,5	3,617	3,500	6,453	6,897	10^{-2}
0,7	7,208	6,860	1,238	1,384	10^{-1}
0,9	1,125	1,134	2,152	2,234	10^{-1}

В соответствии с представленными результатами расхождение численных и асимптотических данных для d_{11} при $\epsilon < 0,09$ не превышает 2%, для d_{22} — 5%. Асимптотические формулы дают погрешность более 10% при $\epsilon \geq 0,5$.

Табл. 5.2 иллюстрирует зависимость жесткостей от плотности витков, причем ϵ фиксируется в интервале, недоступном для асимптотики. Плотность витков характеризуется $\text{tg } \alpha$, ее изменение для $\alpha \neq 0$

Таблица 5.2

ϵ	α	a_2/a_1	d_{11}	d_{21}	d_{22}
0,5	$\pi/15$	1,0	0,03514	-0,002 879	0,0612
0,5	$\pi/10$	1,08	0,03368	-0,004 074	0,0566
0,5	$\pi/4$	1,4	0,03812	-0,000 461	0,3736
0,9	$\pi/15$	1,0	11,97	-0,009 543	19,28
0,9	$\pi/10$	1,08	11,40	-0,013 787	17,83
0,9	$\pi/4$	1,4	11,86	-0,003 426	11,90

приводит к рассмотрению прямоугольника в качестве сечения, а не квадрата.

Анализ сходимости данных в зависимости от разбиения обусловил выбор конкретных разбиений 8×14 и 8×8 для прямоугольника и квадрата соответственно.

§ 21. Однородные решение для кругового кольца

Кольцо рассматривается как трехмерное тело, которое получается движением плоской фигуры S , расположенной в плоскости $\varphi = \text{const}$ цилиндрической системы координат r, z, φ . Обозначим через $V = S \times [0, \varphi_0]$ область, занятую телом, $\Gamma = \partial S \times [0, \varphi_0]$ — боковую поверхность, где ∂S — граница S ; $r, z \in S$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, r_c — расстояние от оси z до центра тяжести S . Введем также сопутствующую систему

координат

$$\xi_1 = r - r_c, \quad \xi_2 = z, \quad \xi = \varphi.$$

Основные соотношения теории упругости и спектральную задачу, определяющую множество элементарных однородных решений для кольца, можно получить, если в соответствующих формулах из § 17 и § 18 положить $h_0 = 0$. При этом структура спектра остается такой же, как и в случае пружины, изменяется только структура корневых подпространств, соответствующих тем собственным значениям, которые определяют подмножество ЭРСВ.

1. Для построения ЭРСВ в случае кольца обратимся к формулам (17.3), и, полагая в них $h_0 = 0$, получим выражения для компонент вектора твердого смещения. Из полученных таким образом формул и дополнительного анализа следует

Утверждение 21.1. Собственными значениями спектральной задачи (17.2) ($h_0 = 0$) являются

$$\gamma = \gamma_0 = 0, \quad \gamma = \gamma_1 = i, \quad \gamma = \gamma_{-1} = -i.$$

Утверждение 21.2. Собственным значениям γ_1 соответствуют два собственных вектора,

$$a_1 = \{1, 0, i\}, \quad a_3 = \{\xi_2, -r, i\xi_2\}, \quad (21.1)$$

собственному значению γ_{-1} соответствуют два собственных вектора

$$a_2 = \{1, 0, -i\}, \quad a_4 = \{\xi_2, -r, -i\xi_2\}. \quad (21.2)$$

Утверждение 21.3. Собственному значению γ_0 соответствуют два собственных вектора,

$$a_5 = \{0, 1, 0\}, \quad a_6^4 = a_6 = \{0, 0, r\}. \quad (21.3)$$

Утверждение 21.4. Собственные векторы a_1, a_3 имеют по одному присоединенному вектору — соответственно a_7 и a_9 , которые определяются решением следующих краевых задач:

$$L(i)a_7 = F_7, \quad M(i)a_7 \Big|_{\partial S} = f_7, \quad (21.4)$$

$$F_7 = -(2iC + B)a_1, \quad f_7 = -Ga_1 \Big|_{\partial S},$$

$$L(i)a_9 = F_9, \quad M(i)a_9 \Big|_{\partial S} = f_9, \quad (21.5)$$

$$F_9 = -(2iC + B)a_3, \quad f_9 = -Ga_3 \Big|_{\partial S}, \quad j = 2, 3.$$

С учетом конкретного вида векторов a_1, a_3

$$F_7 = \left\{ \frac{i(1+2\kappa)}{r}, 0, \frac{(1+2\kappa)}{r} \right\}, \quad f_7 = \{-2\kappa n_1 i, -2\kappa n_2 i, -n_1\},$$

$$\mathbf{F}_9 = \left\{ \frac{i(1+2\kappa)\xi_2}{r}, 0, \frac{(1+2\kappa)\xi_2}{r} \right\},$$

$$\mathbf{f}_9 = \{-i2\kappa\xi_2n_1, -i2\kappa\xi_2n_2, -n_1\xi_2 + n_2r\}.$$

Утверждение 21.5. Собственные векторы $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ имеют по одному присоединенному вектору $-\mathbf{a}_8 = \bar{\mathbf{a}}_7$ и $\mathbf{a}_{10} = \bar{\mathbf{a}}_9$ соответственно.

Замечание 21.1. Из соотношений (21.4), (21.5) и утверждения 21.5 видно, что компоненты векторов $\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10}$ — комплекснозначные функции, что создает некоторые неудобства при вычислениях. Однако, если сделать замены неизвестных, положив

$$\mathbf{a}_7 = \{iv_1^{(1)}, iv_1^{(1)}, v_3^{(1)}\}, \quad \mathbf{a}_8 = \{-iv_1^{(1)}, -iv_1^{(1)}, v_3^{(1)}\},$$

$$\mathbf{a}_9 = \{iv_1^{(2)}, iv_1^{(2)}, v_3^{(2)}\}, \quad \mathbf{a}_{10} = \{-iv_1^{(2)}, -iv_1^{(2)}, v_3^{(2)}\},$$

то для $v_j^{(\alpha)}$, получаем краевые задачи, не содержащие мнимой единицы i . Имеем

$$A_{11}v_1^{(\alpha)} + \frac{v_1^{(\alpha)}}{r} + A_{12}v_2^{(\alpha)} + B_{13}v_3^{(\alpha)} = F_1^{(\alpha)},$$

$$A_{21}v_1^{(\alpha)} + A_{22}v_2^{(\alpha)} + \frac{v_2^{(\alpha)}}{r} + B_{13}v_3^{(\alpha)} = F_2^{(\alpha)},$$

$$-B_{31}v_1^{(\alpha)} - B_{32}v_2^{(\alpha)} + A_{33}v_3^{(\alpha)} + \frac{2(1+\kappa)v_3^{(\alpha)}}{r} = F_2^{(\alpha)}, \quad (21.6)$$

$$E_{11}v_1^{(\alpha)} + E_{12}v_2^{(\alpha)} + 2\kappa n_1v_3^{(\alpha)} = f_1^{(\alpha)},$$

$$E_{21}v_1^{(\alpha)} + E_{22}v_2^{(\alpha)} + 2\kappa n_2v_3^{(\alpha)} = f_2^{(\alpha)},$$

$$-n_1v_1^{(\alpha)} - n_2v_2^{(\alpha)} + E_{33}v_3^{(\alpha)} = f_3^{(\alpha)},$$

$$F_1^{(1)} = \frac{1+2\kappa}{r}, \quad F_2^{(1)} = 0, \quad F_3^{(1)} = \frac{1+2\kappa}{r},$$

$$f_1^{(1)} = -2\kappa n_1, \quad f_2^{(1)} = -2\kappa n_2, \quad f_3^{(1)} = -n_1,$$

$$F_1^{(2)} = \frac{(1+2\kappa)\xi_2}{r}, \quad F_2^{(2)} = 1-2\kappa, \quad F_3^{(2)} = \frac{(1+2\kappa)\xi_2}{r},$$

$$f_1^{(2)} = -2\kappa\xi_2n_1, \quad f_2^{(2)} = -2\kappa\xi_2n_2, \quad f_3^{(2)} = -n_1\xi_2 + n_2r.$$

$$A_{11} = 2(1+\kappa) \left(r \partial_1^2 + \partial_1 - \frac{1}{r} \right) + r \partial_2^2, \quad A_{12} = (1+2\kappa) \partial_1 \partial_2,$$

$$A_{21} = (1+2\kappa)(r \partial_1 \partial_2 + \partial_2), \quad A_{22} = r \partial_1^2 + \partial_1 + 2(1+\kappa)r \partial_2^2,$$

$$E_{11} = n_1 \left[2(1+\kappa) \partial_1 + \frac{2\kappa}{r} \right] + n_2 \partial_2, \quad E_{12} = n_1 2\kappa \partial_2 + n_2 \partial_1,$$

$$E_{21} = n_1 \partial_2 + n_2 2\kappa \left(\partial_1 + \frac{1}{r} \right), \quad E_{22} = n_1 \partial_1 + 2(1+\kappa)n_2 \partial_2.$$

Утверждение 21.6. Собственный вектор a_5 имеет только один присоединенный вектор $a_{11} = \{0, 0, v_3^{(3)}\}$, где $v_3^{(3)} = v$ — решение следующей задачи

$$\partial_1^2 v + \frac{1}{r} \partial_1 v + \partial_2^2 v - \frac{v}{r^2} = 0, \quad n_1 \left(\partial_1 - \frac{1}{r} \right) v + n_2 \partial_2 v = -\frac{n_2}{r}. \quad (21.7)$$

Утверждение 21.7. Собственный вектор a_6 имеет только один присоединенный вектор $a_{12} = \{v_1^{(4)}, v_2^{(4)}, 0\}$, который определяется решением задачи

$$\begin{aligned} A_{11}v_1^{(4)} + A_{12}v_2^{(4)} &= 2r, & A_{21}v_1^{(4)} + A_{22}v_2^{(4)} &= 0, \\ E_{11}v_1^{(4)} + E_{12}v_2^{(4)} &= -2\pi n_1, & E_{21}v_1^{(4)} + E_{22}v_2^{(4)} &= -2\pi n_2. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Замечание 21.2. Задачи (21.4), (21.5) (соответственно (21.6)), (21.7), (21.8) имеют не единственное решение. Каждое из них определяется с точностью до линейной комбинации решений однородных задач, т. е.

$$a'_7 = a_7 + C_{11}a_1 + C_{12}a_2, \quad a'_9 = a_9 + C_{31}a_1 + C_{32}a_2,$$

$$a'_{11} = a_{11} + C_{51}a_5 + C_{52}a_6, \quad a'_{12} = a_{12} + C_{61}a_5 + C_{62}a_6,$$

где C_{ij} — произвольные постоянные.

Из этих утверждений вытекает, что ЭРСВ для кольца имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= e^{i\xi} a_1, & u_2(\xi) &= \bar{u}_1(\xi), & u_3(\xi) &= e^{i\xi} a_3, \\ u_4(\xi) &= \bar{u}_3(\xi), & u_5(\xi) &= a_5, & u_6(\xi) &= a_6, \\ u_7(\xi) &= e^{i\xi} (\xi a_1 + a_7), & u_8(\xi) &= \bar{u}_7(\xi), \\ u_9(\xi) &= e^{i\xi} (\xi a_3 + a_9), & u_{10}(\xi) &= \bar{u}_9(\xi), \\ u_{11}(\xi) &= \xi a_5 + a_{11}, & u_{12}(\xi) &= \xi a_6 + a_{12}, \\ \sigma_m(\xi) &= 0, & m &= 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (21.9)$$

$$\sigma_7(\xi) = e^{i\xi} b_7, \quad \sigma_8(\xi) = \bar{\sigma}_7(\xi), \quad \sigma_9(\xi) = e^{i\xi} b_9, \quad (21.10)$$

$$\sigma_{10}(\xi) = \bar{\sigma}_9(\xi), \quad \sigma_{11}(\xi) = b_{11}, \quad \sigma_{12}(\xi) = b_{12},$$

$$\begin{aligned} b_7 &= (B_3 + iC)a_7 + Ca_1, & b_8 &= \bar{b}_7, & b_9 &= (B_3 + iC)a_9 + Ca_3, \\ b_{10} &= \bar{b}_9, & b_{11} &= B_3 a_{11} + Ca_5, & b_{12} &= B_3 a_{12} + Ca_6. \end{aligned} \quad (21.11)$$

Используя формулы закона Гука (16.3), для каждого элементарного решения можно получить тензор напряжений. Сохраняя смысл обозначений, принятых в § 11, и учитывая замечание 21.1, имеем

$$b_{mn,l} = b_{mn}(a_l) + c_{mn,l}, \quad l = 7, \dots, 12.$$

Для $l = 7, 9$

$$\begin{aligned}\sigma_{mn,l} &= i\mu e^{i\xi} b_{mn,l}, \quad \sigma_{12,l} = i\mu e^{i\xi} b_{12,l}, \\ \sigma_{13,l} &= \mu e^{i\xi} b_{13,l}, \quad \sigma_{23,l} = \mu e^{i\xi} b_{23,l},\end{aligned}\quad (21.12)$$

$$\begin{aligned}b_{11,l} &= 2 \left[(1+\kappa) \partial_1 v_1^{(\alpha)} + \kappa \left(\frac{v_1^{(\alpha)}}{r} + \partial_2 v_2^{(\alpha)} \right) + \kappa v_3^{(\alpha)} + c_{11,l} \right], \\ b_{22,l} &= 2 \left[\kappa \partial_1 v_1^{(\alpha)} + (1+\kappa) \left(\frac{v_1^{(\alpha)}}{r} + \partial_2 v_2^{(\alpha)} \right) + \kappa v_3^{(\alpha)} + c_{22,l} \right], \\ b_{33,l} &= 2 \left[\kappa \left(\partial_1 v_1^{(\alpha)} + \frac{v_1^{(\alpha)}}{r} + \partial_2 v_2^{(\alpha)} \right) + \kappa v_3^{(\alpha)} + c_{33,l} \right], \\ b_{12,l} &= \partial_1 v_2^{(\alpha)} + \partial_2 v_1^{(\alpha)}, \quad b_{13,l} = \partial_1 v_3^{(\alpha)} - \frac{v_3^{(\alpha)}}{r} + c_{13,l}, \\ b_{23,l} &= \partial_2 v_3^{(\alpha)} c_{33,l}, \quad c_{11,7} = c_{22,7} = \frac{2i\kappa}{r}, \quad c_{33,7} = \frac{2i(1+\kappa)}{r}, \\ c_{12,7} &= 0, \quad c_{13,7} = \frac{1}{r}, \quad c_{23,7} = 0, \quad c_{11,9} = c_{22,9} = \frac{2i\kappa}{r}, \\ c_{33,9} &= \frac{2i(1+\kappa)}{r}, \quad c_{12,9} = 0, \quad c_{13,9} = \frac{1}{r}, \quad c_{23,9} = 0, \\ c_{11,11} &= c_{22,11} = \frac{2i\kappa\xi_2}{r}, \quad c_{33,11} = \frac{2i(1+\kappa)\xi_2}{r}, \\ c_{12,11} &= 0, \quad c_{13,11} = \frac{\xi_2}{r}, \quad c_{23,11} = -1, \quad \sigma_{mn,l+1} = \bar{\sigma}_{mn,l}.\end{aligned}\quad (21.13)$$

Для $l = 11, 12$

$$\begin{aligned}\sigma_{mn,l} &= \mu b_{mn,l}, \quad b_{11,11} = b_{22,11} = b_{33,11} = b_{12,11} = 0, \\ b_{13,11} &= \partial_1 v - \frac{v}{r}, \quad b_{23,11} = \partial_v + 1, \\ b_{11,12} &= 2 \left[(1+\kappa) \partial_1 v_1^{(4)} + \kappa \left(\frac{v_1^{(4)}}{r} + \partial_2 v_2^{(4)} \right) + 2\kappa \right], \\ b_{22,12} &= 2 \left[\kappa \left(\partial_1 v_1^{(4)} + \frac{v_1^{(4)}}{r} \right) + (1+\kappa) \partial_2 v_2^{(4)} + 2\kappa \right], \\ b_{33,12} &= 2 \left[\kappa \left(\partial_1 v_1^{(4)} + \frac{v_1^{(4)}}{r} + \partial_2 v_2^{(4)} \right) + 2(1+\kappa) \right], \\ b_{12,12} &= \partial_1 v_2^{(4)} + \partial_2 v_1^{(4)}, \quad b_{13,12} = 0, \quad b_{23,12} = 0.\end{aligned}\quad (21.14)$$

Лишний раз подчеркнем, что все $b_{mn,l}$ — вещественнозначные функции переменных ξ_1, ξ_2 и определяются однозначно по решениям соответствующих краевых задач.

2. Определим решение Сен-Венана формулами (19.1), (19.2), положив $l = \varphi_0$, и преобразуем их с помощью замен

$$\begin{aligned} C_7 &= A_1 + iA_2, & C_8 &= A_1 - iA_2, & C_9 &= A_3 + iA_4, \\ C_{10} &= A_3 - iA_4, & C_{11} &= A_5, & C_{12} &= A_6, \end{aligned} \quad (21.15)$$

где A_m — вещественные постоянные. Для напряжений σ_{j3} получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \mu \left[2(A_1 \cos \varphi' - A_2 \sin \varphi') b_{\alpha 3}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \cos \varphi' - A_4 \sin \varphi') b_{\alpha 3}^{(2)} + A_5 b_{\alpha 3}^{(3)} \right], \end{aligned} \quad (21.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -\mu \left[2(A_1 \sin \varphi' + A_2 \cos \varphi') b_{33}^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - 2(A_3 \sin \varphi' + A_4 \cos \varphi') b_{33}^{(2)} + A_6 b_{33}^{(4)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (21.16) в (19.3), (19.4), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} Q_{\xi \alpha} &= \mu \left[2(A_1 \cos \varphi' - A_2 \sin \varphi') q_{\alpha}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \cos \varphi' - A_4 \sin \varphi') q_{\alpha}^{(2)} + A_5 q_{\alpha}^{(3)} \right], \end{aligned} \quad (21.17)$$

$$\begin{aligned} Q_{\xi 3} &= -\mu \left[2(A_1 \sin \varphi' + A_2 \cos \varphi') q_3^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \sin \varphi' + A_4 \cos \varphi') q_3^{(2)} + A_6 q_3^{(4)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\xi 1} &= -\mu \left[2(A_1 \sin \varphi' + A_2 \cos \varphi') m_1^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \sin \varphi' + A_4 \cos \varphi') m_1^{(2)} + A_6 m_1^{(4)} \right], \end{aligned} \quad (21.18)$$

$$\begin{aligned} M_{\xi 2} &= \mu \left[2(A_1 \sin \varphi' + A_2 \cos \varphi') m_2^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \sin \varphi' + A_4 \cos \varphi') m_2^{(2)} + A_6 m_2^{(4)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\xi 3} &= \mu \left[2(A_1 \cos \varphi' - A_2 \sin \varphi') m_3^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(A_3 \cos \varphi' - A_4 \sin \varphi') m_3^{(2)} + A_5 m_3^{(4)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi' = \varphi - \varphi_0$.

$$q_j^{(k)} = \int_S b_{j3}^{(k)} dS, \quad m_1^{(k)} = \int_S \xi_2 b_{33}^{(k)} dS, \quad m_2^{(k)} = - \int_S \xi_1 b_{33}^{(k)} dS,$$

$$m_3^{(k)} = \int_S (\xi_1 b_{23}^{(k)} - \xi_2 b_{13}^{(k)}) dS, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$q_j^{(k)}$, $m_j^{(k)}$ определяют геометрические жесткости поперечного сечения. Установим некоторые связи между этими элементами. Для этого (21.12) подставим в уравнения равновесия (16.4) и граничные условия на боковой поверхности кольца. Полагая $h_0 = 0$, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \partial_1(r b_{11}^{(\alpha)}) + r \partial_2 b_{12}^{(\alpha)} + b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)} &= 0, \\ \partial_1(r b_{12}^{(\alpha)}) + r \partial_2 b_{22}^{(\alpha)} + b_{23}^{(\alpha)} &= 0, \end{aligned} \quad (21.19)$$

$$\partial_1(r b_{13}^{(\alpha)}) + r \partial_2 b_{23}^{(\alpha)} + b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)} = 0,$$

$$\begin{aligned} n_1 b_{11}^{(\alpha)} + n_2 b_{12}^{(\alpha)} &= 0, \quad n_1 b_{12}^{(\alpha)} + n_2 b_{22}^{(\alpha)} = 0, \\ n_1 b_{13}^{(\alpha)} + n_2 b_{23}^{(\alpha)} &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (21.20)$$

$$\partial_1(r b_{13}^{(3)}) + r \partial_2 b_{23}^{(3)} + b_{13}^{(3)} = 0, \quad n_1 b_{13}^{(3)} + n_2 b_{23}^{(3)} = 0. \quad (21.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_1(r b_{11}^{(4)}) + r \partial_2 b_{12}^{(4)} - b_{33}^{(4)} &= 0, \quad \partial_1(r b_{12}^{(4)}) + r \partial_2 b_{22}^{(4)} = 0, \\ n_1 b_{11}^{(4)} + n_2 b_{12}^{(4)} &= 0, \quad n_1 b_{12}^{(4)} + n_2 b_{22}^{(4)} = 0. \end{aligned} \quad (21.22)$$

Обратимся к первому уравнению из группы (21.19). Проинтегрируем его по области S . Имеем

$$\begin{aligned} \int_S \left[\partial_1(r b_{11}^{(\alpha)}) + r \partial_1 b_{12}^{(\alpha)} + b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)} \right] dS = \\ = \int_S (b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)}) dS + \int_{\partial S} (n_1 b_{11}^{(\alpha)} + n_2 b_{12}^{(\alpha)}) r dS = 0. \end{aligned} \quad (21.23)$$

Из (21.23) и первого граничного условия (21.20) следует

$$q_1^{(\alpha)} = q_3^{(\alpha)}. \quad (21.24)$$

Обратимся к третьему уравнению из группы (21.19). Умножим его на ξ_2 и проинтегрируем по S . Имеем

$$\begin{aligned} \int_S \left[\xi_2 \partial_1 (r b_{13}^{(\alpha)}) + \xi_2 r \partial_1 b_{23}^{(\alpha)} + \xi_2 (b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)}) \right] dS = \\ = \int_S [\xi_2 (b_{13}^{(\alpha)} - b_{33}^{(\alpha)}) - r b_{23}^{(\alpha)}] dS + \int_{\partial S} (n_1 b_{11}^{(\alpha)} + n_2 b_{12}^{(\alpha)}) r \xi_2 dS = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $r = r_c + \xi_1$, из полученного равенства и третьего граничного условия (21.20) следует

$$m_3^{(\alpha)} + r_c q_2^{(\alpha)} + m_1^{(\alpha)} = 0. \quad (21.25)$$

Аналогичным образом доказываются следующие равенства:

$$q_2^{(\alpha)} = q_1^{(3)} = q_3^{(4)} = 0, \quad m_2^{(\alpha)} = r_c q_1^{(\alpha)}. \quad (21.26)$$

Допустим, что при $\varphi' = 0$ заданы напряжения $\sigma_3 = p$. Удовлетворяя этому граничному условию в интегральном смысле и учитывая (21.23), (21.24), получаем следующую систему для определения постоянных A_m , $m = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} 2\mu \left(q_1^{(1)} A_1 + q_1^{(2)} A_3 \right) &= Q_{\xi 1}^*, \\ 2\mu \left(m_3^{(1)} A_1 + m_3^{(2)} A_3 \right) &= M_{\xi 3}^* + r_c Q_{\xi 2}^*, \\ 2\mu \left(q_3^{(1)} A_2 + q_3^{(2)} A_4 \right) &= -Q_{\xi 3}^*, \\ 2\mu \left(m_3^{(1)} A_2 + m_3^{(2)} A_4 \right) &= M_{\xi 1}^*, \\ \mu q_3^{(3)} A_5 &= Q_{\xi 2}^*, \quad \mu \left(r_0 q_3^{(3)} - m_3^{(4)} \right) A_6 = r_c Q_{\xi 3}^* + M_{\xi 1}^*. \end{aligned} \quad (21.27)$$

§ 22. Задачи о дислокациях

В рассмотренных выше задачах неявно предполагалось, что вектор смещений является однозначной функцией координат. Однако существует круг задач, в которых это свойство вектора перемещений нарушается. Например, при наличии в теле тонких включений, или дислокаций. Общая теория дислокаций в рамках линейной теории упругости достаточно подробно изложена в [43]. Здесь будет затронут только узкий круг задач, связанных с дислокациями (дисторсиями) Вольтерра в замкнутом круговом кольце. Чтобы представить, о каких задачах пойдет речь, предположим, например, что из кольца

устранена узкая полоска материала, ограниченная двумя аксиальными плоскостями, и образованные таким образом новые поверхности сведены друг с другом и соединены. Очевидно, что в полученном таким образом теле возникло напряженно-деформированное состояние, при этом вектор смещений при обходе по любому замкнутому контуру, охватывающему центр кольца, претерпевает скачок, а компоненты тензоров деформаций и напряжений остаются однозначными функциями. Впервые такие задачи были рассмотрены еще в начале XX века рядом авторов, ссылки на работы которых можно найти в [44].

1. Обратимся к постановке задачи.

Рассмотрим замкнутое круговое кольцо $0 \leq \xi \leq 2\pi$. В сечении $\xi = \xi_0$ определим приращение вектор-функции $f(\xi) = f(\xi_1, \xi_2, \xi)$:

$$\langle f \rangle = f(2\pi + \xi_0) - f(\xi_0).$$

Будем считать, что вектор смещений u и вектор напряжений $\sigma_3 = \mu\sigma$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\langle u \rangle = u_0, \quad \langle \sigma \rangle = 0. \quad (22.1)$$

Здесь $u_0 = \{u_{j0}(\xi_1, \xi_2)\}_{j=1}^3$ — произвольная интегрируемая вектор-функция.

Введем расширенные векторы

$$w = \{u, \sigma\}, \quad \langle w \rangle = \{\langle u \rangle, 0\}, \quad v_0 = \{u_0, 0\},$$

и решение трехмерной задачи будем отыскивать в виде

$$w = \sum_{m=7}^{12} C_m w_m(\xi') + \sum_k C_k w_k(\xi'), \quad \xi' = \xi - \xi_0. \quad (22.2)$$

В представлении (22.2) опущена сумма по элементарным решениям, описывающим твердое смещение, поскольку в рассматриваемой задаче в ней нет необходимости; суммирование в последней сумме ведется по всем комплексным собственным значениям γ_k , $w_k = v_k e^{\gamma_k \xi}$, $v_k = \{a_k, b_k\}$.

Определим приращение $\langle w \rangle$, используя (22.2) и конкретный вид элементарных решений Сен-Венана (21.9). Имеем

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= 2\pi \sum_{m=1}^6 C_{m+6} v_m + \sum_k C_k v_k (e^{2\pi \gamma_k} - 1), \\ v_m &= \{a_m, 0\}, \quad m = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (22.3)$$

Потребуем, чтобы

$$\langle w \rangle = v_0. \quad (22.4)$$

Вектор-функции $\langle w \rangle$, v_0 будем рассматривать как элементы гильбертова пространства H_1 со скалярным произведением (1.16).

Умножаем равенство (22.4) скалярно в H_1 на $Jv_l = \{-b_l, a_l\}$ ($l = 7, \dots, 12$). Подставляя (22.3) в (22.4) и используя соотношения биортогональности, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{m=7}^{12} d_{nm-6} C_m &= g_n, \quad (e^{2\pi\gamma_k} - 1) d_k C_k = g_k, \\ d_{11} C_7 + d_{13} C_9 &= g_1, \quad d_{31} C_7 + d_{33} C_9 = g_3, \\ d_{55} C_{11} &= g_5, \quad d_{66} C_{12} = g_6. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2q_3^{(1)}, \quad d_{13} = m_1^{(1)}, \quad d_{31} = 2q_3^{(2)}, \\ d_{33} &= m_1^{(2)}, \quad d_{55} = 2q_2^{(3)}, \quad d_{66} = 2m_3^{(4)}, \\ g_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left(u_{10} b_{13}^{(1)} + u_{20} b_{23}^{(1)} - i u_{30} b_{33}^{(1)} \right) dS, \\ g_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left(u_{10} b_{13}^{(2)} + u_{20} b_{23}^{(2)} - i u_{30} b_{33}^{(2)} \right) dS, \\ g_5 &= \frac{1}{2\pi} \int_S u_{20} b_{23}^{(3)} dS, \quad g_6 = \frac{1}{2\pi} \int_S u_{30} b_{33}^{(4)} dS. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Умножая (22.4) на $z_s = \{b_s, -a_s\}$, где z_s — собственный вектор оператора T^* , соответствующий комплексному СЗ $\bar{\gamma}_s$, получаем

$$d_s (e^{2\pi\gamma_s} - 1) C_s = g_s, \quad g_s = (u_0, b_s), \quad d_s = (v_s, z_s)_1. \quad (22.7)$$

Поскольку, как следует из формул (22.5), постоянные C_m, C_k не зависят от выбора ξ_0 , ниже будем считать, что $\xi_0 = 0$.

Рассмотрим более подробно классический случай дислокаций Вольтера, когда

$$u_0 = a^0 + b^0 \times r, \quad (22.8)$$

где r — радиус вектор точек сечения $\xi = 0$; a^0, b^0 не зависят от r .

Вектор u_0 , описывающий смещение сечения как твердого тела, представим в виде

$$u_0 = \sum_{m=1}^6 C_m a_m, \quad (22.9)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (a_{x1}^0 - i a_{x2}^0), \quad C_2 = \frac{1}{2} (a_{x1}^0 + i a_{x2}^0), \quad C_3 = \frac{1}{2} i (b_{x1}^0 - i b_{x2}^0),$$

$$C_4 = \frac{1}{2} i (b_{x1}^0 + i b_{x2}^0), \quad C_5 = a_{x3}^0, \quad C_6 = b_{x3}^0.$$

Из формул (22.9) и описанного выше метода построения решения вытекает, что в данном случае

$$C_{m+6} = \frac{C_m}{2\pi}, \quad C_k = 0. \quad (22.10)$$

Таким образом, при дислокациях вида (22.9) погранслоное решение тождественно равно нулю.

Учитывая замечание 21.1, можно выделить четыре типа дислокаций, Вольтерра, которые описываются элементарными решениями:

$$u_1^1 = \frac{a_{x1}^0}{2\pi} \left(\xi \cos \xi + v_1^{(1)} \sin \xi \right), \quad u_2^1 = \frac{a_{x1}^0}{2\pi} v_2^{(1)} \sin \xi, \quad (22.11)$$

$$u_3^1 = \frac{a_{x1}^0}{2\pi} \left(-\xi \sin \xi + v_3^{(1)} \sin \xi \right);$$

$$u_1^2 = \frac{b_{x1}^0}{2\pi} \left(-\xi \xi_2 \sin \xi + v_1^{(2)} \cos \xi \right), \quad u_2^2 = \frac{b_{x1}^0}{2\pi} \left(r \xi \sin \xi + v_2^{(2)} \cos \xi \right), \quad (22.12)$$

$$u_3^2 = \frac{b_{x1}^0}{2\pi} \left(-\xi \cos \xi + v_3^{(2)} \sin \xi \right);$$

$$u_1^3 = 0, \quad u_2^3 = \frac{a_{x3}^0}{2\pi} \xi, \quad u_3^3 = \frac{a_{x3}^0}{2\pi} v; \quad (22.13)$$

$$u_1^3 = \frac{b_{x3}^0}{2\pi} v_1^{(4)}, \quad u_2^3 = \frac{b_{x3}^0}{2\pi} v_2^{(4)}, \quad u_3^3 = \frac{b_{x3}^0}{2\pi} \xi r. \quad (22.14)$$

В формулах (22.11), (22.12) $v_j^{(\alpha)}$ — решения задач (21.6); в формулах (22.13) v — решение задачи (21.7); в формулах (22.14) $v_j^{(4)}$ — решение задачи (21.8).

Решение (22.11) описывает два типа дислокаций:

1) в сечении $\xi = 0$ сделан разрез и края разреза сдвинуты друг относительно друга по радиусу кольца на величину a_{x1}^0 ;

2) в сечении $\xi = \pi/2$ вставлен ($a_{x1}^0 > 0$) или изъят ($a_{x1}^0 < 0$) слой материала толщиной a_{x1}^0 .

Решение (22.12) описывает дислокацию, возникающую в результате поворота поверхностей разреза на угол b_{x1}^0 .

Решение (22.13) описывает винтовую дислокацию, возникающую в результате сдвига поверхностей разреза друг относительно друга вдоль оси z на величину a_{x3}^0 .

Решение (22.13) описывает дислокацию расклинивания ($b_{x3}^0 > 0$) или дисклинации ($b_{x3}^0 < 0$).

Описанные интерпретации исключают необходимость отдельно рассматривать задачи для компонент a_{x2}^0 , b_{x2}^0 .

Напряжения, соответствующие каждому из решений (22.11)–(22.14), легко можно найти по формулам (16.3), заменив в них оператор D на частную производную ∂ .

В ряде работ были найдены точные решения описанных выше краевых задач. Так, например, в работах [66, 72] для винтовой дислокации получены решения в виде рядов для кругового и прямоугольного сечений прутка. В случае дислокации типа расклинивания (дисклинации) точные решения в варианте плоской деформации приведены в [44, 48]. Точные решения для остальных типов дислокаций автору неизвестны.

2. В случае кольца с относительно тонким прутком можно построить приближенные решения задач (21.6)–(21.8) методом, описанным в § 20. Не вдаваясь в детали построения, приведем здесь асимптотические формулы для напряжений в случае кольца с круговым поперечным сечением.

Напряжения, соответствующие решению (22.11), имеют вид

$$\sigma_{11} = \frac{a_{x1}^0 \mu}{2\pi r_0} \varepsilon^2 \left[\left(\frac{7}{4} + 1,5\nu \right) (\xi_1^2 - 1) + \left(\frac{5}{4} + \frac{\nu}{2} \right) \xi_2^2 \right] \sin \xi,$$

$$\sigma_{12} = \frac{a_{x1}^0 \mu}{2\pi r_0} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \nu \right) \xi_1 \xi_2 \sin \xi,$$

$$\sigma_{13} = \frac{a_{x1}^0 \mu}{2\pi r_0} \varepsilon^2 \left[\left(\frac{3}{2} + \nu \right) (1 - \xi_1^2) + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \xi_2^2 \right] \cos \xi,$$

$$\sigma_{23} = -\frac{a_{x1}^0 \mu}{2\pi r_0} \varepsilon^2 (1 + 2\nu) \xi_1 \xi_2 \cos \xi,$$

$$\sigma_{33} = \frac{a_{x1}^0 \mu}{2\pi r_0} \varepsilon \left[4(1 + \nu) \xi_1 + \varepsilon \left(-(2\nu^2 + 5\nu + 4) \xi_1^2 + \nu(3 + 2\nu) \xi_2^2 - \frac{\nu}{2} \right) \right] \sin \xi.$$

Главным является напряжение σ_{33} .

Напряжения, соответствующие решению (22.12), имеют вид

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \frac{b_{x1}^0 \mu(1 + \nu)}{2\pi(2 + \nu)} \varepsilon^2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2) \cos \xi,$$

$$\sigma_{13} = \frac{b_{x1}^0 \mu}{2\pi(2 + \nu)} \varepsilon \left[-2(1 + \nu) \xi_2 + \varepsilon \frac{3 + \nu}{2} \xi_1 \xi_2 \right] \sin \xi,$$

$$\sigma_{23} = \frac{b_{x1}^0 \mu}{2\pi(2 + \nu)} \varepsilon \left[2(1 + \nu) \xi_2 + \varepsilon \frac{3 + \nu}{4} (1 - 3\xi_1^2 - \xi_2^2) \right] \sin \xi,$$

$$\sigma_{33} = \frac{b_{x1}^0 \mu(1 + \nu)}{2\pi(2 + \nu)} \varepsilon [-\xi_2 + \varepsilon(1 + \nu) \xi_1 \xi_2] \cos \xi.$$

Напряжения, соответствующие решению (22.13), имеют вид

$$\sigma_{11} = \frac{b_{x3}^0 \mu (1 + \nu)}{16\pi} \varepsilon^2 \left[7\xi_1^2 + 5\xi_2^2 - 7 - \frac{\nu}{1 - \nu} (\xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 1) \right] \cos \xi,$$

$$\sigma_{22} = \frac{b_{x3}^0 \mu (1 + \nu)}{16\pi} \varepsilon^2 \left[1 - 3\xi_1^2 - \xi_2^2 - \frac{\nu}{1 - \nu} (3\xi_1^2 + \xi_2^2 - 1) \right],$$

$$\sigma_{12} = \frac{b_{x3}^0 \mu (1 + \nu)}{8\pi(1 - \nu)} \varepsilon^2 \xi_1 \xi_2,$$

$$\sigma_{33} = \frac{b_{x3}^0 \mu (1 + \nu)}{\pi} \varepsilon \left\{ \xi_1 + \frac{\varepsilon}{8(1 - \nu)} [(-8 + 10\nu - 4\nu^2)\xi_1^2 + \right. \\ \left. + 2(\nu - 2\nu^2)\xi_2 + 2 - 3\nu + 2\nu^2] \right\},$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Здесь

$$\xi_1 = \frac{r - r_c}{a}, \quad \xi_2 = \frac{z}{a}, \quad \xi = \varphi, \quad \varepsilon = \frac{a}{r_c},$$

a — радиус поперечного сечения прутка.

Глава 6

ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

§ 23. Основные соотношения теории упругости в случае винтовой анизотропии и постановка задачи

Цилиндр с винтовой анизотропией можно представить, в частности, как результат винтовой намотки слоев тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием их полимерным материалом. Для определения приведенных упругих характеристик можно использовать методы гомогенизации [42, 53]. Таким образом, получается трансверсально изотропный материал с осью симметрии, направленной по касательным к винтовым спиральям. При растяжении-сжатии стержней с винтовой анизотропией, как и в ЕЗС, помимо продольной деформации возникает крутильная и, наоборот, при кручении помимо крутильной возникает продольная деформация. Поэтому такие стержни могут быть использованы в качестве преобразователей продольных деформаций в продольно-крутильные. Существуют примеры технических устройств, которые используют эти явления.

Ниже для краткости будем использовать сокращение СВА — стержень с винтовой анизотропией.

Рассмотрим цилиндрическое тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S — поперечное сечение цилиндра, L — его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$; ∂S — граница S . С геометрическим центром тяжести одного из торцов цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Сопутствующую систему координат введем так же, как это было сделано в случае ЕЗС (§ 9), заменив декартову систему ξ_1, ξ_2, ξ_3 на цилиндрическую r, θ, z , связанную с основными соотношениями

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos(\theta + \tau z), \\x_2 &= r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z.\end{aligned}\tag{23.1}$$

Здесь и ниже предполагается, что крутка $\tau = \text{const}$.

Переход к цилиндрической системе обусловлен тем, что ниже основное внимание будет уделено цилиндру с кольцевым поперечным сечением $S = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$; r_1, r_2 — внутренний и наружный радиусы цилиндра соответственно.

Соотношения (23.1) при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии. Радиус-вектор точек винтовой

линии представим в виде

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}'_1 + z\mathbf{e}'_3.$$

Здесь

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \sin(\theta + \tau z),$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \cos(\theta + \tau z),$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{i}_n$ — единичные орты основной системы координат.

С точками винтовой линии свяжем естественный респер

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},$$

где $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно. Используя формулы

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

$$ds = g dz, \quad g^2 = (1 + x^2), \quad x = \tau r,$$

где $k = \tau^2 r / g^2$ — кривизна винтовой спирали, после преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/g & x/g \\ 0 & x/g & 1/g \end{pmatrix}. \quad (23.2)$$

Будем считать материал цилиндра локально трансверсально-изотропным с осью симметрии механических свойств, направленной по касательной к винтовой линии. Для обобщенного закона Гука будем использовать матричную форму записи связи напряжений и деформаций [45]

$$\sigma_i = c_{ij} e_j, \quad c_{ji} = c_{ij}.$$

Здесь

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}.$$

Аналогичная символика используется для компонент тензора деформаций.

Для трансверсально-изотропного материала упругие свойства в базисе $\mathbf{e}_j$ определяются пятью модулями: c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} ; при этом

$$c_{22} = c_{11}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}),$$

$$c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{25} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = 0.$$

В результате перехода от базиса e_j к базису e'_i получаем следующие соотношения обобщенного закона Гука в сопутствующей системе координат:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c'_{11}e_{rr} + c'_{12}e_{\theta\theta} + c'_{13}e_{zz} + 2c'_{14}e_{\theta z}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c'_{12}e_{rr} + c'_{22}e_{\theta\theta} + c'_{23}e_{zz} + 2c'_{24}e_{\theta z}, \\ \sigma_{zz} &= c'_{13}e_{rr} + c'_{23}e_{\theta\theta} + c'_{33}e_{zz} + 2c'_{34}e_{\theta z}, \\ \sigma_{\theta z} &= c'_{14}e_{rr} + c'_{24}e_{\theta\theta} + c'_{34}e_{zz} + 2c'_{44}e_{\theta z},\end{aligned}\quad (23.3)$$

$$\sigma_{rz} = 2c'_{55}e_{rz} + 2c'_{56}e_{r\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = 2c'_{56}e_{rz} + 2c'_{66}e_{r\theta},$$

$$\begin{aligned}c'_{11} &= c_{11}, \quad c'_{12} = \frac{c_{12} + c_{13}x^2}{g^2}, \quad c'_{13} = \frac{c_{13} + c_{12}x^2}{g^2}, \quad c'_{14} = x \frac{c_{13} - c_{12}}{g^2}, \\ c'_{22} &= \frac{c_{11} + (2c_{13} + 4c_{44})x^2 + c_{33}x^4}{g^4}, \\ c'_{23} &= \frac{c_{13} + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})x^2 + c_{13}x^4}{g^4}, \\ c'_{24} &= \frac{(c_{13} + 2c_{44} - c_{11})x + (c_{33} - c_{13} - 2c_{44})x^3}{g^4}, \\ c'_{33} &= \frac{c_{33} + 2(c_{13} + 2c_{44})x^2 + c_{11}x^4}{g^4}, \\ c'_{34} &= \frac{c_{33} - c_{13} - 2c_{44}}{g^4}x + \frac{(c_{44} + 2c_{13} - 2c_{11})x^3}{g^4}, \\ c'_{44} &= \frac{c_{44} + (-2c_{13} + c_{11} + c_{33} - 2c_{44})x^2 + c_{44}x^4}{g^4}, \\ c'_{55} &= \frac{c_{44} + c_{66}x^2}{g^2}, \quad c'_{56} = \frac{x[c_{44} - c_{66}]}{g^2}, \quad c'_{66} = \frac{c_{66} + c_{44}x^2}{g^2}.\end{aligned}\quad (23.4)$$

Компоненты тензора деформаций в базисе сопутствующей системы координат выражаются через смещения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}e_{rr} &= \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(u_r + \partial_\theta u_\theta), \quad e_{zz} = Du_z, \\ 2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + \frac{1}{r}(\partial_\theta u_r - u_\theta), \quad 2e_{rz} = \partial_r u_z + Du_r, \\ 2e_{z\theta} &= \frac{1}{r}\partial_\theta u_z + Du_\theta.\end{aligned}\quad (23.5)$$

Уравнения равновесия в напряжениях в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta\sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0, \\ \partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} &= 0, \\ \partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta\sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (23.6)$$

В формулах (23.5), (23.6)

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad D = \partial - \tau \partial_\theta.$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений:

$$\begin{aligned}(n_r\sigma_{rr} + n_\theta\sigma_{r\theta})|_{r=r_\alpha} &= 0, \quad (n_r\sigma_{r\theta} + n_\theta\sigma_{\theta\theta})|_{r=r_\alpha} = 0, \\ (n_r\sigma_{rz} + n_\theta\sigma_{\theta z})|_{r=r_\alpha} &= 0.\end{aligned}\quad (23.7)$$

Очевидно, что на основе соотношений (23.3)–(23.7) поставленную задачу можно представить в векторно-операторном виде, как это было сделано в предыдущих главах. Отличие состоит только в том, что коэффициенты операторов A, B, C, E, G в соответствующих уравнениях зависят от r , поскольку упругие характеристики c_{ij} являются функциями r , как это следует из формул (23.4). Однако это обстоятельство не препятствует применению метода однородных решений в форме, изложенной в гл. 1.

§ 24. Элементарные решения Сен-Венана СВА

Рассмотрим частный случай СВА, когда поперечное сечение S — кольцо ($r_1 \leq r \leq r_2$) и $\tau = \text{const}$.

Сохраняя основную идею построения ЭРС, запишем координаты вектора твердого смещения в сопутствующей системе координат. Для этого достаточно в формулах (11.5) перейти к цилиндрической системе координат. Имеем

$$\begin{aligned}u_r^0 &= C_1 e^{i\psi} + C_2 e^{-i\psi} + zC_3 e^{i\psi} + zC_4 e^{-i\psi}, \\ u_\theta^0 &= iC_1 e^{i\psi} - iC_2 e^{-i\psi} + izC_3 e^{i\psi} - izC_4 e^{-i\psi} - C_5 r, \\ u_z^0 &= -C_3 r e^{i\psi} - C_4 r e^{-i\psi} + C_5, \quad \psi = \tau z + \theta.\end{aligned}\quad (24.1)$$

Из формул (24.1) вытекает, что, как и в случае ЕЗС,

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = i\tau, \quad \gamma_{-1} = -i\tau$$

являются собственными значениями соответствующей спектральной задачи. Структура корневых подпространств этих собственных значений остается такой же, как и в случае ЕЗС. Поэтому, сохраняя

общий вид элементарных решений (11.23), после преобразования их к цилиндрической системе координат получаем

$$\begin{aligned} u_1(z) &= e^{i\psi} a_1, \quad u_2(z) = \bar{u}_1(z), \quad u_3(z) = e^{i\psi} (za_1 + a_3), \\ u_4(z) &= \bar{u}_3(z), \quad u_5(z) = a_5, \quad u_6(z) = a_6, \\ u_7(z) &= e^{i\psi} \left(\frac{z^3}{6} a_1 + \frac{z^2}{2} a_3 + za_9 + a_7 \right), \\ u_8(z) &= \bar{u}_7(z), \quad u_9(z) = e^{i\psi} \left(\frac{z^2}{2} a_1 + za_3 + a_9 \right), \end{aligned} \quad (24.2)$$

$$u_{10}(z) = \bar{u}_9(z), \quad u_{11}(z) = za_5 + a_{11}, \quad u_{12}(z) = za_6 + a_{12}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \{1, i, 0\}, \quad a_2 = \bar{a}_1, \quad a_3 = a_4 = \{0, 0, -r\}, \quad a_5 = \{0, 0, 1\}, \\ a_6 &= \{0, r, 0\}, \quad a_7 = \{ia_{r,7}, a_{\theta,7}, a_{z,7}\}, \quad a_8 = \bar{a}_7, \\ a_9 &= \{a_{r,9}, ia_{\theta,9}, ia_{z,9}\}, \quad a_{10} = \bar{a}_9, \\ a_l &= \{a_{r,l}, a_{\theta,l}, a_{z,l}\}, \quad l = 11, 12. \end{aligned} \quad (24.3)$$

Заметим, что все компоненты $a_{k,l}$ зависят только от r , поскольку поперечное сечение является круговым кольцом. Основные идеи определения этих компонент разъясим на примере вектора a_{11} .

Опираясь на формулы (23.3), (23.4), определим компоненты тензора напряжений, соответствующие вектору $u_{11}(z)$. Опуская индекс $l = 11$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c'_{11} \dot{a}_r + \frac{c'_{12} a_r}{r} + c'_{13}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c'_{12} \dot{a}_r + \frac{c'_{22} a_r}{r} + c'_{23}, \\ \sigma_{zz} &= c'_{13} \dot{a}_r + \frac{c'_{23} a_r}{r} + c'_{33}, \quad \sigma_{z\theta} = c'_{14} \dot{a}_r + \frac{c'_{24} a_r}{r} + c'_{34}, \\ \sigma_{rz} &= c'_{55} \dot{a}_z + c'_{56} \left(\dot{a}_\theta - \frac{a_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{r\theta} = c'_{56} \dot{a}_z + c'_{66} \left(\dot{a}_\theta - \frac{a_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (24.4)$$

Здесь $\dot{a}$ — производная по r .

Подставляя (24.3) в уравнения равновесия (23.5) и граничные условия (23.6) ($n_r = 1$, $n_{\theta\theta} = 0$), получаем

$$\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{rr}(r_\alpha) = 0, \quad (24.5)$$

$$\partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_\alpha) = 0, \quad (24.6)$$

$$\partial_r(r\sigma_{rz}) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_\alpha) = 0. \quad (24.7)$$

Из соотношений (24.6), (24.7) вытекает, что

$$a_\theta = a_z = 0.$$

Подставляя выражения для σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ из (24.4) в (24.5), для определения a_r , получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка:

$$La_r = F_1, \quad la_r|_{r=r_\alpha} = f_{1\alpha}, \quad (24.8)$$

$$La \equiv (rc'_{11}\dot{a} + c'_{12}a)' - c'_{12}\dot{a} - \frac{c'_{22}a_r}{r},$$

$$la \equiv c'_{11}\dot{a} + \frac{c'_{12}a}{r}, \quad F_1 = -(rc'_{13})' + c'_{23}, \quad f_{1\alpha} = -c'_{13}(r_\alpha).$$

Для численного интегрирования задачи (24.8) более удобна эквивалентная ей форма в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Если в качестве неизвестных выбрать

$$y_1 = a_r, \quad y_2 = r\sigma_{rr},$$

то на основании (24.8) получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - s_{11}y_1 - s_{12}y_2 &= q_{11}, \quad \dot{y}_2 - s_{21}y_1 - s_{22}y_2 = q_{12}, \quad y_2(r_\alpha) = 0, \\ s_{11} &= -\frac{c'_{12}}{rc'_{11}}, \quad s_{12} = \frac{1}{c'_{11}}, \quad s_{21} = \frac{c'_{12} - c'_{11}c'_{22}}{rc'_{11}}, \quad s_{22} = \frac{c'_{12}}{c'_{11}}, \\ q_{11} &= -\frac{c'_{13}}{c'_{11}}, \quad q_{12} = c'_{23} - \frac{c'_{12}c'_{13}}{c'_{11}}. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Аналогичным образом,

$$a_{12} = \{a_r, 0, 0\},$$

и в этом случае определение a_r сводится к краевой задаче (24.8) с новыми правыми частями

$$F_2 = -(r^2c'_{13})', \quad f_{2\alpha} = -r_\alpha c'_{14}(r_\alpha)$$

или к интегрированию задачи (24.9) с новыми правыми частями

$$q_{21} = -\frac{rc'_{14}}{c'_{11}}, \quad q_{22} = r \left(c'_{24} - \frac{c'_{12}c'_{14}}{c'_{11}} \right).$$

Напряжения в этом случае вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c'_{11}\dot{a}_r + \frac{c'_{12}a_r}{r} + rc'_{14}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c'_{12}\dot{a}_r + \frac{c'_{22}a_r}{r} + rc'_{24}, \\ \sigma_{zz} &= c'_{13}\dot{a}_r + \frac{c'_{23}a_r}{r} + rc'_{34}, \quad \sigma_{z\theta} = c'_{14}\dot{a}_r + \frac{c'_{24}a_r}{r} + rc'_{44}, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Для элементарного решения a_9 соответствующие ему напряжения определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,9} &= e^{i\psi} b_{rr,9}, & \sigma_{\theta\theta,9} &= e^{i\psi} b_{\theta\theta,9}, & \sigma_{zz,9} &= e^{i\psi} b_{zz,9}, \\ \sigma_{z\theta,9} &= e^{i\psi} b_{z\theta,9}, & \sigma_{rz,9} &= i e^{i\psi} b_{rz,9}, & \sigma_{r\theta,9} &= i e^{i\psi} b_{r\theta,9}, \end{aligned} \quad (24.11)$$

$$\begin{aligned} b_{rr,9} &= c'_{11} \dot{a}_{r,9} + \frac{c'_{12}(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} - c'_{13} r - \frac{c'_{14} a_{z,9}}{r}, \\ b_{\theta\theta,9} &= c'_{12} \dot{a}_{r,9} + \frac{c'_{22}(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} - c'_{23} r - \frac{c'_{24} a_{z,9}}{r}, \\ b_{zz,9} &= c'_{13} \dot{a}_{r,9} + \frac{c'_{23}(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} - c'_{33} r - \frac{c'_{34} a_{z,9}}{r}, \\ b_{z\theta,9} &= c'_{14} \dot{a}_{r,9} + \frac{c'_{24}(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} - c'_{34} r - \frac{c'_{44} a_{z,9}}{r}, \\ b_{rz,9} &= c'_{55} \dot{a}_{z,9} + c'_{56} \left[\dot{a}_{\theta,9} + \frac{(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} \right], \\ b_{r\theta,9} &= c'_{56} \dot{a}_{z,9} + c'_{66} \left[\dot{a}_{\theta,9} + \frac{(a_{r,9} - a_{\theta,9})}{r} \right]. \end{aligned} \quad (24.12)$$

После подстановки (24.11) в уравнения равновесия (23.6) и граничные условия (23.7) получаем

$$\begin{aligned} (r b_{rr,9})' - b_{r\theta} - b_{\theta\theta,9} &= 0, & b_{rr,9}(r_\alpha) &= 0, \\ (r b_{r\theta,9})' + b_{r\theta} + b_{\theta\theta,9} &= 0, & b_{r\theta,9}(r_\alpha) &= 0, \\ (r b_{rz,9})' + b_{z\theta} &= 0, & b_{rz,9}(r_\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Используя (24.12), (24.13), определение функций $a_{r,9}$, $a_{\theta,9}$, $a_{z,9}$ очевидным образом можно свести к интегрированию трех дифференциальных уравнений второго порядка. Как следует из первых двух уравнений (24.13), эта система имеет первый интеграл

$$b_{rr,9} + b_{r\theta,9} = 0.$$

Для элементарного решения a_7 соответствующие ему напряжения определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,7} &= e^{i\psi} (z b_{rr,9} + i b_{rr,7}), & \sigma_{\theta\theta,7} &= e^{i\psi} (z b_{\theta\theta,9} + i b_{\theta\theta,7}), \\ \sigma_{zz,7} &= e^{i\psi} (z b_{zz,9} + i b_{zz,7}), & \sigma_{z\theta,7} &= e^{i\psi} (z b_{z\theta,9} + i b_{z\theta,7}), \\ \sigma_{rz,7} &= e^{i\psi} (i z b_{rz,9} + b_{rz,7}), & \sigma_{r\theta,7} &= e^{i\psi} (i z b_{r\theta,9} + b_{r\theta,7}), \end{aligned} \quad (24.14)$$

$$\begin{aligned}
b_{rr,7} &= c'_{11} \dot{a}_{r,7} + \frac{c'_{12}(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} + \frac{c'_{14}a_{z,7}}{r} + c'_{13}a_{z,9} + c'_{14}a_{\theta,9}, \\
b_{\theta\theta,7} &= c'_{12} \dot{a}_{r,7} + \frac{c'_{22}(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} + \frac{c'_{24}a_{z,7}}{r} + c'_{23}a_{z,9} + c'_{24}a_{\theta,9}, \\
b_{zz,7} &= c'_{13} \dot{a}_{r,7} + \frac{c'_{23}(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} + \frac{c'_{34}a_{z,7}}{r} + c'_{33}a_{z,9} + c'_{34}a_{\theta,9}, \\
b_{z\theta,7} &= c'_{14} \dot{a}_{r,7} + \frac{c'_{24}(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} + \frac{c'_{44}a_{z,7}}{r} + c'_{34}a_{z,9} + c'_{44}a_{\theta,9}, \\
b_{rz,7} &= c'_{55} \dot{a}_{z,7} + c'_{56} \left[\dot{a}_{\theta,7} + \frac{(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} \right] + c'_{55}a_{r,9}, \\
b_{r\theta,7} &= c'_{56} \dot{a}_{z,7} + c'_{66} \left[\dot{a}_{\theta,7} + \frac{(a_{r,7} + a_{\theta,7})}{r} \right] + c'_{56}a_{r,9}.
\end{aligned} \tag{24.15}$$

Подстановка выражений (24.14) в уравнения равновесия и граничные условия помимо соотношений (24.13) даст также следующие:

$$\begin{aligned}
(rb_{rr,7})' + b_{r\theta,7} - b_{\theta\theta,7} + rb_{rz,9} &= 0, \quad b_{rr,7}(r_\alpha) = 0, \\
(rb_{r\theta,7})' + b_{r\theta,7} - b_{\theta\theta,7} + rb_{z\theta,9} &= 0, \quad b_{r\theta,7}(r_\alpha) = 0, \\
(rb_{rz,7})' - b_{z\theta,7} + rb_{zz,9} &= 0, \quad b_{rz,7}(r_\alpha) = 0.
\end{aligned} \tag{24.16}$$

Эти соотношения совместно с (24.13) приводят к краевым задачам относительно компонент $a_{r,7}$, $a_{\theta,7}$, $a_{z,7}$.

В заключение заметим, что матрица жесткостей для СВА имеет ту же структуру (13.5), что и в случае ЕЗС, а компоненты главного вектора и главного момента напряжений, действующих в поперечном сечении, связаны с постоянными C_l ($l = 7, \dots, 12$) формулами (13.6), (13.10). Из этого следует, что ЭРСВ a_7 , a_8 и в данном случае описывают изгиб цилиндра поперечными силами, a_9 , a_{10} — чистый изгиб, a_{11} , a_{12} — растяжение-сжатие и кручение.

§ 25. О методах построения элементарных решений и некоторые результаты численного анализа

Интегрирование задач (24.8), (24.12)–(24.13), (24.15)–(24.16) при произвольных значениях параметра τ возможно только численными методами. Однако при малых значениях безразмерного параметра $\tau_0 = \tau r_2$, как и в случае ЕЗС, методом малого параметра можно получить приближенные аналитические решения. Такие решения не только позволяют получить наглядное представление о влиянии различных параметров задач на их решение, но также могут быть использованы в качестве тестов при численном интегрировании.

Остановимся вначале на исследовании напряженно-деформированного состояния СВА, возникающего под воздействием продольной силы Q_z и крутящего момента M_z .

Компоненты вектора смещений РСВ в данном случае (см. (24.2), (24.3)) имеют вид

$$u_r = A_1 a_1 + A_2 a_2, \quad u_\theta = A_2 z r, \quad u_z = A_1 z. \quad (25.1)$$

Здесь a_1, a_2 — решение задачи (24.8) с правыми частями $(F_1, f_{1\alpha})$, $(F_2, f_{2\alpha})$ соответственно; A_1, A_2 — постоянные, имеющие простой механический смысл: A_1 — относительное удлинение осевой линии стержня, A_2 — относительный угол закручивания сечения. Они связаны с продольной силой и крутящим моментом соотношениями

$$d_{55} A_1 + d_{56} A_2 = Q_z, \quad d_{65} A_1 + d_{66} A_2 = \frac{M_z}{r_2}. \quad (25.2)$$

Элементы матрицы жесткостей выражаются квадратурами:

$$d_{55} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz,1} r dr, \quad (25.3)$$

$$d_{56} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz,2} r dr = d_{65} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{rz,1} r dr, \quad d_{66} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{rz,2} r dr.$$

При вычислении по этим формулам $\sigma_{zz,1}$, $\sigma_{rz,1}$ следует брать из группы (24.4), $\sigma_{zz,2}$, $\sigma_{rz,2}$ — из группы (24.10).

Соотношения (25.2) позволяют таким образом интерпретировать элементы матрицы жесткостей: d_{55} — жесткость стержня на растяжение-сжатие; d_{66} — жесткость на кручение; $d_{56} = d_{65}$ (это равенство вытекает из теоремы Бэтти и может служить критерием правильности вычислений) — коэффициент связи растяжения-сжатия и кручения.

Решение (25.1) с асимптотической погрешностью $O(r_2/L)$ удовлетворяет граничному условию: при $z = 0$ и $u = 0$.

Для построения приближенного решения обратимся к формулам (23.4) и разложим c'_{ml} в ряды по τ . Сохраняя главные члены разложений, получаем

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c'_{22} = c_{11}, & c'_{12} &= c_{12}, & c'_{13} &= c'_{23} = c_{13}, \\ c'_{33} &= c_{33}, & c'_{44} &= c'_{55} = c_{44}, & c'_{66} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \\ c'_{14} &= \tau r(c_{13} - c_{12}), & c'_{24} &= \tau r(c_{13} + 2c_{44} - c_{11}), \\ c'_{34} &= \tau r(c_{33} - c_{13} - 2c_{44}), & c'_{56} &= \tau r(c_{44} - c_{66}). \end{aligned} \quad (25.4)$$

После подстановки (25.4) в (24.8) для определения главных членов разложений функций a_1 , a_2 получаем дифференциальный оператор

эйлерова типа

$$La \equiv c_{11} \left(r\ddot{a} + \dot{a} - \frac{a}{r} \right).$$

Опуская дальнейшие элементарные этапы интегрирования, приведем окончательный вид решений:

$$a_1 = -\nu' r, \quad a_2 = \frac{\tau_0}{8c_{11}} \left\{ K_0 \frac{r^3}{r_2^2} + K_1 \left[\frac{(1+\rho^2)r}{c_{11}+c_{12}} + \frac{r_2^2}{r(c_{11}-c_{12})} \right] \right\},$$

$$d_{55}^0 = SE', \quad d_{66}^0 = \frac{c_{44}J_p}{r_2^2}, \quad d_{56}^0 = \frac{\tau_0 J_p}{r_2^2} [E' - 2(1+\nu')G'],$$

$$S = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad J_p = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4), \quad \nu' = \frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}},$$

$$E' = c_{33} - 2\nu'c_{13}, \quad G' = c_{44}, \quad K_0 = 3c_{12} - 2c_{13} - c_{11} + 2c_{44},$$

$$K_1 = -3c_{12}^2 + 3c_{11}^2 - 2c_{13}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{44}(2c_{12} + 6c_{11}).$$

Для напряжений получаются следующие приближенные формулы (с точностью до постоянных множителей A_1, A_2):

$$\sigma_{zz,11} = E'(1 + O(\tau_0^2)), \quad \sigma_{rr,11} = \sigma_{\theta\theta,11} = O(\tau_0^2),$$

$$\sigma_{r\theta,11} = \sigma_{rz,11} = \sigma_{\theta z,11} \equiv 0,$$

$$\sigma_{\theta z,12} = r + O(\tau_0^2), \quad \sigma_{r\theta,12} = \sigma_{rz,12} \equiv 0,$$

$$\sigma_{rr,12} = \sigma_{\theta\theta,12} = \sigma_{zz,12} = O(\tau_0).$$

Главные члены разложений d_{ij} имеют следующий вид:

$$d_{55}^0 = SE', \quad d_{66}^0 = c_{44}J_p r_2^2, \quad d_{56}^0 = \frac{\tau J_p}{r_2} B_2,$$

$$d = E'J_p, \quad d_{31} = O(\tau_0) \quad S = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad J_p = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4).$$

Формула для d_{56}^0 дает представление о влиянии параметров задачи на взаимодействие кручения с растяжением-сжатием при малых значениях τ_0 . В частности, параметр

$$B = E' - 2(1+\nu')G'$$

характеризует степень анизотропии трансформного материала. В этой формуле E', G', ν' — технические упругие постоянные [45], соответственно модули на растяжение, сдвиг и коэффициент Пуассона. Заметим, что для изотропного материала $B = 0$.

Для оценки влияния параметров τ и r_1, r_2 в широком диапазоне их изменения на элементы матрицы жесткостей d_{ij} была проведена серия расчетов на основе численного интегрирования задачи (24.9).

Для расчетов был выбран волокнистый композиционный материал со следующими приведенными упругими характеристиками:

$$E' = 3,685 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad E = 9,398 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad G' = 1,272 \cdot 10^9 \text{ Па}, \\ \nu' = 0,0147, \quad \nu = 0,375.$$

При пересчете на постоянные c_{ij} получаем

$$c_{11} = 5,294 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{12} = 1,770 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{13} = 0,104 \cdot 10^9 \text{ Па}, \\ c_{33} = 3,688 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{44} = G'.$$

На рис. 11 приведены графики, иллюстрирующие зависимости элементов матрицы жесткости от τ_0 при $\rho = r_1/r_2 = 0,1$. Кривая 1 описывает зависимость $D_{55} = d_{55}/d_{55}^0$, кривая 2 — $D_{66} = d_{66}/d_{66}^0$, кривая 3 — $D_{56} = d_{56}/(J_p B)$. Графики на рис. 12 иллюстрируют

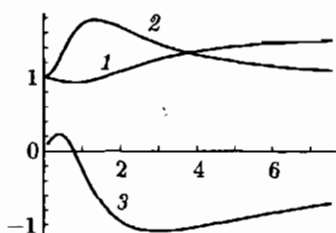


Рис. 11

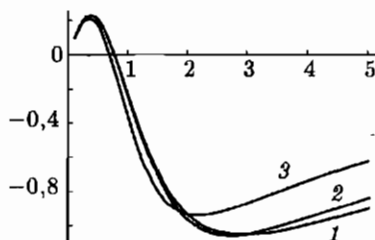


Рис. 12

зависимости D_{56} от τ_0 при различных значениях ρ . Кривой 1 соответствует $\rho = 0,1$, кривой 2 — $\rho = 0,4$, кривой 3 — $\rho = 0,8$. Обращает на себя внимание тот факт, что знак и величина D_{56} существенно зависят от величины τ_0 .

Как следует из приведенных графиков, при растяжении СВА в случае малых значений τ_0 имеет место эффект «раскручивания», а при достаточно больших — эффект «закручивания». Аналогичным эффектом обладает естественно закрученный стержень.

Это же свойство жесткости D_{56} иллюстрирует кривая 3 на рис. 13, построенная на основе решения соответствующих задач для ЕЗС с квадратным поперечным сечением методом конечных элементов для коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. Кривые 1, 2 на этом же графике иллюстрируют соответственно зависимости жесткостей на растяжение и кручение от $\tau_0 = a\tau$ соответственно, где a — размер стороны квадрата.

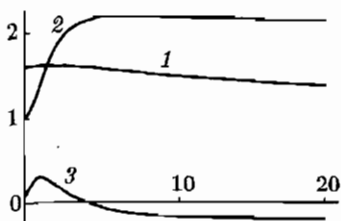


Рис. 13

В заключение приведем результаты интегрирования методом малого параметра остальных задач:

$$\begin{aligned}
 a_{r,9} &= \frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau^2), \quad a_{\theta,9} = -\frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau^2), \\
 a_{z,9} &= \frac{\tau K_2}{8} \left[r^3 - 3(r_1^2 + r_2^2) r - \frac{3r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^3), \\
 a_{z,7} &= \frac{K_2}{8} \left[r^3 - \kappa(r_1^2 + r_2^2) r - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^2), \\
 a_{r,7} &= O(\tau), \quad a_{\theta,7} = O(\tau), \quad b_{zz,9} = -E' r + O(\tau^2), \\
 b_{rz,9} &= \frac{\tau K_2}{8} \left(r^2 - r_1^2 - r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) + O(\tau^3), \\
 b_{\theta z,9} &= -\frac{\tau K_2}{8} \left(3r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) + O(\tau^3), \\
 b_{rr,9} &= b_{\theta\theta,9} = b_{r\theta,9} = O(\tau^2), \\
 b_{rz,7} &= G' \left[\left(\frac{3K_2}{8} + \frac{\nu'}{2} \right) r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2) r + \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2} \right], \\
 b_{\theta z,7} &= G' \left[\left(\frac{K_2}{8} - \frac{\nu'}{2} \right) r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2) r - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2} \right], \\
 b_{rr,7} &= b_{\theta\theta,11} = b_{zz,11} = b_{r\theta,11} = O(\tau).
 \end{aligned}$$

Главные члены разложений для жесткостей имеют вид

$$-d_{11} = d_{33} = d = E' J_p, \quad d_{31} = O(\tau).$$

Список литературы

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. — 1963. — Т. 27, вып. 6. — С. 1957–1074.
2. Ахметов Н. К., Устинов Ю. А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // ПММ. — 1988. — Т. 52, вып. 2. — С. 264–268.
3. Базаренко Н. А. Построение уточненных прикладных теорий для круговой цилиндрической оболочки // Инж. ж. МТТ. — 1967. — № 2. — С. 99–105.
4. Бердичевский В. Л. К доказательству принципа Сен-Венана для тел произвольной формы // ПММ. — 1974. — Т. 38, вып. 5. — С. 851–864.
5. Бердичевский В. Л., Квашина С. С. Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней // ПММ. — 1976. — Т. 40, вып. 1. — С. 120–135.
6. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. Изгиб, растяжение и кручение естественно закрученных стержней // ПММ. — 1985. — Т. 49, вып. 6. — С. 978–991.
7. Бобровницкий Ю. И., Мальцев К. И. Инженерные уравнения колебаний стержней // Акуст. ж. — 1983. — Т. 29, № 4. — С. 428–434.
8. Воек А. Е., Тютюкин В. В. Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении // Тр. Акуст. ин-та. — 1960. — Вып. IX. — С. 5–26.
9. Воробьев Ю. С., Шорр Б. Ф. Теория закрученных стержней. — Киев: Наукова думка, 1983. — 188 с.
10. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М., 1973. — 320 с.
11. Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А. К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. МТТ. — 1975. — № 3. — С. 119–129.
12. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // ПММ. — 1967. — Т. 31, вып. 2. — С. 230–241.
13. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993. — 144 с.
14. Гетман И. П., Устинов Ю. А. О потоке энергии при резонансах полуграниченных тел // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 310, № 2. — С. 309–312.

15. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1973. — 274 с.
16. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
17. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — Киев: Наукова думка, 1978. — 264 с.
18. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наукова думка, 1981. — 284 с.
19. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Мир, 1962. — 96 с.
20. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
21. Дейвис Р. М. Волны напряжений в твердых телах. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
22. Джанелидзе Г. Ю. Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1963. — № 226. — С. 93–102.
23. Джанелидзе Г. Ю. Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1946. — № 1. — С. 23–32.
24. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 1. — С. 23–26.
25. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 3. — С. 226–228.
26. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 4. — С. 325–326.
27. Друзь А. Н., Поляков Н. А., Устинов Ю. А. Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ. — 1996. — Т. 60, вып. 4. — С. 660–668.
28. Друзь А. Н., Устинов Ю. А. К построению теории колебаний призматических и естественно закрученных стержней // Мат. моделир. физ. процессов и их свойства. — Таганрог: Изд. ТГПИ, 1997. — С. 42–43.
29. Друзь А. Н., Устинов Ю. А. Тензор Грина для упругого цилиндра и приложения его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. — 1996. — Т. 60, вып. 1. — С. 102–110.
30. Елисеев В. В. Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня // Изв. АН СССР. МТТ. — 1977. — № 3. — С. 145–150.
31. Елисеев В. В. Изгиб естественно-закрученного стержня // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1988. — № 425. — С. 44–46.

32. *Елисеев В. В.* О построении уточненной модели упругой балки // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1982. — № 386. — С. 106–116.
33. *Елисеев В. В.* Упругая деформация плоского криволинейного стержня // Изв. АН СССР. МТТ. — 1976. — № 1. — С. 163–166.
34. *Заметалина Н. П., Прокопов В. К.* Напряженное состояние естественно скрученных стержней типа спиральных сверл // Изв. АН Арм. ССР. — 1974. — Т. 27, № 3. — С. 3–9.
35. *Илюхин А. А.* О построении соотношений теории упругих стержней // Механика твердого тела (Киев). — 1990. — № 22. — С. 82–92.
36. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. — Киев: Наукова думка, 1979. — 216 с.
37. *Исполов Ю. Г.* Метод малого параметра в задаче об определении собственных частот и форм колебаний балки Тимошенко // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1988. — № 425. — С. 104–107.
38. *Кирхгоф Г.* Механика. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 402 с.
39. *Корольков В. И.* К решению задачи о растяжении естественно закрученного стержня произвольного поперечного сечения в трехмерной постановке // ПММ. — 1988. — Т. 24, вып. 12. — С. 113–115.
40. *Каргин Д. П., Курбатова Н. В., Устинов Ю. А.* Однородные решения и задачи Сен-Венана для винтовой пружины // ПММ. — 1998. — Т. 62, вып. 4. — С. 690–698.
41. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1981. — Вып. 6. — С. 97–146.
42. *Кристensen Р.* Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982. — 334 с.
43. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
44. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — М., 1935. — 674 с.
45. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
46. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 492 с.
47. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
48. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 708 с.
49. *Нестеренко В. В.* К теории поперечных колебаний балки Тимошенко // ПММ. — 1993. — Т. 57, вып. 4. — С. 83–91.
50. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 258, № 3. — С. 550–553.
51. *Орлов П. И.* Основы конструирования. — М.: Машиностроение, 1988. — 842 с.

52. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
53. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Изд. МГУ, 1984. — 336 с.
54. Понятовский В. В. Асимптотическая теория изгиба кривого бруса // Исследования по упругости и пластичности. Ленингр. ун-т. — 1973. — Вып. 9. — С. 81–93.
55. Понятовский В. В. Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности // Изв. АН СССР. МТТ. — 1968. — № 5. — С. 139–143.
56. Понятовский В. В. Вывод уравнений тонкостенных стержней-оболочек открытого профиля из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования // Исследования по упругости и пластичности. Ленингр. ун-т. — 1980. — Вып. 13. — С. 40–48.
57. Приходько В. Ю. О динамическом тензоре Грина для твердых волноводов // ПММ. — 1980. — Т. 16, вып. 6. — С. 124–128.
58. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. — 1950. — № 2.
59. Риз П. М. Деформация естественно закрученных стержней // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 23, № 1. — С. 18–21.
60. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. — М.: Физматгиз, 1961. — 518 с. (Классики естествознания.)
61. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. — М., 1957. — 538 с.
62. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М.: Физматгиз, 1959. — 440 с.
63. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. I. — М.: Физматгиз, 1960. — 380 с.
64. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. II. — М.: Наука, 1965. — 480 с.
65. Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975. — 562 с.
66. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
67. Уздалев А. И., Иноземцев Г. Г., Зубков А. В., Алаязова О. В. Напряженное состояние естественно закрученного стержня // ПММ. — 1988. — Т. 24, вып. 14. — С. 103–108.
68. Устинов Ю. А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. РАН. — 1974. — Т. 216, № 4. — С. 755–758.
69. Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана для пружины // Докл. РАН. — 1995. — Т. 345, № 5. — С. 621–623.
70. Устинов Ю. А. К обоснованию принципа Сен-Венана // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказского региона. — 1994. — С. 91–92.

71. Устинов Ю. А. О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 229, № 2. — С. 325–328.
72. Устинов Ю. А. Задача о дислокациях в упругом кольце // Доклады РАН. — 1997. — Т. 354, № 5. — С. 619–621.
73. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. — Новосибирск: Наука, 1988. — 128 с.
74. Шорр Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1960. — № 1. — С. 141–151.
75. Freiburger W. The uniform torsion of an incomplete tore // Australian J. Sci. Res. Ser. A. — 1949. — V. 2. — P. 354–375.
76. Chree. The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, their Solutions and Applications // Cambridge Phil. Transactions. — 1889.
77. Theorie de l'elasticite des corps solides. — Paris, 1883.
78. Graff K. F. Wave motion in elastic solids. — Oxford: Clarendon press, 1975. — 666 p.
79. Nariboly G. A. Some Asymptotic theory of wavemeton in rods // ZAMM. — 1969. — V. 49, № 9. — P. 525–531.
80. Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders // Journ. Fur die reine uhd angew. Math. — 1876.
81. Saint-Venant // Compt. rend. — 1843. — V. 17. — P. 1020.
82. Saint-Venant. Memoire sur la torsin des prisms, avec des conciderations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieur des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanement // Mem. Savants Etrang. — 1856. — T. XIV. — P. 233–560.
83. Saint-Venant // Memoire sur la flaxion des prismes, etc. — Liouville, Journ. Math. — T. I. — P. 89–189.
84. Toupin R. A. Saint-Venant's principle // Arch. Ration. Mech. and Analysis. — 1965. — V. 18, № 2. — P. 83–96.
85. Ustinov Yu. A. Application of the Spectral Theory of Operators to Solving of the Saint-Venant's Problems for Pseudocylinders // 15th IMACS W. Congr. on Scietific Computation, Modeling and Appl. Math. — 1997. — V. II. — P. 669–674.
86. Ustinov Yu. A., Medyanik S. N. Homogeneous Solutions and Saint-Venant's Problems for a Circular Ring. Advanced in Systems, Control and Computers. V. II. Published by IAAMSAD and South Aprican branch of the Academy of Nonlinear Sciences. — 1998. — P. 63–65.

Научное издание

УСТИНОВ Юрий Анатольевич

ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРОВ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка: *В.В. Худяков*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 28.07.03.
Формат 60х90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,8. Заказ № 1737.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019, Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0448-9



9 785922 104487

YU. A. USTINOV

**THE SAINT-VENANT'S PROBLEMS
FOR PSEUDOCYLINDERS**

FIZMATLIT

Moscow, 2003, 128 pages

About the author. Ustinov Yuri Anatolievich, Professor, Theory of Elasticity Department, Rostov State University, Honored Researcher of the Russian Federation, Sorosh Foundation Professor. He published more than 120 publications on the Mathematical Theory of Elasticity; the Rods, Plates and Shells Theory; Piezoelectricity.

About the book. In this book notation "pseudocylinder" united such bodies as cylinder, naturally twisted rod, spring, circular ring and cylinder with the spiral anisotropy. By means methods of the spectral theory of operators the Saint-Venant solution for any pseudocylinder may be represent as linear combination of twelve elementary solution. For determine this solutions in the book two-dimensional problems were obtained on cross-section. It was constructed and realized analytical and numeric methods of integration this problems. Effectiveness of theory were supported by examples of solutions for set problems.

Brief contents of the book

Preface

Introduction

Chapter 1. Basics of the homogeneous solutions method for an elastic cylinder

- § 1. An operator form of the equations of elasticity
- § 2. Homogeneous solutions and their properties
- § 3. Green's tensor for an infinite cylinder

Chapter 2. Equilibrium problems for an elastic cylinder

- § 4. Elementary solutions of the equilibrium problem and their properties

- § 5. General representation of a solution of the three-dimensional boundary value problem and the justification of Saint-Venant's principle
- § 6. Green's tensor for a finite cylinder

Chapter 3. Harmonic oscillations of an elastic cylinder

- § 7. The dispersion relations and Saint-Venant's elementary solutions for low-frequency harmonic oscillations
- § 8. The derivation of more precise frequency equations

Chapter 4. On the theory of naturally twisted rods

- § 9. Main geometrical relations
- § 10. The main relations of elasticity for a naturally twisted rod and the setup of boundary value problems for the rod
- § 11. Saint-Venant's elementary homogenous solutions for a naturally twisted rod
- § 12. The variational setup of the boundary value problems on a rod cross-section
- § 13. Some main properties of Saint-Venant's elementary solutions. The construction of the rigidity matrix
- § 14. The solution of the three-dimensional problem and justification of Saint-Venant's principle for naturally twisted rods
- § 15. A small parameter method for small twisting

Chapter 5. Saint-Venant's problem for a helical spring and a ring

- § 16. A helical spring
- § 17. Saint-Venant's elementary solutions
- § 18. The variational setup of the problems on a cross-section
- § 19. Saint-Venant's solution for a spring and its integral properties
- § 20. Investigation of Saint-Venant's solution by the small parameter method
- § 21. Homogeneous solutions for a ring
- § 22. Dislocation problems

Chapter 6. Saint-Venant's problem for a cylinder with helical anisotropy

- § 23. The main relations of elasticity and the setup of boundary value problems in case of helical anisotropy
- § 24. Saint-Venant's elementary solutions in the case of helical anisotropy
- § 25. The problems of stretching, twisting and pure bending of a cylinder with helical anisotropy

References

Appendix

В монографии на основе операторной формы метода однородных решений осуществлено построение решений Сен-Венана для цилиндра, естественно закрученного стержня, винтовой пружины, кругового кольца и цилиндра с винтовой анизотропией.

