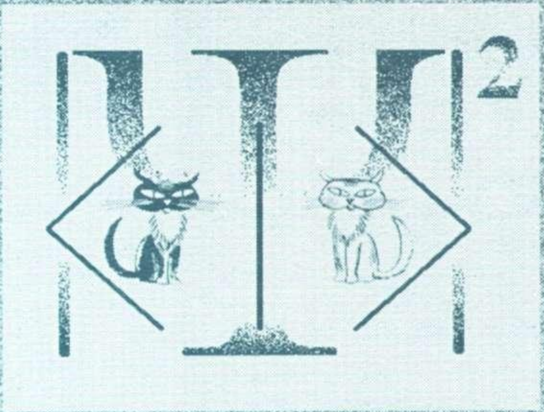
Ф. Ж. Вильф

Логическая структура квантовой механики



УРСС

Ф. Ж. Вильф

ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

УРСС
Москва • 2003

ББК 22.314я73

Вильф Фернандо Жозевич

Логическая структура квантовой механики.
М.: Едиториал УРСС, 2003. — 256 с.

ISBN 5-354-00361-X

В книге дается подробный анализ логической структуры квантовой механики.

Обоснована необходимость и достаточность статистического способа описания состояния объекта в определенных экспериментальных ситуациях. Даны физически содержательные определения характеристик точечной частицы и, в частности, такой, как «степень заполнения состояния частицей». Тщательно проанализированы так называемые соотношения неопределенностей. Показано, что их традиционная интерпретация на самом деле не соответствует ни логической, ни математической структуре квантовой механики.

Предложена модель так называемого *«пустого»* пространственно-временного континуума. Доказывается, что спин точечная частица приобретает в результате вращения вокруг индуцируемого ею пространственного заряда.

С использованием принципа соответствия выводится (а не постулируется) релятивистское уравнение Дирака.

Разъяснен смысл запрета Паули. Показано, что максвелловская функция распределения частиц по состояниям сохраняет следы специфической корреляции в заполнении состояний (обусловленной запретом Паули) при любой конечной температуре и любой конечной концентрации частиц.

Книга адресована преподавателям физики высших учебных заведений и тем любознательным студентам, которые пытаются самостоятельно изучать квантовую механику по монографиям и учебным пособиям. При этом аннотируемая книга учебные пособия не заменяет.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 15.04.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 600 экз. Печ. л. 16. Зак. № 2-960/164.

Отпечатано в типографии ООО «Рохос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00361-X

Оглавление

«...я смело могу сказать, что квантовой механики никто не понимает».

*Ричард Фейнман**

Предисловие

1.

Рискнув дать своей книге столь серьезное название, я считаю необходимым предупредить читателя, что являюсь дилетантом в квантовой механике и написал эту книгу для тех, кто отважится признать дилетантом себя[1]. Того же, кто считает себя знатоком квантовой механики, предлагаемая книга, я думаю, будет только раздражать.

Поскольку героический (и драматический) период становления квантовой механики закончился за несколько лет до моего рождения, мне эту науку преподавали в институте с той же уверенностью (сейчас я бы сказал — с тем же апломбом), что электротехнику и начертательную геометрию. Однако поскольку основ — *именно основ* — квантовой механики, несмотря на большое усердие, я из лекционного курса не понял (как и все, кто учился вместе со мной), я решил разобраться в них, читая специальную литературу.

За период с 1958 по 1994 год я тщательно изучил в общей сложности около тридцати учебных пособий, монографий, полупопулярных книг и очерков, написанных выдающимися специалистами[2]. Я также обращался за помощью к знатокам. В итоге мне стало казаться очень справедливым замечание Бернарда Шоу, что хотя он за всю жизнь не снес ни одного яйца, это не лишает его права судить о качестве яичницы. И, несмотря на возрастающее уважение к мэтрам теоретической физики, я стал считать свои претензии к литературе по квантовой механике обоснованными и даже допускаю, что многие читатели со мной согласятся.

2.

Дело в том, что, будучи всего лишь любознательным дилетантом, я совершенно иначе представляю себе то, что принято считать в фундаментальных

---

* *Ричард Фейнман.* Характер физических законов. М.: Мир. С. 139.

[1] Я имею в виду читателей, которые добросовестно пытались изучать квантовую механику либо в учебном заведении, либо самостоятельно — по учебным пособиям — и, таким образом, хотя бы некоторое знакомство с квантовой механикой имеют.

[2] В число этих книг входят такие, как: *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория); *Давыдов А.С.* Квантовая механика; *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики; *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики; *Шифф Л.* Квантовая механика; *Бом Д.* Квантовая теория.

Пусть читатель поверит мне на слово, что книги, которые я не стал перечислять (и среди которых есть написанные гораздо позднее), вовсе не лучше перечисленных.

трудах *объяснением явления природы*[3]. Ведь прежде, чем начать объяснять, необходимо дать описание явления, а между описанием и объяснением существует качественное различие. Как мне кажется, здесь и возникает проблема, которая состоит в следующем.

Для описания наблюдаемого явления природы (или специально организованного эксперимента) требуется использовать адекватные понятия. К их числу относятся: точечная частица, континуальное тело[4], импульс, скорость, электрический заряд и масса покоя частицы и т. п. Подчеркну: *использование при описании явления природы понятий неадекватных* (таких, как, например, «воля божья» и «биополе») ***автоматически исключает саму возможность объяснения.*** Нельзя объяснить то, чего на самом деле нет (или — нельзя правильно объяснить то, что представлено в искаженном виде).

Допустим теперь, что мы находимся на таком этапе развития науки-физики, на котором уже располагаем огромным множеством понятий, причем совершенно обоснованно считаем их физически содержательными. Вполне естественно, что, приступая к организации очередного даже ***нового*** эксперимента, мы имеем возможность оперировать ***только этими***, уже известными понятиями. Тогда очевидно и результаты эксперимента нельзя будет интерпретировать иначе, как используя именно и только ***эти же*** понятия. Предположим далее, что описание того, что мы наблюдаем, адекватно отображает то, что происходит на самом деле. Лишь в этом случае имеет смысл переходить к объяснению, то есть — к установлению причинно-следственных связей. Приведу пример.

Перенесемся мысленно в 1927 год и представим себе, что в очередной раз ставится эксперимент, в котором резистор практически мгновенно подключается к источнику постоянной ЭДС (рис. 1). Используя соответствующие измерительные приборы, мы видим, что с течением времени электрический ток в цепи возрастает, а по окончании переходного процесса во времени уже не меняется. В дальнейшем мы устанавливаем, что ***стационарные*** значения тока ($i_{ст}$) в цепи и напряжения ($U_{ст}$) на резисторе связаны соотношением $i_{ст} \sim U_{ст}$. Теперь необходимо объяснить:

- *почему в ответ на замыкание тумблера ток в цепи вообще возникает;*
- *почему в ответ на* ***мгновенное*** *замыкание тумблера ток нарастает до своего стационарного значения именно* ***постепенно;***

---

[3] Следует иметь в виду, что ***закон*** природы может считаться таковым до тех пор, пока он не объяснен. ***Явление*** же природы объяснимо с помощью установленных ранее законов природы. Вот два примера.

1. Соотношение между стационарными значениями напряженности электрического поля $(\vec{\mathrm{E}})$ и плотности электрического тока $(\vec{J})$ в точке сплошной, токопроводящей среды имеет вид: $\vec{J}(x,y,z) = \sigma(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)$, где $\sigma(x,y,z)$ — удельная электропроводность среды в точке, координаты которой есть x, y, z. Однако это соотношение не является законом природы. Оно выводится, и в ходе вывода возникает то, что принято считать объяснением явления *«протекание электрического тока в проводящей среде»*.

2. Соотношение $\vec{\mathrm{F}} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon \cdot r_{1,2}^3} \cdot \vec{r}_{1,2}$ (где $\vec{\mathrm{F}}$ — сила взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами (q_1 и q_2), постоянно находящимися друг от друга на расстоянии $\vec{r}_{1,2}$; ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды) считается законом природы. Оно до сих пор не выведено. Более того, оно было обобщено на случай движения одного заряда относительно другого.

[4] Очень часто континуальное тело, когда оно взаимодействует с точечной частицей, выступает в роли измерительного прибора.

• *почему имеет место именно линейная зависимость $i_{ст}$ от $U_{ст}$?*

Поскольку, как было условлено, дело происходит в 1927 году (спустя 100 лет после обнаружения того, что все это время обоснованно называлось законом Ома), мы уже располагаем ***всеми*** физически содержательными понятиями, позволяющими, как нам кажется, адекватно описать экспериментальную ситуацию. В результате удается установить, что зависимость $i(t)$ имеет вид: $i\,(t, U_{ст}) = i_{ст}\,(U_{ст}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)$, где $i_{ст} \sim U_{ст}$, $t \geqslant t_0$ (t_0 — момент подключения резистора к источнику постоянной ЭДС), а величина τ — некая характеристика вещества резистора. Теперь можно переходить к объяснению, почему зависимость $i\,(t, U_{ст})$ имеет именно вышеуказанный вид.

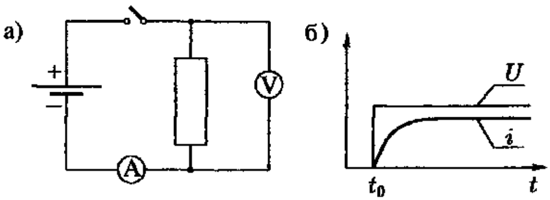


Рис. 1. Экспериментальная ситуация.

а) Электрическая цепь (считается, что в момент t_0 тумблер замыкается мгновенно);

б) Результаты наблюдений: $U = U_{ст}$; $i\,(t, U_{ст}) = i_{ст}\,(U_{ст}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)$.

Подчеркну: мы ни капли не сомневаемся в том, что понятия, которыми располагаем, допустимо использовать, по крайней мере, для ***описания*** эксперимента. Именно поэтому мы считаем, что лишь от наших способностей зависит возможность дать такое описание, которое бы адекватно отображало все то, что происходит в резисторе ***на самом деле.*** Естественно, что коль скоро понятий, накопленных наукой-физикой (к 1927 году), для объяснения вида зависимости $i\,(t, U_{ст})$ достаточно, то и ***с объяснением не возникнет проблем.*** Последнее означает, что ***объяснение в рамках уже известных понятий достижимо, по крайней мере, в принципе.*** Необходимо лишь, чтобы понятия, отобранные для объяснения, не противоречили понятиям, использованным при описании.

Теперь давайте обратимся к другому примеру.

Перенесемся мысленно в 1924 год и представим себя участниками эксперимента, состоящего в пролете точечных частиц (одна за другой спустя значительные промежутки времени) через два крошечных отверстия в перегородке, отделяющей источник частиц от экрана (в месте попадания частицы на экран засвечивается маленькое пятнышко). Эксперимент длится очень долго. В итоге на экране появляется точно такой же светящийся рисунок, какой возникает после освещения перегородки монохроматическим светом. Именно благодаря совпадению характера рисунков мы считаем себя вправе оперировать такими понятиями, как ***протяженная (и даже бесконечно протяженная) сплошная среда*** (материальный континуум), волны в такой среде, интерференция и дифракция. Но... ведь описываем-то мы результаты пролета через перегородку с отверстиями ***точечных*** частиц. Подчеркну: глядя на экран, мы ни капли не сомневаемся в необходимости использовать для описания увиденного именно только что перечисленные понятия. Однако давайте не забывать: мы ведь договорились, что дело происходит в 1924 году — на таком этапе развития науки-физики, на котором мы не располагаем никакими другими понятиями, кроме тех, что к тому году были накоплены[5], и не возникает сомнений как в правомерности использования их, так и в их достаточности для описания эксперимента. Таким образом, проблем с описанием не возникает (просто потому, что, как нам кажется, нельзя предложить никакого другого описания). Увы, проблемы возникают с объяснением. Представление о движущейся в ***пустом*** пространстве ***точечной*** частице несовместимо с волнообразным перемещением ни самой частицы, ни чего бы то ни было вокруг нее. Когда мы имеем дело с протяженным объектом, его пространственно отдаленные части могут пройти ***в одно и то же мгновение*** через множество пространственно разделенных отверстий в экране. Точечная же частица, по определению, не может пройти ***в одно и то же мгновение*** через множество пространственно разделенных отверстий. Вот теперь-то и возникает дилемма. Либо мы ограничиваемся только описанием увиденного (для этого вполне достаточно уже имеющихся понятий), либо мы признаем, что подобное описание не является адекватным тому, что происходит на самом деле.

Если, сопоставив увиденное на экране с ***точечностью*** пролетающих через отверстия объектов, физик констатирует, что описание эксперимента ***в рамках использованных понятий*** не является адекватным реальности, у него остается единственный выход из положения — попытаться сконструировать ***новое*** — ***самостоятельное*** (иначе говоря, — ***неопределяемое***[6]) понятие[7].

Признание неадекватности описания и необходимости в новом понятии позволяет надеяться на возможность объяснения. Ведь объяснять придется уже то, что будет описано не так, как раньше. А вот отказ признать неадекватность описания результатов эксперимента в рамках использованных понятий, а, тем самым, и отказ в необходимости сконструировать *новое понятие* влечет за собой соблазн либо впоследствии ***выдать описание за объяснение***, либо впоследствии ***заявить о ненужности*** (нецелесообразности, невозможности) ***объяснения.*** Существует также и вполне реальная угроза, — признавая необходимость объяснения, дать неправильное объяснение. Примером неправильного объяснения является утверждение, что ***точечная*** материальная частица обладает и таким свойством, которое присуще материальному континууму (сплошной среде), а именно — ***протяженностью***[8].

---

[5] Иначе говоря, других понятий для нас просто не существует

[6] Подобное понятие *принципиально нельзя определить с помощью уже известных* понятий. Одним из простейших примеров неопределяемого на сегодня понятия является электрический заряд.

[7] Таким понятием оказалась знаменитая Ψ-функция состояния ***точечной*** частицы.

[8] Я имею в виду пресловутый корпускулярно-волновой дуализм (грамотным словосочетанием следовало бы считать «точечно-континуальный дуализм»), напоминающий утверждение ***«он там не был, но был»***, которое кое-кто, возможно, посчитал бы вполне приемлемым ***диалектичным*** утверждением.

Хотелось бы обратить внимание читателя на то, что большинство приверженцев *корпускулярно-волнового дуализма* лишь ***микрочастице*** (принципиально неделимой) приписывает способность проходить одновременно через множество пространственно разделенных отверстий в перегородке. Человека (пример макрообъекта) такой способностью не наделяют, так что он, к сожалению, *даже в случае крайней необходимости* не может находиться одновременно в разных местах. Впрочем, должен заметить, что некоторые

3.

Если спросить мэтра теоретической физики, сможет ли он объяснить основы квантовой механики любознательному дилетанту с высшим естественно-научным образованием, я думаю, мэтр скорее всего снисходительно улыбнется. К сожалению, в ходе объяснений слушающего не оставляет ощущение собственной неполноценности, ибо ему никак не удается постичь «очевидного». Чаще всего мэтры нас просто успокаивают: примерно так, как это однажды сделал воистину великий Вернер Гайзенберг, сказав, что ***«детьми мы научаемся словам и понятиям не потому, что нам их объяснили, а потому что мы ими стали пользоваться»***. Однако лично я полагаю, что коль скоро целью науки является отделение Истинного от Ложного, подменять знание утешением не годится. Куда полезнее признать, что изложение и восприятие основ квантовой механики и сегодня затруднено. Причина, мне кажется, состоит в продолжении использования ***тех понятий***, которыми пользовались еще ***при*** первых попытках описания новых явлений природы ***и*** экспериментов, но ***которые*** (понятия) ***не были совместимы друг с другом***. Вот в этой ситуации и произошел переворот в методике объяснения явлений природы и результатов экспериментов (а, тем самым, и в методике преподавания некоторых разделов физики): в привлекаемых для их описания математических соотношениях стали использовать ***чисто математические*** понятия, в совместимости которых сомневаться, конечно, не приходилось, но которые, увы, не удавалось интерпретировать ***физически содержательным*** образом[9]. Поэтому возникло и, в конце концов, стало почти общепринятым мнение о необязательности оперировать в новых теориях физическими понятиями ***повсюду*** и даже о ***необходимости*** переходить к совершенно абстрагированным от физической реальности — чисто математическим понятиям ***и*** конструкциям. И хотя необходимость и эффективность применения математики в физике никогда не вызывала сомнения, синдром ***«непостижимой*** эффективности»[10] возник лишь тогда, когда сами физики, стали ***сознательно*** отказываться от физической интерпретации некоторых математических соотношений. А, чтобы оправдать подобный образ действий (применительно к квантовой механике), было предложено считать ***принципиально невозможным*** сохранить в квантовой механике классическую наглядность. Естественным следствием упомянутого образа действий (и мыслей) явилась уверенность в безнаказанном объяснении явления природы, например, свойствами дифференциального уравнения[11]. Затем для объяснения стали привлекать уже и чисто физические экзотические понятия.

из упомянутых приверженцев и макрообъект наделяют удивительными свойствами, лишь делая оговорку, что проявление подобного свойства происходит чрезвычайно редко.

Вообще-то я надеюсь на согласие читателя признать, что там, где нет логики, присутствуют (говоря без обиняков) или глупость, или ложь.

[9] Кстати, первыми жертвами методологического переворота пали отнюдь не теоретизирующие дилетанты (от них физика пострадать не может), а такие гиганты мысли, как А. Эйнштейн и Э. Шредингер, так и не воспринявшие ничего из того, в чем убеждал их Нильс Бор.

[10] Этот синдром сводится к стойкому убеждению, что, оперируя чисто математическими конструкциями, в которые не закладывалось физического содержания, можно, тем не менее, получить совершенно новые физические и даже технические результаты.

[11] Вот пример. В рамках резерфордовской модели атома водорода электрон считали вращающимся вокруг протона, то есть — движущимся с ускорением. Однако ускоренное движение электрона должно приводить его, в конце концов, к падению в протон. Это противоречит факту стабильности атома. В рамках традиционного квантово-механического

К числу их следует отнести «виртуальную частицу», то есть такую, которая, хотя и принимает участие во взаимодействии, но не существует[12].

В связи с вышесказанным мне хотелось бы обратить внимание непредубежденного читателя на то, *как оценил такой крупный специалист*, как М. Джеммер *«вклад в концептуальное развитие квантовой механики»*, внесенный различными исследователями[13].

М. Джеммер одобряет *«неортодоксальных мыслителей, убежденных в конечном тождестве частиц и волн»*[14] (по-видимому, считая этих мыслителей предтечами «корпускулярно-волнового дуализма»). Он также замечает, что неортодоксальность была продемонстрирована вообще-то задолго до появления специфических квантовых парадоксов, — еще когда предлагалось заменить гравитационное поле пустым, но *искривленным* пространством[15]. При этом *«движение вещества интерпретировалось как проявление изменений кривизны пространства»*. Интересно все же, что означает этот набор слов? Интересно также, согласился бы М. Джеммер с утверждением, что изменение кривизны пустого пространства есть, на самом деле, не что иное, как проявление движения точечной частицы?

На мой взгляд дилетанта, все без исключения понятия, используемые для описания физической реальности, должны быть обязательно определены физически содержательным образом. Не всегда это удается легко и в двух словах, но добиваться этого совершенно необходимо.

4.

Период становления квантовой механики закончился к началу 30-х годов XX столетия. В то время было не до логики. На первый план вполне естественно выступали дерзкие (но впоследствии оправдывавшиеся) гипотезы, великолепные

способа описания состояния электрона в поле протона считается неприличным интересоваться характером движения электрона. Стабильность же атома объясняется попросту тем, что не содержащее времени уравнение Шредингера (или Дирака) имеет решения.

[12] Вот пример из книги И. Николсона «Тяготение, черные дыры и Вселенная» (М.: Мир, 1983). На с. 223 написано: *«...частицы* (переносящие взаимодействие — *Ф. В.*) *носят название „виртуальных", так как их нельзя наблюдать непосредственно — их существование слишком кратковременно»*. Итак, то ли существует некий предельно короткий промежуток времени, отпущенный Природой для существования частицы, то ли экспериментальная техника не достигла необходимого для наблюдения уровня... Но, на той же с. 223 в связи с переносом электромагнитного взаимодействия написано: *«...силы... передаются... с помощью... виртуальных частиц, поскольку только такие частицы могут существовать достаточно долго, чтобы обеспечивать взаимодействие на больших расстояниях»*. На самом деле использование понятия виртуальной частицы — не более, чем очень удобный прием при описании взаимодействия объектов друг с другом. Использование мнимой единицы в электротехнике — тоже очень удобный прием.

[13] *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. Макс Джеммер — автор множества монографий, посвященных образованию и развитию физических понятий.

[14] В переводе на понятный язык тождество частиц и волн означает, что *точечная* частица, по крайней мере, иногда является *протяженным* (и даже бесконечно протяженным) объектом, а тот, в свою очередь, иногда является точечным. Я допускаю, что кто-то может быть неортодоксальным настолько, что *искренне* уверен в том, что утверждения *«не был»* и *«был»* иногда означают одно и то же.

[15] Мне понятно, что означает искривленность материального объекта (например, поверхности стола), но, будучи ортодоксальным, я не могу понять, что означает искривленность пустоты.

методические приемы, изощренный (по крайней мере, по тем временам) математический аппарат. Благодаря усилиям сотен физиков и математиков была разработана самая действенная физическая теория XX века — квантовая теория материи. Но все это давно позади. К сожалению, как это нередко бывало в истории науки, именно логическая структура теории, ее основы слишком быстро перестали интересовать гигантов мысли, стоявших у ее истоков. Упоенные блестящими результатами приложений теории и занятые продвижением ее принципов в новые, гораздо более сложные и романтичные разделы физики, именно поэтому гиганты с досадой отвергали претензии всех тех, кто, как им казалось, не понимал квантовую механику либо из-за консерватизма, либо — чаще всего — из-за своей плохой математической подготовки.

Что касается консерватизма, то подобный упрек ставили в вину лишь корифеям. Простых смертных обвиняли в плохом знании математики. Увы, не в математике дело. Современный учебник квантовой механики в еще большей степени, чем прежний представляет собой изложение методов расчета (энергетических спектров, сечений рассеяния и т. п.) и в еще меньшей степени содержит объяснения, почему происходит так, а не иначе. По сути дела читателю предлагают: делай, как тебе говорят, и не спрашивай, зачем; тогда все будет хорошо.

Заканчивая Предисловие, хочу заверить читателя в том, что не посягаю в этой книге ни на одно из общепризнанных соотношений между известными физическими величинами. Придерживаясь традиционных представлений о логичности, я полагаю необходимым лишь иначе истолковать некоторые фундаментальные соотношения (выражения, формулы), с помощью которых в руководствах по квантовой механике принято описывать состояние материальной точечной частицы. Однако *искушенный* читатель может быть спокоен: никакие перевороты в науке его не подстерегают. Тем не менее, кое-что совершенно новое и достаточно любопытное в книге содержится.

С уважением, автор.

Глава 1

Структура пространственно-временного континуума

§1.1. Как понимать пустоту пространства

Нет смысла даже пытаться дать определение понятию пространства. Еще Аристотель указывал на то, что исходными данными любой системы логически содержательных рассуждений являются неопределяемые понятия. Таким образом, лишь одно требуется выяснить: может ли понятие пустого пространства быть содержательным физически [1]. При этом будет считаться, что каждый читатель этой книги прекрасно ощущает также и время, даже если не умеет выразить свои ощущения словами.

Начну с замечания, что представить себе отсутствие «вообще всего» невозможно.

Легко представить себе полное отсутствие материи, но... лишь вне или внутри вполне материального сосуда. Можно представить себе отсутствие лишь кое-чего и только потому, что рядом присутствует кое-что [2].

А попробуйте вообразить себя наблюдателем, сжатым до бесконечно малых размеров (лишенным возможности ощущать свое тело), перед глазами которого нет абсолютно ничего. Если бы столь неестественно устроенный наблюдатель находился в ***реальной*** обстановке, он запросто различал бы объекты, расположенные в телесном угле 4π стерадиан (он ведь сжат до размеров точки) и на любом расстоянии. Но, если перед глазами вечно ничего нет, то не возникают сами понятия «телесный угол», «расстояние от... до...» (им нельзя придать даже логическую содержательность).

Тем не менее, человеческий разум оказался способным настолько абстрагироваться от реальности, что научился создавать ***чисто математические*** конструкции. Одной из них и является трехмерный математи-

---

[1] ***Физическая*** содержательность понятия характеристики объекта предусматривает сверх логической содержательности обязательное придание характеристике количественного (а, значит, измеримого) значения.

[2] Это — одно из проявлений так называемого ***принципа дополнительности,*** о котором речь впереди.

ческий континуум — синоним физически пустого пространства. Однако прежде, чем переходить к его описанию, целесообразно обратиться к двум простейшим понятиям: точке и множеству точек. Если отобразить последние с помощью рисунка (рис. 1.1), то, очевидно, что лишь благодаря различимости точек можно их — хотя бы в принципе — пересчитать и, тем самым, установить отличие именно ***множества*** от именно ***одной*** точки. Сказанное преследует цель обратить внимание на тот факт, что множество возникает вместе с различимостью его элементов, каковая реализуется с помощью системы (способа и т. п.) отсчета. Поэтому содержательным оказывается лишь вопрос, в чем состоит признак различимости[3].

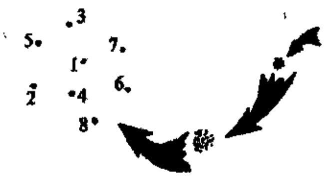


Рис. 1.1. Множество точек, наблюдаемое при различном увеличении. Поскольку расстояние между **точками** может быть исчезающе малым, множество точек может располагаться даже в сколь угодно малом объеме пространства.

С учетом сказанного трехмерный пространственный континуум может быть введен только вместе с системой координат $\{XYZ\}$, так что все точки континуума автоматически считаются различными в том смысле, что отличаются друг от друга значением и направлением радиус-вектора $\vec{r}$.

Вполне допустимо условиться называть «точкой» (в кавычках) куб со стороной исчезающе малой протяженности — элементарную пространственную ячейку, радиус-вектор центра которой (то есть настоящей точки) традиционно обозначают символом $\vec{r}$. Бесконечно протяженный во всех трех измерениях пространственный континуум представляется составленным из плотно прилегающих друг к другу элементарных ячеек.

Предлагается называть пространство ***физически*** пустым (далее, для краткости, — просто пустым), если радиус-вектор есть единственный признак отличия одной точки от другой[4].

Заполним теперь пустое пространство материальной средой — таким силовым статическим полем, чтобы после этого каждая точка пространства отличалась от других не только радиус-вектором $\vec{r}$, но еще одним — ***физическим*** признаком: напряженностью поля $\vec{\mathrm{E}}$. Пусть, например,

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}(\vec{r}) = \frac{\widehat{Q}}{r^3} \cdot \vec{r},$$

---

[3] Вопрос, *«с какой из точек совместить начало отсчета?»* лишен самостоятельной содержательности, ибо, если — *«с какой»*, значит, точки *уже* перенумерованы, значит, одна из точек *уже* служит началом отсчета.

[4] Тем самым подчеркивается, что радиус-вектор $\vec{r}$ есть характеристика чисто математическая. Это естественно, поскольку и рассматриваемый объект (континуум) является продуктом интеллектуальной деятельности, а не проявлением Природы, существующей независимо от способностей Интеллекта.

где: $\widehat{Q}$ — характеристика-константа объекта-поля[5]; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки пространства, проведенной в нее из другой точки, принятой в качестве начала координат.

Из вида зависимости $\vec{E}$ от $\vec{r}$ следует, что нет даже двух точек пространства, в которых напряженность поля была бы одинаковой (и по величине, и по направлению). Естественно, что ***физически*** (а не только геометрически) различными могут быть точки лишь ***непустого*** пространства[6]. Этот вывод можно воспринимать по-разному: можно считать, что различимость точек пространства возникла в результате того, что ранее пустое пространство оказалось заполненным некоей средой; но можно попросту ***отождествить*** пространство со средой, названной полем, и этим объяснить возникновение различимости. Суть, конечно, одна и та же. Безусловно, речь идет о ***материальной*** среде, удивительной (разве что на первый взгляд) лишь тем, что в нее можно беспрепятственно вложить и точечные частицы, и коллективы таких частиц, и другие бесконечно протяженные сплошные материальные среды (тоже поля).

Рассмотрим еще один пример — пространства, заполненного такой сплошной материальной средой, что каждой ее точке (автоматически — каждой точке пространства) соответствует одно и то же значение некоей величины (обозначим ее символом ρ), призванной удостоверить лишь непустоту пространства. Однако если ρ не зависит от $\vec{r}$, все точки ранее пустого пространства и после заполнения его подобной средой остаются физически эквивалентными (идентичными). Тем не менее, оно уже не является пустым в буквальном смысле слова — чисто математической конструкцией, — и его было бы хорошо назвать *«эфиром»*. К сожалению, этот термин дискредитирован, а потому в надежде подыскать со временем адекватное название договоримся именовать пространство, заполненное ***материальной*** средой, **«пустым»** (в кавычках), если все его точки (отличающиеся только по геометрической характеристике — величине $\vec{r}$) идентичны ***физически*** (неотличимы друг от друга по физическим характеристикам). Называя пространство **«пустым»**[7], давайте пока иметь в виду лишь то, что в него беспрепятственно можно вложить любые материальные объекты.

Рассмотрим наряду с **«пустым»** пространством точечную частицу. Чтобы отличить ее от точки пространственного континуума, припишем частице характеристику, которой не обладает точка пространства и ко-

---

[5] Характеристика-константа призвана отобразить себетождественность объекта (в данном случае поля), то есть — его качественное отличие от всех прочих объектов, его неисчезаемость и непревращаемость в нечто другое в процессе взаимодействия с другими объектами.

[6] Подчеркну, что различимость физическая — это и есть ***истинная*** различимость — та, которая имеет место в действительности, а не та, что создана нашим изощренным воображением.

[7] Вполне возможно, что на некоторых читателей термин ***«физический вакуум»*** произведет большее впечатление, чем термин ***«пустое»*** (в кавычках) пространство.

торая выражает себетождественность частицы. Пусть это будет масса m. Тогда в той точке пространства, в которой присутствует частица, плотность массы равна $\rho = \lim_{v\to 0} \frac{m}{v} = \infty$ (здесь v — объем пространства, содержащий точку, в которой присутствует частица). Если приписать каждой точке пространства одинаковое, ограниченное сверху (но отличное от нуля) значение плотности массы ρ, то именно этим значением и только этим будет ***качественно*** отличаться точка **«пустого»** пространства от точечной частицы.

Итак, введено два физически содержательных понятия: материальная точечная частица и качественно отличный от нее **«пустой»** бесконечно протяженный трехмерный континуум (**«пустое»** пространство)[8]. Но, поскольку **«пустое»** пространство является отнюдь не математической конструкцией (оно считается средой материальной), возникают проблемы.

1. Совершенно очевидно, что, только введя два взаимно противоположных понятия **«пустого»** и пустого пространств, можно придать им обоим логическую содержательность. Но для этого необходимо предложить хотя бы один признак отличия их друг от друга. По-видимому, вполне разумным кажется предположение, что только **«пустое»** пространство (то есть ***материальная*** среда) может взаимодействовать даже с самым элементарным *материальным* объектом — точечной частицей[9]. Однако совместимо ли это предположение с представлением о ***свободной*** точечной частице?

Частицу принято называть свободной — ни с чем не взаимодействующей, — если она пребывает в пространстве, пустом в буквальном смысле слова (в пустоте нет ничего, с чем мог бы взаимодействовать единственный находящийся в ней материальный объект — частица). В этом случае можно ввести инерциальную систему отсчета, относительно которой частица выглядит либо вечно движущейся прямолинейно и равномерно, либо вечно покоящейся[10]. ***Но в чем тогда должно состоять взаимодействие, которое непрерывно испытывает частица, пребывающая не в пустом, а именно в«пустом» пространстве, если, несмотря на это взаимодействие, она обоснованно может считаться свободной?***[11] Кстати, лишь при таком условии эпитет **«пустое»** (пусть в кавычках) применительно к материализованному пространству является оправданным.

---

[8] Чтобы создать пространство, отличающееся от пустого, достаточно приписать каждой точке пустого пространства значение какой-либо физической характеристики. Но этого недостаточно для того, чтобы считать образованное пространство именно физическим — материальным объектом. Для этого требуется приписать уже непустому пространству способность взаимодействовать с другими материальными объектами.

[9] В Приложении 1 будет показано, что **«пустое»** пространство действительно взаимодействует в ***традиционно*** понимаемом смысле слова, например, с электроном.

[10] Мы обязаны сделать этот вывод, если признаем частную теорию относительности.

[11] Подчеркну, что обоснованием служит наша уверенность в том, что именно **«пустое»** пространство и есть та ***обстановка, в которой частица выглядит либо вечно движущейся прямолинейно и равномерно, либо вечно покоящейся.***

Итак, пространство считается до такой степени «пустым», что пребывающая в нем частица чувствует себя совершенно свободной, но, тем не менее, с ним взаимодействует. Ясно, что имеет место логическое противоречие.

2. Можно, однако выявленную только что проблему представить иначе — как проблему совместимости представления о бесконечно протяженном «пустом» пространстве с его способностью к взаимодействию.

Дело в том, что понятия различимости-неразличимости, эквивалентности-неэквивалентности точек пространственного континуума связаны с необходимостью приписать каждой точке какую-то характеристику. Только после этого можно говорить, что точки, например, отличаются друг от друга — значением этой характеристики.

Все точки истинно пустого пространства, разумеется, эквивалентны физически[12]. Именно это обстоятельство отображает неспособность истинно пустого пространства к взаимодействию. Однако все точки «пустого» пространства также физически эквивалентны. *В чем тогда состоит эта эквивалентность, если, несмотря на нее, точечная частица, в какой бы точке «пустого» пространства она ни находилась, с ним взаимодействует?*

3. Еще одна проблема состоит в выяснении, чем вызвана сама необходимость считать пространство «пустым» — пустым лишь в кавычках. *Иными словами, что вынуждает отождествить пространственный континуум со сплошной материальной средой, после чего пребывающая в пространстве (где же еще?) точечная частица автоматически оказывается участвующей во взаимодействии с этой самой средой?*

На все вопросы впоследствии придется дать ответы.

§1.2. Понятие о времени

Давайте посмотрим, что получится, если рассуждать о времени точно так же, как о пространстве.

Казалось бы, создать условия, в которых теряется ощущение времени, даже проще, чем условия, в которых пропадает ощущение пространства. Не надо сжиматься в точку и убирать из Вселенной все объекты. Достаточно забраться в свето-, звуко-..., одним словом, — в раздражителенепроницаемое помещение, в котором к тому же ничего бы не двигалось; не шевелиться самому и перестать, конечно, ощущать все свои потребности. И пропадет всякое представление о том, сколько времени прошло с момента самоизоляции. Но лишь одно не удастся: отделаться от осознания факта *изменения* своего состояния. То есть, от осознания,

[12] Хотя они отличаются друг от друга значением и (или) направлением радиус-вектора относительно выбранной системы координат, но этот радиус-вектор есть характеристика математическая.

что хоть одно событие — самоизоляция, — но имело место. Таким образом, утверждения *«здесь происходят изменения обстановки»* и *«здесь течет (идет) время»* совершенно одинаковы по смыслу.

Однако сразу же подчеркну, что событие есть эквивалент изменения чего угодно... в пространстве. Неспроста мы судим о времени по ситуации, складывающейся в пространстве.

Если попробовать создать представление о временнóм континууме, который можно было бы считать пустым (без кавычек), то вполне естественно ожидать, что это будет, подобно аналогичному континууму пространственному, чисто математическая конструкция. И вот тут возникает первая проблема. Чтобы уяснить ее сущность, рассмотрим сначала континуум пространственный, причем в виде плоскости $[XY]$, с одной из точек которой совмещено начало системы координат — точка пересечения перпендикулярных друг другу осей X и Y (рис. 1.2). Так вот совершенно очевидно, что можно ввести бесконечное множество систем координат $\{X, Y\}$, повернутых в точке пересечения уже трех осей X, Y, Υ вокруг общей оси Υ, перпендикулярной плоскости $[XY]$. При этом, например, часть $X^{(i)}$-координаты точки A в одной системе координат (i-й) преобразуется в часть $Y^{(k)}$-координаты точки А в другой системе (k-й). Это считается вполне нормальным преобразованием. Но лишь потому, что все бесконечное множество осей на плоскости $[XY]$ принадлежит к совокупности осей ***пространственных***, между которыми нет, ***качественного*** отличия. Если же настаивать на таковом отличии оси Υ от осей X и Y, это можно сделать, только запретив отклонение оси Υ от нормали к плоскости $[XY]$. После этого можно дать оси Υ другое обозначение и название, символизирующее ее качественное отличие от осей X и Y, называемых пространственными. Вот таким способом можно прийти к t-оси, качественно отличной от осей X и Y, хотя и представляющей собой одномерный континуум с началом отсчета в одной из его точек. Тогда все остальные точки t-оси будут отличаться друг от друга только численным значением t-координаты и знаком. Далее, в качестве «точки» t-оси можно взять промежуток Δt исчезающе малой продолжительности.

Вполне логично назвать t-континуум *пустым* (без кавычек), если единственным признаком отличия его точек друг от друга является геометрическая характеристика — t-координата.

Итак, введя запрет на превращения друг в друга ***единственного*** пространства (существующего в каждой точке t-континуума) и ***единственного*** t-континуума (присутствующего в каждой точке пространства), можно отождествить t-ось с осью времени, но она будет осью уже 4-го измерения. В связи с этим, если иметь в виду последующую материализацию пока что чисто математического t-континуума, возникают еще две проблемы.

Первая — банальная: мы не в состоянии представить себе 4-е измерение, и если пожелаем чем-то заполнить t-континуум, то нельзя дать физически содержательного определения подобной операции. Вторая проблема состоит в том, что мы не в состоянии представить

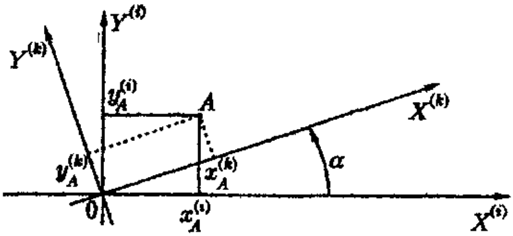


Рис. 1.2. Двумерный пространственный континуум.

$$x_A^{(k)} = x_A^{(i)} \cdot \cos\alpha + y_A^{(i)} \cdot \sin\alpha;$$
$$y_A^{(k)} = -x_A^{(i)} \cdot \sin\alpha + y_A^{(i)} \cdot \cos\alpha.$$

Существует еще одна ось — ось Υ, которая перпендикулярна осям X и Y, проходит через точку 0 и смотрит на читателя.

себе реальную материальную среду, которая была бы принципиально одномерной. А ведь одномерность t-континуума выступает в качестве обязательной характеристики.

Итог такой: не возбраняется считать, что есть четвертое — временнóе — измерение, но заполнить соответствующий ему континуум и нельзя, и, так и хочется сказать «к счастью», нечем. Вот поэтому судить о присутствии времени приходится, наблюдая за происходящим в пространстве. А, так как ощущение времени означает физическую различимость всех точек t-континуума, следует выяснить, можно ли превратить в таковые все точки пустого временного континуума, заполняя некоей материальной средой континуум пространственный. Важно, чтобы при этом последний оставался, по крайней мере, «пустым», так как только тогда может считаться доказанной независимость материализации времени от материализации пространства.

Для реализации всего вышесказанного, ранее пустое пространство следует заполнить такой средой, чтобы абсолютное значение и знак ее физической характеристики (обозначу ее символом I) были одинаковыми в каждой точке пространства. ***Таким образом, величина I характеризует пространство в целом — как цельный объект.*** А, поскольку I не зависит от $\vec{r}$, пространственный континуум остается «пустым» (не нарушается физическая эквивалентность (одинаковость, неразличимость) всех его точек). Тем не менее, ничто не мешает допустить, что величина I способна принимать бесконечно много различных значений. При этом пространство все равно останется «пустым», если I-величина по-прежнему не будет зависеть от $\vec{r}$.

Пояснить сказанное можно, используя более привычную терминологию — отождествив пространство с материальной средой (полем) и приписав каждой точке пространства потенциал Φ. Если Φ не зависит от $\vec{r}$, напряженность поля $\vec{E}$ ($\equiv -\operatorname{grad}\Phi$) в каждой точке пространства равна нулю, так что пространство остается «пустым» (выглядит как цельный, сплошной, бесконечно протяженный объект). Тем не менее, еще возможно приписать пространству в целом (то есть каждой его точке) и другую характеристику — величину $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ (поток потенциала), отличную от нуля (она-то и обозначена символом I). Уже говорилось, что если ***физическая*** величина, характеризующая точку пространства, может принимать множество разных значений, это интерпретируется как присутствие в этой точке оси времени. Если поток потенциала отличен от нуля, значит сам потенциал не просто может принимать, а принимает разные значения (например, в пределах от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда и все моменты времени нужно будет считать ***физически*** различными. Как видим, материализация пространства необходима для материализации времени, причем возможна такая материализация пространства, которая, оставляя его **«пустым»**, превращает ось времени, образно выражаясь, в «непустой» временнóй континуум.

Однако совершенно очевидно, что существует и такая материальная среда, которая, заполнив пространство, оставляет физически одинаковыми все точки t-континуума. В этом случае $I = 0$. Поскольку подобная ситуация означает отсутствие каких бы то ни было событий, понятие *«этот»* момент времени лишается всякой физической содержательности: *«этот»* принципиально неотличим от *«тот»* и т. п. Так как в подобной ситуации временнóй (одномерный) континуум, даже если считать его материализованным, невозможно отличить от истинно пустого, целесообразно считать t-континуум просто пустым (без кавычек).

В заключение стоит обратить внимание на важное обстоятельство. Если существование бесконечно протяженного пространства обусловить присутствием хода времени в каждой его точке, а присутствие хода времени обусловить существованием пространства в каждый момент вечности, то оба эти специфических объекта оказываются независящими от присутствия в пространстве и существования во времени любых других качественно отличных от них материальных объектов. Но в таком случае и временнóй континуум (в целом) не должен быть пустым в каждой точке пространства и пространство (в целом) не должно быть пустым в каждый момент времени.

§1.3. Структура пространственно-временнóго континуума

Понятие структуры лишь тогда может обрести содержательность, если то, что должно иметь структуру, состоит из неодинаковых элементов.

В чем могла бы состоять ***физическая*** неодинаковость, временных ***промежутков***, например, в физически эквивалентных точках пространства (стало быть — **«пустого»** пространства) и ***физическая*** неодинаковость, пространственных ***интервалов***, например, в физически эквивалентные моменты вечности (стало быть — пустой оси времени)? Какой смысл в данном случае можно вложить в неодинаковость?

Чтобы сделать дальнейшие рассуждения достаточно наглядными, давайте считать пространственный континуум одномерным. В таком случае простейшая конструкция пустого пространства-времени выглядит так, как показано на рис. 1.3: бесконечно протяженная X-ось существует в каждой точке t-оси, а бесконечно продолженная t-ось присутствует в каждой точке X-оси. Если прибегнуть к традиционной терминологии, следует сказать, что бесконечно протяженное пространство существует в каждое мгновение вечности, а в каждой точке бесконечно протяженного пространства присутствует вечность. Однако следует помнить, что физическая идентичность всех точек X-оси и всех точек t-оси вынуждает употреблять термины *«разные» точки пространства* и *«разные» мгновения вечности*, имея в виду только математические различия, отражающие лишь то, что бесконечно велико и число точек, из которых состоит пространство, и число мгновений, из которых состоит вечность.

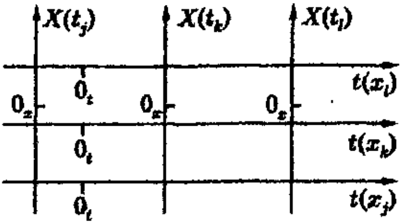


Рис. 1.3. Простейшее представление о пустом пространственно-временно́м континууме. Начала отсчета X- и t-координат специально разобщены.

Замечу, что приведенная на рис. 1.3 простейшая конструкция должна предусматривать соблюдение запрета не только на изменение угла между осями X и t, но и на вращение осей X и t (при сохранении угла между ними) вокруг оси, перпендикулярной плоскости $[Xt]$[13]. Как уже говорилось в связи с рис. 1.2, без подобного запрета невозможно отличить точку $\{X\}$-континуума от точки $\{t\}$-континуума[14].

1.3.1. Неодинаковость пространства в разные мгновения вечности (в этом случае t-ось уже нельзя считать физически пустой)

Если пространству суждено изменяться с течением времени, то это не должно быть равносильным отказу считать его по-прежнему пространством — себетождественным объектом. Поэтому придется приписать ранее пустому пространственному континууму как цельному объекту, по крайней мере, одну характеристику-константу, выражающую его себетождественность, и, по крайней мере, еще одну, играющую роль *«динамической»* наблюдаемой. С помощью подобной характеристи-

---

[13] Искушенному читателю следует иметь в виду, что введенный здесь принцип запрета полностью совместим с лоренцевыми преобразованиями *координаты и момента времени*, которые в случае необходимости приходится использовать при релятивистском описании состояния частицы. Сейчас, однако, не стоит отвлекать внимание на изучение деталей вышеупомянутой совместимости.

[14] В рассматриваемой ситуации ось, перпендикулярная плоскости $[Xt]$, не должна считаться пространственной осью. Ведь если бы можно было изобразить 4-мерный $\{X, Y, Z, t\}$-континуум, то, говоря о запрете или разрешении на повороты, пришлось бы иметь в виду запрет на поворот вокруг оси 5-го измерения.

Вообще говоря, нельзя забывать, что геометрическая структура n взаимно перпендикулярных осей (где $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) является продуктом интеллектуальной деятельности и может быть предназначена лишь для удобства описания, например, состояния частицы. Далее нужно проводить отождествление с реальностью, используя оговорки, правила обращения и т. п., естественно, носящие характер постулатов.

ки в классической механике описывают состояние объекта. А, поскольку состояния могут быть разными, то динамическая наблюдаемая обязана «обладать способностью» принимать разные значения. Таким образом, изменяться с течением времени будет не само пространство (выступающее теперь в качестве ***себетождественного*** объекта), а нечто, чем оно обладает. Но не превратятся ли при этом физически идентичные точки «пустого» пространства в физически различные? Если так и произойдет, то возникнет, хотя бы подобие структуры.

Пусть в роли характеристики-константы выступает величина Φ_c, представляющая собой усредненное по всему бесконечно большому $\{Xt\}$-континууму абсолютное значение потенциала некоего Φ-поля, с которым давайте и отождествим пространство. Предлагается назвать величину Φ_c собственным потенциалом пространства-поля, причем, согласно только что данному определению,

$$\Phi_c = \sqrt{\lim_{\substack{\Delta x\to\infty\\ \Delta t\to\infty}}\left\{\frac{1}{\Delta x\cdot\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta x}{2},-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta x}{2},\frac{\Delta t}{2}}\Phi^2(x,t)\cdot dx\cdot dt\right\}}. \tag{1.1}$$

Подчеркну, что, хотя величина Φ_c является константой (характеризует пространство как цельный объект), из ее определения следует существование еще одной величины — потенциала Φ, которому отнюдь не запрещается зависеть от x и t. ***Поэтому предположим, что мгновенно-локальное значение*** Φ ***флуктуирует*** (хаотически колеблется) ***вдоль обеих осей X и t***. Следствием сделанного предположения является невозможность более считать X-континуум «пустым». В самом деле, если взглянуть в произвольный момент времени на ось X, можно обнаружить: не только бесконечно много точек с одинаковым потенциалом Φ_1, но и бесконечно много точек с одинаковым потенциалом Φ_2 $(\neq \Phi_1)$; бесконечно много точек с одинаковым потенциалом Φ_3 $(\neq \Phi_1, \neq \Phi_2)$; и т. п.

Наряду с величинами Φ и Φ_c (пусть $\Phi_c > 0$) автоматически возникают величины $\vec{\mathbf{E}}(x,t)$ и $\mathbf{E}_c(t)$:

$$\vec{\mathbf{E}}(x,t) = -\overrightarrow{\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right)}; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{E}_c(t) \equiv \sqrt{\left\langle\vec{\mathbf{E}}^2\right\rangle_{\Delta x}(t)} = \sqrt{\lim_{\Delta x\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta x}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}}\left(-\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right)^2\cdot dx\right\}}^{\,15)}. \tag{1.3}$$

[15] Следует принять во внимание, что отлично от нуля значение **модуля** вектора напряженности (почему и снят символ $\rightarrow$ с величины $\mathbf{E}_c$). Значение **вектора** $\vec{\mathbf{E}}(x,t)$ после усреднения вполне может оказаться равным нулю: $\langle\vec{\mathbf{E}}\rangle_{\Delta x}(t) = 0$.

Так как $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_c(t)$, то, полагая, например, что $\mathbf{E}_c(t) > 0$, можно представить эту величину (собственную напряженность поля) в виде:

$$\mathbf{E}_c(t) = \frac{\Phi_c}{\lambda_c(t)} \text{ [16]}, \tag{1.4}$$

назвав величину $\lambda_c(t)$ ***«постоянной пространства»*** (аналог ***постоянной*** кристаллической решетки). Фактически выражение (1.4) определяет величину $\lambda_c(t)$.

Подчеркну, что, являясь результатом усреднения по X-оси, величины Φ_c, $\mathbf{E}_c(t)$ характеризуют пространственный континуум в целом, то есть, если X-ось представить состоящей из ячеек одинаковой протяженности λ_c каждая, то в произвольный момент вечности *каждой* λ_c-ячейке отвечает ***одно и то же*** значение Φ_c, ***одно и то же*** значение $\mathbf{E}_c(t)$. Отсюда следует очень важный вывод: так как значение величины $\lambda_c(t)$ ограничено сверху, бесконечно протяженный пространственный континуум выглядит физически «пустым» в мелком масштабе (в котором отрезок длиной λ_c кажется точкой), но вовсе не пустым физически в крупном масштабе (в пределах отрезка длиной λ_c потенциал Φ всех точек различный). Вот так и возникает в нашем представлении структура пространства [17].

Поскольку мы располагаем двумя независимыми друг от друга величинами (Φ_c и, например, λ_c), одну из них (λ_c) можно отнести к категории упоминавшихся выше динамических наблюдаемых. Тем самым не исключается, что она способна принимать множество различных значений. В этом случае допустимо предположить, что величина λ_c является функцией времени: $\lambda_c \equiv \lambda_c(t)$ [18].

На рис. 1.4 представлена ситуация, в которой величина λ_c вечно уменьшается [19]. Образно выражаясь, «пустое» пространство непрерывно сжимается, оставаясь, тем не менее, бесконечно протяженным. Следует

---

[16] Естественно, в этом выражении Φ_c не зависит ни от x, ни от t.

[17] Читатель, знакомый с твердотельной электроникой, увидит здесь аналогию с кристаллической решеткой. Все точки внутри элементарной ячейки кристалла обоснованно кажутся электрону физически различными, а все ячейки — физически эквивалентными. Вот поэтому энергетический спектр кристаллического электрона совмещает в себе черты атомного электрона (разрешенные энергетические уровни и запрещенные зоны) и свободного электрона (разрешенная зона). Также поэтому кристаллический электрон может находиться и в состоянии, в котором он, вечно «осциллируя» около центра элементарной ячейки (с равной вероятностью около центра любой из бесконечно большого их числа), в среднем по времени покоится, и в состоянии, в котором он, осциллируя, еще и вечно движется прямолинейно и равномерно (при этом лишь его средняя по времени скорость отлична от нуля) несмотря на то, что непрерывно взаимодействует со всеми ионами, образующими кристаллическую решетку.

[18] Здесь вместо представления *об изменении со временем* собственной напряженности ($\mathbf{E}_c$) использовано более эффектное представление — о сжатии-растяжении «пустого» пространства.

[19] Это означает признание хода времени, причем в направлении из «того», что принято называть прошлым, в «то», что принято называть будущим.

заметить, что вместо непрерывного сжатия можно допустить и непрерывное растяжение, и циклы сжатия-растяжения.

Итак, приписав пространственному континууму две качественно различные характеристики (Φ_c и λ_c) и умолчав, что эти величины являются результатом усреднения, мы получаем возможность считать пространство **«пустым»** (на самом деле — лишь в мелком масштабе) и рассмотреть три принципиально различные ситуации.

1. Существует всего одно значение постоянной **«пустого»** пространства, что автоматически означает **физическую** идентичность всех мгновений вечности, то есть пустоту временнóго континуума. В этой ситуации, говоря привычным языком, отсутствует **собственный** ход времени: понятия «прошлого», «настоящего», «будущего» лишены физической содержательности.
2. Постоянная λ_c **«пустого»** (в мелком масштабе) пространства принимает различные и только различные, численные значения: естественно, — не в разных частях X-оси, а, следовательно, в разных точках t-оси. В этой ситуации все моменты вечности необходимо признать физически различными (временнóй континуум выглядит уже непустым). Говоря иначе, в пространстве присутствует ***собственный***[20] ход времени[21] (один и тот же в каждой точке пространства).
3. Постоянная λ_c **«пустого»** (в мелком масштабе) пространства принимает различные значения, но при этом некоторые значения (или каждое значение) могут повторяться ***неоднократно***. Эта ситуация обсуждаться не будет.

1.3.2. Неодинаковость временнóго континуума в **разных** точках пространства (в этом случае пространство **«пустым»** уже не считается)

Прежде всего следует иметь в виду, что в рамках чисто формального подхода можно поставить в соответствие каждой точке t-оси некую величину-константу, призванную отображать себетождественность этой оси при переносах ее из одной точки в другую точку X-оси. Тогда в качестве ***изменяемой*** характеристики t-оси допустимо ввести некий промежуток τ_c и предположить, что в разных точках X-оси он будет различным. Однако нельзя забывать, что о присутствии хода времени в смысле физической различимости или неразличимости всех мгновений вечности друг от друга

---

[20] Имеется в виду, что хотя в пространстве и могут находиться какие-то материальные объекты, его состояние изменяется во времени не из-за взаимодействия с ними.

[21] Это означает, что моменты времени физически различны. Тем не менее, на основании одного лишь отмеченного различия нельзя сказать, — в «положительном» или «отрицательном» направлении t-оси течет время. Иначе говоря, обыденные понятия «прошлого», «настоящего» и «будущего» являются в рассматриваемой ситуации чисто условными.

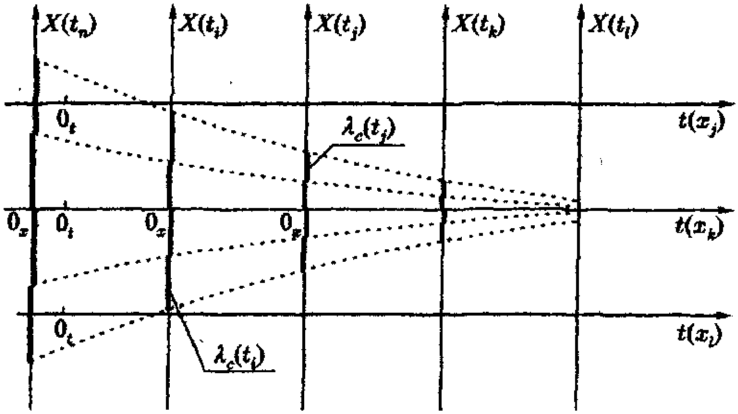


Рис. 1.4. «Пустое» пространство (оно представлено здесь в мелком масштабе), существуя вечно, непрерывно сжимается, оставаясь, тем не менее, бесконечно протяженным. Все моменты времени на t-оси теперь обязаны считаться физически различными (при этом ход времени в каждой точке X-оси остается одинаковым). Видно, что пространство сжимается не к какой-то точке, а — так, как бесконечно протяженный кристалл.

судить приходится по ситуации в пространстве. Поэтому и осуществляется материализация временно́го континуума вложением материальной среды в до того пустое пространство. Теперь остается, по сути дела, повторить сказанное в предыдущем пункте.

Чтобы присутствие хода времени в точке пространства (в каждой его точке) было обусловлено свойствами только самого пространства, потенциал этой точки должен принимать различные значения. В таком случае нужно приписать среде, материализующей пустое (до того) пространство, еще какую-то физическую характеристику. В качестве таковой предлагается величина I, названная ранее потоком потенциала $\left(I \equiv \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)$. Введем теперь понятие ***собственного*** потока I_c:

$$I_c(x) \equiv \sqrt{\langle I^2\rangle_{\Delta t}(x)} = \sqrt{\lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)^2\cdot dt\right\}}, \qquad (1.5)$$

причем по аналогии с выражением (1.4) можно написать:

$$I_c(x) = \frac{\Phi_c}{\tau_c(x)}, \qquad (1.6)$$

где τ_c играет роль временно́й постоянной[22].

[22] Естественно, в выражении (1.6) Φ_c не зависит ни от x, ни от t.

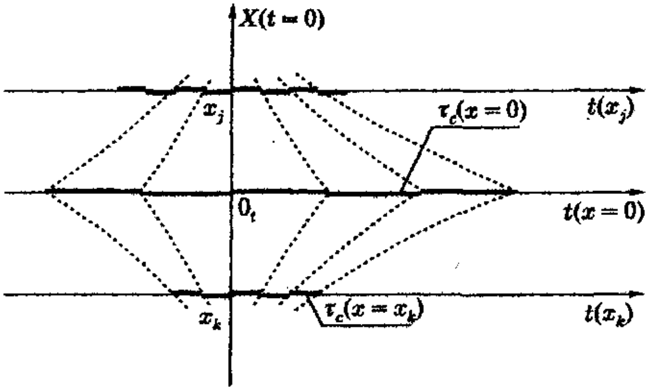


Рис. 1.5. Время присутствует в каждой точке пространства, и в каждой из них свой «собственный ход времени»: $\tau_c = \tau_c(x)$. Это обстоятельство превращает все точки X-оси, расположенные выше нуля отсчета, в физически различные. Это же распространяется и на точки X-оси ниже нуля отсчета. Одномерное и неоднородное пространство, изображенное на рисунке, представлено изотропным (то есть физически идентичны «верхняя» и «нижняя» X-полуоси). Началом отсчета X-координаты выбрана точка X-оси, которой отвечает наибольшее значение величины τ_c.

Естественно, величины Φ_c, I_c характеризуют временнóй континуум (t-ось) в целом, так что ***каждому*** τ_c-промежутку t-оси отвечает ***одно и то же*** значение Φ_c, ***одно и то же*** значение $I_c(x)$. Таким образом, все τ_c-промежутки оказываются физически эквивалентными, хотя внутри τ_c-промежутка имеет место изменение потенциала Φ, и, следовательно, все мгновения внутри промежутка физически различны (там-то ход времени присутствует)[23].

Итак, очевидно, что подобно пространственному, временнóй континуум (t-ось) может быть не только пустым, но и **«пустым»** (лишь в кавычках), и обладать структурой. Далее, располагая двумя характеристиками (Φ_c и, например, τ_c), допустимо предположить, что одна из них (τ_c) зависит от x. Это означает, что ход времени различен, причем — тогда уже в физически различных точках пространства. Например, в одних точках время идет быстрее, чем в других (рис. 1.5).

Таким образом, приписав временнóму континууму (вечности) две качественно различные характеристики (Φ_c и τ_c) и умолчав, что эти

---

[23] Возможно, что нижеследующий пример поможет лучше понять сказанное.

Без сомнения реальный наблюдатель не в состоянии уловить глазами колебания стрелки измерительного прибора, если частота колебаний равна, например, 1 МГц. На этом основании наблюдатель может подумать, что, например, в течение секунды, пока он смотрит на прибор, ничего не происходит — никаких событий — время «остановилось». На самом же деле какая-то величина изменяется очень быстро — колеблется с огромной частотой.

величины являются результатом усреднения, мы получаем возможность считать временнóй континуум «пустым» и рассмотреть три ситуации.

1. *Наряду с «пустым» t-континуумом* (все τ_c-промежутки которого физически эквивалентны) существует столь же «пустой» X-континуум (все λ_c-ячейки которого физически эквивалентны). В этой ситуации такие понятия, как «здесь», «позади», «впереди», физически бессодержательны. Пространство-время является однородным (в мелком масштабе), причем это — его собственная однородность.

2. Постоянная τ_c по-прежнему «пустого» t-континуума принимает различные значения: естественно, — не в разных частях t-оси, а, следовательно, в разных частях X-оси. В этой ситуации уже все λ_c-ячейки необходимо признать физически различными (а не только все точки внутри ячейки). Пространство выглядит непустым. В нем не происходит никаких событий (t-ось «пуста», так что собственный ход времени отсутствует), но оно стало неоднородным[24]: λ_c-ячейки, из которых сложена X-ось, все — различной протяженности[25].

3. Третья ситуация подобна упоминавшейся на с. 23 и также не будет обсуждаться.

Теперь пора подвести итоги.

Если относиться к пространственно-временнóму континууму как к материальному объекту, можно выбирать следующие комбинации:

1) «пустой» пространственный континуум вместе с «пустым» временным;
2) «пустой» пространственный континуум вместе с непустым временным («пустое» пространство, например, монотонно растягивается);
3) непустой пространственный континуум (обладающий собственной неоднородностью, а, возможно, и анизотропией) вместе с «пустым» временным;
4) непустой пространственный континуум вместе с непустым временным.

Если физической реальности соответствует «пустое» пространство и если оно растягивается или сжимается, значит в каждой точке «пустого» пространства присутствует ***собственный*** ход времени. Тогда ни один объект (в том числе и человек-наблюдатель) не может считать себя вне хода времени уже только потому, что пребывает в пространстве. Тем не менее, собственный темп изменения собственной же постоянной (λ_c) «пустого» пространства может оказаться слишком быстрым (чтобы за период

---

[24] Эта собственная неоднородность ничего общего не имеет с неоднородным распределением в пространстве, например, плотности какого-то вещества. Попутно замечу, что в рассматриваемой ситуации трехмерное (реальное) собственно-неоднородное пространство обладало бы собственной изотропностью.

[25] Теперь можно подправить ранее сказанное, а именно — заменить моменты вечности на τ_c-промежутки.

порядка τ_c произошло заметное для наблюдателя изменение численного значения какой-либо физической характеристики наблюдаемой частицы) или, наоборот, слишком медленным (чтобы зарегистрировать происходящие изменения). Тогда-то и потребуются более удобные часы.

Однако человек-наблюдатель вполне может ощущать ход времени, который вовсе не является собственным ходом. Дело в том, что наблюдатель вынужден конструировать адекватные способы описания состояния объектов под принудительной силой реальности. А в любой ***реальной*** ситуации наблюдатель окружен часами, в роли которых могут выступать как объекты природы, чье состояние изменяется, так и продукты интеллектуальной деятельности (например, будильник). Достаточно использовать хотя бы единственный такой объект (который пребывает, разумеется, в том же пространстве, что и наблюдатель), и наблюдатель будет вправе ссылаться на «свой» ход времени, не обращая внимания на ход времени, присущий собственно пространству[26]. Вот в этой ситуации все мгновения вечности (моменты времени) оказываются физически различными ***лишь с точки зрения конкретного наблюдателя***. Таким образом, в реальной ситуации каждый наблюдатель фактически пользуется не только своей системой пространственных координат (своим эталоном длины), но и своим способом отсчета времени (своим эталоном периода). В этом случае необходимо специально выяснять, совпадают ли эталоны длины и эталоны периода у наблюдателей, находящихся в разных состояниях.

§ 1.4. Направленность хода времени

Давайте попробуем выяснить, какой смысл нужно или можно вкладывать в традиционное понятие ***направленности*** хода времени.

С этой целью предположим сначала, что пространство, обладает собственной неоднородностью (стало быть, все его точки различны физически), а временной континуум пуст (собственный ход времени отсутствует). Далее введем понятие ***степени заполнения точки пространства точечной частицей*** — числа́ частиц, присутствующих в точке пространства (либо единица, либо нуль). Теперь введем ход времени, для чего поместим в пространство пока всего один-единственный отличный от него объект — точечную частицу. Чтобы она могла выполнять роль часов, она ***должна двигаться с конечной скоростью***, и тогда степень заполнения хотя бы части точек пространства сможет принимать разные значения. Изменение степени заполнения одной определенной точки и будет свидетельствовать, что в ней присутствует ход времени.

Итак, условимся, что в одномерном неоднородном X-континууме присутствуют: ***одна единственная*** движущаяся точечная частица и тот,

---

[26] Это означает, что наблюдатель игнорирует изменение состояния пространства как целого, если, конечно, таковое имеет место. Собственный же ход времени, конечно, одинаков для всех, пребывающих в пространстве.

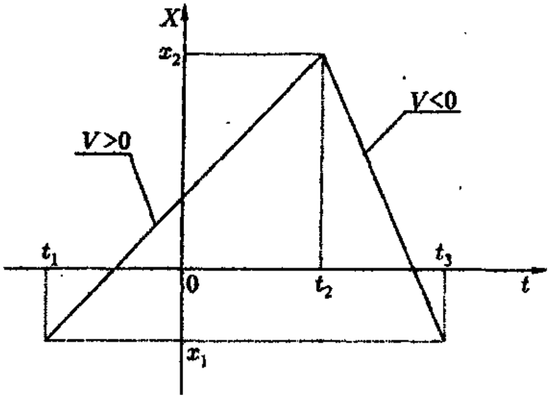


Рис. 1.6. Движение точечной частицы в $\{Xt\}$-континууме.

В момент t_1 частица стартует из точки x_1, а финиширует в точке x_2 в момент t_2. Скорость частицы, усредненная по интервалу пространства $(x_1 \div x_2)$, и промежутку времени $(t_1 \div t_2)$ равна $V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > 0$.

Если частица еще раз стартует — уже из точки x_2 (в момент t_2), а финиширует (еще раз) в точке x_1, ***не меняя скорости,*** то $t(x_1) = t_2 + \frac{x_1 - x_2}{V} = t_2 + [-(t_2 - t_1)] = t_1$.

Если же частица финиширует в точке x_1, но в момент времени t_3 $(> t_2)$, то новая скорость равна $V = \frac{x_1 - x_2}{t_3 - t_2} < 0$.

Как видим, налицо эквивалентность (неразличимость) двух утверждений: частица ***неоднократно*** оказывается в одной и той же точке пространства, ***не меняя направления скорости на противоположное***; частица ***неоднократно*** перемещается ***вперед-назад*** и в пространстве, ***и во времени.***

кто наблюдает за состоянием пространства. Хотелось бы также, чтобы не было никаких сомнений в способности частицы сколько угодно раз менять направление своей скорости в глазах наблюдателя и сколько угодно раз появляться в одной и той же точке пространства.

Пусть частица присутствует в точке с координатой x_1, обладая скоростью V, направленной в положительном направлении X-оси (рис. 1.6). Условимся считать это состояние частицы отвечающим моменту времени t_1. Если частица появляется в точке с координатой x_2, обладая той же самой по величине и направлению скоростью V, будем считать, что наступил момент времени t_2, причем $t_2 > t_1$. Может ли частица вновь оказаться в точке с координатой x_1? Если «да», то наблюдатель справедливо решит, что степень заполнения каждой из упомянутых точек X-оси изменилась дважды (x_1-точки: $1 \to 0 \to 1$; x_2-точки $0 \to 1 \to 0$), и тогда безусловно время в них присутствует. При этом, казалось бы, вполне естественно считать, что *для возврата частицы из одной точки пространства в другую необходимо* ***изменение направления скорости.***

А может ли частица, находившаяся в момент времени t_2 в точке с координатой x_2, оказаться вновь в x_1-точке, ***не изменив направления***

скорости в какой-нибудь точке X-оси? Вот уже для этого частица должна быть «перенесена» из «настоящего» в «прошлое», причем в рамках рассматриваемого предположения иная интерпретация невозможна. Ведь для изменения скорости необходимо действие на частицу некоего стороннего силового фактора. Если же скорость не изменилась, значит частица переместилась из x_2-точки в x_1-точку не иначе, как сверхъестественным способом.

Вот, что означает ***«обратная направленность хода времени»*** (или ***«перенос частицы из настоящего в прошлое»***). Как видно, приходится выбирать между естественным и сверхъестественным.

Но..., во всем вышесказанном нет логических противоречий при одном, не сразу бросающемся в глаза условии: если частица, выполнявшая роль часов присутствовала в пространстве (иначе говоря, существовала) ***именно непрерывно***. Однако, чтобы наблюдатель мог быть в этом уверен, он должен обладать способностью видеть ***сразу весь бесконечно протяженный континуум***. Лишь тогда он может убедиться в том, что, исчезая из одной точки пространства и возникая в другой, частица ни на миг не покидает пространства. В противном случае, — следя только за одной точкой пространства (или конечным их числом) и обнаруживая, что степень заполнения ее колеблется между единицей и нулем, — наблюдатель вправе заподозрить, что частица попросту прекращает и возобновляет свое существование[27]. Но, если это так, то вновь возникает проблема. Следя за одной точкой пространства, наблюдатель не в состоянии установить, та ли это частица возникла в точке наблюдения, что из нее исчезла. Ведь не исключено, что «та» частица исчезла навсегда, а вновь возникла частица «другая», все характеристики константы которой, тем не менее, тождественны таковым «той» частицы[28].

Разумеется, все вышесказанное не имеет никакого отношения к банальной ситуации, когда время идет только в одном направлении («вперед»), а вспять поворачивает какой-то процесс, причем — в полном соответствии с законами природы[29].

§ 1.5. Ответы на вопросы

В самом конце § 1.1 были поставлены три вопроса, на которые, как было сказано, предстояло найти ответы. И, хотя с ответом на третий

---

[27] При этом она может прекратить свое существование в одной точке пространства, а возобновить в другой, отстоящей от первой на любое расстояние.

[28] Если не пытаться объяснять природу возникновения-исчезновения частиц, а ограничиться лишь описанием этого явления, допустимо ввести понятия «бытия» и «небытия» частицы, и тогда последняя возникает из небытия и туда же проваливается.

[29] Например, старение организма сменяется его омоложением или — смешивание двух разных веществ сменяется их разделением. Предлагается здесь не обсуждать, по каким причинам такое могло бы происходить.

вопрос придется повременить (см. Приложение 1), то на два другие ответить уже можно.

Итак, сначала ответ на вопрос: *«В чем тогда состоит эта эквивалентность, если, несмотря на нее, точечная частица, в какой бы точке „пустого" пространства она ни находилась, взаимодействует с этой точкой?»*

Прежде всего следует заметить, что после того, о чем говорилось в предыдущих параграфах, формулировку вопроса нужно изменить. Теперь нужно понять, *как совмещается эквивалентность всех* λ_c-ячеек «пустого» *пространства с тем, что численное значение* λ_c *может быть исчезающе малым, и тогда ячейка стянется в точку, а «пустое» пространство окажется состоящим из физически эквивалентных точек. Но, ведь точечная частица, в какой бы точке пространства она ни находилась, только потому считается взаимодействующей с пространством, что все его точки физически неэквивалентны*[30].

Здесь необходимо вспомнить, что $\lambda_c = \frac{\Phi_c}{\mathbf{E}_c}$, а $\mathbf{E}_c \neq 0$ (именно неравенство $\mathbf{E}_c \neq 0$ отражает материальность пространственного континуума). Но тогда вполне допустимо считать, что потенциал Φ_c сколь угодно мал, а, следовательно, и величина λ_c столь же мала. ***Мала, но не равна нулю.*** А вот протяженность точечной частицы равна нулю точно, и поэтому в любой ситуации частица в данный момент времени может присутствовать только внутри одной (а не многих) из бесконечно большого числа физически эквивалентных ячеек, составляющих пространство. Тем не менее, внутри каждой ячейки все еще остается достаточно много точек[31], и все они физически неэквивалентны.

Теперь легко ответить и на другой вопрос: *«В чем должно состоять взаимодействие, которое непрерывно испытывает частица, пребывающая именно в „пустом" пространстве, если, несмотря на это взаимодействие, частица обоснованно может считаться свободной?»*[32]

Здесь следует иметь в виду, что свободная частица может, как покоиться (вечно) в одной точке пространства, так и вечно двигаться прямолинейно и равномерно. Но в любом случае, если частица — *сво-*

---

[30] Давайте отождествим пространство, например, с гравитационным полем. Обозначим символом $\Phi(x, t)$ значение гравитационного потенциала в произвольной точке пространства в произвольный момент вечности. Если мы признаем точечную частицу также материальным объектом, ей придется приписать гравитационный заряд (тождественно совпадающий с ее инерциальной массой m). Сила взаимодействия частицы с пространством-полем равна $-m \cdot \operatorname{grad} \Phi(x, t)$, причем, согласно ранее сказанному, величина $\operatorname{grad} \Phi(x, t)$ не может быть равна нулю для всех x (ни в какой момент времени) и не может быть равна нулю для всех t (ни в какой точке пространства). Именно эти неравенства и отображают физическую неэквивалентность всех точек пространства: в любой момент времени каждой x-координате (а это — признак лишь математического различия точек) отвечает свое значение потенциала Φ.

[31] Строго говоря, их тоже бесконечно много.

[32] Это — еще одна причина, позволяющая оправдать присвоение пространству эпитет «пустое» (сначала было решено считать материализованное пространство «пустым» на том основании, что в него можно беспрепятственно вложить любые материальные объекты).

бодная, ее скорость, усредненная по сколь угодно большому промежутку времени, обязана совпадать с мгновенной скоростью.

Естественно, скорость частицы, постоянно присутствующей в поле флуктуирующего (в пространстве и во времени) потенциала, не может, в свою очередь, не флуктуировать. Тем не менее, после усреднения по ***огромному*** промежутку времени значение скорости будет таким же, как и при отсутствии флуктуаций [33]. Конечно, усреднив скорость по ***исчезающе короткому*** промежутку времени, мы получаем возможность считать ее мгновенной, но это, казалось бы, не означает избавления от влияния флуктуаций. Однако, если «частота» флуктуаций скорости (вызванных флуктуациями потенциала) [34] неограниченно велика, усреднение по весьма короткому промежутку времени даст тот же результат, что и усреднение по сколь угодно продолжительному. Но тогда отличие мгновенной скорости от средней окажется исчезающе малым. В результате наблюдатель, если он только не вооружен измерительными приборами с исключительно высокой разрешающей способностью, справедливо посчитает частицу, взаимодействующую со столь специфическим континуумом, абсолютно свободной.

§1.6. Наглядная модель «пустого» пространства

Предлагается постулировать, что:

нет ни одной точки бесконечно протяженного пространства, в которой величина $\ddot{E}$ равнялась бы нулю в какой бы то ни было момент времени;

ни в какое мгновение вечности величина I не равна нулю в какой бы то ни было точке пространства.

Можно сказать иначе: нет даже двух точек пространства, мгновенное значение потенциала Φ которых было бы одинаковым в какой бы то ни было момент времени; нет даже двух мгновений вечности, которым отвечало бы одно и то же значение потенциала Φ в какой бы то ни было точке пространства. В подобном пространственно-временном континууме все точки и все мгновения вечности физически различны. Это истинно материальный объект.

Теперь имеет смысл предположить конкретную зависимость $\Phi(\vec{r}, t)$, которая, с одной стороны позволяла бы при необходимости учесть непрерывное и вечное взаимодействие точечной частицы с пространственно-

---

[33] Усреднение по бесконечно большому промежутку времени полностью очищает скорость от флуктуаций.

[34] Хотя, строго говоря, понятие частоты (без кавычек) колебаний неприменимо к флуктуациям — полностью хаотическим колебаниям, — в данном случае это обстоятельство роли не играет.

временным континуумом[35], а, с другой стороны, не препятствовала бы при необходимости считать его пустым.

На рис. 1.7 (а, в) представлена зависимость $\Phi(x)$ в произвольный момент времени t_*. Все значения потенциала от ∞ до $+\infty$ разбросаны вдоль

[35] Такая необходимость возникает при объяснении спина точечной частицы (см. Приложение 1).

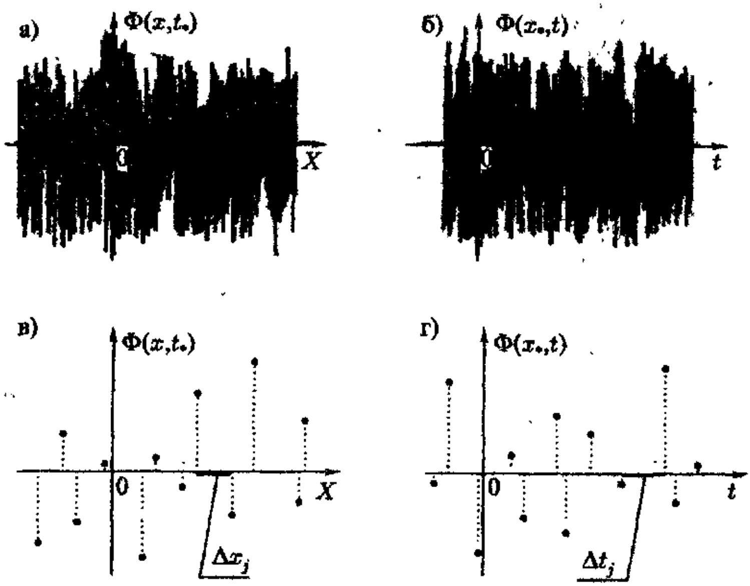


Рис. 1.7. Распределение потенциала в пространстве-времени:
а) и б) — мелкомасштабные изображения;
в) и г) — крупномасштабные чрезвычайно утрированные изображения. Они преследуют цель показать, что колебания потенциала в точке x_* во времени и осцилляции его в момент t_* в пространстве не являются идеально периодическими и кроме того, что потенциалы соседних точек противоположны по знаку. Интервалы Δx_j и промежутки Δt_j — все различны. И, тем не менее, все они исчезающе малы. Кроме того, крупномасштабные изображения призваны показать, что напряженность поля принимает всего два значения ($\pm\infty$), отличающиеся лишь знаком. Аналогично, поток потенциала также принимает всего два значения ($\pm\infty$), отличающиеся лишь знаком.

Какая бы то ни было, корреляция (причинно-следственная связь) между значениями $\Phi(x_*)$, взятыми в разные моменты времени, отсутствует, равно как и корреляция между значениями $\Phi(t_*)$ в разных точках X-оси. Поэтому и не существует уравнения непрерывности $\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} + V_x \cdot \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x} = 0$. Кроме того, поскольку $|I_c| \neq \left|\frac{\partial\Phi_c}{\partial t}\right|$, $|\mathbf{E}_c| \neq \left|\frac{\partial\Phi_c}{\partial x}\right|$, нужно удержаться и от соблазна обратиться к уравнению непрерывности в виде $\frac{\partial\Phi_c}{\partial t} = -V_x \cdot \frac{\partial\Phi_c}{\partial x} \neq 0$ (где V_x могла бы играть роль скорости перетекания собственного потенциала Φ_c из одной точки пространства в другую).

бесконечно протяженной X-оси **хаотически**, причем так, что ни одно из значений не повторяется. Казалось бы, отсюда должен следовать вывод о превращении всех точек X-оси в физически различные. Но...

Обратимся к рис. 1.7 (б, г), на котором представлена зависимость $\Phi(t)$ в произвольной точке x_*. Эта зависимость также является хаотической. Если не знать о распределении потенциала вдоль X-оси в момент t_*, то, глядя на зависимость $\Phi(x_*, t)$, можно было бы сделать вывод о физической различимости всех моментов времени. Но... сопоставление зависимостей $\Phi(x_*, t)$ и $\Phi(x, t_*)$ свидетельствует, что физическая различимость всех точек X-оси имела бы место только, если бы зависимость $\Phi(x, t_*)$ сохранялась вечно. И физическая различимость всех моментов времени имела бы место только, будь зависимость $\Phi(x_*, t)$ одной и той же повсюду (в каждой точке X-оси). (***Следует принять во внимание, что множество значений потенциала*** $\Phi(x)$ ***в произвольный момент времени идентично множеству значений потенциала*** $\Phi(t)$ ***в произвольной точке пространства.***)

Заметим теперь, что пространственные интервалы Δx_j и временные промежутки Δt_j исчезающе малы (из-за того, что хаотическое распределение потенциала имеет место в континууме). А потому бесконечно велико число значений потенциала на сколь угодно малом (но обязательно отличном от нуля) интервале $\widetilde{\Delta x}$, равно как и на в той же степени малом промежутке $\widetilde{\Delta t}$. В свою очередь из-за этого исчезающе мало отличие друг от друга величин:

$$\langle\Phi(x)\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t) = \frac{1}{\widetilde{\Delta t}} \cdot \int\limits_{t-\frac{\widetilde{\Delta t}}{2}}^{t+\frac{\widetilde{\Delta t}}{2}} \Phi(x, t') \cdot dt'$$

и

$$\langle\Phi(x)\rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \Phi(x, t) \cdot dt \right\};$$

$$\langle\Phi(t)\rangle_{\widetilde{\Delta x}}(x) = \frac{1}{\widetilde{\Delta x}} \cdot \int\limits_{x-\frac{\widetilde{\Delta x}}{2}}^{x+\frac{\widetilde{\Delta x}}{2}} \Phi(x', t) \cdot dx'$$

и

$$\langle\Phi(t)\rangle_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} \Phi(x, t) \cdot dx \right\}.$$

А поскольку, по определению хаотичности,

$$\langle\Phi(x)\rangle_{\Delta t\to\infty}=0,\quad \langle\Phi(t)\rangle_{\Delta x\to\infty}=0,$$

получается, что исчезающе малыми должны быть и величины $\langle\Phi(x)\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t)$ и $\langle\Phi(t)\rangle_{\widetilde{\Delta x}}(x)$. Если же учесть еще и малость значений $\widetilde{\Delta t}$ и $\widetilde{\Delta x}$, может сложиться впечатление, что потенциал вообще равен нулю повсюду и всегда.

Однако на самом деле мгновенно-локальное значение потенциала никакой роли не играет, и его можно считать бесконечно малым. Чтобы пространственно-временной континуум справедливо было называть «пустым» (то есть — пустым именно в кавычках), необходимо и достаточно отличие от нуля двух других специфических величин:

- *величины* $\sqrt{\left\langle\left(-\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right)^2\right\rangle_{\widetilde{\Delta x}}}$ *(выступающей в роли значения мгновенной напряженности поля), в которой в качестве точки x выступает любая точка X-оси;*
- *величины* $\sqrt{\left\langle\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)^2\right\rangle_{\widetilde{\Delta t}}}$ *(выступающей в роли значения локального потока потенциала), в которой в качестве момента времени t выступает любая точка t-оси.*

Однако присутствие поля в пространстве окажется совершенно неощутимым, если знак производной $\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}$ осциллирует со столь коротким пространственным периодом, что и для бесконечно малого интервала $\widetilde{\Delta x}$

$$\frac{\left\langle\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right\rangle_{\widetilde{\Delta x}}}{\sqrt{\left\langle\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right)^2\right\rangle_{\widetilde{\Delta x}}}}\to 0\,. \tag{1.7}$$

Аналогично, временной континуум покажется чуть ли не пустым (и, стало быть нет никакого хода времени), если знак производной $\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}$ колеблется со столь большой частотой, что и для бесконечно малого промежутка $\widetilde{\Delta t}$

$$\frac{\left\langle\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right\rangle_{\widetilde{\Delta t}}}{\sqrt{\left\langle\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)^2\right\rangle_{\widetilde{\Delta t}}}}\to 0\,. \tag{1.8}$$

Таким образом, следует достаточно неожиданный вывод. Пространственно-временной континуум оказывается отождествленным со столь специфическим флуктуирующим полем, что в любой физической реальности, в которой что-то происходит — пусть в течение чрезвычайно короткого промежутка времени Δt и в очень узком пространственном интервале Δx, — величины $\widetilde{\Delta t}$ и $\widetilde{\Delta x}$ оказываются еще более ничтожными — настолько, что пространственно-временной континуум можно считать «пустым» в интервале Δx и в промежутке Δt. В подобной физической реальности промежуток $\widetilde{\Delta t}$ совершенно законно играет роль ***момента*** времени, а интервал $\widetilde{\Delta x}$ — роль ***точки*** пространства.

Однако теперь впору повторить тот самый третий вопрос, который был сформулирован в самом конце § 1.1. Что вынуждает нас приписать пространственно-временнóму континууму способность к взаимодействию (иначе говоря, — материальность)? Вот в этой связи хотелось бы обратить внимание читателя на одно обстоятельство.

На рис. 1.7 зависимость потенциала Φ от координаты (в произвольный момент времени) и от времени (в произвольной точке пространства) показана *прерывистой линией* исключительно ради наглядного представления именно очень быстрых и притом хаотичных изменений потенциала. На самом деле можно подобрать и такую ***непрерывную*** зависимость $\Phi(x,t)$, чтобы выражения (1.7) и (1.8) остались справедливыми. Сделанный выше вывод и в этом случае не изменится, но «пустое» пространство (то есть все же материальный объект) приобретет любопытное свойство. Если отождествить величину Φ, например, с электрическим потенциалом, то его хаотические колебания в пространстве свидетельствуют, что оно является ***электронейтральным лишь в среднем*** по некоторому, достаточно малому объему[36]. Следовательно, оно способно поляризоваться, если в нем появится заряженная точечная частица. Вот в этой ситуации уже принципиально невозможно игнорировать электрическое взаимодействие между двумя материальными объектами — электрически заряженной частицей и пространством-полем.

Можно отождествить величину Φ с гравитационным потенциалом, и тогда «пустое» пространство станет сжимаемым. Если в нем появится даже незаряженная частица (масса покоя которой точно равна нулю), она уплотнит пространство в одном месте за счет разрежения его в другом месте. В результате опять-таки возникнет взаимодействие между двумя материальными объектами.

[36] При этом электрический заряд области пространства создается вовсе не частицами, и потому величина его лишь совершенно случайно *может* оказаться кратной значению заряда, например, электрона. Электрический заряд области пространства распределен в нем непрерывно и равен произведению объемной плотности заряда на объем области пространства.

Глава 2

Статистический способ описания состояния точечной частицы

§ 2.1. Предпосылки статистического способа описания состояния объекта

Я не смог предложить каноническое определение понятия ***«состояние материального объекта»*** и потому предлагаю иметь в виду, говоря о состоянии объекта, совокупность всех тех физических характеристик, которые необходимо приписать объекту в конкретной обстановке. Например, слова *«свободная (то есть ни с чем не взаимодействующая) частица* ***находится в состоянии*** *с определенным импульсом, определенной скоростью, определенной массой движения»* и слова *«свободная частица* ***обладает*** *определенным импульсом, определенной скоростью, определенной массой движения»* — это синонимичные заявления. Предпочтение, которое отдано термину ***состояние***, связано именно с вынужденным использованием статистического способа описания... ***состояния*** объекта.

Принципиальная необходимость перехода от классического (попросту говоря, доквантового, то есть — механического) способа описания к квантово-механическому (то есть — статистическому) обусловлена вовсе не спецификой объектов, и расхожее мнение об особых свойствах именно ***микро***частиц является не более чем наивным заблуждением, унаследованным со времен становления квантовой теории [1]. Новый способ описания диктует обстановка, в которой пребывает объект [2]. Представьте

---

[1] Любопытно, к какой категории отнесли бы приверженцы подобной точки зрения такой объект, как, например, свободный бесконечно протяженный материальный континуум (электромагнитное поле), который они же наделяют и чисто корпускулярными свойствами.

[2] Строго говоря, название ***«квантовая механика»*** вряд ли можно признать удачным. Оно всего лишь отражает то удивление, с которым научная общественность в самом начале XX века отнеслась к необходимости признать, что в некоторых случаях энергия может изменяться не на сколь угодно малую величину, а именно на ограниченную снизу. Отсюда и возникло представление о дискретности «всего и вся», якобы присущей Природе. Разумеется, по мере того, как ранее загадочные явления природы стали описываться адекватным образом и получать объяснения, пришло понимание того, что дискретность — вовсе не повсеместное явление.

Название «статистическая механика» гораздо лучше отражает суть дела, чем названия «квантовая механика» или «волновая механика». Кстати, последнее название было себе, что нужно ответить на вопрос, в ***какой*** из ***множеств физически идентичных*** (неразличимых) ячеек пространства находится в данный момент точечная частица. Единственно разумный ответ — ***в любой с равной вероятностью.*** Вдумайтесь, что значит *«в какой?»*, если одна ячейка отличается от другой номером, который ей произвольно присвоен и который, разумеется, не является физической характеристикой ячейки.

Еще один пример. Давайте взглянем на электрон, движущийся в сферически симметричном электростатическом поле. Для ***сжавшегося в точку*** наблюдателя (расположившегося в центре сферы) ***физически*** различны только точки пространства, находящиеся на разном удалении. Угол зрения подобного наблюдателя равен 4π стерадиан, и поэтому ответ на вопрос, ***в какой точке поверхности сферы находится электрон в данный момент времени***, может быть лишь таким: с равной вероятностью в любой.

Теперь следует обратить внимание еще на одно обстоятельство.

В рамках классической механики объект (например, частица) выступает в роли носителя ***всех*** своих характеристик в том пространстве (в пустом или заполненном силовым полем), в котором присутствует. Естественно, что тогда совершенно бессмысленно представлять себе, существование множества значений, например, импульса ***отдельно*** от существования частицы.

Статистический способ описания основан на представлении о том, что частица является носителем ***не всех*** своих характеристик, а лишь тех, которые являются признаками качественного отличия данной разновидности частиц от всех прочих разновидностей частиц и объектов. Другие характеристики принято относить к величинам «наблюдаемым» (то есть — величинам, способным изменяться, «приспосабливаясь» к окружающей обстановке), ***которые в рамках статистического способа описания должны считаться существующими независимо от существования объекта.*** Но, потеряв объединяющего их носителя, они превращаются в независящие еще и друг от друга. Каждая характеристика теперь образует свое «пространство» (свое множество) значений. Вполне разумно ассоциировать каждое такое значение с «ящиком» — с состоянием, которое частица может собою заполнить (навечно или на некоторое время), а может и не заполнить.

Отличие характеристики, способной принимать только одно значение, от характеристики, способной принимать множество значений, реализуется в эксперименте, который требует обязательного многократного воспроизведения экспериментальной ситуации (это нужно вовсе не для устранения случайной погрешности измерения[3)]). Только так можно различить два физически содержательных понятия: ***«одно»*** и ***«множество»***.

обусловлено все тем же корпускулярно-волновым дуализмом, согласно которому частица должна быть иногда уподоблена волне, то есть — протяженному объекту.

[3)] Случайная погрешность измерения — это такое отклонение показаний измерительного прибора от истинного значения (признаваемого объективно существующим), которое вызвано флуктуациями параметров экспериментальной обстановки.

Особенностью статистического способа описания (в отличие от механического) является возможность учесть три фактора, составляющих вместе или порознь специфику экспериментальной ситуации:

1. Физическую неразличимость как точек пустого бесконечно протяженного пространства, так и мгновений вечности.
2. Физическую неразличимость частиц, которые образуют коллектив, состоящий из множества частиц.
3. Абсолютную хаотичность изменения в пространстве и во времени параметров поля, с которым вынуждена взаимодействовать частица, если она вынуждена пребывать в таком поле.

§ 2.2. Традиционные представления о среднем значении какой-либо величины

2.2.1. Содержательность понятия «среднего значения»

На первый взгляд содержательность такого понятия, как *«среднее значение некоторой величины»* — величины, могущей принимать много разных значений, полностью определяется содержательностью тех понятий, с помощью которых и образуется конструкция, названная *«средним значением величины»*. Увы, это не всегда так.

Вот, например, понятие о средней урожайности зерновых (СУЗ). Пусть эта самая СУЗ $= 1\,\frac{\text{тонна}}{\text{гектар}}$. Но в чем ее смысл? Иначе говоря, для чего ее можно использовать? Ответ прост. Если Вас интересует, сколько тонн зерна (Q) будет собрано за текущий сельхозгод во всей нашей огромной стране с различным плодородием сельхозугодий, то достаточно знать, чему равна площадь (S) всех сельхозугодий, занятая зерновыми культурами, и чему равна СУЗ. Зная эти две величины, Вы найдете, что $Q = (\text{СУЗ}) \cdot S$.

Разумеется, сама величина СУЗ есть не что иное, как СУЗ $= \frac{Q}{S} = \frac{\sum_{i=1}^{i=I} q_i}{\sum_{i=1}^{i=I} s_i}$, где q_i — вес зерна, собранный с i-й площади, а I — количество таких площадей в стране. Поэтому вполне справедлив вопрос: если нас интересует урожай Q, то почему бы не подсчитать его сразу — по формуле $Q = \sum_{i=1}^{i=I} q_i$? Зачем обращаться к промежуточной — как будто излишней — величине? Вот одно из возможных объяснений. Урожай даже еще не созрел, но величина СУЗ уже рассчитана весьма опытными теоретиками сельского хозяйства исходя из прогноза погодных условий на весну, лето, осень, исходя из ресурсов удобрений, числа работников, занятых в производстве зерна, и т. п. Тогда, вычислив с помощью СУЗ величину Q, уже можно планировать потребное для уборки урожая количество зерноуборочной техники, машин и железнодорожных вагонов для перевозки зерна, и т. п.

Итак, мы уверены, что хорошо понимаем содержательность понятия СУЗ, поскольку представляем, для чего эту самую СУЗ можно использовать.

Но вот — другой пример: *«средняя температура по многопрофильной больнице»*.

Сложим температуры (T) всех пациентов (как тех, кому оказывается в этот день медицинская помощь, так и подготовленных к выписке, равно как и направляемых в морг), всех сотрудников больницы, всех посетителей и поделим полученное число градусов на число (N) всех вышеперечисленных граждан. В результате действительно приходим к средней температуре, определяемой выражением $\langle T\rangle_N = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} T_i}{N}$.

Но что выражает величина $\langle T\rangle_N$, которая оказалась, допустим, равной $+36{,}6^\circ$ С. Для каких целей можно использовать установленный факт? Я думаю, что понятие *«средней температуры по больнице»* лишено медицинской содержательности, хотя обладает содержательностью математической (выражением для $\langle T\rangle_N$).

2.2.2. Простой пример

Обратимся к понятию среднего значения такой физической величины, которая может принимать разные значения. На всякий случай сначала целесообразно выяснить, что означают понятия «среднего значения» и «разных значений». С этой целью возьмем шестигранник (кубик), напишем на его гранях цифры от 1 до 6 и будем подбрасывать его над столом, следя за тем, какая грань (все они теперь должны считаться *разными*) окажется прилегающей к поверхности стола. Таким образом, эта грань есть объект наблюдений, обладающий характеристикой (номером), которая может менять свое значение. Очевидно, что номер (i) этой грани будет от броска к броску (от случая к случаю) принимать разные значения ($i = 1$; $i = 2$ и т. п.). Такая хорошо известная величина, как «вероятность (W_i) того, что i принимает определенное значение», есть отношение числа (N_i) именно этих случаев падения кубика на стол к общему числу (N) падений: $W_i = \frac{N_i}{N}$.

Естественно: $\sum_{i=1}^{i=6} W_i = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{N_i}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{i=6} N_i = \frac{N}{N} = 1$.

На всякий случай замечу, что получившая физически содержательное определение величина W_i ***по этому самому определению не может зависеть ни от номера броска, ни от числа бросков кубика.*** Можно не сомневаться: ***вероятность того, что любое по счету падение кубика приводит к определенному результату*** (например, $i = 4$), ***одна и та же*** — равна $\frac{1}{6}$. (Далее будет показано, от чего величина W_i может зависеть.)

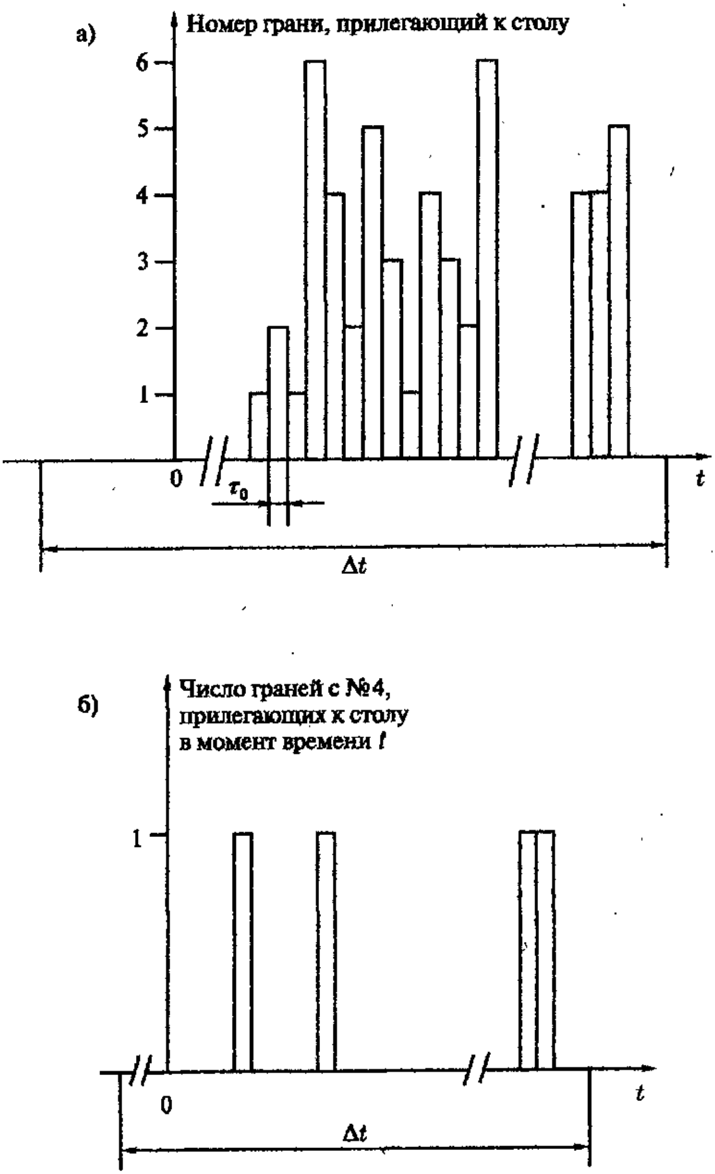


Рис. 2.1. а) Хаотические колебания номера грани во времени;
б) Хаотические колебания количества граней с номером 4 во времени.

А теперь подумаем, что означает *«от броска к броску»* или *«от случая к случаю»*. Ведь, по сути дела, мы фиксируем последовательность моментов времени и видим, что в разные, следующие друг за другом моменты, номер грани, прилегающей к столу, принимает разные значения.

Ради удобства договоримся, что для распознавания номера наблюдателю требуется пусть чрезвычайно малое, но всякий раз одинаковое и не равное нулю время τ_0. Давайте следить только за поверхностью стола и считать, что ***какая-то*** грань кубика к ней прилегает постоянно, причем вполне разумно считать, что в течение очень короткого промежутка времени τ_0 грань с ***определенным*** номером i на поверхности присутствует ***непрерывно***, затем мгновенно исчезает, но столь же мгновенно возникает грань опять-таки с определенным номером (либо тем же самым, либо другим). Центр τ_0-промежутка назовем моментом времени и будем говорить, что в разные моменты времени на поверхности стола возникает (исчезает) грань с определенным номером. Зависимость номера грани, прилегающей к столу, от времени представлена на рис. 2.1,а. На рис. 2.1,б представлена зависимость от времени количества прилегающих к столу граней с ***определенным*** номером. А так как, по условию, в течение промежутка времени τ_0 прилегать может только одна грань, в качестве примера на рис. 2.1,б по оси ординат отложено количество граней с номером 4. Число тех моментов времени, в которые значение номера оказывается равным i, и есть ранее упоминавшееся число N_i.

Вполне разумно назвать величину $N_i \cdot \tau_0$ $(\equiv \tau_i)$ промежутком времени, в течение которого кубик, хотя и не непрерывно, находится в состоянии *«i-гранью на поверхности стола»*. А вот величина

$$N \cdot \tau_0 \left(= \Delta t = \left(\sum_i N_i \cdot \tau_0\right) = \left(\sum_i \tau_i\right) > \tau_i\right)$$

есть промежуток времени, в течение которого кубик именно ***непрерывно*** находится в состоянии *«прилегая к столу **какой-нибудь** гранью»* (в ином состоянии кубик находиться просто не может, ибо, по договоренности, он ***непрерывно*** лежит на столе). Теперь $W_i = \frac{N_i}{N} = \frac{\tau_i}{\Delta t}$, а величина $i \cdot \frac{\tau_i}{\Delta t} \equiv i \cdot W_i = \langle i \rangle_{\Delta t}$ — это усредненное по времени *«значение номера»* (поскольку номер принимает значение: то нуль, то i)[4].

Глядя на рис. 2.1,б, можно написать и так: $\langle i \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} i(t) \cdot dt$.

Таким образом, предложенное определение усредненного по времени значения величины i совпадает с чисто математическим определением

[4] Это — математически содержательное понятие, хотя реально не существует грани с таким номером. В этой связи следует принять к сведению, что использованию такого понятия, как СУЗ, не препятствует вполне возможное отсутствие в стране такого гектара, урожай с которого оказался бы численно равным именно СУЗ.

среднего значения функции $f(t)$ в промежутке Δt:

$$\langle f\rangle_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} f(t')\cdot dt'$$

*(в этом выражении $\langle f\rangle_{\Delta t}(t)$ есть значение величины f, усредненной по числу всех значений аргумента t: как если бы **каждому** t из промежутка Δt отвечало **одно и то же** значение величины f, равное $\langle f\rangle_{\Delta t}(t)$ [5]).*

А теперь обратимся к такой популярной конструкции, как $\sum\limits_{i=1}^{i=6} W_i\cdot i$. Чем является эта величина? Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{i=6} W_i\cdot i = \sum_{i=1}^{i=6}\frac{\tau_i}{\Delta t}\cdot i = \sum_{i=1}^{i=6}\langle i\rangle_{\Delta t},$$

то есть — это просто-напросто сумма усредненных по времени значений номеров всех шести граней кубика. Но давайте введем обозначение $\sum\limits_{i=1}^{i=6} W_i\cdot i \equiv \mathrm{J}$, подчеркивая, тем самым, что J все-таки есть некая характеристика кубика. Тогда истолковать выражение $\mathrm{J} = \sum\limits_{i=1}^{i=6}\langle i\rangle_{\Delta t}$ можно только так: в ситуации падения кубика значение J-величины (некоторое число) в любой момент времени распределено по всем шести ***разным*** граням, хотя и неодинаковыми частями (долями) — так, как показано на рис. 2.2.

Справедливо считая, что в случае с кубиком $W_i = \frac{1}{6}$ для любого i, находим, что в ситуации свободного падения кубика упоминавшееся значение J-величины равно: $\mathrm{J} = \sum\limits_{i=1}^{i=6}\langle i\rangle_{\Delta t} = 3{,}5$. При этом число 3,5 распределено по граням кубика неодинаковыми частями (долями). Например, на грань с номером 1 приходится $\frac{1}{21}$ часть величины J; на грань с номером 2 приходится $\frac{2}{21}$ части величины J, и т. п. (рис. 2.2). Естественно, что сумма всех частей одной величины равна единице.

На всякий случай подчеркну, что использование такого понятия, как «значение, усредненное по времени» ($\langle i\rangle_{\Delta t}$), ***автоматически*** предполагает, что использующий J-величину ***обязуется*** считать ее ***неизменной во времени***.

Давайте теперь предположим, что кубик всякий раз в процессе падения испытывает некое стороннее воздействие, в результате чего, например, $\frac{\tau_1}{\Delta t} = \frac{1}{5}$; $\frac{\tau_3}{\Delta t} = \frac{1}{5}$; $\frac{\tau_2}{\Delta t} = \frac{\tau_4}{\Delta t} = \frac{\tau_5}{\Delta t} = \frac{\tau_6}{\Delta t} = \frac{3}{20}$. Тогда

$$\mathrm{J} = 1\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{20}\cdot(2+4+5+6) = 3{,}35 < 3{,}5.$$

---

[5] Символ $\langle f\rangle_{\Delta t}(t)$ призван отобразить возможную зависимость среднего значения от момента времени t — центра промежутка Δt. Ведь промежуток времени конечной продолжительности — это всего лишь «мгновение» вечности, и этот промежуток можно перемещать вдоль t-оси.

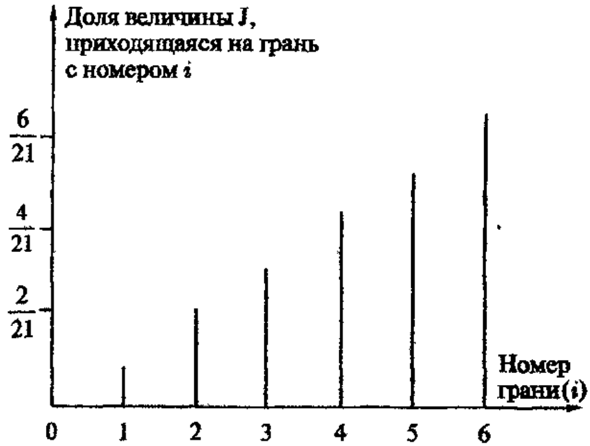


Рис. 2.2. Стационарное распределение J-величины по граням кубика.

А если $\frac{r_4}{\Delta t} = \frac{r_6}{\Delta t} = \frac{1}{5}$; $\frac{r_1}{\Delta t} = \frac{r_2}{\Delta t} = \frac{r_3}{\Delta t} = \frac{r_5}{\Delta t} = \frac{3}{20}$, то J = 3,65 > 3,5.

Как видим, J-характеристика кубика (все еще не имеющая названия) относится к числу тех, способных изменяться, величин, которые принято называть ***«динамическими наблюдаемыми»***. С их помощью описывают ***состояние*** объекта, которое, естественно, полностью определяется ситуацией, в которой он находится. Однако кубик обладает и другой характеристикой, относящейся к числу тех, которые удостоверяют ***себетождественность*** объекта в любой ситуации. С помощью подобных характеристик мы в любой ситуации отличаем объект, принадлежащий «нашей разновидности», от объекта любой другой разновидности. Характеристика-константа кубика — это число его граней. Но есть и еще одна подобная характеристика — значение номера грани, усредненное по числу (I) граней. Обозначим эту величину символом $\langle i \rangle_I$. Очевидно, что $\langle i \rangle_I = \frac{\sum_{i=1}^{i=6} i}{6} = 3{,}5$ в любой ситуации, по определению.

Итак, величины $\langle i \rangle_I$ (характеристика объекта, имеющая самостоятельное название) и J (не имеющая самостоятельного названия) — это ***разные*** характеристики, несмотря на то, что их численные значения могут совпадать.

Теперь хотелось бы обратить внимание читателя на одно важное обстоятельство.

Представим величину J в виде $J = \sum_{i=1}^{i=6} i \cdot W_i$, а величину $\langle i \rangle_I$ в виде $\langle i \rangle_I = \sum_{i=1}^{i=I} i \cdot w_i$ (где, конечно же, $w_i = \frac{1}{6}$, $\sum_{i=1}^{i=I=6} w_i = 1$). Безусловно, между величинами J и $\langle i \rangle_I$ имеет место внешнее сходство. Не возникает ли тогда желания назвать величину w_i вероятностью? Но, если возникает, попробуйте выразиться не неряшливо, а аккуратно: *«w_i есть вероятность того, что...»*.

А, в самом деле, чего ***того***?

Итак, — вывод: имея дело с выражением вида $\langle B\rangle = \sum\limits_k W_k \cdot B_k$ [6] (где W_k лишь ***названа*** вероятностью причем, неизвестно чего), до тех пор невозможно сказать, что именно представляют собой величина $\langle B\rangle$, пока не дано физически содержательного определения вероятности W_k и, тем самым, не стало ясно, ***по чему именно*** выполнено усреднение.

Теперь подведем некоторые итоги.

Следует иметь в виду, что вероятность выпадения грани с определенным номером (например, № 4) существует как содержательное понятие только до того, как кубик окажется на столе [7]. Причем, пока кубик, кувыркаясь в воздухе, еще только падает, упомянутая вероятность, подобно любой характеристике кубика (форме, объему, размерам, массе, импульсу, и т. п.), движется к столу вместе с кубиком (то есть — с той же скоростью, не отрываясь). Естественно, вероятность, как и кувыркающийся над столом кубик, присутствует в каждой «точке» пространства (в объеме, занятом кубиком, и на траектории его движения) и существует в каждый момент времени. После соприкосновения с поверхностью стола *«вероятность того, что кубик ляжет гранью № 4 вниз»* изменится с $\frac{1}{6}$ до 1. Иначе говоря, «вероятность» мгновенно исчезнет, а «достоверность» столь же мгновенно возникнет.

Не так уж трудно представить себе, что всякий раз во время перемещения к столу кувыркающегося в воздухе кубика, на него может быть оказано определенное воздействие, из-за чего вполне допустимо считать, что вероятности выпадения, например, *«гранью № 4 вниз»* и *«гранью № 6 вниз»* возрастают по мере приближения к поверхности стола, а вероятности выпадения «каждой из остальных граней вниз» убывают. В такой ситуации к моменту перед самым ударом о стол две из вероятностей могут стать равными $\frac{1}{5}$, а другие — $\frac{3}{20}$.

В заключение — один мысленный эксперимент. Представим себе, что на наш стол свалился откуда-то сверху предмет, в котором мы заподозрили многогранник. Подозрение вызвал тот факт, что предмет опирался на плоскую поверхность стола плоской же гранью, на которой был выгравирован номер 137. Поставим себе целью установить, сколько граней у свалившегося на нас предмета. Это число, заметим, является одной из характеристик-констант, которыми предмет изучения отличается прежде всего от стола, обладающего ***одной*** «гранью» [8].

---

[6] Символом B обозначена произвольная физическая характеристика.

[7] «Вероятность наступления события» допустимо считать ***логически содержательным*** понятием, пока само событие еще не наступило.

[8] ***Наш*** стол обладает полубесконечной толщиной и неограниченной протяженностью в плоскости. То есть наш стол — это «одногранник».

Чтобы добиться поставленной цели, нужно подбросить многогранник неограниченно большое число раз и подсчитать, сколько раз грань с одним и тем же номером прилегала к поверхности стола. Допустим, что масса предмета распределена внутри него столь хитрым образом, что остойчивость его совершенно одинакова, какой бы формы гранью он ни прилегал к столу. Убедившись в этом и подсчитав, что в 492 480 случаях падения на стол многогранник прилегал к поверхности стола гранями с разными номерами по 760 раз каждой, можно утверждать, что изучаемый предмет 648-гранник. Теперь можно сказать, что после ***одного*** броска наш предмет окажется на поверхности стола ***«любой гранью вниз»*** с ***одинаковой*** вероятностью (равной $\frac{1}{648}$).

А теперь попробуем описать процесс ***перемещения*** (вдоль нормали к поверхности стола) вероятности того, что многогранник, кувыркающийся пока что в воздухе, ляжет на поверхность стола «определенной гранью вниз». Проблема, которая в этом случае возникает, связана:

во-первых, с использованием понятия «вероятность того, что...»;

во-вторых, с тем, что через бесконечно большое число точек нормали к плоскости стола можно провести бесконечно много плоскостей, параллельных плоскости стола («виртуальных» столов)[9].

Принимая во внимание сказанное, следует считать, что в любой момент времени еще не упавший предмет лежит на плоскости («воображаемой») с равной вероятностью *«любой гранью вниз»*[10]. Эту — точную — формулировку можно, конечно, заменить эмоциональной: сказать, что многогранник, пребывая в состоянии падения, ***«лежит», причем — сразу всеми гранями «вверх»*** (***или «вниз»***). Тем не менее сказанное вовсе не означает, что падающий многогранник — компактное трехмерное тело — и в самом деле развернут одновременно всеми 648 гранями «вверх» (или «вниз»)[11]. Кстати, предполагается, что длина пути, пройденного многогранником в падении, столь велика, а его размеры столь малы, что каждая грань успеет много раз побывать в положении «вниз» на «виртуальном» столе.

Как видим, статистический способ описания, состояния (или поведения) объекта навязан тем, что наблюдаемая и измеряемая величина

---

[9] Понятие «одна грань многогранника» является содержательным только вместе с понятием плоскости (стола).

[10] Можно сказать, что он действительно лежит в любой момент падения, но — на воображаемой («виртуальной») плоскости, параллельной плоскости стола.

[11] Следует обратить внимание на неэквивалентность двух часто встречающихся утверждений: «точечная частица присутствует с одинаковой вероятностью **в каждой из множества** точек пространственного интервала (например, большой протяженности) в произвольный момент времени (существования частицы)» и «точечная частица присутствует **сразу** (*одновременно*) *во всех точках интервала*». Совершенно абсурдно уподоблять точечную частицу протяженному телу, которое и на самом деле присутствует сразу (одновременно) во многих точках.

(номер грани, прилегающей к столу) обладает множеством значений. Естественно, компактное трехмерное тело, занимающее ограниченный сверху объем пространства, остается таковым в любой момент времени падения, и в любой момент ***одна*** грань обращена к плоскости, параллельной плоскости стола, но — одна из множества ***физически абсолютно идентичных.*** Вопрос же, «какая именно» предполагает отличие, но ***нефизическое*** — по номеру. А выявляет и отображает эту «нефизичность» как раз утверждение о«***равной*** (в отсутствие возмущающего фактора в процессе падения многогранника) ***вероятности того, что...***»

2.2.3. Заполнение ящика шариком и усреднение по времени

Эксперимент состоит в забрасывании шарика в ящик.

Предположим, что в любой момент времени (t) в ящике может находиться либо один шарик, либо ни одного. Сказанное можно выразить и другими словами: состояние ящика меняется во времени следующим образом: часть времени из промежутка времени Δt ящик заполнен (шариком), часть времени ящик пуст. Тогда мгновенное число шариков в ящике — обозначим его символом $\widetilde{n}(t)$ — равно: $\widetilde{n}(t) \doteq \begin{cases} \text{либо} & 1, \\ \text{либо} & 0. \end{cases}$

Назовем ***средним по времени*** числом шариков в ящике величину

$$\langle\widetilde{n}\rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(t) \cdot dt \right\} \equiv \widetilde{N}. \tag{2.1}$$

Как уже говорилось, определение этой величины совпадает с общепринятым в математике определением среднего значения функции ($n(t)$) в промежутке Δt. Вот теперь, если в ответ на вопрос *«какова вероятность того, что в произвольный момент времени t из промежутка Δt в ящике находится шарик?»* сказать: *«с вероятностью, равной $\widetilde{N}$»*, *это будет означать признание* **«среднего по времени числа шариков в ящике»** *и* **«вероятности того, что в любой момент времени в ящике находится шарик»** ***эквивалентными*** (***синонимичными***) формулировками. Далее термин «среднее по времени число шариков в ящике» заменим термином «стационарная степень заполнения ящика»[12].

---

[12] Читателю, знакомому с основами термодинамики и статистической физики, должно быть известно, что если речь идет о коллективе бесконечно большого числа точечных частиц, находящемся при температуре T и обладающем химпотенциалом E_Φ (он же — уровень Ферми), то стационарная степень заполнения одного определенного состояния («ящика») с энергией E есть $\widetilde{N}(E) \equiv \langle\widetilde{n}(E)\rangle_{\Delta t=\infty} = \left(1 + e^{\frac{E-E_\Phi}{k_B T}}\right)^{-1}$, где k_B — постоянная Больцмана. Из формулы следует, что $0 \leqslant \langle\widetilde{n}(E)\rangle_{\Delta t=\infty} \leqslant 1$. Следовательно величина $\widetilde{n}(E, t)$ может принимать только два значения: 0 и 1, что и отражает «запрет Паули» находиться в одном состоянии даже двум точечным частицам, идентичным по всем своим характеристикам-константам.

Следует обратить особое внимание на то, что «вероятность» обрела статус физически содержательного понятия. И снова подчеркну, что ***использование*** этого понятия обязывает считать величину $\widetilde{N}$ уже ***неизменной во времени*** в промежутке Δt.

2.2.4. Усреднение по коллективу частиц

Выделим из коллектива n частиц группу численностью n_i (i-ю группу) и допустим, что каждая из n_i частиц обладает энергией, равной E_i. Назовем ***средним по коллективу*** значением энергии, приходящимся на одну (каждую) частицу коллектива, величину

$$\langle E\rangle_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=I} E_i \cdot n_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=I} n_i}, \qquad (2.2,а)$$

где I — число групп и, разумеется, $\sum\limits_{i=1}^{i=I} n_i = n$.

Если ***назвать*** вероятностью того, что энергия частицы может принимать значение E_i, величину $\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=I} n_i} = \frac{n_i}{n} \equiv W_i$ (при этом $\sum\limits_{i=1}^{i=I} W_i \equiv 1$), то

$$\langle E\rangle_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=I} E_i \cdot n_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=I} n_i} = \sum_{i=1}^{i=I} E_i \cdot \left(\frac{n_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=I} n_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=I} E_i \cdot W_i \text{ [13]}. \qquad (2.2,б)$$

Конечно, выражение (2.2,б) — это просто иная запись выражения (2.2,а).

Если потребуется заменить суммирование интегрированием, придется сначала ввести новую величину — *число частиц, приходящееся на единичный интервал E-оси* (*на* 1 *эВ*). Обозначив это число символом G_E, определим его выражением $G_E = \frac{dn}{dE}$ (причем вполне возможно, что $G_E = G_E(E)$, и пример зависимости представлен на рис. 2.3). Теперь $dn\ (= G_E \cdot dE)$ — это число частиц в группе, в которой каждая частица обладает одинаковой энергией, равной E. Так мы приходим к выражению

$$\langle E\rangle_n = \frac{\int\limits_{\text{по всем } E} E \cdot (G_E \cdot dE)}{\int\limits_{\text{по всем } E} G_E \cdot dE} = \frac{1}{n} \cdot \int\limits_{\text{по всем } E} E \cdot (G_E \cdot dE). \qquad (2.3)$$

[13] Попробуйте догадаться, по чему именно усреднена энергия, если перед Вашими глазами только конструкция $\sum\limits_{i=1}^{i=I} E_i \cdot W_i$, а известно только то, что $\sum\limits_{i=1}^{i=I} W_i = 1$.

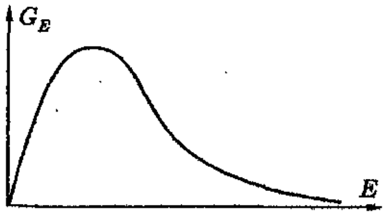


Рис. 2.3. Пример зависимости величины G_E от энергии E.

Обычно: $G_E = \dfrac{\text{число разных состояний с одинаковой энергией, присутствующих в объеме } v}{\text{единичный интервал } E\text{-оси}} \cdot \widetilde{N}(E)$, где $\widetilde{N}(E)$ — среднее по времени число частиц, присутствующих в одном состоянии с энергией E.

В заключение еще раз напомню, что физическая содержательность понятия о среднем по коллективу значении энергии предполагает признание каждой в отдельности частицы коллектива обладающей энергией, равной $\langle E\rangle_n$. Для определенных целей вполне допустимо использовать подобное представление, поскольку при этом остается справедливым равенство $\langle E\rangle_n + \langle E\rangle_n + \langle E\rangle_n + \ldots = \langle E\rangle_n \cdot n = \sum_{i=1}^{i=I} E_i \cdot n_i$. Но, вот — вопрос, не оказывается ли величина $\langle E\rangle_n$ еще и усредненной по времени? А все зависит от того, чем именно является величина n_i (или $\frac{dn}{dE}$). Если n_i есть ***среднее по времени*** число частиц, принадлежащих группировке, которой отвечает определенное значение энергии E_i, то и величина $\langle E\rangle_n$ оказывается автоматически еще и усредненной по времени[14)].

§ 2.3. О средних значениях характеристик точечной частицы

2.3.1. Предварительные замечания

Ради определенности речь пойдет об одной точечной частице, вечно пребывающей в пространстве, которое, простоты ради, будем считать одномерным и которое отождествим с бесконечно протяженной X-осью. Разделим всю эту ось на ячейки одинаковой длины δx (рис. 2.4). При необходимости длину δx можно будет считать бесконечно малой ($\delta x \to dx$). Допустим, что частица — объект наблюдений — присутствует в определенной ячейке (координата центра которой равна x_i) не непрерывно. На рис. 2.5 представлен пример зависимости числа частиц, присутствующих в i-й ячейке, от момента времени t.

14) Естественно, тогда считается, что число частиц в группировке (n_i) флуктуирует во времени, почему и приходится вводить понятие о среднем по времени числе частиц.

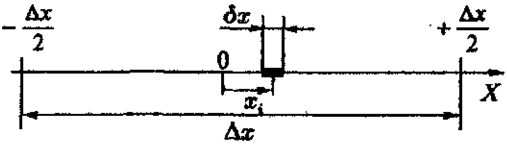


Рис. 2.4. Ячейки длиной δx каждая равномерно распределены вдоль всей X-оси. Центр интервала протяженностью Δx находится в точке 0 — начале отсчета X-координат центров ячеек.

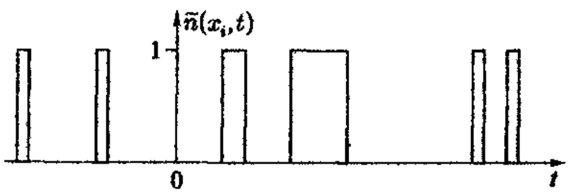


Рис. 2.5. Пример зависимости числа частиц в i-й пространственной ячейке (***мгновенной степени заполнения ячейки***) от момента времени. Начало отсчета времени можно связать с каким-либо событием.

Согласно математическому определению среднего значения функции, конструкция

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\tilde{n}\,(x_i,t)\cdot dt$$

есть среднее по времени значение мгновенного числа частиц, присутствующих в i-й ячейке X-оси.

Величине $\tilde{n}\,(x_i,t)$ можно дать и другое название: ***мгновенная степень заполнения i-й ячейки.*** Тогда величину

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\tilde{n}\,(x_i,t)\cdot dt\right\}=\langle\tilde{n}\,(x_i)\rangle_{\Delta t}\equiv\tilde{N}\,(x_i)$$

следует считать и называть ***стационарной*** степенью заполнения одной определенной — i-й ячейки. Разумеется, если частица присутствует в i-й ячейке ***не*** непрерывно, а лишь время от времени, то $0<\tilde{N}\,(x_i)<1$. Но, поскольку частица, по условию, существует вечно, она в любой момент времени в какой-то из ячеек X-оси, конечно, присутствует. Поэтому

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\tilde{N}\,(x_i)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left[\lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\tilde{n}\,(x_i,t)\cdot dt\right\}\right]=$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\left[\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\widetilde{n}\,(x_i,t)\right]\cdot dt\right\} = \lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} 1\cdot dt\right\} = 1.$$

Далее можно образовать понятие стационарной степени заполнения, усредненной еще и по *числу* ячеек (или — что то же самое — по числу их центров; или — что то же самое — по числу всех X-координат, умещающихся на отрезке длиной Δx, расположенном на X-оси; или — что то же самое — ***по пространству***):

$$\langle\langle\widetilde{n}\rangle_{\Delta t}\rangle_{\Delta x} = \langle\widetilde{N}\rangle_{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\delta x}\right)}\cdot\sum_{i=-\frac{\Delta x}{2\delta x}}^{i=+\frac{\Delta x}{2\delta x}}\widetilde{N}\,(x_i) = \frac{\delta x}{\Delta x}\cdot\sum_{i=-\frac{\Delta x}{2\delta x}}^{i=+\frac{\Delta x}{2\delta x}}\widetilde{N}\,(x_i) = \frac{\delta x}{\Delta x}.$$

Определенную таким образом величину $\langle\widetilde{N}\rangle_{\Delta x}$ уже необходимо считать стационарной степенью заполнения *любой* ячейки (то есть — ***одинаковой*** для любой ячейки). Если протяженность интервала Δx устремить к ∞, то, разумеется, $\langle\widetilde{N}\rangle_{\Delta x\to\infty}\to 0$.

2.3.2. Статистический способ описания состояния точечной частицы

Попробуем описать состояние точечной частицы в пространственно-временнóм континууме, используя величину $\widetilde{N}\,(x_i)$ и считая, что X-ось состоит из ячеек длиной dx (бесконечно малой) каждая. Принимая во внимание непрерывность X-оси, целесообразно ввести понятие «пространственной плотности степени заполнения» — величины $\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}$, и тогда

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right)\cdot dx = \int_{\widetilde{N}(x=-\infty)}^{\widetilde{N}(x=+\infty)} d\widetilde{N}(x) = \int_{\widetilde{N}=0}^{\widetilde{N}=1} d\widetilde{N}(x) = 1.$$

Совершенно очевидно, что, коль скоро

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right)\cdot dx = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\widetilde{N}\,(x_i) = 1,$$

величина $\widetilde{N}\,(x_i)$ играет роль ***доли (части) одной точечной частицы*** — той доли, которая якобы непрерывно присутствует в i-*й* ячейке X-оси. Доля одной даже ***точечной*** частицы — это логически совершенно содержательное понятие. Для некоторых вполне прозаических целей — ***описания, но не объяснения*** — пользоваться им допустимо и разумно.

Теперь перейдем к математической конструкции $\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\cdot\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\cdot dx$.

(*Хотелось бы сразу обратить внимание читателя на то, что величину*

$\delta\widetilde{N}(x_i)$ (уже не бесконечно малую) нередко называют вероятностью того, что определенная ячейка X-оси занята частицей, и обозначают символом $W(x_i)$. Затем рассматривают конструкцию $\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} B(x_i)\cdot W(x_i)$.)

Пусть для определенности величина B будет X-проекцией импульса частицы ($B \equiv P_x$), после чего, казалось бы, можно перейти к выражению, например,

$$\langle P_x\rangle = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} P_x(x_i)\cdot W(x_i), \tag{2.4}$$

где $W(x_i)$ $\left(= \frac{d\widetilde{N}}{dx}\cdot\delta x\right)$ есть вероятность того, что в любой момент времени i-я ячейка (протяженностью δx) занята частицей.

Далее для краткости будет использовано слово «импульс» вместо слов «X-проекция импульса».

Давайте выясним, чем является величина, обозначенная символом $\langle P_x\rangle$ и определенная выражением (2.4).

Прежде всего следует вспомнить, что в рамках статистического способа описания существование $\vec{P}$-континуума не зависит от существования как частицы, так и пространства, и не зависит от хода времени. Образно выражаясь, $\vec{P}$-континуум присутствует в каждой точке X-оси в любой момент времени. Поэтому в то мгновение, в которое частица оказывается в определенной точке X-оси, частице *придется* приписать любое значение импульса P_x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ с равной вероятностью[15]. Однако всякий раз это будет какое-то, но *одно* значение. Сложив вместе все значения импульса, которые воспринимала частица, много раз попадая в одну и ту же точку X-оси, и разделив сумму на число попаданий, получим усредненное по времени значение импульса той доли частицы, которая приурочена к определенной точке X-оси. Все сказанное означает возможность обозначить символом $\langle P_x(x_i)\rangle_{\Delta t}$ *часть* импульса $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ частицы в целом (а не ее доли), навечно приуроченную к i-й ячейке X-оси[16].

Имея в виду, что в выражении (2.4) не фигурирует время, хотелось бы обратить внимание читателя на правомерность вопроса: *по чему именно* усреднен импульс частицы в выражении (2.4)? На этот вопрос нетрудно дать ответ, так как в рассматриваемом примере $W(x) \equiv \delta\widetilde{N}(x)$. Тогда пресловутая вероятность оказывается определенной *физически содержательным* образом. Ведь $\delta\widetilde{N}(x)$ и есть *та* доля частицы, которая *обязана* считаться находящейся в ячейке (координата центра которой равна x), причем — в любой момент времени, то есть — непрерывно. И если частица в любой момент времени своего существования обладает каким-то

[15] Эрудированный читатель, по-видимому, разглядит здесь соотношение между так называемыми неопределенностями импульса и координаты, соответствующими одному и тому же моменту времени (подробнее об этом в § 4.1).

[16] *Часть* импульса *частицы в целом* равна импульсу *доли* частицы (той доли, которая постоянно находится в i-й ячейке)

импульсом, мы ***вынуждены*** считать, что на каждую (i-ю) долю частицы ***постоянно*** приходится равная $P_x \cdot \delta\widetilde{N}(x_i)$ ***часть*** того самого импульса P_x, которым ***постоянно*** обладает частица в целом. То есть:

$$P_x \cdot \delta\widetilde{N}(x_i) = \langle P_x(x_i)\rangle_{\Delta t} = \delta P_x < P_x.$$

Естественно, на все доли частицы приходится импульс, равный

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} P_x \cdot \delta\widetilde{N}(x_i) = \begin{cases} P_x \cdot \sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} \delta\widetilde{N}(x_i) = P_x; \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} \langle P_x(x_i)\rangle_{\Delta t} = P_x. \end{cases}$$

Таким образом, очевидно, что $P_x \equiv \langle P_x\rangle_{\Delta t}$. Иначе говоря, то, что считается импульсом частицы, и есть величина $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$.

После всего сказанного выражение (2.4) совершенно необходимо преобразовать к виду

$$\langle P_x\rangle_{\Delta t} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \langle P_x(x_i)\rangle_{\Delta t}, \tag{2.5}$$

так как в выражении (2.4) $\langle P_x\rangle$ — это попросту импульс частицы в целом. И уж если предполагалось использовать скобки $\langle\rangle$ в качестве символа среднего значения, то — лишь среднего ***во времени.*** Однако на всякий случай следует обратить внимание на то, что определенную выражениями (2.4), (2.5) величину $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ не возбраняется считать усредненной еще и по всем долям частицы (число их в нашем примере равно бесконечности), поскольку сумма всех долей ***одной*** частицы (величина $\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} \delta\widetilde{N}(x_i)$) равна единице, что называется, — по определению. А, так как доли частицы заполняют все пространство, импульс $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ допустимо называть также усредненным и по пространству.

Разумеется, i-я доля частицы (равная $\delta\widetilde{N}(x_i)$) находится ***постоянно*** (вечно и непрерывно) в своей (i-й) ячейке[17], так что $\langle P_x\rangle_{\Delta t} \cdot \delta\widetilde{N}(x_i)$ — это часть импульса, ***постоянно*** приходящаяся на одну (i-ю) ячейку X-оси, а $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ — импульс, постоянно приходящийся на всю X-ось.

Теперь имеет смысл сравнить выражения (2.4) и (2.5).

В рамках статистического способа описания состояния частицы выражение (2.4) физически неинтерпретируемо и потому требует замены. Выражение (2.5) — вполне достойная замена, но обладает весьма специфическим недостатком. В нем полностью скрыта информация о неизменном во времени распределении частицы по ячейкам X-оси. А ведь

---

[17] Частица разделена ровно на столько же долей, на сколько разделена вся X-ось. Суммирование ведется по всем ячейкам X-оси или, что — то же самое, по всем долям одной частицы.

на самом деле именно степень заполнения $\widetilde{N}(x_i)$ отражает состояние частицы в конкретной ситуации. При этом виду зависимости $\widetilde{n}$ от t для вполне конкретной ячейки X-оси соответствует определенная ячейка P_x-оси. Если необходимо сохранить вышеупомянутую информацию в выражении, играющем роль определения усредненного по времени импульса частицы в целом, ничего другого не остается, как ввести некий символ $\mathcal{P}$ — фактор размерности импульса. Тогда $\mathcal{P} \cdot \delta\widetilde{N}(x) \equiv \langle P_x(x)\rangle_{\Delta t}$, и можно написать:

$$\langle P_x\rangle_{\Delta t} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mathcal{P} \cdot \delta\widetilde{N}(x_i)\ ^{18)}.$$

По сути дела $\langle P_x(x)\rangle_{\Delta t} = f\left[\delta\widetilde{N}(x)\right]$. Конструкция $\mathcal{P} \cdot \delta\widetilde{N}(x)$ попросту призвана продемонстрировать, что величина $\langle P_x(x)\rangle_{\Delta t}$ является функцией величины $\delta\widetilde{N}(x)$, а на практике — функцией величины $\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}$:

$$\langle P_x(x)\rangle_{\Delta t} = f\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right).$$

Теперь следует подвести некоторые итоги.

1. Величина $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ представляет собой усредненное по ***времени*** (по вечности) значение истинного импульса, которым обладает вечно существующая точечная частица (в какой бы точке X-оси она ни находилась).
2. В течение всего бесконечно продолжительного промежутка времени частица может присутствовать в каждой из ячеек X-оси ***не*** непрерывно.
3. Будучи усредненным по времени значением импульса частицы, величина $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ может считаться значением импульса, усредненным еще и по всем долям частицы, распределенным по всему пространству.

Вот так и создается впечатление, что, хотя положение частицы в пространстве непрерывно меняется, импульс ее остается во времени неизменным.

Итак, усредненный по времени импульс частицы в целом определяется выражением

$$\langle P_x\rangle_{\Delta t} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \lim_{\Delta t\to\infty} \left\{\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \mathcal{P} \cdot \widetilde{n}(x_i, t) \cdot dt\right\} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mathcal{P} \cdot \lim_{\Delta t\to\infty} \left\{\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(x_i, t) \cdot dt\right\} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mathcal{P} \cdot \widetilde{N}(x_i) \qquad (2.6)$$

18) В дальнейшем фактор размерности превратится в оператор (см. с. 83, формула (2.34)).

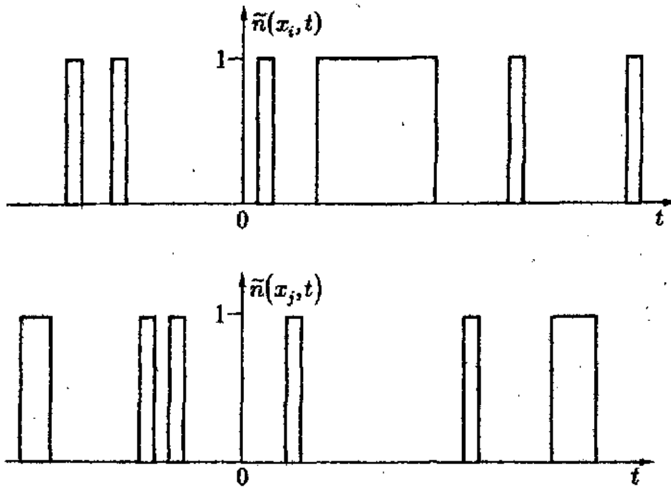


Рис. 2.6. Колебания во времени степеней заполнения двух разных ячеек X-оси.

или

$$\langle P_x\rangle_{\Delta t} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right)\cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\,\langle P_x(x)\rangle_{\Delta t}}{dx}\right)\cdot dx. \qquad (2.7)$$

Из выражений (2.6) и (2.7) следует, что истинный импульс частицы (усредненный по времени), равный $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$, попросту постоянно распределен по всем ее долям, которые, в свою очередь, распределены («размазаны») по всем ячейкам X-оси. Величина $\langle P_x\rangle_{\Delta t}$ есть не более, чем сумма частей импульса, на которые эта сумма была с какой-то целью (например, удобства описания) разделена.

Конструкция $P_x(x,t) = \mathcal{P}\cdot\tilde{n}(x,t)$ (где величина $\tilde{n}(x,t)$ равна либо 1, либо 0), фигурирующая в выражении (2.6), представляется очень удачной. Она позволяет «видеть» импульс частицы в те моменты времени, в которые частица оказывается в точке x. Зависимость величины $\tilde{n}(t)$ еще и от x (как от параметра) означает, что в разных точках X-оси различным является сам вид (характер) зависимости $\tilde{n}$ от t (рис. 2.6).

2.3.3. Развитие статистического способа описания состояния точечной частицы

Обратимся к выражению

$$\langle B\rangle = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} B(x_i)\cdot\delta\widetilde{N}(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(x)\cdot\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\cdot dx, \qquad (2.8)$$

где в качестве величины, обозначенной символом B, может выступать любая из характеристик точечной частицы, с помощью которых принято описывать ее состояние. Отмечу, что основополагающей величиной в выражении (2.8) является либо степень заполнения ячейки пространства (в данном случае — X-оси) частицею — величина $\widetilde{N}(x)$, либо плотность этой степени заполнения — величина $\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}$.

Эрудированный читатель по-видимому знает, что, согласно всем учебным пособиям по квантовой механике, величина $\langle B \rangle$, определяемая выражением (2.8), считается (и называется) «квантово-механическим ***средним*** значением»[19]. Однако мне кажется, что из двух эпитетов второй не может не вызывать удивления. Среднее по... чему?

Пусть, например, B будет импульсом ($B \equiv P_x$). Ведь ясно же, что $P \cdot \frac{d\widetilde{N}(x)}{dx} = \frac{d\langle P_x(x)\rangle_{\Delta t}}{dx}$ — это пространственная ***плотность*** импульса, которым постоянно обладает вечно существующая частица (частица ***в целом***). Причем это — плотность, приуроченная к определенной точке X-оси.

Что же имели в виду авторы учебных пособий, говоря о «квантово-механическом среднем»? По ***чему*** именно усреднен импульс в выражении (2.8)? Учитывая, что время t в этом выражении даже «не ночевало», и вообще о времени не говорится ни слова, можно ведь заподозрить, что авторы пособий имели в виду усреднение по пространству. Последнее вполне допустимо, учитывая, что величину $\langle P_x \rangle$ в выражении (2.4) не возбраняется считать значением импульса, усредненным по всем долям частицы, а доли эти распределены по всему пространству. Таким образом, термин «квантово-механическое среднее» представляется, по крайней мере, недостаточно определенным.

На мой взгляд, лучше всего использовать только термин ***«импульс точечной частицы, усредненный по достаточно продолжительному промежутку времени»***. При этом нужно принять к сведению, что ***использование*** понятия *«величины, усредненной по промежутку времени»* автоматически предполагает считать ***ее неизменной во времени во всем этом промежутке.*** Также нужно принять к сведению, что в разных ситуациях (в конкретных экспериментальных обстановках), в которых частица может оказаться, и величина $\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}$ может оказаться разной в разных точках X-оси. Например, если эта величина не является δ-функцией, значит частицу придется считать в любой момент времени «распределенной» по всему пространству. Здесь имеет смысл обратить внимание на то, что, если бы частица представляла собой протяженное тело (сплошную среду, причем — лучше всего — бесконечных размеров), в только что сказанном

[19] Приведу пример из хорошо известного «Курса теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (*Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 24):

«Введем понятие о среднем значении** $\langle F \rangle$ **величины** F**... $\langle F \rangle = \sum_n F_n \cdot |a_n|^2$».

Такое вот дается определения понятия.

не было бы ничего удивительного. Но, что может означать распределение в пространстве частицы ***точечной***? Ведь, приписав частице массу покоя и электрический заряд, мы отнюдь не ликвидируем логическое противоречие, содержащееся в понятии ***«распределение в пространстве*** массы и заряда, ***сосредоточенных в точке»***. Разумеется, на самом деле точечная частица (вместе с ее массой и зарядом) в ***любой момент времени*** присутствует в ***одной*** из множества точек X-оси. Величина $\widetilde{N}(x)$ — это просто усредненное по времени (стационарное) значение мгновенной степени заполнения ($\widetilde{n}(x,t)$) частицею бесконечно малой пространственной ячейки. Величина $\widetilde{n}(x,t)$ может быть равна либо единице (частица в данное мгновение присутствует в данной точке), либо нулю (в данной точке пространства частицы нет). Но, если мы по самостоятельным причинам[20] считаем целесообразным оперировать величиной $\langle\widetilde{n}(x)\rangle_{\Delta t}$ ($\equiv \widetilde{N}(x)$), усредненной по времени, мы ***автоматически вынуждены*** считать точечную частицу пребывающей в точке X-оси (в каждой точке X-оси), с одной стороны, ***вечно и притом непрерывно***, но, с другой стороны, лишь в качестве ***части*** самой себя. Конечно, такое понятие, как «часть (доля) точечной частицы», не может ласкать слух. Однако не следует думать, что «часть массы и (или) часть электрического заряда» — совсем другое дело, поскольку, например, масса выражается определенным количеством граммов, которое можно представить себе в виде суммы какого угодно числа меньших количеств граммов. Подобная иллюзия, естественно, исчезает, если неопределенный термин ***«часть массы»*** (массы чего?) заменить определенным: ***«часть массы объекта, могущего занимать лишь исчезающе малый (точечный) объем пространства»***.

Таким образом, мы вынуждены делать вид, что ***все*** доли ***одной точечной*** частицы ***одновременно*** (а как же иначе) проходят через ***множество*** отверстий в перегородке, а на экране сливаются в одно пятнышко — след, оставленный одной точечной частицей, прошедшей через ***одно,*** конечно, отверстие[21]. Такой уж был выбран способ описания поведения частицы.

Теперь стоит выяснить, можно ли отнести к X-координате то есть к точке X-оси (точке, в которой частица может присутствовать, но может и не присутствовать) все то, что говорилось выше об импульсе. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно согласиться с тем, что точечная частица заранее представляется нам в виде ***бесконечно протяженного*** (вдоль X-оси) объекта, причем в общем случае на каждую точку X-оси приходится вовсе не одинаковая доля объекта. Но сначала — небольшое отступление.

Хорошо известно понятие центра масс (он же — центр инерции) протяженного тела. X-координата центра масс определяется выражением

---

[20] Например, для описания неких новых экспериментов, но с использованием старых — традиционных — понятий.

[21] Если все они физически эквивалентны, то с равной вероятностью через любое из них.

$x_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum\limits_i x_i \cdot m(x_i)}{\sum\limits_i m(x_i)}$ [22], *которое можно истолковать следующим образом: допустимо считать, что каждой доле массы* $M\left(=\sum\limits_i m(x_i)\right)$ *тела отвечает одно и то же значение* X*-координаты, равное* $x_{\text{ц. м.}}$. *Отобразим сказанное в виде формулы:*

$$\sum_i x_{\text{ц. м.}} \cdot m(x_i) = \sum_i x_i \cdot m(x_i).$$

На этом отступление закончено, и нужно вернуться к нашей частице.

Очевидно, что x_i — это значение координаты той доли частицы, которая равна $\delta\widetilde{N}(x_i)$. Следовательно, найдется такое одно значение координаты, которое можно приписать каждой доле частицы. Эту координату следует назвать координатой центра всех долей (на которые мы разделили частицу) и обозначить символом $x_{\text{ц. д.}}$. Естественно:

$$x_{\text{ц. д.}} = \frac{\sum\limits_i x_i \cdot \delta\widetilde{N}(x_i)}{\sum\limits_i \delta\widetilde{N}(x_i)} = \sum_i x_i \cdot \delta\widetilde{N}(x_i), \tag{2.9}$$

так как сумма всех долей частицы равна единице, по определению. Принимая во внимание, что частица выглядит распределенной своими долями вдоль всей X-оси, а каждая доля занимает свою точку X-оси, не возбраняется назвать величину, определенную выражением (2.9), значением координаты (*частицы*), усредненной по всем координатам точек X-оси (или, что благозвучнее, по всему X-пространству), и обозначить символом $\langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta x}$. Тогда:

$$x_{\text{ц. д.}} \equiv \langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta x} = \frac{\sum\limits_i x_i \cdot \delta\widetilde{N}(x_i)}{\sum\limits_i \delta\widetilde{N}(x_i)} = \sum_i x_i \cdot \delta\widetilde{N}(x_i) \tag{2.10}$$

или

$$x_{\text{ц. д.}} \equiv \langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right) \cdot dx. \tag{2.11}$$

На всякий случай замечу, что значение координаты точки X-оси, усредненное по всем координатам, содержащимся внутри интервала Δx $(= x_2 - x_1)$ (то есть, вовсе не значение величины $\langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta x}$), опре-

[22] Если масса (M) сплошного протяженного тела непрерывно распределена по X-оси с плотностью $\frac{dM}{dx}$, то $x_{\text{ц. м.}} = \frac{1}{M} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left[\left(\frac{dM}{dx}\right) \cdot dx\right]$.

деляется выражением

$$\langle x\rangle_{\Delta x}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2}x\cdot dx=\frac{x_2+x_1}{2} \tag{2.12}$$

В данном случае ***точке*** (не какой попало, а именно центру отрезка длиной Δx) суждено представлять ***протяженный*** объект — отрезок. Таким образом, «усреднение по пространству» — это не более, чем лаконичный термин. Ради наглядности, выражение (2.12) можно было бы представить в виде:

$$\langle x\rangle_{\Delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta x}{\Delta x}\cdot\sum_{i=0}^{i=\frac{\Delta x}{\delta x}}x_i\right), \tag{2.13}$$

где $x_{i+1}=x_i+\delta x$, а число значений X-координаты равно $\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\delta x}$.

Разумеется, понятие центра всех долей точечной частицы (стало быть, и понятие величины $x_{\text{ц.д.}}$ или $\langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta x}$), равно, как и понятие центра масс, может потребоваться только для каких-то практических целей. В этом случае следует помнить, что, строго говоря, частица должна ***считаться*** (но не более того) пребывающей только в точке с координатой $x_{\text{ц.д.}}$ и притом непрерывно в течение достаточно продолжительного промежутка времени Δt. Напомню еще, что присутствующая в выражениях (2.9) величина $\widetilde{N}$ есть результат усреднения по времени, так что более адекватным следует признать символ $\langle x_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta t,\Delta x}$.

Вот, что скрывалось за малограмотным термином ***«вероятность координаты»*** и неопределенным термином ***«среднее значение координаты»***.

Обратимся теперь к описанию состояния точечной частицы, в котором основополагающую роль будет играть величина $\widetilde{N}\left(\vec{P}\right)$ — стационарная (или квазистационарная) степень заполнения частицею ячейки оси импульсов. Простоты ради, импульсное пространство будем считать одномерным: $\vec{P}=\vec{e}_x\cdot P_x$. Величина $\frac{d\widetilde{N}(P_x)}{dP}\cdot\delta P_x$ [23] есть доля одной частицы, приходящаяся на одну ячейку импульсного пространства. Протяженность ячейки в этом пространстве равна δP_x, а координата ее центра равна P_x. Конечно, можно выразиться и по-другому: сказать, что величина $\delta\widetilde{N}\left(P_x\right)$ — это доля частицы, отвечающая значению импульса, равному P_x. Естественно также, что, «размазав» *одну* частицу (вечно существующую) по ***всему*** импульсному пространству, поневоле придется

---

[23] Здесь $\widetilde{N}\left(P_x\right)=\lim\limits_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}}\widetilde{n}\left(P_x,t\right)\cdot dt\right\}$. Значение $\widetilde{n}$ может быть равно либо 1, либо 0.

принять равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{N}\,(P_x)}{dP_x} \cdot dP_x = 1.$$

Теперь рассмотрим конструкцию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi \cdot \frac{d\widetilde{N}\,(P_x)}{dP} \cdot dP_x \equiv \langle x \rangle_{\Delta t}\,,$$

где символом χ обозначен фактор размерности координаты[24].

Поскольку X-континуум присутствует в каждой точке P_x-оси в любой момент времени, в то мгновение, в которое частица обладает определенным импульсом, ей придется приписать любое значение X-координаты в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ с равной вероятностью. Однако всякий раз это будет какое-то, но одно значение. По сути дела далее нужно просто повторить все, о чем шла речь на с. 50–54, лишь «поменяв местами» величины x и P_x.

Величина $\langle x \rangle_{\Delta t}$ — это X-координата той точки X-оси, в которой частица должна считаться присутствующей в любой момент времени (непрерывно), каким бы импульсом она в данный момент ни обладала. А величина $\chi \cdot \delta\widetilde{N}\,(P_x)$ — это та доля $\langle x \rangle_{\Delta t}$-координаты одной-единственной точки пространства (в которой частица должна считаться вечно присутствующей), которая приходится на одну определенную ячейку P_x-оси из бесконечного их множества.

Разумеется, при необходимости можно образовать, по крайней мере, ***логически*** содержательное понятие плотности распределения X-координаты (точки присутствия частицы) по оси импульсов — величины

$$\chi \cdot \frac{d\widetilde{N}\,(P_x)}{dP_x} \equiv \frac{d\,\langle x\,(P_x) \rangle_{\Delta t}}{dP_x}.$$

В заключение стоит заметить, что, подобно конструкции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi \cdot \frac{d\widetilde{N}(x)}{dx} \cdot dx,$$

конструкция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P} \cdot \frac{d\widetilde{N}(P)}{dP} \cdot dP_x$$

представляет собой импульс центра всех долей частицы, только распределенных уже по импульсному пространству, то есть величину, которую

[24] Конструкция $\chi \cdot \frac{d\widetilde{N}(P_x)}{dP_x}$ — это просто символ: $\chi \cdot \frac{d\widetilde{N}(P_x)}{dP_x} \equiv f\left(\frac{d\widetilde{N}(P_x)}{dP_x}\right)$.

следовало бы обозначить символом $P_{x,\text{ц.д.}}$. Тем не менее, следует помнить, что речь идет о частице, находящейся в таком состоянии, в котором ее импульс приходится считать непрерывно меняющимся, хотя, на самом деле, частица вечно присутствует в одной и той же точке пространства.

§2.4. Состояние точечной частицы, участвующей во взаимодействии с телом взаимодействия

Телом взаимодействия будет называться любое структурированное поле[25], заполняющее пространство, пребывая в котором, частица вынуждена с тем полем взаимодействовать.

Для описания состояния частицы в подобном пространстве будет использовано понятие мгновенной степени заполнения j-ячейки X-оси — величины $\widetilde{n}(x_j, t)$, способной принимать только два значения: нуль и единицу.

Предположим, что частица существует вечно и потому в любой момент времени в какой-то ячейке X-оси присутствует обязательно. При этом, если считать, что все точки пространства внутри ячейки протяженностью δx физически эквивалентны, то X-координата частицы, присутствующей в ячейке, с равной вероятностью находится в пределах от $x - \frac{\delta x}{2}$ до $x + \frac{\delta x}{2}$.

Далее необходимо принять во внимание, что ни с чем не взаимодействующая (то есть — свободная) частица обладает в глазах инерциального наблюдателя *неизменной* скоростью (неизменным импульсом)[26]. Если же частица в течение некоторого промежутка времени не только движется, но еще и участвует во взаимодействии, ее скорость (импульс), разумеется, не может в это время не меняться, а сама частица не может вечно находиться в одной и той же точке пространства, если только не предположить, что частица становится частью тела взаимодействия (с которым связана система координат).

Итак, используем величину $\widetilde{n}(x_j, t)$ для выделения из общего (большого) промежутка времени Δt тот, в течение которого частица присутствует (пусть и не непрерывно) именно в j-й ячейке:

$$\Delta t(x_j, t) = \int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(x_j, t') \cdot dt' \equiv \Delta t_j(t). \tag{2.14}$$

[25] Структурированным названо поле, потенциал которого вполне определенным образом зависит от координат и времени. Такое название дано с целью отличить подобное поле от того флуктуирующего, с которым ранее был отождествлен пространственный континуум.

[26] Численное значение скорости может быть как равно нулю (покоящаяся частица), так и отлично от нуля (частица, движущаяся равномерно и прямолинейно).

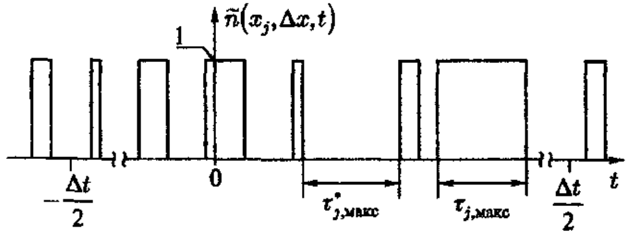


Рис. 2.7. Пример зависимости $\widetilde{n}\,(x_j, t, \Delta x)$ от времени в промежутке Δt.

Здесь: t — момент времени (точка на t-оси, являющаяся центром промежутка $\Delta t_j(t)$), отсчитанный от произвольно выбранного в качестве начального. Если ячейки X-оси физически различны, значит и промежутки Δt_j тоже различной продолжительности.

На рис. 2.7 представлен пример зависимости величины $\widetilde{n}$ от времени, причем τ_j — это промежуток времени, в течение которого частица именно непрерывно присутствует в j-й ячейке, а τ_j^* — промежуток времени между соседними моментами убытия-прибытия частицы. Естественно, с ростом числа ячеек, то есть с расширением интервала Δx, число актов убытия-прибытия частицы в одну определенную (j-ю) ячейку может и уменьшиться, и увеличиться. Следовательно, мгновенная степень заполнения одной ячейки в общем случае зависит еще и от Δx. Поэтому имеет смысл ввести обозначение $\widetilde{n}(x_j, t, \Delta x)$. Простоты ради допустим, что изменение числа актов убытия-прибытия отражается только на значениях τ_j^* — промежутков.

С учетом сделанных замечаний имеет смысл модифицировать выражение (2.14), написав:

$$\Delta t(x_j, t, \Delta x) = \int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(x_j, t', \Delta x)\cdot dt' \equiv \Delta t_j(t, \Delta x). \qquad (2.15)$$

Теперь квазистационарной степенью заполнения ячейки частицею следует назвать ту долю от промежутка Δt, которая приходится на присутствие частицы в j-й ячейке, то есть — величину $\frac{\Delta t(x_j, t, \Delta x)}{\Delta t}$.

Разумеется,

$$\frac{\Delta t(x_j, t, \Delta x)}{\Delta t} = \langle \widetilde{n}(x_j, \Delta x)\rangle_{\Delta t} = \widetilde{N}(x_j, \Delta x) \equiv \widetilde{N}_j(\Delta x), \qquad (2.16)$$

так что изменилось только название.

Из вида зависимости $\widetilde{n}(x_j, t, \Delta x)$, представленной на рис. 2.7 для частицы, участвующей во взаимодействии, следует возможность ввести еще один промежуток времени $(\widetilde{\Delta t})$, удовлетворяющий неравенствам $\left(\tau_{j,\text{макс}}+\tau^*_{j,\text{макс}}\right)\ll\widetilde{\Delta t}\ll\Delta t$ [27].

В этом случае можно образовать понятие о частоте (ν_j) актов убытия-прибытия из j-й ячейки и в j-ю ячейку. Определим величину ν_j выражением

$$\nu_j\,(\Delta x)\equiv\frac{N_j(\Delta x,\widetilde{\Delta t})}{\widetilde{\Delta t}},\tag{2.17}$$

где N_j — число вышеупомянутых актов за время $\widetilde{\Delta t}$. Что же касается промежутка времени τ_j, то этим же символом обозначим и величину, уже усредненную по числу актов убытия-прибытия:

$$\tau_j\equiv\langle\tau_j\rangle_{N_j}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{s=N_j}(\tau_j)_s}{N_j(\Delta x,\widetilde{\Delta t})}.\tag{2.18}$$

Именно она будет далее фигурировать в качестве ***непрерывного*** промежутка времени присутствия частицы в j-й ячейке.

Используем величины ν_j и τ_j для преобразования выражения (2.16) к виду

$$\langle\widetilde{n}(x_j,\Delta x)\rangle_{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\cdot\sum_{\iota=1}^{\iota_{\text{макс}}(\Delta t)}(\tau_j)_\iota\cdot\left[(\nu_j\,(\Delta x))_\iota\cdot(\widetilde{\Delta t})_\iota\right].\tag{2.19}$$

Здесь индекс ι указывает на номер промежутка $\widetilde{\Delta t}$, в котором τ_j и ν_j имеют определенные значения, а $\iota_{\text{макс}}(\Delta t)$ есть целое число промежутков $\widetilde{\Delta t}$, примыкающих друг к другу и умещающихся на большем промежутке Δt, причем допускается возможность выбирать численно разные значения $\widetilde{\Delta t}$. Естественно, что $\sum\limits_{\iota=1}^{\iota_{\text{макс}}}(\widetilde{\Delta t})_\iota\equiv\Delta t$, и потому $\iota_{\text{макс}}=$ $=\iota_{\text{макс}}(\Delta t)$.

Очевидно, что величина $\langle\widetilde{n}(x_j,\Delta x)\rangle_{\Delta t}$ является локальной и ***квази***стационарной. Предполагая в дальнейшем перейти к пределу $\Delta t\to\infty$, можно и целесообразно заранее выбрать значение $\widetilde{\Delta t}$, настолько большим, чтобы не потребовалось делать его разным на всем промежутке Δt. Тогда $\iota_{\text{макс}}=\frac{\Delta t}{\widetilde{\Delta t}}$, а τ_j, и $\nu_j\,(\Delta x)$ перестанут зависеть от ι. Ведь индекс ι указывает, попросту говоря, на расположение промежутка $\widetilde{\Delta t}$, относительно края промежутка Δt. С учетом сказанного стационарное —

[27] Заметим, что промежуток времени $\widetilde{\Delta t}$, удовлетворяющий написанному неравенству, найдется для *любой* физической реальности, если признать, что у любой реальности в запасе вечность $(\Delta t\to\infty)$, а величина $\left(\tau_{j,\text{макс}}+\tau^*_{j,\text{макс}}\right)$ ограничена сверху. Величина τ^*_j не может быть ограничена сверху лишь для свободной частицы, поскольку такая частица всего лишь один раз побывает в j-й ячейке X-оси (равно, как и в любой другой). Однако для описания состояния именно свободной частицы и не нужно привлекать статистический способ.

усредненное на бесконечно большом промежутке времени — значение степени заполнения равно

$$\lim_{\Delta t\to\infty} \langle \widetilde{n}(x_j, \Delta x)\rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \iota_{\text{макс}}(\Delta t) \cdot \widetilde{\Delta t} \cdot \tau_j \cdot \nu_j\,(\Delta x) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\widetilde{\widetilde{\Delta t}}} \cdot \widetilde{\Delta t} \cdot \tau_j \cdot \nu_j\,(\Delta x) \right\} = \tau_j \cdot \nu_j\,(\Delta x). \tag{2.20}$$

Если намереваться в дальнейшем перейти еще и к пределу $\Delta x \to \infty$ (тем самым учесть бесконечную протяженность X-оси), придется заранее постулировать, что соответствующее значение частоты ν_j существует. В итоге приходим к физически содержательному понятию стационарной степени заполнения частицею любой (j-й) из бесконечного множества пространственных ячеек

$$\widetilde{N}\,(x_j) \equiv \lim_{\Delta x\to\infty} \left\{ \tau(x_j) \cdot \nu(x_j, \Delta x) \right\}, \tag{2.21}$$

причем $0 < \widetilde{N}(x_j) \leqslant 1$.

Конечно, после всего сказанного величину $\widetilde{N}(x_j)$ необходимо считать одинаковой для любого момента времени.

Разумеется, вполне допустима ситуация, в которой частица вечно присутствует лишь в одной из множества пространственных ячеек (например, в j-й). При этом частота ν_j возрастает до бесконечности, поскольку, образно выражаясь, лишь одна ячейка (j-я) обменивается частицей со всеми остальными (происходит заполнение пауз, обозначенных на рис. 2.7 символом τ_j^*) [28]. Естественно, что автоматически расширяется до бесконечности и диапазон значений скорости V_x, с которой частица всякий раз появляется в j-й ячейке. Далее, если считать длину ячейки исчезающе малой, а частицу движущейся, придется столь же малой считать и величину τ_j. Однако, поскольку значение τ_j считается одним и тем же вдоль всей t-оси (см. выражение (2.18)), а частота ν_j возрастает до бесконечности, получается, что

$$\lim_{\nu_j\to\infty} \widetilde{N}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = x_j, \\ 0 & \text{при} \quad x \neq x_j. \end{cases}$$

Хотя недопустима ситуация, в которой $\widetilde{N}(x)$ точно равна нулю для всех ячеек (иначе получится, что частица, вечно существуя во времени, *ни* в одной из ячеек пространства не присутствует), тем не менее, вполне возможно, что значение $\widetilde{N}(x)$ для всех ячеек одинаково (при этом оно исчезающе мало). Образно выражаясь, частица за бесконечно долгое время все-таки всего лишь по одному разу (одно мгновение) побывает в каждой из бесконечно большого числа ячеек.

[28] То есть величины τ_j^* сокращаются до нуля, а величины τ_j остаются неизменными.

Поскольку одинаковость степени заполнения $\widetilde{N}(x)$ отображает физическую эквивалентность всех пространственных ячеек, пространство следует считать пустым, а частицу, следовательно, свободной, причем — либо вечно покоящейся, либо вечно движущейся равномерно и прямолинейно. В любом случае ее скорость необходимо считать неизменной во времени. Следует *также помнить, что в описываемой ситуации понятие* ***«этой»*** точки пространства является физически бессодержательным. ***«Эта»*** точка физически неотличима от ***«той»***. Поэтому единственно разумный ответ на вопрос, *где находится в данный момент времени свободная частица*, таков: с равной (исчезающе малой) вероятностью в любой точке пространства в любой момент времени.

Имеет смысл сделать небольшое отступление.

Если окажется, что в физической реальности величина

$$\left(\tau_{j,\text{макс}} + \tau^*_{j,\text{макс}}\right)$$

ограничена сверху, можно ввести понятие о квазистационарной степени заполнения состояния (вероятности присутствия частицы в точке пространства, координата которой равна x), положив

$$\langle\widetilde{n}(x)\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t) = \lim_{\Delta x\to\infty}\left\{\frac{1}{\widetilde{\Delta t}}\cdot\int\limits_{-\frac{\widetilde{\Delta t}}{2}}^{t+\frac{\widetilde{\Delta t}}{2}}\widetilde{n}(x,\Delta x,t')\cdot dt'\right\} \equiv \widetilde{N}_{\text{квази}}(x,t).$$

Новую характеристику можно использовать в ситуации, в которой действуют два процесса: быстрый, отвечающий за колебания во времени мгновенной степени заполнения, и медленный, отвечающий за изменение характера («частоты») колебаний, тем самым, за изменение во времени уже самой величины $\widetilde{N}_{\text{квази}}(x,t)$ [29] в течение промежутка времени Δt, огромного по сравнению с промежутком усреднения $\widetilde{\Delta t}$. Следует также иметь в виду, что если τ- и τ^*-промежутки исчезающе короткие, то и промежуток $\widetilde{\Delta t}$, пригодный для использования его с целью усреднения по времени, можно выбрать тоже исчезающе коротким.

Теперь попробуем описать события, разыгрывающиеся в пространственно-временном континууме, используя введенные понятия. С этой целью обратимся сначала к рис. 2.8,а. Там представлена крупномасштабная картина, из которой следует, что в течение s-го промежутка времени продолжительностью $(\tau_j)_s$ частица непрерывно движется (с отличной от нуля скоростью) в определенном направлении (например, вниз по X-оси), проходя все — сплошь — точки отрезка длиной λ_j. Можно было бы и усомниться в том, что, присутствуя в j-й ячейке, частица

[29] Изменение величины $\widetilde{N}_{\text{квази}}(x,t)$ обусловлено, конечно, изменением соотношений между величинами τ^* и τ внутри промежутка $\widetilde{\Delta t}$.

движется, а не покоится, если бы не одно обстоятельство. Обратившись к рис. 2.8,б, мы видим, что частица покидает j-ю ячейку из какой-то внутренней точки в момент времени, являющийся концом какого-то непрерывного промежутка. А поскольку мы постулировали, что частица остается на X-оси, то, увидев, как она покидает j-ю ячейку в упомянутый момент времени, нельзя не приписать частице, по крайней мере, мгновенной скорости. Далее, тот факт, что частица вновь возвращается в j-ю ячейку спустя отличный от нуля промежуток времени — в более поздний момент, — вынуждает приписать частице способность менять направление скорости на противоположное. В самом деле, допустим, что частица в какой-то момент покинула j-ю ячейку, направляясь вниз по X-оси. Частица больше не вернется в ту же ячейку, если не предположить, что она где-то и когда-то изменит направление движения вдоль X-оси на противоположное[30]. Но это означает, что, по крайней мере, в некоторых точках X-оси частица испытывает действие сил и, стало быть, то ускоряется, то тормозится.

Следует заметить, что поскольку каждый акт убытия-прибытия сопровождается изменением направления скорости, введенная ранее частота ν_j актов убытия-прибытия не может не совпадать с частотой изменения направления скорости.

Теперь обратимся к рис. 2.8,в. На нем отображено то, что пространство является континуумом, и потому ничто не препятствует выбрать ячейку сколь угодно малой длины. В этом случае невозможно разглядеть, куда направлена и чему равна по величине скорость частицы в течение времени ее непрерывного пребывания в j-й ячейке. Естественно, ничего другого не остается, как только фиксировать события появления частицы в j-й ячейке и последующего исчезновения. Но тогда ничего другого не остается и, как считать, что в j-ю ячейку частица может попасть из любой другой[31] с равной вероятностью, а, следовательно, и скоростью обладая любой — по величине и направлению — с равной же вероятностью. На рис. 2.8,в показано, что в моменты убытия частица покидает ячейку иногда в том же направлении, в каком она в нее попала, но нередко и в противоположном, иначе частице было бы суждено двигаться только прямолинейно[32]. Однако направления скоростей в моменты $(t_j)_{s+1}^{\text{начальн.}}$ и $(t_j)_s^{\text{конечн.}}$ обязательно противоположны.

Таким образом, описанное выше поведение частицы может иметь место только, если в пространстве присутствует силовое поле, притом достаточно специфической конфигурации.

---

[30] Предлагается отвергнуть возможность изменения направления хода времени, в результате чего частица могла бы вернуться в то самое «прошлое», в котором она уже один раз присутствовала в j-й ячейке.

[31] В частности, находящейся сколь угодно далеко от j-й ячейки.

[32] Следует помнить, что речь идет о частице, участвующей во взаимодействии, а не о свободной.

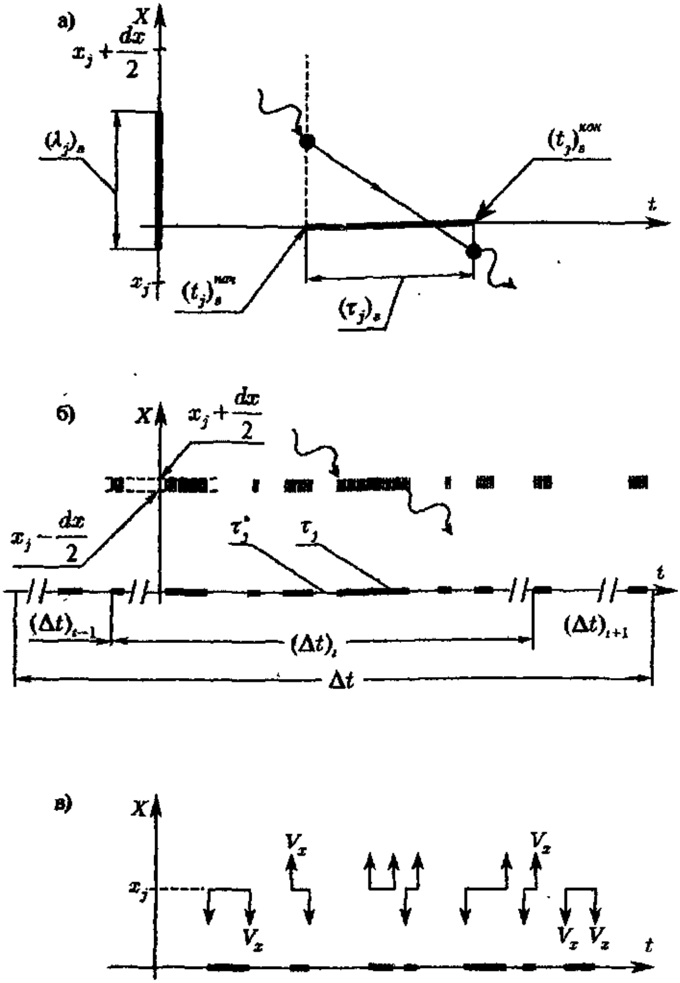


Рис. 2.8. Движение частицы в пределах одной ячейки.

а) Очень крупномасштабная картина.

Предположено, что, присутствуя в j-й пространственной ячейке длиной δx, частица движется вниз по X-оси непрерывно в течение s-го промежутка времени продолжительностью $(\tau_j)_s$, проходя при этом *все — сплошь* — точки отрезка длиной $(\lambda_j)_s$. В пределах j-й ячейки может разместиться достаточно много пространственно разобщенных и/или перекрывающихся λ_j-отрезков. Показан всего лишь один из них. Обозначены начальный и конечный моменты s-го промежутка времени: $(t_j)_s^{\text{начальн.}}$ и $(t_i)_s^{\text{конечн.}}$.

Частица влетела в j-ю ячейку сверху, а вылетела из нее вниз. Прибыть в j-ю ячейку снова частица сможет лишь в более поздний момент времени

$(t_j)_{s+1}^{\text{начальн.}}$ очередного τ_j-промежутка и только снизу. Но для этого ей придется поменять за время отсутствия в j-й ячейке направление скорости на противоположное.

б) Масштаб по X-оси значительно уменьшен, а по t-оси сохранен. Разглядеть, как движется частица внутри затемненных областей $\{Xt\}$-континуума, невозможно.

в) Пространственная ячейка сокращена до исчезающе малых размеров.

Скорости частицы в моменты прибытия ее в j-ю ячейку и убытия из нее же могут быть направлены как в одну сторону, так и в противоположные, но направления скоростей в крайние моменты времени соседних τ_j-промежутков обязательно противоположны. Стрелки возле символов V_x отображают только направление, абсолютные же значения скоростей V_x в эти моменты могут быть какими угодно в пределах от нуля до бесконечности.

Однако все сказанное можно было бы интерпретировать совершенно по-другому. Именно: предположить, что частица вообще прекращает свое существование в тот момент, который был назван моментом убытия, и, естественно, в той точке X-оси, которая принадлежит, допустим, i-й ячейке. При этом частица обладает определенной скоростью как по величине, так и по направлению. Спустя исчезающе короткий промежуток времени, в момент, который был назван моментом прибытия, возникает (рождается) — в другой точке X-оси, принадлежащей, допустим, j-й ячейке, — частица, идентичная исчезнувшей по характеристикам-константам, притом обладающая скоростью, тоже вполне определенной как по величине, так и по направлению, но вовсе не обязательно такой, как в момент исчезновения.

Выбор в пользу той или иной интерпретации зависит лишь от признания частицы существующей ***вечно и непрерывно*** или же способной возникать и исчезать в разные моменты времени[33]. Поскольку с самого начала было решено считать частицу существующей ***вечно и непрерывно***, придется остановиться на первой интерпретации.

На рис. 2.9 представлен частный случай, когда ***стационарная*** степень заполнения каждой из бесконечного множества ячеек одинакова. При этом она исчезающе мала, поскольку величина τ ограничена сверху, а частота колебаний направления скорости исчезающе мала. Это и есть состояние, в котором частица является свободной.

В заключение стоит обратить внимание на существенную особенность статистического способа описания состояния точечной частицы.

Если частицу считать свободной, пространство следует считать пустым (состоящим из физически неразличимых ячеек). Свободная частица может выглядеть в глазах одного инерциального наблюдателя движущейся вечно прямолинейно и равномерно, а в глазах другого — вечно

[33] При этом ничто не мешает считать частицу исчезнувшей в одной точке пространства, а возникшей спустя сколь угодно короткий промежуток времени в другой, чрезвычайно удаленной точке. Вот так и может возникнуть иллюзия, что частица способна обладать бесконечно большой скоростью и испытывать бесконечно большое ускорение.

покоящейся. В любом случае частица за бесконечно большой промежуток времени всего лишь ***по разу*** (на одно мгновение) поприсутствует ***в каждой*** из бесконечно большого числа физически эквивалентных пространственных ячеек. Другими словами, частица в любой момент времени с равной вероятностью присутствует в каждой точке пространства.

Если считать частицу взаимодействующей, бесконечно большое число точек пространства необходимо считать физически различными. Если предположить, что частица вечно присутствует в одной, естественно, отличающейся от всех остальных, точке пространственного континуума[34], то в рамках статистического способа описания это означает, что одна

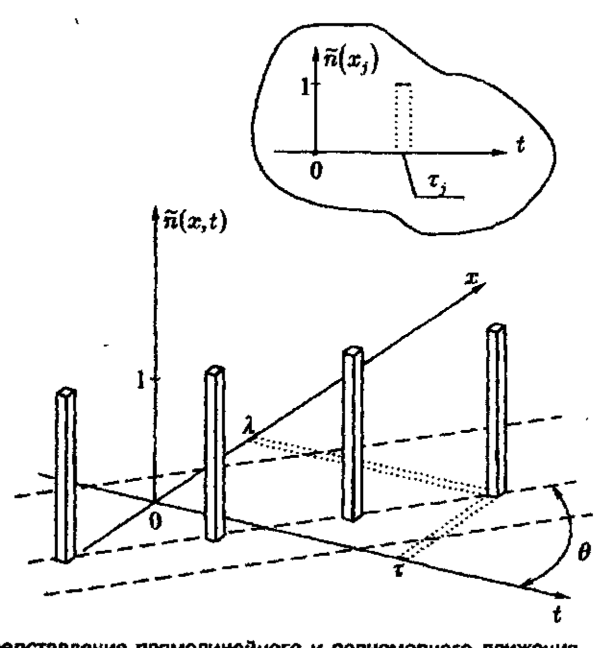


Рис. 2.9. Представление прямолинейного и равномерного движения.

Штриховая линия в плоскости $\{Xt\}$ — годограф.

Физическая идентичность всех точек X-оси и всех моментов времени (точек t-оси) заставляет считать бесконечное множество параллельных друг другу штриховых линий также физически идентичными. Тангенс угла θ выражает скорость частицы.

На врезке показано, что в точке x_j частица побывала «всего один раз» — всего лишь в течение промежутка времени τ_j из вечности.

[34] Достаточно, чтобы «эта» — особая — точка отличалась всего лишь от одной «другой» точки. Тогда радиус-вектор даже любой точки бесконечно протяженного пространства, проведенный из особой точки, превратится из математической характеристики точки в ее физическую характеристику

единственная ячейка обменивается частицей со всеми остальными пространственными ячейками. ***Но это автоматически означает и необходимость признать, частицу обладающей в любой момент времени любой скоростью — и по величине, и по направлению — с равной вероятностью.*** То есть — частица за бесконечно большой промежуток времени всего лишь ***по разу*** (на одно мгновение) поприсутствует ***в каждой*** из бесконечно большого числа ячеек пространства скоростей, или – в любой момент времени частица с равной (исчезающе малой) вероятностью пребывает в каждой точке $\vec{V}$-пространства.

Поскольку интервал ΔV_x, внутри которого величина $\widetilde{N}(V_x) \to 0$ (***одинаково*** исчезающе мала), бесконечно широк, а интервал Δx, внутри которого $\widetilde{N}(x) \to 1$, бесконечно узок, можно написать:

$$\text{если} \quad \lim_{\widetilde{N}(V_x)\to 0} \Delta V_x = \infty, \quad \text{то} \quad \lim_{\widetilde{N}(x=x_*)\to 1} \Delta x = 0.$$

Тогда не ***возбраняется*** (но не более того) связать величины ΔV_x и Δx соотношениями $\Delta V_x \sim \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}$; $\Delta x \sim \lim\limits_{\Delta V_x\to\infty} \frac{1}{\Delta V_x}$, не забывая, конечно, о необходимости правильной их интерпретации.

Очевидно, что если считать частицу абсолютно свободной, то $\widetilde{N}(V_x) \to 1$ внутри исчезающе малого интервала ΔV_x, а величина $\widetilde{N}(x) \to 0$ (***одинаково*** исчезающе мала) внутри неограниченно широкого интервала Δx. Тогда можно написать:

$$\text{если} \quad \lim_{\widetilde{N}(V_x=V_{x,*})\to 1} \Delta V_x = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{\widetilde{N}(x)\to 0} \Delta x = \infty.$$

Тогда не возбраняется (но не более того) связать величины ΔV_x и Δx соотношениями $\Delta V_x \sim \lim\limits_{\Delta x\to\infty} \frac{1}{\Delta x}$; $\Delta x \sim \lim\limits_{\Delta V_x\to 0} \frac{1}{\Delta V_x}$, не забывая, конечно, о необходимости правильной их интерпретации.

§ 2.5. Вероятность существования точечной частицы во времени (степень заполнения частицей состояния существования в определенное мгновение вечности)

В предыдущем параграфе рассматривалось состояние частицы, существующей вечно и ***непрерывно.*** Теперь предлагается считать, что частица в результате взаимодействия с неким объектом неоднократно исчезает и возникает. Иными словами участие частицы во взаимодействии состоит ***только*** в ее исчезновении-возникновении.

Допустим сначала, что частица существует ***непрерывно***, но лишь в течение непродолжительного промежутка времени. В это время она может либо покоиться в какой-то одной точке пространства (которое, простоты ради, отождествляется с X-осью), либо двигаться, проходя, разумеется, ***все сплошь*** точки отрезка длиной λ. Перемещаясь внутри

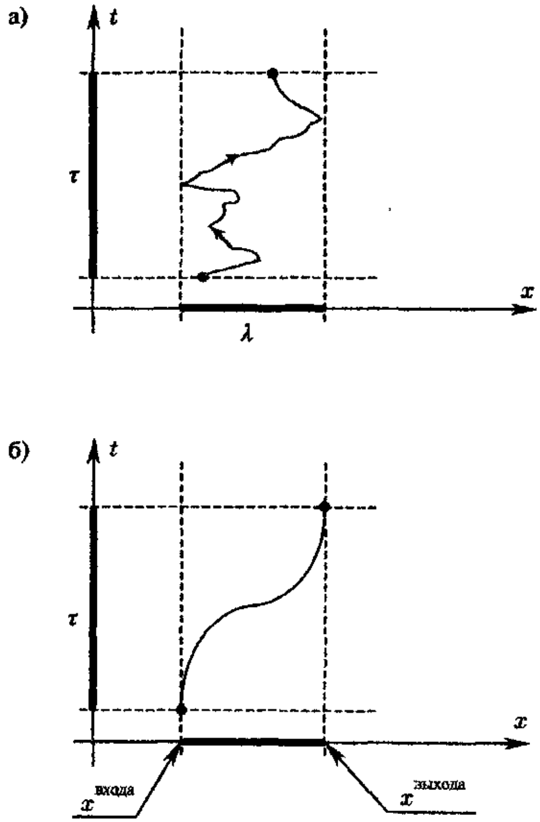


Рис. 2.10. Состояние частицы, участвующей во взаимодействии с неким объектом — «телом взаимодействия». а) Годограф, отражающий возможный реальный характер движения. б) Принятый годограф (в моменты возникновения и исчезновения частица не обладает скоростью).

этого отрезка, частица может и задерживаться в каких-то точках, и двигаться, причем — как туда-сюда, так и хоть в произвольном, но в одном направлении (рис. 2.10,а). Однако, чтобы упростить дальнейшее описание, предлагается считать, что в моменты исчезновения и возникновения частица не обладает скоростью, а во время своего непрерывного существования, если и движется, то лишь в одном направлении (рис. 2.10,б).

Если признать, что в точке (X-оси), координата которой обозначена символом $x_в^{выхода}$ (рис. 2.11,а), частица прекращает свое существование, то нечего и удивляться тому, что возникнуть через некоторое время частица способна в другой точке, удаленной от предыдущей на ***любое*** расстояние. На всякий случай подчеркну, что речь идет вовсе не о перемещении частицы в пространстве (в этом случае частице пришлось бы иногда приписывать бесконечно большую скорость и способность бесконечно быстро изменять величину и направление скорости).

Индексы «вход» и «выход» (рис. 2.11) означают вход частицы в наше реальное пространство (например, с *«того света»*) и выход из него (в *«тот свет»*). Что именно следует понимать под *«тем светом»*, предлагается пока не обсуждать[35].

Теперь наша задача — сконструировать физически содержательное понятие вероятности существования (возникновения, рождения и т. п.) частицы в определенный момент того самого времени, ход которого совершенно не зависит от существования-несуществования частицы.

В целях наглядности разобьем t-ось на ячейки продолжительностью δt, плотно прилегающие друг к другу, и выделим промежуток огромной продолжительности Δt ($\gg \delta t$), в течение которого будут происходить интересующие нас события. Далее введем понятие ***местопребывания*** частицы. Так будет называться упоминавшийся выше отрезок небольшой длины λ_j на X-оси, во всех — ***сплошь*** — точках которого частица поприсутствовала, существуя именно ***непрерывно*** в течение промежутка времени τ_j. Выделим для размещения λ-отрезков интервал очень большой длины Δx. Если сильно сократить масштаб по t-оси, то и все τ_j-промежутки внутри j-й ячейки (а число их огромно), и сама ячейка сожмутся в сплошную коротенькую черточку на t-оси, так что нельзя будет разглядеть просветы внутри ячейки (возникнет впечатление, что частица существует внутри ячейки непрерывно)[36]. Вот к этой черточке и окажется приуроченным все множество λ_j-отрезков. На рис. 2.11,б показаны разбросанные по очень большому интервалу Δx места пребывания частицы за время ее существования в j-й и k-й ячейках t-оси.

Строго говоря, не следует считать местопребывание частицы обязательно протяженным. Ведь частица вовсе не обязана двигаться, коль скоро решено, что участие ее во взаимодействии (с пресловутым неким объектом) состоит только в ее неоднократном исчезновении-возникновении. Протяженность нужна лишь для наглядности: сумма ***конечного*** *числа* ***протяженных*** *отрезков, разместившихся внутри огромного, но конечного Δx-интервала, представляется нам, как вполне зримая доля этого самого интервала. А вот что касается суммы* ***бесконечно большого*** *числа* ***исчезающе коротких*** *отрезков, то приходится просто-напросто постулировать, что и эта сумма составляет такую долю величины Δx, значение которой заключено между нулем и единицей.*

[35] На самом деле, если частица столкнется со своей античастицей, обе исчезнут, порождая в этом акте материальный континуум — поле. Подобный континуум в свою очередь может исчезнуть, порождая при этом частицу с античастицей.

[36] Все это относится к каждой ячейке t-оси.

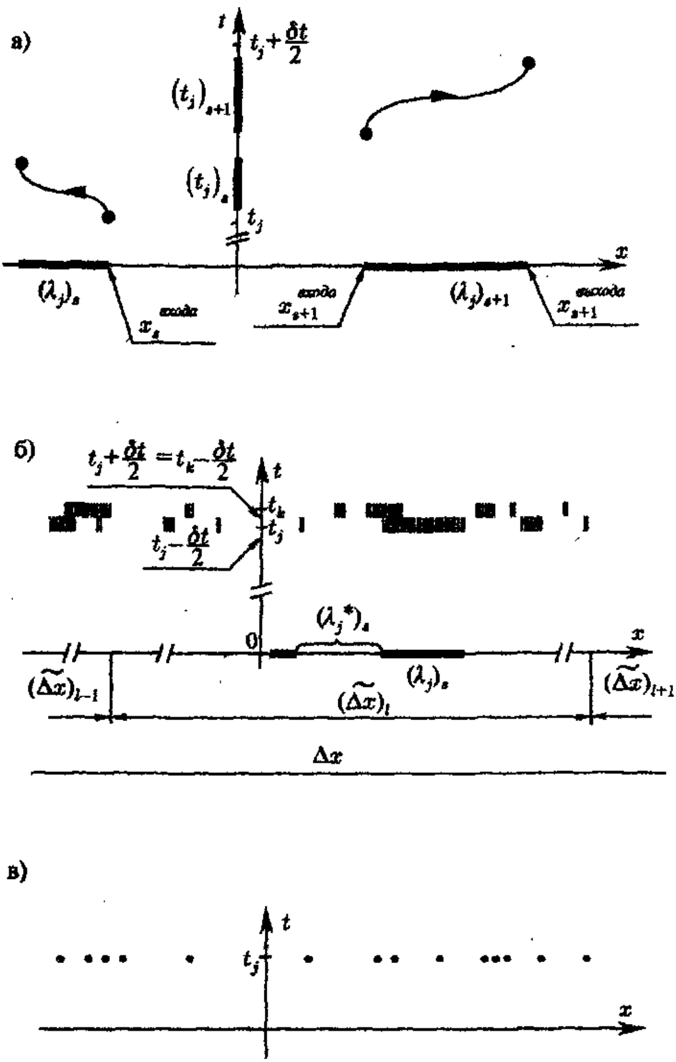


Рис. 2.11. Существование частицы в пределах j-й ячейки.

а) Крупномасштабная картина.

В течение одного из промежутков времени $(\tau_j)_s$ непрерывного существования в пределах j-й ячейки t-оси частица прошла путь длиной $(\lambda_j)_s$.

б) Масштаб по оси времени сильно сокращен.

Показаны местопребывания частицы за время существования ее в пределах j-й ячейки t-оси. На интервале $\widetilde{\Delta x}$, который является лишь очень малой частью интервала Δx, умещается все же много (N_j) мест, поскольку $(\lambda_{j,\text{макс}}+\lambda^*_{j,\text{макс}}) \ll \widetilde{\Delta x}$.

в) Очень мелкомасштабная картина.

Единственное, что хорошо видно, так это, что число актов возникновения-исчезновения бесконечно велико.

Таким образом, открывается возможность поставить в соответствие ***точке*** t-оси (***мгновению***) определенное число — число пространственно разобщенных мест пребывания частицы. Это очень важное обстоятельство, поскольку t-ось является континуумом, а, тем не менее, необходимо образовать понятие вероятности возникновения-существования-исчезновения частицы именно в ***момент*** времени.

По аналогии с тем, как это было сделано в § 2.4, предлагается назвать вероятностью существования (она же степень заполнения j-й ячейки t-оси) ту долю интервала Δx, в точках которого побывала частица, пока она существовала (хотя и не непрерывно) именно в j-й ячейке t-оси. То есть назовем вероятностью существования частицы (степенью заполнения частицею ячейки оси времени) величину $\frac{\Delta x(t_j,\Delta t,x)}{\Delta x}$, где числитель представляет собой сумму длин всех λ_j-отрезков, причем:

$$\Delta x(t_j,\Delta t,x)=\int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\widetilde{n}(t_j,\Delta t,x')\cdot dx'\equiv\Delta x_j(\Delta t,x);$$

$$\widetilde{n}(t_j,\Delta t,x')=\begin{cases}1, & \text{если частица, существуя в } j\text{-й ячейке } t\text{-оси, присутствует в точке } x';\\ 0, & \text{если частица, существуя в } j\text{-й ячейке } t\text{-оси, отсутствует в точке } x'.\end{cases}$$

(Простоты ради будем далее считать, что длина интервала $\Delta x_j(\Delta t)$ не зависит от величины x — положения центра Δx-интервала на X-оси.)

Таким образом, ячейки времени («мгновения») могут ***физически*** отличаться друг от друга — протяженностью пространственного интервала, в точках которого присутствует частица, существуя в то или иное «мгновение». Естественно, с ростом числа ячеек, то есть с увеличением продолжительности Δt-промежутка число актов возникновения-исчезновения частицы в одной определенной (j-й) ячейке t-оси может и уменьшиться, и увеличиться[37]. Это обстоятельство отображено зависимостью $\widetilde{n}$ еще и от Δt.

---

[37] Описание ***вечного*** существования ***свободной*** частицы выглядит следующим образом. Присутствуя внутри Δx-интервала, частица должна успеть посуществовать во всех t-ячейках, уместившихся на Δt-промежутке, так как все ячейки этого промежутка физически идентичны. Поэтому, чем больше продолжительность промежутка Δt, тем меньшая доля интервала Δx приходится на одну определенную (j-ю) ячейку t-оси.

Теперь подсчитаем число мест пребывания частицы (за время существования ее в j-й ячейке), приходящихся на такой интервал $\widetilde{\Delta x}$, который удовлетворяет неравенствам

$$\left(\lambda_{j,\text{макс}} + \lambda^*_{j,\text{макс}}\right) \ll \widetilde{\Delta x} \ll \Delta x\ ^{38)}.$$

Обозначим это число символом $N_j(\Delta t, \widetilde{\Delta x})$. Введем такую величину, как число мест пребывания (k_j), приходящееся на 1 см X-оси: $k_j(\Delta t) = \frac{N_j(\Delta t, \widetilde{\Delta x})}{\widetilde{\Delta x}}$.

Что касается параметра λ_j, то этим же символом обозначим и величину, уже усредненную по числу мест пребывания:

$$\lambda_j \equiv \langle\lambda_j\rangle_{N_j} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{s=N_j}(\lambda_j)_s}{N_j(\Delta t, \widetilde{\Delta x})}.$$

Далее в полной аналогии с тем, как это было сделано в § 2.4, придем к промежуточной формуле для мгновенной и квазивсеохватной (так как $\Delta x \neq \infty$) степени заполнения:

$$\langle\widetilde{n}(t_j, \Delta t)\rangle_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \sum_{\iota=1}^{\iota_{\max}(\Delta x)} (\lambda_j)_\iota \cdot \left[k_j(\Delta t)_\iota \cdot (\widetilde{\Delta x})_\iota\right].$$

Здесь, как и прежде, $\iota_{\text{макс}}$ есть целое число интервалов длиной $\widetilde{\Delta x}$, плотно примыкающих друг к другу и умещающихся на большем интервале Δx, причем допустимо выбирать и численно разные значения $\widetilde{\Delta x}$. Естественно, что $\sum\limits_{\iota=1}^{\iota_{\text{макс}}(\Delta x)} (\widetilde{\Delta x})_\iota = \Delta x$, и потому $\iota_{\text{макс}} = \iota_{\text{макс}}(\Delta x)$.

Руководствуясь теперь точно такими же соображениями, которые были использованы в § 2.4, приходим к формуле для усредненной по бесконечно большому пространственному интервалу степени заполнения в виде

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \langle\widetilde{n}(t_j, \Delta t)\rangle_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \left\{\frac{1}{\Delta x} \cdot \iota_{\text{макс}}(\Delta x) \cdot \widetilde{\Delta x} \cdot \lambda_j \cdot k(t_j, \Delta t)\right\} =$$

---

[38] Заметим, что пространственный интервал $\widetilde{\Delta x}$, удовлетворяющий написанному неравенству, найдется для любой физической реальности, если признать, что $\Delta x \to \infty$, а величина $(\lambda_{j,\text{макс}} + \lambda^*_{j,\text{макс}})$ ограничена сверху. Возможность признать, что $\Delta x \to \infty$ для любой физической реальности, справедливо считать очевидной, ибо то, что мы называем пространством, бесконечно протяженно. Что же касается величины λ^*_j, то она не может быть ограничена сверху лишь для свободной частицы, поскольку такая частица всего лишь один раз возникала в j-й ячейке t-оси. Однако для описания состояния именно свободной частицы и не нужно привлекать статистический способ. Следует также иметь в виду, что если λ-интервалы и промежутки между ними исчезающе малы, то и интервал $\widetilde{\Delta x}$, пригодный для использования его с целью усреднения по пространству, можно выбрать тоже исчезающе малым.

$$= \lim_{\Delta x \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\overline{\Delta x}} \cdot \widetilde{\Delta x} \cdot \lambda_j \cdot k(t_j, \Delta t) \right\} = \lambda_j \cdot k(t_j, \Delta t).$$

Наконец, переходя к пределу $\Delta t \to \infty$, получаем окончательное выражение для мгновенной и всеохватной степени заполнения одной из бесконечного множества ячеек оси времени:

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \lambda(t_j) \cdot k(t_j, \Delta t) \right\} \equiv \widetilde{N}(t_j), \tag{2.22}$$

причем $0 < \widetilde{N}(t_j) \leqslant 1$.

Естественно, после того, как мгновенную степень заполнения мы сделали всеохватной, усреднив ее по бесконечно протяженному пространству, ее — величину $\widetilde{N}(t_j)$ — ***необходимо считать одинаковой для каждой точки пространства.***

Теперь уже нетрудно интерпретировать величину $\widetilde{N}(t)$ физически содержательным образом. Это та доля возникающей (с равной вероятностью в любой точке пространства) точечной частицы, которая существует на момент времени t [39]. Конечно, следует иметь в виду, что это та доля частицы, которая возникла в некоторое мгновение и очень недолго просуществовала. Однако время идет, и на смену этой доле приходит следующая, существующая столь же недолго, и т. д. Своеобразный «процесс рождения» точечной частицы представлен на рис. 2.12. (Процесс исчезновения идет в обратную сторону.)

Вполне допустима ситуация, в которой частица вообще существует только в течение исчезающе короткого промежутка времени (например, только внутри всего одной — j-й — ячейки t-оси). Единственная возможность для столь недолго живущей частицы побывать во всех точках бесконечно протяженной X-оси это — возникать и исчезать бесконечно много раз на каждом сантиметре X-оси в самых разных ее местах, побывав в итоге повсюду. Далее, если считать исчезающе короткой продолжительность δt ячейки, придется считать столь же коротким и отрезок длиной $\lambda(t_j)$. Однако, поскольку в рассматриваемой ситуации величина $k(t_j)$ возрастет до бесконечности, оказывается, что

$$\lim_{k(t_j) \to \infty} \widetilde{N}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = t_j, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq t_j. \end{cases}$$

Следует отметить, что хотя и недопустима ситуация, в которой $\widetilde{N}(t)$ равна нулю точно в каждый момент времени [40], тем не менее, вполне возможно, что протяженность $\lambda(t)$ одинакова для любого t при условии, что $\lambda \to 0$. В этом случае величина $k(t)$ одинакова (и исчезающе мала) для любого t. Тем самым и степень заполнения $\widetilde{N}(t)$ одинаково исчезающе

[39] Этот момент отсчитывается от некоторого начала в соответствии с независимым от акта возникновения частицы ходом времени.

[40] Тогда бы оказалось, что частица, присутствуя в пространстве, не существует ни единого мгновения во времени.

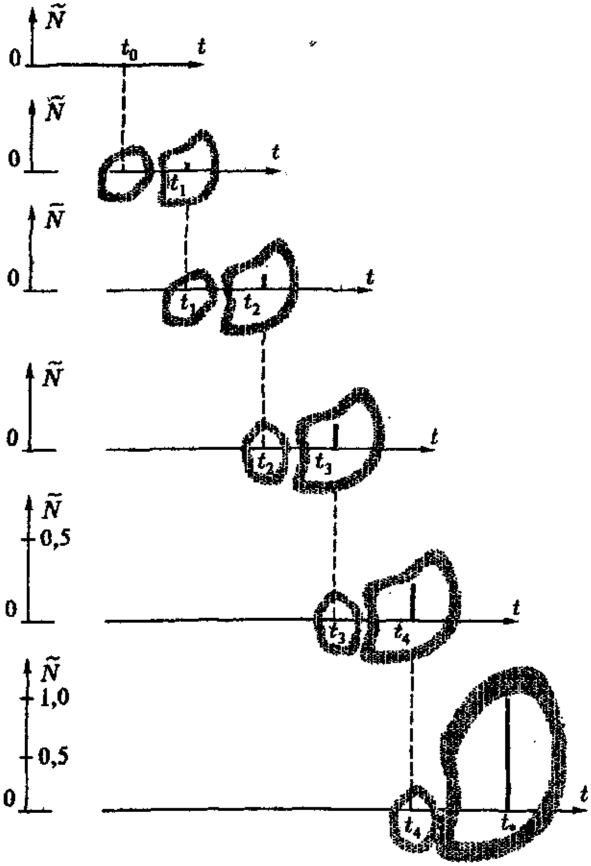


Рис. 2.12. Статистический способ описания возникновения точечной частицы На рисунке представлен процесс рождения частицы (который происходит в любой точке бесконечно протяженного пространства с равной вероятностью).

Возникшая в некоторый момент времени доля частицы (меньшая единицы) далее не исчезает, а лишь растет. Можно сказать и по-другому: та доля частицы (величина $\tilde{N}$), которая существовала в момент времени t_1, уже не существует в момент времени t_2.

К моменту t_* частица существует уже целиком.

мала для всех t. Вполне уместно сказать тогда, что частица в целом существует (возникает) с равной вероятностью в любой момент времени и в любой точке пространства[41].

[41] Подобная формулировка отражает неучастие частицы в каком бы то ни было взаимодействии (см. рис. 2.10).

Если окажется, что в реальной ситуации величина $(\lambda_{\text{макс}} + \lambda^*_{\text{макс}})$ ограничена сверху, можно ввести понятие квазилокальной степени заполнения t-состояния (иначе говоря, — такой вероятности существования (возникновения) частицы в момент времени t, которая зависит еще и от координаты точки пространства), положив:

$$\widetilde{N}_{\text{кваз}}(t, x) = \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\widetilde{\Delta x}} \cdot \int\limits_{x - \frac{\widetilde{\Delta x}}{2}}^{x + \frac{\widetilde{\Delta x}}{2}} \widetilde{n}(t, \Delta t, x') \cdot dx' \right\},$$

где $\widetilde{\Delta x}$ — ограниченный сверху интервал, удовлетворяющий условию

$$(\lambda_{\text{макс}} + \lambda^*_{\text{макс}}) \ll \widetilde{\Delta x}.$$

Новое понятие можно использовать в ситуации, в которой действуют два фактора: меняющийся в пространстве очень резко — отвечающий за колебания в ***пространстве*** величины $\widetilde{n}(x)$ — и меняющийся плавно (отвечающий за изменение уже величины $\widetilde{N}_{\text{кваз}}(t, x)$ [42]) внутри пространственного интервала Δx, огромного по сравнению с $\widetilde{\Delta x}$).

Теперь, используя введенные понятия, стоит попробовать описать события, разыгрывающиеся в пространственно-временном континууме, по примеру того, как это было сделано в § 2.4.

Обратившись к рис. 2.11, видим, что, существуя в пределах одной и той же (j-й) ячейки времени, частица присутствует в ***разных*** местах X-оси, — удаленных друг от друга на самые разные, в том числе и на сколь угодно большие расстояния. Напомню, что по условию частица в пространстве не перемещается, а потому и скоростью не обладает. Тем не менее, возникновение частицы означает возникновение материального объекта, каковой обязан обладать, по крайней мере, собственной энергией. Следовательно, акты возникновения каждой доли частицы автоматически сопровождаются, если так можно выразиться, ***возникновением*** энергии.

Конечно, все вышеописанное не возбраняется интерпретировать совершенно иначе — допустить, что одно число частиц (абсолютно идентичных по всем своим характеристикам-константам) прекращает свое существование ***одновременно во множестве*** точек пространства, а другое число частиц (абсолютно идентичных по всем своим характеристикам-константам) в то же мгновение (и тоже одновременно) возникает во множестве тех же или других (или и тех, и других) точек пространства. Подобное не вызывало бы никакого удивления. Однако, если считать, что частица всего одна, придется признать, что именно ***одна точечная*** частица способна взаимодействовать с бесконечно протяженным телом взаимодействия во всех его точках одновременно [43].

---

[42] То есть — за изменение отношения $\frac{\lambda^*}{\lambda}$ внутри интервала $\widetilde{\Delta x}$.

[43] Разумеется, это вынужденное признание. Мы сами его себе навязали, решив использовать именно статистический способ описания.

Очевидно, что введенное ранее число мест пребывания частицы совпадает с числом точек взаимодействия (оно же — число актов исчезновения-возникновения).

Подводя итоги всему сказанному в этом параграфе, мы приходим к важному выводу. Лишь при одном условии таким понятиям, как существование точечной частицы в течение исчезающе короткого промежутка времени и вероятность этого существования[44], можно придать физическую содержательность, — если допустить, что частица способна прекращать и возобновлять свое существование любое число раз (в диапазоне от 0 до ∞) на единицу длины пространства.

Если считать частицу взаимодействующей так, как это было описано, все мгновения вечности необходимо считать физически различными. Простоты ради давайте предположим, что частица существует лишь одно мгновение, отличающееся от всех остальных[45]. В рамках статистического способа описания состояния частицы это означает, что одна единственная ячейка t-оси обменивается частицей со всеми остальными ячейками. ***Но это автоматически означает и необходимость признать, частицу взаимодействующей в это мгновение с любым количеством точек бесконечно протяженного пространства с равной вероятностью. Это, в свою очередь, равносильно признанию, что энергия, полученная частицей в результате ее участия во взаимодействии, принимает с равной вероятностью любое значение от нуля до бесконечности.*** Конечно, при этом необходимо считать, что ось энергий (E-ось) присутствует в каждое мгновение вечности. Подчеркну, что сейчас речь идет именно и только об энергии, приобретенной частицей ***исключительно в акте ее возникновения***. Мне кажется разумным назвать эту энергию собственной. Следует заметить, что если в пространственно-временно́м континууме еще до возникновения частицы присутствует некое структурированное поле[46], к упомянутой энергии в момент возникновения частицы автоматически прибавляется и потенциальная энергия взаимодействия ее еще и с этим полем.

Таким образом, можно применить статистический способ описания существования такой точечной частицы, которая была бы способна возникать из «небытия» и в него же возвращаться ***в результате взаимодействия с пространством***[47]. При этом, если частица возникает на лишь мгно-

[44] Следует помнить, что эта вероятность — величина, усредненная по бесконечно протяженному пространственному интервалу.

[45] Достаточно, чтобы «это» — особое — мгновение отличалось всего лишь от одного — «другого» мгновения вечности. Тогда временной промежуток, разделяющий любые мгновения, превратится из чисто математической в физическую характеристику.

[46] Примером такого поля является созданное экспериментатором.

[47] На самом деле вечно существующая частица может в результате изменения, например, интенсивности взаимодействия с силовым полем переходить из одного состояния (в котором частица могла бы пребывать вечно, будь силовое поле стационарным) в другое. Именно подобный процесс можно описать как исчезновение частицы (из одного

вение, то интервал энергий ΔE, внутри которого величина $\widetilde{N}(E) \to 0$ (***одинаково*** исчезающе мала), бесконечно широк[48], а промежуток времени существования Δt, внутри которого $\widetilde{N}(t) \to 1$, бесконечно узок. Поэтому можно написать:

$$\text{если} \quad \lim_{\widetilde{N}(E)\to 0} \Delta E = \infty, \quad \text{то} \quad \lim_{\widetilde{N}(t=t_*)\to 1} \Delta t = 0.$$

Тогда не возбраняется (но не более того) связать величины ΔE и Δt *соотношениями* $\Delta E \sim \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}$; $\Delta t \sim \lim\limits_{\Delta E\to \infty} \frac{1}{\Delta E}$, не забывая, конечно, о необходимости правильной их интерпретации.

Аналогичная операция была проделана в самом конце §2.4.

Если частица существует вечно и *в таком состоянии*, в котором ее энергия не меняется со временем, то величина $\widetilde{N}(t) \to 0$ (***одинаково*** исчезающе мала для любого t) в неограниченно продолжительном промежутке Δt, а величина $\widetilde{N}(E) \to 1$ внутри бесконечно узкого интервала ΔE. Тогда можно написать:

$$\text{если} \quad \lim_{\widetilde{N}(E=E_*)\to 1} \Delta E = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{\widetilde{N}(t)\to 0} \Delta t = \infty.$$

Тогда не возбраняется (но не более того) связать величины ΔE *и* Δt соотношениями $\Delta E \sim \lim\limits_{\Delta t\to \infty} \frac{1}{\Delta t}$; $\Delta t \sim \lim\limits_{\Delta E\to 0} \frac{1}{\Delta E}$, не забывая, конечно, о необходимости правильной их интерпретации.

А теперь — замечание по поводу возникновения из *«небытия»* и ухода в *«небытие»*.

На самом деле, вечно существующая частица может в результате взаимодействия (например, с силовым полем) перейти из одного стационарного состояния в другое — *исчезнуть* из одного состояния и *возникнуть* в другом[49]. Именно подобное событие и допустимо описать, используя экзотическую терминологию.

§2.6. Итоги

Подводя итоги всему сказанному в главе 2, хотелось бы обратить внимание читателя на то, что существуют две точки зрения на то, как описывать состояние точечной частицы.

А. Доквантовая («классическая») точка зрения.

1. *Признаются неопределяемыми понятиями пространство и время.*

стационарного состояния) и возникновение (в другом стационарном состоянии). При этом безразлично, в какой именно точке пространства частица «исчезает», а в какой «возникает».

[48] Сказанное означает, что энергия частицы, просуществовавшей всего лишь мгновение, с одинаковой вероятностью равна любому значению из этого интервала.

[49] Замечу, что при этом чаще всего совершенно безразлично, в какой точке присутствовала частица в момент перехода из одного состояния в другое.

Тем не менее, в качестве ни от чего не зависящей физической характеристики (независимой переменной во всех соотношениях и уравнениях) принимается только момент времени (точка на t-оси)[50].

2. ***Принимаются кинематические определения скорости и ускорения точечной частицы выражениями:***

$$\vec{V}_{\text{частицы}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{2.23}$$

$$\vec{a}_{\text{частицы}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.24}$$

Следует учесть, что в этих выражениях $\vec{r}$ — не только радиус-вектор точки пространства, в которой в момент времени t присутствует точечная частица. Это не только характеристика пространственного континуума, но еще и характеристика частицы, существующая и движущаяся только вместе с частицей. Строго говоря, в выражениях (2.23), (2.24) следовало бы заменить символ $\vec{r}$ символом $\vec{r}_{\text{частицы}}$.

После принятия определений (2.23), (2.24) можно дать определения и другим величинам.

а) Определим годограф с помощью выражения

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t=0) + \int\limits_0^t \vec{V}(t') \cdot dt'. \tag{2.25}$$

б) Выразив вектор скорости через проекции на оси координат, придем к трем соотношениям:

$$x(t=\Delta t) = x(t=0) + \int\limits_0^{\Delta t} \vec{V}(t) \cdot dt; \tag{2.26}$$

$$y(t=\Delta t) = y(t=0) + \int\limits_0^{\Delta t} V_y(t) \cdot dt; \tag{2.27}$$

$$z(t=\Delta t) = z(t=0) + \int\limits_0^{\Delta t} V_z(t) \cdot dt. \tag{2.28}$$

Исключая из этих соотношений время, получаем уравнение линии, во всех точках которой частица поприсутствовала за время Δt. В результате ***обретает физическую содержательность понятие траектории частицы***

[50] Таким образом, в п. 1 явно содержится противоречие.

в) Располагая уравнением траектории, можно вычислить путь, пройденный частицей за время Δt:

$$l(\Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} \left|\vec{V}_l(t')\right| \cdot dt'. \qquad (2.29)$$

Здесь $|\vec{V}_l|$ — модуль вектора скорости в точке траектории [51].

3. *Принимается кинематическое определение импульса частицы выражением*

$$\vec{P}_{\text{частицы}} = m_{\text{частицы}} \cdot \vec{V}_{\text{частицы}} = m_{\text{частицы}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (2.30)$$

причем масса движущейся частицы может зависеть от ее скорости.

4. *Принимается в качестве соотношения, устанавливающего связь между характеристиками частицы и окружающей обстановки, уравнение*

$$\frac{d}{dt}\left(m_{\text{частицы}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{\mathrm{F}}(\vec{r}, t) \text{ [52]}, \qquad (2.31)$$

где $\vec{\mathrm{F}}(\vec{r}, t)$ — сила — и есть характеристика пространственно-временного континуума, в котором вынуждена пребывать частица. Зависимость $\vec{\mathrm{F}}$ от $\vec{r}$ и t считается известной.

Создается впечатление, что уравнение (2.31) содержит одну неизвестную величину ($\vec{r}$), которая является функцией одной переменной (t). Тем не менее, если считать, что сила $\vec{\mathrm{F}}(\vec{r}, t)$ характеризует именно пространственно-временной континуум (силовое поле), то в ***правой*** части уравнения (2.31) ***обе*** величины — и $\vec{r}$, и t — должны считаться ***независимыми*** переменными. Таким образом, полагая, что уравнение содержит только одну неизвестную ($\vec{r}$), мы фактически отождествляем величину $\vec{r}$ — характеристику пространственного континуума (радиус-вектор ***точки пространства***) с величиной $\vec{r}$ — характеристикой частицы [53]. При этом мы не спрашиваем себя, на каком основании мы так поступили. Однако, когда после этого мы решим уравнение (2.31) и в результате получим зависимость $\vec{r}(t)$, а затем — с помощью определений (2.23),

---

[51] Этот вектор направлен по касательной к траектории в каждой ее точке. В случае неравномерного движения частицы по траектории длина этого вектора зависит от времени. Формула (2.29) учитывает, что частица могла проходить некоторые участки траектории или даже всю ее неоднократно.

[52] Это уравнение известно как второй закон Ньютона. Значение массы может зависеть от значения скорости (то есть от значения производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$), но в этом случае зависимость должна считаться известной.

[53] Вот так разрешилось противоречие, содержавшееся в п. 1: в рамках доклинтового способа описания движения самостоятельным понятием фактически признается только время.

(2.24) — и зависимости $\vec{V}(t)$, $\vec{a}(t)$, не нужно будет удивляться, что каждому мгновению отвечают — ***одновременно*** — ***точные*** значения величин $\vec{r}, \vec{V}, \vec{a}$. Никаких «неопределенностей» $\Delta x(t), \Delta V_x(t), \Delta a_x(t)$, подобных тем, о которых шла речь в §§ 2.4 и 2.5.

Б. Квантовая («неклассическая») точка зрения [54].

1. *Признаются неопределяемыми понятиями пространство и время, и в дальнейшем считается, что* ***обе*** *величины — и* $\vec{r}$, *и* t *— являются характеристиками* ***именно и только*** *пространственно-временнóго континуума и* ***независимыми*** *переменными.*
2. *Признается необходимым отказаться от использования понятия «координат* ***частицы****», от* ***кинематических*** *определений* (2.23), (2.24) *скорости и ускорения (автоматически отпадают определения* (2.25)–(2.29)), *и от* ***второго закона Ньютона****. Особо подчеркну:* ***совместимы только все четыре отказа*** [55].
3. *Признается неопределяемым понятием импульс*, что позволяет ввести наряду с пространственно-временным еще и $\vec{P}$-континуум, существующий вечно и присутствующий в каждой точке пространства. Замечу, что величина, обозначенная символом $\vec{P}$, теперь не считается импульсом ***частицы***.
4. *Принимается динамическое определение скорости частицы выражением*

$$\vec{V}_{\text{частицы}} = \frac{\vec{P}_{\text{частицы}}}{m_{\text{частицы}}(\vec{P}_{\text{частицы}})}. \tag{2.32}$$

5. *Принимается определение ускорения частицы выражением*

$$\vec{a}_{\text{частицы}} = \frac{d\vec{V}_{\text{частицы}}}{dt}.$$

Здесь следует отметить, что в рамках доквантового подхода сначала устанавливают ускорение, вызванное некоей внешней силой, а затем находят скорость по формуле

$$\vec{V}_{\text{частицы}}(t) = \vec{V}_{\text{частицы}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_{\text{частицы}}(t') \cdot dt'.$$

---

[54] Строго говоря, следовало бы употребить термин «***статистическая***» точка зрения.

[55] Отказ от математических выражений, играющих роль определений понятий вовсе не означает, что сами понятия скорости, ускорения, траектории, пройденного пути лишаются физической содержательности. Однако, поскольку они не являются самостоятельными, им необходимо дать определения. И вот оказывается, что в рамках одного способа описания состояния частицы, например, кинематическое определение скорости частицы совместимо с определениями других понятий, а в рамках другого способа (статистического) несовместимо.

В рамках квантового подхода — только наоборот: зная зависимость скорости от времени, можно найти ускорение, испытываемое частицей.

После всего сказанного очевидно, что потребуется предложить выражение, играющее роль определения импульса именно частицы: ведь в нашем распоряжении пока лишь необъятный $\vec{P}$-континуум.

В качестве примера можно предложить выражение

$$P_{x,\text{частицы}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \cdot dx, \tag{2.33}$$

где подынтегральная функция представляет собой ту долю P_x-оси, которая приходится на пространственную ячейку (длиной dx), координаты центра которой есть x, y, z. С целью увеличить наглядность можно представить функцию f в виде

$$f(x, y, z) = \widehat{P}\left(\frac{d\widetilde{N}(x, y, z)}{dx}\right). \tag{2.34}$$

Здесь: $\widehat{P}$ — оператор, преобразующий функцию координат x, y, z (величину $\frac{d\widetilde{N}(x,y,z)}{dx}$) в упомянутую выше функцию f; $\frac{d\widetilde{N}(x,y,z)}{dx} \cdot dx$ — доля частицы, заполняющая определенную пространственную ячейку X-оси[56].

Естественно, отказавшись от второго закона Ньютона, придется искать какое-то иное соотношение, позволяющее установить связь между величинами, характеризующими и состояние частицы, и окружающую обстановку. Очевидно, что если иметь намерение в дальнейшем обратиться к выражению (2.33), то характеризовать состояние частицы должна величина $f(x, y, z)$. Однако, учитывая функциональную связь в виде (2.34), это должна быть все-таки величина $\widetilde{N}(x, y, z)$, причем необходимо еще найти способ, позволяющий ставить в соответствие величине $\frac{d\widetilde{N}}{dx}$ величину f.

§2.7. Понятие средней скорости

В рамках доквантовой механики скорость частицы может быть функцией только времени. Поэтому, справедливо считая выражение (2.23) определением именно мгновенной скорости, можно образовать еще одно понятие — скорости, усредненной по времени. Традиционное определе-

[56] Если оперировать понятиями математики, то нужно сказать, что функция координат — величина f — должна быть, в свою очередь, функцией другой функции координат — величины $\frac{d\widetilde{N}(x,y,z)}{dx}$.

ние этой ***векторной*** величины таково:

$$\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\vec{V}(t')\cdot dt' =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\cdot\left\{\vec{r}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)-\vec{r}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)\right\} = \frac{\Delta\vec{r}\,(\Delta t, t)}{\Delta t}. \quad (2.35)$$

Зависимость величины $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t}$ от момента времени обусловлена тем, что центр Δt-промежутка («точку» t) можно сдвигать по оси времени.

Допустимо, конечно, перейти к пределу $\Delta t \to \infty$, после чего возникнет понятие ***стационарного*** значения средней скорости (по-прежнему ***векторной*** величины).

Разумеется, поскольку за время Δt частица проходит все точки траектории (причем некоторые — неоднократно), можно образовать еще и понятие *средней путевой* скорости. Однако это будет уже скалярная величина:

$$\langle V\rangle_l = \frac{l(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (2.36)$$

где l — путь, пройденный частицей за время Δt по некоторой траектории между точками, разделенными интервалом $\Delta\vec{r}$.

Поскольку за один и тот же промежуток времени Δt имеет место соотношение $l(\Delta t) \geqslant |\Delta\vec{r}|$, для скоростей справедливо соотношение $\langle V\rangle_l \geqslant \left|\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t}\right|$.

Если мы для каких-то практических целей собираемся использовать понятие средней путевой скорости, то обязаны считать, что в каждый момент времени (из промежутка Δt) в каждой точке пространства на траектории абсолютное значение скорости частицы одно и то же. Точно так же, решившись использовать понятие средней по времени скорости, мы обязаны считать, что в каждый момент времени (из промежутка Δt) в каждой точке пространства (из интервала $\Delta\vec{r}$) вектор скорости частицы один и то же как по модулю, так и по направлению.

Теперь необходимо выяснить, как обстоят дела со скоростью в рамках квантово-механического способа описания состояния точечной частицы. Ведь пока что, согласно сказанному в пп. 3 и 4 (с. 82), в нашем распоряжении лишь $\vec{V}$-континуум[57], в той или иной ячейке которого частица может оказаться, существуя в момент времени t и присутствуя в этот момент в точке пространства, радиус-вектор которой есть $\vec{r}$.

[57] Существующий вечно и независимо от существования частиц.

Если обратиться к квазистационарной величине $\widetilde{N}(x,t)$[58], то, как следует из сказанного в § 2.3.2,

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{V}\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)\cdot dx. \qquad (2.37)$$

Здесь: $\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)\cdot dx$ — доля точечной частицы, присутствующая в момент времени t в определенной ячейке X-оси; $\widehat{V}$ — оператор, действующий аналогично оператору $\widehat{P}$, присутствующему в выражении (2.34). Следует иметь в виду, что в результате подобной операции возникает величина с размерностью скорости (V) или импульса (P), умноженная на $\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)$:

$$\widehat{V}\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right) = \mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx};$$
$$\widehat{P}\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right) = \mathcal{P}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}.$$

Таким образом, на $\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)\cdot dx$-долю частицы приходится одно вполне определенное значение скорости из бесконечного их множества, содержащегося в V_x-континууме.

Но можно выразиться и по-другому, замечая, что величина

$$\mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\cdot dx$$

представляет собой долю скорости частицы, приходящуюся на пространственную ячейку (длиной dx), X-координата центра которой равна x. Именно в ней и находится в момент времени t соответствующая доля частицы.

Если использовать не квазистационарную, а стационарную степень заполнения, то $\widetilde{N}(x,t) \to \widetilde{N}(x)$, и тогда

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t\to\infty} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\cdot dx. \qquad (2.38)$$

Совершенно аналогичное выражение определяет импульс частицы:

$$\langle P_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t\to\infty} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\cdot dx. \qquad (2.39)$$

[58] Ради уменьшения громоздкости формул оставлены только X-проекции векторов.

Ясно, что

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t\to\infty} = \frac{\langle P_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t\to\infty}}{m\big(\langle P_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta t\to\infty}\big)}.$$

Если снять предел $\Delta t \to \infty$, то:

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \frac{\langle P_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t)}{m\big(\langle P_{\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}\big)}, \tag{2.40}$$

$$\langle a_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \frac{d\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t)}{dt}. \tag{2.41}$$

Именно выражения (2.39), (2.40), (2.41) и только эти выражения мы должны иметь в виду, приписывая частице как цельному объекту импульс, скорость, ускорение, если мы используем квантово-механический (статистический) способ описания состояния частицы.

Остается выяснить, какой из доквантовых средних величин — $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t}$ или $\langle V\rangle_l$ (определенных выражениями (2.35), (2.36)) — соответствует «квантово-механическая» средняя скорость, определенная выражениями:

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,y,z,t)}{dx}\cdot dx, \tag{2.42}$$

$$\langle V_{y,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,y,z,t)}{dy}\cdot dy, \tag{2.43}$$

$$\langle V_{z,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}(x,y,z,t)}{dz}\cdot dz. \tag{2.44}$$

Давайте сначала, простоты ради, перейдем к менее громоздким конструкциям — к ***стационарным*** значениям скоростей:

квантовому

$$\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t=\infty} = \int\limits_{\widetilde{N}(x=-\infty)}^{\widetilde{N}(x=+\infty)} \mathcal{V}\cdot d\widetilde{N}(x); \tag{2.45,а}$$

доквантовым

$$\begin{cases} \langle V_x\rangle_{\Delta t=\infty} = \lim\limits_{\Delta t\to\infty}\dfrac{\Delta x(\Delta t)}{\Delta t}; & (2.45,б)\\[2ex] \langle V_x\rangle_{l(\Delta t=\infty)} = \lim\limits_{\Delta t\to\infty}\dfrac{l(\Delta t)}{\Delta t}. & (2.45,в)\end{cases}$$

Конечно, величину, определенную выражением (2.45,а), приходится считать усредненной по времени, поскольку таковой является величина подынтегральная. Однако сам интеграл — это не путь, пройденный частицей, а ее скорость[59].

И вот теперь пора обратить особое внимание на интерпретацию доквантового определения средней по времени (***но не средней путевой***) скорости выражением (2.35). Целесообразно представить его сейчас его в виде:

$$\langle \vec{V} \rangle_{\Delta t} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t} \cdot \displaystyle\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \vec{V}(t') \cdot dt'; & (2.46,\text{а}) \\[2ex] \dfrac{\Delta \vec{r}(\Delta t)}{\Delta t}. & (2.46,\text{б}) \end{cases}$$

Согласно выражению (2.46,б), ***частица должна считаться исчезнувшей в одной точке пространства*** (на одной границе пространственного интервала) ***в один момент времени и возникшей в другой точке пространства*** (на другой границе пространственного интервала) ***в другой момент времени.*** Нет никакой необходимости прибегать к понятиям мгновенной скорости и траектории движения частицы. Поэтому выражение (2.46,б) одинаково справедливо и рамках доквантовой механики, и в рамках квантовой механики.

Очевидно, что мы вынуждены считать совпадающими «квантово-механическую» скорость, определенную соотношением (2.45,а), и «доквантовую» («классическую») скорость, определенную соотношением (2.45,б). ***Однако в рамках статистического способа описания состояния точечной частицы не существует выражения для скорости, которую можно было бы отождествить со средней путевой скоростью, определенной выражением*** (2.45,в). Сказанное, конечно, не означает, что не существует самой траектории и путевой скорости: принципиально невозможно построить лишь математическую конструкцию, которая сыграла бы роль определения физической характеристики — вышеупомянутой скорости.

Имеет смысл отметить одно обстоятельство. Если частица считается движущейся, ее средняя путевая скорость не может быть равной нулю в принципе. А вот стационарная средняя скорость, определенная выражением

$$\langle \vec{V} \rangle_{\Delta t=\infty} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta \vec{r}(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (2.47)$$

равна нулю, если частица движется внутри ограниченного пространственного интервала. Величина $\langle \vec{V} \rangle_{\Delta t=\infty}$ отлична от нуля только, если частица ***вечно*** движется прямолинейно хотя бы вдоль одной из осей координат.

---

[59] Подынтегральная величина представляет собой стационарное (неизменное во времени) распределение скорости частицы по всем точкам X-оси.

Теперь полезно рассмотреть несколько конкретных примеров.

1. Предположим, что точечная частица вечно осциллирует около некоего центра (удобно считать его началом пространственных координат) и, следовательно, попадает в выбранную точку пространства (в точку X-оси) многократно. Тогда понятие скорости, ***усредненной по времени*** и притом ***локальной*** (то есть — приуроченной постоянно к одной и той же точке пространства), обладает физической содержательностью, и эту скорость следовало бы определить каким-то выражением.

Пусть, в рамках доквантового способа описания такого состояния частицы $x = x_0 \cdot \sin\omega t$; $V_x = V_0 \cdot \cos\omega t$. Тогда $V_x(x) = \pm V_0\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$. Поскольку $x = x(t)$, создается обоснованное впечатление, что $V_x(x) \to \to V_x(x,t)$, а в таком случае

$$\langle V_x(x)\rangle_{\Delta t=\infty} = \lim_{\Delta t\to\infty}\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} V_x(x,t)\cdot dt\right\}. \qquad (2.48)$$

Ясно, однако, что одинаковые по модулю, но противоположные по знаку значения подынтегральной функции (скорости $V_x(x,t)$) в любой точке X-оси будут встречаться одинаково часто. Поэтому с точки зрения математики просто нельзя сказать, что такой интеграл (величина $\langle V_x(x)\rangle_{\Delta t=\infty}$) чему-то равен. Но, если опираться (не говоря об этом вслух) на понятие числа значений локальной скорости, приходящегося на должным образом подобранный промежуток времени $(\widetilde{\Delta t})$ [60], выражение (2.48) становится вполне приемлемым. Правда, тогда $\langle V_x(x)\rangle_{\Delta t=\infty} = 0$, причем это равенство остается в силе, каков бы ни был вид зависимости $x(t)$, но при условии, что частица движется только внутри ограниченного пространственного интервала (в рассматриваемом примере его длина равна $2x_0$).

В рамках статистического способа описания такого движения частицы стационарное значение скорости каждой ее доли (в каждой точке вышеупомянутого интервала) равно нулю: $\langle V_x(x)\rangle_{\Delta t=\infty} = 0$. Следовательно, равна нулю и скорость частицы в целом: $\langle V_{x,\text{частицы}}\rangle_{\Delta t=\infty} = 0$.

2. Если частица движется вечно вдоль прямой линии и в одном направлении, то ее путевая скорость совпадает со средней по времени в рамках как доквантового, так и статистического способов описания. Что же касается мгновенной скорости, то, если частица считается движущейся не только прямолинейно, но еще и равномерно, то в любой момент времени и в любой точке пространства ее скорость мгновенная (оказывающаяся автоматически и локальной) ***обязана считаться совпа-***

---

[60] То есть опираться на понятие частоты колебаний скорости. При этом необходимо потребовать выполнения неравенства $\widetilde{\Delta t} \gg \frac{2\pi}{\omega}$.

дающей как со средней по времени, так и со средней путевой скоростью (две последние определены выражениями (2.45,а,в).

3. Если частица участвует в двух независимых движениях — осциллирующем (около некоего центра) и поступательном (самого центра), — можно ввести понятия: результирующей скорости ***частицы*** ($\vec{V}_{\text{рез}}$), ее осцилляционной (назову ее так) скорости ($\vec{V}_{\text{осц}}$), и скорости самого центра ($\vec{V}_{\text{ц}}$).

Выясним сначала, каким представляется состояние частицы в рамках доквантового способа описания. Пусть, например, $V_{\text{рез}}(t) = V_a \cdot \sin \omega t + V_{\text{ц}}$, причем амплитуда осцилляционной скорости $V_a \gg V_{\text{ц}}$. Тогда среднее по времени значение результирующей скорости частицы таково:

$$\langle V_{\text{рез}} \rangle_{\Delta t \gg \frac{2\pi}{\omega}} = V_{\text{ц}}.$$

Теперь выясним, каким представляется состояние частицы в рамках статистического способа описания.

Совершенно очевидно, что центр, около которого вечно осциллирует точечная частица, играет роль ее центра инерции. Поэтому иногда (ради удобства описания) допустимо и целесообразно отождествить с ним саму частицу (то есть центру приписать все характеристики-константы частицы).

Поскольку в нашем примере упомянутый центр вечно движется прямолинейно и равномерно вдоль X-оси со скоростью $V_{\text{ц}}$, его придется считать присутствующим с равной вероятностью в любой точке X-оси в любой момент времени. Однако ясно, что непосредственно частица никак не может считаться свободной, и, следовательно, квазистационарная степень заполнения ячейки X-оси частицею не может быть одинаковой [61] для всех ячеек бесконечно протяженной X-оси в какой бы то ни было момент времени. Тем не менее, очевидно, что в любой момент времени все доли осциллирующей точечной частицы распределены (пусть — даже неоднородно) внутри ограниченного интервала X-оси длиной $\widetilde{\Delta x}$.

Значит $\int\limits_{x-\frac{\widetilde{\Delta x}}{2}}^{x+\frac{\widetilde{\Delta x}}{2}} \frac{d\widetilde{N}(x')}{dx'} \cdot dx' = 1$. Далее, согласно выражениям (2.42), следует написать

$$\langle V_{x,\text{частицы}} \rangle_{\Delta t = \infty}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V} \cdot \frac{d\widetilde{N}(x)}{dx} \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d \langle V(x) \rangle_{\Delta t = \infty}}{dx} \right) \cdot dx, \quad (2.49)$$

хотя на самом деле подынтегральное выражение отлично от нуля лишь внутри интервала длиной $\widetilde{\Delta x}$.

А теперь — вопрос: какую именно скорость определяет выражение (2.49), ***результирующую или осцилляционную?***

---

[61] В этом случае степень заполнения была бы исчезающе малой.

Естественно, навечно «локализовать» частицу внутри ограниченного пространственного интервала способно только силовое поле определенного профиля. При этом величина $\frac{d\tilde{N}(x)}{dx}$ может выглядеть неподвижной относительно одного инерциального наблюдателя, но — движущейся вдоль X-оси относительно другого наблюдателя (рис. 2.13).

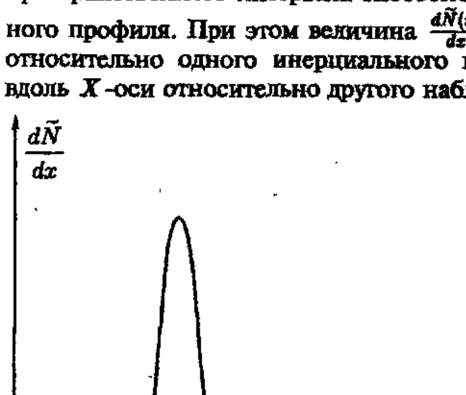


Рис. 2.13. Пример зависимости $\frac{d\tilde{N}(x)}{dx}$ от X-координаты точки пространства.

Если $\frac{d\tilde{N}(x)}{dx}$ зависит еще и от t, значит «колокол», не меняя своей формы, вечно движется вдоль X-оси (равномерно и прямолинейно, если скорость центра инерции частицы, то есть — центра интервала длины $2x_0$, не зависит от времени). Сама же частица вечно осциллирует в пределах упомянутого интервала.

Таким образом, совершенно очевидно, что ответ на поставленный вопрос зависит от того, учитывает или не учитывает найденная функция $\frac{d\tilde{N}}{dx}$ факт поступательного движения центра осцилляций[62]. Если — «нет», выражение (2.49) определяет именно среднюю *по времени осцилляционную* скорость, равную, как было отмечено в п. 2, нулю. Тогда не остается ничего другого, как попросту приписать частице в качестве усредненной по времени скорости[63] скорость центра, около которого частица осциллирует (скорость ее центра инерции).

Если ответ на вопрос — «да», то выражение (2.49) определяет как раз эту самую скорость центра инерции.

В заключение хотелось бы привлечь внимание читателя к конструкции $\frac{dE_{полн}}{d\vec{P}_{мгнов}}$, в которой $E_{полн}$ — полная энергия частицы (в общем случае это сумма ее кинетической и потенциальной энергий), $\vec{P}_{мгнов}$ — мгновенный импульс частицы, связанный с ее мгновенной скоростью соотношением $\vec{V}_{мгнов} = \frac{\vec{P}_{мгнов}}{m}$ (m — масса движения).

Если частица является свободной (ни с чем не взаимодействует), ее полная энергия тождественно совпадает с ее кинетической, которая связана с импульсом соотношениями:

а) дорелятивистским — $E_{кин} = \frac{\vec{P}^2_{мгнов}}{2m_0}$; $\left(\vec{V}_{мгнов} = \frac{\vec{P}_{мгнов}}{m_0}\right)$;

б) релятивистским — $E_{кин} = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2_{мгнов} + m_0^2 \cdot \varsigma^4}$; $\quad \left(\vec{V}_{мгнов} = \frac{\vec{P}_{мгнов}}{m}\right)$.

---

[62] Следует помнить, что вид этой функции еще должен быть установлен.

[63] Например, усредненной по бесконечно продолжительному промежутку времени.

Хотя эти соотношения неквантовые, в качестве исходной величины выбран импульс, а не скорость. Сделано это только для того, чтобы при необходимости можно было сопоставить квантовое и неквантовое выражения.

Теперь вернемся к конструкции $\frac{dE_{\text{полн}}}{d\vec{P}_{\text{мгнов}}}$.

Применительно к свободной частице $\frac{dE_{\text{полн}}}{d\vec{P}_{\text{мгнов}}} = \frac{\vec{P}_{\text{мгнов}}}{m}$, а $\frac{\vec{P}_{\text{мгнов}}}{m} = \vec{V}_{\text{мгнов}}$. Однако на этом основании невозможно ответить на вопрос, является ли конструкция ***мгновенной*** скоростью или же ***усредненной по времени*** применительно к ***взаимодействующей*** частице. Мгновенная скорость частицы свободной должна совпадать со средней по времени по определению. Что же касается частицы, взаимодействующей с неким силовым полем, то ее мгновенная скорость (равно, как импульс) отлична от нуля, а средняя по времени может быть и равна нулю (если частица вечно осциллирует около некоего центра), и отлична от нуля.

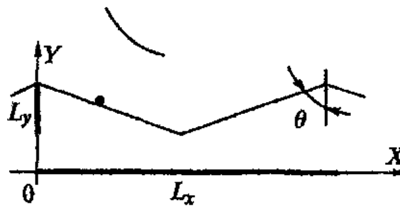


Рис. 2.14. Крошечное колесико катается по плоским граням в пределах одной ячейки.

Чтобы ответить на возникший вопрос, предлагается рассмотреть некоторые примеры.

1. На рис. 2.14 представлена ситуация, в которой крошечное колесико, имитирующее частицу, вечно катается между двумя вершинами в пределах одной элементарной ячейки, взаимодействуя с полем притяжения к X-оси.

Скорость «частицы», усредненная по любому числу периодов качания, точно равна нулю: $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t} = \langle V_x\rangle_{\Delta t} = \langle V_y\rangle_{\Delta t} = 0$ [64]. Что же касается полной энергии, то она остается неизменной в любой момент времени, хотя импульс «частицы» меняется непрерывно как по величине, так и по направлению. Поскольку, таким образом, любому значению X-составляющей импульса (величине P_x) отвечает одно и то же значение полной энергии $E_{\text{полн}}$ (аналогичное относиться и к Y-составляющей импульса), справедливы равенства $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP_{x,\text{мгнов}}} = 0$; $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP_{y,\text{мгнов}}} = 0$.

2. Теперь представим себе, что «частице» придали извне совершенно ничтожный импульс dP_x [65], когда она находилась в положении неустойчивого равновесия на левой вершине ячейки. Характер и параметры движения «частицы» в пределах ячейки, можно считать, не изменились. Однако теперь «частица» начнет перемещаться из одной ячейки в другую

[64] Период качания — это промежуток времени (τ), в течение которого «частица» перемещается от одной вершины до другой в пределах одной ячейки.

[65] Как следует из сказанного, дополнительный импульс направлен только вдоль X-оси. Чтобы при этом частица не оторвалась от поверхности, одновременно изменен также на ничтожную величину и угол наклона θ.

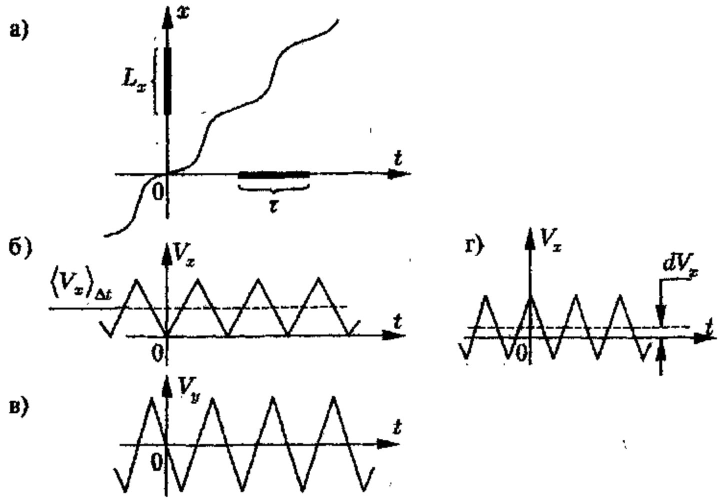


Рис. 2.15. Параметры движения частицы, перемещающейся вдоль X-оси. Реальные зависимости (слева); отвергнутая зависимость (справа).

вправо вдоль X-оси. *В новом состоянии* $\langle V_y\rangle_{\Delta t} = 0$, а вот $\langle V_x\rangle_{\Delta t} \neq 0$. Ясно, что бесконечно малый дополнительный импульс не приведет к изменению ***абсолютного*** значения величины $\langle V_x\rangle_{\Delta t}$: $\langle|V_x|\rangle_{\Delta t} = \sqrt{\frac{g\cdot L_y}{2}}\cdot\sin\theta$ [66] (здесь: g — вертикальное ускорение, вызванное силой притяжения к дну ячейки, L_y — протяженность ячейки вдоль Y-оси). Поэтому расстояние, равное L_x, «частица» и в новом состоянии проходит со средней по времени скоростью, абсолютное значение которой осталось прежним, и за прежнее время τ. Однако теперь через N промежутков времени, продолжительностью τ каждый, «частица» пройдет вдоль X-оси расстояние, равное $N\cdot L_x$. Таким образом, ее средняя по времени скорость перемещения ***вдоль X-оси*** (а не в пределах одной ячейки) равна $\langle V_x\rangle_{\Delta t} = \sqrt{\frac{g\cdot L_y}{2}}\cdot\sin\theta \gg \frac{dP_x}{m}$. (На рис. 2.15,а представлены зависимости X-координаты и X-составляющей скорости «частицы» от времени в новом состоянии.) Радиусы кривизны в точках горба и впадины достаточно малы.

При всем том ***полная энергия «частицы» изменилась***, естественно, ***на бесконечно малую величину*** — в соответствии с таким же изменением импульса.

Теперь нужно выяснить, как связаны величины $dE_{\text{полн}}$, dP_x, $\langle V_x\rangle_{\Delta t}$.

Считать, что $dE_{\text{полн}} = dE_{\text{кин}} = \frac{dP_x}{m}\cdot dP_x = dV_x\cdot dP_x$, равносильно утверждению, что к прежнему каждому (мгновенному) значению скорости

[66] Следует помнить, что угол θ изменен всего лишь на бесконечно малую величину.

$V_x(t)$ прибавляется одно и то же значение — $dV_x\left(= \frac{dP_x}{m}\right)$. В этом случае зависимость $V_x(t)$ имела бы вид, представленный на рис. 2.15,г, откуда следует, что «частица» перемещалась бы вдоль X-оси с бесконечно малой средней по времени скоростью. Так оно и было бы, если бы «частица» каталась в пределах одной ячейки, а центр ячейки двигался вдоль X-оси со скоростью dV_x.

Однако в новой ситуации «частица» более не катается туда-сюда внутри ячейки. Она прокатывается по каждой ячейке только один раз, после чего переходит в следующую ячейку. Очевидно, что, поскольку $dE_{\text{полн}} \neq dV_x \cdot dP_x$, ничего другого не остается, как обратиться к равенству $dE_{\text{полн}} = \langle V_x \rangle_{\Delta t} \cdot dP_x$.

Итак, в рассмотренном примере конструкция $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP_x}$ представляет собой среднюю по времени скорость частицы, ***не являющейся свободной:*** $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP_x} = \langle V_x \rangle_{\Delta t}$. ***При этом лишь в редкие мгновения величины*** $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP_x}$ ***и*** $\frac{P_x}{m}$ ***совпадают друг с другом***[67].

3. Рассмотрим еще ситуацию, в которой электрон взаимодействует с электростатическим пространственно идеально периодическим полем (рис. 2.16). Из квантового описания состояния электрона в таком поле следует, что полная энергия электрона является периодической функцией импульса. График соответствующей зависимости приведен на рис. 2.17. Видно, что электрон может находиться в состоянии, в котором он осциллирует внутри одной пространственной ячейки (с равной вероятностью — внутри любой из бесконечно большого числа эквивалентных ячеек), и тогда его средняя по времени скорость равна нулю. Однако электрон может находиться и в таком состоянии, в котором он в разные моменты времени обладает различными по величине и направлению импульсами (стало быть, — осциллирует), но при этом еще и движется прямолинейно с отличной от нуля средней скоростью.

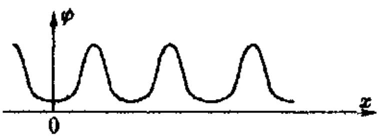


Рис. 2.16. Зависимость электрического потенциала от координаты точки X-оси.

Если теперь на идеально периодическое электростатическое поле наложить извне пространственно однородное слабое поле, окажется, что электрон, изменяя за бесконечно малый промежуток времени свой импульс P_x на величину $dP_x (= q \cdot E_{\text{внеш},x} \cdot dt)$, изменит свою полную энергию на величину $dE_{\text{полн}} = \frac{dE_{\text{полн}}}{dP_x} \cdot dP_x$. При этом его «мгновенная» скорость изменится на бесконечно малую величину, оставаясь равной $\frac{P_x}{m}$. Из рис. 2.17 хорошо видно, что в общем случае $\frac{dE_{\text{полн}}}{dP} \neq \frac{P_x}{m}$.

[67] В отличие от свободной частицы, у которой эти величины должны, по определению, совпадать постоянно.

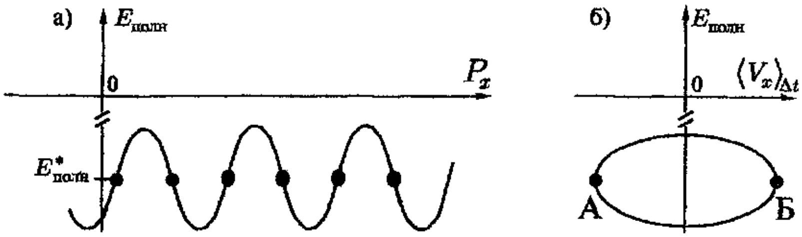


Рис. 2.17. Зависимости полной энергии электрона: а) от импульса в пределах одной разрешенной энергетической зоны; б) от средней по времени скорости (в той же зоне).

Находясь в стационарном состоянии, в котором он обладает неизменной во времени энергией $E^*_{\text{полн}}$, электрон обладает в любое мгновение вечности точно определенной скоростью, усредненной по времени, но — любым импульсом из бесконечного множества (помеченных точками) с равной вероятностью. Таким образом, состояние электрона характеризуется двумя величинами: $E_{\text{полн}}$ и $\langle V_x\rangle_{\Delta t=\infty}$. Точки А и Б символизируют два разных состояния — с противоположными по направлению средними скоростями, но с одинаковой полной энергией.

Итак, выражение $\langle \vec{V}\rangle_{\Delta t} = \frac{dE_{\text{полн}}}{d\vec{P}}$ (в котором $d\vec{P}$ есть изменение импульса, вызванное внешним фактором) представляет собой в рамках ***доквантового*** способа описания состояния частицы динамическое определение именно ***результирующей*** скорости, усредненной по достаточно большому промежутку времени. Вспоминая еще и кинематическое определение этой скорости, следует написать:

$$\langle V_x\rangle_{\Delta t=\infty} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t\to\infty} \dfrac{\Delta x(\Delta t)}{\Delta t}; \\[2ex] \dfrac{dE_{\text{полн}}}{dP_x}. \end{cases}$$

В рамках квантового (статистического) способа описания состояния частицы:

$$\langle V_x\rangle_{\Delta t=\infty} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t\to\infty} \dfrac{\Delta x(\Delta t)}{\Delta t}; \\[2ex] \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right)dx\,. \end{cases}$$

Что касается выражения $\langle V_x\rangle_{\Delta t=\infty} = \lim\limits_{\Delta t\to\infty}\frac{\Delta x(\Delta t)}{\Delta t}$, то оно определяет результирующую скорость частицы, если последняя принимает участие и в осцилляциях около некоего центра, и в поступательном движении самого центра. А вот сказать, чем является величина $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{V}\cdot\left(\frac{d\widetilde{N}(x)}{dx}\right)\cdot dx$, зависит, как уже говорилось (см. с. 89–90), от того, учитывает или не учитывает функция $\frac{d\tilde{N}}{dx}$ участие частицы в поступательном движении. Однако, если и в рамках квантового (статистического) способа описания существует зависимость $E_{\text{полн}}\left(\vec{P}\right)$ (см. рис. 2.17), то выражение $\langle\vec{V}\rangle_{\Delta t=\infty} = \frac{dE_{\text{полн}}}{d\vec{P}}$ также является динамическим определением средней по времени ***результирующей*** скорости частицы.

Глава 3

Постулаты квантовой механики

§3.1. Ψ-функция и принцип соответствия

Квантовая механика точечных частиц в ее хрестоматийной (канонизированной) форме началась, на самом деле, не с постулатов Бора (1913 г.) и уж во всяком случае не с гипотезы Планка о «дискретности» излучения в полости (1900 г.). Она началась с *гипотезы* де-Бройля (1923 г.), согласно которой движущейся, свободной, точечной частице сопутствует плоская монохроматическая волна, фронт которой движется прямолинейно и равномерно с той же скоростью и в том же направлении, что и частица.

Можно было бы *долго плясать на костях* де-Бройля, так как и данная им формулировка своей гипотезы, и аргументы в пользу ее принятия представляли собой бессмысленный набор слов[1]. Увы, нередко случается, что первооткрыватель торопится (по тем или иным причинам) и делает достоянием научной общественности не тщательно продуманные мысли, а смутные ощущения. К чести тогдашних грандов теоретической физики они отнеслись к гипотезе де-Бройля с большим вниманием, после чего эта гипотеза быстро вывела их на путь истинный.

Использование гипотезы де-Бройля состояло в следующем:

1. ***Было образовано совершенно новое (самостоятельное) понятие Ψ-функции — характеристики псевдофизической, но уподобленной одной из тех реальных характеристик, с помощью которых следует описывать состояние частицы в различных ситуациях.***

Вот почему Ψ-функция[2] должна зависеть, по крайней мере, от координат точки пространства и момента текущего времени.

2. ***Было постулировано, что Ψ-функция свободной точечной частицы имеет вид:***

$$\Psi = \Psi_0 \cdot e^{i\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}-E\cdot t}{\hbar}} \quad \left(\Psi_0 \cdot e^{-i\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}-E\cdot t}{\hbar}} \equiv \breve{\Psi}\right). \tag{3.1}$$

[1] По-видимому, достаточно будет сказать, что де-Бройль предложил считать частицу *«средоточием некоего внутреннего периодического явления»*.

[2] Поскольку адекватного названия этой величины все еще нет (ее называют и *вектором состояния*, и *амплитудой вероятности*, и *волновой функцией*), далее будет употребляться только термин «Ψ-функция».

Здесь: i — мнимая единица; Ψ_0 — «амплитуда»; $\vec{P}, E, \vec{r}, t$ — соответственно, импульс и энергия (кинетическая) частицы, радиус-вектор точки пространства и момент вечности. Присутствие мнимой единицы означает автоматически существование и комплексно сопряженной — $\breve{\Psi}$-функции.

(Выражение (3.1) требует пространного комментария, однако, чтобы сейчас не отвлекать внимания читателя, комментарий будет сделан позднее.)

3. ***Было постулировано, что квазистационарная пространственная плотность, создаваемая одной свободной точечной частицей (величина $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial v}$, где ∂v — бесконечно малый объем пространства около точки с координатами x, y, z), связана с величинами Ψ и $\breve{\Psi}$ выражением***

$$\frac{\partial \tilde{N}(x,y,z,t)}{\partial v} = \breve{\Psi}(x,y,z,t) \cdot \Psi(x,y,z,t) \neq \infty. \tag{3.2}$$

Таким образом, доля одной свободной точечной частицы, присутствующая в момент времени t в точке пространства с координатами x, y, z, есть

$$d\tilde{N}(x,y,z,t) = \breve{\Psi}(x,y,z,t) \cdot \Psi(x,y,z,t) \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Очевидно, что сформулированный постулат автоматически придает размерность «амплитуде» Ψ_0: $[\Psi_0] = \text{см}^{-\frac{3}{2}}$ (в «одномерном пространстве» $[\Psi_0] = \text{см}^{-\frac{1}{2}}$).

Итак, три постулата, порожденных гипотезой де-Бройля, позади, и можно перейти к обещанному комментарию.

1. Во-первых, необходимо обратить внимание на присутствие мнимой единицы в показателе степени экспоненты в выражении (3.1). Надо ли понимать это как традиционный прием (тогда, на самом деле, $\Psi = \Psi_0 \cdot \cos\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r} - E\cdot t}{\hbar}\right)$), или же величина Ψ действительно такова, что $\Psi = \Psi_0 \cdot \left\{\cos\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r} - E\cdot t}{\hbar}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r} - E\cdot t}{\hbar}\right)\right\}$? Ответ на это вопрос будет дан позднее.

2. Во-вторых, вне зависимости от того, считать ли, что $E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}$, (где m_0 — масса покоя частицы) или же, что $E = c \cdot \sqrt{\vec{P}^2 + (m_0 \cdot c)^2}$ (где c — так называемая скорость света), скорость свободной точечной частицы равна $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{dE}{d\vec{P}}$ (здесь m — масса движущейся частицы).

Следует подчеркнуть, что

$$V_x \neq \frac{E}{P_x}; \quad V_y \neq \frac{E}{P_y}; \quad V_z \neq \frac{E}{P_z}. \tag{3.3}$$

Однако если, отталкиваясь от гипотезы де-Бройля, предположить, что вместе с частицей движется ***фронт волны колебаний*** именно ***Ψ-ве-***

личины, то возникает соблазн отождествить величину $\frac{2\pi\hbar}{p}$ с длиной волны (λ), а величину $\frac{E}{\hbar}$ с частотой колебаний (ω), после чего написать: $\Psi = \Psi_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\cdot t)}$ (где $\vec{k}$ — волновой вектор).

Вполне естественно считать, что фронт волны, движущейся (вместе со свободной частицей) в ***пустом*** пространстве, перемещается равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{V}$, составляющие которой равны:

$$V_x = \frac{\omega}{k_x}; \quad V_y = \frac{\omega}{k_y}; \quad V_z = \frac{\omega}{k_z}. \tag{3.4}$$

Тем не менее, признавая справедливость неравенств (3.3), нельзя согласиться с равенствами (3.4). Отсюда вывод: ничего другого не остается, как попросту считать фронт «волны де Бройля» движущимся в пустом пространстве со скоростью, в точности совпадающей со скоростью частицы. Но это автоматически означает, что ***нельзя интерпретировать величины $\frac{2\pi\hbar}{p}$ и $\frac{E}{\hbar}$ в качестве длины волны и частоты колебаний некоей величины, являющейся характеристикой некоего же материального континуума.***

Следует помнить, что если какая-либо величина из тех, с помощью которых описывают состояние любого материального континуума, колеблется, то скорость фронта волны колебаний зависит только от характеристик-констант этого континуума (например, таких, как упругость и плотность или электрическая и магнитная постоянные). Что касается пустого пространства, то в нем могут распространяться волны колебаний напряженностей электромагнитного и гравитационного полей; но — только со скоростью, точно равной c ($\approx 3 \cdot 10^{10}$ $\frac{\text{см}}{\text{с}}$), которая признается универсальной («мировой») константой.

В результате закрадывается обоснованное подозрение, что ***на самом деле просто не существует такого материального объекта***, чтобы какая-то из его характеристик колебалась в соответствии с выражением (3.1).

Это действительно так. Статистический способ описания состояния точечной частицы, как выяснилось в ходе разработки квантовой механики, вынуждает попросту сконструировать понятие величины (Ψ-функции), которая не является физической характеристикой какого-то бы то ни было материального точечного или континуального объекта, равно как и пространственно-временнóго континуума. Не существует в природе такого объекта, который обладал бы характеристикой, способной изменять свое значение в соответствии с выражением (3.1)[3]. Однако давайте вспомним, что вероятность того, что кувыркающийся над столом кубик упадет вниз гранью № 4 (см. § 2.1.2), является вполне содержательным понятием (измеряемой величиной) и движется точно так же, как центр инерции кубика. Но ведь и вероятность является искусственно сконструированным понятием. Вероятность нельзя подобно импульсу приписать материальному объекту. Понятием вероятности ***можно*** пользоваться в рамках

[3] Понятно теперь, почему присутствие мнимой единицы в выражении (3.1) заведомо не опасно.

определенного способа описания, тогда как, например, импульсом пользоваться ***приходится***, причем в рамках ***любого*** способа описания. Однако все сказанное не мешает придать вероятности логическую содержательность, подобную той, какой обладает, например, все тот же импульс.

Далее. Вполне может сложится впечатление, что, согласно третьему постулату (с. 97), Ψ-функция есть не более, чем некая чисто математическая величина, «извлекаемая» из реальной физической характеристики — величины $\frac{d\tilde{N}}{dv}$ (например, если Ψ-функция — вещественная, то $\Psi = \sqrt{\frac{d\tilde{N}}{dv}}$). Чтобы не возникало такого впечатления, следует помнить, что, согласно первому и второму постулатам, Ψ-функция наделяется всеми теми свойствами, которыми обладают реальные физические характеристики (например, тот же импульс). Отсюда следует, что в различных ситуациях различным окажется вид зависимости именно Ψ-функции от ее аргументов. Иначе говоря, мы соглашаемся считать, что обстановка влияет непосредственно на Ψ-функцию, а не на плотность вероятности — величину $\frac{d\tilde{N}}{dv}$.

Пользуясь случаем, я бы рискнул заметить, что подавляющее большинство проблем, связанных с пониманием (с восприятием) квантовой механики, обусловлено именно тем, что впервые в истории физики в научный оборот было введено понятие величины, не являющейся характеристикой материального объекта, но, тем не менее, наделенной свойством полностью отображать реальную ситуацию, в которой пребывает материальный объект. Бесполезно задавать вопрос, что именно колеблется и распространяется в ***пустом*** пространстве вместе с движущейся свободной точечной частицей, если под ***«что именно»*** подразумевать нечто материальное. Не понимая этого, множество выдающихся физиков XX века, в том числе Луи де-Бройль, обрекли себя на создание физико-фантастических гипотез, призванных не только доказать принципиальную ограниченность статистического способа описания состояния точечной частицы (это бы еще ничего)[4], но и способствовать поиску того ***материального*** континуума, реальной (а не искусственной) характеристикой которого оказалась бы Ψ-функция. Забавно, что присутствие мнимой единицы в выражении (3.1) фантастов не смущало. А ведь необходимость ее присутствия они признавали.

3. Выражение (3.1) содержит еще одну особенность, на которую следует обратить внимание.

Если считать, что фигурирующая в выражении (3.1) энергия свободной точечной частицы $E = c \cdot \sqrt{P_x^2 + (m_0 \cdot c)^2}$ (простоты ради можно предположить, что частица движется только вдоль X-оси), то «фаза» Ψ-функции $(P_x \cdot x - E \cdot t)$ оказывается инвариантом лоренцевых

[4] Только совокупность экспериментов может подтвердить или опровергнуть как принципиальную необходимость перехода к статистическому способу описания в некоторых ситуациях, так и необходимость использования в рамках этого способа понятия Ψ-функции.

преобразований[5]:

$$(P_x \cdot x - E \cdot t) = \text{Inv}.$$

(В этом выражении $x = \frac{P_x}{m} \cdot t = V_x \cdot t$, а момент текущего времени t отсчитывается от некоторого начала.)

Теперь замечу, что в рамках частной теории относительности существуют два типа инвариантов[6]. Либо значение Inv зависит от обстановки, в которой пребывает частица, и в разных обстановках это значение бывает разным; либо значение Inv в любой обстановке остается одним единственным (для частицы, принадлежащей к определенной разновидности), и тогда соотношение в виде $(\ldots) = \text{Inv}$ признается выражающим закон природы. К числу последних принадлежит соотношение $E^2 - c^2 \cdot \vec{P}^2 = \text{Inv} = m_0^2 \cdot c^4$ (в котором E — полная кинетическая энергия свободной точечной частицы), но к их числу, конечно, не относится соотношение $(P_x \cdot x - E \cdot t) = \text{Inv}$, и численное значение этого инварианта может быть любым в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Однако следует еще поинтересоваться тем, ***насколько*** может ***меняться*** значение этого инварианта. Приведу пример.

Пусть j-я и k-я инерциальные системы отсчета вечно движутся друг относительно друга вдоль общей X-оси, причем момент совпадения начал координат обеих систем принимается за начало отсчета времени. Пусть точечная частица, обладающая массой покоя m_0, вечно покоится в начале координат j-й системы ($\vec{P}_j = 0$; $x_j = y_j = z_j = 0$; $E_j = m_0 \cdot c^2$). Для j-го наблюдателя $\vec{P}_j \cdot \vec{r}_j - E_j \cdot t_j = -m_0 \cdot c^2 \cdot t_j$. Пользуясь формулами преобразования физических характеристик, принадлежащими лоренцевой группе, находим, что для k-го наблюдателя $\vec{P}_k \cdot \vec{r}_k - E_k \cdot t_k = -m_0 \cdot c^2 \cdot t_j$, и, стало быть $(\vec{P} \cdot \vec{r} - E \cdot t) = \text{Inv}$. Назовем этот инвариант *действием*, что даст право обозначить его «собственным» символом D. Так как время течет непрерывно, изменение величины D для каждого из наблюдателей равно $\Delta D = -m_0 \cdot c^2 \cdot \Delta t$. Естественно, минимальное изменение действия $\Delta D_{\text{мин}} = -m_0 \cdot c^2 \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta t \doteq 0$. Иначе говоря, ***действие изменяется непрерывно.***

Все сказанное имело целью обратить внимание читателя на то, что величина, названная действием и определяемая выражением $D = (\vec{P} \cdot \vec{r} - E \cdot t)$, не квантуется. Таким образом, в выражении для «фазы» Ψ-функции (для величины $\frac{\vec{P} \cdot \vec{r} - E \cdot t}{\hbar}$) константа $\hbar$ — не более, чем некая константа. Как выяснилось в результате изучения явлений природы, ***адекватно*** описываемых с помощью статистического способа, квантуется ***векторное*** произведение $\vec{r} \times \vec{P}$, являющееся механическим моментом

---

[5] Если считать, что $E = \frac{P_x^2}{2m_0}$, то «фаза» не является инвариантом ни лоренцевых, ни галилеевых преобразований.

[6] Здесь речь идет об инвариантности соотношений при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В связи с этим см.: *Вильф Ф. Ж.* Логическая структура частной теории относительности. М.: УРСС, 2001 (§ 5.2).

точечной частицы. ***Изменение*** проекции этого момента на любую координатную ось оказалось равным $\hbar$, причем константа $\hbar$ оказалась той же самой, которая присутствует в выражении для «фазы» Ψ-функции.

На этом комментарий второго постулата можно считать законченным. Теперь необходимо выяснить, как именно следует устанавливать явный вид зависимости Ψ-функции от ее аргументов.

В 1927 году Эрвин Шредингер, исходя из гипотезы де-Бройля, предположил, что Ψ-функция точечного электрона[7], вечно пребывающего в сферически симметричном электро***статическом*** поле точечного заряда Q, должна быть решением уравнения, позднее заслуженно названного уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)=\left(E_{\text{полн}}-\frac{q\cdot Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r}\right)\Psi.$$

Здесь: $E_{\text{полн}}$ — полная энергия электрона (сумма его кинетической и потенциальной энергий); $\hbar$ — постоянная Планка; q — заряд электрона; r — значение радиус-вектора точки пространства; ε_0 — электрическая постоянная.

Предположение Шредингера оправдалось, поскольку экспериментально установленный энергетический спектр электрона в поле протона совпал с рассчитанным в результате решения уравнения Шредингера.

Исходя теперь уже из предположения Шредингера, вполне логично было посчитать, что Ψ-функция ***свободной*** точечной частицы тоже должна оказаться решением только — другого уравнения:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)=E_{\text{полн}}\cdot\Psi,$$

а в частном случае — уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=E_{\text{полн}}\cdot\Psi. \tag{3.5}$$

Нетрудно убедиться, что Ψ-функция в ранее постулированном виде $\Psi=\Psi_0\cdot e^{i\cdot\frac{P\cdot x-E_{\text{полн}}\cdot t}{\hbar}}$ действительно является решением уравнения (3.5), и тогда $E_{\text{полн}}=\frac{P^2}{2m_0}$, как и должно быть для свободной точечной частицы, полная энергия которой тождественно совпадает с кинетической.

Однако бросается в глаза также и то, что

$$\frac{P^2}{2m_0}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{1}{\Psi}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2};\quad E_{\text{полн}}=i\cdot\hbar\cdot\frac{1}{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что $i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$.

---

[7] Каким бы парадоксальным это ни казалось, сам Э. Шредингер упорно считал электрон протяженным объектом. Категорически отказываясь верить в существование точечных частиц даже в качестве логически содержательных конструкций, Э. Шредингер, свято верил в материальность «Ψ-поля», а, например, электрон представлял себе как некий сгусток «Ψ-поля».

Это уравнение можно преобразовать в так называемую операторную форму

$$\left(i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi=\frac{1}{2m_0}\cdot\left(-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi. \tag{3.6}$$

Именно подобная форма уравнения (учитывая, конечно, ее экспериментальную обоснованность), позволяет выдвинуть фундаментальный постулат — ***«принцип соответствия»: любому доквантовому соотношению между теми физическими характеристиками точечной частицы, с помощью которых следует описывать ее состояние, соответствует точно такое же соотношение между операторами этих характеристик.***

Сказанное нуждается в немедленном пояснении.

Пусть, например, $E_{\text{полн}}=E_{\text{кин}}+E_{\text{пот}}=\frac{\vec{P}^2}{2m_0}+E_{\text{пот}}$; $\vec{V}=\frac{\vec{P}}{m_0}$.

Тогда $\widehat{E_{\text{полн}}}=\frac{(\widehat{\vec{P}})^2}{2m_0}+\widehat{E_{\text{пот}}}$; $\widehat{\vec{V}}=\frac{\widehat{\vec{P}}}{m_0}$, где значок $\widehat{\ldots}$ удостоверяет, что величина является оператором (оператором полной энергии, оператором импульса, оператором чисто потенциальной энергии, оператором скорости).

Глядя на уравнения (3.5) и (3,6), можно заключить, что, по крайней мере, в ***частном*** случае

$$\widehat{\vec{P}}=-i\cdot\hbar\cdot\left(\vec{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \widehat{E_{\text{полн}}}=\left(i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

а, глядя также и на уравнение Шредингера, можно заключить, что

$$\widehat{E_{\text{пот}}}=E_{\text{пот}}=\frac{q\cdot Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r}.$$

Совершенно очевидно, что реализация принципа соответствия требует постулировать еще и такой способ установления ***явного*** вида операторов всех физических характеристик, чтобы им можно было пользоваться в ***любом*** случае.

В заключение отмечу, что операторным уравнением состояния точечной частицы является, в частности, уравнение

$$\widehat{E_{\text{полн}}}\Psi(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2m_0}\cdot\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2+\widehat{E_{\text{полн}}}\right)\Psi(x,y,z,t)\ ^{8)}.$$

Отсутствие знака умножения перед символом Ψ означает, что имеет место действие оператора на Ψ-функцию.

Замечу также, что сумму операторов $\left(\frac{1}{2m_0}\cdot\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2+\widehat{E_{\text{пот}}}\right)$ принято называть гамильтонианом и обозначать символом $\widehat{\mathrm{H}}$:

$$\left(\frac{1}{2m_0}\cdot\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2+\widehat{E_{\text{пот}}}\right)\equiv\widehat{\mathrm{H}}.$$

---

[8] Это нерелятивистское уравнение состояния.

§3.2. Установление явного вида операторов

Угадать явный вид операторов импульса и полной энергии совсем нетрудно. Для этого достаточно сравнить два соотношения:

$$\left(i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi=\frac{1}{2m_0}\cdot\left(-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi;\quad \widehat{E_{\text{полн}}}\,\Psi=\frac{\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2\Psi}{2m_0}.$$

Отсюда следует, что: $\widehat{E_{\text{полн}}}=i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t}$; $\widehat{P_x}=-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}$; $\widehat{m_0}\equiv m_0$.

Далее, исходя уже из вида уравнения Шредингера, следует, что $\widehat{\vec{r}}\equiv\vec{r}$.

Таким образом, можно предположить, что существует представление операторов (его можно назвать пространственно-временным), в котором:

$$\widehat{t}\equiv t;\quad \widehat{E_{\text{полн}}}=i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t};$$

$$\widehat{x}\equiv x;\quad \widehat{y}\equiv y;\quad \widehat{z}\equiv z;$$

$$\widehat{P_x}=-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x};\quad \widehat{P_y}=-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial y};\quad \widehat{P_z}=-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Операторы всех тех — остальных — физических характеристик, которые выражаются через $\vec{r}$ и $\vec{P}$ строятся из операторов этих величин в соответствии с принципом соответствия[9]. Например, операторы скорости $\left(\widehat{\vec{V}}\right)$ и механического момента $\left(\widehat{\vec{L}}\right)$ приобретают вид: $\widehat{\vec{V}}=\frac{\widehat{\vec{P}}}{m_0}$; $\widehat{\vec{L}}=\vec{r}\times\widehat{\vec{P}}$. Что касается операторов величин, принимаемых в качестве универсальных констант (например, постоянной Планка или электрической постоянной) или же характеристик-констант частицы (например, массы покоя или электрического заряда), то операторы этих величин отождествляются с ними самими: $\widehat{\hbar}\equiv\hbar$; $\widehat{m_0}\equiv m_0$ и т. п.'

Теперь следует вернуться к началу параграфа и принять к сведению, что никакие удачные догадки не заменят обоснованного способа установления явного вида операторов. Тем более, что вполне правомерен вопрос, как быть, если физическая характеристика не выражается через импульс и радиус-вектор. С целью перейти от догадки к способу предлагается сначала обратить внимание на сравнительно редко использовавшуюся в доквантовой механике математическую конструкцию, называемую скобками Пуассона:

$$\sum_{\iota=1}^{\iota=3}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x_\iota}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial P_\iota}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial P_\iota}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_\iota}\right).$$

Здесь: $P_1\equiv P_x$; $x_1\equiv x$; $P_2\equiv P_y$ и т. д. (проекции импульса и радиус-вектора на оси пространственных координат). Символами $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$

[9] С этим словосочетанием придется смириться. Как сказал некогда Людвиг Больцман, *«оставим элегантность портным и сапожникам»*.

обозначены величины, предположительно являющиеся функциями тех переменных, по которым ведется дифференцирование. Принято обозначать представленную конструкцию символом

$$[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}] \left(\equiv \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial P_i} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i} \right) \right),$$

откуда и пошло название ***«скобки*** Пуассона». Эти скобки, как мне кажется, должны были обязательно привлечь внимание потому, что ***каждая*** из величин P_x, P_y, P_z, x, y, z участвует в этих скобках только в качестве ***независимой*** переменной. Вот это-то и равносильно признанию, что в каждой точке $\vec{r}$-континуума присутствует $\vec{P}$-континуум, а каждой точке $\vec{P}$-континуума присутствует $\vec{r}$-континуум, а только такое представление может быть использовано в рамках статистического способа описания состояния частицы (см. § 2.2.2).

Поль Дирак подметил одно любопытное свойство скобок Пуассона. Если при выполнении операций определенного типа с этими скобками ***формально точно*** следить за порядком следования всех сомножителей, то оказывается, что

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{R} - \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{T}) = (\text{число с размерностью эВ} \cdot \text{с}) \cdot [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}] \text{ [10]}. \tag{3.7}$$

Дирак совершенно справедливо заметил, что значение этого, обладающего размерностью, числа (значение, по сути дела, некоей константы) ***не может быть установлено иначе, как только из опыта.***

Чтобы в дальнейшем иметь возможность обратиться к принципу соответствия, необходимо вычислить саму величину $[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]$, понадеявшись на то, что результат окажется просто числом.

Конечно, никаких чудес ждать не следует, ибо скобки Пуассона превращаются в «просто число» только, если отождествить: сначала $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv x$; затем $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv y$; затем $\mathfrak{T} \equiv x$, $\mathfrak{R} \equiv y$; затем $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv P_y$ и т. п. В результате получим, что только $[P_x, x] = 1$, $[P_y, y] = 1$, $[P_z, z] = 1$. Скобки Пуассона для всех других пар равны нулю. Теперь, согласно принципу соответствия: $(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x}) =$ число с размерностью $(\text{эВ} \cdot \text{с}) \cdot 1$; и т. п.

Естественно, Дирак был прав, утверждая, что на основании экспериментальных данных следует назначить это «число» равным $-i \cdot \hbar$ (где $\hbar$ — именно постоянная Планка) [11]. А, коль скоро делается ссылка не на логику, а на результат опыта, то и в присутствии мнимой единицы нет ничего предосудительного. Именно в таких случаях и говорят: *«так уж устроен мир, что его приходится описывать подобным образом»*.

---

[10] Приведенное Дираком в его монографии доказательство существования этого соотношения см. в Приложении 3.

[11] Конечно, имеется в виду простое обстоятельство: используемый математический аппарат, применяемый в физической теории, должен быть таков, чтобы вычисленные с его помощью значения физических характеристик, совпадали с результатами измерений.

Итак:

$$\left(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x}\right) = -i\hbar.$$

Отсюда следует, что мы свободны только в выборе представления. Выбрав его (то есть, приняв явный вид одного из операторов), мы уже автоматически получаем вид другого — дополняющего оператора.

Пусть, например, $\widehat{x} \equiv x$. Тогда, если мы не хотим отказываться от общепринятых правил математики:

$$\widehat{P_x}\widehat{x}\Psi = \widehat{P_x}(x\cdot\Psi) = \Psi\cdot\widehat{P_x}x + x\cdot\widehat{P_x}\Psi;$$

$$\left(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x}\right)\Psi = \left(\widehat{P_x}x - x\cdot\widehat{P_x}\right)\Psi = \begin{cases}\Psi\cdot(-i\cdot\hbar),\\ \Psi\cdot\widehat{P_x}x + x\cdot\widehat{P_x}\Psi - x\cdot\widehat{P_x}\Psi = \Psi\cdot\widehat{P_x}x.\end{cases}$$

Очевидно, что равенство $\Psi\cdot(-i\cdot\hbar) = \Psi\cdot\widehat{P_x}x$ может иметь место, лишь если в результате действия оператора $\widehat{P_x}$ на x возникает «число» $-i\cdot\hbar$. Так оно и будет, если $\widehat{P_x} = -i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}$.

Только что рассказанная история со скобками Пуассона явилась основанием предложить следующий постулат.

Если физическая величина B образует континуум значений (тем самым допускает дифференцирование по B), то можно образовать два оператора, один из которых тождественно совпадает с самой величиной, другой равен $\pm i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial B}$.

Что касается знака, то его приходится выбирать, руководствуясь соображениями адекватности математического аппарата той самой реальной ситуации, для описания которой этот аппарат предполагается использовать.

Если физическая величина образует дискретное множество значений, то... на сегодняшний день оператор подобной величины приходится — именно что — создавать «своими руками», — руководствуясь, по сути дела, накопленными знаниями, здравым смыслом, избранным способом описания состояния объекта[12].

Что касается операторов тех величин, которые относятся к числу универсальных констант или же характеристик-констант частицы, то операторы этих величин отождествляются с ними самими.

Итак, в нашем распоряжении, по крайней мере, два представления операторов тех характеристик, которые позволяют использовать статистический способ описания состояния частицы в различных ситуациях.

1. *Пространственно-временнóе представление, о котором уже говорилось и в котором*

$$\widehat{t} \equiv t; \quad \widehat{E_{\text{полн}}} = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t};$$

[12] Соответствующий пример читатель найдет в главе 6, в которой рассматривается уравнение Дирака.

обозначены величины, предположительно являющиеся функциями тех переменных, по которым ведется дифференцирование. Принято обозначать представленную конструкцию символом

$$[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}] \left(\equiv \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial P_i} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i} \right) \right),$$

откуда и пошло название «*скобки* Пуассона». Эти скобки, как мне кажется, должны были обязательно привлечь внимание потому, что ***каждая*** из величин P_x, P_y, P_z, x, y, z участвует в этих скобках только в качестве ***независимой*** переменной. Вот это-то и равносильно признанию, что в каждой точке $\vec{r}$-континуума присутствует $\vec{P}$-континуум, а каждой точке $\vec{P}$-континуума присутствует $\vec{r}$-континуум, а только такое представление может быть использовано в рамках статистического способа описания состояния частицы (см. § 2.2.2).

Поль Дирак подметил одно любопытное свойство скобок Пуассона. Если при выполнении операций определенного типа с этими скобками ***формально точно*** следить за порядком следования всех сомножителей, то оказывается, что

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{R} - \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{T}) = (\text{число с размерностью эВ} \cdot \text{с}) \cdot [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]\ ^{10)}. \tag{3.7}$$

Дирак совершенно справедливо заметил, что значение этого, обладающего размерностью, числа (значение, по сути дела, некоей константы) ***не может быть установлено иначе, как только из опыта***.

Чтобы в дальнейшем иметь возможность обратиться к принципу соответствия, необходимо вычислить саму величину $[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]$, понадеявшись на то, что результат окажется просто числом.

Конечно, никаких чудес ждать не следует, ибо скобки Пуассона превращаются в «просто число» только, если отождествить: сначала $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv x$; затем $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv y$; затем $\mathfrak{T} \equiv x$, $\mathfrak{R} \equiv y$; затем $\mathfrak{T} \equiv P_x$, $\mathfrak{R} \equiv P_y$ и т. п. В результате получим, что только $[P_x, x] = 1$, $[P_y, y] = 1$, $[P_z, z] = 1$. Скобки Пуассона для всех других пар равны нулю. Теперь, согласно принципу соответствия: $(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x})$ = число с размерностью $(\text{эВ} \cdot \text{с}) \cdot 1$; и т. п.

Естественно, Дирак был прав, утверждая, что на основании экспериментальных данных следует назначить это «число» равным $-i \cdot \hbar$ (где $\hbar$ — именно постоянная Планка)[11]. А, коль скоро делается ссылка не на логику, а на результат опыта, то и в присутствии мнимой единицы нет ничего предосудительного. Именно в таких случаях и говорят: *«так уж устроен мир, что его приходится описывать подобным образом»*.

[10] Приведенное Дираком в его монографии доказательство существования этого соотношения см. в Приложении 3.

[11] Конечно, имеется в виду простое обстоятельство: используемый математический аппарат, применяемый в физической теории, должен быть таков, чтобы вычисленные с его помощью значения физических характеристик, совпадали с результатами измерений.

Итак:

$$\left(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x}\right) = -i\hbar.$$

Отсюда следует, что мы свободны только в выборе представления. Выбрав его (то есть, приняв явный вид одного из операторов), мы уже автоматически получаем вид другого — дополняющего оператора.

Пусть, например, $\widehat{x} \equiv x$. Тогда, если мы не хотим отказываться от общепринятых правил математики:

$$\widehat{P_x}\widehat{x}\Psi = \widehat{P_x}(x\cdot\Psi) = \Psi\cdot\widehat{P_x}x + x\cdot\widehat{P_x}\Psi;$$

$$\left(\widehat{P_x}\widehat{x} - \widehat{x}\widehat{P_x}\right)\Psi = \left(\widehat{P_x}x - x\cdot\widehat{P_x}\right)\Psi = \begin{cases}\Psi\cdot(-i\cdot\hbar), \\ \Psi\cdot\widehat{P_x}x + x\cdot\widehat{P_x}\Psi - x\cdot\widehat{P_x}\Psi = \Psi\cdot\widehat{P_x}x.\end{cases}$$

Очевидно, что равенство $\Psi\cdot(-i\cdot\hbar) = \Psi\cdot\widehat{P_x}x$ может иметь место, лишь если в результате действия оператора $\widehat{P_x}$ на x возникает «число» $-i\cdot\hbar$. Так оно и будет, если $\widehat{P_x} = -i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}$.

Только что рассказанная история со скобками Пуассона явилась основанием предложить следующий постулат.

Если физическая величина B образует континуум значений (тем самым допускает дифференцирование по B), то можно образовать два оператора, один из которых тождественно совпадает с самой величиной, другой равен $\pm i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial B}$.

Что касается знака, то его приходится выбирать, руководствуясь соображениями адекватности математического аппарата той самой реальной ситуации, для описания которой этот аппарат предполагается использовать.

Если физическая величина образует дискретное множество значений, то... на сегодняшний день оператор подобной величины приходится — именно что — создавать «своими руками», — руководствуясь, по сути дела, накопленными знаниями, здравым смыслом, избранным способом описания состояния объекта[12].

Что касается операторов тех величин, которые относятся к числу универсальных констант или же характеристик-констант частицы, то операторы этих величин отождествляются с ними самими.

Итак, в нашем распоряжении, по крайней мере, два представления операторов тех характеристик, которые позволяют использовать статистический способ описания состояния частицы в различных ситуациях.

1. *Пространственно-временно́е представление, о котором уже говорилось и в котором*

$$\widehat{t} \equiv t; \quad \widehat{E_{\text{полн}}} = i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t};$$

---

[12] Соответствующий пример читатель найдет в главе 6, в которой рассматривается уравнение Дирака.

$$\hat{x} \equiv x; \quad \hat{y} \equiv y; \quad \hat{z} \equiv z;$$

$$\widehat{P_x} = -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}; \quad \widehat{P}_y = -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial y}; \quad \widehat{P}_z = -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. *Импульсно-энергетическое представление, в котором*

$$\widehat{E_{\text{полн}}} \equiv E_{\text{полн}}; \quad \hat{t} \equiv -i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial E_{\text{полн}}};$$

$$\widehat{P_x} \equiv P_x; \quad \widehat{P}_y \equiv P_y; \quad \widehat{P}_z \equiv P_z;$$

$$\hat{x} \equiv i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial P_x}; \quad \hat{y} \equiv i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial P_y}; \quad \hat{z} \equiv i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial P_z}.$$

Использование принципа соответствия позволяет построить операторы тех физических характеристик, которые выражаются через $\vec{r}$ и $\vec{P}$.

§ 3.3. Необходимость введения понятия Ψ-функции

Теперь предстоит ответить на самый важный вопрос, — почему статистический способ описания состояния точечной частицы оказался недееспособным при использовании одного лишь понятия *«вероятности того, что...»*. Зачем потребовалось ввести еще и псевдофизическую характеристику — Ψ-функцию?

Однако... мне кажется, что прежде чем пытаться отвечать, имеет смысл объяснить, почему правомерен сам вопрос.

Ведь задолго до возникновения квантовой механики статистический способ широко применялся для описания состояния, правда, не одной частицы, а коллектива огромного (строго говоря, бесконечно большого) числа частиц. Фундаментальным понятием, которое при этом использовалось, было понятие стационарной степени заполнения одного состояния частицами. Эта же величина называлась и вероятностью заполнения состояния, и числом частиц, приходящимся на одно состояние. Обозначим ее *символом* $\widetilde{N}$. Зависимость $\widetilde{N}$ от всех характеристик, приписываемых как отдельной частице коллектива, так и коллективу в целом, считалась известной (данной), если коллектив находился в особом состоянии — так называемого термодинамического равновесия[13]. Для коллектива точечных частиц ***равновесная*** стационарная степень заполнения состояния с энергией E при температуре коллектива T была принята равной $\widetilde{N}_0 = \left(1 + e^{\frac{E - E_\Phi}{k_B \cdot T}}\right)^{-1}$, где k_B — постоянная Больцмана, E_Φ — уровень Ферми.

[13] Если подразделить коллектив (занимающий бесконечно большой объем) на более мелкие части (опять-таки очень большого объема), то термодинамическое равновесие означает отсутствие результирующего потока энергии, импульса и т. п. на границе двух мелких частей. Кроме того, имеется в виду, что, несмотря на бесконечно большой занимаемый объем, коллектив находится в тепловом контакте с бесконечно теплоемким телом — термостатом, и на их границе раздела также отсутствует результирующий поток энергии, импульса и т. п.

Внешнее воздействие вызывает отклонение от равновесия. Но считалось, что непосредственно изменяется при этом только величина $\tilde{N}$. Для установления вида зависимости $\tilde{N}$ от ее аргументов использовалось знаменитое кинетическое уравнение, и его простейшая форма такова:

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}=\frac{\partial\tilde{N}_0}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{V}+\frac{\partial\tilde{N}_0}{\partial\vec{P}}\cdot\vec{\mathrm{F}}+\frac{\tilde{N}-\tilde{N}_0}{\tau}.$$

Здесь: $\vec{\mathrm{F}}$ — внешняя сила, τ — время релаксации, которое может зависеть, например, от энергии. Температура T и уровень Ферми $E_{\text{ф}}$ могут зависеть от координат точки пространства. Что касается величины $\tilde{N}$, то здесь она считается квазистационарной.

Решив кинетическое уравнение с заданным начальным условием, можно потом найти значение любой физической величины, характеризующей коллектив в целом. Правда, при этом приходится вводить понятие так называемой плотности состояний ($G_{\vec{V}}$) — числа состояний со скоростью $\vec{V}$, приходящегося на 1 см^3 пространства и на $1\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^3$ $\vec{V}$-пространства. Величина $G_{\vec{V}}\left[\frac{\text{c}^3}{\text{см}^6}\right]$ считается известной и не зависящей ни от $\vec{r}$, ни от t.

Учитывая, что понятие плотности состояний приложимо, строго говоря, лишь к ***континуальному*** телу, принято находить, например, ***плотность*** потока частиц $(\vec{J})$ и объемную ***концентрацию*** частиц (n), используя выражения:

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\int\limits_{\vec{V}}\vec{V}\cdot G_{\vec{V}}\cdot\tilde{N}\left(\vec{V},T,E_{\text{ф}},\vec{r},t\right)\cdot d^3\vec{V},$$

$$n(\vec{r},t)=\int\limits_{\vec{V}}G_{\vec{V}}\cdot\tilde{N}\left(\vec{V},T,E_{\text{ф}},\vec{r},t\right)\cdot d^3\vec{V}.$$

Поделив первую величину на вторую, получим скорость той бесконечно малой части коллектива, которая присутствует в момент времени t в бесконечно малом объеме пространства около точки, радиус-вектор которой есть $\vec{r}$:

$$\vec{V}_{\text{доли коллектива}}(\vec{r},t)=\frac{\vec{J}(\vec{r},t)}{n(\vec{r},t)}.$$

Как видим, существует статистический способ описания (в рамках которого коллектив частиц представляется континуальным объектом), использующий такое понятие степени заполнения состояния, которое позволяет считать внешнюю силу воздействующей ***непосредственно на эту самую степень заполнения.*** Но..., принципиально важно, что установление явного вида зависимости величины $\tilde{N}$ от всех ее аргументов основано на фундаментальном предположении, что ***частицы коллектива простран-***

ственно разобщены, вечно движутся, время от времени сталкиваясь друг с другом, и все это — именно хаотически.

Вполне допустимо уподобить бесконечно большое число долей одной точечной частицы коллективу частиц. Но..., совершенно недопустимо считать, что эти доли пространственно разобщены, вечно движутся, время от времени сталкиваясь друг с другом, и все это — именно хаотически.

Таким образом, имея в виду одну частицу, невозможно образовать понятие степени заполнения какого бы то ни было состояния ***тем же*** способом, каким аналогичное понятие было образовано применительно к коллективу хаотически движущихся и сталкивающихся частиц.

Имеет смысл обратить внимание еще на одно обстоятельство.

Способ образования величины $\widetilde{N}_0$ вынуждает интерпретировать ее как

$$\frac{\textit{число пространственно разделенных частиц, находящихся в данный момент времени в разных состояниях с одинаковой энергией}}{\textit{число разных разрешенных состояний с одинаковой энергией}}.$$

Знаменатель этой дроби есть константа для коллектива, заключенного в объеме пространства, внутри которого может быть и некое структурированное поле, не зависящее от внешнего воздействия. От этого воздействия зависит числитель дроби.

Совершенно иначе определена та степень заполнения одного состояния точечной частицей, которой мы вынуждены оперировать в рамках квантовой механики (см. § 2.3).

Разумеется, если $\widetilde{N}_0 = \left(1 + e^{\frac{E-E_0}{k_B \cdot T}}\right)^{-1}$ и, тем самым, $0 \leqslant \widetilde{N}_0 \leqslant 1$, величину $\widetilde{N}_0$ допустимо интерпретировать еще и так:

$$\widetilde{N}_0(E,T) = \langle \widetilde{n}(E,T) \rangle_{\Delta t \to \infty}, \quad \text{где} \quad \widetilde{n}(E,T,t) = \begin{cases} \textit{либо } 1; \\ \textit{либо } 0. \end{cases}$$

Однако — это не более чем реинтерпретация, хотя и вполне справедливая. Ведь, исходя из равенства $\widetilde{n}\,(E,T,t) = \begin{cases} \textit{либо } 1; \\ \textit{либо } 0, \end{cases}$ можно прийти только к выводу, что стационарная (или квазистационарная) степень заполнения как «квантово-механическая», так и «классически-статистическая» не меньше нуля и не больше единицы. Вот и все. Прийти к выражению $\widetilde{N}_0 = \left(1 + e^{\frac{E-E_0}{k_B \cdot T}}\right)^{-1}$ или какому-нибудь другому, но ***конкретному*** выражению, исходя из равенства $\widetilde{n}\,(E,t) = \begin{cases} \textit{либо } 1; \\ \textit{либо } 0, \end{cases}$ невозможно в принципе.

Все сказанное должно убедить читателя в том, что ***традиционным способом*** невозможно образовать конструктивное выражение, которое могло бы служить определением стационарной степени заполнения какого бы то ни было состояния применительно к ***одной*** точечной частице.

Если же образовать такое выражение нетрадиционным способом, не стоит удивляться, что внешнее воздействие окажется не способным влиять непосредственно на «нетрадиционно» образованную степень заполнения.

Вот так выглядит ответ на вопрос, «почему традиционный (доквантовый) статистический способ оказался непригодным для описания состояния одной частицы?»

Теперь я попробую объяснить, почему внешнее воздействие и не должно влиять непосредственно на ту квантово-механическую величину $\frac{d\tilde{N}}{dx}$, о которой шла речь в § 3.1. Опять-таки все дело в том, что величина эта описывает состояние ***одной*** частицы. Давайте вспомним кубик, который в гл. 2 кувыркался над поверхностью стола. Совершенно очевидно, что внешнее воздействие в процессе падения кубика может быть приложено только к кубику. Но внешнее воздействие не может изменить численного значения вероятности (того, что кубик ляжет на стол, например, гранью № 4) ***в процессе падения*** кубика. Такие характеристики одного отдельного объекта (кубика или точечной частицы), как импульс, скорость, энергия, механический момент и т. п., сосредоточены, образно выражаясь, в самом объекте. Любая из них начнет изменяться сразу же, как только внешнее воздействие будет приложено непосредственно к объекту. Но вероятность, которая сопутствует движущемуся кубику[14], — вовсе не такая характеристика, и она не может измениться в течение того промежутка времени, пока кубик в процессе падения (до того, как он окажется в положении «лежа на столе») будет испытывать внешнее воздействие. Можно, конечно, установить, чему равно значение ***вероятности того, что кубик будет лежать на столе гранью № 4***, в новой обстановке (в которой кубик опять-таки ***многократно*** падает на стол, испытывая всякий раз ***одно и то же*** воздействие), но для этого потребуется очень много времени. И, если новая обстановка будет сохраняться столь же неизменной во времени, как и прежняя, можно будет утверждать, что значение ***вероятности того, что кубик будет лежать на столе гранью № 4***, окажется в новой обстановке равным, например, $\frac{1}{5}$, а не $\frac{1}{6}$[15].

Однако вот, что крайне важно. Никогда раньше не приходило в голову, что значение вероятности может ***в явном виде*** зависеть от значения внешнего фактора, воздействующего хотя бы на тот же кубик. Естественно, не мог возникнуть и вопрос, как именно подобную зависимость следует находить. Тем не менее, обе проблемы неожиданно оказались существенными при разработке статистического способа описания состояния одной частицы. Квантовая механика разрешила их, образовав специфическое ***промежуточное*** понятие – Ψ-функции, — такой функции координат

[14] Вероятность именно сопутствует кубику — точно так же, как сопутствует, согласно гипотезе де Бройля, Ψ-функция точечной частице.

[15] Само понятие ***«вероятности того, что... в определенной обстановке»*** обладает физической содержательностью лишь в обстановке, сохраняющейся неизменной в течение достаточно большого (строго говоря, бесконечно большого) промежутка времени.

точки пространства и момента времени, а также импульса, энергии и т. п. физических величин, чтобы сам вид зависимости Ψ от $\vec{r}, t, \vec{P}, E, \ldots$ полностью определяется внешними факторами. Это и будет означать, что внешний фактор не влияет на значения $\vec{r}, t, \vec{P}, E, \ldots$, ибо ***все они в рамках любого статистического способа описания не считаются характеристиками частицы. Это все независимые друг от друга пространства*** (множества, континуумы), ***не подверженные внешнему воздействию.***

Что же касается вероятности, то она стала функцией Ψ-функции.

Есть еще один аспект, связанный с необходимостью введения нового для доквантовой физики понятия Ψ-функции.

Я предлагаю читателю, знакомому с учебными пособиями и монографиями по квантовой механике и, таким образом, осведомленному о повсеместном использовании Ψ-функции, самому себе задать вопрос: *«почему нельзя без этого понятия обойтись?»*

Если ответ на это вопрос существует, то в какой книге его можно найти? Если же выясниться, что ни в одной из книг ответа на этот вопрос нет, то, возможно, этому есть три причины.

Первая — банальная: сам вопрос никого из грандов теоретической физики не интересует, так как потерял актуальность уже на этапе разработки квантовой механики, а справедливость ее методов для описания адекватных явлений природы уже давным-давно никто, кроме отъявленных невежд, под сомнение не ставит.

Вторая причина: ученому сообществу все еще не хватает времени, чтобы ответ получить.

Совершенно нетривиальной оказывается третья причина.

Во-первых, дело вот в чем. Если, например, существование точечной частицы, обладающей электрическим зарядом и массой покоя, мы признаем проявлением Природы, то это признание есть эквивалент отказа от объяснения причин подобного проявления. Попросту говоря, мы соглашаемся с тем, что: либо ***объективно*** и быть не может ответа на ***законный*** вопрос *«почему существуют подобные частицы?»*; либо сам вопрос нужно признать ***незаконным*** (бессодержательным, бессмысленным и т. п.). Таким образом, отсутствие ответа на вопрос *«почему необходимо допустить существование Ψ-функции?»*, казалось бы, следует интерпретировать как согласие считать эту величину таким же проявлением Природы, как, скажем, электрон. Тогда, конечно, придется вывести Ψ-функцию из категории псевдофизических величин. Но вот незадача: за одним единственным исключением Ψ-величина («сопутствующая» любой точечной частице) непрерывно распределена в пространстве. То есть обладает признаками чисто континуального материального объекта — поля. Тем не менее, «Ψ-поле» ***никакими*** атрибутами материального объекта (массой, напряженностью и т. п.) не обладает. Поэтому с «Ψ-полем» реальный объект взаимодействовать не может, и всякие утверждения о ***существовании*** «Ψ-поля» или «волн де-Бройля» следует воспринимать лишь как жаргон, допустимый только в среде специалистов[16]. При всем том нет никаких оснований сомневаться в необходимости введения и использования специфического понятия Ψ-функции при статистическом описании состояния как ***одной точечной*** частицы, так и ***любого одного*** объекта (например, коллектива точечных частиц), рассматриваемого в качестве именно ***цельного*** объекта.

Во-вторых, есть еще одна проблема.

Давайте рассмотрим состояние частицы, в котором она вечно локализована в одной и той же точке пространства (простоты ради, в точке X-оси). Рассуждая в рамках механического (доквантового) способа описания, вполне допустимо было бы считать, что из той точки X-оси, в которой локализована частица, исходит бесконечно много векторов $\vec{P}$ различной длины и направленных в противоположные стороны X-оси. В этом случае результирующий импульс частицы равен нулю (также и результирующая скорость). Можно было бы выразиться иначе, сказав, что частица в любой момент времени участвует (одновременно) в бесконечно большом числе прямолинейных и равномерных движений, каждое из которых характеризуется своим значением импульса. Однако ...не кажется ли читателю, что любое из утверждений неотличимо от утверждения, что каждая ***доля*** частицы обладает в любой момент времени одним и тем же, но — ***своим*** импульсом, а ***частица в целом***, естественно, суммой импульсов *долей*? Ведь все сделанные утверждения приводят к одной формуле: $\vec{P}_{\text{частицы}} = \sum\limits_{i=1}^{i=\infty} \vec{P}_i = 0$. Очевидно также, что совершенно безразлично считать ли импульс $\vec{P}_i$ «принадлежащим одному движению» (движению в целом), или же принадлежащим одной доле частицы[17].

Теперь обсудим возможность использовать статистический способ описания состояния точечной частицы, желая представить состояние абсолютной связанности возникшим из бесконечно большого числа состояний абсолютной свободы, отличающихся друг от друга лишь тем, что каждому из них приписывается свой импульс (своя скорость равномерного, прямолинейного движения).

Находясь в состоянии абсолютной свободы (это, когда все точки X-оси физически неразличимы), частица обладает точно определенным импульсом, но присутствует в любой точке X-оси с равной вероятностью в любой момент времени. Находясь в состоянии абсолютной связанности, частица присутствует в определенной точке X-оси, но в любой момент времени обладает любым импульсом с равной вероятностью. Сказанное отображено на рис. 3.1, где вероятность обозначена символом W.

---

[16] В буквальном смысле слова ни «Ψ-поле», ни «волны де-Бройля», конечно, не существуют.

[17] На всякий случай напомню, что решение считать импульс $\vec{P}_i$ не зависящим от времени равносильно признанию совпадения мгновенного значения $\vec{P}_i$ с усредненным по любому промежутку времени.

Наша задача — найти такую математическую операцию, которая позволила бы преобразовать вероятность, надежно установленную из ***чисто физических*** (***качественных***) соображений для случая простой обстановки, в вероятность, соответствующую более сложной, а, честно говоря, любой обстановке. Хотелось бы подчеркнуть, что если такую операцию найти удастся, это будет означать возможность обойтись без использования Ψ-функции.

В качестве примера выясним, как связана вероятность того, что частица вечно локализована в ***одной*** точке X-оси, с вероятностью того, что частица, обладая определенным импульсом, присутствует в ***каждой*** из точек X-оси.

Я начну с напоминания, что ***«вероятность того, что...»*** является результатом усреднения по времени, и если промежуток времени усреднения бесконечно продолжителен, вероятность должна считаться не зависящей от времени. С тем, чтобы сделать дальнейшие словесные рассуждения и математические выражения менее громоздкими, предлагается далее воздержаться от упоминания о времени.

Что касается ***«вероятности того, что частица присутствует в одной (определенной) точке X-оси вечно»***, то, на первый взгляд, казалось бы логичным считать, что эта вероятность оказалась равной единице и, следовательно, не зависящей от импульса только потому, что она возникла в результате интегрирования по импульсу. То есть, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW(x,P)}{dP} \cdot dP = 1. \tag{3.8,а}$$

Что касается зависимости величины $\frac{dW(x,P)}{dx}$ от x то, согласно нашим представлениям о состоянии абсолютной свободы, величина $\frac{dW(x,P)}{dx}$ не зависит от x и исчезающе мала для любого P. Таким образом, сравнивая состояния абсолютной связанности и свободы (см. рис. 3.1) и считая, что первое образуется из множества последних (с импульсами из интервала от $-\infty$ до $+\infty$), а последнее — из множества первых (с координатами из интервала от $-\infty$ до $+\infty$), выражение (3.8,а), казалось бы, допустимо представить в виде

$$W^{\text{связ}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW^{\text{своб}}(x,P)}{dP} \cdot dP, \tag{3.8,б}$$

причем $W^{\text{связ}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = x_*; \\ 0 & \text{при} \quad x \neq x_*. \end{cases}$

Тем не менее, из сравнения друг с другом зависимостей 1 и 2, представленных на рис. 3.1, очевидно, что суммирование любого числа параллельных пунктирных линий не приведет к образованию единственного пика единичной высоты, равно как объединение (вдоль оси абсцисс) любого числа параллельных пиков единичной высоты не приведет к обра-

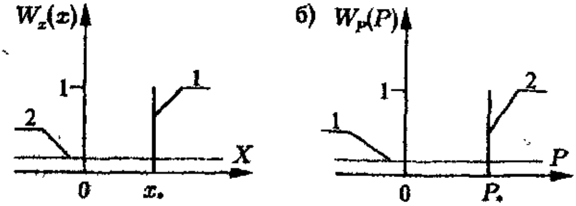


Рис. 3.1. Распределение вероятностей.

а) Вероятность того, что частица присутствует в точке X-оси (1 — частица находится в состоянии абсолютной связанности в точке с координатой x_* (то есть присутствует в этой точке **достоверно**); 2 — абсолютно свободная частица (*пунктирная линия параллельна X-оси и бесконечно близка к ней*)).

б) Вероятность того, что частица обладает импульсом P (1 — частица находится в состоянии абсолютной связанности в точке с координатой x_* (*пунктирная линия параллельна P-оси и бесконечно близка к ней*); 2 — абсолютно свободная частица, **достоверно** обладающая импульсом P_*).

зованию единственной пунктирной линии, параллельной оси абсцисс и бесконечно близко к ней прижатой.

По-видимому есть только одна возможность — образовать специфическую (промежуточную) величину (ее-то и назовем Ψ-функцией), которая зависит от x и P, и от которой, в свою очередь, зависит вероятность W.

Поясню сказанное с помощью нескольких схем.

Первая из них

$$W^{\text{своб}} \nleftrightarrow W^{\text{связ}}$$

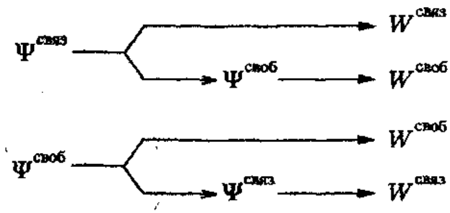
призвана продемонстрировать невозможность прямого (непосредственного) перехода от величины, например, $W^{\text{связ}}$ к величине $W^{\text{своб}}$ (и обратно), а, следовательно, и ошибочность выражений (3.8,б).

Вторая схема основана на предположении о существовании новой *самостоятельной* величины — Ψ-функции. Варианты **этой** схемы выглядят следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & & W^{\text{связ}} \\
\Psi^{\text{связ}} \arrow[urr] \arrow[r] & \Psi^{\text{своб}} \arrow[r] & W^{\text{своб}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Psi^{\text{связ}} \arrow[d, bend right=60] & W^{\text{связ}} \arrow[l] \\
\Psi^{\text{своб}} \arrow[r] & W^{\text{своб}}
\end{tikzcd}$$

Любой из вариантов, казалось бы, можно посчитать приемлемым. Однако на самом деле по виду зависимости W от ее аргументов нельзя установить зависимость Ψ от *ее* аргументов. Поэтому пригодными могут быть только две схемы:



Теперь нужно решить две задачи.

1. Разработать способ преобразования Ψ-функции в величину W.
2. Разработать способ преобразования друг в друга разных Ψ-функций.

Займемся сначала первой задачей, и прежде всего введем более подходящее для практических целей понятие ***пространственной плотности*** вероятности — величины Π с размерностью $\frac{1}{\text{см}}$ $\left(\Pi = \frac{dW}{dx} = \frac{d\widetilde{N}}{dx}\right)$.

Естественно, что вечно существующая частица в какой-нибудь точке X-оси присутствует, и потому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi \cdot dx = 1$.

Если частица пребывает в состоянии абсолютной связанности (вечно присутствует в одной и той же точке X-оси — с координатой x_*), то

$$\Pi^{\text{связ}}(x) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad x = x_*; \\ 0 & \text{при} \quad x \neq x_*. \end{cases} \qquad (3.9,\text{а})$$

При этом вполне возможно реализовать равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi^{\text{связ}} \cdot dx = 1. \qquad (3.9,\text{б})$$

Функция $\Pi^{\text{связ}}(x)$, удовлетворяющая условиям (3.9), называется δ-функцией Дирака.

Если частица является свободной, то величина Π не должна зависеть от x (вследствие физической неразличимости всех точек X-оси). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi^{\text{своб}} \cdot dx = \lim_{\Delta x \to \infty} \left\{ \Pi^{\text{своб}} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} dx \right\} = \Pi^{\text{своб}} \cdot \lim_{\Delta x \to \infty} \left\{ \int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} dx \right\} = 1,$$

откуда следует, что $\Pi^{\text{своб}} = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{1}{\Delta x}$.

Теперь выразим связь величин $\Pi(x)$ и $\Psi(x)$ в виде символического соотношения $\Pi(x) = \widehat{\bigcap}_{\Psi \to \Pi} \{\Psi(x)\}$, в котором символ $\widehat{\bigcap}_{\Psi \to \Pi}$ означает выполнение определенной операции по преобразованию одной величины (расположенной в фигурных скобках) в другую.

В математике, если хорошенько поискать, можно найти и операции и функции, подходящие для рассматриваемого преобразования. Однако при этом нужно располагать критерием, позволяющим отбирать именно те операции и функции, которые должны оказаться адекватными реальным ситуациям. Но ведь математических операций и функций, равно, как ситуаций, бесконечно много. Вот, почему возможность преобразования символического выражения $\Pi(x) = \widehat{\bigcap}_{\Psi\to\Pi}\{\Psi(x)\}$ в математическое соотношение, адекватное ***реальной*** ситуации, явилась открытием в самом, что ни на есть, буквальном смысле слова. Подобное соотношение невозможно вывести путем логических рассуждений ни из предшествующей теории, ни из опыта как раз из-за введения совершенно нового (самостоятельного) понятия (Ψ-функции) еще ***до*** опыта. И вот в 1926 году Макс Борн ***постулировал, что***

$$\Pi(x,t) = \breve{\Psi}(x,t)\cdot\Psi(x,t),$$

в какой бы ситуации ни находилась точечная частица.

Таким образом, первоначальный постулат, согласно которому соотношение $\Pi(x,t) = \breve{\Psi}(x,t)\cdot\Psi(x,t)$ справедливо только для свободной частицы (см. с. 97), получил наиболее сильное обобщение.

На всякий случай замечу, что, во-первых, присутствие времени t означает отказ от необходимости считать величины П и Ψ только стационарными; во-вторых, Ψ-функция (тем самым и величина П) может принадлежать ***семейству***, то есть зависеть еще от некоторой физической характеристики, выступающей в роли параметра семейства.

Перейдем к решению задачи преобразования друг в друга различных Ψ-функций.

Если известны обе Ψ-функции, которые требуется преобразовать друг в друга, то остается подобрать способ преобразования, используя уже имеющиеся в арсенале математики операции сложения, умножения, дифференцирования, разложения в ряд, интегрирования и т. п. Математики решали подобные задачи задолго до возникновения квантовой механики. Однако перед нами совершенно иная задача, — располагая явным видом ***лишь одной*** функции, найти явный вид ***другой*** функции, или, что — то же самое, придать символическому выражению $\Psi^{\mathrm{I}}(x) = \widehat{\bigcap}_{\Psi^{\mathrm{II}}\to\Psi^{\mathrm{I}}}\{\Psi^{\mathrm{II}}(x)\}$ явный вид. То есть сделать то, что сделал М. Борн с выражением $\Pi(x) = \widehat{\bigcap}_{\Psi\to\Pi}\{\Psi(x)\}$. Вот, почему ничего другого не остается, как принять еще один постулат:

$$\Psi^{\mathrm{I}}_{\mathrm{X}_*}(\mathrm{X}) = \int\limits_B \wp(\mathrm{X}_*, \mathrm{X}, B)\cdot\Psi^{\mathrm{II}}_{\mathrm{X}}(B)\cdot dB \qquad (3.10)$$

(здесь: X и B — некоторые физические характеристики; X_* — конкретное значение X-характеристики, играющее роль параметра семейства

Ψ^{I}-функций; $\wp$ — коэффициент, отображающий вклад той Ψ^{II}-функции, которой отвечает значение параметра X, в значение Ψ^{I}-функции)[18].

Именно выражение (3.10) является математическим эквивалентом словесного утверждения, что *состояние одного типа* (*каким бы оно ни было*) *можно образовать из состояний другого типа.*

Постулат (3.10) получил название ***принципа суперпозиции состояний.***

Строго говоря, в рамках статистического способа описания состояний частицы этот постулат напрашивается сам собой. Ведь если в I-состоянии Ψ^{I}-функция частицы (обладающей X-характеристикой) не зависит от B (см. выражение (3.10)), это всегда можно объявить следствием того, что частица вместе с ее X-характеристикой выглядит распределенной по B-континууму своими бесконечно малыми долями. Проинтегрировав по B-континууму, мы как раз и получим Ψ-функцию, не зависящую от B. Можно рассуждать и по-другому. Ведь только потому частица лишь с ***некоторой*** (между нулем и единицей) ***вероятностью*** может обладать, например, импульсом, равным P_1, что она может находиться и в таком состоянии, в котором она обладает этим же значением импульса ***достоверно.*** Сказанное следует повторить столько раз, сколько значений у импульса (P_1 — это лишь одно из бесконечно большого числа значений).

По сути дела мы придаем логическую содержательность понятию ***«вероятность того, что...»*** тем, что придаем логическую содержательность понятию ***«достоверно, что...».*** Здесь мы сталкиваемся с проявлением знаменитого принципа дополнительности[19], который состоит в утверждении, что логическую содержательность (попросту говоря, — здравый смысл) можно придать только сразу ***паре*** понятий, причем каждое из них должно быть противоположным другому. Нельзя придать содержательность одному — изолированному — понятию. Сказанное легко продемонстрировать на примерах следующих пар:

много—мало; вероятно—достоверно; точка—линия; линия—поверхность; поверхность—объем; один—множество; дети—родители; богатый—бедный; начальник—подчиненный.

Вернемся теперь к выражению (3.10). Хотя оно качественно отличается от символического выражения $\mathrm{II}(x) = \widehat{\bigcap}_{\Psi\to\mathrm{II}}\{\Psi(x)\}$, но признать его конструктивным можно лишь при условии, что известен способ нахождения коэффициентов $\wp$.

Рассмотрим эту проблему на примерах построения $\Psi^{\text{связ}}$-функции из $\Psi^{\text{своб}}$-функций и построения $\Psi^{\text{своб}}$-функции из $\Psi^{\text{связ}}$-функций.

---

[18] Нижний индекс у Ψ^{II}-функции указывает на значение параметра семейства, к которому принадлежит данная Ψ^{II}-функция.

[19] Этот принцип применялся еще до новой эры в цивилизованных для того времени обществах, но в физику был введен Нильсом Бором. Именно Н. Бор предложил название *«принцип дополнительности»* и доказал, что вне рамок этого принципа невозможно придать понятию конкретной физической характеристики логическую содержательность.

Первое, что становится очевидным, так это некоторая неполнота ранее принятых постулатов. Напомню, что был постулирован явный вид $\Psi^{\text{своб}}$-функции — функции состояния свободной точечной частицы, но ничего не говорилось о функции состояния абсолютно связанной частицы. Однако с точки зрения логики нельзя обосновать предпочтение одной Ψ-функции другой. Поэтому предлагается постулировать еще и вид $\Psi^{\text{связ}}$-функции. Пусть

$$\Psi^{\text{связ}}_{x_*}(x) = \sqrt{2\hbar}\cdot\delta\Big(x - x_*\Big)\ ^{20)}, \tag{3.11}$$

причем пусть $\delta(x - x_*) \equiv \lim\limits_{\Delta P\to\infty}\frac{\sin\frac{\Delta P\cdot(x-x_*)}{2\hbar}}{\sqrt{\pi\cdot\Delta P}\cdot(x-x_*)}$. Тогда сначала можно написать:

$$\Psi^{\text{связ}}_{x_*}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\wp(x_*, x, P)\cdot\Psi^{\text{своб}}_{x}(P)\cdot dP; \tag{3.12,а}$$

$$\Psi^{\text{своб}}_{P_*}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\wp(P_*, x, x_*)\cdot\Psi^{\text{связ}}_{x}(x_*)\cdot dx_*, \tag{3.12,б}$$

а, используя явный вид Ψ-функций, перейти к выражениям:

$$\sqrt{2\hbar}\cdot\delta(x - x_*) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\wp(x_*, x, P)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{e^{i\cdot\frac{P\cdot x}{\hbar}}}{\sqrt{\Delta x}}\right)\cdot dP; \tag{3.13,а}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{e^{i\cdot\frac{P\cdot x}{\hbar}}}{\sqrt{\Delta x}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\wp(P, x, x_*)\cdot\left\{\sqrt{2\hbar}\cdot\delta(x - x_*)\right\}\cdot dx_*\ ^{21)}. \tag{3.13,б}$$

Теперь — небольшое математическое отступление.

1. *Любая Ψ-функция должна удовлетворять условию вида*

$$\int\limits_{B}\breve{\Psi}(\ldots, B)\cdot\Psi(\ldots, B)\cdot dB = 1,$$

так как вероятность того, что частица обладает ***каким-нибудь*** *значением B-характеристики, равна единице по определению самого понятия вероятности.*

2. *Если частица находится в так называемом* ***чистом*** *состоянии (в котором частица именно* ***достоверно*** *обладает* ***одним*** *— определенным — зна-*

---

[20] Нижний индекс у Ψ-функции является параметром семейства $\Psi(x)$.

[21] В этом выражении символом P обозначено то самое — одно — значение импульса (равное P_*), которым достоверно обладает свободная частица. Нижний индекс (звездочка) снят, поскольку само выражение справедливо при любом значении импульса.

чением физической характеристики), она не может находиться ни в каком другом, столь же чистом состоянии.

Перенумеровав все чистые состояния с помощью нижнего индекса, объединим это условие и предыдущее одним выражением

$$\int\limits_B \breve{\Psi}_j(\ldots, B) \cdot \Psi_k(\ldots, B) \cdot dB = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k; \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Нахождение коэффициентов $\wp$, когда известны ***обе*** Ψ-функции, является не очень сложной математической задачей. Так, положив в выражениях (3.13)

$$\wp(x_*, x, P) = \lim_{\Delta P \to \infty} \sqrt{\frac{\Delta x}{2\pi \cdot \hbar \cdot \Delta P}} e^{-i \cdot \frac{P \cdot x_*}{\hbar}},$$

$$\wp(P, x, x_*) = \lim_{\Delta x \to \infty} \sqrt{\frac{\Delta P}{2\pi \cdot \hbar \cdot \Delta x}} e^{i \cdot \frac{P \cdot x}{\hbar}},$$

и выполнив интегрирование, нетрудно убедиться, что выражения (3.13) обращаются в тождества.

Следует отметить, что принцип суперпозиции в равной степени применим и в ситуациях, в которых частица, участвуя во взаимодействии с неким чисто потенциальным полем, возникает и исчезает (см. § 2.4). В этих ситуациях:

$$\Psi_{t_*}^{\text{мгнов}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \wp(t_*, t, E) \cdot \Psi_t^{\text{вечн}}(E) \cdot dE;$$

$$\Psi_E^{\text{вечн}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \wp(E, t, t_*) \cdot \Psi_t^{\text{мгнов}}(t_*) \cdot dt_*.$$

Остается еще объяснить, где может потребоваться обращение к принципу суперпозиции. С этой целью предлагается рассмотреть два случая.

Представим себе, что частица присутствует в пространстве, в которое вложено силовое поле, пространственное распределение потенциала которого сильно флуктуирует во времени (иначе говоря, число различных пространственных конфигураций поля очень велико). Естественно, потенциальная энергия взаимодействия частицы с полем автоматически сильно флуктуирует во времени. Понятно, что каждой (ι-й) пространственной конфигурации можно поставить в соответствие уравнение Шредингера, решив которое, мы найдем отвечающую упомянутой конфигурации Ψ_ι-функцию. Однако совершенно очевидно, что ни одна из них не может считаться отвечающей реальному — флуктуирующему во времени — полю. Вот здесь приходит на помощь принцип суперпозиции. Согласно ему, Ψ-функцию, отвечающую реальной ситуации, можно выразить через известные (ранее найденные) Ψ_i-функции (например, функции времени, X-координаты и полной энергии E):

$$\Psi(t,x) = \int \wp_x(E)\cdot\Psi(t,x,E)\cdot dE.$$

Разумеется, должно быть известно, как находить явный вид $\wp_x(E)$-коэффициентов.

Теперь — второй случай.

Представим себе, что частица находится в таком состоянии, в котором, например, X-проекция ее импульса в разные моменты времени приобретает разные значения. Если Ψ-функция этого состояния известна, то, используя принцип суперпозиции, можно вычислить каждую конкретную вероятность того, что величина P_x равна конкретному определенному значению (из множества значений).

Располагая Ψ-функцией и всем множеством Ψ_i-функций, можно написать: $\wp(P) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\cdot\breve{\Psi}(x,P)\cdot dx$. Вероятность же того, что частица обладает значением импульса, находящимся между P и $P+dP$, определяется выражением $dW = |\wp(P)|^2\cdot dP$. Если речь пойдет о сравнении результатов эксперимента и теоретических расчетов, можно будет сравнить вычисленную плотность вероятности (величину $\frac{dW}{dP}$) с измеренной.

В заключение я предлагаю читателю еще раз задуматься над тем, к какой категории понятий следует отнести *Ψ-функцию* и *«вероятность того, что...»*.

В связи с этим следует вспомнить, что материальные объекты, например, такие, как электрон (точечная частица) и электромагнитное поле (бесконечно протяженный континуум), обладают прежде всего характеристиками-константами[22], каковые отражают их себетождественность (образно выражаясь, подобные характеристики и есть материальные сущности). Говоря, что *«сила приложена к массе (частицы)»*, мы не сомневаемся в том, что воздействие может быть непосредственно приложено только к самой частице.

Все характеристики-константы принято относить к категории ***физических*** характеристик.

К совершенно иной разновидности, но также физических характеристик частицы, относятся импульс, механический момент, потенциальная энергия, и т. п. Их значения могут меняться. Тем не менее, все подобные характеристики всегда сосредоточены в том же месте пространства, в котором присутствует в данный момент времени сам материальный объект. То есть, приурочены к самому объекту. Именно на этом основании все подобные характеристики относятся к категории ***физических***, а не математических.

---

[22] К ним относятся масса покоя (она может быть равна нулю), электрический заряд (он может быть равен нулю), размеры (они могут быть равны нулю).

А, что можно сказать о вероятности? На примере с кубиком, падающем на стол, было очевидно, что вполне разумно считать вероятность жестко связанной с самим кубиком подобно, например, импульсу. Но..., если под действием силы импульс частицы начинает ***сразу же*** меняться во времени, то ***с вероятностью этого не может происходить***, что называется, по определению. Поэтому вряд ли стоит возражать против того, чтобы отнести вероятность к категории математических характеристик.

А теперь обратимся к Ψ-функции. Ее значение меняется во времени ***сразу же***, как только внешнее воздействие будет приложено к частице. Далее, например, две взаимодействующие друг с другом частицы обмениваются не только импульсами, но и своими Ψ-функциями. Но... Ψ-функция за единственным исключением[23] заполняет, по крайней мере, конечный (но никак не нулевой) объем пространства[24]. Следовательно, ее значение отлично от нуля даже там, где частицы (точечной) нет. И только если мы соглашаемся при описании состояния точечной частицы считать ее «размазанной» по пространству (состоящей из долей), лишь тогда не должен вызывать удивления тот факт, что значение Ψ-функции отлично от нуля повсюду (поскольку повсюду присутствует хоть какая-то доля частицы). Вот почему мне кажется справедливым отнести Ψ-функцию к особой категории — ***псевдофизических*** — характеристик.

§ 3.4. Уравнение непрерывности и очередной постулат

Давайте вернемся к выражению вида (2.42), заменив бесконечно продолжительный промежуток времени усреднения на такой $(\widetilde{\Delta t})$, который позволил бы оперировать ***квазистационарной*** величиной $\widetilde{N}(x,t)$. Тогда:

$$\langle V_{\text{частицы}}\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}\cdot\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)\cdot dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\,\langle V_{\text{частицы}}(x,t)\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t)}{dx}\right)\cdot dx. \qquad (3.14,\text{а})$$

Здесь, напомню: $\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)$ — пространственная плотность, в любой момент времени создаваемая точечной частицей в точке X-оси (так что

---

[23] Имеется в виду Ψ-функция частицы, вечно локализованной в одной точке пространства. Однако, на самом деле, и точечная частица не может покоиться в одной и той же точке пространства вечно и непрерывно. (В связи с этим замечанием см. с. 180, 185).

[24] Ψ-функция свободной частицы заполняет бесконечно большой объем пространства.

$\left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right) dx$ есть бесконечно малая доля частицы); $\mathcal{V}$ — пресловутый (ранее упоминавшийся) фактор размерности $\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$; $d|\langle V_{\text{частицы}}(x,t)\rangle_{\widetilde{\Delta t}}(t)|$ — та часть скорости ***частицы в целом***, которая в момент времени t приурочена к точке X-оси.

Для снижения громоздкости формул предлагается снять символ $\langle\rangle_{\widetilde{\Delta t}}$ и перейти к выражению

$$V_{\text{частицы}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V} \cdot \left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right) \cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dV_{\text{частицы}}(x,t)}{dx}\right) \cdot dx. \qquad (3.14,\text{б})$$

После всего того, что было сказано в конце § 2.3.2 и в § 2.3.3, уже совершенно ясно, что конструкция $\mathcal{V} \cdot \left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)$ — чисто символическая, и необходимо располагать способом, позволяющим преобразовать ее в математически (и физически) содержательную конструкцию $\frac{dV_{\text{частицы}}(x,t)}{dx}$ [25]. При этом вместо величины $\widetilde{N}$ необходимо оперировать величинами $\breve{\Psi}$ и Ψ такими, что $\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx} \equiv \breve{\Psi} \cdot \Psi$. (Замечу, что скорость фигурирует лишь в качестве примера характеристики частицы.)

Приступая к поискам способа преобразования, следует прежде всего вспомнить, что в рамках статистического способа описания состояния точечной частицы последняя представляется состоящей из долей, каждая из которых занимает бесконечно мало места на X-оси. Таким образом, в любой момент времени точечная частица выглядит (считается) ***непрерывно*** распределенной («размазанной») вдоль X-оси с плотностью, равной $\breve{\Psi} \cdot \Psi$.

Если частица существует вечно и непрерывно во времени, то изменение численного значения доли частицы в точке X-оси может произойти только за счет притока в эту точку другой доли частицы — слева или справа (или же за счет оттока доли частицы из этой точки). В результате мы вполне естественно приходим к уравнению непрерывности, справедливому для любой, но только — ***сплошной*** среды[26]. В рассматриваемом случае уравнение непрерывности выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\breve{\Psi}(x,t) \cdot \Psi(x,t)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x} J_x(x,t), \qquad (3.15)$$

где J_x — плотность потока, равная, по определению,

$$J_x = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} \cdot V_x^* = \breve{\Psi} \cdot \Psi \cdot V_x^*, \qquad (3.16)$$

[25] Напомню, что конструкция $\mathcal{V} \cdot \left(\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}\right)$, содержащая пресловутый фактор размерности, возникла в результате действия оператора $\widehat{V}$ на величину $\frac{d\widetilde{N}(x,t)}{dx}$ (см. формулу (2.37)).

[26] Но, ведь и Ψ-функция заполняет пространство, по условию, непрерывно.

а V_x^* — скорость той движущейся доли частицы, которая в момент времени t считается присутствующей в точке с координатой x. В общем случае V_x^* может зависеть от t и x.

Сравнивая выражения (3.16) и (3.14,б), мы видим, что

$$\mathcal{V}\cdot\frac{d\widetilde{N}}{dx}\cdot dx = V_x^*\cdot\frac{d\widetilde{N}}{dx}\cdot dx = \begin{cases} J_x\cdot dx; \\ \dfrac{dV_{x,\text{частицы}}}{dx}\cdot dx. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $J_x(x,t) = \frac{dV_{x,\text{частицы}}(x,t)}{dx}$.

Теперь так. Если, согласно гипотезе де-Бройля, постулировать, что Ψ-функция свободной частицы имеет вид

$$\Psi = \Psi_0\cdot e^{i\cdot\frac{m_0\cdot V_x\cdot x - E\cdot t}{\hbar}} \quad (m_0\cdot V_x = P_x)\ ^{27)},$$

то плотность потока, создаваемая такой частицей, должна быть равна:

$$J_x(x,t) = (\breve{\Psi}\cdot\Psi)\cdot V_x\,.$$

Очевидно также, что

$$\left.\begin{aligned} &\breve{\Psi}\cdot\left(-\frac{i\cdot\hbar}{m_0}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \\ &\Psi\cdot\left(\frac{i\cdot\hbar}{m_0}\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} = \breve{\Psi}\cdot\Psi\cdot V_x,$$

а потому в качестве определения величины $\frac{dV_{x,\text{частицы}}}{dx}$, казалось бы, можно ***постулировать*** любое из выражений

$$J_{x,1} = \frac{dV_{x,\text{частицы}}}{dx} = -\frac{i\cdot\hbar}{m_0}\cdot\breve{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}; \qquad (3.17,\text{а})$$

$$J_{x,2} = \frac{dV_{x,\text{частицы}}}{dx} = \frac{i\cdot\hbar}{m_0}\cdot\Psi\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x}. \qquad (3.17,\text{б})$$

Однако необходимо учитывать возможность физически содержательной интерпретации математических выражений.

Так как независимость Ψ-функций от t и x принципиально исключена, принятие какого-либо из выражений (3.17) ***в отдельности*** в качестве определяющего плотность потока J_x грозит превращением этой самой плотности в мнимую величину. Подобное обязательно случится, если Ψ-функция окажется вещественной ($\Psi = \breve{\Psi}$). Если же Ψ и $\breve{\Psi}$ — функции комплексно сопряженные, то $J_{x,1} = J_{x,2}$. Вот почему целесообразно

---

27) См. выражение 3.1. Гипотеза де-Бройля и была использована в качестве основания постулировать вид Ψ-функции свободной частицы.

принять в качестве определения плотности потока выражение

$$J_x = \frac{dV_{x,\text{частицы}}}{dx} = \frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\left\{\Psi\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x} - \breve{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}. \tag{3.18}$$

Величина $i\cdot\left\{\Psi\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x} - \breve{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}$ является чисто вещественной при любом виде зависимости Ψ-функции от ее аргументов.

Теперь, сравнивая формулы (3.16) и (3.18), находим, что

$$V_x^* = \frac{J_x}{\breve{\Psi}\cdot\Psi} = \frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\breve{\Psi}}{\Psi} \to \begin{cases} = 0, & \text{если } \Psi \text{ — функция вещественная,}\\ \neq 0, & \text{если } \Psi \text{ — функция комплексная.}\end{cases} \tag{3.19}$$

Из выражений (3.19) следуют два важных вывода.

Частица может считаться неподвижной, если ***каждая*** ее доля (иначе говоря, доля в каждой точке пространства) неподвижна[28]. При этом Ψ-функция является вещественной ($\breve{\Psi} = \Psi$) и $\ln\frac{\breve{\Psi}}{\Psi} = 0$.

Далее, если Ψ-функция содержит множитель $e^{i\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{\hbar}}$ и если $\vec{P}$ не зависит от $\vec{r}$, то скорость $\vec{V}$ каждой доли частицы одинакова (равна $\frac{\vec{P}}{m}$) и, естественно, совпадает со скоростью частицы в целом. Только при таком условии частица не раздирается с течением времени на пространственно разделенные доли.

Таким образом, ***постулировав*** выражение (3.18) в качестве определения величины $\frac{dV_{x,\text{частицы}}(x,t)}{dx}$ (она же — плотность потока, создаваемого одной точечной частицей), мы пришли к конструктивному выражению для квазистационарной скорости частицы в целом:

$$V_{x,\text{частицы}}(t) = \frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\Psi(x,t)\cdot\frac{d\breve{\Psi}(x,t)}{dx} - \breve{\Psi}(x,t)\cdot\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right)\cdot dx. \tag{3.20}$$

Справедливость определения (3.18) можно проверить следующим образом.

Представим сначала уравнение непрерывности в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\breve{\Psi}\cdot\Psi) = \frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{\breve{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x}\right\}. \tag{3.21}$$

Выполнив дифференцирование, получим:

$$\breve{\Psi}\cdot\left\{\frac{2m_0}{i\cdot\hbar}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\} = -\Psi\cdot\left\{\frac{2m_0}{i\cdot\hbar}\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial^2\breve{\Psi}}{\partial x^2}\right\}.$$

[28] Разумеется, неподвижность эта — кажущаяся. Ведь возникла она в результате усреднения пусть по малому, но все же конечному промежутку времени — ни в коем случае не исчезающе малому. Однако главное то, что ***каждая*** доля частицы ***одинаково*** «неподвижна».

Подобное равенство возможно лишь при условии, что

$$\left\{\frac{2m_0}{i\cdot\hbar}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\}=\mathrm{K}_0^2\cdot\Psi;\qquad \left\{\frac{2m_0}{i\cdot\hbar}\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial t}+\frac{\partial^2\breve{\Psi}}{\partial x^2}\right\}=-\mathrm{K}_0^2\cdot\breve{\Psi},$$

где K_0^2 — величина с размерностью $[\text{см}^{-2}]$.

Если считать, что $\mathrm{K}_0^2=0$, мы приходим к уравнениям Шредингера для свободной частицы:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\quad\left(\text{или:}\quad i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right);$$

$$\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial t}=-\frac{i\cdot\hbar}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\breve{\Psi}}{\partial x^2}\quad\left(\text{или:}\quad i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2\breve{\Psi}}{\partial x^2}\right).$$

Положив $\mathrm{K}_0^2=2\left(\frac{m_0\cdot c}{\hbar}\right)^2$ или $\mathrm{K}_0^2=\frac{m_0}{\hbar^2}\cdot E_{\text{пот}}(x)$, мы также приходим к уравнениям Шредингера.

Как видим, уравнение непрерывности в виде (3.21) оказалось совместимым с уравнениями Шредингера.

В заключение давайте еще раз вернемся к выражению (3.18), отметив, что величина $i\cdot\left\{\Psi\cdot\frac{\partial\breve{\Psi}}{\partial x}-\breve{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}$ является чисто вещественной при любом виде зависимости Ψ-функции от ее аргументов, и сопоставим с этим замечанием постулат, согласно которому (см. с. 105): ***если решено считать, что физическая величина B образует континуум значений (тем самым допускает дифференцирование по ней), то ей в соответствие ставятся два оператора, один из которых тождественно совпадает с самой величиной, а другой равен $\pm i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial B}$.***

Теперь есть все основания принять очередной постулат:
значение физической характеристики (*B-величины*) **частицы в целом** ***определяется выражением*** $B_{\text{частицы}}=\frac{1}{2}\int\limits_B\left\{\breve{\Psi}\cdot\widehat{B}\Psi+\Psi\cdot\widehat{B}^*\breve{\Psi}\right\}\cdot dB$, в котором: если $\widehat{B}=B$, то $\widehat{B}^*=B$; а, если $\widehat{B}=-i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial B}$, то $\widehat{B}^*=-\widehat{B}$.

§3.5. Еще раз о скобках Пуассона и операторе величины, являющейся производной другой величины по времени

Мне показалось оправданным начать этот параграф с цитаты из книги Г. Голдстейна «Классическая механика»[29]. На с. 278 этой книги о скобках

[29] *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. Я выбрал именно эту книгу потому, что на нее довольно часто ссылаются авторы книг по квантовой механике.

Пуассона сказано, что: *«Они являются частным случаем равенств, выражающих полную производную некоторой функции $f(x, P_x, t)$ по времени. Действительно, какова бы ни была эта функция, мы будем иметь*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial P_x}\cdot\frac{\partial P_x}{\partial t}\right) + \ldots\right] = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H].\text{»} \quad (3.22)$$

Далее Г. Голдстейн замечает: *«Если f не содержит явно t (а мы ограничимся рассмотрением только таких случаев), то $\frac{df}{dt} = [f, H]$.»*

Это замечание мне кажется странным: с одной стороны — *какова бы ни была эта функция*, с другой — *ограничимся*. Ну, почему в столь солидном труде по механике не привести хотя бы один пример, когда $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$? Да и откуда взялось в соотношении (3.22) слагаемое $\frac{\partial f}{\partial t}$? Об этом ни в книге Голдстейна, ни в какой другой не написано. Охотно верю, что для квалифицированных специалистов это очевидно. Однако дилетантам вроде меня ничего другого не остается, как попытаться самостоятельно понять, что отражает слагаемое $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Отождествим, например, функцию f с z-проекцией механического момента точечной частицы (величиной L_z), которая равна:

$$L_z = x\cdot P_y - y\cdot P_x.$$

Пусть $H = \frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{2m_0} + E_{\text{пот}}(x, y, z)$, где $E_{\text{пот}}(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы.

Так как $[L_z, H] = x\cdot \mathrm{F}_y - y\cdot \mathrm{F}_x$ (где $\mathrm{F}_x = -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x}$; $\mathrm{F}_y = -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial y}$ — это проекции силы $\vec{\mathrm{F}}$ на оси координат), получаем, согласно Голдстейну:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{\partial L_z}{\partial t} + (x\cdot \mathrm{F}_y - y\cdot \mathrm{F}_x).$$

Вполне естественно, что механический момент частицы ($\vec{L}$) должен непрерывно меняться во времени с быстротой, равной $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вр}} = \vec{r}\times\vec{\mathrm{F}}$, если на частицу непрерывно же действует момент вращающий (момент силы $\vec{\mathrm{F}}$). Но, что может означать слагаемое $\frac{\partial L_z}{\partial t}$ (если оно отлично от нуля)? А только то, что механический момент частицы непрерывно возникает из ... ничего (из той точки *пустого*, — коль скоро $\vec{M}_{\text{вр}} = 0$, — пространства, в которой присутствует частица).

Вместо механического момента можно испытать импульс (скорость), но вывод будет прежний.

А давайте теперь отождествим функцию f с концентрацией частиц или (даже!) с концентрацией, выраженной числом долей ***одной точечной*** частицы, приходящимся на $1\,\text{см}^3$ объема пространства. В результате получим: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\cdot\vec{V} + \frac{\partial f}{\partial \vec{P}}\cdot\vec{\mathrm{F}}$.

Не может быть никаких возражений против предположения, что концентрация частиц способна меняться в данной точке пространства из-за процессов генерации (возникновения, рождения) и рекомбинации (исчезновения, аннигиляции). Давайте вспомним в этой связи хорошо известное кинетическое уравнение в его простейшей форме:

$$\frac{d\widetilde{N}}{dt} = \frac{\partial\widetilde{N}}{\partial t} + \frac{\partial\widetilde{N}}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{V} + \frac{\partial\widetilde{N}}{\partial\vec{P}}\cdot\vec{\mathrm{F}} + \frac{\widetilde{N}-\widetilde{N}_0}{\tau},$$

где τ — некое характеристическое время.

Учитывая все сказанное по поводу *«какой бы то ни было функции* $f(x, P_x, t)$*»*, я предлагаю дать определения производных по времени радиус-вектора, импульса, скорости, механического момента в виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = [\vec{r}, H]; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\mathrm{F}} = [\vec{P}, H]; \tag{3.23,а,б}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = [\vec{V}, H]; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вр}} = [\vec{L}, H], \tag{3.23,в,г}$$

исключив пресловутую частную производную $\frac{\partial\ldots}{\partial t}$ из каждого из этих выражений.

Переход к ***квантовым*** скобкам Пуассона осуществляется согласно предложению Дирака считать, что $\left[\widehat{\ldots}, \widehat{H}\right] = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\ldots}\,\widehat{H} - \widehat{H}\,\widehat{\ldots}\right)$. Теперь остается всего лишь обратиться к принципу соответствия, согласно которому:

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{V}} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{r}}\widehat{H} - \widehat{H}\,\widehat{\vec{r}}\right); \tag{3.24,а}$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{\mathrm{F}}} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{P}}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\vec{P}}\right); \tag{3.24,б}$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{a}} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{V}}\widehat{H} - \widehat{H}\,\widehat{\vec{V}}\right); \tag{3.24,в}$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{M}_{\text{вр}}} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{L}}\,\widehat{H} - \widehat{H}\,\widehat{\vec{L}}\right). \tag{3.24,г}$$

Каждое из выражений (3.24) представляет собой определение оператора величины, являющейся производной по времени другой величины.

Выбрав пространственно-временнóе представление операторов, в котором

$$\widehat{\vec{r}} = \vec{r}, \quad \widehat{\vec{P}} = -i\cdot\hbar\cdot\left(\vec{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m_0}\cdot\left(\widehat{\vec{P}}\right)^2 + E_{\text{пот}}(x, y, z),$$

и выполнив операции, которые необходимо сделать в правых частях выражений (3.24), получим:

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{V}} = \frac{\widehat{\vec{P}}}{m_0}; \qquad (3.25,\text{а})$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{\mathrm{F}}} = \vec{\mathrm{F}} = -\operatorname{grad} E_{\text{пот}}; \qquad (3.25,\text{б})$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{\mathrm{a}}} = \vec{\mathrm{a}} = -\frac{1}{m_0}\cdot\operatorname{grad} E_{\text{пот}}; \qquad (3.25,\text{в})$$

$$\widehat{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)} = \widehat{\vec{M}_{\text{вр}}} = \vec{M}_{\text{вр}} = -\vec{r}\times\operatorname{grad} E_{\text{пот}} = \vec{r}\times\vec{\mathrm{F}}. \qquad (3.25,\text{г})$$

В заключение хотелось бы привлечь внимание читателя к одной проблеме, в связи с чем имеет смысл опять-таки обратиться к книге. В коротеньком § 13 монографии Л. Ландау и Е. Лифшица «Квантовая механика (нерелятивистская теория)»[30] написано следующее.

«Аппарат квантовой механики можно, однако, сформулировать и в несколько другом, эквивалентном, виде, в котором зависимость от времени перенесена с волновых функций на операторы. Хотя в этой книге мы не будем пользоваться таким (так называемым ***гайзенберговским****) представлением операторов, мы сформулируем его здесь, имея в виду дальнейшие применения в релятивистской теории.*

Введем оператор $\widehat{\mathrm{S}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}$, *где* $\widehat{H}$ *— гамильтониан системы.»*

Далее авторы вводят еще и оператор $\widehat{\mathrm{S}}^{-1}\left(= e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}\right)$, после чего образуют оператор $\widehat{f}(t)$, ***зависящий от времени***, из оператора $\widehat{f}$, *не содержащего*, как выразились авторы, времени. Соотношение между этими операторами дано в виде $\widehat{f}(t) = \widehat{\mathrm{S}}^{-1}\widehat{f}\,\widehat{\mathrm{S}}$, и ему присвоен номер (13.5). Далее авторы пишут: «..., *продифференцировав выражение* (13.5) *по времени* (*предполагая при этом сами операторы не содержащими* t[31]), *получим уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(t) = \frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{H}\,\widehat{f} - \widehat{f}\,\widehat{H}\right), \qquad (13.7)$$

аналогичное формуле (9.2) (под этим номером в цитируемой книге фигурирует формула $\widehat{\left(\frac{df}{dt}\right)} = \frac{\partial\widehat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{H}\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{H}\right)$ — Ф. В.), *но имеющее несколько иной смысл: выражение* (9.2) *представляет собой определение оператора*

[30] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М: Физматгиз, 1963.

[31] Надо полагать, что авторы имели в виду только те операторы $\widehat{f}$ и $\widehat{H}$, которые присутствовали **в правой** части соотношения (13.5).

$(\widehat{\frac{df}{dt}})$, *соответствующего физической величине* $\frac{df}{dt}$, *между тем как в левой стороне уравнения* (13.7) *стоит производная по времени от оператора самой величины* f.»

Конечно, *«уравнение, аналогичное формуле» — это не вполне нормальная лексика. Кроме того, непонятно, считают ли авторы, что операторы, не содержащие* t, *— это то же самое, что операторы, не зависящие от* t. Но не будем ко всему этому придираться. Куда серьезней такая, на первый взгляд, мелочь, как присутствие в правой части уравнения (13.7) символа $\widehat{f}$ вместо символа $\widehat{f}(t)$, который ***обязан*** там находиться[32]. Разумеется, специалисты прекрасно понимают, что это не более чем небрежность, традиционно присущая Грандам теоретической физики. К сожалению, небрежность иногда приводит к ошибочным результатам не только дилетантов, но и признанных мастеров своего дела[33]. Только поэтому я рискнул прокомментировать «уравнение»

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(t) = \frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{f}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{f}(t)\right). \tag{3.26}$$

Допустим, что это и в самом деле уравнение. Но тогда следует признать, что оно записано в ***чисто символической*** форме и потому до тех пор остается ***принципиально*** нерешаемым, пока не будет найдено (или сказано), чему равна скобка в правой части. Кроме того, неужели, все-таки решив это уравнение (неизвестным, правда, остается начальное условие $\widehat{f}(t_0)$), мы выясним, что $\widehat{f}(t) \neq e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}\widehat{f}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}$?! Ведь само это уравнение возникло в результате дифференцирования по времени специально сконструированного выражения

$$\widehat{f}(t) = \widehat{S}^{-1}\widehat{f}\,\widehat{S} = e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}\widehat{f}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}, \tag{3.27}$$

в котором ***справа*** присутствует оператор $\widehat{f}$, не зависящий от времени.

Далее, предположим, что в выражении

$$\widehat{\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right)} = \frac{\partial\widehat{f}(t)}{\partial t} - \frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{f}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{f}(t)\right) \tag{3.28,a}$$

(*которое в цитируемой книге названо не уравнением, а выражением, играющим роль* ***определения*** *оператора величины* $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$) оператор $\widehat{f}(t)$ все же

---

[32] Ведь подчеркнули же авторы, что в **левой** части их выражения (13.7) оператор $\widehat{f}$ зависит от времени.

[33] Один из результатов небрежного отношения к символам в выражении

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(t) = \frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{f}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{f}(t)\right)$$

я продемонстрировал в небольшой монографии «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака» (М.: УРСС, 2002 (§ 5.1)).

не зависит от t (***отсюда вовсе не следует, что не может зависеть от времени сама величина*** f). Тогда

$$\widehat{\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right)} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{f}\,\widehat{H}-\widehat{H}\,\widehat{f}\right), \tag{3.28,б}$$

а, поскольку оператор $\widehat{H}$ не обязан коммутировать с ***любым*** оператором, нет ничего удивительного в том, что может иметь место и ***неравенство***

$$\widehat{f}\,\widehat{H}-\widehat{H}\,\widehat{f}\neq 0 \tag{3.29,а}$$

(при этом оператор $\widehat{\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right)}$ оказывается отличным от нуля).

А теперь обратимся к ***предположительно*** уравнению (3.26). Если допустить, что оператор, хоть и обозначенный символом $\widehat{f}(t)$, все же не зависит от t, значит $\frac{\partial \widehat{f}(t)}{\partial t}=0$, а тогда ***только так***:

$$\widehat{f}\,\widehat{H}-\widehat{H}\,\widehat{f}=0. \tag{3.29,б}$$

На первый взгляд — абсурд: соотношения (3.29,а,б), оказывается, иногда могут и противоречить друг другу. Но на самом деле все просто.

Во-первых, оператор $\widehat{f}(t)$, присутствующий ***в уравнении*** (3.26), ***не может не зависеть от времени***: он определен выражением (3.27), а, значит, к тому же и ***не тождествен оператору*** $\widehat{f}(t)$ ***из выражений*** (3.28)[34]. Естественно, тогда безразлично, является или нет оператор $\widehat{f}$ из выражений (3.28) функцией времени.

Во-вторых, вообще нельзя принимать результат взятия производной за дифференциальное уравнение. Конкретно, нельзя считать ***дифференцирование*** величины $\widehat{f}\left(=e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}\,\widehat{f}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\widehat{H}t}\right)$ по t составлением ***дифференциального уравнения,*** в котором $\widehat{f}$ выступает в качестве неизвестной величины.

Приведу пример с простыми величинами.

Пусть $y=(1-x)^{-1}$, и нам нужно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$. Сделав это, получим: $\frac{dy}{dx}=(1-x)^{-2}$. Тем не менее, бессмысленно считать, что мы тем самым составили дифференциальное уравнение с неизвестной y (даже, не говоря о том, что рядом с формулой $\frac{dy}{dx}=(1-x)^{-2}$ отсутствует граничное условие). Операция взятия производной от ***известной — явной*** — функции своего аргумента, операция составления дифференциального уравнения, операция его решения — это ***различные*** совершенно самостоятельные операции.

---

[34] Сказанное наводит на мысль, что не стоило обозначать одним и тем же символом разные величины.

Глава 4

Соотношение между «неопределенностями» импульса и координаты

§4.1. Постулат Гайзенберга

В 1927 году Вернер Гайзенберг после анализа мысленных экспериментов пришел к выводу, что ***вне зависимости от конструкции измерительного прибора и метода измерения*** X***-координаты точечной частицы в тот момент, когда эта координата измеряется, обязательно изменяется значение*** X***-составляющей импульса частицы.***

Не ограничившись этим, но исходя из этого, Гайзенберг предложил еще и постулировать нижеследующее соотношение между значением в общем случае принципиально неустранимой ***погрешности измерения*** X-координаты частицы (величины Δx) и значением в общем случае принципиально неустранимого ***изменения*** P_x-импульса частицы (величины δP_x):

$$\Delta x(t) \cdot \delta P_x(t) \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{4.1,а}$$

(В этом соотношении момент времени t символизирует мгновение ***одновременного:*** измерения одной величины и изменения другой.)

Можно не сомневаться, что если бы речь зашла об измерении P_x-импульса частицы, то в соотношении (4.1,а) в роли значения ***погрешности измерения*** у Гайзенберга выступала бы величина $\Delta P_x(t)$, а в роли значения ***изменения*** — величина $\delta x(t)$. Поэтому несправедливо было бы не добавить к соотношению (4.1,а) еще одно:

$$\delta x(t) \cdot \Delta P_x(t) \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{4.1,б}$$

Я рискну ненадолго отклониться от основного изложения с тем, чтобы напомнить читателю, что именно так называемое *«соотношение неопределенностей»*, правда, в виде

$$\delta P_{x,\text{изменение}}(t) \cdot \Delta x_{\text{погрешность}}(t) \neq 0, \tag{4.2}$$

и подобные ему для некоторых других ***пар*** физических характеристик вызвали в период становления квантовой механики наиболее ожесточенную полемику. Достаточно, наверное, упомянуть о почти десятилетних попытках Эйнштейна опровергнуть соотношения неопределенностей. Увы, еще ни разу никому сделать это не удалось.

Тем не менее, соотношения неопределенностей будоражат умы до сих пор и вот, по какой причине.

Постулировав соотношения (4.1), Гайзенберг предложил еще один постулат — принцип наблюдаемости, согласно которому ***не должна фигурировать в физической теории та величина, которую принципиально нельзя измерить*** (= *наблюдать*) ***точно*** (*с погрешностью, равной нулю*), ***не изменяя в момент измерения значения «сопряженной» величины***[1]. Разумеется, все сразу поняли: в завуалированной форме принцип наблюдаемости означает, что если мы чего-то принципиально не можем измерить точно, то лишь потому, что этой величины не существует в Природе. Например, если не удается измерить в какой-то момент времени X-координату движущейся частицы, то лишь потому, что такой физической характеристики не существует. Но..., не вообще, а лишь у «микрочастицы»[2].

Последнее мне кажется очень забавным. Что значит «лишь у микрочастицы»? Представьте себе тело больших размеров и считайте его до такой степени континуальным, чтобы на его поверхности можно было наметить точку («точечную частичку») и указать ее координаты относительно выбранной системы отсчета (против этого пока еще никто не возражал). Если тело движется, например, поступательно, то намеченная точка тоже движется по прямой линии, называемой траекторией. Против этого пока еще тоже никто не возражал. Но вот у движущейся реальной точечной частицы (а из них состоят все тела больших размеров), «оказывается», не может быть ни координат, ни траектории.

Однако понятие X-координаты обладает содержательностью (как математической, так и физической) лишь в качестве X-координаты ***точки пространства***. При этом координаты любой точки пространства могут считаться известными или неизвестными, но — вне всякой зависимости от существования-несуществования точечной частицы. Если же подобная частица существует, то присутствует она, разумеется, в точке пространства. Собственно говоря, координатами частицы называются (и являются) координаты точки пространства, в которой в некоторый момент времени (или вечно) присутствует частица. Совокупность всех точек пространства, по которым частица перемещается (если она перемещается) непрерывно во времени, образует линию, называемую траекторией.

Утверждение, что не существует траектории движения вечно существующей и движущейся частицы является логически абсурдным, так как само понятие движения обретает физическую содержательность только вместе с понятием траектории. Вот, почему не только «ортодоксально» мыслившие Эйнштейн, де-Бройль, но и многие другие гранды теоретической физики категорически не соглашались поверить в несуществование траекторий. Огромное число специалистов, постоянно и с успехом «прилагающих» квантовую механику к электронике и другим

---

[1] Для любой физической величины, относящейся к категории описывающих состояние частицы, найдется величина, которую можно назвать «сопряженной». Для радиус-вектора точки пространства — это импульс; для механического момента — это угол поворота и т. п. Сопряженными называются две величины (дополняющие друг друга), если размерность их произведения есть [эВ · с].

[2] «Микрочастица» — это, разумеется, точечная частица. Реальные частицы (лептоны и кварки) являются частицами точечными. Неточечных частиц в природе не существует, хотя, конечно, существуют коллективы точечных частиц, способные занимать сколь угодно большие объемы пространства.

дисциплинам, не перестают до сих пор тайком верить именно в существование траекторий[3].

Разумеется, и такая физическая характеристика, как X-координата, в Природе существует, и траектория движущейся частицы существует. И если перейти с профессионального жаргона на грамотную речь, следовало бы сказать, что в рамках ***квантовой*** механики такое понятие, как значение радиус-вектора точки пространства, в которой частица присутствует именно в момент времени, просто-напросто ***не используется***. Но ведь это и не должно вызывать удивления, поскольку *«в рамках квантовой механики»* означает — *«в рамках **статистического** способа описания состояния точечной частицы»*[4].

На этом отступление закончено, и я возвращаюсь к соотношениям (4.1).

Давайте проверим, действительно ли в момент точного измерения X-координаты (при этом $\Delta x = 0$) измерительное устройство ***изменяет*** первоначальный импульс точечной частицы именно на бесконечно большую величину, как это следует из соотношений (4.1) и (4.2). Проверка кажется мне необходимой, так как ***подобная — традиционная — интерпретация соотношений*** (4.1) ***совершенно не совпадает с выводом, сделанным в конце*** § 2.4, согласно которому:

а) если частица вечно обладает точно определенным значением P_x-импульса (автоматически — значением V_x-скорости), значит она является абсолютно свободной и в любой момент времени присутствует с равной вероятностью в любой точке интервала Δx бесконечно большой протяженности;

б) если частица вечно обладает точно определенным значением X-координаты, значит она является абсолютно связанной и в любой момент времени обладает с равной вероятностью любым значением P_x-импульса в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, или утверждения *а*) и *б*) следует признать неверными, или традиционную интерпретацию соотношений (4.1) неправильной.

Однако прежде чем начать проверку правильности интерпретации, я предлагаю попытаться облечь в математическую форму утверждения *а*) и *б*) подобно тому, как это сделал Гайзенберг, не ограничившись словесным выводом. Давайте начнем с того, что напишем:

$$\delta x \sim \lim_{\Delta P_x \to 0} \frac{1}{\Delta P_x}; \quad \delta P_x \sim \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}, \qquad (4.3,а,б)$$

---

[3] Хотелось бы обратить внимание читателя на полное отсутствие логики у тех, кто предлагает считать понятие координаты движущейся (хорошо еще, что не покоящейся) точечной частицы физически бессодержательным всего лишь на том основании, что нельзя измерить координату точно. Признание ***возможности*** разработать устройство и метод измерения координаты, означает признание существования этой самой координаты. А иначе, что же мы собираемся измерять?

[4] Кстати, не кажется ли странным, что все обрушились только на ***траектории*** электрона в атоме? А ***импульс*** атомного электрона? Его что ли можно измерить в какой-нибудь момент времени, зная, в какой именно точке пространства находился датчик измерительного устройства?

а затем введем коэффициент пропорциональности с подходящей размерностью (например, $\frac{\hbar}{2}$). Далее учтем, что возможность измерить значение P_x-импульса ***свободной*** частицы ***точно*** ($\Delta P_x = 0$) существует, ибо такое значение существует. Это же касается возможности точного ($\Delta x = 0$) измерения значения X-координаты ***связанной*** частицы. Разумеется, тот (бесконечно большой) ***интервал*** δx значений X-координаты, который соответствует свободной частице, не зависит от времени, и потому совершенно безопасно вместо δx использовать конструкцию $\delta x(t)$, имея в виду, что здесь t символизирует момент времени измерения именно P_x-импульса. Аналогично, тот (бесконечно большой) ***интервал*** δP_x значений P_x-импульса, который соответствует связанной частице, не зависит от времени, и потому совершенно безопасно вместо δP_x использовать конструкцию $\delta P_x(t)$, опять-таки имея в виду, что здесь t символизирует момент времени измерения именно X-координаты.

После всего сказанного соотношения (4.3) можно представить в виде

$$\delta x_{\text{интервал}}(t) = \lim_{\{\Delta P_{x,\text{погрешность}}(t)\}\to 0} \frac{\frac{\hbar}{2}}{\Delta P_{x,\text{погрешность}}(t)}; \qquad (4.3,\text{в})$$

$$\delta P_{x,\text{интервал}}(t) = \lim_{\{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)\}\to 0} \frac{\frac{\hbar}{2}}{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)}. \qquad (4.3,\text{г})$$

Если не задумываться над необходимостью физической интерпретации соотношений (4.3,в,г), их вполне можно отождествить с соотношениями (4.1), ограничив последние частным случаем, когда один из сомножителей стремится к нулю.

Но, давайте перейдем к проверке справедливости традиционного истолкования соотношений (4.1) [5]. Обратимся к соотношению (4.1,а).

Примем во внимание, что:

1) изменить можно только то, что уже было или есть, а потому будем считать частицу до мгновенного акта измерения свободной и, следовательно, обладающей точно определенным P_x-импульсом;
2) поскольку промежуток времени измерения (величина Δt) считается исчезающе коротким, частицу после акта измерения также следует считать свободной.

Теперь сконструируем измерительное устройство, исходя из поставленной задачи — установить точное местонахождение частицы, пребывающей в любой момент времени где-то на бесконечно протяженной

[5] Рискну обратить внимание читателя на то, что присутствие знака «>» придает соотношениям (4.1) некую загадочность. Если, например, $\Delta x(t)\cdot\delta P_x(t) = \frac{\hbar}{2}$, то в случае, когда $\delta P_x(t) = \infty$, ясно, что $\Delta x(t) = 0$. Но, если $\Delta x(t)\cdot\delta P_x(t) > \frac{\hbar}{2}$, то необходимо специально оговорить, что произведение обеих величин все же ограничено сверху. Иначе можно подумать, что $\Delta x(t)\cdot\delta P_x(t) = \infty$ $(> \frac{\hbar}{2})$. А тогда, если, например, $\delta P_x(t) = \infty$, возможно и такое неравенство: $\Delta x(t) > 0$.

X-оси либо в состоянии покоя, либо — движения. Подчеркну, что местонахождение частицы нужно именно искать, так как, если оно известно, задача теряет смысл.

Попробуем поймать частицу «ловушкой», представляющей собой δ-образный потенциальный барьер (рис. 4.1,а). Допустим, что значение (потенциала Φ_0 некоего силового поля) исчезающе мало. Важно лишь, чтобы «стенки» были отвесными (рис. 4.1,б). Тогда пространственный интервал, внутри которого сила $F_x\left(\sim -\frac{d\Phi_0}{dx}\right)$, способная подействовать на частицу, отлична от нуля, бесконечно узок, а, стало быть, находиться внутри него частица (вынужденная двигаться относительно барьера) сможет лишь в течение бесконечно короткого промежутка времени.

Очевидно, что частице, отметившей свое мгновенное присутствие в точке с координатой x_*, не потребуется расходовать кинетическую энергию на преодоление бесконечно низкого потенциального барьера. Очевидно также, что лишь одна единственная точка X-оси ***физически*** отличается от всех остальных, составляющих бесконечное множество. Таким образом, лишь на ***одно*** мгновение вечности и в ***единственной*** точке бесконечно протяженного пространства наша частица участвует во взаимодействии с внешним для нее объектом («ловушкой»). Справедливо считать частицу до и после акта взаимодействия свободной.

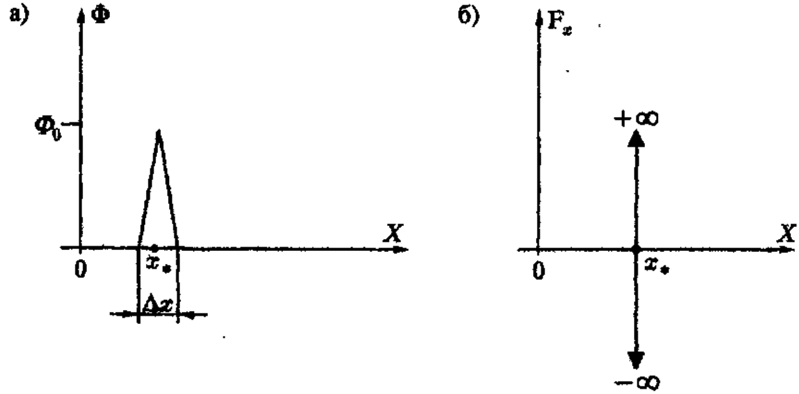


Рис. 4.1. Ловушка для частицы.

а) Стенки потенциального барьера представлены неотвесными только для того, чтобы было понятно, что направление силы слева от точки с координатой x_* противоположно направлению силы справа от этой точки. Кроме того: $\Delta x \to 0$; $\Phi_0 \to 0$.

б) Абсолютное значение силы бесконечно велико в одной точке и равно нулю во всех остальных точках X-оси.

Представленные зависимости сохраняются неизменными во времени, так что потенциальная энергия частицы в момент столкновения не изменяется — остается равной нулю.

Остановится ли частица в точке с известной координатой x_*, потеряв свой первоначальный импульс (если частица двигалась), продолжит ли движение в первоначальном направлении с измененным или не изменившимся импульсом, или же изменит направление движения — все будет зависеть от того, что произойдет за тот исчезающе короткий промежуток времени, пока частица будет находиться в бесконечно узкой области действия силы[6]. А произойдет следующее: в момент столкновения частицы с δ-барьером (X-координата которого точно известна) импульс частицы будет изменен на величину ΔP_x, равную $\Delta P_x = \lim\limits_{\substack{F_x \to \pm\infty \\ \Delta t \to 0}} (F_x \cdot \Delta t)$.

Совершенно ясно, что, поскольку F_x и Δt — совершенно независимые друг от друга величины, конструкцию $\lim\limits_{\substack{F_x \to \pm\infty \\ \Delta t \to 0}} (F_x \cdot \Delta t)$ придется считать бессодержательным набором символов, если только не придать ей истолкование, не противоречащее, однако, смыслу математических понятий *предела* и *умножения*. А единственно разумное истолкование — это ***считать численное значение величины*** $\lim\limits_{\substack{F_x \to \pm\infty \\ \Delta t \to 0}} (F_x \cdot \Delta t)$ ***любым в пределах от*** $-\infty$ ***до*** $+\infty$. Использование подобной величины в математике, естественно, невозможно. Но ее допустимо использовать в физике, если к словам ***«в пределах от*** $-\infty$ ***до*** $+\infty$***»*** добавить слова ***«с равной вероятностью»***.

Итак, предлагается считать, что в момент, когда нахождение точечной частицы будет зафиксировано (акт измерения), изменение значения ее P_x-импульса окажется с равной вероятностью любым в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. ***Таким образом, традиционное утверждение, что в рассмотренной экспериментальной ситуации изменение*** P_x***-импульса равно именно бесконечности, не соответствует действительности.*** Мгновение спустя после акта измерения импульс частицы оказывается отнюдь не бесконечно большим и не неизвестно, куда направленным[7].

Сталкивая частицу с нашей «ловушкой» ***бесконечно*** много раз, мы обнаружим частицу движущейся после каждого акта измерения прямолинейно и равномерно (как и до столкновения): один раз с одним P_x-импульсом, другой раз — с другим и т. п. ***Единственный*** раз P_x-импульс частицы окажется бесконечно большим и направленным вправо и ***единственный*** раз бесконечно большим и направленным влево. Вероятность каждого отдельно взятого события из бесконечно большого их числа бесконечно мала.

---

[6] Если окажется, что частица находится в состоянии покоя, перемещать вдоль X-оси придется потенциальный барьер (начиная, например, из бесконечности справа).

[7] Получив от измерительного прибора бесконечно большой импульс (следовательно, и бесконечно большую — в рамках нерелятивистской механики — скорость), частица спустя даже очень короткий промежуток времени удалилась бы на бесконечно большое расстояние от точки, в которой произошел акт измерения. Больше бы мы эту частицу не увидели.

Теперь я хотел бы подчеркнуть, что сама возможность зафиксировать факт присутствия частицы в точке с определенной координатой оказалась основанной на молчаливом допущении принципиальной возможности измерить значение P_x-импульса *после* столкновения (разумеется, не в тот момент, когда частица окажется в упомянутой точке X-оси). Поэтому следует обсудить детали соответствующего эксперимента.

Однако прежде я рискну обратить внимание читателя на небольшой нюанс, связанный с тем, что частица, не будучи носителем координаты, является носителем импульса.

Когда речь шла об измерении X-координаты свободной частицы, то имелось в виду, что различных значений координаты у частицы множество. Выражаясь более аккуратно, следует сказать так: величина, которую мы называем X-координатой движущейся частицы, *обязана* принимать *разные* значения (в разные моменты времени). Поэтому измерение координаты может состоять лишь в том, чтобы *заранее* выделить *одно* из значений (x_*) [8], которое еще только будет соответствовать акту (моменту времени) измерения, а затем зафиксировать событие появления частицы в точке с координатой x_* (разумеется, в какой-то момент времени). Дождавшись этого события, мы и говорим, что в момент времени t_* частица присутствует в точке с координатой x_*.

Но вот теперь требуется измерить значение P_x-импульса свободной частицы, которая, именно потому, что она свободная, обладает вполне определенным — *одним из множества различных значений* импульса (не меняющимся в процессе движения). Однако частица потеряет право считаться свободной, если ее P_x-импульс будет в какой-то момент времени изменен. Следовательно, единственная проблема измерения состоит в том, чтобы измерить значение импульса, *не изменив* этого значения.

Здесь я хотел бы подчеркнуть, что если мы уверены в возможности произвести такое измерение мгновенно (за исчезающе короткий промежуток времени Δt), то частица в акте измерения не выйдет за пределы бесконечно узкого пространственного интервала Δx, то есть, будет присутствовать в точке X-оси. Но не все ли при этом равно, в какой именно точке? Ведь частица в любой момент времени своего существования в какой-то точке X-оси, конечно же, присутствует, а потому и акт измерения можно организовать где угодно.

Таким образом, если акт мгновенного измерения значения P_x-импульса не сопровождается изменением этого значения, значит не происходит изменения состояния свободной частицы. Значит, ее по-прежнему следует считать в любой момент времени, — стало быть, и в момент измерения — присутствующей с равной вероятностью в любой точке X-оси в интервале $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

---

[8] Именно это мы и делаем, создав на X-оси одну отличную от всех остальных — «особую» — точку.

Если назвать этот интервал (Δx) «неопределенностью» X-координаты частицы в момент измерения значения P_x-импульса, то, естественно:

$$\Delta x_{\text{неопределенность}}(t) \sim \lim_{\delta P_{x,\text{изменение}} \to 0} \frac{1}{\delta P_{x,\text{изменение}}(t)}.$$

Поскольку все сказанное вряд ли удивит внимательного читателя, единственное, что, по моему мнению, стоит выяснить, это — действительно ли можно измерить значение импульса, не изменив самого значения.

Поместим в какую-нибудь из физически идентичных точек X-оси «пробную» точечную частичку, обладающую инерциальной массой покоя $\mathcal{M}$ — чрезвычайно малой, но не равной нулю точно. Тогда при столкновении нашей движущейся частицы (обладающей импульсом) с покоящейся «пробной» частичкой последней может быть передан лишь чрезвычайно малый импульс (обозначим его символом P_*). Далее будем считать, что приобретенная пробной частичкой кинетическая энергия (E_*) перейдет к измерительному прибору, в котором частичка исчезнет после того, как в результате столкновения переместится вдоль X-оси на расстояние Δx. Энергию E_* приравняем разности кинетических энергий (ΔE) нашей частицы до и после акта измерения, так что:

$$\Delta E = \begin{cases} E_* = \dfrac{P_*^2}{2\mathcal{M}}; \\ \dfrac{P_x^2 - (P_x - P_*)^2}{2m_0} = \dfrac{P_x \cdot P_*}{m_0} - \dfrac{P_*^2}{2m_0}. \end{cases}$$

В этом случае

$$P_* = 2P_x \cdot \frac{\mathcal{M}}{m_0 + \mathcal{M}} \to 2P_x \cdot \frac{\mathcal{M}}{m_0} \ll P_x; \quad V_* = \frac{2P_x}{m_0 + \mathcal{M}} \to 2V_x.$$

Измерив значение E_* и зная массу $\mathcal{M}$, можно определить значение импульса нашей частицы по формуле $P_x = m_0 \cdot \sqrt{\frac{E_*}{2\mathcal{M}}}$. При этом значение методической погрешности измерения пропорционально величине $\mathcal{M}$, и, следовательно, может быть сделано сколь угодно малым.

Теперь следует обратить внимание на одно важное обстоятельство.

Поскольку пробную частичку еще до столкновения с частицей нужно было в какую-то точку X-оси поместить, возникает обоснованное подозрение, что удалось-таки не только измерить значение P_x-импульса, которым обладала частица в некоторый момент времени, но также и значение ее X-координаты в ***тот же*** момент. Ведь заранее известно, где находилась пробная частичка в момент столкновения. Однако следует принять во внимание, что точек X-оси ***бесконечно*** много, и наша («измеряемая») частица в тот момент ***могла находиться в любой из них с равной вероятностью***. Попросту говоря, за бесконечно продолжительный промежуток времени частица по одному разу побывает в каждой из точек X-оси. Смешно надеяться, что за ограниченное время ожидания можно увидеть, как два объекта, один из которых перед столкновением с равной вероятностью находился где угодно, столкнулись друг с другом именно в выбранной заранее точке пространства. Но тогда единственная возможность реализовать технически предложенный метод измерения значения P_x-импульса, это поместить в ***каждую*** точку X-оси по одной пробной частичке, причем все они должны быть физически идентичны (обладать одним и тем же значением массы покоя — бесконечно малым, хотя и не равным нулю точно) и пребывать в одном состоянии — в покое. Поймав одну из частичек измерительным прибором, невозможно будет понять, в какой точке X-оси она находилась в момент столкновения с нашей частицей. Следовательно, в ответ на вопрос, в какой точке X-оси произошло столкновение, придется сказать: с равной вероятностью в любой.

Итак, результаты проверки, затеянной с целью выяснить, подтверждают ли эксперименты традиционную интерпретацию соотношений (4.1), (4.2), свидетельствуют: нет, не *подтверждают*. *С экспериментальными данными согласуется как раз вывод из* § 2.4, представленный в виде утверждений а) и б) (см. с. 132). Однако — повторю еще раз — все это не должно вызывать удивления.

В самом деле, измерение, например, X-координаты состоит в фиксации появления ***точечной*** частицы в ***точке*** пространства (с заведомо известной X-координатой), а не внутри протяженного пространственного интервала. Достигается же фиксация только путем ***изменения*** значения P_x-импульса частицы (на произвольную величину). При этом никакой роли не играет тот факт, что реальные приборы все на свете измеряют с погрешностями.

Не следует думать, что если с помощью реального прибора удается зафиксировать присутствие частицы не в точке, а лишь внутри интервала отличной от нуля протяженности Δx, то в момент фиксации (то есть присутствия частицы именно в ***точке*** интервала) P_x-импульс изменится в соответствии с формулой $\delta P_x \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta x}$. Значение импульса спустя мгновение после акта измерения (фиксации) полностью определяется начальным импульсом частицы и деталями ее взаимодействия с реальным прибором.

Итак, возможны только две ситуации. В одной из них измеряется X-координата свободной частицы, причем оказывается, что сделать это возможно только путем такого изменения значения P_x-импульса частицы в момент измерения, в результате которого P_x-импульс в момент измерения приобретает с равной вероятностью любое значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. В другой ситуации измеряется P_x-импульс таким способом, что не изменяется состояние частицы в акте измерения, из-за чего свободная частица, как и до акта измерения, обязана считаться присутствующей с равной вероятностью в любой точке X-оси.

Таким образом, следует несколько важных выводов.

Во-первых, стремление измерить ***одновременно*** значения X-координаты и P_x-импульса движущейся точечной частицы несовместимо с самим понятием «измерение». Измерение величины — это ***не изменение*** величины. Можно осуществить ***акт*** измерения (в качестве мгновенного действия) либо только X-координаты, либо только P_x-импульса.

Для измерения значения координаты требуется создать на X-оси такую точку, чтобы при попадании в нее частицы ее импульс был обязательно изменен, причем так, чтобы все его значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ оказались в момент попадания равновероятными.

При измерении значения импульса требуется сохранить физическую эквивалентность (неразличимость) всех точек X-оси [9].

Не следует думать, что если задаться целью не измерить значение X-координаты частицы, а удостовериться в том, что она находится внутри интервала Δx ***конечной*** протяженности [10], то в момент удостоверения значение P_x-импульса окажется с равной вероятностью любым в пределах всего лишь от $-\frac{\hbar}{2\Delta x}$ до $+\frac{\hbar}{2\Delta x}$ (то есть, в соответствии с соотношениями (4.1)). Создать заранее не одну, а две «особые» точки на X-оси совсем нетрудно. Однако, чтобы убедиться в присутствии частицы между ними, необходимо дать ей возможность столкнутся с каждой из границ Δx-интервала. Но в момент столкновения произойдет то самое изменение P_x-импульса, о котором уже неоднократно говорилось.

Во-вторых, нет никаких оснований полагать, что произведение значения погрешности *измерения* X-координаты частицы в момент измерения на вызванное в этот момент измерительным прибором значение ***изменения*** P_x-импульса будет равно ***одной и той же*** величине (с размерностью эВ·с) при каждом последующем измерении. Но ведь так только и можно истолковать соотношение $\delta P_{x,\text{интервал}}(t) \geqslant \frac{\hbar/2}{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)}$, если решиться привести соотношение (4.3,г) к тому виду, в котором представлено соотношение (4.1,а), постулированное Гайзенбергом.

В-третьих, если значение ***погрешности*** одной величины в акте мгновенного измерения равно нулю, то значение ***изменения*** другой величины в тот момент может быть каким угодно с равной вероятностью. Это обстоятельство полностью лишает смысла само намерение выяснить, чему именно равно произведение значения ***погрешности*** на значение ***изменения***. Но, ведь в соотношениях (4.1) фигурируют только погрешность измерения одной величины и возникшее в момент измерения изменение значения другой величины. Другими словами, даже если соотношения (4.1) интерпретировать так же, как (4.3,в,г), то соотношения (4.1) могут быть исполь-

---

[9] Речь идет о свободной частице. Если частица участвует во взаимодействии с неким телом, и ее P_x-импульс непрерывно меняется во времени, то метод измерения его мгновенного значения должен обеспечить сохранение той конфигурации силового поля (той различимости точек X-оси), которая имела место до измерения. Ведь именно в соответствии с конфигурацией поля импульс изменяется так, а не иначе. Следует также принять во внимание, что не изменив этой конфигурации, измерить значение X-координаты принципиально невозможно.

[10] Согласитесь, что если не знать всей подоплеки, такая цель не может не показаться странной.

зованы лишь там, где в них нет никакой необходимости — при описании состояния частицы в акте однократного (мгновенного) измерения ***одной*** из величин, а вовсе не двух. В связи с этим стоит вспомнит, что традиционное истолкование соотношений (4.1), (4.2) сводится к невозможности ***точного*** и ***одновременного*** измерения именно двух величин. Быть может, неточное одновременное измерение двух величин Гайзенберг допускал?

Из приведенных выводов следует, в свою очередь, тоже вывод и достаточно неожиданный. Если говорить без обиняков, ***не существует оснований постулировать соотношения в виде*** (4.1). Я предлагаю читателю вернуться в самое начало этой главы и убедиться в том, что из ***совершенно справедливого*** (обоснованного экспериментами) и ***очевидного*** утверждения Гайзенберга об ***обязательности*** изменения значения P_x-импульса свободной точечной частицы при измерении ее X-координаты вовсе ***не следует*** необходимость постулировать соотношения (4.1). Тем не менее, и сам Гайзенберг считал соотношения (4.1) математическим выражением своего словесного утверждения, и это же следует из всех книг по квантовой механике, где обсуждается происхождение соотношения неопределенностей.

В связи с этим замечу, что соотношение в виде

$$\Delta x_{\text{погрешность}}(t) \cdot \Delta P_{x,\text{погрешность}}(t) = \frac{\hbar}{2}\ [11]$$

таит в себе нешуточную угрозу совершенно неверной интерпретации как результатов эксперимента, так и расчета. Ведь не исключено, что кому-нибудь придет в голову считать, что погрешность измерения, скажем, X-координаты частицы может оказаться в ***момент*** измерения равной не нулю, а, допустим, $3 \cdot 10^{-9}$ см, поскольку такова, мол, методическая погрешность или погрешность реального прибора. Не сочтет ли затем этот кто-то, что в момент измерения координаты P_x-импульс примет с равной вероятностью одно из значений из интервала $\Delta P_x(t) = \frac{\hbar}{2\Delta x(t)} \approx$ $\approx 10^{-8}\ \frac{\text{эВ}\cdot\text{с}}{\text{см}}$? Но где именно на P_x-оси находится центр этого интервала? А ведь этот центр и должен считаться P_x-импульсом частицы.

Заканчивая на этом анализ постулата Гайзенберга, я надеюсь, что в отличие от тех, кто с ожесточением участвовал в его обсуждении в конце 20-х – начале 30 годов XX века, читатель этой книги не обнаружил ничего загадочного в том, что происходит в акте измерения X-координаты или P_x-импульса частицы.

§ 4.2. Еще раз о соотношении между «неопределенностями»

Теперь я предлагаю обратиться к совершенно иной ситуации, — в которой частица не является ни абсолютно связанной в одной «осо-

[11] Строго говоря, постулировать еще и знак $>$ в соотношениях (4.1) вообще не было никаких оснований.

бой» точке пространства, ни абсолютно свободной. Рассмотрим случай, когда частица движется вдоль X-оси внутри интервала длиной l, время от времени сталкиваясь то с левой стенкой, то с правой, не имея, однако, никакой возможности проникнуть за стенки (рис. 4.2).

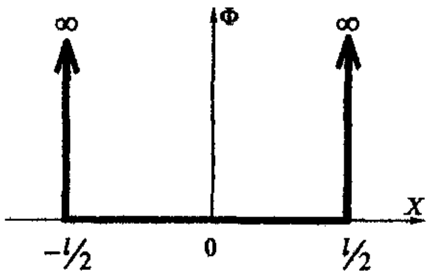


Рис. 4.2. Частица, движется внутри потенциальной ямы с бесконечно высокими и крутыми стенками. Потенциал Ф точки X-оси равен нулю внутри ямы и бесконечно велик вне ямы.

Толкнем частицу вправо, после чего она начнет двигаться прямолинейно и равномерно, пока не столкнется с правой стенкой. Чтобы легче было понять, что при этом происходит, давайте предположим, что стенка не бесконечно крутая[12]. Тогда, углубляясь внутрь правого потенциального барьера, частица будет тормозиться до тех пор, пока не остановится, после чего тормозившая ее сила повернет частицу влево, вновь придавая ей импульс. Покинув область барьера, частица будет двигаться влево прямолинейно и равномерно, пока не налетит на левую стенку и т. д. Разумеется, простоты ради, будем считать, что торможение, поворот, и ускорение происходят именно в *точке* X-оси (на стенке), стало быть, мгновенно. Тогда мы вправе считать, что в момент столкновения со стенкой значение X-координаты частицы известно точно, а значение P_x-импульса оказывается в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ с равной вероятностью. Среди бесконечно большого числа столкновений с правой стенкой один раз частица отлетит, обладая бесконечно большим импульсом, что вполне возможно позволит ей, столкнувшись с левой стенкой, преодолеть бесконечно высокий потенциальный барьер и, оказавшись на том склоне, где сила не тормозит, а ускоряет, выскочить за пределы ямы. Но я предлагаю не дожидаться столь маловероятного события. Таким образом, после того, как за огромный промежуток времени частица испытает огромное число столкновений со стенками, *частице в целом* необходимо будет приписать вполне определенное — *отличное от нуля* — *усредненное по времени* (или, что — то же самое, по числу столкновений) *абсолютное* значение P_x-импульса. Тем не менее, поскольку точкам ямы, удаленным от ее центра на разное расстояние, отвечает разная (усредненная по времени) доля частицы, каждой точке внутри ямы отвечает своя, усредненная по времени, доля P_x-импульса *частицы в целом*.

Перераспределив искусственно доли частицы по точкам l-интервала так, чтобы стало возможным утверждать, что частица именно с равной вероятностью в любой момент времени находится в любой точке

[12] Бесконечная крутизна нужна только для упрощения чисто математического описания состояния частицы.

внутри интервала длины l, вполне допустимо назвать ***отличную от нуля*** величину l неопределенностью ***абсолютного*** значения X-координаты частицы[13]. Вопрос только в том, зачем нужно так делать и давать величине l такое название?

Поскольку среднее по времени значение доли импульса осциллирующей *частицы в целом* в любой точке X-оси равно нулю (потому-то и импульс *частицы в целом* $\langle P_x\rangle_{\Delta t\to\infty}=0$), смысл имеет просуммировать именно ***абсолютные*** значения всех долей P_x-импульса *частицы в целом*. В результате мы найдем абсолютное значение P_x-импульса *частицы в целом*. Обозначим его так, как оно этого заслуживает: $\sqrt{\langle (P_x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$. Теперь не возбраняется равномерно «размазать» это абсолютное значение по P_x-оси, а затем заявить, что P_x-импульс *частицы в целом* в любой момент времени с равной вероятностью представим каждой точкой P_x-оси внутри интервала протяженностью $\sqrt{\langle (P_x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ [14]. Тогда допустимо назвать величину $\sqrt{\langle (P_x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ неопределенностью значения P_x-импульса частицы. Но..., снова вопрос: зачем нужно это делать и зачем переименовывать абсолютное значение P_x-импульса *частицы в целом* в неопределенность P_x-импульса?

Я бы рискнул так ответить на этот и предыдущий вопросы.

Впервые это было сделано по недоразумению. Я же это сделал намеренно, чтобы показать читателю, как возникает нечто, подобное любому из соотношений (4.1). Однако давайте рассмотрим сложившуюся ситуацию подробно.

Как уже говорилось, каждая из величин — и длина l, и $\sqrt{\langle (P_x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ — отличны от нуля порознь, так что их произведение также отлично от нуля. Тогда, естественно, оно не может быть меньше какого-то значения. Каково оно?

Принимая во внимание, что частица может пребывать в самых разных ситуациях, целесообразно и для «неопределенности» X-координаты — некоего аналога l-интервала — ввести обозначение

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}.$$

Принято считать, что не может стать меньшим $\frac{\hbar}{2}$ произведение ***стационарных*** значений именно ***неопределенностей*** P_x-импульса и X-координаты, в какой бы ситуации ни пребывала точечная частица, лишь бы

---

[13] По традиции неопределенность отождествляют с погрешностью измерения, а «внутри погрешности» (в данном случае внутри интервала $-\frac{l}{2}\div\frac{l}{2}$) все значения измеренной величины должны считаться равновероятными.

[14] Чтобы понять, в какой точке P_x-оси должен быть центр этого интервала, необходимо располагать дополнительной — независимой — информацией. В рассматриваемом примере центром интервала ΔP_x является нуль P_x-оси.

она не двигалась вечно прямолинейно и равномерно или вечно покоилась в одной определенной точке пространства. Подчеркну: если отождествлять неопределенность с погрешностью измерения, то ***неопределенностью какой-либо величины следует считать интервал ее значений, внутри которого величина обладает любым значением с равной вероятностью.***

Давайте выясним, являются ли на самом деле величины, обозначенные символами $\sqrt{\langle(\Delta P_x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ и $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$, именно неопределенностями P_x-импульса и X-координаты в простейшей ситуации, в которой частица осциллирует внутри одномерной потенциальной ямы?

А выяснить это очень легко. Как того требует квантовая механика, нужно решить уравнение $\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{d^2\Psi}{dx^2}+E\cdot\Psi=0$ (где E — кинетическая энергия частицы) с граничными условиями $\Psi\left(x=\pm\frac{l}{2}\right)=0$. Найденная величина $\Psi^2\cdot dx$ $\left(=\frac{2}{l}\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi\cdot N\cdot x}{l}\right)\cdot dx\right)$ представляет собой значение доли частицы, присутствующей вечно в точке (внутри l-интервала), X-координата которой отсчитывается от центра интервала (естественно, $\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\Psi^2\cdot dx=1$). Очевидно, что частица неравномерно распределена по l-интервалу.

Далее, существование решения свидетельствует, что в каждом из множества разных стационарных состояний энергия E оказывается не зависящей от времени, и, следовательно, $E=\langle E\rangle_{\Delta t\to\infty}$, причем:

$$E=\langle E\rangle_{\Delta t\to\infty}=\frac{1}{2m_0}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot\hbar}{l}\cdot N\right)^2,$$

где число N равно: N $=1;2;3;\dots$. Величина же, которая представляет собой квадрат значения P_x-импульса *частицы в целом*, и которую поэтому необходимо обозначить символом $\left\langle(P_x)^2\right\rangle_{\Delta t\to\infty}$, оказывается равной $\left\langle(P_x)^2\right\rangle_{\Delta t\to\infty}=\left(\frac{2\pi\cdot\hbar}{l}\cdot N\right)^2$ [15].

Среднее на l-интервале значение величины Ψ^2 равно $\frac{1}{l}$. Вполне допустимо (конечно, — простоты ради и только) считать, что частица распределена внутри потенциальной ямы равномерно с плотностью $\frac{1}{l}$, и на этом основании говорить, что частица именно с равной вероятностью присутствует в любой момент времени в любой точке l-интервала. После этого уже допустимо назвать величину l неопределенностью X-координаты частицы.

---

[15] В связи с тем, что число N не может быть равным нулю, авторы книг по квантовой механике демонстрируют некое благоговение перед *«принципиально неклассическим эффектом»* — невозможностью для пресловутой микрочастицы пребывать в состоянии покоя. В этой связи хотелось бы обратить внимание читателя на то, что вечно висящий на веревке груз нельзя назвать маятником. Но если этот груз толкнуть (придать ему импульс) и постоянно компенсировать потери на трение, то груз будет качаться вечно. Вот тогда его справедливо называть маятником.

Но, согласитесь, ***нет никаких оснований считать среднее по времени абсолютное значение P_x-импульса*** (частицы в целом) ***неопределенностью P_x-импульса***[16].

Конечно, перемножив длину ямы l на это самое абсолютное значение, получим, что

$$l \cdot \sqrt{\left\langle (P_x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty}} = (2\pi \cdot \mathrm{N}) \cdot \hbar > \frac{\hbar}{2}. \tag{4.4}$$

Однако, зная, чем является величина $\sqrt{\left\langle (P_x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty}}$, совершенно недопустимо называть соотношение (4.4) соотношением между двумя неопределенностями.

Ситуаций, в которых частица, взаимодействуя с неким телом, способна пребывать в стационарном состоянии, бесконечное множество, и всякий раз возникает соотношение, аналогичное (4.4). Но при этом, даже если один из сомножителей не возбраняется представить в качестве протяженности области пространства, внутри которой частица присутствует чаще всего, то другой — это обязательно среднее по времени абсолютное значение импульса частицы в целом.

Однако нетрудно привести пример, когда ни один из сомножителей нельзя представить играющим роль неопределенности.

Рассмотрим $1s$-состояние электрона в электростатическом поле, созданном точечным положительным зарядом Q. Поскольку в этом состоянии электрон выглядит неоднородно размазанным по всему бесконечно протяженному пространству, найдем среднее по времени значение радиуса сферы, в точках которой электрон присутствует ***чаще всего.*** Это значение оказывается равным $\langle R \rangle_{\Delta t \to \infty} = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar^2}{m_0 \cdot |Q \cdot q|}$, где q — заряд электрона. Среднее по времени абсолютное значение импульса электрона в $1s$-состоянии оказывается равным

$$\langle |P| \rangle_{\Delta t \to \infty} \equiv \sqrt{\langle P^2 \rangle_{\Delta t \to \infty}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m_0 \cdot |Q \cdot q|}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar}.$$

Таким образом:

$$\langle R \rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \langle |P| \rangle_{\Delta t \to \infty} = \sqrt{2} \cdot \frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}.$$

Но все-таки, по какому же недоразумению гранды теоретической физики решили, что существует соотношение в виде

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \left\langle (\Delta P_x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \geqslant \frac{\hbar^2}{4}, \tag{4.5}$$

---

[16] На всякий случай еще раз напомню, что величина $\left(\frac{2\pi \cdot \hbar}{l} \cdot \mathrm{N}\right)$ — это не интервал, внутри которого находятся те значения импульса, каждым из которых частица обладает с равной вероятностью. Это именно импульс частицы (пребывающей в N-м стационарном состоянии).

в котором *оба* сомножителя являются именно *неопределенностями*. (Если бы только один, то, как можно было убедиться на примере частицы, пребывающей в потенциальной яме, это было бы еще терпимо.)

Чтобы не загромождать дальнейшее изложение математическими выкладками[17], я предлагаю читателю сначала представить себе ситуацию, в которой частица вечно осциллирует вдоль X-оси около некоего силового центра, а сам центр движется вдоль X-оси прямолинейно и равномерно.

Откуда отсчитывать X-координату частицы, имея в виду найти зависимость $|\Psi|^2$ от x? На первый взгляд, безразлично, но — это лишь «в принципе» безразлично. Дело в том, что положение движущегося силового центра относительно выбранного на X-оси начала отсчета *его* координаты зависит от времени. Если обозначить эту самую — *его* — X-координату символом x_0, то среднее по времени абсолютное значение X-координаты частицы *относительно центра* равно $\sqrt{\langle x_*^2\rangle_{\Delta t\to\infty}} = \sqrt{\langle (x-x_0)^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$. Здесь символом x_* обозначена координата частицы относительно центра, а символом x — координата частицы относительно того же начала отсчета координат, относительно которого координата центра равна x_0.

Именно не зависящую от времени величину $\sqrt{\langle x_*^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ и назвали неопределенностью X-координаты частицы.

С точки зрения наблюдателя, постоянно находящегося в начале отсчета X-координат *центра*, он, видя, что частица не только вечно движется в одном направлении, но еще и осциллирует около центра, может позволить себе назвать величину $\sqrt{\langle x_*^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ неопределенностью X-координаты частицы. Но тогда зависящую от времени величину x_0 придется считать координатой частицы и при этом сделать вид, что не существует никакого центра, с которым частица на самом деле непрерывно взаимодействует.

Совершенно аналогичной процедуре нужно подвергнуть и P_x-импульс частицы, после чего возникнет не зависящая от времени величина $\sqrt{\langle P_{x,*}^2\rangle_{\Delta t\to\infty}} = \sqrt{\langle (P_x - P_{x,0})^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$. Для только что упомянутого наблюдателя движущийся прямолинейно и равномерно силовой центр, естественно, обладает импульсом $P_{x,0}$. Однако вполне допустимо переадресовать импульс центра частице, а центр опять-таки считать несуществующим. Тогда создается впечатление, что это *частица* обладает импульсом, среднее по времени значение которого равно $P_{x,0}$, но который размазан в интервале $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\langle P_{x,*}^2\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ около $P_{x,0}$. Таким образом,

---

[17] Достаточно подробный вывод соотношения (4.5) приведен во многих книгах по квантовой механике. См., например, *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 51,52.

величина $\sqrt{\left\langle P_{x,*}^2\right\rangle_{\Delta t\to\infty}}$ выступает в роли неопределенности импульса частицы.

Согласно правилам, в самом общем случае произведение $\left\langle x_*^2\right\rangle_{\Delta t}\times$ $\times\left\langle P_{x,*}^2\right\rangle_{\Delta t}$ вычисляется по формуле

$$\left\langle x_*^2\right\rangle_{\Delta t}\cdot\left\langle P_{x,*}^2\right\rangle_{\Delta t}=\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(x-x_0)^2\cdot\Psi\cdot dx\right\}\cdot\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(P_x-P_{x,0})^2\cdot\Psi\cdot dx\right\}.$$

Для таких корифеев, как авторы множества руководств по квантовой механике, установить, что это произведение может быть только бо́льшим или равным $\frac{\hbar^2}{4}$, не составило труда[18]. Однако им следовало бы еще сказать, что представляют собой сомножители. И они сказали.

Во *всех* книгах по квантовой механике, где приводится вычисление произведения

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(x-x_0)^2\cdot\Psi\cdot dx\right\}\cdot\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(P_x-P_{x,0})^2\cdot\Psi\cdot dx\right\},$$

величины $(x-x_0)^2$ и $(P_x-P_{x,0})^2$ считаются среднеквадратичными отклонениями от средних значений, после чего и вводятся соответствующие обозначения:

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(x-x_0)^2\cdot\Psi\cdot dx\right\}\equiv(\Delta x)^2,$$

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\breve{\Psi}\cdot(P_x-P_{x,0})^2\cdot\Psi\cdot dx\right\}\equiv(\Delta P_x)^2,$$

причем символы $\langle\rangle_{\Delta t\to\infty}$, призванные отображать усреднение по времени, в правых частях тождеств, конечно, отсутствуют[19], и читателю предлагается выражение

$$(\Delta x)^2\cdot(\Delta P_x)^2\geqslant\frac{\hbar^2}{4},$$

которое выдается за соотношение, правда, почему-то не ***между*** неопределенностями, а неопределенностей. ***Увы, это никакие не неопределенности,***

---

[18] Если центр осцилляций покоится, значения x_0 и $P_{x,0}$ можно положить равными нулю. Разумеется, из-за этого взаимодействие частицы с центром не исчезает.

[19] Именно после этого доверчивый читатель начинает думать, что величины ΔP_x и Δx, о которых идет речь, это и есть погрешности измерений импульса и координаты частицы, которые кто-то измерял, причем — ***в один и тот же*** момент времени.

и никакие не погрешности измерений. То, что обозначено символом $(\Delta x)^2$, представляет собой среднее по времени абсолютное значение квадрата X-координаты частицы относительно центра, с которым она взаимодействует. То, что обозначено символом $(\Delta P_x)^2$, представляет собой среднее по времени абсолютное значение квадрата P_x-импульса *частицы в целом*, который она приобрела в результате взаимодействия с вышеупомянутым центром[20].

Мне иногда кажется, что кое-кого из пишущих о физике просто раздражает необходимость выходить за пределы математических операций и, в частности, необходимость интерпретировать получающиеся математические выражения. Ведь совершенно очевидно, что x_0 — это никакое не только не среднее (никто из авторов книг не счел нужным указать — среднее по чему именно) значение координаты, но вообще не значение координаты *частицы*. x_0 — это мгновенное значение X-координаты силового центра (который может как покоиться, так и двигаться), и в тот момент, когда силовой центр оказывается в точке X-оси с координатой x_0, частица оказывается в другой точке.

Что касается импульса $P_{x,0}$, то его допустимо приписать частице, но лишь считая ее участвующей в двух совершенно независимых движениях.

Обратимся теперь к соотношению

$$\langle x_*^2 \rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \langle P_{x,*}^2 \rangle_{\Delta t \to \infty} \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \tag{4.6}$$

(пусть — «неопределенностей», но хоть в кавычках и не содержащее символа Δ при x_* и $P_{x,*}$). Приятно, что оно в отличие от соотношений (4.1) совершенно безопасно, так как за исключением двух крайних случаев — состояний абсолютной связанности и абсолютной свободы — применимо во всех ситуациях, в которых частица взаимодействует с неким объектом. В любой такой ситуации сомножители в левой части соотношения (4.6) отличны от нуля *порознь*[21].

На этом можно было бы закончить повествование о пресловутых неопределенностях X-координаты и P_x-импульса точечной частицы, и я надеюсь, что читатель не обнаружил в соотношениях между ними ничего загадочного, ни, тем более, внушающего мистический трепет. Тем не менее, читателю, считающему себя достаточно искушенным в квантовой механике, имеет смысл вспомнить, что говорится о *«соотношении*

[20] До сих пор речь шла о центре, который частицу притягивает. Однако все сказанное остается справедливым и в том случае, когда частица мечется между двумя отталкивающими ее стенками, а обе они движутся вдоль X-оси, сохраняя неизменным межстеночный интервал l.

[21] Это не исключает возможности того, что в некоторых, естественно, идеализированных ситуациях (например, в случае потенциальной ямы длины l) один из сомножителей может быть «сделан» сколь угодно малым. Тогда другой сомножитель устремится к бесконечности. Но и при этом он не становится неопределенностью.

неопределенностей» в многочисленных монографиях и учебных пособиях. Примером может служить знаменитый «Курс теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

Третий том этого курса «Квантовая механика (нерелятивистская теория)» начинается параграфом, который называется «Принцип неопределенности». Уже во втором абзаце авторы констатируют, что «*...глубокое противоречие теории* (имеется в виду доквантовая теория — Ф. В.) *с экспериментом свидетельствует о том, что построение теории* (имеется в виду — квантовой теории — Ф. В.), *применимой... к явлениям, происходящим с частицами очень малой массы в очень малых участках пространства, требует фундаментального изменения в основных классических* (то есть доквантовых — Ф. В.) *представлениях и законах.*»[22]

Далее в том же абзаце авторы пишут: «*...в качестве отправной точки для выяснения этих изменений удобно исходить из наблюдаемого на опыте явления так называемой дифракции электронов*», а затем предлагают перейти к более простому — «*мысленному эксперименту, представляющему собой идеализацию опыта с электронной дифракцией на кристалле.*»[23]

В последнем предложении абзаца отмечено, что результат дифракционной картины никоим образом не может быть совмещен с представлениями о движении электронов по траекториям.

Следующий абзац содержит выводы, к которым пришли авторы после изложения результатов упомянутого выше мысленного эксперимента и которые сводятся к тому, что «... — *так называемая квантовая или волновая механика, — должна быть основана на представлениях о движении, принципиально отличных от представлений классической механики.*»

В чем же видят авторы принципиальное отличие? «*В квантовой механике не существует понятия траектории частицы. Это обстоятельство составляет содержание так называемого* ***принципа неопределенности*** — *одного из основных принципов квантовой механики...*»

Я рискну прокомментировать приведенные цитаты.

Допустим, что разработан такой способ ***описания*** состояния электрона в поле протона, который с одной стороны позволяет ***не пользоваться*** понятием траектории, а с другой стороны адекватно отражает результаты эксперимента по поглощению света газообразным водородом. Однако отсюда вовсе не следует: ни то, что электрон (точечная частица) не присутствует в какой-то точке пространства хотя бы на мгновение (где же он

---

[22] Для меня здесь все загадочно. При чем тут значение массы частицы? Вот, например, масса покоя атома урана превосходит массу покоя электрона примерно в 500 000 раз. Означает *ли* это, что диффузия атомов урана в среде происходит по совершенно другим законам, *нежели* диффузия электронов в среде? Далее, что значит малый участок пространства? Надо *ли* считать прохождение электронного пучка диаметром 1 мм через кристалл толщиной 100 мкм и размерами поверхности 1 × 1 см явлением, происходящим в малом участке пространства или, напротив, — в большом? А, если в большом, то каким именно законам должно подчиняться это явление?

[23] *Цитируя оригинал, я позволил себе в слове «дифракции» опустить одну букву «ф»* и заменить «*от кристалла*» на «*на кристалле*».

тогда существует); ни то, что он неподвижен (вечно находится в одной и той же точке пространства — полная нелепость); ни то, что, двигаясь, он за ***бесконечно короткий*** промежуток времени способен переместиться из одной точки в другую, отстоящую ***не на бесконечно малое*** расстояние.

Теперь допустим, что разработан такой способ описания состояния крохотного металлического шарика в гравитационном поле Земли, который использует понятие траектории и адекватно отражает результаты экспериментов по перемещению шарика из одной точки земной поверхности в другую по воздуху. Однако отсюда вовсе не следует ***невозможность*** использовать для описания состояния шарика статистический способ, равно, как не следует ***обязательность*** использовать понятие траектории при описании состояния электрона в поле протона.

На мой взгляд, опасно путать ***использование*** понятия с ***существованием*** (с определением) понятия. А ведь кое-кто всерьез считает, что необходимость и возможность описывать состояние электрона в поле протона, не используя понятий скорости и ускорения, означает, что электрон и на самом деле: либо вообще не движется, либо, если и движется то — без ускорения, и, кроме того, обладая конечной скоростью, за ***бесконечно короткий*** промежуток времени перемещается из одной точки в другую, отстоящую отнюдь ***не на бесконечно малое*** расстояние. Последнее полностью разрушает сложившееся и абсолютно обоснованное представление о таком понятии, как движение. Но никакого другого представления при этом вышеупомянутый кое-кто не предлагает[24]. Вместо этого говорится, что электрон в поле протона движется, но не по траектории[25]. Подобное утверждение абсолютно алогично и напоминает фразу: ***«он там не был, но был.»***

Я особо подчеркну, что доказать бессодержательность понятия траектории какого-либо объекта (микрочастицы или макрочастицы — при чем тут размеры?) в какой-либо ситуации никому не удалось и не удастся по той простой причине, что ***понятие траектории совершенно не связано с конкретной ситуацией***, в которой пребывает частица, если только эта частица не покоится вечно в одной и той же точке пространства. ***Понятие траектории жестко связано с понятием движения.*** Согласно принципу дополнительности, одно не может быть определено физически содержательным образом без другого. Поэтому логичным допустимо было бы признать только пусть и не обоснованное опытом утверждение, что в каких-то (?) условиях (но, конечно, не в поле протона) не существует ни траектории, ни движения электрона. Далее, вполне разумно отказать-

---

[24] Как мог убедиться читатель, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц ограничиваются лишь замечанием, что *представления о движении в рамках квантовой механике, принципиально отличны от представлений о движении в рамках классической механики.*

[25] При этом, не говоря прямо, дают понять, что электрон, находясь в электростатическом поле, тем не менее, не испытывает действия силы, почему и движется без ускорения, а, следовательно, не излучает энергию в виде электромагнитного поля и потому не падает в ядро.

ся от *использования* некоторых физически содержательных понятий для описания состояний частицы в каких-то ситуациях, но очень даже глупо отрицать *существование* подобных понятий.

Теперь можно заметить, что если при *описании* некоего явления природы (для определенности — явления поглощения света газообразным водородом) совершенно обоснованно не используются понятия движения и траектории электрона (без сомнения движущегося в поле протона), то и для *объяснения* вида спектра поглощения ***не возникает необходимости привлекать упомянутые понятия.*** Вот откуда соблазн считать, что в атоме электроны не движутся, а тогда и траекторий не существует. Это хоть и неверно, но логично. А признавать движение при одновременном непризнании траектории — значит игнорировать логику. Но там, где нет логики, — или глупость, или ложь.

В заключение я предлагаю читателю сопоставить вывод авторов «Квантовой механики (нерелятивистской теории)» о ***несуществовании понятия*** траектории с результатами их мысленного эксперимента, представляющего собой идеализацию опыта с электронной дифракцией на кристалле.

Что имели в виду авторы? Безусловно, что у пресловутой микрочастицы ни координат, ни траекторий нет ***на самом деле***, а не просто — в рамках какого-то одного — *квантово-механического* — способа описания. ***Именно поэтому*** в новой физической теории, претендующей более адекватно отражать явления природы, чем теория прежняя, авторы решили не оставлять места вышеупомянутым понятиям.

Если бы речь шла только о ***неприменимости*** или ненужности понятия траектории для адекватного описания результатов конкретного эксперимента, против этого нечего было бы возразить. С чем так называемый «простой человек» не в состоянии согласиться, так это с утверждением, что не существует или лишено физической содержательности само понятие траектории ***движущейся*** частицы. И никакие уговоры отрешиться от классических иллюзий не помогают. На мой взгляд, все — с точностью до «наоборот»: чтобы согласиться с подобным, нужно полностью отрешиться от всякой логики.

Если опыт убедил нас в том, что точечная частица попала в точку экрана (о чем свидетельствует появление на экране светлого пятна), разве это не означает, что частица оказалась в некоторый момент времени в точке пространства, координаты которой в этот момент времени (и в любой другой) могут быть в принципе точно известны (измерены)? Разве не означает отсутствие пятна на экране (по крайней мере, в той самой точке), что до упомянутого момента времени в той самой точке частицы не было? Разве не означает все это, что ранее частица была в другой точке пространства? Ведь частица не прерывала своего существования в... пространстве. Но тогда, стало быть, частица до того, как она столкнулась с экраном, непрерывно перемещалась по тем самым точкам, из которых и состоит то, что мы считаем пространством. Собрав все эти точки, мы, разумеется, получим непрерывную линию, которая и называется траекторией.

Что же в таком случае требует объяснения? А то, — почему для *описания* результатов некоторых экспериментов можно или нужно обойтись без использования понятий траектории и движения (конечно, *обоих* понятий, а не какого-то одного). Разумеется, объяснение есть. Я приведу только один, простейший пример.

Пустое пространство представляет собой континуум. Но поскольку все его точки физически совершенно эквивалентны, такое понятие, как *эта* точка, лишено физической (но не математической) содержательности. *«Эта»* физически ничем не отличается от *«той»*, а потому единственно разумный ответ на вопрос, где именно в пустом пространстве находится в настоящий момент времени точечная частица, таков: с равной вероятностью в любой из бесконечно большого числа точек пространства. Не играет роли, о движущейся (вечно прямолинейно и равномерно) свободной частице при этом идет речь или о покоящейся.

Напоследок возьму на себя смелость сказать следующее.

1. Абсолютно справедливо утверждение Гайзенберга, что *вне зависимости от конструкции измерительного прибора и метода измерения X-координаты точечной частицы в тот момент, когда эта координата измеряется, обязательно изменяется значение X-составляющей импульса частицы.* ***Но в этом утверждении: во-первых, нет ничего, что могло бы вызвать удивление; во-вторых, из него совершенно не следует то соотношение*** (4.1,а), ***которое традиционно считается и называется соотношением между неопределенностями значений X-координаты и P_x-импульса точечной частицы.***

2. Точечная частица не является носителем координаты точки своего присутствия в пространстве (ни носителем момента времени своего существования). Таким образом, термин *«координата частицы»* — это своеобразный жаргон. Измерение X-координаты движущейся частицы состоит в фиксации факта появления частицы в точке пространства ***с координатами, заведомо известными в любой момент времени.*** Осуществляется же фиксация путем изменения P_x-импульса частицы на ***произвольную*** величину.

Понятие точки — даже чисто математическое — обладает содержательностью только в связи с противоположным понятием сплошной линии (понятие сплошной линии — только в связи с понятием сплошной поверхности и т. п.). ***Таким образом, возникновение методической или приборной погрешности измерения координаты точки пространства не опровергает существования такого понятия, как определенное (одно) значение координаты, например, точки X-оси***[26]. Напротив, именно су-

[26] Одна **определенная** точка X-оси и определенное (**одно**) значение X-координаты точки обычно используются как синонимичные понятия.

ществование подобного понятия придает физическую содержательность другому понятию — ***измерение*** X-координаты.

В случае перемещения частицы вдоль X-оси (играющей роль одномерного пространства) все точки оси (линии) и есть то, что называется ***траекторией движения*** частицы.

3. Частица является носителем импульса.

Понятие импульса частицы обладает физической содержательностью только в связи с понятием ***тела столкновения*** (в его роли может выступать еще одна точечная частичка). Измерение P_x-импульса свободной точечной частицы требует присутствия на X-оси точечного тела исчезающе малой массы. Никакого изменения состояния частицы при этом не происходит. Поэтому акт измерения можно осуществлять в любой точке пространства и в любое мгновение вечности, помня, однако, что и все эти точки физически идентичны, и все мгновения.

4. В соотношении, традиционно представляемом в виде

$$(\Delta x)^2 \cdot (\Delta P_x)^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}$$

(оно-то чаще всего и называется соотношением неопределенностей), не содержится ***ни «неопределенностей»***[27]***, ни погрешностей измерения*** значений X-координаты и P_x-импульса точечной частицы.

Попросту говоря, соотношения именно неопределенностей не существует ни в виде

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \left\langle (\Delta P_x)^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \geqslant \frac{\hbar^2}{4},$$

ни в виде

$$\Delta x(t) \cdot \Delta P_x(t) \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

ни в каком-либо другом виде. Следовательно, не существует и никакого «принципа неопределенности».

А в соотношении $\left\langle x_*^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \left\langle P_{x,*}^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \geqslant \frac{\hbar^2}{4}$ (равно, как и в доквантовом соотношении $\left\langle x_*^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} \cdot \left\langle P_{x,*}^2 \right\rangle_{\Delta t \to \infty} > 0$) нет ничего, что могло бы вызвать удивление.

5. Допустимо ввести соотношение, связывающее значение ***погрешности измерения*** одной величины со значением ***изменения*** другой величины в момент акта измерения. Если первой величиной является X-координата, то второй — P_x-импульс точечной частицы, и тогда предлагаемое соотношение принимает вид:

$$\delta P_{x,\text{изменение}}(t) \sim \lim_{\{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)\} \to 0} \frac{1}{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)},$$

---

[27] Кавычки употреблены в связи с тем, что содержание термина «неопределенность» в тех случаях, когда «неопределенность» не была просто синонимом «погрешности», так никогда и не раскрывалось

где t символизирует момент измерения. Замена этого соотношения соотношением

$$\delta P_{x,\text{изменение}}(t) = \lim_{\{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)\}\to 0} \frac{\hbar}{\Delta x_{\text{погрешность}}(t)},$$

ничего не меняет в значениях величин $\delta P_{x,\text{изменение}}(t)$ и $\Delta x_{\text{погрешность}}(t)$, а само новое соотношение никакой практической пользы принести не может.

6. Что же, как оказалось, на ***самом деле*** подчеркивал Гайзенберг, и продолжают подчеркивать авторы книг по квантовой механике, обсуждая проблемы измерения характеристик точечной частицы?

Вовсе не то, что в акте измерения одной из величин частица не может не вступить во взаимодействие не только с реальным, но даже с идеальным измерительным прибором, вследствие чего изменяется в момент измерения «сопряженная» величина[28]. Какой нормальный человек станет это оспаривать или этому удивляться? Подчеркнуть хотели, что вообще не существует в качестве физически содержательного либо такое понятие, как X-координата частицы, либо такое понятие, как X-составляющая импульса, либо одновременно оба понятия[29]. Если это так, естественно, никакой роли погрешности измерения не играют. Чтобы доказать это, и предлагалось организовывать условия именно точного измерения одной из величин.

В связи со сказанным мне хотелось бы надеяться, что читатель убедился в ***принципиальной*** невозможности создать сами условия ***одновременного*** измерения обеих «сопряженных» величин[30]. Но никакого отношения не имеет это обстоятельство к существованию-несуществованию величин или к физической содержательности понятий. И совершенно самостоятельной является проблема применимости-неприменимости, использования или не использования каких бы то ни было понятий для описания состояния частицы в конкретной ситуации.

---

[28] Идеальный прибор — это прибор, конструкция которого позволяет исключить только приборную (но, разумеется, не случайную, и не методическую) погрешность измерения. На всякий случай напомню, что случайная погрешность обусловлена флуктуациями параметров окружающей обстановки, а методическая — несоответствием реальных условий измерения предположениям, использованным при разработке теоретических основ конкретного метода измерения. Однако идеализация допускает отсутствие и этих погрешностей.

[29] Вот, откуда тезис о принципиальной ненаглядности квантовой механики: не может быть видно то, что не существует. А потому следует заниматься исключительно описанием явления (разумеется, математическим). Я все же рискнул бы сказать, что налицо простое нежелание конкретных людей — специалистов высочайшей квалификации — тратить время на объяснения, не нужные лично им для своей деятельности.

[30] Можно было бы выразиться и иначе: такое понятие, как именно *одновременное измерение значений двух сопряженных величин*, является физически бессодержательным. Кстати замечу, что те величины, которые называют сопряженными, могут образовать только пару величин.

Глава 5

Соотношение между «неопределенностями» полной энергии и момента времени существования точечной частицы

§ 5.1. Установление момента времени существования частицы

Прежде всего я должен сделать оговорку в связи с тем, что словосочетание *«измерить момент времени»* может резать ухо читателя, хотя на самом деле именно взятое в кавычки и будет иметься в виду. На рис. 5.1 представлена t-ось (ось времени) бесконечной протяженности, и на ней «звездочкой» отмечено мгновение, которое необходимо... измерить с помощью некоего устройства. Однако, учитывая возможное неприятие взятого в кавычки словосочетания, далее будет говориться о том, как установить, в какой момент времени произошло некое событие (например, возникновение частицы).

Теперь перейдем к делу.

Если требуется зафиксировать лишь сам факт существования частицы, то не играет роли размер области пространства, в которой может появиться (возникнуть) частица в определенный момент времени. Измерительное устройство, в принципе, может «охватить взглядом» и одну точку пространства, и объем ограниченных (сверху и снизу) размеров, и все бесконечное пространство.

Одно из требований к устройству состоит в том, чтобы его вторжение в пространство не нарушило структуру последнего [1]. Означает это вот, что. Если пространство, в котором возникает-исчезает частица, заполнено таким силовым полем, что зависимость потенциала от координат и времени имеет вполне определенный вид, то вид этот не должен измениться из-за внесения в пространство измерительного устройства.

Рис. 5.1. Ось времени и мгновение вечности.

---

[1] А иначе может измениться характер существования частицы в пространстве.

Далее, необходимо помнить, что *до* акта измерения мы, что называется — по определению, не могли знать, чем отличаются (и отличаются ли) друг от друга все мгновения вечности. Следовательно, подлежащее установлению путем измерений мгновение вечности необходимо, попросту говоря, создать. Иными словами, необходимо организовать (с помощью измерительного устройства) событие, которое наделило бы одно из мгновений вечности таким признаком, которым *заведомо* не обладало ни одно другое мгновение *до* акта измерения. Это — второе требование к устройству. А теперь подчеркну, что единственный способ создать подобное событие, заставить частицу стать его участницей, и при всем том не нарушить структуру пространства — это включить в какое-то мгновение источник бесконечно большой мощности и тут же его выключить.

Поясню сказанное. Допустим, простоты ради, что пространство заполнено статическим силовым полем, зависимость потенциала (Φ_0) которого от координат (от радиус-вектора $\vec{r}$) имеет определенный вид $\Phi_0(\vec{r})$. Если в пространстве-поле присутствует частица, способная с полем взаимодействовать, то сила ($\vec{F}_0$), действующая на частицу, полностью определяется видом зависимости $\Phi_0(\vec{r})$: $\vec{F}_0 \sim -\operatorname{grad}\Phi_0$. Если изменить потенциал каждой точки пространства на одну и ту же величину $\Delta\Phi$, то $\operatorname{grad}\Phi_0$ останется прежним, а, следовательно, — и характер взаимодействия частицы с полем.

Теперь, по-видимому, ясно, что должно сделать измерительное устройство. Оно должно изменить потенциал *каждой* точки пространства на *одну и ту же* величину, но... — *на один лишь миг.* Вот это и будет событие, выделяющее из вечности одно — уже вполне определенное мгновение, отличающееся от всех остальных. Частица, если она в *это* мгновение существует (тем самым — присутствует в *какой-нибудь* точке пространства), поневоле станет участницей события, так как в момент изменения потенциала точки пространства изменится потенциальная энергия частицы[2], и это изменение — величину $\Delta E_{пот}$ ($\equiv \Delta E_{полн}$) — сможет зарегистрировать измерительный прибор.

А теперь вопрос: чему именно может быть равно значение $\Delta E_{пот}$ ($\equiv \Delta E_{полн}$)?

Здесь, кажется, уместным сделать небольшое отступление.

Если у нас есть источник мощности ($\mathfrak{N}$), то после включения его в работу изменение полной энергии частицы за счет поглощения ею мощности, равно: $\Delta E_{полн} = \mathfrak{N}\cdot\Delta t$, где Δt — время действия источника с момента включения. Следует обратить особое внимание на независимость друг от дружки величин $\mathfrak{N}$ и Δt.

---

[2] Кинетическая энергия частицы не изменится, поскольку сила $\vec{F}_0$ и в этот момент останется прежней. Стало быть, не изменится импульс частицы. Таким образом, изменение ее полной энергии в описываемое мгновение в точности совпадает с изменением энергии потенциальной.

Теперь вернемся к нашей проблеме. Пусть для определенности Φ_0 — это потенциал электростатического поля, а частица обладает электрическим зарядом q. Вместо понятия «источник мощности» введем понятие «источника потенциала $\mathfrak{T}$» (размерность этой величины $\left(\frac{\text{В}}{\text{с}}\right)$, так что

$$\Delta\Phi = \int\limits_{\Delta t} \mathfrak{T}(t)\cdot dt, \quad \Delta E_{\text{пот}} = q\cdot\Delta\Phi .$$

Событие, о котором идет речь, состоит в том, что в каждой точке пространства возникает на мгновение $(\Delta t \to 0)$ поток потенциала $\mathfrak{T}$ (рис. 5.2). Но если значение его ограничено сверху, то $\Delta\Phi \to 0$, ибо $\Delta t \to 0$, и, следовательно, никакого изменения потенциала не произойдет. Таким образом, ясно, что в течение исчезающе короткого промежутка времени необходимо создать бесконечно большой поток $\mathfrak{T}$. Но тогда:

$$\Delta E_{\text{пот}} = q\cdot \lim_{\substack{\mathfrak{T}\to\infty \\ \Delta t\to 0}} (\mathfrak{T}\cdot\Delta t). \tag{5.1}$$

Это уже знакомая картина (см. с. 135). Придать соотношению (5.1) физическую (но не математическую) содержательность можно, только считая, что частица в момент времени t_* обладает с равной вероятностью любой полной (потенциальной) энергией в пределах от нуля до бесконечности[3].

Итак, если в выделенный момент вечности частица существует, она вынуждена будет отметить факт своего существования изменением своей полной энергии. Разумеется, значения энергии *до* и *после* события предполагается измерять с помощью прибора.

Теперь следует обратить внимание на специфическую особенность только что рассмотренной ситуации. Чтобы убедиться в том, что частица в момент времени t_* обладает полной энергией, значение которой находится в пределах от нуля до бесконечности с какой-то вероятностью, необходимо, во всяком случае, иметь возможность воспроизвести *один и тот же* момент вечности (одно и то же событие) бесконечно много раз. Хотя вернуться в прошлое можно только мысленно, но организовать много раз одно и то же событие (включение на один миг источника бесконечно большого потока $\mathfrak{T}$) вполне возможно. Тогда в нашем распоряжении как раз и окажется совокупность физически идентичных мгновений вечности.

Итак, установление момента времени существования частицы может быть осуществлено только путем изменения ее ***потенциальной*** энергии. Величина этого изменения может быть с ***равной вероятностью любой в пределах от нуля до бесконечности.***

Имеет смысл обратить внимание на то, что речь идет именно о потенциальной энергии, поскольку при включении источника *потока потенциала* силовое поле, заполняющее пространство, остается прежним. Что

[3] На всякий случай замечу, что совершенно не обязательно создавать именно приток потенциала. Отток годится в равной степени.

касается частицы, взаимодействующей со статическим силовым полем, то она, конечно, обладает и кинетической, и потенциальной энергией, сумму которых мы называем полной энергией. Ясно, что изменение потенциальной энергии на величину $\Delta E_{пот}$ автоматически меняет полную энергию на ту же величину: $\Delta E_{пот} \equiv \Delta E_{полн}$. Но вот, что чрезвычайно важно. Приобретенная частицей в момент измерения потенциальная энергия через какое-то время обязательно перейдет в кинетическую, если частица пребывает в силовом поле. Затем измененная кинетическая энергия частично или полностью перейдет в потенциальную и т. п. Однако, чтобы измерить энергию частицы, ее придется столкнуть с измерительным устройством, так как на самом деле измерить можно лишь кинетическую энергию. Просто сделать это нужно в таком месте пространства, в котором новое значение кинетической энергии совпадает со значением энергии полной.

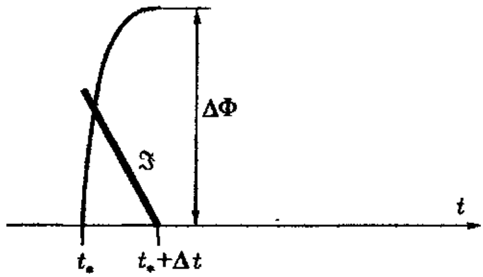


Рис. 5.2. Организация события в одно из мгновений вечности.

В момент t_* на короткое время включается источник, создающий поток потенциала. Если значение $\mathfrak{T}$ в упомянутый момент сделать бесконечно большим, а промежуток Δt стянуть к нулю, значение $\Delta\Phi$ окажется совершенно неопределенным.

А давайте попробуем установить момент времени существования частицы *свободной*, полная энергия которой, во всяком случае, до установления, совпадала с *кинетической*? Если мы попробуем сделать это описанным выше методом, ничего не выйдет, так как в момент включения источника потока потенциала ни в одной точке пространства сила не возникнет, а потому никакого изменения импульса частицы (автоматически — кинетической энергии) не произойдет. Приобретенная же частицей потенциальная энергия ни во что не превратится, поскольку мгновение спустя после акта установления частица окажется вновь в пустом пространстве.

Но давайте вспомним, о чем говорилось в главе 4. А там, в частности, было сказано, что в момент измерения X-координаты частицы абсолютное значение ее P_x-импульса оказывается с равной вероятностью любым в пределах от нуля до бесконечности. Следовательно, и значение кинетической энергии лежит в аналогичных пределах. Разумеется, в упомянутый момент частица должна считаться существующей, поскольку она взаимодействует с барьером, установленном в точке с координатой x_*. Однако, выделен ли как-то этот момент времени? Выделен: ведь только однажды (единственный раз) частица наталкивается на барьер. Все остальные мгновения вечности частица движется прямолинейно и равномерно.

Напоследок еще одно замечание.

До сих пор, говоря о существовании-несуществовании частицы, имелось в виду ее присутствие (в определенный момент времени) в пространстве. Утверждение, что, например, в какой-то точке пространства частица в момент времени t_* отсутствует, равносильно утверждению, что в тот момент частицы там не существует. Но вот совершенная иная ситуация.

Частица существует вечно и непрерывно, взаимодействуя с неким полем, а потому может пребывать в любом из множества ***различных*** стационарных состояний. Различных — значит с разной полной энергией. Тогда вполне законно спросить: ***в каком именно состоянии пребывает частица в данное мгновение вечности?*** Но разве это не то же самое, что спросить: ***существует ли частица в данное мгновение именно в этом состоянии*** (***с энергией*** E_*), ***а не в каком-то другом?*** Давайте попробуем выяснить это экспериментальным путем.

Ясно, конечно, что событие надо организовать, однако, можно ли при этом избежать «ухода» частицы из состояния с энергией E_*? Допускаю, что кому-то может не понравиться, что, удостоверившись в существовании частицы в момент времени t_*, он не узнает, в каком именно состоянии она в тот момент пребывала. Однако никаким иным способом, кроме как с использованием источника потока потенциала, организовать событие, выделяющее из вечности определенное мгновение, невозможно, если речь идет о частице, вечно взаимодействующей с неким полем. Таким образом, напрашивается вывод: когда ставится вопрос, ***существует ли частица в определенный момент времени***, то безразлично, имеется ли при этом в виду просто присутствие частицы в пространстве (все равно в каком именно состоянии) или же присутствие ее в пространстве, но именно — в ***определенном*** состоянии (с энергией E_*).

§5.2. Измерение полной энергии

Как и в случае с измерением значения X-координаты, возможность установить экспериментально, существует ли частица, безразлично, в какой именно точке пространства, но именно в определенный момент времени, оказалась обусловленной возможностью изменить значение полной энергии частицы. Разумеется, чтобы убедиться в изменении, нужно измерить энергию до и после установления момента времени существования. Поэтому необходимо выяснить, возможно ли это. На всякий случай хочу предупредить читателя, что речь будет идти лишь об особенностях ***принципиально осуществимого*** метода измерения. Ни слова о его технической реализации сказано нет будет.

Так вот, что касается этих особенностей, то возникает проблема.

Напомню, что измерение значения какой-либо величины не должно сопровождаться ее изменением. В случае с P_x-импульсом частицы проблем не возникало потому, что не только изменение значения P_x-импульса в акте измерения могло быть сделано сколь угодно малым, но изменение это было пропорционально значению P_x-импульса, которым частица обладала ***перед*** актом измерения. На первый взгляд кажется, что с полной энергией это номер не пройдет, если только она не совпадет с кинетической. Поскольку в полную энергию входит еще и потенциальная энергия взаимодействия частицы (например, со статическим силовым полем), создается впечатление, что ***изменение*** полной энергии лишь в единственном случае ***пропорционально*** — точно равно — ***значению*** самой этой энергии: когда в процессе или акте измерения частица ***прекращает свое существование,*** отдавая, следовательно, ***всю*** свою энергию измерительному устройству.

Однако одна возможность измерить полную энергию все же есть, — когда пространственная конфигурация статического силового поля такова, что существует область пространства, в которой сила, действующая на частицу, бесконечно мала. В те моменты времени, когда частица попадает в эту область, ее потенциальная энергия целиком переходит в кинетическую, и, стало быть, неизменная во времени полная энергия совпадет с кинетической.

Поместим в одну из бесконечно большого числа точек упомянутой области пространства такую же пробную частичку (бесконечно малой, но не равной нулю точно массы покоя), которая использовалась при измерении значения P_x-импульса. Эта частичка, столкнувшись с нашей частицей, унесет с собой заведомо известную часть ее кинетической энергии, а значение кинетической энергии в рассматриваемой ситуации уже точно равно значению полной энергии.

Остается поинтересоваться, как долго придется ждать столкновения. Учитывая, что пробная частичка присутствует в ***одной*** из ***бесконечно большого*** числа точек, столкновение ее с нашей частицей совершенно точно произойдет хоть однажды, но лишь, если наша частица существует ***вечно.*** Таким образом, чтобы имела место сама возможность измерить то (одно) значение полной энергии, которым частица в это мгновение обладает, промежуток времени существования частицы ($\Delta t_{\text{существования}}$) должен быть бесконечно продолжительным.

Теперь хотелось бы обратить внимание читателя на то, что одно дело — метод измерения полной энергии частицы, а другое дело — логика. Давайте перейдем от проблем измерений к просто рассуждениям на тему возникновения частицы.

Выражение *«частица существует вечно и непрерывно»* — всего лишь бытовой эквивалент высокоученого выражения ***«частица, находясь в пространстве, существует с равной вероятностью в любой момент вечности».*** При этом имеется в виду присутствие частицы ***не в какой-то одной определенной*** точке пространства, а ***в пространстве*** вообще. Однако, если выделить для себя одну определенную точку (физически отличную от всего остального их множества), то даже временное отсутствие в ней частицы равносильно для наблюдателя несуществованию частицы. Вполне разумно считать, что, например, в статическом силовом поле (в котором все точки физически различны) вероятность существования (пребывания) частицы в одной точке не такая, как в другой. То есть доля вечности, приходящаяся на присутствие частицы в j-й точке пространства, отличается от доли вечности, приходящейся на присутствие частицы в k-й точке.

А теперь спросим себя: *может ли вечно и непрерывно существующая и участвующая во взаимодействии с неким статическим силовым полем частица обладать неизменной во времени полной энергией (одним значением энергии из их бесконечного множества)?* Конечно — да[4]. Но и, что в этом удивительного?

Если кому-то очень захочется придать сказанному облик математического выражения, он сумеет это сделать, поскольку бесконечно продолжительному промежутку времени существования ($\Delta t_{\text{существования}} \to \infty$) отвечает в данном случае бесконечно узкий диапазон значений полной энергии частицы ($\delta E \to 0$), — попросту говоря, какое-то одно значение энергии. В результате можно сконструировать математическое соотношение в виде

$$\delta E \sim \lim_{\Delta t_{\text{существования}} \to \infty} \frac{1}{\Delta t_{\text{существования}}}\ ^{5)}.$$

Важно лишь не забывать о необходимости интерпретировать его не только физически содержательным, но еще и ***должным*** образом. Именно, считать, что: величина δE — это диапазон тех значений полной энергии, каждым из которых частица обладает с равной вероятностью; величина $\Delta t_{\text{существования}}$ — это промежуток времени, в любое мгновение которого частица существует с равной вероятностью.

Теперь представим себе, что в пространстве-поле частица существует вовсе не вечно, а возникает совершенно неожиданно. Если после этого она просуществует некоторое время, то успеет вступить во взаимодействие с полем, вынуждая нас размышлять над тем, какую энергию она за это время приобретет (или потеряет). Чтобы избавиться от столь тягостных раздумий, давайте предположим, что промежуток времени существования совпадает с бесконечно коротким промежутком времени возникновения частицы ($\Delta t_{\text{существования}} = \Delta t_{\text{возникновения}} \to 0$). Снова зададим вопрос: *с какой полной энергией частица возникает..., возникает из... из ничего (!)?* Ну, ***раз из ничего, значит — с какой угодно.*** Это сказано, хоть не высокоученым языком, зато отражает суть дела. Ведь мы считаем частицу возникшей не в результате какого-то процесса или явления, а ***возникшей из ничего в буквальном смысле слова.*** Следовательно, нет и того, что могло бы придать возникшей внезапно частице какое-то определенное (одно) значение полной энергии (равно, как и любой другой физической характеристики из числа не относящихся к константам). Так вот, если

---

[4] Можно также представить себе и ситуацию, в которой полная энергия частицы меняется во времени.

[5] Разумеется, это абсолютно обоснованное соотношение не может быть заменено совершенно необоснованным соотношением $\delta E \geqslant \frac{\hbar}{\Delta t_{\text{существования}}}$.

не ставить под сомнение саму возможность спонтанного возникновения частицы из ничего, то ***единственно логичный*** ответ на заданный ранее вопрос — действительно, ***«с какой угодно»*** или, выражаясь более строго: *«в **момент** возникновения частица с равной вероятностью обладает любым значением полной энергии в пределах от $-\infty$ до $+\infty$».*

Есть еще одно обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание.

Когда мы говорим о возникновении или о существовании частицы, то, разумеется, имеем в виду, что возникает (существует) она в пространстве. Если частица возникает (из ничего) в ***пустом*** пространстве, все точки которого физически эквивалентны (неразличимы), ясно, что она возникает (из ничего) в любой точке с равной вероятностью. Поэтому вполне содержательным является выражение: *«частица возникает (существует) в пустом пространстве».*

Но есть нюанс. Существуя в пустом пространстве, частица может пребывать в разных состояниях. Состояние характеризуется абсолютным значением и направлением импульса, и состояний этих бесконечно большое число. Как можно (и можно ли) представить переход частицы из одного состояния в другое? Вот, например, такой ответ: *свободная частица, существовавшая неограниченно долго в одном определенном состоянии (обозначу его символом $\vec{P}_1$), тем не менее, внезапно исчезает (**в никуда**), а затем, спустя любой промежуток времени (от сколь угодно короткого до сколь угодно долгого) возникает внезапно (**из ничего**), но уже в другом — $\vec{P}_2$-состоянии и остается в нем опять сколь угодно долго.* Однако если считать, что в момент возникновения полная энергия частицы может быть с равной вероятностью какой угодно в пределах от нуля до бесконечности, нельзя считать, что ее энергия спустя мгновение точно равна именно $\frac{\vec{P}_2^2}{2m_0}$. Куда же денется все остальное?

Кстати, совершенно аналогичная проблема возникает и с частицей, участвующей во взаимодействии со статическим силовым полем. Состояний с различной, но каждый раз точно определенной полной энергией в таком поле бесконечно много.

Таким образом, мы оказываемся перед необходимостью прежде всего ответить на вопрос: *может ли вообще находиться частица в состоянии с **определенной** полной энергией (как совпадающей с кинетической, так и не совпадающей) **ограниченный** (сверху и снизу) промежуток времени?*

При этом можно, конечно, полагать, что ограничение создается изменением характера взаимодействия частицы с неким телом, либо возникновением (исчезновением) этого взаимодействия. Однако это не играет роли, если считать, что переход из состояния в состояние происходит через *«в никуда»* и *«из ничего»*.

И вот ответ.

Возникая в течение бесконечно короткого (но не равного нулю точно) промежутка времени, частица ведь оказывается в точке пространства, а оно может быть пустым, «пустым» (именно в кавычках, см. § 1.1), и заполненным, например, статическим силовым полем определенной конфигурации.

Если частица возникает (из ничего) в *пустом* пространстве, взаимодействовать ей не с чем. Тогда следует считать, что в момент своего возникновения (в одно из до этого события неразличимых мгновений вечности) она с равной вероятностью обладает любым импульсом (в пределах от нуля до бесконечности по модулю и от нуля до 4π стерадиан по направлению) и, автоматически, кинетической энергией (в пределах от нуля до бесконечности)[6].

Поскольку речь идет о пустом пространстве, все точки которого физически эквивалентны (неразличимы), и так ясно, что возникнуть из ничего частица может с равной вероятностью в любой точке. Однако, если пространство заполнено статическим силовым полем определенной конфигурации, отмеченное обстоятельство необходимо подчеркнуть. Ведь в момент возникновения частицы ей придется приписать не только кинетическую энергию (с равной вероятностью любое значение), но и потенциальную. Тогда, поскольку среди бесконечно большого числа точек пространства столь же много точек, отличающихся друг от друга значением потенциала, следует считать, что частица с равной вероятностью обладает еще и любым из тех значений потенциальной энергии, которые соответствуют значениям потенциала поля.

Но, вот если пространство, в котором возникает (из ничего) частица является «пустым», она в момент возникновения обладает с равной вероятностью любым значением полной энергии в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Это утверждение, учитывая свойства «пустого» пространства, остается справедливым и в том случае, когда в «пустое» пространство вложено силовое поле любой конфигурации. И лишь это утверждение следует считать верным, если признать, что пустым (без кавычек) реальное пространство в принципе быть не может.

Любителю преобразовывать словесные формулировки в математические выражения не возбраняется ***часть сказанного*** преобразовать в соотношение

$$\delta E_{\text{полн.}} \sim \lim_{\Delta t_{\text{возникновения}} \to 0} \frac{1}{\Delta t_{\text{возникновения}}}\ ^{7)}.$$

Перевести на язык символов остальной текст (*«где $\delta E_{\text{полн.}}$ — диапазон значений полной энергии, каждым из которых частица обладает с равной вероятностью; $\Delta t_{\text{возникновения}}$ — промежуток времени, в течение которого частица (из ничего) возникает»*) пока еще никто не догадался[8].

---

[6] Все это, — разумеется, относительно системы координат, начало которой наблюдатель совместил с какой-нибудь точкой пустого пространства.

[7] Разумеется, это абсолютно обоснованное соотношение не может быть заменено совершенно необоснованным соотношением $\delta E_{\text{полн.}} \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta t_{\text{возникновения}}}$.

[8] Лично мне кажется, что если бы это и было сделано, то на запоминание символов и последующее осмысливание математического соотношения ушло бы гораздо больше времени, чем на прочтение и осмысливание чисто словесной формулировки.

Глава 6

Уравнение Дирака

§ 6.1. Истинно ли уравнение Шредингера?

На с. 101 (в самом вверху) была отмечена необходимость выяснить, как именно следует устанавливать явный вид зависимости Ψ-функции от координат и времени, после чего было предложено использовать для этой цели уравнение Шредингера. Обосновать подобное предложение можно, опираясь на один из фундаментальных постулатов квантовой механики — принцип соответствия, — согласно которому исходное — доквантовое выражение, например, $E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}$ нужно заменить операторным уравнением в символической форме: $\widehat{E}\Psi = \frac{\widehat{\vec{P}}^2\Psi}{2m_0}$. Далее необходимо выбрать представление, в котором операторы приобретают явный вид. В пространственно-временно́м представлении

$$\widehat{E} = i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}; \quad \widehat{\vec{P}} = -i \cdot \hbar \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

так что уравнение Шредингера для свободной точечной частицы выглядит следующим образом:

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0.$$

В дальнейшем, простоты ради, предлагается использовать уравнение в усеченном виде

$$\left\{ i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \Psi = 0. \qquad (6.1)$$

Разумеется, для нахождения вида зависимости Ψ от x и t нельзя обращаться к какому попало математическому уравнению. Необходимо, чтобы уравнение отображало реальное состояние частицы. Однако принципу соответствия, образно выражаясь, нет дела до истинности или неистинности того (любого) выражения, которое предстоит преобразовать в операторное уравнение. Поэтому нужно выяснить, можно ли доверять выражению $E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}$. Но, вот вопрос: в чем состоит критерий истинности? Для ответа на этот вопрос придется сделать отступление от основного изложения.

Преобразования Галилея и Лоренца

Я начну с замечания, что сам термин «*преобразования Галилея*» появился по-видимому в 1907 году, причем — в связи с тем, что к этому времени научная общественность уже лет семь обсуждала преобразования Лоренца и немногим более года — их эйнштейновскую интерпретацию. Я приведу лишь несколько формул преобразования, принадлежащих галилеевой и лоренцевой группам. Речь пойдет о преобразованиях X-координаты точки пространства и момента времени, которыми оперируют два инерциальных наблюдателя (j-й и k-й), вечно движущиеся друг относительно друга вдоль общей X-оси с неизменной скоростью V_0. Начало отсчета времени ведется каждым наблюдателем с того момента, в который совпали начала отсчета X-координат (рис. 6.1). Каждый наблюдатель измеряет координату точки X-оси в момент времени по своим часам.

Итак, формулы преобразования, принадлежащие лоренцевой группе:

$$x_j = \eta \cdot (x_k + V_0 \cdot t_k), \qquad x_k = \eta \cdot (x_j - V_0 \cdot t_j); \tag{6.2,а,б}$$

$$t_j = \eta \cdot \left(t_k + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot x_k\right), \qquad t_k = \eta \cdot \left(t_j - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot x_j\right). \tag{6.2,в,г}$$

Здесь: $\eta \equiv \left[1 - \left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2\right]^{-1/2}$; ς — некая универсальная константа, равная $3 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$.

Что касается формул преобразования, принадлежащих галилеевой группе, то их ***традиционно*** представляют в виде

$$x_j = x_k + V_0 \cdot t_k; \quad x_k = x_j - V_0 \cdot t_j; \quad t_j = t_k. \tag{6.3,а,б,в}$$

Хотелось бы обратить внимание читателя на то, что в любой книге по физике, где обсуждаются преобразования Лоренца и Галилея, можно встретить утверждение, что формулы (6.3) возникают из формул (6.2) в результате перехода к пределу $\varsigma \to \infty$. На первый взгляд, против этого нечего возразить. Кто же будет спорить с тем, что $\lim\limits_{\varsigma\to\infty} \eta = 1$; $\lim\limits_{\varsigma\to\infty} \frac{V_0}{\varsigma^2} = 0$? Однако в рамках галилеевой группы величине V_0 разрешается быть ***сколь угодно большой***. Но тогда традиционное утверждение, на мой взгляд,

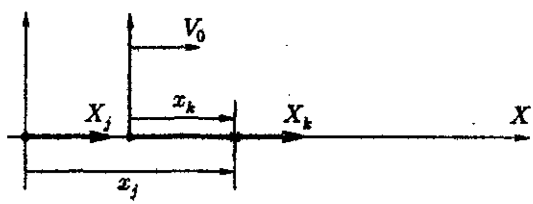


Рис. 6.1. Две инерциальные системы отсчета.

k-й наблюдатель смотрит в ту сторону, в которую относительно него движется j-й наблюдатель со скоростью $-V_0$; j-й наблюдатель смотрит в ту сторону, в которую относительно него движется k-й наблюдатель со скоростью $+V_0$.

не может не вызывать удивления. Ведь величины V_0 и ς совершенно не связаны друг с другом, а в этом случае конструкции $\lim\limits_{\substack{\varsigma\to\infty \\ V_0\to\infty}} \sqrt{1-\left(\frac{V_0}{\varsigma}\right)^2}$ и $\lim\limits_{\substack{\varsigma\to\infty \\ V_0\to\infty}} \frac{V_0}{\varsigma^2}$ лишаются математической содержательности.

Совершенно другое дело, если считать, что ***нерелятивистское приближение*** требует соблюдения не одного, а ***двух*** условий:

$$\varsigma \neq \infty \text{ (величина } \varsigma \text{ ограничена сверху)}; \quad V_0 \ll \varsigma\ ^{1)}.$$

В этом случае формулы преобразования, возникающие в нерелятивистском приближении из лоренцевой группы, принимают вид:

$$x_j = (x_k + V_0 \cdot t_k), \qquad x_k = (x_j - V_0 \cdot t_j); \tag{6.4,а,б}$$

$$t_j = t_k + \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \frac{x_k}{\varsigma}, \qquad t_k = t_j - \frac{V_0}{\varsigma} \cdot \frac{x_k}{\varsigma}. \tag{6.4,в,г}$$

Подчеркну, что нет никаких оснований ликвидировать слагаемое $\frac{V_0}{\varsigma} \cdot \frac{x}{\varsigma}$ на том основании, что $V_0 \ll \varsigma$. Ведь сравнивать нужно величину $\frac{V_0}{\varsigma} \cdot \frac{x}{\varsigma}$ с величиной t, которая может оказаться даже меньше величины $\frac{V_0}{\varsigma}\frac{x}{\varsigma}$ [2]. Но это еще не все.

Я предлагаю читателю обратить внимание на тот факт, что ***в рамках дорелятивистской кинематики функциональная связь между величинами t_j и t_k*** (в частности, в виде $t_j = t_k$) ***не могла быть установлена, что называется, в принципе.***

В самом деле, когда k-й наблюдатель утверждает, что величина x_j является функцией x_k (каков бы ни был явный вид этой функции), то его утверждение основано на интерпретации эксперимента (мысленного или реального). А вот на каком основании k-й наблюдатель должен считать, что $t_j = t_k$? Ведь отсчет времени каждый из наблюдателей ведет с помощью устройства — часов, стрелка которых вращается с определенной частотой[3]. Однако k-й наблюдатель изготовил свои часы, ничего не зная о ходе часов (частоте вращения стрелки) j-го наблюдателя. Ведь они считаются ***вечно*** движущимися друг относительно друга (вдоль все той же X-оси с неизменной скоростью V_0), а потому и не могут сверить ходы часов: они оказываются в одной точке пространства лишь на мгновение, а для измерения периода вращения нужен, строго говоря, бесконечно продолжительный промежуток времени.

---

[1] Второе условие имеет смысл лишь постольку, поскольку величина ς объявляется ограниченной сверху.

[2] Разумеется, до 1907 года не могло быть никаких оснований упрекать кого-либо в отказе включить в галилееву группу формулы (6.4,в,г) вместо формулы (6.3,в). Но разве не удивительно, что даже в конце XX века в учебниках физики в галилеевой группе присутствуют не формулы (6.4,в,г), а формула (6.3,в)?

[3] Простоты ради, давайте считать, что часы имеют только одну стрелку.

Все сказанное означает, что эталона периода вращения стрелки часов, к которому могли бы обратиться наблюдатели, не существует. Все, что они могут себе позволить, это совместить стрелки часов в момент совпадения начал пространственных координат, а затем, вечно удаляясь друг от друга, сообщать о положении стрелки своих часов на циферблате и числе оборотов стрелки[4]. Однако для этого необходим объект-сигнал, обладающий достаточно специфическими свойствами. Если это — точечная частица (которую один наблюдатель «излучает» в сторону другого), то она должна двигаться только равномерно и прямолинейно (обладать способностью не испытывать ускорения под действием силы), причем со скоростью, не зависящей от скорости наблюдателя-отправителя. В противном случае она не сможет донести до наблюдателя-получателя неискаженную информацию. Кроме того, как бы ни была велика скорость V_0, скорость объект-сигнала ς должна быть еще больше. Ведь, только обмениваясь сведениями, наблюдатели могут прийти к выводу о существовании функциональной связи величин t_j и t_k.

В заключение подчеркну: без использования объект-сигнала установить вид зависимости t_j от t_k невозможно в принципе, оставаясь в рамках и дорелятивистской кинематики. Таким образом, ***дорелятивистское — точное — равенство $t_j = t_k$ ничем не могло быть обосновано.***

Теперь, наконец, можно объяснить, зачем потребовалось привлекать внимание читателя к формулам преобразования.

Дело в том, что соотношение между физическими величинами принято считать истинным (верным; выражающим закон Природы), если оно инвариантно относительно преобразований Лоренца. Приведу пример.

Соотношение между полной кинетической энергией (E) точечной частицы, ее массой покоя (m_0) и импульсом ее центра инерции ($\vec{P}$) выглядит следующим образом: $E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 = m_0^2 \cdot \varsigma^4$. Принадлежащие лоренцевой группе формулы преобразования величин E и $\vec{P}$ (применительно к ранее упомянутым j-й и k-й системам отсчета) имеют вид:

$$E_k = \eta \cdot (E_j - V_0 \cdot P_{j,x});$$

$$P_{k,x} = \eta \cdot \left(P_{j,x} - V_0 \cdot \frac{E_j}{\varsigma^2}\right), \quad P_{k,y} = P_{j,y}, \quad P_{k,z} = P_{j,z}.$$

Используя эти формулы, находим, что

$$\{E_k^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_k^2\} = \{E_j^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}_j^2\} = \mathrm{Inv} = m_0^2 \cdot \varsigma^4.$$

Величина $m_0^2 \cdot \varsigma^4$ и является инвариантом преобразований.

---

[4] Иными словами, один наблюдатель может сообщить другому сведения только такого типа: «стрелка моих часов совершила, например, 17,35 оборота». А это — сколько часов, или минут, или...? И, что значит час? Для каждого из наблюдателей час — это такой промежуток вечности, в течение которого стрелка *его* устройства совершила, например, один оборот вокруг *своей* оси. Общего для всех наблюдателей эталона периода не существует.

Именно на основании инвариантности конструкции $\{E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2\}$ относительно лоренцевых преобразований считается, что соотношение

$$E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + \varsigma^2 \cdot (m_0 \cdot \varsigma)^2} \tag{6.5}$$

истинно, то есть выражает закон Природы.

Теперь, располагая критерием истинности, обратимся к выражению

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}. \tag{6.6}$$

Конечно, это выражение не является нерелятивистским приближением истинного соотношения (6.5). В нерелятивистском приближении

$$E \approx m_0 \cdot \varsigma^2 + \frac{\vec{P}^2}{2m_0}\ ^{5)}. \tag{6.7}$$

Однако дело гораздо серьезнее. Если выражение (6.6) считать ***определением*** кинетической энергии частицы, а не соотношением, связывающим величины E, m_0, $\vec{P}$, то преобразуемой величиной в выражении (6.6) может быть лишь ***импульс*** $\vec{P}$. Только так и должно быть, поскольку к выражению, играющему роль ***определения*** физической величины, ***неприменимо понятие инвариантности—неинвариантности относительно каких бы то ни было преобразований.*** Мы просто говорим: выражение, играющее роль определения физической характеристики, обязано выглядеть одинаково в любой системе отсчета.

Если же считать выражение (6.6) не определением энергии E, а ***соотношением,*** связывающим величины E, m_0, $\vec{P}$, то формулы преобразования величин E и $\vec{P}$ обязаны быть независимыми друг от друга (величина m_0 считается непреобразуемой). Поскольку в нерелятивистском приближении

$$P_{k,x} = P_{j,x} - m_0 \cdot V_0\ ^{6)}; \quad P_{k,y} = P_{j,y}; \quad P_{k,z} = P_{j,z}; \quad E_k = E_j - V_0 \cdot P_{j,x},$$

находим, что

$$\left\{E_k - \frac{P_k^2}{2m_0}\right\} \neq \left\{E_j - \frac{P_j^2}{2m_0}\right\}; \quad E_k - \frac{P_k^2}{2m_0} = E_j - \frac{P_j^2}{2m_0} - \frac{m_0 V_0^2}{2}.$$

Неинвариантность конструкции $\left\{E - \frac{\vec{P}^2}{2m_0}\right\}$ относительно преобразований Галилея[7] вместе с необходимостью признать нерелятивист-

---

[5] Подчеркну еще раз, что нерелятивистское приближение требует соблюдения двух условий: $\varsigma \neq \infty$ (величина ς ограничена сверху); $\vec{P}^2 \ll (m_0 \cdot \varsigma)^2$.

[6] Поскольку $\frac{E}{\varsigma^2} = m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \varsigma}\right)^2}$, в нерелятивистском приближении $m = m_0$.

[7] Неинвариантность этой конструкции относительно преобразований Лоренца очевидна. Я решил показать неинвариантность ее еще и относительно преобразований Галилея лишь потому, что неискушенный читатель мог заподозрить, что это не так.

ским приближением соотношение (6.7) не оставляет иной возможности, как считать выражение (6.6) только ***определением*** кинетической энергии (разумеется в рамках галилеевой группы). Но, как только что было отмечено, к определению неприменимо понятие инвариантности–неинвариантности. Следовательно, мы продолжаем пребывать в неведении относительно истинности или неистинности уравнения Шредингера, порожденного, согласно принципу соответствия, определением (6.6). В таком случае остается одно: проверить на инвариантность (относительно преобразований Галилея) само уравнение.

§ 6.2. Проверка шредингеровского уравнения состояния свободной точечной частицы на галилей-инвариантность

В j-й системе отсчета уравнение (6.1) имеет вид:

$$\left\{i\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial t_j}+\frac{\hbar^2}{2m_0}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right\}\Psi=0. \tag{6.8}$$

Чтобы выяснить, как оно будет выглядеть в k-й системе отсчета, необходимо располагать формулами преобразования дифференцирующих операторов, а вывести эти формулы можно, лишь опираясь на формулы преобразования X-координаты и момента времени t.

Сначала я хочу предложить читателю использовать ***традиционный*** вид принадлежащих галилеевой группе формул преобразования

$$x_j=x_k+V_0\cdot t_k;\quad x_k=x_j-V_0\cdot t_j;\quad t_j=t_k. \tag{6.3,а,б,в}$$

Глядя на формулу (6.3,а), справедливо считать, что функция $\Psi(x_j)$ есть функция двух независимых переменных — величин x_k и t_k, поскольку $x_j=x_j\,(x_k,t_k)$. Следовательно:

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\cdot dx_k+\frac{\partial\Psi}{\partial t_k}\cdot dt_k;\qquad \frac{d\Psi}{dx_j}=\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\cdot\frac{dx_k}{dx_j}+\frac{\partial\Psi}{\partial t_k}\cdot\frac{dt_k}{dx_j}.$$

Таким образом (предполагая также, что Ψ-функция может оказаться еще и функцией t_j [8]):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{dx_k}{dx_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{dt_k}{dx_j}\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}.$$

Глядя на формулу (6.3,б), находим, что $\frac{dx_k}{dx_j}=1-V_0\cdot\frac{dt_j}{dx_j}$. А, поскольку из формулы (6.3,в) следует, что $\frac{dt_k}{dx_j}=0$, приходим к результату:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\left(1-V_0\cdot\frac{dt_j}{dx_j}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6.9,а}$$

---

[8] В этом случае оператор $\frac{d}{dx_j}$ следует заранее заменить оператором $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Перейдем к оператору $\frac{\partial}{\partial t_j}$.

Если начать действовать так же, как в предыдущем случае, — глядя только на формулу (6.3,в), то величина Ψ покажется функцией лишь ***одной*** переменной, и тогда $\frac{d}{dt_j} = \frac{d}{dt_k}$. Так все же, величина Ψ это функция одной переменной (t) или двух (t, x)? Поскольку из вида уравнения (6.8) следует, что $\Psi = \Psi(x, t)$, вместо равенства $\frac{d}{dt_j} = \frac{d}{dt_k}$ придется написать:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{dt_k}{dt_j} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{dx_k}{dt_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Так как из формулы (6.3,б) следует, что $\frac{dx_k}{dt_j} = \frac{dx_j}{dt_j} - V_0$, получаем окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_k} + \left(\frac{dx_j}{dt_j} - V_0\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (6.9,б)$$

Принимая во внимание, что в *рамках квантовой механики момент* вечности и X-координата точки пространства — величины, не зависящие друг от друга (следовательно, $\frac{dx_j}{dt_j} = 0$, $\frac{dt_j}{dx_j} = 0$), приходим к формулам преобразования операторов в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_k} - V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_j} + V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (6.10,а,б,в)$$

Преобразуя по этим формулам уравнение (6.8), получаем:

$$\left\{i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right\}\Psi = \left\{i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right\}\Psi - V_0 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}.$$

Таким образом, уравнение (6.8) оказалось даже ***галилей-неинвариантным и, стало быть, не может считаться адекватно отображающим истинное состояние свободной точечной частицы***[9]. Придется поискать другое уравнение.

В заключение я хотел бы обратить внимание читателя на одно обстоятельство, способное заронить сомнение в только что сделанном выводе.

Дело в том, что, что формул преобразования (6.10,б,в) не найти ни в одной книге, в которой рассматриваются преобразования Галилея. Там присутствует одна формула $\frac{d}{dt_j} = \frac{d}{dt_k}$[10]. В связи с этим я предлагаю вернуться к формулам преобразования лоренцевой группы (форму-

[9] Лоренц-неинвариантность уравнения Шредингера заведомо очевидна.

[10] Читатель может найти в этих книгах немало загадочного. Сошлюсь для примера на 1-й том Берклеевского курса физики (сс. 93, 94). Там написано, что равенство $\frac{dx_j}{dt_j} = \frac{dx_k}{dt_k} - V_0$ (я использую свои обозначения), образно говоря, возникает из формул преобразования (6.3) галилеевой группы. Далее авторы находят, что $\frac{dV_{j,x}}{dt_j} = a_{j,x} = \frac{dV_{k,x}}{dt_k} = a_{k,x}$ (символом a_x

лам (6.2)). Давайте найдем формулы преобразования операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$, принадлежащие ***лоренцевой*** группе (***при этом*** $V_0 < \varsigma$).

Считая, что в рамках квантовой механики $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dt}{dx} = 0$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_j}\right); \qquad (6.11,\text{а,б})$$

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_k} - V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t_k} = \eta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_j} + V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \qquad (6.11,\text{в,г})$$

Переходя к пределу $\left(\frac{V_0}{\varsigma}\right) \to 0$, получаем:

$$\lim_{\frac{V_0}{\varsigma} \to 0} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k} = \ldots; \qquad (6.12,\text{а})$$

$$\lim_{\frac{V_0}{\varsigma} \to 0} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} = \ldots; \qquad (6.12,\text{б})$$

$$\lim_{\frac{V_0}{\varsigma} \to 0} \frac{\partial}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial}{\partial t_k} - V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right); \qquad (6.12,\text{в})$$

$$\lim_{\frac{V_0}{\varsigma} \to 0} \frac{\partial}{\partial t_k} = \left(\frac{\partial}{\partial t_j} + V_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \qquad (6.12,\text{г})$$

Таким образом, формулы (6.10,б,в) являются правильными. Именно они и должны считаться нерелятивистскими приближениями формул (6.11,в,г).

Что же касается формул (6.12,а,б), то возможность ликвидировать слагаемое $\frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ всецело зависит от результатов действия операторов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$. Если считать, что нерелятивистское приближение требует соблюдения двух условий: ограниченности величины ς сверху и неравенства $V_0 \ll \varsigma$, то слагаемое $\frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ придется оставить на месте. Чтобы его исключить, необходимо принять тоже два, но — других, — образно выражаясь, противоположных условия: ***ограниченности сверху величины именно скорости*** V_0 (а не ς) и бесконечно большого значения величины ς. Только тогда можно надеяться на то, что величина $\frac{V_0}{\varsigma} \cdot \left(\frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t_k}\right)$ окажется высшего порядка малости по сравнению с величиной $\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$, и только тогда:

$$\lim_{\varsigma \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

обозначено ускорение). Против этих равенств нечего возразить. Но затем авторы делают вывод, что выражение $F_x = m_0 \cdot a_x$, играющее у них роль ***определения*** силы F_x (в этом выражении масса m_0 является непреобразуемой величиной) инвариантно относительно преобразований галилеевой группы. Но разве не очевидно, что понятия инвариантности–неинвариантности не применимы к выражению, играющему роль определения физической величины.

Тем не менее, два новых условия оставляют в силе другой предельный переход, благодаря которому и возникают формулы (6.10,б,в). Условия $V_0 \neq \infty$; $\varsigma \to \infty$ и условия $V_0 \ll \varsigma$; $\varsigma \neq \infty$ кинематически эквивалентны.

§ 6.3. Уравнение Дирака и лоренц-инвариантность

Как отмечалось в § 6.1, ***соотношение*** (и только соотношение) между любыми физическими характеристиками[11] признается истинным (то есть — выражающим закон Природы), если оно инвариантно относительно преобразований..., естественно, — Лоренца. Согласно принципу соответствия, то же самое должно относиться и к соотношению между операторами физических характеристик. В таком случае существует возможность ***конструирования*** таких соотношений между операторами ***известных*** характеристик, которые имели бы право считаться лоренц-инвариантными. Можно сначала написать соотношение между операторами, руководствуясь интуицией или какими-то аналогиями, а затем перенести написанное соотношение из одной инерциальной системы отсчета в другую, пользуясь формулами преобразования операторов. Ведь эти формулы должны быть идентичны формулам преобразования самих характеристик, согласно все тому же принципу соответствия. После переноса соотношения в другую инерциальную систему отсчета нужно будет проверить, совпадает ли вид соотношения в обеих системах.

Давайте тогда попробуем сконструировать лоренц-инвариантное соотношение между операторами $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$.

Подчеркну, что соотношение между именно этими операторами, по сути дела, и есть уравнение состояния свободной точечной частицы, а потому необходимо обратить внимание на нижеследующее обстоятельство.

Обратимся, простоты ради, к уравнению $\widehat{E}\Psi = \frac{1}{2m_0} \cdot \widehat{\vec{P}}^2 \Psi$, которое в пространственно-временнóм представлении принимает вид

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0 \,. \tag{6.13}$$

Ясно, что величина Ψ является функцией не только координат, но и времени. И вот здесь следует вспомнить, что уравнение состояния частицы (6.13) было выведено из уравнения непрерывности (3.21)[12], означающего, что доля точечной частицы[13] в данной точке пространства (величина $|\Psi|^2$), если и меняется во времени, то при этом именно

[11] Имеются в виду не константы, а те характеристики, с помощью которых следует описывать состояние частицы

[12] См. § 3.4. Тем, кто считает уравнение Шредингера принципиально невыводимым, я предлагаю, в качестве компромисса, согласиться с тем, что оно, по крайней мере, совместимо с уравнением непрерывности.

[13] Пользуясь случаем, еще раз напомню, что «доля *точечной* частицы» — это в рамках статистического способа описания состояния такой частицы.

быстрота изменения значения доли (величина $\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}$) зависит от внешних факторов, то есть от того, в какой обстановке частице приходится пребывать. Иными словами, уравнение состояния частицы — это уравнение для ***первой*** производной Ψ-функции по времени (для величины $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$), но никак не для второй или более высокой производной.

Теперь перейдем к делу.

Принимая во внимание, что ***скалярный*** оператор $\widehat{E}$ нельзя сравнивать с ***векторным*** оператором $\widehat{\vec{P}}$, представим предполагаемое соотношение между двумя этими операторами (применительно к состоянию свободной точечной частицы) в виде

$$\widehat{E} = \widehat{\vec{u}}\,\widehat{\vec{P}}, \tag{6.14,a}$$

где $\widehat{\vec{u}}$ — еще один — ***некий*** — векторный оператор с размерностью скорости[14].

Подчеркну, что если на этом этапе не задуматься над тем, какой величине соответствует оператор $\widehat{\vec{u}}$, то возникнут проблемы с формулами преобразования его проекций, и тогда единственным выходом из положения будет придумать эти формулы — с целью ***принудить*** соотношение (6.14, а) к лоренц-инвариантности. Но потом надо будет выяснить, можно ли считать придуманные формулы принадлежащими лоренцевой группе.

Давайте, однако, продолжим.

После выбора традиционного — пространственно-временнóго — представления операторов $\widehat{E}$ и $\widehat{\vec{P}}$ соотношение (6.14, а) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = -\left(\widehat{u_{j,x}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \widehat{u_{j,y}}\frac{\partial}{\partial y_j} + \widehat{u_{j,z}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right). \tag{6.14,б}$$

Индекс j указывает на то, что так выглядит соотношение между операторами в j-й инерциальной системе отсчета.

Следующий шаг — лоренц-преобразование дифференцирующих операторов.

Считая, что j-й и k-й наблюдатели вечно движутся вдоль общей X-оси с неизменной скоростью V_0, мы должны пользоваться следующими формулами преобразования:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = \eta\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t_k} - V_0\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \eta\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{V_0}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t_k}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_k},\quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

[14] Конечно, можно было бы сразу же обобщить соотношение (6.14,а) путем добавления в правую часть еще одного скалярного оператора (например, в виде $\widehat{E_0}$ или $\widehat{\vec{u}}\,\widehat{\vec{P}}_0$). Однако мне показалось целесообразным отложить это «на потом».

В результате соотношение (6.14, б) переходит в соотношение

$$\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_{j,x}}\right) \frac{\partial}{\partial t_k} = -\eta \cdot \left(\widehat{u_{j,x}} - V_0\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} - \\ - \left(\widehat{u_{j,y}} \frac{\partial}{\partial y_k} + \widehat{u_{j,z}} \frac{\partial}{\partial z_k}\right). \qquad (6.14,\text{в})$$

Теперь нужно ***придумать*** (ведь мы же занимаемся конструированием) формулы преобразования проекций оператора $\widehat{\vec{u}}$ такие, чтобы вид соотношения (6.14,в) оказался идентичным виду соотношения (6.14,б). Никакой проблемы в придумывании подобных формул нет. Проблема лишь в том, чтобы выяснить, есть ли основания включить их в лоренцеву группу. Если основания будут найдены, ***придется считать, что оператор $\widehat{\vec{u}}$ действительно соответствует физической характеристике точечной частицы.*** Ведь решено считать соотношение, инвариантное относительно преобразований Лоренца, истинным — выражающим закон Природы.

Итак, положим:

$$\widehat{u_{j,x}} = \widehat{u_{k,x}} \equiv \widehat{u_x}; \quad \left(\widehat{u_x}\right)^2 = \varsigma^2. \qquad (6.15,\text{а,б})$$

Тогда

$$\widehat{u_{j,x}} - V_0 = \widehat{u_x} - V_0 = \widehat{u_x} - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \left(\widehat{u_x}\right)^2 = \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \widehat{u_x}.$$

Теперь очевидно, как должны выглядеть предположительно приписываемые лоренцевой группе формулы преобразования операторов $\widehat{u_y}$ и $\widehat{u_z}$:

$$\widehat{u_{j,y}} = \eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \widehat{u_{k,y}}; \quad \widehat{u_{j,z}} = \eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \widehat{u_{k,z}}. \qquad (6.16,\text{а,б})$$

Используя все эти формулы, находим, что

$$\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \frac{\partial}{\partial t_k} = -\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \cdot \left(\widehat{u_{k,x}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \widehat{u_{k,y}} \frac{\partial}{\partial y_k} + \widehat{u_{k,z}} \frac{\partial}{\partial z_k}\right).$$

Сокращая на общий множитель $\eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right)$, приходим к соотношению исходного вида (6.14,б).

На всякий случай замечу, что новый оператор $\widehat{\vec{u}}$ не может, по определению, действовать на переменные t, x, y, z.

Что касается чисто математических свойств оператора $\widehat{\vec{u}}$, то они являются, образно выражаясь, следствием навязанных ему формул преобразования. Вот пример.

Исходя из соотношения (6.14, б), легко установить, что

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial}{\partial t_j}=\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}=$$

$$=\left(\widehat{u_x}\frac{\partial}{\partial x_j}+\widehat{u_{j,y}}\frac{\partial}{\partial y_j}+\widehat{u_{j,z}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\left(\widehat{u_x}\frac{\partial}{\partial x_j}+\widehat{u_{j,y}}\frac{\partial}{\partial y_j}+\widehat{u_{j,z}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right)=$$

$$=\left(\left(\widehat{u_{j,x}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\left(\widehat{u_{j,y}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\left(\widehat{u_{j,z}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\cdot\partial y_j}\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{j,y}}+\widehat{u_{j,y}}\widehat{u_x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y_j\cdot\partial z_j}\left(\widehat{u_{j,y}}\widehat{u_{j,z}}+\widehat{u_{j,z}}\widehat{u_{j,y}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial z_j\cdot\partial x_j}\left(\widehat{u_{j,z}}\widehat{u_x}+\widehat{u_x}\widehat{u_{j,z}}\right)\right).$$

Перенесем это равенство в k-ю систему отсчета, используя формулы (6.15) и (6.16), а также формулы

$$\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}=\eta^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k^2}+V_0^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-2V_0\cdot\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial x_k}\right);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\eta^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{V_0^2}{\varsigma^4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t_k^2}-2\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial x_k}\right);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial y_k^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}.$$

Так как $\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}-\left(\widehat{u_{j,x}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial t_k^2}-\left(\widehat{u_{k,x}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ (поскольку $\left(\widehat{u_{j,x}}\right)^2=\left(\widehat{u_{k,x}}\right)^2=$ $=\varsigma^2$), имеет смысл ввести временное обозначение $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\widehat{u_x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\equiv\widehat{\mathrm{K}}$, после чего получим:

$$\left[-\widehat{\mathrm{K}}+\left(\left(\widehat{u_{j,y}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\left(\widehat{u_{j,z}}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)\right]+\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{j,y}}+\widehat{u_{j,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_j\cdot\partial y_j}+$$

$$+\left(\widehat{u_{j,y}}\widehat{u_{j,z}}+\widehat{u_{j,z}}\widehat{u_{j,y}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y_j\cdot\partial z_j}+\frac{\partial^2}{\partial z_j\cdot\partial x_j}\left(\widehat{u_{j,z}}\widehat{u_x}+\widehat{u_x}\widehat{u_{j,z}}\right)=$$

$$=\left[-\widehat{\mathrm{K}}+\eta^2\cdot\left(\left(\widehat{u_{k,y}}\right)^2+\frac{V_0^2}{\varsigma^4}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}+\right.$$

$$\left.+\eta^2\cdot\left(\left(\widehat{u_{k,z}}\right)^2+\frac{V_0^2}{\varsigma^4}\cdot\widehat{u_x}\widehat{u_{k,z}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,z}}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}\right]-$$

$$-\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}+\widehat{u_x}\left(\widehat{u_{k,y}}\right)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}-$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(\widehat{u_{k,z}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,z}}+\widehat{u_x}\left(\widehat{u_{k,z}}\right)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}+\\
&+\eta^2\cdot\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}+\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\cdot\partial y_k}-\\
&-\eta^2\cdot\left(V_0\cdot\widehat{u_{k,y}}+\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\cdot\partial y_k}-\\
&-\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}+\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial y_k}+\\
&+\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(V_0\widehat{u_{k,y}}+\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial y_k}+\\
&+\eta^2\cdot\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{k,z}}+\widehat{u_{k,z}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\cdot\partial z_k}-\\
&-\eta^2\cdot\left(V_0\cdot\widehat{u_{k,z}}+\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\cdot\partial z_k}-\\
&-\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}+\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial y_k}+\\
&+\eta^2\cdot\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(V_0\cdot\widehat{u_{k,x}}+\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\widehat{u_x}\widehat{u_{k,x}}\widehat{u_x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t_k\cdot\partial z_k}+\\
&+\eta^2\cdot\left(1-\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\widehat{u_x}\right)\Big\{\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_{k,z}}+\widehat{u_{k,z}}\widehat{u_{k,y}}+\\
&+\frac{V_0}{\varsigma^2}\cdot\left(\widehat{u_{k,z}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,y}}+\widehat{u_{k,y}}\widehat{u_x}\widehat{u_{k,z}}\right)\Big\}\frac{\partial^2}{\partial y_k\cdot\partial z_k}.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Теперь замечу, что, решив считать конструкцию

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\widehat{u_x}\frac{\partial}{\partial x}+\widehat{u_y}\frac{\partial}{\partial y}+\widehat{u_z}\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

лоренц-инвариантной, придется считать таковой и конструкцию

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\widehat{u_x}\frac{\partial}{\partial x}+\widehat{u_y}\frac{\partial}{\partial y}+\widehat{u_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\widehat{u_x}\frac{\partial}{\partial x}+\widehat{u_y}\frac{\partial}{\partial y}+\widehat{u_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}.$$

Инвариантность же ее означает, что вид левой и правой частей равенства (6.17) должен совпадать. Но такое возможно только, если

$$\left(\widehat{u_x}\widehat{u_y}+\widehat{u_y}\widehat{u_x}\right)=\left(\widehat{u_y}\widehat{u_z}+\widehat{u_z}\widehat{u_y}\right)=\left(\widehat{u_z}\widehat{u_x}+\widehat{u_x}\widehat{u_z}\right)=0. \tag{6.18,a}$$

Таким образом, признавая инвариантность вышеупомянутой конструкции, оказывается необходимым признать и соотношения (6.18,а). В конечном счете к этим соотношениям привели некоторые из математических свойств оператора $\widehat{\widehat{u}}$.

Далее, используя формулы (6.16,а,б) и (6.18,а), находим, что

$$\left(\widehat{u_{j,y}}\right)^2 = \left(\widehat{u_{k,y}}\right)^2; \quad \left(\widehat{u_{j,z}}\right)^2 = \left(\widehat{u_{k,z}}\right)^2. \tag{6.18,б,в}$$

Напомню также, что

$$\frac{\partial^2}{\partial y_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \tag{6.18,г,д}$$

Используя формулы (6.18), легко превратить громоздкое равенство (6.17) в очень простое —

$$-\widehat{\mathrm{K}} + \left(\widehat{u_{j,y}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \left(\widehat{u_{j,z}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} = -\widehat{\mathrm{K}} + \left(\widehat{u_{k,y}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \left(\widehat{u_{k,z}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_k^2},$$

лоренц-инвариантность которого уже очевидна.

Тот факт, что величины $\left(\widehat{u_y}\right)^2$ и $\left(\widehat{u_z}\right)^2$ оказались инвариантами преобразований, позволяет по аналогии с потребовавшимся с самого начала равенством $\left(\widehat{u_x}\right)^2 = \varsigma^2$ считать, что

$$\left(\widehat{u_x}\right)^2 = \left(\widehat{u_y}\right)^2 = \left(\widehat{u_z}\right)^2 = \varsigma^2.$$

Это вполне разумное предположение, поскольку мы знаем, что фигурирующая в формулах преобразования дифференцирующих операторов и введенная в формулы преобразования новых операторов величина ς^2 действительно является инвариантом лоренцевых преобразований.

В заключение вернусь к соотношению (6.14,а). В подстрочной сноске на с. 172 было отмечено, что это соотношение можно было бы сразу же обобщить путем добавления в его правую часть еще одного скалярного оператора, представимого, например, в виде $\widehat{E_0}$ или $\widehat{\vec{u}}\,\widehat{\vec{\mathrm{P}}}_0$. Вот так возникает уравнение состояния свободной, массивной, точечной частицы в виде

$$\widehat{E}\Psi = \left(\widehat{\vec{u}}\widehat{\vec{P}} + \widehat{E_0}\right)\Psi \text{ [15]}.$$

После всего уже проделанного должно быть, как мне кажется, очевидно, что не составит большой проблемы придумать формулы преобразования как для нового ***некоего*** векторного оператора $\widehat{\vec{\mathrm{P}}}_0$ с размерностью импульса, так и для нового, тоже некоего, но уже скалярного оператора $\widehat{E_0}\left(\equiv \widehat{\vec{u}}\,\widehat{\vec{\mathrm{P}}}_0\right)$ с размерностью энергии:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{P}_{0,j,x}} = \eta\cdot\left(1 - \frac{V_0}{c^2}\cdot\widehat{u_x}\right)\widehat{\mathrm{P}_{0,k,x}};\\
&\widehat{\mathrm{P}_{0,j,y}} = \widehat{\mathrm{P}_{0,k,y}};\\
&\widehat{\mathrm{P}_{0,j,z}} = \widehat{\mathrm{P}_{0,k,z}};
\end{aligned} \tag{6.20,а,б,в}$$

[15] Если обезразмерить операторы $\widehat{\vec{u}}$ и $\widehat{E_0}$, то это уравнение предстанет в том виде — $\widehat{E}\Psi = \varsigma\cdot\left(\widehat{\vec{\alpha}}\widehat{\vec{P}} + m_0\cdot\varsigma\cdot\widehat{\beta}\right)\Psi$, — в котором его постулировал в 1928 году Поль Дирак.

$$\widehat{E_{0,j}} = \eta \cdot \left(1 - \frac{V_0}{\varsigma^2} \cdot \widehat{u_x}\right) \widehat{E_{0,k}}. \qquad (6.20,\text{г})$$

Не досаждая читателю громоздкими (по необходимости) выводами, я просто отмечу возможность установить, в частности, следующие соотношения:

$$\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,j,x}}\right)^2 = \left(\widehat{\mathrm{P}_{0,k,x}}\right)^2; \qquad (6.21,\text{а})$$

$$\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,j,y}}\right)^2 = \left(\widehat{\mathrm{P}_{0,k,y}}\right)^2; \qquad (6.21,\text{б})$$

$$\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,j,z}}\right)^2 = \left(\widehat{\mathrm{P}_{0,k,z}}\right)^2; \qquad (6.21,\text{в})$$

$$\widehat{E_0}\widehat{u_x} + \widehat{u_x}\widehat{E_0} = \widehat{E_0}\widehat{u_y} + \widehat{u_y}\widehat{E_0} = \widehat{E_0}\widehat{u_z} + \widehat{u_z}\widehat{E_0} = 0; \qquad (6.21,\text{г})$$

$$\left(\widehat{E_{0,j}}\right)^2 = \left(\widehat{E_{0,k}}\right)^2. \qquad (6.21,\text{д})$$

Поскольку величина $\left(\widehat{E_0}\right)^2$ оказалась инвариантом преобразований, допустимо считать ее просто квадратом некоей энергии, если существует такая характеристика точечной частицы, которая тоже является инвариантом лоренцевых преобразований. И подобная характеристика существует. Это квадрат так называемой энергии покоя — величина, равная $m_0^2 \cdot \varsigma^4 \left(\equiv E_0^2\right)$.

С учетом сказанного и предлагается считать, что

$$\left(\widehat{E_0}\right)^2 = m_0^2\varsigma^4.$$

Далее, поскольку величины $\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,x}}\right)^2$, $\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,y}}\right)^2$, $\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,z}}\right)^2$ оказались инвариантами преобразований, допустимо считать каждую из них просто квадратом некоего импульса. С учетом равенства $\left(\widehat{E_0}\right)^2 = m_0^2 \cdot \varsigma^4$, естественно, ничего другого не остается, как считать, что:

$$\left(\widehat{\mathrm{P}_{0,x}}\right)^2 = \left(\widehat{\mathrm{P}_{0,y}}\right)^2 = \left(\widehat{\mathrm{P}_{0,z}}\right)^2 = \left(\frac{m_0 \cdot \varsigma}{\sqrt{3}}\right)^2; \qquad (6.23,\text{а})$$

$$\left(\widehat{u_{0,x}}\right)^2 = \left(\widehat{u_{0,y}}\right)^2 = \left(\widehat{u_{0,z}}\right)^2 = \frac{\varsigma^2}{3}. \qquad (6.23,\text{б})$$

Тогда $E_0 = \frac{P_0^2}{m_0}$.

§ 6.4. Уравнение Дирака и принцип соответствия

Итоговый результат предыдущего параграфа состоит в возможности признать уравнение состояния ***свободной точечной*** частицы в виде

$$\frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t_j} = -\left(\widehat{u_{j,x}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + \widehat{u_{j,y}}\frac{\partial \Psi}{\partial y_j} + \widehat{u_{j,x}}\frac{\partial \Psi}{\partial z_j} + \frac{i}{\hbar} \cdot \widehat{E_0}\Psi\right), \qquad (6.24)$$

выражающим закон Природы, если удастся доказать, что формулы преобразования операторов $\widehat{\vec{u}}$ (***некоей*** скорости) и $\widehat{E_0}$ (***некоей*** энергии) —

формулы *придуманные* — действительно заслуживают включения в лоренцеву группу[16]. Кроме того, подчеркну, что, постулировав эти формулы, мы, тем самым, автоматически приписали частице и *некую* скорость $\vec{u}$, и *некую* энергию E_0[17]. Но нельзя упускать из виду, что приписаны эти характеристики ***свободной*** и ***точечной*** частице, которую ***уже*** наделили импульсом $\vec{P}$. Получается, что частица ни с чем не взаимодействует, не состоит из частей, а, тем не менее, участвует ***не*** только в прямолинейном и равномерном движении со скоростью, равной $\frac{\vec{P}}{m(|\vec{P}|)}$[18].

Вот так возникают новые проблемы, от решения которых нельзя уклоняться.

Прежде всего — доказательство справедливости причисления формул преобразования операторов $\widehat{\vec{u}}$ и $\widehat{E_0}$ к лоренцевой группе.

Я начну с того, что приведу хорошо известные формулы преобразования проекций скорости $\vec{V}$ и энергии E точечной частицы для традиционного и уже рассматривавшегося случая перемещения двух инерциальных наблюдателей:

$$V_{j,x} = \frac{(V_{k,x} + V_0)}{1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}}; \tag{6.25,а}$$

$$V_{j,y} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{V_{k,y}}{1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}}; \tag{6.25,б}$$

$$V_{j,z} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{V_{k,z}}{1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}}; \tag{6.25,в}$$

$$E_j = \eta \cdot \left(1 + \frac{V_0 \cdot V_{k,x}}{\varsigma^2}\right) \cdot E_k. \tag{6.25,г}$$

Подчеркну, что, хотя эти формулы считаются справедливыми при условии $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leqslant \varsigma^2$, оно, тем не менее, не входит в явном виде ни в одну из формул. Подлинно жесткими являются лишь два условия: $V_0 < \varsigma$; $V_x \leqslant \varsigma$. Если их не нарушать, никаких мнимостей и несообразностей в только что приведенных формулах не появится. Приведу пример. Пусть $V_{k,x} = \varsigma$. Тогда: $V_{j,x} = \varsigma$; $V_{j,y} < V_{k,y}$; $V_{j,z} < V_{k,z}$. И все. Ничего страшного не произойдет, если считать, что не только $V_{k,x} = \varsigma$, но еще и $V_{k,y} = \varsigma$, и $V_{k,z} = \varsigma$. Формально ничто не мешает считать даже, что, например, $V_{k,y} \gg \varsigma$; $V_{k,z} \gg \varsigma$ (но не $V_{k,x} > \varsigma$, если иметь в виду движение наблюдателей вдоль X-оси).

[16] В противном случае какие угодно формулы преобразования можно будет считать принадлежащими лоренцевой группе.

[17] Согласно принципу соответствия, за оператором ***должна*** стоять физическая характеристика.

[18] На всякий случай напомню, что, согласно частной теории относительности, масса частицы зависит от абсолютного значения ее импульса.

Теперь, попутно заменив скорость частицы $\vec{V}\left(=\frac{\vec{p}}{m}\right)$ на скорость частицы $\vec{u}$ и энергию E на энергию E_0, я приведу заведомо принадлежащие лоренцевой группе формулы (6.25) к следующему виду:

$$u_{j,x}=\frac{(u_{k,x}+V_0)}{1+\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}}=\frac{u_{k,x}\cdot\left(1+\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{u_{k,x}^2}\right)\left(1-\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{u_{k,x}^2}\right)}{1-\left(\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)^2}=u_{k,x} \qquad (6.26,\text{а})$$

(это равенство допустимо, если считать величину $u_{k,x}^2$ (равно, как и величины $u_{k,y}^2$, $u_{k,z}^2$) инвариантом лоренцевых преобразований, равным ς^2);

$$u_{j,y}=\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\left(1-\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)}{1-\left(\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)^2}\cdot u_{k,y}=\eta\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)\cdot u_{k,y}; \qquad (6.26,\text{б})$$

$$u_{j,z}=\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\left(1-\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)}{1-\left(\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)^2}\cdot u_{k,z}=\eta\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)\cdot u_{k,z}; \qquad (6.26,\text{в})$$

$$E_{0,j}=\eta\cdot\left(1+\frac{V_0\cdot u_{k,x}}{\varsigma^2}\right)\cdot E_{0,k}. \qquad (6.26,\text{г})$$

Как видим, нет никаких оснований отказывать формулам (6.26) в принадлежности именно к лоренцевой группе. Теперь, согласно принципу соответствия, остается лишь поставить крышечки в этих формулах, и мы придем к уже известным формулам преобразования операторов:

$$\widehat{u_{j,x}}=\widehat{u_{k,x}};$$

$$\widehat{u_{j,y}}=\eta\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot\widehat{u_{k,x}}}{\varsigma^2}\right)\widehat{u_{k,y}};$$

$$\widehat{u_{j,z}}=\eta\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot\widehat{u_{k,x}}}{\varsigma^2}\right)\widehat{u_{k,z}};$$

$$\widehat{E_{0,j}}=\eta\cdot\left(1-\frac{V_0\cdot\widehat{u_{k,x}}}{\varsigma^2}\right)\widehat{E_{0,k}}.$$

Замечу, что, исходя из формулы (6.26,г), знак «минус» в скобке формулы для ***оператора*** энергии может показаться необоснованным. Однако мы имеем дело уже с операторами, а потому в случае антикоммутации операторов $\widehat{E_0}$ и $\widehat{u_x}$ знак в скобке зависит лишь от того, в каком порядке они располагаются. В случае же антикоммутации при любом знаке остается в силе равенство $\left(\widehat{E_{0,j}}\right)^2=\left(\widehat{E_{0,k}}\right)^2$, означающее, что величина $\left(\widehat{E_0}\right)^2$ является инвариантом лоренцевых преобразований (который мы условились считать равным $m_0^2\cdot\varsigma^4$).

А теперь, пожалуй, самое интересное.

Как уже отмечалось, приписать ***свободной*** частице помимо скорости $\vec{V}$ еще и скорость $\vec{u}$ означает считать частицу движущейся не только равномерно и прямолинейно, но и... Да ведь ничего другого невозможно и предположить кроме как того, что частица еще и вращается, то есть движется по поверхности сферы ***определенного*** радиуса. Подчеркну, что никакие постулаты частной теории относительности при этом не нарушаются. И традиционное условие $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \leqslant c^2$ никакого отношения не будет иметь к этому специфическому вращению по ***собственной*** орбите, если считать, что в таком вращении вынуждена участвовать даже свободная, ***ни с чем не взаимодействующая*** частица. Иными словами, если считать, что ***собственное*** вращение обусловлено притяжением частицы к некоему силовому центру, возникшему вместе с частицей и только с ней связанному и существующему. Конечно, все это выглядит очень странно, поскольку частица традиционно считается свободной только, если она пребывает в пустом пространстве, в котором, казалось бы, не может быть никаких силовых полей, по определению.

Тем не менее, невозможность сиюминутного объяснения проявления феномена не может служить основанием отвергнуть само его проявление[19]. Поэтому я предлагаю признать, что ***точечная частица, к какой бы разновидности лептонов или кварков она ни принадлежала (каким бы зарядом и массой покоя ни обладала), не может существовать иначе, как вращаясь — двигаясь по собственной орбите-сфере, центр которой в свою очередь может как покоиться, так и двигаться со скоростью $\vec{V}\left(=\frac{\vec{P}}{m}\right)$ относительно инерциальной системы отсчета.***

В этом случае, очевидно, что помимо кинетической энергии, связанной с импульсом $\vec{P}$, частица в любой ситуации обладает еще и кинетической энергией, связанной с вращательным — собственно-орбитальным — импульсом $\vec{\mathrm{P}}_0$, равным $m(|\vec{P}|)\cdot\vec{u}_0$ ***относительно центра собственно-орбитальной сферы***[20]. Эта ***часть полной*** кинетической энергии точечной частицы и может быть обозначена символом E_0. Разумеется, ***именно вращением точечной частицы вокруг осей, проходящих через центр собственно-орбитальной сферы, и объясняется спин — собственный механический момент точечной частицы.***

В рамках статистического способа описания кажется вполне разумным считать частицу равномерно распределенной долями («размазанной») по поверхности собственно-орбитальной сферы. В таком случае центр этой сферы играет роль центра масс всех долей частицы, и ему допустимо переадресовать (приписать) все характеристики самой точеч-

---

[19] Я привел возможное объяснение в двух своих монографиях: «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака» (М.: УРСС, 2000, 2002) и «Логическая структура частной теории относительности» (М.: УРСС, 2001).

[20] Если этот центр движется, собственно-орбитальный импульс частицы равен $\vec{\mathrm{P}}_0(|\vec{P}|) = m(|\vec{P}|)\cdot\vec{u}_0$, а если покоится, то $\vec{\mathrm{P}}_0 = m_0\cdot\vec{u}_0$.

ной частицы (заряд, массу покоя и (или) движения, спин, $\vec{P}$-импульс и т. п.) кроме результирующей скорости $\vec{u}$ (относительно наблюдателя, не связанного с центром собственно-орбитальной сферы) и собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$ (относительно наблюдателя, связанного с центром собственно-орбитальной сферы). В дальнейшем этот центр будет именоваться центром инерции частицы.

Давайте теперь выясним, действительно ли из уравнения (6.24) следует необходимость считать вращающейся (то есть — испытывающей ускорение) *точечную и свободную* частицу, которой приписывается скорость, оператор которой есть $\widehat{\vec{u}}$.

Начну с замечания, что подобно величинам, определяемым выражениями (3.24), так же определяется и оператор ускорения:

$$\widehat{\vec{\mathrm{a}}} = \widehat{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{u}}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{\vec{u}}\right).$$

Гамильтониан $\widehat{H}$ свободной, точечной и массивной частицы равен: $\widehat{H} = \widehat{\vec{u}}\widehat{\vec{P}} + \widehat{E_0}$, и, поскольку свойства операторов $\widehat{\vec{u}}$, $\widehat{\vec{P}}$, $\widehat{E_0}$ известны, нетрудно установить, что, например

$$\widehat{\mathrm{a}_y} = -\frac{i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{u_y}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{u_y}\right) = -\frac{2i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{u_y}\widehat{H} - \varsigma^2\cdot\widehat{P_y}\right) \neq 0.$$

Следовательно

$$\widehat{\vec{\mathrm{a}}} = -\frac{2i}{\hbar}\cdot\left(\widehat{\vec{u}}\widehat{H} - \varsigma^2\widehat{\vec{P}}\right) \neq 0.$$

Это выражение целесообразно представить в виде

$$\widehat{\vec{\mathrm{a}}} = \begin{cases} -i\cdot\widehat{\vec{u}}\left(\dfrac{2\widehat{H}}{\hbar}\right), & \text{если} \quad \vec{P} = 0; \qquad (6.28,\text{а}) \\ -i\cdot\left(\widehat{\vec{u}} - \dfrac{\widehat{\vec{P}}}{\widehat{H}/\varsigma^2}\right)\cdot\left(\dfrac{2\widehat{H}}{\hbar}\right), & \text{если} \quad \vec{P} \neq 0. \qquad (6.28,\text{б}) \end{cases}$$

Итак, очевидно, что ***свободная точечная*** частица испытывает ускорение, причем — независимо от того, какой массой покоя она обладает.

Теперь следует вспомнить два соотношения:

а) связывающее собственно-орбитальную скорость частицы $\vec{u}_0$, скорость ее центра инерции $\frac{\vec{P}}{m(P)}$, и результирующую скорость $\vec{u}$:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0(t) + \frac{\vec{P}(t)}{m(P)}; \qquad (6.29)$$

б) связывающее центростремительное ускорение частицы, вращающейся по собственной орбите, с частотой $\vec{\omega}$ и собственно-орбитальной скоростью $\vec{u}_0$:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \frac{d\vec{u}_0}{dt} = \pm(\vec{\omega} \times \vec{u}_0). \qquad (6.30,а)$$

(Знак нужно выбирать, сообразуясь с заранее принятыми направлениями векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{u}_0$, — так, чтобы центростремительное ускорение не превратилось в центробежное.)

Поскольку векторы $\vec{a}_{\text{цс}}$, $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}$ взаимно перпендикулярны (рис. 6.2), можно использовать мнимую единицу (i) для преобразования формулы (6.30,а) к традиционному виду, очень удобному для выполнения расчетов:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \frac{d\vec{u}_0}{dt} = -\vec{u}_0 \times \vec{\omega} = -i \cdot \vec{u}_0 \cdot \omega. \qquad (6.30,б)$$

Используя формулы (6.29) и (6.30,б), можно написать выражение, определяющее собственно-орбитальное центростремительное ускорение,

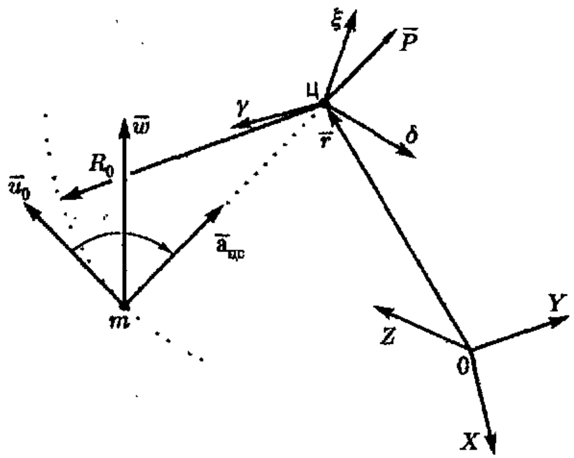


Рис. 6.2. Направления векторов.

Умножение вектора $\vec{u}_0$ на $-i$ эквивалентно его повороту на 90° по часовой стрелке в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$.

В любой момент времени частица массы m с равной вероятностью оказывается в любой точке собственно-орбитальной сферы радиуса R_0. В любой точке сферы векторы $\vec{a}_{\text{цс}}$, $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}$ образуют трехгранный угол. Относительно системы координат $\{Z, X, Y\}$ центр сферы обладает импульсом $\vec{P}$, а непосредственно частица — скоростью $\vec{u}$. В системе координат $\{\xi, \gamma, \delta\}$, связанной с центром сферы, частица выглядит только вращающейся со скоростью $\vec{u}_0$

испытываемое свободной точечной частицей:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \begin{cases} -i \cdot \vec{u} \cdot \omega & \text{при } \vec{P} = 0, \text{ в этом случае } \vec{u}_0 = \vec{u}; \\ -i \cdot \left(\vec{u} - \dfrac{\vec{P}}{m(P)} \right) \cdot \omega & \text{при } \vec{P} \neq 0. \end{cases}$$

Теперь, вспоминая, что, согласно принципу соответствия, идентичное выражение должно иметь место и для операторов, следует написать:

$$\widehat{\vec{a}_{\text{цс}}} = \begin{cases} -i \cdot \widehat{\vec{u}} \cdot \widehat{\omega} & \text{при } \widehat{\vec{P}} = 0, \text{ в этом случае } \widehat{\vec{u}}_0 = \widehat{\vec{u}}; \quad (6.31,\text{а}) \\ -i \cdot \left(\widehat{\vec{u}} - \dfrac{\widehat{\vec{P}}}{\widehat{m}} \right) \cdot \widehat{\omega} & \text{при } \widehat{\vec{P}} \neq 0. \quad (6.31,\text{б}) \end{cases}$$

Сравнивая соотношения (6.28) и (6.31), нетрудно решиться отождествить операторы $\widehat{m(P)}$ и $\left(\frac{\widehat{H}}{c^2}\right)$, операторы $\widehat{\omega}$ и $\left(\frac{2\widehat{H}}{\hbar}\right)$.

Теперь легко будет найти оператор, например, радиус-вектора $\vec{R}_0$ точки собственно-орбитальной сферы. С этой целью представим себя наблюдателем, начало координат которого совпадает с центром собственно-орбитальной сферы частицы. ***В этом случае*** $\vec{u}_0 = \vec{u}$. Сама частица будет считаться массивной.

Так как $\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_0) = -\vec{R}_0 \cdot \omega^2$ (векторы $\vec{a}_{\text{цс}}$ и $\vec{R}_0$ антипараллельны), то $\widehat{\vec{a}_{\text{цс}}} = -\widehat{\vec{R}_0}\,(\widehat{\omega})^2$. Сравнив это выражение с выражением (6.31,а), находим, что $i \cdot \widehat{\vec{u}}_0 \cdot \widehat{\omega} = i \cdot \widehat{\vec{u}} \cdot \widehat{\omega} = \widehat{\vec{R}_0}\,(\widehat{\omega})^2$. Присоединяя к левой и правой частям этого равенства оператор $(\widehat{\omega})^{-2}$, приходим к равенству $\widehat{\vec{R}_0}\,(\widehat{\omega})^2\,(\widehat{\omega})^{-2} = i \cdot \widehat{\vec{u}} \cdot \widehat{\omega}\,(\widehat{\omega})^{-2}$, откуда следует выражение которое и определяет оператор $\widehat{\vec{R}_0}\left(= \vec{e}_x \cdot \widehat{X_0} + \vec{e}_y \cdot \widehat{Y}_0 + \vec{e}_z \cdot \widehat{Z}_0\right)$ в системе отсчета, связанной с центром инерции частицы.

$$\widehat{\vec{R}_0} = i \cdot \widehat{\vec{u}}\,(\widehat{\omega})^{-1} = i \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot \widehat{\vec{u}}\left(\widehat{H}\right)^{-1}. \tag{6.32}$$

Теперь нетрудно написать выражение, определяющее проекцию собственно-орбитального момента — спина — свободной точечной частицы.

Выберем, например, в качестве точно определенных (и по модулю, и по знаку) величин Y-проекцию радиус-вектора и Z-проекцию собственно-орбитального импульса. Тогда X-проекция спина есть $S_x = Y_0 \cdot \mathrm{P}_{0,z}$.

В соответствии с выражением (6.32):

$$\widehat{Y}_0 = i \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot \widehat{u}_y\left(\widehat{H}\right)^{-1}. \tag{6.33,а}$$

---

[20] Напомню, что для наблюдателя, связанного с центром инерции частицы, скорости $\vec{u}_0$ и $\vec{u}$ совпадают.

После отождествления массы частицы $m(P)$ с величиной $\frac{H}{\varsigma^2}$ Z-проекция оператора собственно-орбитального импульса равна:

$$\widehat{\mathrm{P}_{0,z}} = \widehat{m} \cdot \widehat{u_{0,z}} = \widehat{m} \cdot \widehat{u_z} = \frac{1}{\varsigma^2} \cdot \widehat{H} \cdot \widehat{u_z}\ ^{21)}. \qquad (6.33,б)$$

В результате оператор X-проекции спина $(\widehat{S_x})$ равен:

$$\widehat{S_x} = \widehat{Y}_0 \cdot \widehat{\mathrm{P}_{0,z}} = \left(i \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot \widehat{u_y}\left(\widehat{H}\right)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\varsigma^2} \cdot \widehat{H} \cdot \widehat{u_z}\right) = i \cdot \frac{\hbar}{2\varsigma^2} \cdot \widehat{u_y}\widehat{u_z}. \qquad (6.34)$$

Оператор ***вектора*** спина есть

$$\widehat{\vec{S}} = i \cdot \frac{\hbar}{2\varsigma^2} \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \widehat{u_y}\widehat{u_z} + \vec{e}_y \cdot \widehat{u_z}\widehat{u_x} + \vec{e}_z \cdot \widehat{u_x}\widehat{u_y}\right).$$

Следует принять во внимание, что, хотя каждый в отдельности из операторов $\widehat{u_x}$, $\widehat{u_y}$, $\widehat{u_z}$ является величиной мгновенной, каждое из произведений $\widehat{u_x}\widehat{u_y}$, $\widehat{u_y}\widehat{u_z}$, $\widehat{u_z}\widehat{u_x}$ ***есть один из инвариантов преобразований лоренцевой группы (естественно, не зависящий от времени).***

Поскольку

$$\left(\widehat{S_x}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{4\varsigma^4} \cdot \widehat{u_y}\widehat{u_z}\widehat{u_y}\widehat{u_z} = -\frac{\hbar^2}{4\varsigma^4} \cdot \left(-\varsigma^4\right) = \frac{\hbar^2}{4},$$

абсолютное значение X-проекции спина (как и любой другой) равно $\frac{\hbar}{2}$.

Таким образом, оператор абсолютного значения *проекции* спина совпадает с абсолютным значением самой проекции $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$. Это же относится и к оператору абсолютного значения спина $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\right)$ [22]. Совершенно очевидно, что каждая из величин представляет собой такой инвариант, который ***не отличим от характеристики-константы***, выражающей, напомню, себетождественность частицы.

До сих пор речь шла о частице, обладающей отличной от нуля массой покоя m_0. Теперь давайте обратимся к безмассовой точечной частице $(m_0 = 0)$.

Согласно традиционной точке зрения, не существует системы отсчета, относительно которой импульс $\vec{P}$ безмассовой частицы был бы равен нулю. Подобное означало бы несуществование и самой частицы. Однако следует учесть, что и безмассовая частица участвует не только в прямолинейном и равномерном движении, обладая импульсом $\vec{P}$ и двигаясь со скоростью, точно равной ς относительно любой инерциальной системы отсчета. Безмассовая частица, как и массивная, участвует в собственно-орбитальном вращении, а, раз так, то и ее импульс $\vec{P}$ также можно спокойно переадресовать ее центру инерции — центру собственно-орбитальной сферы. В таком случае наблюдателю, находящемуся в этом

[22] $|\widehat{\vec{S}}| = \sqrt{(\widehat{S_x})^2 + (\widehat{S_y})^2 + (\widehat{S_z})^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hbar.$

центре, частица представляется только вращающейся по собственной орбите-сфере, и этот наблюдатель должен считать, что $\vec{P} = 0$. Но тогда и масса движения частицы, казалось бы, должна быть равна нулю. Однако нужно принять во внимание, что импульс $\vec{P}$ лишь переадресован центру инерции. Поэтому упомянутый наблюдатель не может себе позволить считать равной нулю массу частицы, которая на самом деле движется[23]. Масса *движения* безмассовой частицы и для *этого* наблюдателя, точно так же, как для любого инерциального наблюдателя, должна считаться равной $\frac{|\vec{P}|}{ç}$. Напомню также, что для наблюдателя, находящегося в центре инерции частицы, собственно-орбитальная скорость $\vec{u}_0$ совпадает с результирующей скоростью $\vec{u}$.

После всего сказанного очевидно, что абсолютно все, относящееся к собственно-орбитальному ускорению и радиус-вектору точки собственной орбиты массивной частицы, столь же справедливо применительно к частице безмассовой. Следовательно, и спином безмассовая частица обладает точно таким же, каким обладает массивная частица.

Стоит обратить внимание на два обстоятельства.

1. *Для своего существования точечной частице требуется объем пространства, вмещающий собственно-орбитальную сферу. Всякие попытки ограничить этот объем с помощью потенциально-силовых полей приведет к уничтожению частицы.*
2. *Значение радиуса собственной орбиты (R_0) свободной точечной частицы зависит от абсолютного значения импульса ее центра инерции (P), а собственная частота ω от ее энергии E*[24]:

$$R_0 = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m(P)\cdot ç} = \frac{\sqrt{3}\,\hbar}{2m_0 \cdot ç \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot ç}\right)^2}},$$

$$\omega = \frac{2E}{\hbar} = \frac{2m(P)\cdot ç^2}{\hbar} = \frac{2m_0 \cdot ç^2}{\hbar} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot ç}\right)^2}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{P\to\infty} R_0 = 0$, $\lim\limits_{P\to\infty} \omega = \infty$.

Таким образом, частица, обладающая огромным импульсом $\vec{P}$, вращается по орбите совершенно ничтожного радиуса с колоссальной частотой. В подобной ситуации действительно складывается впечатление, что точка вращается вокруг оси, проходящей через саму точку. При всем том и абсолютное значение спина остается неизменным (равным $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$), и абсолютное значение собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$ (равным $ç$).

[23] В противном случае для этого наблюдателя частица просто не существует.

[24] Напомню, что $E = m \cdot ç^2 = m_0 \cdot ç^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot ç}\right)^2}$.

В связи со столь радикальным предположением о том, в каком именно состоянии только и может находиться свободная точечная частица, читателю стоит внимательно присмотреться к знаменитому соотношению

$$E = \sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + \varsigma^2 \cdot (m_0 \cdot \varsigma)^2}, \tag{6.35,а}$$

которое может быть представлено также и в виде

$$E = \frac{\vec{P}^2 + \vec{\mathrm{P}}_0^2}{m(|\vec{P}|)}, \tag{6.35,б}$$

где $\vec{\mathrm{P}}_0^2 = m_0^2 \cdot \varsigma^2 \left(= \mathrm{P}_{0,x}^2 + \mathrm{P}_{0,y}^2 + \mathrm{P}_{0,z}^2 \right)$.

Хотя с 1905 года величину E принято называть полной энергией частицы, а величину $m_0 \cdot \varsigma^2$ энергией покоя, эпитет ***«полная»***, присвоенный величине E, по моему мнению, совершенно не приемлем, если речь идет о ***точечной и свободной*** частице.

Дело в том, что термин ***«полная энергия»*** применительно к ***точечной частице*** лишен какой бы то ни было определенности, принимая во внимание, что физической содержательностью обладают только понятия потенциальной и кинетической энергий.

Если точечная частица движется в силовом поле, то ***«полной»*** энергией нужно и можно называть ***сумму потенциальной*** энергии взаимодействия частицы с полем и ее ***кинетической*** энергии.

Можно придать смысл и такому понятию, как полная кинетическая энергия точечной частицы, если последняя участвует одновременно в движениях разного характера.

Можно придать смысл понятию полной потенциальной энергии точечной частицы, если последняя взаимодействует сразу с несколькими объектами (например, с силовыми полями различной природы)[25].

Совершенно ясно, что ***и точечная, и свободная*** частица не может обладать потенциальной энергией: у нее нет частей, которые могли бы взаимодействовать друг с другом; она пребывает в пустом пространстве, в котором ей не с чем взаимодействовать. В таком случае величина E, фигурирующая в выражениях (6.35), если и может быть названа полной, то лишь ***полной кинетической*** энергией.

Что касается величины $m_0 \cdot \varsigma^2$, то в 1995 году я привел убедительные, как мне кажется, доводы в пользу того, чтобы считать пресловутую энергию покоя ($m_0 \cdot \varsigma^2$) кинетической энергией вращения частицы по ее собственной орбите-сфере[26]. Естественно величина ς, присутствующая

[25] Что касается объекта ненулевых размеров, то такой объект может обладать «внутренней» потенциальной энергией взаимодействия частей друг с другом, даже если эти части не участвуют в движении и не взаимодействуют с внешним силовым полем.

[26] Эти доводы были впервые опубликованы в 1996 году в первом издании этой книги. Что касается «энергии покоя», то это, конечно, красивый термин, но прежде всего нужно точное определение. А ведь когда в 1905 году упомянутый термин был введен, уже суще-

в формулах (6.35) и традиционно считающаяся скоростью света, на самом деле никакого отношения к свету иметь не может[27].

После всего сказанного традиционное соотношение, например, в виде (6.35,а) должно быть заменено другим, в котором в качестве мировой константы, обозначенной символом $ç$, будет присутствовать не скорость света, а скорость непосредственно частицы (именно частицы, а не ее центра инерции).

На первый взгляд, казалось бы, можно предложить такую вот модификацию соотношения Эйнштейна:

$$E = \sqrt{\left(\vec{u}\cdot\vec{P}\right)^2 + m_0^2\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u}_0)^2}, \tag{6.36}$$

признав при этом, что, согласно постулированным формулам (6.3) и (6.23,б):

$$u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = ç^2; \tag{6.37,а}$$

$$u_{0,x}^2 = u_{0,y}^2 = u_{0,z}^2 = \frac{ç^2}{3}; \tag{6.37,б}$$

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{u}_0\right)^2 = ç^2\ [28]. \tag{6.37,в}$$

Однако равенства (6.37,а,б) не совместимы с равенством (6.37,в), а равенство (6.37, а) не совместимо с равенством

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{P}\right)^2 = u_x^2\cdot P_x^2 + u_y^2\cdot P_y^2 + u_z^2\cdot P_z^2 = ç^2\cdot(|\vec{P}|)^2. \tag{6.37,г}$$

Поскольку решение возникшей проблемы не имеет прямого отношения к содержанию настоящей книги и, главное, поскольку для описания состояния точечной свободной частицы мне потребовалось в свое время 28 страниц, сейчас я лишь приведу соотношение Эйнштейна, модифицированное, как мне кажется, рациональным образом:

$$E = \sqrt{\left\langle\left(\vec{u}\cdot\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} + m_0^2\cdot\left\langle\left(\vec{u}\cdot\langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t}}\ [29]. \tag{6.38}$$

ствовало четкое и недвусмысленное представление о двух и только двух видах энергии — кинетической энергии движущегося объекта (как целого) и потенциальной энергии взаимодействия либо объекта (как целого) с другим объектом, либо частей объекта друг с другом.

[27] С какой стати в выражении для энергии точечной частицы, пребывающей к тому же в пустом пространстве, должна присутствовать скорость фронта электромагнитной волны?

[28] В этих формулах символом $ç$ обозначена константа (такой же инвариант лоренцевых преобразований, как и скорость света), численное значение которой действительно совпадает с численным значением скорости света. Однако величины $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$ никакого отношения к свету не имеют.

[29] Детальное описание состояния свободной точечной частицы я привел в небольшой монографии «Логическая структура частной теории относительности», которую мне удалось опубликовать в 2001 году. Там же содержится и обоснование соотношения (6.38). В монографии «Еще раз о спине точечной частицы, формуле Эйнштейна и релятивистском уравнении Дирака» показано, что считающаяся свободной точечная частица пребывает на самом деле в реальном — «пустом» — пространстве, и потому *вынуждена* с ним взаимодействовать. А потому она и не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите — сфере конечного радиуса. О свойствах «пустого» пространства см. § 1.5

(Здесь $\widetilde{\Delta t}$ и Δt_0 — промежутки времени усреднения соответствующих величин, причем $\Delta t \gg \Delta t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi \cdot \hbar}{m \cdot c^2}$. Для самой легкой из массивных частиц (электрона или позитрона), пребывающей в состоянии покоя своего центра инерции, достаточно принять значение Δt_0 равным 10^{-20} с. Если центр инерции движется, то это значение еще меньше, убывая до нуля при неограниченном возрастании импульса $\vec{P}$.)

Именно в результате проведения операций усреднения и возникают удивительные соотношения, связывающие между собой проекции скорости $\vec{u}$, связывающие между собой проекции скорости $\vec{u}_0$, связывающие проекции скорости $\vec{u}$ с проекциями скорости $\vec{u}_0$, а также проекции каждой из скоростей с проекциями импульса $\vec{P}$. Именно этим соотношениям оказываются идентичны соотношения между всеми проекциями операторов $\widehat{\vec{P}}, \widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}_0}$, а также каждой из них с оператором $\widehat{E_0}$(что неудивительно, принимая во внимание принцип соответствия).

Учитывая все сказанное, можно, конечно, заменить соотношение (6.38) соотношением (6.36), но тогда не нужно удивляться несовместимостям равенств (6.37). С ними придется примириться.

§ 6.5. О явном виде операторов $\widehat{\vec{u}}$ и $\widehat{E_0}$

В конце § 3.2 было предложено считать, что, если физическая величина B образует *континуум* значений, можно образовать два оператора. Один их них — это оператор дифференцирования $\left(\pm i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial B}\right)$, другой, обозначаемый символом $\widehat{B}$, тождественно совпадет с самой величиной B ($\widehat{B} \equiv B$).

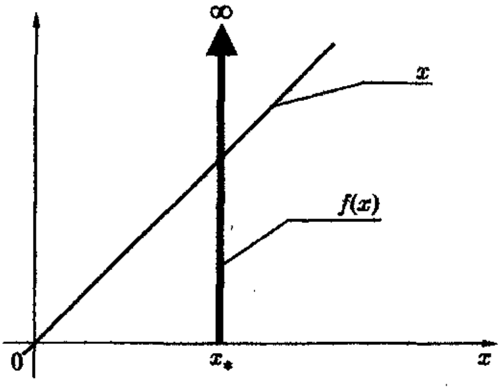


Рис. 6.3. Одна из собственных функций оператора $\widehat{x}$ (δ-функция Дирака).

Если иметь в виду радиус-вектор точки пространства, то два оператора — это, например: $-i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ (являющийся оператором X-проекции импульса центра инерции частицы) и оператор X-координаты точки пространства $\widehat{x}$ ($\equiv x$) — точки, в которой присутствует центр инерции. На всякий случай замечу, что существует такая функция

настоящей книги. Очевидно, что такое пространство частица не может не поляризовать (либо гравитационным зарядом, если она безмассовая, либо еще и своим электрическим зарядом, если частица массивная).

этой координаты ($f(x)$), что

$$\widehat{x}\, f(x) = x \cdot f(x) = x_* \cdot f(x).$$

На рис. 6.3 представлена подобная функция, называемая собственной функцией оператора $\widehat{x}$. Значение x_* принято называть собственным значением оператора.

Изображенная на рисунке функция такова, что ее значение равно нулю при всех $x \neq x_*$, причем можно потребовать, чтобы помимо этого условия —

$$f(x) \Rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \neq x_* \tag{6.39,а}$$

выполнялось еще и условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx = 1. \tag{6.39,б}$$

Функция, удовлетворяющая условиям (6.39), адекватно описывает состояние частицы, вечно локализованной в одной точке X-оси.

Разумеется, функция, отличная от нуля только при $x = x_*$, не единственная собственная функция оператора $\widehat{x}$ (в роли которого выступает X-координата). Все точки X-оси являются его собственными значениями, так что собственных функций бесконечно много. Стоит заметить, что с условиями (6.39,а,б) совместимо еще и равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_j(x) \cdot f_k(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k \tag{6.39,в}$$

(здесь нижние индексы символизируют только то, что соответствующая функция отлична от нуля при одном определенном значении аргумента: x_j или x_k) [30].

Очевидно, что сконструировать функции, удовлетворяющие условиям (6.39), не проблема. А вот, чтобы выразить подобную функцию через ***привычные*** (нормальные) функции, требуется математическая подготовка.

Все сказанное имело целью указать на то, что ***любой*** физической величине B, можно поставить в соответствие оператор $\widehat{B}$, тождественный ей самой; даже если она принимает всего одно значение или ряд дискретных значений (из-за чего невозможно образовать оператор $\frac{\partial}{\partial B}$).

А теперь давайте обратимся к скоростям $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$.

Согласно предложенному в § 6.4 представлению о том, в каком состоянии только и может находиться точечная свободная частица, абсолютное значение (модуль) любой проекции каждой из скоростей $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$

---

[30] Существование бесконечного множества функций, удовлетворяющих условиям (6.39), и позволяет построить состояние свободы из состояний абсолютной связанности (см. § 3.3).

необходимо считать точно одним и тем же в любой момент времени. Однако есть и нюанс: лишь одна из проекций, как скорости $\vec{u}$, так и $\vec{u}_0$, определена точно и по модулю, и по знаку[31].

Очевидно, что образовать операторы вида $\frac{\partial}{\partial u_{0,x}}$; $\frac{\partial}{\partial u_x}$ (и т. п.) невозможно. Кроме того, сами скорости $\vec{u}$ и $\vec{u}_0$ не определяются выражениями типа $\frac{\partial \ldots}{\partial t}$ (и т. п.), причем мгновенная скорость $\vec{u}$ не определяется и выражением $\vec{u} = \frac{\vec{P}}{m}$ [32]. Все это означает, что в соответствие проекциям скоростей нельзя поставить дифференцирующие операторы.

Используем сделанные выводы для анализа уравнения состояния сначала безмассовой частицы:

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{\vec{u}}\widehat{\vec{P}}\Psi. \tag{6.40}$$

Поскольку центр инерции точечной безмассовой частицы движется с одной и той же скоростью (по модулю точно равной ς) относительно любого инерциального наблюдателя (не находящегося в центре инерции), имеет смысл совместить одну из осей координат (например, X-ось) с направлением вектора $\vec{P}$. В этом случае нужно положить: $u_x = \pm\varsigma$. Собственные функции оператора $\widehat{u_x}$ таковы, что:

$$\widehat{u_x} f_1(u_x) = \varsigma \cdot f_1(u_x);$$
$$\widehat{u_x} f_2(u_x) = -\varsigma \cdot f_2(u_x).$$

Индексы «1» и «2» символизируют не различие вида зависимости f от u_x, а лишь, что соответствующая функция отлична от нуля либо при $u_x = \varsigma$, либо при $u_x = -\varsigma$.

Вполне допустимо прибегнуть к традиционному приему:

объявить f-функцию двухкомпонентной, придав ей вид $f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$;

объявить оператор $\widehat{u_x}$ матрицей, придав ей вид $\widehat{u_x} \equiv \begin{pmatrix} \varsigma & 0 \\ 0 & -\varsigma \end{pmatrix} = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (*при этом* $(\widehat{u_x})^2 = \varsigma^2$).

---

[31] Достаточно строгое, как мне кажется, обоснование обоих утверждений приведено в монографии «Логическая структура частной теории относительности» (М.: УРСС, 2001), на которую я уже ссылался (см. с. 187, сноска 29)). Сейчас я предлагаю читателю компромисс — принять оба утверждения хотя бы в качестве гипотез, а потом следить за дальнейшими рассуждениями.

[32] Обращаю внимание читателя на то, что собственно-орбитальная скорость точечной частицы $\vec{u}_0$ является неопределяемым понятием. А вот собственно-орбитальный импульс — определяемое понятие. В системе координат, связанной с центром инерции частицы (центром собственно-орбитальной сферы) он определяется выражением $\vec{P}_0 = m(|\vec{P}|) \cdot \vec{u}_0$. При этом мгновенные значения скоростей $\vec{u}_0$ и $\vec{u}$ совпадают.

Тогда $\widehat{u_x} f = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix}$, и уравнение состояния (6.40) предстает в виде

$$\frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.41}$$

Это — не более, чем лаконичная запись, означающая, что имеют место два уравнения:

$$\frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial f_1}{\partial x}; \quad \frac{1}{\varsigma} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{6.42,а,б}$$

Решения таковы:

$$f_1 = \mathbb{F} \cdot \exp\left\{ -i \cdot \frac{P_x \cdot x}{\hbar} \pm i \cdot \frac{E \cdot t}{\hbar} \right\};$$

$$f_2 = \mathbb{F} \cdot \exp\left\{ +i \cdot \frac{P_x \cdot x}{\hbar} \pm i \cdot \frac{E \cdot t}{\hbar} \right\},$$

где $\mathbb{F}$ представляет собой множитель, обеспечивающий соблюдение условия нормировки (6.39,б).

Подставив решения в уравнение (6.41), найдем, что:

$$E = \pm \varsigma \cdot P_x.$$

Теперь возникает проблема.

Коль скоро речь идет о частице свободной, понятно, что означает равенство $E = \varsigma \cdot P_x$. Но что может означать равенство $E = -\varsigma \cdot P_x$?

Ответ на этот вопрос будет дан позднее, а сейчас предлагается перейти к уравнению состояния ***массивной*** частицы:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\widehat{u_x} \Psi\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\widehat{u_y} \Psi\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{u_z} \Psi\right) \right\} - \frac{i}{\hbar} \cdot \widehat{E_0} \Psi. \tag{6.43}$$

В этом случае придется представить операторы матрицами 4×4, а не 2×2, чтобы помимо условий $\widehat{u_x}\widehat{u_y} + \widehat{u_y}\widehat{u_x} = \widehat{u_y}\widehat{u_z} + \widehat{u_z}\widehat{u_y} = \widehat{u_z}\widehat{u_x} + \widehat{u_x}\widehat{u_z} = 0$, $\left(\widehat{u_x}\right)^2 = \left(\widehat{u_y}\right)^2 = \left(\widehat{u_z}\right)^2 = \varsigma^2$ [33], для соблюдения которых достаточно 2×2-матриц, удовлетворить еще и условиям [34]

$$\widehat{u_x}\widehat{E_0} + \widehat{E_0}\widehat{u_x} = \widehat{u_y}\widehat{E_0} + \widehat{E_0}\widehat{u_y} = \widehat{u_z}\widehat{E_0} + \widehat{E_0}\widehat{u_z} = 0.$$

Естественно, что $\left(\widehat{E_0}\right)^2 = m_0^2 \cdot \varsigma^4$.

[33] См. равенства (6.17) и (6.19).

[34] См. равенства (6.21,г) и (6.22).

Таким образом, принимается, что:

$$\widehat{u_x} = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \widehat{u_y} = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\widehat{u_z} = \varsigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{E_0} = m_0 \cdot \varsigma^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда и Ψ-функцию придется представить в виде $\Psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$.

В итоге имеют место четыре уравнения, после решения которых оказывается, что $E = \pm\varsigma \cdot \sqrt{\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + (m_0 \cdot \varsigma)^2}$. Ясно, что опять возникла проблема отрицательного знака энергии свободной точечной частицы.

§ 6.6. Частицы и античастицы

6.6.1. Заряд точечной частицы

Решение проблемы знака целесообразно начать с напоминания, что инвариантом лоренцевых преобразований является разность именно квадратов величин: $E^2 - \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 \left(= E_0^2\right)$. Отсюда следует, что выражение.

$$E^2 = \varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + E_0^2 \tag{6.44}$$

играет роль ***математического определения***, но... — величины E^2, а не E. Математически же корректное определение величины E таково:

$$E = \begin{cases} +\sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + E_0^2}; & (6.45,\text{а}) \\ -\sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + E_0^2}. & (6.45,\text{б}) \end{cases}$$

Возникает резонный вопрос: нужно ли настаивать на физически содержательной интерпретации только определения (6.45,а)? Представляется, что единственное объяснение подобной настойчивости может состоять в следующем.

Величина E, фигурирующая в выражении (6.44), — это полная ***кинетическая*** энергия частицы, переадресованная ее центру инерции, и самостоятельным понятием она не является. В рамках дорелятивистской механики кинетическая энергия считалась величиной положительной не только из-за того, что она была квадратичной функцией импульса

$\left(E = \frac{P^2}{2m_0}\right)$. Обоснованно считалось, что инерциальная масса частицы (m_0) могла быть тоже только положительной величиной. В самом деле, если верить формуле $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}$, связывающей ускорение $\vec{a}$ и силу $\vec{F}$, легко видеть, что частица с отрицательной массой ускорялась бы в направлении, противоположном действующей силе.

В рамках релятивистской механики

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \left(\vec{F} - \frac{\vec{P}}{m^2} \cdot \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{P}}{\varsigma^2}\right)\right).$$

Однако, если считать, что $m = m_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{m_0 \cdot \varsigma^2}\right)^2} > 0$, ранее сказанное остается справедливым.

Многие, в том числе и автор этой книги, просто не верят в существование разновидности частиц, способных ускоряться в направлении, противоположном действующей силе.

Принимая во внимание тождество гравитационного заряда частицы ее инерциальной массе покоя, также не верится, что существует разновидность частиц, отталкивающихся от источника гравитационного поля. И, хотя можно весьма хладнокровно объявить неверие основанным на результатах лишь ***теперешних*** экспериментов, я все-таки предложил бы читателю не обсуждать физико-фантастические гипотезы, навеянные ***исключительно неадекватной интерпретацией математических соотношений***. Вместо этого лучше обратить внимание на то, что драматическая коллизия возникла из-за необходимости с одной стороны признать существование ***двух*** величин: $\pm\sqrt{\varsigma^2 \cdot \vec{P}^2 + E_0^2}$, а с другой посчитать недопустимым отрицательное значение обозначенной символом E полной кинетической энергии свободной точечной частицы.

Выйти из положения предлагается, ***переопределив*** величину E таким образом, чтобы исключить неравенство $E < 0$, не затрагивая определения (6.44) величины E^2, которое мы обязаны считать незыблемым, так как оно признано выражающим закон природы.

С этой целью давайте сначала введем обозначение:

$$\pm\sqrt{\left\langle\left(\vec{u} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \left\langle\left(\vec{u} \cdot \langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t}} \equiv \widetilde{E} \qquad (6.46)$$

(имея в виду, что величина $\widetilde{E}$ может быть как положительной, так и отрицательной), а затем определим полную кинетическую энергию точечной частицы выражением

$$E = q(\widetilde{E}) \cdot \widetilde{E}, \qquad (6.47)$$

в котором присутствует новая величина q — такая, что:

$$q(\widetilde{E}) = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \widetilde{E} > 0, \\ -1 & \text{при} \quad \widetilde{E} < 0. \end{cases} \qquad (6.48)$$

При этом $E^2 = \widetilde{E}^2$.

Назовем пока что новую величину q *«зарядом»* (в кавычках) частицы. Одно из требований к «заряду» — принимать только два численных значения $+1$ и -1. Далее предлагается отнести *«заряд»* к категории характеристик-констант, отображающих себетождественность частицы и, стало быть, не изменяющихся при «переходах» из одной системы отсчета в другую. Тогда формула преобразования величины $\widetilde{E}$ ***вынужденно*** оказывается идентичной формуле преобразования величины E.

Теперь следует обратить внимание на естественность выделения, по крайней мере, двух разновидностей точечных частиц:

а) ***массивных*** $(m_0 > 0)$, для которых

$$E = q(\widetilde{E}) \cdot \widetilde{E}; \quad \widetilde{E} = \pm\sqrt{\left\langle\left(\vec{u} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t} + m_0^2 \cdot \left\langle\left(\vec{u} \cdot \langle\vec{u}_0\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t}};$$

б) ***безмассовых*** $(m_0 = 0)$, для которых

$$E = q(\widetilde{E}) \cdot \widetilde{E}; \quad \widetilde{E} = \pm\sqrt{\left\langle\left(\vec{u} \cdot \langle\vec{P}\rangle_{\Delta t_0}\right)^2\right\rangle_{\Delta t}}.$$

Поскольку $\langle\vec{u}\rangle_{\Delta t} = \left\langle\frac{\vec{P}}{m(P)} + \vec{u}_0\right\rangle_{\Delta t}$, очевидно, что как в случае массивной, так и безмассовой частицы, величина $\widetilde{E}$ оказывается функцией не только импульса $(\vec{P})$ центра инерции частицы, но и ее собственно-орбитальной скорости $(\vec{u}_0)$.

Необходимость приписать собственно-орбитальную скорость всем разновидностям точечных частиц отражает невозможность существования в физической реальности бесспиновых точечных частиц.

6.6.2. «Заряд» безмассовой частицы

Чтобы выяснить, существует ли такая, обладающая физической содержательностью, характеристика безмассовой точечной частицы, с которой можно было бы отождествить ее q-«заряд», нужно сначала вернуться к выводу, что лишь одна из трех проекций собственно-орбитальной скорости $\vec{u}_0$ (автоматически и результирующей скорости $\vec{u}$) имеет в любой момент времени определенное значение (по модулю и знаку). Каждая из двух других проекций может с равной вероятностью в любой момент времени иметь значения, отличающиеся знаком. В таком случае и лишь одна из трех проекций спина частицы имеет определенное значение.

Сказанное поясняется с помощью рис. 6.4. Ради удобства *все* характеристики частицы переадресованы ее центру инерции, а ось X системы отсчета совмещена с вектором $\vec{P}$. Система отсчета выбрана не связанной с центром инерции частицы.

В ответ на вопрос, как ориентирован вектор спина относительно вектора импульса центра инерции, нужно сказать: в любой момент времени спин с равной вероятностью представляется любой из бесконечно большого числа образующих конуса (длиной $\frac{\sqrt{3}\hbar}{2}$ каждая) при том, что вершина конуса располагается в центре инерции частицы. В этом случае угол между векторами импульса $\vec{P}$ и спина $\vec{S}$ имеет в любой момент времени одно и то же значение. Однако совершенно очевидно, что возможны два и ***только два*** случая: когда косинус угла равен $+\sqrt{\frac{1}{3}}$, и когда он равен $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Иначе говоря, та проекция спина на направление вектора $\vec{P}$ (величина $S_{\vec{P}}$), которая сохраняет одно и то же значение в любой момент времени движения безмассовой, точечной, свободной частицы, может быть равна либо $+\frac{\hbar}{2}$, либо $-\frac{\hbar}{2}$. Это обстоятельство дает возможность определить ***«заряд»*** частицы следующим образом:

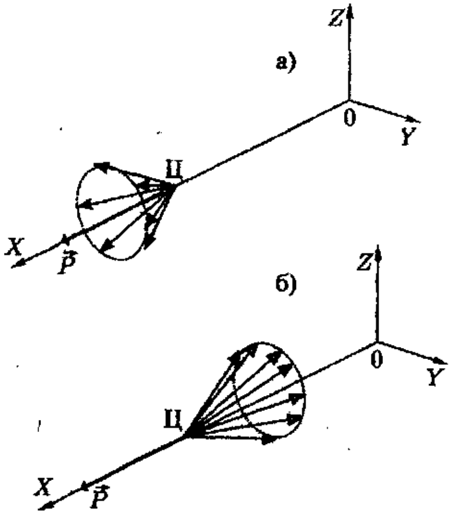


Рис. 6.4. «Прецессия». Вектор $\vec{S}$ в любой момент времени совпадает — с равной вероятностью — с любой образующей конуса. При этом скалярное произведение $\vec{S}\cdot\vec{P}$ либо неизменно положительное (а), либо неизменно отрицательное (б).

$$q \equiv \frac{S_{\vec{P}}}{|S_{\vec{P}}|} = \frac{|S_{\vec{P}}|}{S_{\vec{P}}} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad S_{\vec{P}} = \frac{\hbar}{2}; \\ -1 & \text{при} \quad S_{\vec{P}} = -\frac{\hbar}{2}. \end{cases}$$

С учетом рис. 6.5 имеет смысл использовать в качестве названия *q-«заряда»* термин ***«спиральность»***.

Следует заметить, что статус характеристики-константы приобрел угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$. Но так оно и должно быть, поскольку центр инерции безмассовой частицы в любой инерциальной системе отсчета (не связанной с центром инерции частицы) должен выглядеть движущимся со скоростью, модуль которой точно равен c [35]. Тогда никакой наблюдатель не сможет перегнать безмассовую частицу и, тем самым, увидеть, как угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$ изменился на 180° (в этом случае изменился бы знак косинуса).

Из сказанного следует важный вывод: точечные безмассовые частицы могут быть, по крайней мере, двух ***качественно*** разных подвидов: ***обладающих правой спиральностью, обладающих левой спиральностью.***

При этом обоим подвидам отвечает ***идентичный*** энергетический спектр (зависимость E от $\vec{P}$).

[35] В системе отсчета, связанной с самим центром инерции, $\vec{P}$-импульс последнего равен нулю ***тождественно***, поэтому понятие угла между вектором $\vec{S}$ и ... (ничем) лишено математической содержательности.

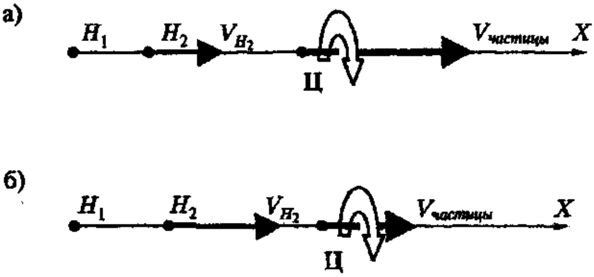


Рис. 6.5. Образ движущейся точечной частицы в глазах двух инерциальных наблюдателей.

На рис. 6.5,б положение частицы показано также в тот момент времени, когда она находится все еще ***впереди обоих*** наблюдателей.

Совершенно самостоятельные соображения необходимо привлечь, чтобы назвать точечные безмассовые частицы, отличающиеся единственно спиральностью, именно частицей и античастицей. Подобные соображения появились после экспериментального установления явлений аннигиляции и трансмутации частиц[36].

В заключение имеет смысл пояснить, почему статус характеристики-константы приобрел угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$. С этой целью рассмотрим экспериментальную обстановку, в которой на X-оси системы координат $\{X, Y, Z\}$ присутствуют три объекта. Один из них — массивный наблюдатель H_1 — жестко связан с X-осью и вечно находится в начале координат. Два других — массивный наблюдатель H_2 и центр инерции точечной частицы, вокруг которого она вращается, — вечно движутся вдоль X-оси прямолинейно и равномерно.

Проанализируем ситуацию (рис. 6.5,а), в которой, с точки зрения наблюдателя H_1, и центр инерции Ц, и наблюдатель H_2, начиная с момента t_0, ***удаляются*** от H_1 в положительном направлении X-оси со скоростями, модуль каждой из которых меньше c, причем скорость наблюдателя H_2 меньше скорости центра Ц ($V_{H_2} < V_{ц}$). В этом случае каждый из наблюдателей видит ***перед собой вечно удаляющуюся*** частицу, каждый видит частицу, вращающейся ***вечно в одну и ту же*** сторону, предположим, — ***по*** часовой стрелке. Допустим, что это и есть достаточное основание для обоих наблюдателей считать, что видят они ***вечно одну и ту же*** частицу (себетождественный объект).

Проанализируем теперь другую ситуацию (рис. 6.5,б), в которой (опять-таки с точки зрения наблюдателя H_1) центр инерции Ц и наблюдатель H_2, начиная с момента t_0, удаляются от H_1 в положительном

---

[36] Аннигиляция — это явление, в котором две точечные частицы, столкнувшись, превращаются в материальный континуум (например, в электромагнитное поле). Трансмутация — это явление, в котором некоторое число точечных частиц одних разновидностей могло бы непосредственно превращаться в то или иное число точечных частиц других разновидностей.

направлении X-оси со скоростями, модуль каждой из которых меньше $ç$, но теперь $V_{\text{Н}_2} > V_{\text{Ц}}$. Ситуация для H_1 по сравнению с первой не изменилась. Однако для H_2 ситуация стала зависящей от расстояния между H_2 и Ц в момент t_0. Если это расстояние не было бесконечно большим, то в течение ограниченного (сверху) промежутка времени Δt наблюдатель H_2 в отличие от H_1 будет видеть ***перед собой*** частицу, хотя и вращающейся ***по*** часовой стрелке, но ***приближающейся***. Спустя время Δt наблюдатель H_2начнет видеть ***перед собой*** частицу уже вечно удаляющейся, но вращающейся ***против*** часовой стрелки. С точки зрения H_1 это объясняется тем, что второй наблюдатель обогнал центр инерции и смотрит уже не вперед, а назад, почему и видит частицу вращающейся в сторону, противоположную прежней[37]. Таким образом, если относить угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{S}$ к категории характеристик-констант, то в анализируемой ситуации каждый из двух ***инерциальных*** наблюдателей вынужден считать, что, хотя и видит перед собой ***вечно удаляющуюся*** частицу, но вовсе не одну и ту же.

А теперь следует заметить, что если модуль скорости центра инерции частицы относительно H_1 точно равен $ç$, то и относительно H_2 (и относительно любого — в том числе безмассового — инерциального наблюдателя) модуль этой скорости точно равен $ç$. Поэтому никакой инерциальный наблюдатель, не находящийся (в любой момент времени из вечности) в той же точке, что и центр инерции безмассовой частицы, никогда его даже и не догонит.

Есть еще одно обстоятельство, касающееся двух объектов, существующих вечно и движущихся вдоль общей прямой. На каком бы расстоянии друг от друга ни находились два таких объекта в некоторый момент времени (из вечности), они не могут вечно сближаться, но могут вечно удаляться. Поэтому, когда заходит речь об опознании наблюдателями точечной частицы, вращающейся вокруг движущегося (прямолинейно и равномерно в выбранной системе координат) центра инерции, то необходимо указывать, в течение какого — ограниченного или неограниченно большого промежутка времени непрерывно (или достаточно часто) ведется опознание. Правильно считать, что только ***вечно*** продолжающийся процесс опознания позволяет судить о себетождественности частицы.

6.6.3. Электрический заряд массивной частицы

Отныне величина $\widetilde{E}$, так и не получившая названия, должна считаться отношением двух физических характеристик — полной кинетической энергии частицы E и ее заряда q: $\widetilde{E} = \frac{E}{q}$, причем $E > 0$, а $q = \pm 1$.

---

[37] Для изолированной от всего — единственной — пары объектов *«наблюдатель»* и *«частица»* понятия «сзади» и «спереди» бессодержательны. В подобной ситуации два объекта с течением времени могут либо сближаться, либо удаляться, либо оставаться на неизменном расстоянии друг от друга.

В случае безмассовой частицы такое выражение для $\widetilde{E}$ себя оправдало, поскольку оказалось, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{S}$ обязательно находятся под углом друг к другу, а косинус угла $\langle\vec{S}, \vec{P}\rangle$ может принимать именно два численно одинаковых значения, отличающихся знаком.

В случае массивной частицы складывается совершенно иная ситуация. Масса m_0 считается принципиально имеющей только одно — положительное — значение. А поскольку модуль скорости центра инерции массивной частицы обязательно меньше c (относительно любой системы отсчета), то и спиральность не может выступать в роли характеристики-константы).

Таким образом, остается ***единственное*** — попросту ***постулировать***, что частица, ***обладая массой покоя*** ($m_0 \neq 0$), ***автоматически обладает зарядом уже без кавычек***. На роль этого заряда массивной частицы вполне допустимо привлечь двузначный электрический заряд.

Следует заметить, что хотя свободная массивная частица, подобно безмассовой, и может обладать определенной спиральностью, каждому значению полной кинетической энергии ($0 < E \leqslant \infty$) отвечают два разных спиральностных состояния ***одной и той же*** (себетождественной) массивной и заряженной частицы. Значит, спиральность подобной частицы не относится к числу ее характеристик-констант, и внешнее воздействие может изменить спиральность.

Итак, напрашиваются следующие выводы.

1. *Точечность частицы предполагает обязательное участие ее во вращении по собственной орбите, и, следовательно, обладание спином.*

   Не может существовать точечная, но притом бесспиновая частица.

2. *В физической реальности могут существовать точечные частицы* ***только*** *таких разновидностей:*

   а) безмассовые ($m_0 = 0$)*, притом зарядо-нейтральные, притом обладающие неизменяемой спиральностью;*

   б) массивные ($m_0 \neq 0$)*, притом обладающие неизменяемым зарядом (и, естественно, неизменяемой массой покоя), притом способные менять спиральность.*

Не может существовать точечная и массивная, но не заряженная частица, равно как точечная и безмассовая, но заряженная.

* * *

В заключение хотелось бы коснуться, с моей точки зрения — спекуляций, связанных с предполагаемым отличием от нуля массы покоя нейтрино[38].

[38] Замечу, что в течение многих лет после экспериментов, в которых, якобы, было установлено, что масса покоя электрон-позитронного нейтрино отлична от нуля, немало

Давайте усилием воли заставим себя предположить, что масса покоя, например, электрон-позитронного нейтрино отлична от нуля. В таком случае автоматически должна быть отлична от нуля и масса покоя частицы, которую до сих пор называют антинейтрино и существование которой никто не пытается отрицать.

Теперь так. Если масса покоя антинейтрино отличается от массы покоя нейтрино, то это совершенно различные частицы. Это вовсе ***не частица и античастица***, и, стало быть, ***аннигилировать они не могут по определению***. Но тогда следует считать ложными утверждения экспериментаторов о наблюдаемых ими многочисленных актах аннигиляции тех самых частиц, которые до сих пор все называют нейтрино и антинейтрино.

Если ненулевая масса покоя антинейтрино не отличается от ненулевой массы покоя нейтрино, то мы имеем дело с ***одной и той же частицей***. Просто пока наблюдатель движется медленнее этой частицы, он отмечает, что ее спиральность, допустим, положительна, а, когда он частицу обгонит, то отметит, что спиральность стала отрицательной[39]. Я напомню, что частица с ненулевой массой покоя не может двигаться со скоростью c, и, следовательно, ее можно обогнать. И вновь замечу, что не только совершенно различные, но и две абсолютно тождественные частицы, по определению, не могут аннигилировать при столкновении.

астрофизиков было убеждено, что именно это обстоятельство позволит решить проблему так называемой «скрытой массы» межгалактического пространства. В связи с этим мне показалось уместным напомнить, что говорил Нильс Бор по поводу точки зрения, согласно которой, если бы дважды два иногда равнялось не четырем, а пяти, то это было бы полезно для наших финансов. Бор утверждал, что даже если бы дважды два и равнялось иногда пяти, это было бы бесполезно для наших финансов.

[39] Между прочим, если спиральность нейтрино (антинейтрино) изменяема, то интересно было бы знать, в каком именно силовом поле может произойти изменение.

Глава 7

Коллектив частиц

§ 7.1. Плотность состояний

В § 4.2 на с. 141–143 рассматривалось состояние точечной частицы, вечно осциллирующей вдоль X-оси между двумя потенциальными стенками, отстоящими друг от дружки на расстояние Δx. В этой ситуации P_x-импульс частицы может с равной вероятностью принимать любое из множества значений в соответствии с выражением

$$P_x = \pm \frac{2\pi\hbar}{\Delta x} \cdot \mathrm{N}, \tag{7.1}$$

где $\mathrm{N} = 1; 2; \ldots; \infty$ [1].

Если перейти к пределу $\Delta x \to \infty$, то промежуток, разделяющий соседние значения P_x-импульса, становится исчезающе малым:

$$P_x(\mathrm{N}) - P_x(\mathrm{N}-1) = \frac{2\pi\hbar}{\Delta x} \to 0.$$

Таким образом, число разных состояний (с разным значением и знаком импульса P_x), в каждом из которых может вечно пребывать частица, равно $2\mathrm{N}_{\text{макс}}$ $(\to \infty)$. Выражение (7.1) позволяет образовать понятие *«плотности импульсных состояний в импульсном пространстве»*. Это есть число состояний, приходящееся на 1 см X-оси и на 1 $\frac{\text{эВ}\cdot\text{с}}{\text{см}}$ P_x-оси. Обозначив эту величину символом G_{P_x}, следует написать:

$$G_{P_x} = \lim_{\mathrm{N}_{\text{макс}}\to\infty} \left(\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{2\mathrm{N}_{\text{макс}}}{2\left(\frac{2\pi\cdot\hbar\cdot\mathrm{N}_{\text{макс}}}{\Delta x}\right)\cdot \Delta x} \right) = \frac{1}{2\pi\cdot\hbar} \; \frac{\text{штук разных состояний}}{1\,\text{см}\cdot 1\,\frac{\text{эВ}\cdot\text{с}}{\text{см}}}.$$

В реальном пространстве (трех измерений)

$$G_{\vec{p}} = \left(\frac{1}{2\pi\cdot\hbar}\right)^3. \tag{7.2}$$

---

[1] Напомню, что уравнение Шредингера опирается на выражение $E = \frac{p^2}{2m_0}$. Поэтому приходится считать, что частица не может существовать в состоянии покоя (с импульсом, точно равным нулю) относительно системы координат, связанной с потенциальными стенками. Это обстоятельство отражается тем, что $\int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} \Psi^2 \cdot dx \neq 1$, если в выражении $\Psi = \sqrt{\frac{2}{\Delta x}} \cdot \sin\frac{2\pi\cdot\mathrm{N}\cdot x}{\Delta x}$ положить число N равным нулю.

Можно также образовать понятие *«плотности энергетических состояний»* (G_E), считая, что частица может обладать только кинетической энергией (E) и считая, что $E = \frac{P^2}{2m_0}$. В этом случае приходящееся на 1 см X-оси число состояний, сосредоточенное в бесконечно узком сферическом поясе (толщиной dP) равно $G_{\vec{P}} \cdot 4\pi \cdot P^2 \cdot dP$ (рис. 7.1,а). Оно же равно $G_E \cdot dE$ (рис. 7.1,б). Таким образом:

$$G_E = G_{\vec{P}} \cdot 4\pi \cdot P^2 \cdot \frac{dP}{dE} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{m_0}{\pi \cdot \hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}\ \frac{\text{число разных состояний с одинаковой энергией}}{1\ \text{см}^3 \cdot 1\ \text{эВ}}\ ^{2)}. \qquad (7.3)$$

§7.2. Принцип запрета

Если предположить, что в бесконечно протяженном и совершенно пустом пространственно-временно́м континууме пребывает повсеместно и вечно множество точечных частиц одинаковой массы m, легко представить себе три «крайние» (если так можно выразиться) ситуации.

1. Все частицы движутся прямолинейно и равномерно, причем каждая — с ***одинаковой*** скоростью $\vec{V}$ (одинаковым импульсом $\vec{P}$).
2. Каждая из частиц движется прямолинейно и равномерно со ***своей*** скоростью $\vec{V}$ (отличной от скоростей всех остальных частиц).
3. Все частицы (несмотря на то, что они точечные) сталкиваются время от времени между собой, а в промежутках движутся прямолинейно и равномерно, причем каждая — со ***своей*** скоростью.

Первая проблема, которая возникает, — это, как отобразить то, что мы имеем дело с коллективом множества частиц (объектом, ***физически*** делимым на отдельные части — частицы), а не с ***физически неделимым*** объектом (например, с материальным континуумом, занимающим тот же объем, что и коллектив частиц). Только после этого понятие *«коллектив (множество) частиц»* приобретает физическую содержательность в качестве понятия, противоположного такому, как один неделимый объект.

Однако понятие множества частиц (коллектива), обладает содержательностью постольку, поскольку частицы можно пересчитать. Но для этого их нужно как-то различать. Возможные признаки различимости частиц таковы (подчеркну, что для различимости достаточно использовать хотя бы один признак):

1. *По характеристикам-константам (в рассматриваемой ситуации — по массе m и размеру)*;
2. *По положению в пространстве в момент (в любой) времени t*;

[2)] На всякий случай напомню, что все состояния с одинаковой и не равной нулю энергией E отличаются друг от друга направлением вектора $\vec{P}$.

3. *По существованию во времени в точке (в любой) пространства $\vec{r}$;*

4. *По скорости $\vec{V}$.*

Рассмотрим теперь фактическую ситуацию.

1. Предположим, что масса и размер (точечный) каждой частицы одинаковы в любой момент времени, в любой точке пространства, и независимо от того, какая у частицы скорость.

2. Примем во внимание, что поскольку пространственно-временнóй континуум считается пустым, все его $\vec{r}$-точки физически неразличимы так же, как и все t-мгновения. Тогда любая из множества частиц (составляющих коллектив) в любой момент времени может с равной вероятностью присутствовать в любой точке пространства, а в любой точке пространства любая из частиц может с равной вероятностью существовать в любой момент времени. Это означает, что в одной (каждой) точке пространства в любой момент времени присутствуют доли каждой из множества частиц.

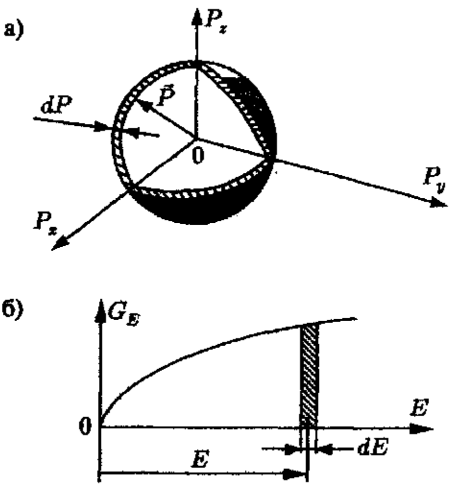


Рис. 7.1. К подсчету числа состояний.

Число разных состояний с одинаковой кинетической энергией E (приходящееся на 1 см^3 объема пространства) одно и то же, как в узком сферическом поясе (а), так и в узком прямоугольнике (б), если $E = \frac{P^2}{2m}$.

Если, однако, допустить, что две частицы (или более) могут, обладая ***одинаковыми*** скоростями, ***одновременно*** оказаться хотя бы на мгновение в ***одной*** точке пространства, это будет означать, что в это мгновение невозможно отличить неделимый точечный объект массой $2m$, движущийся со скоростью $\vec{V}$, от двухчастичного коллектива. Поэтому при описании состояния коллектива частиц придется принять специальное предположение о невозможности ***одновременного*** присутствия в ***одной*** точке пространства ***даже двух*** (точечных) частиц, ***идентичных по характеристикам-константам и обладающих одинаковыми скоростями.***

Выдвинутое предположение уместно назвать *«принципом запрета»*. Именно используя этот принцип, удается так описать состояние коллектива частиц, чтобы явно было видно качественное отличие его от цельного (неделимого физически) объекта. Последний лишь чисто условно можно делить на какое угодно число равных (и разных) частей (по размеру, по массе и т. д.), притом на разное число в разные моменты времени.

Принцип запрета, аналогичный только что сформулированному, был выдвинут В. Паули в 1925 году по совершенно другому поводу. Этот принцип, попросту говоря, требует при описании явлений природы отображать физическую реальность, состоящую в существовании как цельных (неделимых) объектов (сплошных сред — материальных континуумов), так и коллективов точечных частиц. Последние также, подобно континуумам, могут занимать в пространстве объемы любых размеров и формы[3].

Легко видеть, что принцип запрета (Паули) исключает первую из трех «крайних» ситуаций, перечисленных в самом начале § 7.2. Что же касается второй ситуации, в которой каждая из частиц коллектива вечно движется прямолинейно и равномерно и обладает — каждая — своей скоростью, то сказанное только что — это вообще все, что только и можно сказать. Поэтому давайте рассмотрим ситуацию, возникающую в коллективе частиц, сталкивающихся друг с другом.

§ 7.3. Два способа описания состояния коллектива

Допустим сначала, что все частицы представляют собой абсолютно недеформируемые шарики одинакового диаметра, отличного от нуля. Если один из них хоть краешком заденет другой, изменятся скорости обоих. Представим себе, что в некоторый момент времени, мы обратили внимание на шарик, обладающий скоростью $\vec{V}_1$ (рис. 7.2). Будем считать, что пока этот шарик не столкнется с другим, нет ни одного, обладающего скоростью $\vec{V}_1$. Тогда можно будет выделить «наш» шарик среди всех прочих и после любого числа столкновений по его расположению в пространстве относительно той точки, в которой наш выбор пал на «наш» шарик. Но ведь это только потому, что мы приписали шарикам отличный от нуля диаметр. Стоит только представить себе, что частицы все же точечные, а тем не менее сталкивающиеся друг с другом, и картина столкновений качественно изменится (рис. 7.3). Как следует из рис. 7.3, принципиально нельзя утверждать, что точечная частица, обладающая мгновение спустя после столкновения скоростью $\vec{V}_2$, это именно та,

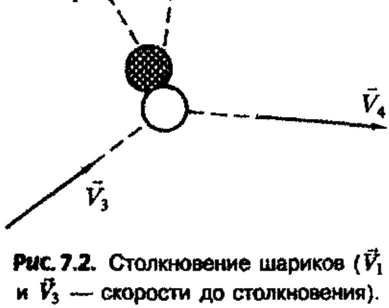


Рис. 7.2. Столкновение шариков ($\vec{V}_1$ и $\vec{V}_3$ — скорости до столкновения).

[3] Естественно, что принцип запрета не исключает необходимости выяснять, какие физические факторы препятствуют *множеству идентичных* частиц пребывать в *одном* состоянии со скоростью $\vec{V}$.

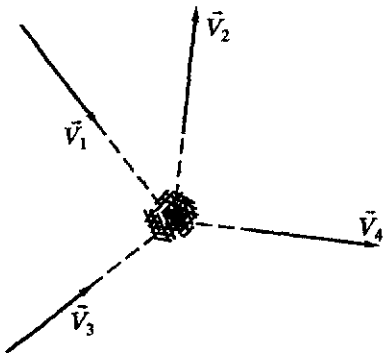


Рис. 7.3. Столкновение точечных частиц ($\vec{V}_1$ и $\vec{V}_3$ — скорости до столкновения).

которая за мгновение до столкновения обладала скоростью $\vec{V}_1$. Единственное содержательное утверждение состоит в том, что: в $\vec{V}_1$-состоянии за мгновение до столкновения была частица, а спустя мгновение это состояние пусто; $\vec{V}_2$ -состояние за мгновение до столкновения было пусто, а спустя мгновение занято частицей.

Будем рассматривать коллектив ***бесконечно большого*** числа точечных (бесструктурных) частиц, идентичных по своим характеристикам-константам (массе и размеру), существующих вечно, движущихся в бесконечно протяженном и пустом пространстве, притом прямолинейно и равномерно, но (несмотря на точечные размеры) время от времени сталкиваясь друг с другом. Разумно считать, что в *данной* точке пространства за огромный промежуток времени произойдет огромное число столкновений; а если в *данный* момент времени окинуть взглядом огромный участок пространства, то мы обнаружим, что произошло огромное число столкновений. Таким образом, приобретают физическую содержательность понятия частоты столкновений в точке пространства (величины $\nu(\vec{r})$) и числа столкновений на один сантиметр длины пространственного интервала в момент вечности (величины $k(t)$) [4].

Будем считать, что промежуток времени (τ) между двумя последовательными столкновениями в одной и той же точке пространства хаотически колеблется во времени; что пространственный интервал (λ) между двумя точками, в которых произошло одновременно по одному столкновению, хаотически осциллирует по пространству [5]. Столкновения, которые носят именно подобный характер, будем называть случайными. В таких условиях каждая частица коллектива за бесконечно большое время поприсутствует во всех точках бесконечно протяженного пространства, испытает одинаковое число столкновений (бесконечно большое), приобретет одинаковый набор импульсов (в пределах от 0 до ∞ по модулю и в телесном угле 4π стерадиан по направлению), одинаковый набор кинетических энергий (в пределах от 0 до ∞).

В описанной выше ситуации понятия об «этом» моменте времени, «этой» точке пространства, «этой» частице лишены всякой физической содержательности. Зато ею в полной мере обладает понятие определенной

[4] Величину k принято называть волновым числом.

[5] Величины τ и λ принято называть временем и длиной свободного пробега.

скорости (определенного импульса), которой (которым) какая-то из частиц обладает на длине свободного пробега (за время свободного пробега).

Только что сказанное следует воспринимать и как обоснование необходимости немеханического — статистического — способа описания состояния коллектива частиц, и как возможность разработать такой способ. При этом нужно считать, что каждой точке пространственно-временно́го континуума соответствует пространство скоростей (импульсов), причем — независимо от существования (присутствия) в упомянутом континууме частиц.

Возможность перейти от механического способа описания к статистическому предлагается оценить на примере одной точечной частицы, существующей вечно и поприсутствовавшей во всех точках бесконечно протяженного пространственного континуума, движущейся прямолинейно и равномерно..., но лишь в промежутках между столкновениями с — назовем их условно — *«несовершенствами»* (или *«дефектами»*) пространства. Попросту говоря, допустим, что оно заполнено неким силовым полем, которое, ***хаотически осциллируя в пространстве в каждый момент времени и хаотически колеблясь во времени в каждой точке пространства, тем не менее, сосредоточено лишь в отдельных точках, разделенных пустыми протяженными интервалами (в любой момент времени), причем — в любой точке пространства возникая и исчезая мгновенно, но отсутствуя в течение продолжительных промежутков времени.***

На рис. 7.4 представлено описанное распределение потенциала (простоты ради, в одномерном пространстве — вдоль X-оси).

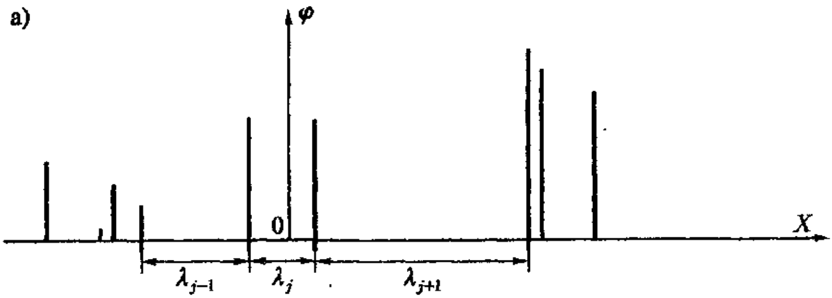
Введенное поле обладает рядом особенностей.

1. Только при столкновениях частица изменяет импульс. Между столкновениями она его переносит неизменным.
2. Значение любого λ-интервала отлично от нуля (хотя и может быть очень малым), но и не равно бесконечности (хотя и может быть очень большим), а число значений λ-интервала бесконечно велико. То же самое относится к значениям τ-промежутка.

Давайте теперь обсудим первую особенность. Прежде всего вспомним, что частица, существуя вечно, попадает в одну и ту же точку пространства бесконечно много раз (за бесконечно большой промежуток времени), притом обладая в момент попадания импульсом, значение которого может быть каким угодно. Будучи усреднен по времени, импульс частицы равен

$$\langle \vec{P}(x) \rangle_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \vec{P}(x,t) \cdot dt \right\}.$$

Замечу, что этот импульс вполне допустимо переадресовать любой (одной) точке пространства, ибо, благодаря особенностям введенного



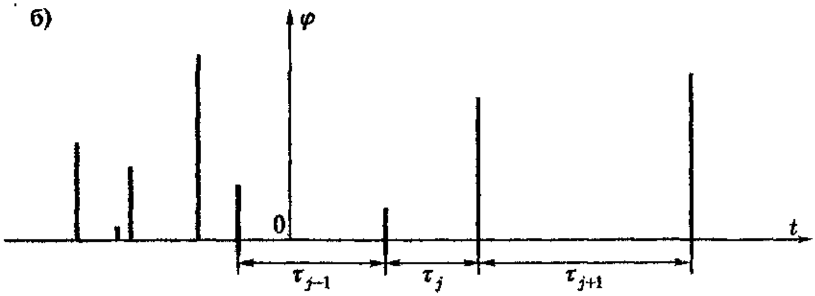


Рис. 7.4. Распределение потенциала в пространственно-временнóм континууме (все значения потенциала различны в пределах от 0 до ∞). Различие в значениях призвано символизировать лишь различие в величине изменения импульса (по абсолютному значению и направлению) частицы при столкновении ее с потенциальным пиком.

а) Распределение потенциала вдоль X-оси в произвольный момент времени (все λ-интервалы различны, все конечны и отличны от нуля).

б) Распределение потенциала вдоль оси времени в произвольной точке пространства (все τ-промежутки различны, все конечны и отличны от нуля).

поля (см. рис. 7.4), рано или поздно частица столкнется с возникшим потенциальным пиком. Если встать в эту точку и ожидать прибытия в нее частицы с ***определенным*** импульсом $\vec{P}_\iota$, то с учетом промежутков времени между актами прибытия-убытия среднее по времени значение именно этого импульса равно

$$\vec{P}_\iota \cdot \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \cdot dt \right\}.$$

Понимая, что за бесконечно большой промежуток времени частица появится в упомянутой выше точке также и с другим импульсом, среднее по времени значение импульса частицы равно

$$\langle \vec{P}(x) \rangle_{\Delta t} = \sum_{\iota=1}^{\infty} \vec{P}_\iota \cdot \left[\lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \cdot dt \right\} \right] ^{6)}. \qquad (7.4,\text{а})$$

Здесь: $\widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \equiv \widetilde{n}_\iota(x, t) = \begin{cases} \text{либо } 1; \\ \text{либо } 0. \end{cases}$

Сам вид зависимости величины $\widetilde{n}(x)$ еще и от t определяется значением импульса $\vec{P}_\iota$.

Преобразуем выражение (7.4,а) к виду

$$\langle \vec{P}(x) \rangle_{\Delta t} = \sum_{\iota=1}^{\infty} \vec{P}_\iota \left[\lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t)\, dt \right\} \right] = \sum_{\iota=1}^{\infty} \vec{P}_\iota \cdot \widetilde{N}_\iota(\vec{r}),$$

где $\widetilde{N}_\iota(x) = \lim\limits_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \cdot dt \right\}$ — стационарная, локальная степень заполнения частицею одного состояния с импульсом $\vec{P}_\iota$. Естественно $0 \leqslant \widetilde{N}_\iota(x) \leqslant 1$ [7].

Аналогичным путем приходим к величине

$$\langle \vec{P}(t) \rangle_{\Delta x} = \sum_{\iota=1}^{\infty} \vec{P}_\iota \cdot \left[\lim_{\Delta x \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \cdot dx \right\} \right] =$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\infty} \vec{P}_\iota \cdot \widetilde{N}_\iota(t), \qquad (7.4,\text{б})$$

где $\widetilde{N}_\iota(t) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x, t) \cdot dx \right\}$ — мгновенная, всеохватная (усредненная по всей X-оси) степень заполнения одного состояния

---

[6] Так как общее число промежутков бесконечно велико, можно чисто условно назвать один из них первым, после чего и ввести обозначение $\iota = 1$. (Общее число промежутков (оно, разумеется, бесконечно велико) совпадает с числом значений импульса, которое лежит в пределах от 0 до ∞ по модулю и в пределах телесного угла 4π стерадиан по направлению, то есть тоже бесконечно велико).

[7] Нижний индекс ι символизирует возможную зависимость величины $\widetilde{N}_\iota$ от модуля и направления импульса.

[8] Простоты ради, приведено усреднение только вдоль одной из трех координатных осей.

с импульсом $\vec{P}_\iota$, причем

$$\widetilde{n}\left(\vec{P}_\iota, x, t\right) \equiv \widetilde{n}_\iota(x,t) = \begin{cases} \text{либо } 1; \\ \text{либо } 0. \end{cases}$$

Естественно $0 \leqslant \widetilde{N}_\iota(t) \leqslant 1$.

Если сопоставить первую особенность поля со второй, можно считать физически содержательным понятием скорость прямолинейного, равномерного движения на λ-интервале в течение τ-промежутка, — например, величину $V_\iota = \frac{\lambda_\iota}{\tau_\iota}$, которая связана с импульсом P_ι (неизменным на λ-интервале и τ-промежутке) соотношением $P_\iota = m \cdot V_\iota$. Таким образом, $\vec{V}$-пространство можно с точностью до «коэффициента пропорциональности» (массы m) отождествить с $\vec{P}$-пространством[8].

Теперь подчеркну, что особенности введенного силового поля (см. рис. 7.4) таковы, что позволяют считать пространственно-временнóй континуум пустым[9]. Тогда неудивительно, что величина $\widetilde{N}_\iota(x)$ оказывается не зависящей от x, а величина $\widetilde{N}_\iota(t)$ не зависящей от t. Кроме того, из второй особенности поля вытекает еще одно следствие, на которое стоит обратить внимание. Величины λ_ι и τ_ι не равны нулю, но и не равны бесконечности, а вот пространственно-временнóй континуум — бесконечной протяженности и продолжительности. Поэтому можно выбрать для усреднения такие ограниченные сверху пространственный интервал $(\Delta x)_*$ и временнóй промежуток $(\Delta t)_*$, чтобы и число λ-интервалов, и число τ-промежутков оказалось, тем не менее, достаточно огромным для оправдания операций усреднения. В этом случае:

величину $\widetilde{N}_\iota(x,t) = \left\{\frac{1}{(\Delta x)_*} \cdot \int\limits_{x-\frac{(\Delta x)_*}{2}}^{x+\frac{(\Delta x)_*}{2}} \widetilde{n}(\vec{P}_\iota, x', t) \cdot dx'\right\}$ *справедливо считать не только мгновенной, но и квазилокальной, поскольку интервал конечной протяженности* $(\Delta x)_*$ *— ничто (представляется точкой) на бесконечно длинной* X*-оси;*

величину $\widetilde{N}_\iota(\vec{r},t) = \left\{\frac{1}{(\Delta t)_*} \cdot \int\limits_{t-\frac{(\Delta t)_*}{2}}^{t+\frac{(\Delta t)_*}{2}} \widetilde{n}\left(\vec{P}_\iota, \vec{r}, t'\right) \cdot dt'\right\}$ *справедливо считать не только локальной, но и квазимгновенной (ее, увы, принято называть квазистационарной), поскольку промежуток конечной продолжительности* $(\Delta t)_*$ *— ничто (представляется точкой) на бесконечной* t*-оси.*

---

[8] На всякий случай подчеркну, что это $\vec{V}$-пространство — пространство скоростей не просто мгновенных, а именно скоростей прямолинейного и равномерного движения. То есть, тех самых скоростей, которыми может обладать ***свободная*** частица (пребывающая в ***пустом*** пространственно-временнóм континууме).

[9] См. § 1.6.

Естественно, численное значение величины, которая — всего лишь квазилокальная, может быть разным в разных точках пространства в любой момент времени t. Численное значение величины, которая — всего лишь квазистационарная, может быть разным в разные мгновения вечности в любой точке X-оси.

Теперь, наконец, можно перейти к двум способам описания состояния коллектива точечных частиц.

Я попробую показать, что механический и статистический способы описания полностью «взаимопреобразуемы» в ситуации, в которой одна частица находится в хаотически осциллирующем в пространстве и колеблющемся во времени силовом поле.

Давайте начнем с того, что запишем выражение для импульса частицы в виде

$$\langle \vec{P} \rangle_{\Delta t} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to \infty} \left(\dfrac{1}{\Delta t} \displaystyle\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \vec{P}(t) \cdot dt \right); & (7.5,\text{а}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \vec{P}_i \cdot \tilde{N}(\vec{P}_i), \text{ [10]} & (7.5,\text{б}) \end{cases}$$

считая, простоты ради, что ни одна из величин не зависит от x, y, z.

В угловых скобках и в подынтегральном выражении фигурирует импульс частицы, а под знаком суммы — импульсы $\vec{P}$-пространства (не зависящего от существования частицы) и степени заполнения состояний в этом пространстве. В подынтегральном выражении неизвестным является вид зависимости $\vec{P}$ от t, а под знаком суммы вид зависимости $\tilde{N}$ от $\vec{P}_i$.

Обратимся к механическому способу описания.

Поскольку в промежутке между двумя последовательными столкновениями импульс частицы остается неизменным, необходимо установить, чему равен импульс *исходный* — непосредственно перед столкновением с потенциальным пиком (например, в точке X-оси), а также установить, чему равно изменение импульса $(\Delta\vec{P})$в результате столкновения. Однако если поле заведомо считается абсолютно хаотическим, то и значение $\Delta\vec{P}$ при столкновении частицы с возникшим в этом момент (или с уже существовавшим) потенциальным пиком (см. рис. 7.4) может быть с равной вероятностью каким угодно в пределах от $-\infty$ до ∞.

Что же касается исходного импульса (перед столкновением), то в рассматриваемой ситуации частица считается существующей вечно, а потому у нее нет бесстолкновительной предыстории. Следовательно «исходный» импульс с равной вероятностью может быть каким угодно и по модулю, и по направлению.

---

[10] Аналогичного типа выражения имеют место для величины $\langle \vec{P} \rangle_{\Delta x}$.

Таким образом, механический способ описания оказывается неприемлемым. Естественно, не располагая зависимостью $\vec{P}$ от t, нельзя, в принципе, найти величину $\langle\vec{P}\rangle_{\Delta t}$, характеризующую стационарное состояние частицы. Но в точно такой же тупик приведет попытка установить — уже в рамках статистического способа — вид зависимости $\widetilde{N}$ от $\vec{P}_{\iota}$, используя выражение, в котором фигурирует величина $\widetilde{n}(\vec{P}_{\iota}, t)$ (при этом безразлично, какой мы решим сделать локальную степень заполнения $\vec{P}_{l}$-состояния (величину $\widetilde{N}_{\iota}$) — стационарной или только квазистационарной).

Однако возможно ли установить вид зависимости $\widetilde{N}$ от $\vec{P}_{\iota}$, не обращаясь к величине $\widetilde{n}(\vec{P}_{\iota}, x, t)$?

§ 7.4. Коллектив частиц и стационарная степень заполнения $\vec{P}$-состояния

Совершенно очевидна абсолютная тожественность двух ситуаций:

одна точечная частица, существуя вечно, движется равномерно и прямолинейно между столкновениями с «несовершенствами», которые не только хаотически разбросаны по бесконечно протяженному пространству, но еще хаотически возникают и исчезают во времени;

точечная частица, существуя вечно, движется равномерно и прямолинейно между столкновениями с другими идентичными ей частицами, которые движутся точно так же, число которых бесконечно велико и которые присутствуют повсюду в бесконечно протяженном пространстве и притом существуют вечно.

Во второй ситуации бесконечно большое множество частиц выступает по отношению к одной частице в роли множества несовершенств, фигурирующих в первой ситуации. Естественно, что каждая частица в отдельности за бесконечно большой промежуток времени поперебывает в одних и тех же $\vec{P}$-состояниях и в одних и тех же точках пространства. Иными словами, отдельно взятая частица прекрасно исполняет роль представителя всего коллектива. И если частицам придать ***нефизическую*** характеристику — номер (I) с целью отличия их друг от друга, то

$$\langle\vec{P}\rangle^{(1)}_{\Delta t} = \langle\vec{P}\rangle^{(2)}_{\Delta t} = \langle\vec{P}\rangle^{(3)}_{\Delta t} = \dots .$$

Здесь $\langle\vec{P}\rangle^{(\mathrm{I})}_{\Delta t}$ — это импульс, усредненный не только по времени, но еще и по пространству, после чего его можно приписать частице.

Следует обратить внимание на одно, не очень-то бросающееся в глаза обстоятельство. Если точечная частица движется во флуктуирующем поле с некоторой конечной скоростью, она может столкнуться, в течение исчезающе малого промежутка времени не только с одним потенциальным пиком («дефектом» пространства). В коллективе бесконечно большого числа частиц этому явлению эквивалентно другое — одновременно трехчастичные, четырехчастичные столкновения,..., и даже одно бесконечномногочастичное столкновение.

Теперь перейдем к установлению вида зависимости $\widetilde{N}\left(\vec{P}\right)$.

Выдвинем фундаментальное предположение, что при столкновениях точечных частиц друг с другом помимо изменения импульса происходит изменение только кинетической энергии.

Рассмотрим три величины, характеризующие коллектив в целом:

концентрацию частиц (усредненную по времени)

$$n(\vec{r}) = \iiint\limits_{P_x,P_y,P_z} \widetilde{N}(\vec{P},\vec{r})\cdot G_{\vec{P}}\cdot dP_x\cdot dP_y\cdot dP_z = \int\limits_0^\infty \widetilde{N}(E,\vec{r})\cdot G_E\cdot dE; \quad (7.6)$$

скорость отдельной частицы (*векторную* величину, усредненную не только по времени, но и по числу частиц)[11]

$$\vec{V}_{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\left\{\iiint\limits_{P_x,P_y,P_z} \frac{\vec{P}}{m}\cdot\widetilde{N}(\vec{P},\vec{r})\cdot G_{\vec{P}}\cdot dP_x\cdot dP_y\cdot dP_z\right\} =$$

$$= \frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\left\{\iiint\limits_{V_x,V_y,V_z} \vec{V}\cdot\widetilde{N}(\vec{V},\vec{r})\cdot G_{\vec{V}}\cdot dV_x\cdot dV_y\cdot dV_z\right\}; \quad (7.7)$$

кинетическую энергию отдельной частицы (величину, усредненную не только по времени, но и по числу частиц)

$$E_{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{n(\vec{r})}\cdot\left\{\int\limits_0^\infty E\cdot\widetilde{N}(E,\vec{r})\cdot G_E\cdot dE\right\}. \quad (7.8)$$

Во всех этих формулах фигурирует именно *квазилокальная* стационарная степень заполнения состояния, чтобы подчеркнуть возможную неоднородность пространства, содержащего в себе коллектив частиц, по таким параметрам, как n, $\vec{V}_{(1)}$, $E_{(1)}$.

Теперь следует обратиться к уже введенным в начале § 7.3 понятиям частоты столкновений частиц в точке пространства $(\nu(\vec{r}))$ и числа столкновений, приходящегося на 1 см в момент вечности («волнового» числа $k(t)$). Естественно прибегнуть к локальной, но усредненной по времени — стационарной — величине $\langle\nu(\vec{r})\rangle_{\Delta t}$ равно, как к мгновенной, но всеохватной величине $\langle k(t)\rangle_{\Delta\vec{r}}$. Однако, чтобы упростить дальнейшие математические выражения, условимся считать, что стационарная величина $\langle\nu(\vec{r})\rangle_{\Delta t}$ не зависит от $\vec{r}$ $\left(\langle\nu(\vec{r})\rangle_{\Delta t}\equiv\langle\nu\rangle = \text{const}\right)$, а всеохватная величина $\langle k(t)\rangle_{\Delta\vec{r}}$ не зависит от t $\left(\langle k(t)\rangle_{\Delta\vec{r}}\equiv\langle k\rangle = \text{const}\right)$. Обратные

[11] Эта отдельно взятая частица призвана представлять коллектив.

им величины $\left(\left\langle \frac{1}{\nu} \right\rangle (\equiv \langle \tau \rangle), \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle (\equiv \langle \lambda \rangle)\right)$ допустимо назвать средним временем свободного пробега частицы (между двумя последовательными столкновениями) и средней длиной свободного пробега. Используя уже эти понятия, можно связать кинетическую энергию отдельной частицы $E_{(1)}$ со скоростью свободного пробега частицы $V_{(1),*}$, написав:

$$E_{(1)} = \frac{m_0 \cdot V^2_{(1),*}}{2} \left(= \frac{P^2_{(1),*}}{2m_0} \right); \quad \frac{P_{(1),*}}{m} = V_{(1),*} = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \tau \rangle}. \tag{7.9}$$

Величинам $V_{(1),*}$ и $P_{(1),*}$ бессмысленно приписывать направление. Ведь они являются средними, строго говоря, по бесконечно большому числу τ-промежутков[12]. Поэтому в течение одного («среднего») τ-промежутка направление импульса $P_{(1),*}$ (и скорости $V_{(1),*}$) может быть с равной вероятностью любым в телесном угле 4π стерадиан,

Создать коллектив — значит задать три совершенно независимые друг от друга величины: n, $\vec{V}_{(1)}$, $E_{(1)}$. Простоты ради, далее допустим, что все они одинаковы повсюду в пространстве, а, кроме того, что коллектив как целое покоится, то есть, что $\vec{V}_{(1)} = 0$. Последнее обстоятельство позволяет ограничиться задачей о нахождении функции $\widetilde{N}(E)$, считая функции $\widetilde{N}(\vec{P})$ и $\widetilde{N}(\vec{V})$ сферически симметричными.

Теперь вспомним, что стационарная степень заполнения, например, $\vec{P}$-состояния тождественна ***вероятности*** того, что в любой момент времени частица обладает импульсом, равным $\vec{P}$. Поэтому временно будет использоваться обозначение W, чтобы подчеркнуть термин *«вероятность»*.

Имеет смысл начать с замечания, что в рассматриваемом состоянии коллектива частиц, случайно и время от времени сталкивающихся друг с другом, справедливо считать, что *«любая» частица в «любой» момент времени в «любой» точке пространства пребывает с равной вероятностью.* (Кавычки напоминают о ***физической идентичности (неразличимости)*** частиц, а также и моментов времени, и точек пустого, то есть не содержащего никаких полей пространственного континуума.)

Из только что сделанного утверждения автоматически следует возможность присутствия (столкновения) в любой, самое главное сейчас, что — в одной точке пространства и в любой, самое главное, что — в один и тот же момент времени: двух точечных частиц; трех; ...; N частиц.

Совершенно случайным событием является как то, что сталкивающиеся (присутствующие) одновременно в одной точке две частицы обладают скоростями именно $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, так и то, что сталкивающиеся одновременно в одной точке три частицы обладают скоростями именно $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ и т. п. Поэтому вероятность первого из перечисленных событий равна $W(\vec{V}_1) \cdot W(\vec{V}_2)$; вероятность второго события равна $W(\vec{V}_1) \cdot W(\vec{V}_2) \cdot W(\vec{V}_3)$ и т. п.

---

[12] Число τ-промежутков разумно считать совпадающим с числом λ-интервалов, так как числа эти бесконечно велики.

Предлагается в дальнейшем ограничиться случаем только двухчастичных столкновений, аргументируя значительно меньшей вероятностью одновременного столкновения трех и более частиц.

Таким образом, будем считать, что для коллектива частиц, сталкивающихся время от времени друг с дружкой в пустом пространстве, имеют место три соотношения:

$$W(\vec{V}_i) \cdot W(\vec{V}_j) = W(\vec{V}_k) \cdot W(\vec{V}_l); \text{ [13]} \tag{7.10}$$

$$m \cdot (\vec{V}_i + \vec{V}_j) = m \cdot (\vec{V}_k + \vec{V}_l)\,; \text{ [14]} \tag{7.11}$$

$$E_i + E_j = E_k + E_l \text{ [15]}. \tag{7.12}$$

Ситуации, в которой коллектив множества частиц как целое покоится, отвечает равенство $\vec{V}_{(1)} = 0$, что, в свою очередь, возможно, например, при условии $\widetilde{N}(\vec{V}_j) = \widetilde{N}(-\vec{V}_j) = \widetilde{N}(|\vec{V}_j|)$ для любого j. В этом случае достаточно двух соотношений: $E_i + E_j = E_k + E_l$ и (возвращаясь к старым обозначениям)

$$\widetilde{N}(E_i) \cdot \widetilde{N}(E_j) = \widetilde{N}(E_k) \cdot \widetilde{N}(E_l) \text{ [16]}. \tag{7.13}$$

Систему соотношений (7.12, 13) целесообразно преобразовать к виду

$$\widetilde{N}(E_i + E_j - E_k) = \frac{\widetilde{N}(E_i) \cdot \widetilde{N}(E_j)}{\widetilde{N}(E_k)}, \tag{7.14}$$

поскольку неизвестной является вовсе не какая-то величина, а ***именно сам вид*** зависимости $\widetilde{N}$ от E.

Нетрудно доказать, что выражение

$$\widetilde{N} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{e}^{-\gamma E}, \tag{7.15}$$

в котором N и γ — некие константы, единственное, удовлетворяющее соотношению (7.14).

1. *Прологарифмировав соотношение* (7.13), *получим*:

$$\ln \widetilde{N}(E_i) + \ln \widetilde{N}(E_j) = \ln \widetilde{N}(E_k) + \ln \widetilde{N}(E_l). \tag{7.16}$$

---

[13] Совершенно случайным событием следует считать, как то, что в одной точке пространства оказались одновременно две частицы со скоростями именно $\vec{V}_i$ и $\vec{V}_j$ (столкновение частиц), так и то, что в одной точке пространства оказались одновременно две частицы со скоростями именно $\vec{V}_k$ и $\vec{V}_l$ (разлет частиц). Если точка столкновения совпадает с точкой разлета, имеет место равенство (7.10).

[14] Равенство (7.11) отражает закон сохранения импульса при столкновении-разлете двух частиц.

[16] Равенство (7.12) отражает закон сохранения энергии при столкновении-разлете двух частиц.

[16] Это — эквивалент соотношения (7.10). На всякий случай замечу, что в рамках квантово-статистического способа описания состояния рассматриваемого коллектива необходимо считать, что одновременно сталкиваются не именно две частицы со скоростями $\vec{V}_i$ и $\vec{V}_j$, а доли двух частиц, обладающие этими скоростями.

2. *Вычислим производную каждого слагаемого, например, по E_i. При этом используем равенство* (7.12), *чтобы написать $E_l = E_i + E_j - E_k$. Тогда:*

$$\frac{dE_j}{dE_i} = 0; \quad \frac{d\ln\widetilde{N}(E_j)}{dE_i} = 0; \quad \frac{dE_k}{dE_i} = 0; \quad \frac{d\ln\widetilde{N}(E_k)}{dE_i} = 0;$$

$$\frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_i} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_l}\cdot\frac{dE_l}{dE_i} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_l}\cdot\frac{d(E_i+E_j-E_k)}{dE_i} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_l}.$$

3. *Дифференцируя соотношение* (7.16) *по E_i, получаем:*

$$\frac{d\ln\widetilde{N}(E_i)}{dE_i} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_l}.$$

4. *Дифференцируя соотношение* (7.16) *также и по E_j, а затем и по E_k, получаем в итоге:*

$$\frac{d\ln\widetilde{N}(E_i)}{dE_i} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_j)}{dE_j} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_k)}{dE_k} = \frac{d\ln\widetilde{N}(E_l)}{dE_l}.$$

5. *Чтобы подобное «сквозное» равенство имело место в бесконечно широком интервале энергий, необходимо выполнение условия*

$$\frac{d\ln\widetilde{N}(E)}{dE} = -\gamma, \tag{7.17}$$

где γ не зависит от E (отрицательный знак при γ будет объяснен позднее).

6. *Интегрируя уравнение* (7.17), *получаем:*

$$\ln\widetilde{N}(E) = \ln \mathrm{N} - \gamma E. \tag{7.18}$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{N}(E) = \mathrm{N}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma E}.$$

На рис. 7.5 представлены в качестве примера три линии, соответствующие зависимости (7.18). Совершенно очевидно, что неравенствам $0 < \widetilde{N} < 1$, справедливым в интервале $0 < E < \infty$, отвечает только условие $\ln \mathrm{N} < 0$. В результате $\widetilde{N} = \mathrm{N}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma E}$, где $\mathrm{N} < 1$.

Используя уравнения (7.6) и (7.8), получаем

$$n = \mathrm{N}\cdot\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma\cdot E} G_E\cdot dE; \quad E_{(1)} = \frac{\mathrm{N}}{n}\cdot\left\{\int\limits_0^\infty E\cdot \mathrm{e}^{-\gamma\cdot E} G_E\cdot dE\right\}$$ [17].

[17] При $\gamma < 0$ интегралы расходятся.

Подставляя в качестве G_E величину $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{m_0}{\pi\cdot\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\sqrt{E}$,[18] находим, что:

$$\mathrm{N} = n\cdot\left(\frac{m_0\cdot E_{(1)}}{3\pi\cdot\hbar^2}\right)^{-3/2};$$

$$\gamma = \frac{3}{2E_{(1)}}.$$

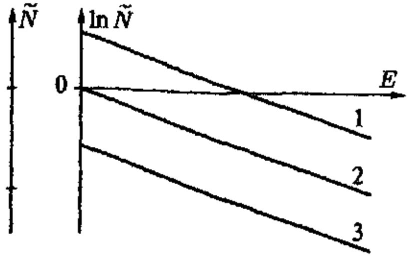


Рис. 7.5. К выбору численного значения $\ln \mathrm{N}$. (1. $\ln \mathrm{N} > 0$; 2. $\ln \mathrm{N} = 0$; 3. $\ln \mathrm{N} < 0$).

Введя обозначение

$$\left(\frac{m_0\cdot E_{(1)}}{3\pi\cdot\hbar^2}\right)^{3/2} \equiv n_*, \qquad (7.19)$$

представим функцию $\tilde{N}(E)$ в виде

$$\tilde{N}(E) = \frac{n}{n_*}\cdot e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}} \quad \left(\frac{n}{n_*} < 1\right). \qquad (7.20)$$

Замечу, что при $\vec{V}_{(1)} = 0$: $\tilde{N}(E) = \frac{n}{n_*}\cdot e^{-\frac{3\left(P_x^2+P_y^2+P_z^2\right)}{4m_0\cdot E_{(1)}}}$. Замечу также, что размерность величины $\tilde{N}$ есть

$$\frac{\text{\textit{среднее по времени число частиц, приходящееся на}}}{\text{\textit{одно состояние с энергией } } E}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\text{\textit{доля частицы, постоянно приходящаяся на}}}{\text{\textit{одно состояние с энергией } } E}$$

Только помня об этом, допустимо считать величину $\tilde{N}$ безразмерной.

Вернемся теперь к последней фразе § 7.4 *«...возможно ли установить вид зависимости $\tilde{N}$ от $\vec{P}_i$, не обращаясь к величине $\tilde{n}(\vec{P}_i, \vec{r}, t)$?»* Ответ на поставленный вопрос вроде бы получен. Стационарную степень заполнения оказалось возможным установить, не обращаясь к величине $\tilde{n}$. Но, какой ценой? Потребовалось задать три величины: n, $\vec{V}_{(1)}$, $E_{(1)}$. Таким образом, из сравнения эффективности механического и статистического способов описания коллектива частиц следует простой вывод: все зависит лишь от целей описания.

§ 7.5. Хаос и порядок в коллективе частиц

7.5.1. Тупиковая ситуация

Расчет величины $\tilde{N}(E)$ покоится на утверждении, что *«вероятность события, в котором одновременно N частиц обладают энергиями (скоростями, импульсами и т. п.) ..., E_i, E_j, ..., равна произведению вероятностей*

---

[18] См. формулу (7.3).

того, что каждая частица в отдельности обладает (в любой момент времени) энергией соответственно $\ldots, E_i, E_j \ldots$ ».

Это утверждение допустимо лишь при условии, что вероятность $\widetilde{N}(E_i)$ не зависит от вероятностей $\widetilde{N}(E_j)$, $\widetilde{N}(E_k)$ и т.д. Подобное условие заведомо не может соблюдаться в коллективе частиц, связанных друг с другом силовым взаимодействием (непрерывным во времени и повсеместным в пространстве). Выясним, удовлетворяет ли названному *условию независимости* коллектив частиц, которые только сталкиваются друг с другом, причем лишь время от времени и притом в пустом пространстве.

Вообще говоря, справедливость, как приведенного выше утверждения, так и условия принято обосновывать одним и тем же аргументом — ***абсолютной хаотичностью*** столкновений. Но в чем состоит ее критерий?

Принято считать хаотичность, например, силового поля абсолютной, если частица в любой момент времени с ***равной*** вероятностью приобретает в этом поле ***любое*** значение импульса (в пределах от 0 до ∞ по модулю и в пределах телесного угла 4π стерадиан по направлению). Столкновения частиц (применительно к рассматриваемой ситуации) можно считать полностью хаотическими, лишь если величина $\widetilde{N}(E)$ ***одна и та же для всех значений*** E (от 0 до ∞). Но стационарная степень заполнения E-состояния, имеющая вид (7.20), может оказаться одной и той же для всех E, лишь если $\widetilde{N}(E) \to 0$. Как следует из формулы (7.20), это возможно в двух случаях:

а) *при конечной и отличной от нуля концентрации* n, *но при* $E_{(1)} \to \infty$;

б) *при ограниченном сверху значении энергии* $E_{(1)}$, *но при* $n \to 0$.

Впечатление такое, что мы зашли в тупик, ибо при ограниченной ***снизу*** величине n и ограниченной ***сверху*** величине $E_{(1)}$ выведенный вид (именно вид) зависимости $\widetilde{N}$ от E несовместим с утверждением, носящим характер постулата (***об абсолютной хаотичности столкновений***), который положен в основу вывода.

Есть только один выход из создавшегося положения — это одновременно:

а) *изменить* ***вид*** *функциональной связи* $\widetilde{N}(E)$, *чтобы перестать ссылаться на вышеупомянутый постулат*;

б) *перестать считать заполнение состояний результатом именно* ***абсолютной*** *хаотичности.*

Тогда можно понадеяться на то, что новая функция $\widetilde{N}(E)$ (конечно при условии, что $0 < \widetilde{N} < 1$) отобразит как ***некоторую*** хаотичность, так и ***некоторую*** упорядоченность в заполнении состояний частицами.

7.5.2. Порядок в коллективе частиц

Подчеркну одно существенное обстоятельство, связанное с численными значениями n и $E_{(1)}$. Неравенство $\frac{n}{n_*} < 1$ означает, что коллектив частиц вполне можно уподобить сильно разреженному газу. Неравенство $0 < \widetilde{N} < 1$ означает, что, несмотря на разреженность газа, его частицы все же сталкиваются друг с другом, и ни одну из них нельзя считать движущейся прямолинейно и равномерно в течение очень уж длительного промежутка времени[19]. Но если концентрация частиц очень мала, а столкновения их тем не менее очень часты, не возникнет ли ситуация, в которой хотя бы ненадолго две частицы (или более) двигались с совершенно одинаковыми скоростями? Предположив такое, нужно, конечно, представить себе частицы различимыми, например, — помеченными номерами. В противном случае, на каком основании можно будет утверждать, что речь идет не об одной и той же частице, движущейся с неизменной скоростью в *«разных»* местах и (или) в *«разное»* время?

Сейчас предлагается попросту ***постулировать***, что вышеописанная ситуация (с пребыванием в ***одном*** $\vec{V}$-состоянии ***двух и более*** частиц ***одновременно***) вообще невероятна. Другими словами, предлагается ввести не что иное, как «запрет Паули».

Обратимся теперь к обстановке, складывающейся в коллективе с очень большой концентрацией частиц. Представим себе, что частицы вообще не сталкиваются, а движутся как свободные бесконечно долго в бесконечно большом объеме. Допустим, что при этом ***все*** N частиц движутся с абсолютно одинаковой скоростью $\vec{V}_0$. Тогда, учитывая неразличимость частиц *по всем остальным* характеристикам (у всех одинаковая масса m_0 и каждая — точечного размера), учитывая, что каждая из них в любой момент времени присутствует в любой точке пространства с равной вероятностью, на каком основании станем мы утверждать, что движется именно N частиц (со скоростью $\vec{V}_0$ каждая), а не одна очень тяжелая частица (тоже со скоростью $\vec{V}_0$)? Иными словами, обнаружив в некоторый момент времени в некотором элементе объема объект, обладающий скоростью $\vec{V}_0$, сумеем мы отличить объект-коллектив из N идентичных частиц от одного цельного объекта массы M $(= N \cdot m_0)$? Это было бы возможно только, если бы объект-коллектив состоял из частиц, каждая из которых чем-то отличалась от всех остальных. Например, номером. Тогда их можно было бы пересчитать и, тем самым, установить, что количество их действительно равно N, причем $N > 1$. Но мы с самого начала условились, что частицы идентичны по своим характеристикам-константам и все движутся в совершенно пустом пространстве, сталкиваясь друг с другом, но всякий раз лишь на мгновение. Такие частицы в принципе могут отличаться друг от друга только скоростью (импульсом)[20]. Тогда единствен-

---

[19] Имеется в виду, что ни одна из частиц не может двигаться непрерывно с постоянной скоростью в течение столь большого промежутка времени, чтобы другие частицы не успели за *это время испытать огромное число столкновений* друг с другом.

[20] В любой момент времени любая свободно движущаяся частица может находиться в любой точке пространства с равной вероятностью. Напомним, что в пустом пространстве все его точки (ячейки) идентичны, из-за чего и приходится пользоваться понятием о вероятности присутствия частицы в точке.

ный способ отличить объект цельный (*физически* неделимый) от объекта-коллектива определенного числа частиц — это восстановить различимость идентичных (по характеристикам-константам) частиц по динамической характеристике[21]. Для этого необходимо выдвинуть требование: чтобы в одном $\vec{V}$-состоянии не могло находиться одновременно более одной частицы из коллектива идентичных частиц[22]. Но если каждая из N частиц обладает вечно *своей* скоростью, значит равенство $\widetilde{N}(\vec{V}) = 1$ имеет место для такого числа $\vec{V}$-состояний, которое в точности равно N. Для всех остальных $\vec{V}$-состояний имеет место равенство $\widetilde{N}(\vec{V}) = 0$, и вот в эти-то — *свободные* — состояния (число которых бесконечно велико) частицы и могут переходить, изменяя тем самым свои скорости.

Из сказанного приходится сделать вывод, что, только если концентрация частиц, составляющих коллектив, бесконечно велика, ни у одной из них не может измениться скорость. Действительно, если $\widetilde{N}(\vec{V}) = 1$ для всех $\vec{V}$ ($\widetilde{N}(E) = 1$ для всех E), то:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{m_0}{\pi \cdot \hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \int\limits_0^\infty 1 \cdot \sqrt{E} \cdot dE =$$

$$= \left(\frac{m_0}{2\pi\hbar}\right)^3 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z = \infty. \qquad (7.21)$$

Отмеченную выше невозможность изменения частицами скоростей вполне можно представить (в описательных целях) как проявление упорядоченности (налагаемой принципом запрета) в заполнении $\vec{V}$-состояний.

Из выражения (7.21) следует простой вывод:

абсолютная упорядоченность в заполнении состояний достижима лишь при условии, что концентрация частиц коллектива бесконечно велика. (Вывод 1)

Как видим, принцип запрета — это средство, позволяющее адекватно отобразить в рамках принятого — статистического — способа описания объектов отличие коллектива точечных и неотличимых друг от дружки частиц от физически принципиально неделимого тела (например, такого материального континуума, как электромагнитное поле).

К сожалению, термин *«упорядоченность заполнения $\vec{V}$-состояний»* очень часто подменяют термином *«корреляция между частицами, обусло-*

---

[21] Цельный объект, то есть объект, который *физически* неделим, можно лишь вообразить состоящим из частей, а раз уж вообразить, то — из *какого угодно числа* частей. Имеется в виду — частей меньшей массы, или меньшего размера, или чего-либо еще.

[22] Мы вновь пришли к запрету Паули. Пользуясь случаем, замечу, что *какое угодно* число частей *цельного* объекта (на который его мысленно произвольно разделили) *должно* находиться в одном состоянии.

вленная запретом Паули», а потому следует иметь в виду, что *«упорядоченность заполнения $\vec{V}$-состояний»* никакими силами не вызвана.

7.5.3. В поисках новой функции распределения

Попробуем выяснить, как должны отражаться на виде функции $\widetilde{N}(E)$ и хаотичность, и упорядоченность. Будем исходить из предположения, что зависимость $\widetilde{N}(E)$ в виде

$$\widetilde{N}(E) = \frac{n}{n_*}e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}} \quad \left(\frac{n}{n_*} < 1\right). \tag{7.20}$$

отображает как хаотичность (пусть и очень большую, но все же не абсолютную), так и упорядоченность (пусть и очень малую, но не полное ее отсутствие).

Забудем на время способ вывода зависимости $\widetilde{N}$ от E. Согласимся (как это уже предлагалось ранее) с тем, что абсолютная хаотичность означает ***одинаковую*** степень заполнения любого E-состояния из бесконечно большого их числа. Тогда, оглядываясь на формулу (7.20), можно выдвинуть следующие утверждения.

а) Абсолютная случайность заполнения состояний частицами — та наивысшая неупорядоченность в заполнении, которая в принципе только и возможна, — реально недостижима, если концентрация частиц коллектива пусть и очень мала, но отлична от нуля. Ведь только при условии, что $E_{(1)} \to \infty$, величина $\widetilde{N}(\vec{V})$ (автоматически $\widetilde{N}(E)$) одинакова — ***исчезающе мала*** — для всех $\vec{V}$. Таким образом, абсолютная случайность является лишь пределом, к которому можно неограниченно приближаться, неограниченно увеличивая скорость движения отдельной частицы $(V_{(1),*})$ между столкновениями[23] (или, что — то же самое, неограниченно увеличивая частоту столкновений частиц друг с другом).

б) Стереть абсолютно все следы упорядоченности в заполнении всех состояний (в том числе и с энергией $E = 0$) реально невозможно, если скорость движения частицы между столкновениями хотя и очень велика, но ограничена сверху. В этом случае, чтобы стереть все следы упорядоченности, нужно неограниченно уменьшать концентрацию частиц.

Иными словами, за хаотичность (случайность) отвечает величина $E_{(1)}$, а за упорядоченность — величина n.

Для абсолютной хаотичности необходимы условия:

$$\text{либо} \quad E_{(1)} \to \infty \qquad \text{при} \quad 0 < n \neq \infty;$$
$$\text{либо} \quad n \to 0 \qquad \text{при} \quad 0 < E_{(1)} \neq \infty.$$

---

[23] Напомню, что эта величина $\left(V_{(1),*} = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle\tau\rangle}\right)$ и величина $E_{(1)}$ связаны соотношением (7.9,а).

Из вышеупомянутых утверждений а) и б) следует вывод:

как бы ни была велика, лишь бы не бесконечно велика, концентрация частиц коллектива, их все-таки можно вынудить сталкиваться друг с другом столь часто, чтобы стереть почти все (но не абсолютно все) следы упорядоченности заполнения состояний. (Вывод 2)

Чтобы добиться этого, необходимо увеличить скорость движения отдельной частицы между столкновениями до величины, намного превышающей «пороговую», то есть, реализовать неравенство

$$V_{(1),*} \gg \sqrt{6\pi} \cdot \frac{\hbar}{m_0} \cdot n^{1/3} \tag{7.22,а}$$

или эквивалентное ему неравенство

$$E_{(1)} \gg \frac{3\pi \cdot \hbar^2}{m_0} \cdot n^{2/3}. \tag{7.22,б}$$

И вот, если коллектив частиц находится именно в таких условиях, можно использовать для степени заполнения выражение (7.20).

Если сопоставить (Вывод 1) и (Вывод 2), то вполне уместно задать два вопроса: можно ли стереть почти все следы хаотичности (то есть достичь очень высокой степени упорядоченности), если концентрация частиц пусть и очень велика, но все же не бесконечно велика; достаточно ли для этого неограниченно уменьшать величину $E_{(1)}$? В поисках ответов целесообразно вернуться к соотношению (7.21).

Требование абсолютной упорядоченности означает, что для всех $\vec{V}$ (всех E)

$$\widetilde{N}(\vec{V}) = \widetilde{N}(E) = 1. \tag{7.23,а}$$

Однако требование ограниченности величины

$$n \left(= \int_0^\infty \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE \right)$$

сверху означает, что

$$0 < \int_0^\infty \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE \neq \infty. \tag{7.23,б}$$

Если добавить еще и требование, чтобы коллектив частиц как целое находился в состоянии с минимальной энергией, то оба соотношения (7.23) можно согласовать единственным образом — допустив, что

$$\widetilde{N}(E) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant E < E_\text{ф}; \\ 0 & \text{при} \quad E_\text{ф} < E, \end{cases} \tag{7.24}$$

где $E_\text{ф}$ — некоторая величина с размерностью энергии.

Используя соотношения (7.24), преобразуем двойное неравенство (7.23,б) к виду $\int\limits_0^\infty \widetilde{N}(E)\cdot G_E\cdot dE = \int\limits_0^{E_\Phi} 1\cdot G_E\cdot dE + \int\limits_{E_\Phi}^\infty 0\cdot G_E\cdot dE = n$, где, по условию, $0 < n \neq \infty$.

Используя уже известное выражение (см. формулу (7.3))

$$G_E = G_{\vec{P}}\cdot 4\pi\cdot P^2\cdot\frac{dP}{dE} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\cdot\left(\frac{m_0}{\pi\cdot\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\sqrt{E},$$

получаем: $n = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\cdot\left(\frac{m_0}{\pi\cdot\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot(E_\Phi)^{2/3}$, откуда:

$$E_\Phi = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3}\cdot\frac{\pi\cdot\hbar^2}{m_0}\cdot n^{2/3}. \tag{7.25}$$

Теперь нужно выяснить, чему при этом может быть равна (или должна быть равна) величина $E_{(1)}$. И здесь самое время вспомнить, что, если $n > 0$, а $E_{(1)} \neq \infty$, то хаотичность столкновений частиц друг с другом не является абсолютной и величину $E_{(1)}$ нельзя полностью отождествить с энергией движения отдельной частицы между столкновениями. Поэтому будем считать величину $E_{(1)}$ (или $V_{(1),*}$ [24]) всего лишь ***параметром***, характеризующим коллектив в целом.

Рассмотрим зависимости $\widetilde{N}(E)$ и $\dfrac{dn}{dE}(E)$, отвечающие различным конечным значениям $E_{(1)}$ и удовлетворяющие при этом требованиям $n = \text{const}$, $n < n_*$ (рис. 7.6).

Пока неравенство $E_{(1)} \gg \frac{3\pi\hbar^2}{m_0}n^{2/3}$ остается в силе, уровень упорядоченности (контроль за которым следует вести, оценивая степень заполнения состояния с энергией $E = 0$) нарастает с уменьшением $E_{(1)}$:

$$\widetilde{N}\,(E=0) = \frac{n}{\left(E_{(1)}\right)^{3/2}}\cdot\left(\frac{3\pi\cdot\hbar^2}{m_0}\right)^{3/2}. \tag{7.26}$$

Следует заметить, что состояние с энергией $E = 0$ находится в наиболее угрожаемом положении, почему это состояние и выбрано в качестве подконтрольного.

Соотношение (7.26) перестает быть справедливым, как только $E_{(1)}$ уменьшится настолько, что нарушится условие $\widetilde{N}\,(E=0) < 1$. Нарушение принципа запрета (иначе говоря, упорядочение сверх абсолютного, — когда $\widetilde{N} > 1$) и вынуждает признать вид (7.20) зависимости $\widetilde{N}(E)$ уже совершенно неадекватным реальной ситуации. Следовательно, при условии $E_1 \to 0$ необходимо искать новый вид зависимости $\widetilde{N}(E)$.

На рис. 7.7 представлена функция $\widetilde{N}(E)$, удовлетворяющая требованиям (7.23,б) и (7.24).

---

[24] См. сноску на с. 219.

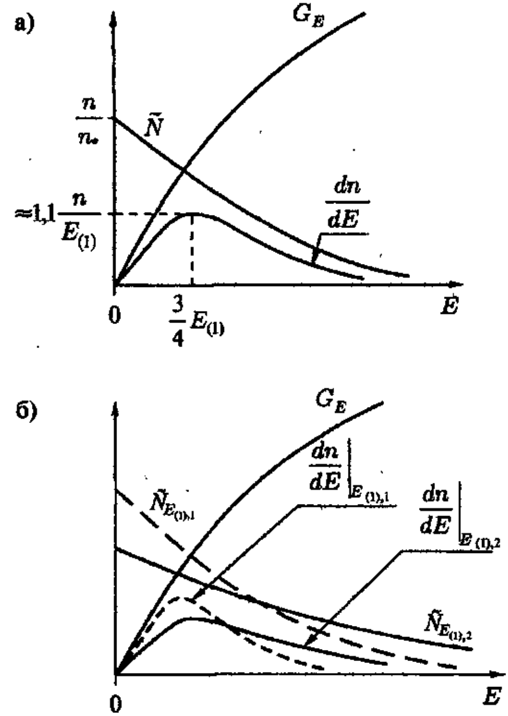


Рис. 7.6. Графики зависимостей $G_E(E)$; $\tilde{N}(E)$; $\frac{dn}{dE}(E)$.

а) При некотором значении параметра $E_{(1)}$.

б) При двух различных значениях параметра $E_{(1)}$ $\left(E_{(1),2} > E_{(1),1}\right)$ и при условии, что $n\left(= \int\limits_0^\infty \frac{dn}{dE} \cdot dE\right)$ не зависит от $E_{(1)}$.

Поскольку для коллектива с конечной (и отличной от нуля) концентрацией ломаная линия 1 соответствует наивысшей достижимой упорядоченности, разумно предположить, что отвечающий за хаотичность параметр $E_{(1)}$ при этом минимален.

Будем искать вид зависимости $\tilde{N}(E)$, при конечных n и $E_{(1)}$, руководствуясь следующими соображениями.

1. $\tilde{N}(E) = \dfrac{n}{n_*} \cdot e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}}$ при $n < n_*$, $E_{(1)} > 0$.

2. $\tilde{N}(E) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant E < E_{\text{ф}}, \\ 0 & \text{при } E_{\text{ф}} < E \end{cases}$ при $E_{(1)} = E_{(1),\text{мин}} = 0$, $n > 0$.

3. Величины n и $E_{(1)}$ считаются независимыми друг от друга параметрами функциональной связи между $\tilde{N}$ и E, так что вполне допустимо

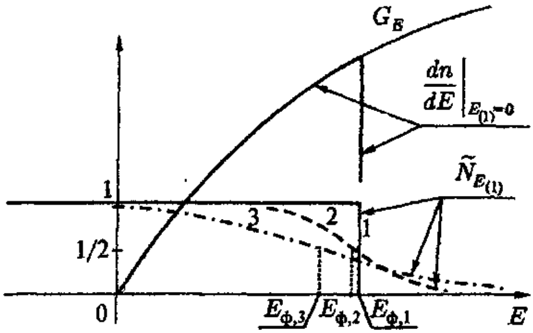


Рис. 7.7. Эволюция зависимости $\widetilde{N}(E)$.
1. $E_{(1),1} = 0$; 2. $E_{(1),2} > 0$; 3. $E_{(1),3} > E_{(1),2}$.

предположить, что

$$\widetilde{N} = \left(1 + f\left(n, E_{(1)}\right) \cdot e^{\frac{3E}{2E_{(1)}}}\right)^{-1},$$

где $f\left(n, E_{(1)}\right)$ — функция n и $E_{(1)}$, точный вид которой предстоит установить.

Удобно преобразовать искомую функцию к виду

$$f(n, E_{(1)}) = \exp\left\{-\frac{3E_\Phi(n, E_{(1)})}{2E_{(1)}}\right\},$$

объявив функцией n и $E_{(1)}$ введенную ранее величину E_Φ. После этого

$$\widetilde{N}(E) = \left[1 + \exp\left\{\frac{E - E_\Phi(n, E_{(1)})}{\frac{2}{3}E_{(1)}}\right\}\right]^{-1}. \tag{7.27}$$

Здесь:

$$E_\Phi(n, E_{(1)}) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \cdot \frac{\pi \cdot \hbar^2}{m_0} \cdot n^{2/3}$$

при условии, что $E_{(1)} = 0$; (7.28,а)

$$E_\Phi(n, E_{(1)}) = \frac{2}{3}E_{(1)} \cdot \ln \frac{n}{\left(\frac{m_0 \cdot E_{(1)}}{3\pi \cdot \hbar^2}\right)}$$

при условии, что $E_{(1)} \gg \dfrac{3\pi \cdot \hbar^2}{m_0} \cdot n^{2/3}$. (7.28,б)

Проверка показывает, что при условии (7.28, а) действительно имеют место соотношения

$$\int_0^\infty \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE = n; \quad \widetilde{N}(E) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant E < E_\Phi, \\ 0 & \text{при} \quad E_\Phi < E; \end{cases}$$

а при условии (7.28, б) соотношения

$$\widetilde{N}(E) = \frac{n}{n_*} \cdot e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}} \quad \left(\text{где } n_* = \left(\frac{m_0 \cdot E_{(1)}}{3\pi \cdot \hbar^2}\right)^{2/3}\right); \quad \int\limits_0^\infty \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE = n.$$

Величину E_Φ, отвечающую промежуточным значениям $E_{(1)}$, приходится находить, считая соотношение $\int\limits_0^\infty \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE = n$ уже уравнением

$$n = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{m_0}{\pi \cdot \hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{E} \cdot \left(1 + \exp\left\{\frac{E - E_\Phi(n, E_{(1)})}{\frac{2}{3}E_{(1)}}\right\}\right)^{-1} \cdot dE$$

с неизвестной E_Φ и заданными (известными) параметрами n и $E_{(1)}$. В частности оказывается, что при условии $0 < E_{(1)} \ll \frac{3\pi \cdot \hbar^2}{m_0} \cdot n^{2/3}$ величину E_Φ можно представить приближенным выражением

$$E_\Phi(n, E_{(1)}) \approx E_\Phi(n, E_{(1)} = 0) \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot E_{(1)}}{3E_\Phi(n, E_{(1)} = 0)}\right)^2\right].$$

Семейство кривых $E_\Phi(n, E_{(1)})$ представлено на рис. 7.8. Штриховая линия отображает сделанный ранее вывод о возможности ликвидировать следы хаотичности, наращивая концентрацию частиц n при неизменном значении параметра $E_{(1)}$. Штрих-пунктирная линия (вдоль кривой) отображает еще один ранее сделанный вывод — о возможности стереть следы упорядоченности, увеличивая значение параметра $E_{(1)}$ при неизменной концентрации частиц n.

В заключение хотелось бы обратить внимание, правда, искушенного читателя, на одно обстоятельство. В главе 5 было доказано, что точечная частица обязательно обладает спином — механическим моментом, абсолютное значение проекции которого на одну (любую) ось пространственных координат равно $\frac{\hbar}{2}$. В этой главе была обоснована необходимость применения принципа запрета (Паули) при описании состояния коллектива точечных частиц. Именно отсюда и ниоткуда больше проистекает пресловутая *«связь спина со статистикой»*. Этот расхожий термин употребляют с целью указать на то, что функция распределения Ферми—Дирака (функция (7.26) относится только к ***коллективам*** объектов, обладающих ***полуцелым*** спином. Подчеркну, что, на самом деле, специфика упомянутой функции состоит лишь в учете запрета Паули (применимого только к ***коллективам*** точечных частиц) и никакой информации о спине не содержит.

Что касается материального ***континуума*** (поля), то подобный объект, хотя и не обладает спином подобно точечной частице, тем не менее, способен ***изменять значение проекции спина частицы*** (причем величина

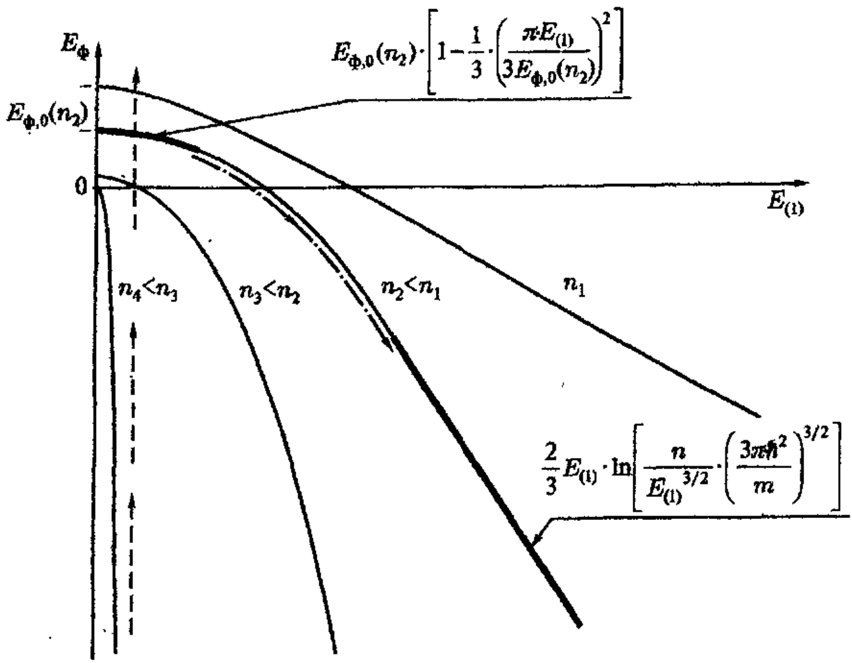


Рис. 7.8. Семейство кривых $E_\Phi(n, E_{(1)})$.
(Символом $E_{\Phi,0}$ обозначена величина $E_\Phi(n, E_{(1)} = 0)$.)

изменения равна $\hbar$). ***Отсюда возникает соблазн и континууму приписать собственный механический момент (спин), модуль проекции которого на какую-либо ось пространственных координат, естественно, объявить равным*** $\hbar$. Однако на коллектив частей континуума (а любой континуум допустимо ***мысленно*** разделить на какое угодно число частей) запрет Паули распространяться, конечно, не может, и потому функцией распределения Ферми—Дирака коллектив подобных объектов с ***целым*** «спином» (***конечно, спином только в кавычках***) описываться не может. Ему отвечает функция распределения Бозе—Эйнштейна, описывающая распределение по состояниям именно ***частей*** объекта.

Тем не менее, коллектив четного числа точечных частиц (занимающий ненулевой объем[25]) как целое обладает целочисленной проекцией спина. Условно назовем коллектив ограниченного четного числа частиц корпускулой (двухчастичной, четырехчастичной и т. п.). Так вот коллектив подобных корпускул допустимо описывать функцией распределения Бозе—Эйнштейна лишь в рамках определенных моделей, в которых

[25] Именно этим коллектив точечных частиц напоминает континуум, заполняющий отнюдь не малый, а сплошь и рядом — огромный объем пространства.

исключают возможность обмена частицами между пространственно разделенными корпускулами. Нельзя пренебрегать запретом Паули, описывая состояние коллектива пусть четного числа частиц, но ***частиц, которые — все — непрерывно взаимодействуют именно друг с дружкой,*** а не корпускул, которые друг с дружкой лишь изредка сталкиваются.

7.5.4. Равновесие с термостатом.

Мы пришли к выводу, что параметр $E_{(1)}$ (автоматически — величина $V_{(1),*}$) тем слабее отличается от кинетической энергии (а параметр $V_{(1),*}$ от скорости движения) отдельной частицы коллектива между столкновениями, чем больше численное значение параметра $E_{(1)}$. Чтобы лучше понять, в каких ситуациях и для чего следует использовать величины $E_{(1)}$ и $V_{(1),*}$, рассмотрим конкретный пример, условившись отождествить эти величины соответственно со скоростью и энергией отдельной частицы.

Допустим, что два коллектива частиц $\mathrm{K}\left(n^k, V^k_{(1),*}, E^k_{(1)}\right)$ и $\mathrm{L}\left(n^l, V^l_{(1),*}, E^l_{(1)}\right)$ находились по разные стороны абсолютно непроницаемой перегородки, которую в некоторый момент времени мгновенно убрали (рис. 7.9). Начнем следить за явлениями, происходящими на мысленной, уже абсолютно проницаемой для частиц поверхности, разделявшей два коллектива.

Допустим, что в момент, когда была убрана перегородка, плотности потоков частиц на «поверхности раздела» были равны:

$$n^k \cdot V^k_{(1),*} = n^l \cdot V^l_{(1),*}.$$

Естественно, что равенство потоков частиц имело место и повсюду слева и справа от перегородки. Но допустим еще, что

$$\frac{V^k_{(1),*}}{V^l_{(1),*}} = \frac{n^l}{n^k} > 1. \tag{7.29}$$

Тогда очевидно, что ***не*** равны друг другу объемные концентрации энергии и плотности ***ее*** потоков (J_E):

$$\frac{m}{2} \cdot \left(V^k_{(1),*}\right)^2 \cdot n^k \neq \frac{m}{2} \cdot \left(V^l_{(1),*}\right)^2 \cdot n^l;$$

$$J^k_E = \frac{m}{2} \cdot \left(V^k_{(1),*}\right)^2 \cdot V^k_{(1),*} n^k \neq J^l_E = \frac{m}{2} \cdot \left(V^l_{(1),*}\right)^2 \cdot V^l_{(1),*} n^l.$$

Согласно формуле (7.29), $J^k_E > J^l_E$, что отражает существование процесса переноса энергии из K-области в L-область.

Итак, в L-область непрерывно влетают частицы со скоростью $V^k_{(1),*}$ большей, чем $V^l_{(1),*}$. Испытав множество столкновений с родными для L-области частицами, пришельцы свою скорость уменьшат, тогда как скорость частиц-аборигенов возрастет. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока у каждой из частиц, движущихся (и сталкивающихся)

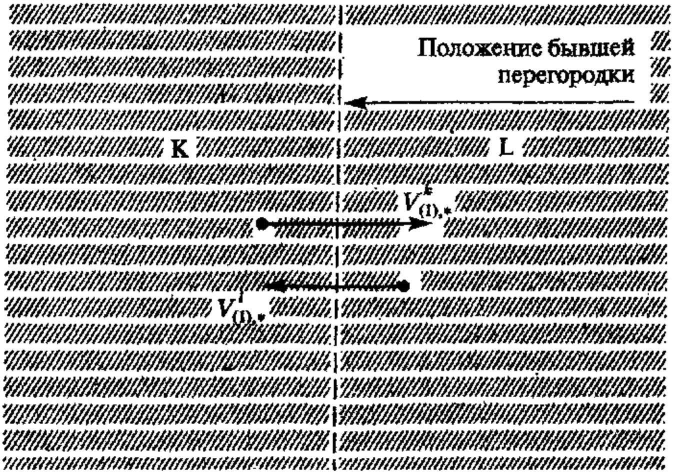


Рис. 7.9. Контакт двух коллективов.

справа от бывшей перегородки, не окажется одинаковая скорость $V_{(1),*}$, удовлетворяющая неравенству

$$V^l_{(1),*} < V_{(1),*} < V^k_{(1),*}. \tag{7.30}$$

В K-область непрерывно влетают частицы со скоростью меньшей, чем $V^k_{(1),*}$. Испытав множество столкновений с частицами-пришельцами, частицы-аборигены свою скорость уменьшат, тогда как скорость пришельцев возрастет. В итоге мы, естественно, придем к тому же неравенству (7.30) для каждой из частиц, движущихся (и сталкивающихся) слева от бывшей перегородки.

Замечу, что выравнивание потоков энергии будет сопровождаться нарушением былого равенства потоков частиц: если $V^l_{(1),*} = V^k_{(1),*} = V_{(1),*}$, то $n^l > n^k$. Однако совершенно очевидно, что, в конце концов, возникнет равновесное состояние коллектива в целом: концентрация частиц во всех частях коллектива станет одинаковой, концентрация энергии — одинаковой, параметр $E_{(1)}$ — одинаковым. Не будет никаких результирующих потоков из одной части в другую[26].

Теперь рассмотрим те же два коллектива частиц K и L, но уже вечно разделенных тонкой стенкой с единственной целью воспрепятствовать переходам частиц. Поэтому вечно $n^l > n^k$. Тем не менее, K-частицы и L-частицы будут время от времени сталкиваться друг с другом, оставаясь

[26] Была представлена, конечно, вымышленная ситуация с разделением во времени двух процессов: выравнивания концентрации частиц и выравнивания концентрации энергии. Сделано это было лишь с одной целью: обратить внимание на то, что равновесие между частями коллектива по одному параметру не означает автоматически равновесия по другому параметру.

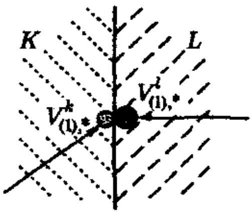


Рис. 7.10. Столкновение частиц на стенке, разделяющей коллективы.

при этом по разные стороны стенки (рис. 7.10). В результате окажется так, что хотя $n^l > n^k$, но $E^k_{(1)} = E^l_{(1)} = E_{(1)}$ (автоматически $V^l_{(1),*} = V^k_{(1),*} = V_{(1),*}$). Назовем возникшую ситуацию термодинамическим равновесием двух различных (по концентрации частиц) коллективов и задумаемся над вопросом, нельзя ли создать такой коллектив, который мог бы для всех других играть роль *«тела сравнения»*. Назовем такое тело *термостатом*. Его принципиальным отличием от всех реальных коллективов будет то, что в нем величины $E_{(1)}$ и $V_{(1),*}$) представляют собой ***точно*** энергию и скорость движения отдельной частицы. Уже было доказано, что в этом случае степень заполнения $\widetilde{N}(E)$, которая равна

$$\widetilde{N}(E) = \frac{n}{n_*(E_{(1)})} \cdot e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}} = \frac{n}{\left(\frac{m_0 \cdot E_{(1)}}{3\pi \cdot \hbar^2}\right)^{2/3}} \cdot e^{-\frac{3E}{2E_{(1)}}},$$

должна быть исчезающе мала при всех E.

Потребуем, чтобы концентрация ($n_т$) частиц термостата удовлетворяла условию

$$\lim_{E_{(1)}\to 0} \frac{n_т}{n_*(E_{(1)})} = \lim_{E_{(1)}\to 0} \left(\frac{3\pi \cdot \hbar^2}{m_0 \cdot E_{(1)}}\right) \cdot n_т = 0.$$

Тогда при $E_{(1)} > 0$ равенство $\frac{n_т}{n_*} = 0$ будет выполняться, что называется, «с запасом». Конечно, величина $n_т$ должна быть тогда исчезающе малой. С учетом этого потребуем, чтобы объем, занимаемый термостатом, был бесконечно велик (в частности и по сравнению со сколь угодно большим объемом контактирующего коллектива). В этом случае и число частиц термостата оказывается сколь угодно большим, и энергия его не может измениться из-за контакта с коллективом любых конечных размеров.

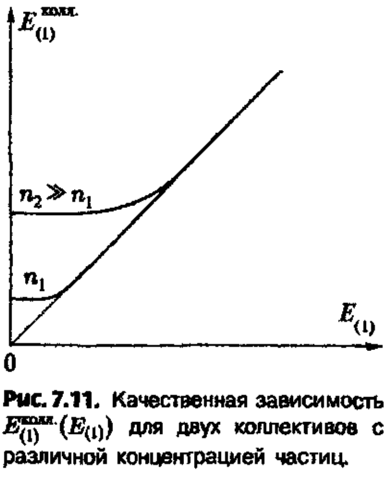


Рис. 7.11. Качественная зависимость $E^{колл.}_{(1)}(E_{(1)})$ для двух коллективов с различной концентрацией частиц.

Теперь можно придать физическую содержательность параметру $E_{(1)}$ уже ***реального*** коллектива — с конечной и отличной от нуля концентрацией частиц n. Разумеется, такое понятие, как энергия отдельной частицы нетрудно определить для любого коллектива. Пометим эту величину символом $E^{колл.}_{(1)}$, определим ее равенством $E_{(1)}^{\text{колл.}} = \frac{1}{n} \cdot \int\limits_0^\infty E \cdot \widetilde{N}(E) \cdot G_E \cdot dE$ и вспомним, что как раз с ней-то и нельзя отождествить параметр $E_{(1)}$, если $0 < n \neq \infty$, $0 < E_{(1)} \neq \infty$. Но если термодинамическое равновесие такого коллектива с термостатом имеет место, то лишь потому, что отдельная частица коллектива передает термостату через стенку такую же энергию $E_{(1)}$, какую передает коллективу через ту же стенку отдельная частица термостата. Для частицы термостата переданная ею энергия $E_{(1)}$ — это и есть вся ее энергия: $E_{(1)} \equiv E_{(1)}^{\text{т}}$. Но для частицы коллектива это только часть ее, энергии, ибо при всех $E_{(1)}$: $E_{(1)}^{\text{колл.}} > E_{(1)}$.

На рис. 7.11 показана качественная зависимость $E_{(1)}^{\text{колл.}}$ от $E_{(1)}$ для двух коллективов (с очень высокой и очень низкой' концентрацией частиц).

Имеет смысл дать параметру $E_{(1)}$ — той ***части*** кинетической энергии отдельной частицы, которой частица одного коллектива может ***обмениваться*** с частицей другого, — специальное название. Увы, ...оно давно дано. Но, к сожалению, не величине $E_{(1)}$ и не $\frac{2}{3}E_{(1)}$ (что было бы логично, так как именно последняя входит в качестве параметра в выражение для $\widetilde{N}(E)$). Название ***«температура»*** дано величине $\frac{2E_{(1)}}{3k_B}(\equiv \text{T})$, где k_B $\left(\approx 0{,}86 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{эВ}}{\text{К}}\right)$ — так называемая постоянная Больцмана.

Приложение 1

Описание и объяснение

Ранее я несколько раз отмечал, что хотя адекватное описание явления природы или эксперимента совершенно обязательно и в подавляющем большинстве случаев должно предшествовать его объяснению, это не означает, что в последнем вообще нет необходимости. Я также отмечал, что немало специалистов отвергает необходимость объяснения, либо открыто заявляя, что в рамках физической теории такого понятия не существует, либо хладнокровно выдавая описание за объяснение. Я приведу два, на мой взгляд дилетанта, ярких примера подобных точек зрения.

Первый пример касается спина точечной частицы.

Предложив ***постулировать*** оператор спина сразу же в виде

$$\widehat{\vec{S}} = i \cdot \hbar \cdot \left(\vec{e}_x \cdot \widehat{\alpha_y}\widehat{\alpha_z} + \vec{e}_y \cdot \widehat{\alpha_z}\widehat{\alpha_x} + \vec{e}_z \cdot \widehat{\alpha_x}\widehat{\alpha_y} \right) , \qquad (\Pi 1.1)$$

Дирак, тем самым, дал возможность использовать этот оператор при решении конкретных задач, например, при расчете энергии так называемого спин-орбитального взаимодействия электрона атома[1]. Однако само выражение (П1.1) ни в малейшей степени не позволяет понять, как движется (и движется ли вообще) точечная частица, оператор механического момента (спина) которой представлен вышеупомянутым выражением. Именно поэтому спин всегда считался самой загадочной характеристикой точечной частицы. В подтверждение своих слов приведу три цитаты:

«...элементарной частице следует приписывать некоторый „собственный" момент **(имеется в виду механический момент — *Ф. В.*)**, *не связанный с ее движением в пространстве. Это свойство является специфически квантовым ...и потому принципиально не допускает классической интерпретации. ...было бы совершенно бессмысленным представить себе „собственный" момент элементарной частицы* **(имеется в виду частица точечная — *Ф. В.*)** *как результат ее вращения вокруг „своей оси"»* **(*Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 227.)**

«Наличие спина у микрочастицы означает, что в некоторых отношениях она подобна маленькому вращающемуся волчку. Однако эта аналогия чисто формальная... Собственный момент, согласно квантовой теории,

---

[1] Располагая выражением для оператора спина, можно получать и другие выражения с его участием.

может быть у точечной частицы». **(Физика микромира. Советская энциклопедия. М., 1980. С. 36.)**

«Спин — это мистическое чудище и, тем не менее, влияние его распространяется на всю науку...

Спин занимает уникальное положение в преподавании физики, так как для его понимания необходимо знание множества разделов физики различной степени сложности. По этой причине не существует учебного пособия по квантовой механике, в котором суть дела излагалась бы с достаточной глубиной...» **(Из предисловия, написанного профессором Такéси Óка, к книге Синитúро Томонáги THE STORY OF SPIN (История спина), The University Chicago Press, 1997.)**

Сейчас я приведу то, что с точки зрения дилетанта могло бы выглядеть объяснением.

Начну с очевидного: соглашаясь считать спин механическим моментом, дилетант не в состоянии разделить точку зрения мэтров теоретической физики, потому что дилетанта учили понимать под механическим моментом векторное произведение радиус-вектора точки пространства, в которой в данное мгновение находится частица, на ее импульс. Поэтому я и предложил в 6.4 проверить, не представим ли оператор спина векторным произведением двух векторных же операторов, после чего и оказалось, что представим.

Однако и такое представление все еще не является объяснением, ибо, если и ***свободную*** частицу считать вращающейся, то непонятно, как она ухитряется так двигаться в ***пустом*** пространстве. А ведь свободной частицу допустимо считать лишь в пустом пространстве, в котором, казалось бы — по определению, нет ничего, кроме самой частицы. Самое главное — нет силового центра, способного притягивать вращающуюся вокруг него частицу, удерживая ее, тем самым, на стационарной орбите.

И вот теперь я предлагаю читателю вернуться в самое начало книги, где говорилось о том, как следует представлять себе то реальное пространство, в котором только и могут находиться реальные материальные объекты. А пространство это поляризуемо, и «с точки зрения заряженной частицы» выглядит оно так.

То бесконечно протяженное пространство, которое могло бы считаться пустым[2)], заполнено флуктуирующим (***хаотически*** колеблющимся) как в пространстве, так и во времени электромагнитным полем. И пространственный, и временной «периоды» колебаний напряженности поля исчезающе малы. Отсюда следует, что пространство представляет собой еще и ***сплошную*** среду, ***электронейтральную лишь в среднем.*** При этом, несмотря на то, что области пространства отличных от нуля (небольших) размеров могут быть в течение некоторых (непродолжительных) промежутков времени электрически заряжены, внутри этих областей

[2)] Такое пространство вполне допустимо назвать ***математическим*** пространством.

не существует частиц — носителей зарядов. В подобную сплошную среду можно вставить без сопротивления любой материальный объект.

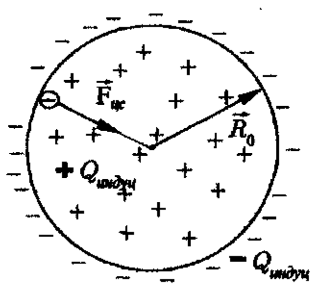


Рис. П1.1. Пространственное распределение заряда в пределах собственно-орбитальной сферы электрона.

Таким образом, точечная, заряженная, вращающаяся по собственной орбите частица, даже будучи одним-единственным материальным объектом в пустом пространстве, не может считаться свободной в традиционном смысле слова, ибо пространство допустимо считать пустым только в кавычках. Упомянутая частица взаимодействует с «пустым» пространством как «электростатически», поляризуя его своим зарядом, так и «электродинамически», излучая и поглощая свет (электромагнитное поле). Не может ли тогда оказаться так, чтобы в результате взаимодействия с «пустым» пространством, например, точечного электрона распределение пространственного заряда внутри собственно-орбитальной сферы электрона приобрело вид, показанный на рис. П1.1? Что же касается самого точечного электрона, то поскольку в любой момент времени он с равной вероятностью присутствует в любой точке сферы, его заряд допустимо считать размазанным по ее поверхности. В результате оказывается, что не только ***модуль*** вектора результирующего (флуктуирующего во времени) электрического поля, но уже ***сам вектор в среднем по времени отличен от нуля в каждой точке пространства и внутри собственно-орбитальной сферы, и вне ее.*** Именно этот вектор и следует называть напряженностью именно ***электростатического*** поля, возникшего вместе с точечной заряженной частицей.

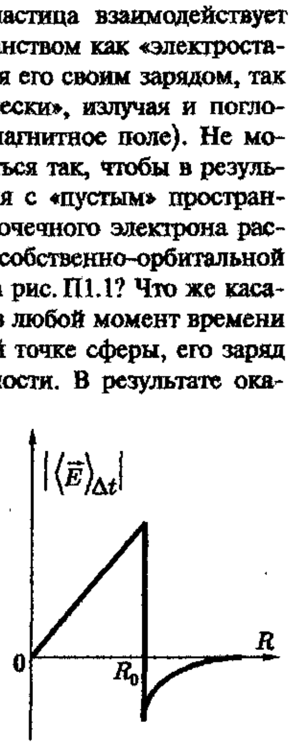


Рис. П1.2. Пространственное распределение электрического поля, возникшего вместе с электроном. За пределами собственно-орбитальной сферы электрона ($R > R_0$) имеет место зависимость $|\langle\vec{E}\rangle_{\Delta t}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, соответствующая закону Кулона.

На рис. П1.2 представлен график зависимости абсолютного значения напряженности результирующего электростатического (то есть — усредненного по времени) поля от расстояния от центра собственно-орбитальной сферы (зависимости, соответствующей распределению заряда, представленному на рис. П1.1).

Из рис. П1.2 следует, что электрон притягивается к центру своей орбитальной сферы с силой $\vec{F}_{цс}$, значение которой можно вычислить, руководствуясь следующими соображениями.

С одной стороны стационарное значение силы $\vec{F}_{цс}$, поддерживающей вращение точечной заряженной частицы, должно быть равно

$$F_{цс} = m \cdot \left(\frac{u_0^2}{R_0}\right), \tag{П1.2}$$

где $\left(\frac{u_0^2}{R_0}\right)$ — стационарное значение центростремительного ускорения, $\vec{u}_0$ — собственно-орбитальная скорость частицы, причем, как уже говорилось ранее, $u_0^2 = 3ç^2$.

С другой стороны значение центростремительной силы притяжения частицы к индуцированному ею же заряду, согласно закону Кулона, равно:

$$F_{цс} = \left\{\frac{Q_{индуц} \cdot Q_{частицы}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_0^2}\right\}, \tag{П1.3}$$

где $F_{цс}$ – стационарное значение силы; ε_0 — электрическая постоянная «пустого» пространства; R_0 — радиус собственно-орбитальной сферы.

Напомню, что стационарное значение является, по определению, значением, усредненным по бесконечно большому промежутку времени.

Из равенств (П1.2) и (П1.3) можно найти величину того индуцированного заряда, который и удерживает частицу на собственной орбите:

$$\left|Q_{индуц}\right| = \left|Q_{частицы}\right| \cdot \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot u_0^2 \cdot m \cdot R_0}{Q^2_{частицы}}. \tag{П1.4}$$

Значение радиуса R_0 можно вычислить, исходя из достоверно установленного абсолютного значения спина, равного $\sqrt{3} \cdot \frac{\hbar}{2}$:

$$R_0 = \frac{S}{m \cdot u_0} = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2m \cdot u_0}. \tag{П1.5}$$

Подставляя в качестве u_0 величину $\sqrt{3}ç$, получаем из формулы (П1.4):

$$\left|Q_{индуц}\right| = \frac{3}{2} \cdot \left|Q_{частицы}\right| \cdot \frac{1}{\&},$$

где $\& \equiv \frac{Q^2_{частицы}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot ç}$.

Если в качестве заряда частицы принять значение заряда электрона, то $\& \approx \frac{1}{137}$ (это очень знаменитая ***«постоянная тонкой структуры»***), а $Q_{индуц} \approx 205{,}5$ электрона[3].

Следует иметь в виду, что в каких бы движениях ни участвовал центр инерции точечной заряженной частицы (вращающейся по собственной орбите), повсюду частицу будут сопровождать непрерывно индуцируемые ею внутриорбитальный и приорбитальный заряды.

---

[3] Следует помнить, что индуцированный заряд не создан точечными заряженными частицами, а представляет собой заряженную сплошную среду.

На этом объяснение происхождения спина точечной частицы закончено. Теперь я предлагаю посмотреть, для чего оно (уже не описание, а именно объяснение) может пригодиться.

Я приведу три примера[4].

1. *Хорошо известна проблема так называемой расходимости тоже так называемой собственной энергии электрона*

Суть проблемы в том, что если считать электрон точечным, то, поскольку возникает он вместе со своим электростатическим полем, общая энергия этого материального образования равна бесконечности, так как равна бесконечности энергия поля:

$$E_{\text{поля}} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\cdot\int\limits_0^\infty \left\langle \mathrm{E}^2(R)\right\rangle_{\Delta t}\cdot 4\pi\cdot R^2\cdot dR =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\cdot\int\limits_0^\infty \left(\frac{Q_{\text{электрона}}}{4\pi\varepsilon_0\cdot R^2}\right)^2\cdot 4\pi\cdot R^2\cdot dR = \infty\ ^{5)}.$$

Однако, если согласиться с тем, что электрон не может существовать иначе, как обязательно двигаясь еще и по поверхности собственно-орбитальной сферы ***конечного***, а не нулевого радиуса, то электростатическое поле[6], автоматически возникшее в пространстве с появлением в нем ***точечной*** вращающейся частицы, нигде не равно бесконечности.

В самом деле. Напряженность поля, созданного зарядами $+Q_{\text{индуц}}$ и $-Q_{\text{индуц}}$, в пространстве вне собственно-орбитальной сферы электрона равна нулю. Далее, если допустить, что плотность (ρ) распределенного внутри сферы индуцированного заряда не зависит от R, то, естественно, $\rho = \frac{Q_{\text{индуц}}}{\frac{4}{3}\pi\cdot(R_0^3)}$, а тогда при $R < R_0$ напряженность поля равна

$$\langle \mathrm{E}(\rho, R)\rangle_{\Delta t} = \frac{\rho\cdot R}{3\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{индуц}}\cdot R}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot(R_0^3)},$$

и

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{индуц}}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\int\limits_0^{R_0}\langle \mathrm{E}(\rho, R)\rangle^2_{\Delta t}\cdot 4\pi\cdot R^2\cdot dR = \frac{9\cdot m_0\cdot \varsigma^2}{20\&}.$$

Энергия же поля, которое традиционно называется *созданным самой частицей* (заряд которой теперь следует считать размазанным по поверх-

---

[4] Еще ряд примеров приведен в книге «Логическая структура частной теории относительности» (М.: УРСС, 2001).

[5] Напряженность электростатического поля, *«созданного»* ***покоящимся*** точечным электроном равна $\frac{Q_{\text{электрона}}}{4\pi\varepsilon_0\cdot R^2}$.

[6] Поле можно назвать электростатическим, учитывая, что это поле отлично от нуля лишь в среднем по времени.

ности сферы радиуса R_0), внутри самой сферы равна нулю, а вне сферы равна

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{электрона}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int\limits_{R_0}^{\infty} \left(\frac{Q_{\text{электрона}}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} \right)^2 \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot dR = \& \cdot m_0 \cdot \varsigma^2.$$

Таким образом, энергия внеорбитального электростатического поля, традиционно считающегося созданным точечным покоящимся электроном, составляет очень малую долю его кинетической энергии вращения — бывшей энергии «покоя»:

$$E_{\text{поля}}(Q_{\text{электрона}}) = \& \cdot m_0 \cdot \varsigma^2 \approx \frac{m_0 \cdot \varsigma^2}{137}.$$

2. *Проблема связи между собственным магнитным моментом электрона и его собственным магнитным потоком?*

Давайте мысленно перенесемся в 1927 год, когда уже признано, что такая точечная частица, как электрон, обладает спином, а поскольку она является электрически заряженной и массивной, то автоматически обладает и собственным магнитным моментом $\vec{M}_0$. Будем иметь в виду, что уже установлено, что значение проекции спина на какую-либо ось координат, например, значение S_z равно именно $\frac{\hbar}{2}$, а значение проекции величины $\vec{M}_0$ на ту же ось равно $\frac{|q|}{m} \cdot \frac{\hbar}{2}$.

Учитывая, что мы пребываем (мысленно) в 1927 году, я также предлагаю читателю забыть, что электрон не может существовать иначе, как вращаясь по собственной орбите — сфере конечного радиуса R_0. Будем считать, что, как написано во всех солидных трудах, спин электрона — самая загадочная характеристика, ибо, с одной стороны, спин — это механический момент (*векторное произведение радиус-вектора точки пространства, в которой присутствует в момент времени электрон, на вектор импульса электрона*), а, с другой стороны, спин никак не связан с движением электрона и потому не допускает классической интерпретации, являясь специфически квантовой характеристикой. Давайте, попросту говоря, согласимся считать, что значение S_z, равное $\frac{\hbar}{2}$, установлено опытным путем, а спрашивать, почему электрон обладает механическим моментом (спином), даже будучи ***неподвижным***, — это все равно, что спрашивать, почему заряд электрона равен именно $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Скажем про себя, что так уж устроена Вселенная).

Вполне естественно после всего, что тогда говорилось о спине, считать равенство $M_{0,z} = \frac{|q|}{m} \cdot \frac{\hbar}{2}$ установленным также опытным путем.

Вот теперь, наконец, вопрос. Является ли частица, обладающая собственным магнитным моментом, источником собственного магнитного потока (обозначу его символом Φ_0)?

Казалось бы, какой еще можно дать ответ, кроме — ***да***. Но тогда должно существовать соотношение между величинами Φ_0 и $M_{0,z}$. Как же оно должно выглядеть?

Если бы речь шла, например, о круглой петле (радиуса R), по которой протекает постоянный электрический ток (рис. П1.3), мы воспользовались бы хорошо известным соотношением

$$\Phi = \mu_0 \cdot M_{0,x} \cdot \frac{1}{R^3} \cdot \pi \cdot R^2, \tag{П1.6}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Гн}}{\text{см}}$.

Однако, если речь идет о частице, хотя и обладающей магнитным моментом, но частице ***неподвижной и точечной***, радиусу неоткуда взяться.

В таком случае возможны три варианта ответа на вопрос, как должно выглядеть соотношение между величинами Φ_0 и $M_{0,x}$ и как оно могло быть установлено.

а) В результате озарения, подобного тому, благодаря которому было предложено выражение $S_x = \frac{\hbar}{2}$, некто предложил и соотношение

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot |q| \cdot \mu_0 \cdot \varsigma.^{7)}$$

б) В результате экспериментальных исследований было установлено, что электрон является источником собственного магнитного потока такого, что

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot |q| \cdot \mu_0 \cdot \varsigma.$$

в) Некто, исходя из физических соображений, ***вывел*** нижеследующее соотношение между величинами Φ_0 и $M_{0,x}$:

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot |q| \cdot \mu_0 \cdot \varsigma. \tag{П1.7}$$

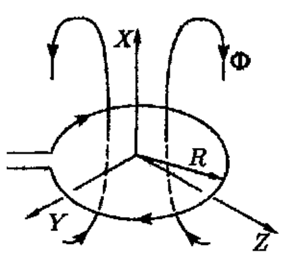


Рис. П1.3. По проволочной петле радиуса R протекает постоянный ток, создавая, тем самым, магнитный поток Φ.

Хотелось бы обратить внимание читателя на странное положение. Совершенно очевидно, что спиновой магнитный момент не может не «создавать» спинового магнитного потока. Тем не менее, не только соотношения, связывающего величины Φ_0 и $M_{0,x}$, не найти ни в одной книге (ни в одной статье). Нигде нет даже простого упоминания о спиновом — собственном — магнитном потоке какой-либо частицы (хотя бы — электрона). Вот, почему я рискую предложить собственный вывод соотношения (П1.7). Но при этом я буду считать, что электрон ***не может существовать иначе, как участвуя в собственно-орбитальном***

[7] Иначе говоря, попросту постулировал это выражение.

вращения. Отсюда следует, что и спиновой магнитный момент, и спиновой магнитный поток не могут не возникать, и возникают они исключительно вследствие вращения точечной заряженной частицы по собственной орбите радиуса R_0.

Учитывая, что проекция собственно-орбитальной сферы электрона на плоскость ZY представляет собой окружность радиуса $R_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\cdot\varsigma}$, можно воспользоваться соотношением (П1.6) и написать:

$$\Phi_0 = \mu_0 \cdot \frac{|q|\cdot\hbar}{2m} \cdot \frac{\pi\cdot R_0^2}{R_0^3} = \frac{\pi\cdot|q|\cdot\hbar\cdot\mu_0}{2m\cdot R_0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot|q|\cdot\mu_0\cdot\varsigma.$$

Замечу, что величина, равная $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot|q|\cdot\mu_0\cdot\varsigma$, вполне достойна именоваться фундаментальной, поскольку представляет собой произведение так называемых мировых констант. В этой связи стоит обратить внимание и на другую столь же фундаментальную величину $\frac{2\pi\cdot\hbar}{2|q|}\ \left(=\frac{\pi\cdot\hbar}{|q|}\right)$, хорошо знакомую специалистам в области физики и техники сверхпроводников. Величину $\frac{\pi\cdot\hbar}{|q|}$ эти специалисты заслуженно называют ***квантом*** магнитного потока, так как магнитный поток внутри сверхпроводящего кольца может изменяться только на величину, кратную $\frac{\pi\cdot\hbar}{|q|}$. Так вот спиновой магнитный поток (это одна фундаментальная величина) меньше кванта магнитного потока (другой фундаментальной величины) примерно в 15 раз:

$$\frac{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot|q|\cdot\mu_0\cdot\varsigma}{\pi\cdot\left(\frac{\hbar}{|q|}\right)} = \frac{4\pi\cdot\&}{\sqrt{2}}.$$

Заканчивая, отмечу, что из двух вышеупомянутых величин, конечно, допустимо образовать конструкцию, которую тоже можно было бы назвать фундаментальной:

$$\sqrt{\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot|q|\cdot\mu_0\cdot\varsigma\right)\cdot\pi\cdot\frac{\hbar}{|q|}} = \frac{\pi}{2^{1/4}}\cdot\sqrt{\hbar\cdot\mu_0\cdot\varsigma} \equiv \Phi.$$

Однако попытки придать образованной таким способом величине Φ статус физической характеристики были бы очень похожи на попытки получить метр колючей проволоки, скрещивая ежа с ужом.

3. *О стабильности атома водорода*

Теперь перейду еще к одному примеру, иллюстрирующему различие между описанием и объяснением.

Как известно, к резерфордовской модели атома водорода было несколько претензий. Наиболее часто упоминаемая из них связана с тем очевидным фактом, что вращающийся по орбите вокруг протона электрон, естественно, движется ускоренно, а потому должен непрерывно излучать электромагнитное поле. Ясно, что из-за этого его кинетическая энергия должна непрерывно уменьшаться, и, в конце концов, он обязательно упадет в протон, после чего атом водорода прекратит свое существование.

Принято считать, что квантовая механика объяснила стабильность атома. Но каково оно, это объяснение? Предлагается решить уравнение на собственные значения (уравнение Шредингера) и убедиться в том, что имеет место, по крайней мере, одно решение, которому соответствует значение полной энергии электрона, находящегося вечно в электростатическом сферически симметричном поле. То есть в поле, которое ***заведомо*** считается существующим вечно и притом — неизменным. Но ведь — существующим только вместе с протоном... Таким образом, сначала подбирают такое уравнение, которое согласовалось бы с ***предположением*** о вечной стабильности атома водорода, а потом с удовлетворением отмечают, что стабильность действительно имеет место.

Теперь замечу, что даже на этапе составления уравнения либо вообще ни слова не произносится об ускорении (возможно, по рассеянности, а, возможно, потому, что никто не собирался измерять величину ускорения), либо утверждается, что оно равно нулю. В последнем случае в качестве доказательства приводится выражение для ускорения в виде:

$$\langle\vec{a}\rangle = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Psi^*(r,\theta,\varphi)\cdot\hat{\vec{a}}\,\Psi(r,\theta,\varphi)\cdot d\varphi,$$

после чего предлагается подставить в качестве Ψ-функции любое решение уравнения Шредингера и убедиться в том, что $\langle\vec{a}\rangle = 0$.

Однако я должен напомнить, что величина, традиционно помещаемая в угловые скобки (в знак того, что это величина средняя), является усредненной по ***времени***[8] (ибо Ψ-функция есть решение ***стационарного*** уравнения состояния), так что цивилизованной формой символа вектора ускорения электрона (как частицы в целом), усредненного по ***времени***, следует считать, по крайней мере, такую: $\langle\vec{a}\rangle_{\Delta t}$.

Нет ничего удивительного в том, что, сложив друг с другом все векторы — во всех направлениях в телесном угле 4π стерадиан (при том, что абсолютные значения противоположно направленных векторов равны), — мы установим равенство нулю вектора результирующего (вектора суммы). Разделив нуль на число мгновений, составляющих вечность, конечно, получим нуль. Но разве не очевидно, что ***мгновенное*** значение ускорения электрона (как частицы в целом) вовсе не равно нулю?

Давайте обратимся к определению оператора ***мгновенного*** ускорения:

$$\hat{\vec{a}} = \widehat{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)} = \frac{1}{m_0}\cdot\widehat{\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)} = -\frac{i}{\hbar\cdot m_0}\cdot\left(\hat{\vec{P}}\,\hat{H} - \hat{\vec{P}}\,\hat{H}\right). \qquad (\text{П}1.8)$$

Гамильтониан $\hat{H}$ применительно к обсуждаемой проблеме имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m_0} + \frac{q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r}, \qquad (\text{П}1.9)$$

где q — заряд электрона, ε_0 — электрическая постоянная.

[8] В данном случае — по бесконечно продолжительному промежутку времени.

Подставив выражение (П1.9) в формулу (П1.8), найдем, что

$$\hat{\vec{a}} = \vec{a} = \frac{1}{m_0} \cdot \left(-\operatorname{grad} \left(\frac{q^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \right) \right) = \frac{\vec{F}(r)}{m_0} \neq 0 \ ^{9)},$$

где $\vec{F}$, — ***мгновенная*** величина силы притяжения электрона к протону [10].

Согласно одному из фундаментальных постулатов квантовой механики — принципу соответствия, если оператор физической величины не равен нулю, то и она сама отлична от нуля. Иначе говоря, мгновенное значение ускорения, испытываемое электроном в поле протона, не равно нулю (что, впрочем, всегда было очевидно).

Таким образом, и в рамках квантовой механики электрон водорода испытывает ускорение и, следовательно, должен непрерывно излучать энергию.

В связи с этим выводом автоматически возникает еще один вопрос: а куда девается излучаемая энергия? Ведь, оторвавшись от электрона-излучателя, электромагнитное поле превращается в свободное и вполне может быть тем же электроном поглощено из того пространства, в котором он движется и которое теперь заполнено полем. Так, может быть электрон попросту находится в равновесии с полем, ежесекундно излучая в пространство столько энергии, сколько он из пространства поглощает?

Теперь стоит обратить внимание на две другие тесно связанные проблемы.

1. ***Почему в атоме водорода электрон и протон существуют вечно, разумеется, будучи разделенными пространственным промежутком? Иначе говоря, почему электрон вечно движется в электрическом поле протона (считающегося, допустим, такой же точечной частицей, как и электрон) вместо того, чтобы один раз врезаться в протон под действием силы электрического притяжения, которая, казалось бы, должна неограниченно возрастать, сближая обе частицы? Но мыслимо ли, чтобы оказалось возможным столкновение точечных частиц?***
2. ***Поскольку экспериментаторам удается столкнуть электрон как с позитроном, так и с протоном (после чего обе частицы, оказавшись-таки в одной точке пространства, прекращают свое существование), то почему не сталкиваются электрон с протоном, когда они образуют атом водорода? Ведь они постоянно притягиваются друг к другу.***

(Разумеется, оставаясь в рамках чистой механики, невозможно объяснить, почему происходят сами явления синтеза и распада, исчезновения и возникновения частиц. Сегодня физика лишь констатирует, что подобные явления имеют место. Давайте поэтому будем иметь в виду только

---

[9] Видно, что в выбранном пространственно-временном представлении оператор мгновенного ускорения совпадает с самим ускорением.

[10] Сила зависит от расстояния между электроном и центром поля (протоном). Поскольку электрон непрерывно движется, это расстояние меняется во времени.

одно единственное обстоятельство: чтобы атом водорода перестал существовать, электрон и протон должны оказаться в одной точке пространства ***одновременно***; чтобы электрон и позитрон аннигилировали, они должны оказаться в одной точке пространства ***одновременно***.)

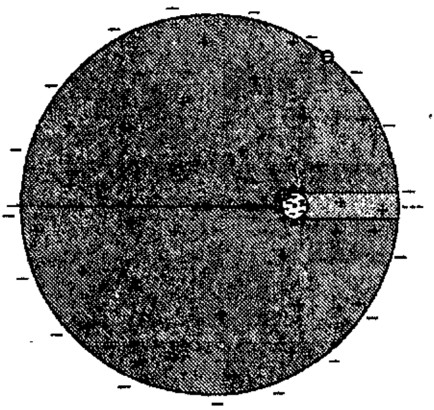


Рис. П1.4. Прохождение электрона мимо протона в атоме водорода (огромная собственно-орбитальная сфера электрона (темная) надвигается на крохотную сферу протона (светлую)).

Плотность внутриорбитального индуцированного заряда равна $\rho_{\text{индуц}} = \frac{12\varepsilon_0 \cdot m^3 \cdot c^4}{q^2 \cdot \hbar^3}$.

Тот, индуцируемый электроном положительный заряд, который мог быть сосредоточен внутри сферы радиусом, равным радиусу собственно-орбитальной сферы протона, составляет примерно 10^{-10} от того заряда, который индуцирует протон.

Решение поставленных проблем начнем с атома водорода, причем, простоты ради, будем считать протон не коллективом кварков, а столь же элементарной точечной частицей, сколь электрон. Будем рассматривать только s-состояние электрона, в котором он не обладает орбитальным механическим моментом и, следовательно, представляется (в рамках квантово-механического способа описания) вечно падающим в протон.

Пока центры собственно-орбитальных сфер обеих частиц удалены друг от друга на достаточно большое расстояние, частицы, естественно, не могут оказаться в одной точке пространства. Поэтому рассмотрим, что происходит в течение того короткого промежутка времени, в течение которого собственно-орбитальная сфера электрона надвигается на собственно-орбитальную сферу протона (рис. П1.4). Здесь следует учесть, что все это время импульс электрона остается малым по сравнению с величиной $m_0 \cdot c$, из-за чего радиус его собственно-орбитальной сферы практически не меняется, оставаясь примерно в 1800 раз большим, чем радиус сферы протона[11]. А из-за этого абсолютное значение индуцированного положительного заряда внутри электронной сферы в течение всего времени контакта сфер остается тем же, что и до контакта.

Далее, тот положительный объемный заряд, который должен был бы оказаться внутри собственно-орбитальной сферы протона, составляет

[11] Это — следствие различия в значениях масс покоя электрона и протона (см. формулу П1.5).

примерно 10^{-10} от объемного отрицательного заряда, сосредоточенного внутри этой сферы. Вот, почему в течение всего времени контакта сфер практически не происходит взаимной нейтрализации зарядов внутри собственно-орбитальной сферы электрона, радиус которой, напомню, остается примерно в 1800 раз большим радиуса сферы протона. Это и означает, что электрон и протон никак не могут оказаться одновременно в одной точке пространства.

Обратимся теперь к электронно-позитронной паре. Допустим, простоты ради, что центры их собственно-орбитальных сфер движутся навстречу друг другу по прямой линии. Допустим также, что относительно той точки, в которой следовало бы ожидать совпадения центров сфер, значения импульсов центров инерции обеих частиц (а центр инерции отождествляется с центром сферы) ***точно*** одинаковы. Тогда ***точно одинаковы и радиусы обеих сфер, и абсолютные значения плотности индуцированных зарядов.***

Как только в процессе сближения собственно-орбитальные сферы электрона и позитрона войдут в контакт, возникнет ***общая*** для обеих частиц поверхность, на которой им придется далее находиться. Но эта поверхность будет стремительно сжиматься, поскольку индуцированные заряды противоположных знаков ***точно*** нейтрализуют друг друга в приконтактной области (рис. П1.5). В результате электрон и позитрон, вынужденные оставаться на общей поверхности, неумолимо сводятся в одну точку пространства вследствие коллапса этой самой поверхности.

Хотелось бы заметить, что понятно, почему в результате аннигиляции электрон-позитронной пары не возникает одна точечная частица. Запрет на превращение двух электрически «разноименно» заряженных частиц в нейтральную, обладающую отличной от нуля массой покоя, отражается рациональной интерпретацией знаменитого соотношения $E = \pm q\cdot\sqrt{\left(\varsigma\cdot\vec{P}\right)^2 + \left(\varsigma\cdot\vec{P}_0\right)^2}$, согласно которому не может существовать точечная ***массивная***, но ***электронейтральная*** частица[12]. Кроме того, не могут ***две*** точечные частицы, каждая из которых обладает ***полуцелым*** спином,[13] превратиться в ***одну*** точечную, но обладающую ***целым*** спином либо вообще бесспиновую. В главе 6 уже было показано, что точечная частица любой разновидности не может существовать, не вращаясь по собственной орбите, что автоматически придает ей спин, причем именно полуцелый.

В заключение отмечу, что описанный выше процесс аннигиляции электрон-позитронной пары объясняет также и то, почему можно попасть электроном в протон. Для этого достаточно так разогнать электрон и (или) протон, чтобы к моменту контакта их собственно-орбитальных сфер массы движения обеих частиц оказались равными. Тогда и радиусы их сфер окажутся равными, в результате чего обе частицы окажутся

---

[12] См. § 6.6, с. 192.

[13] Имеется в виду, что модуль проекции вектора спина на ось координат равен $\hbar/2$.

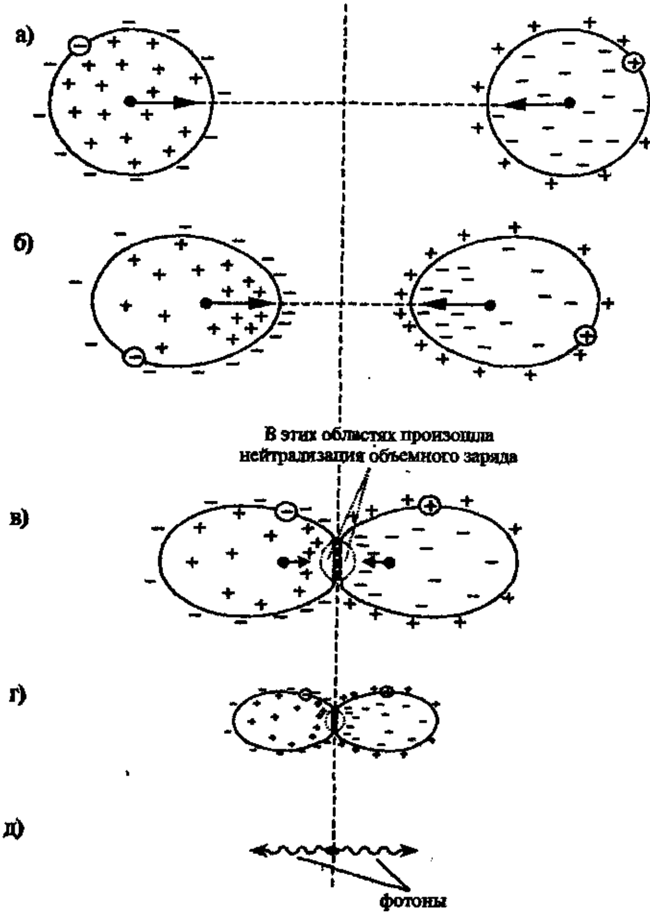


Рис. П1.5. Процесс сближения электрона и позитрона, заканчивающийся аннигиляцией.

Как только собственно-орбитальные сферы частиц входят в контакт, происходит нейтрализация объемных зарядов в области предполагаемого перекрытия. Собственно-орбитальные сферы непрерывно деформируются и сжимаются по мере сближения центров. Тем самым находящиеся на общей поверхности электрон и позитрон неукоснительно сводятся в одну точку пространства.

на общей коллапсирующей поверхности. В итоге электрон и протон как частицы, обладающие вполне определенными массами покоя и зарядами, исчезнут. Правда, вместо них почти мгновенно возникают другие тоже точечные частицы. Именно поэтому подобное явление целесообразно назвать не аннигиляцией, а трансмутацией.

Приложение 2

Взаимодействие отдельной частицы коллектива с внешним объектом и взаимодействие частиц друг с дружкой

П2.1. Введение

В этом приложении речь пойдет об описании состояния коллектива точечных частиц, взаимодействующих именно друг с дружкой вне зависимости от того, взаимодействует или нет каждая частица в отдельности с внешним для коллектива объектом. При этом, простоты ради, предлагается не считать точечную частицу вращающейся по собственной орбите вследствие непрерывного взаимодействия ее с «пустым» пространством. Кроме того, опять же простоты ради, предлагается считать, что в одном $\vec{P}$-состоянии может находиться только одна частица, а не две с антипараллельными спинами.

Для описании состояния коллектива имеет смысл воспользоваться дираковской символикой, то есть ввести вектор $|\ldots\rangle$ и со-вектор $\langle\ldots|$ состояния (эквиваленты Ψ- и $\widetilde{\Psi}$-функций), и операторы заполнения ($\vec{P}$-состояния частицей) и удаления (из $\vec{P}$-состояния частицы).

Вектор и со-вектор, описывающие «состояние» $\vec{P}$-пространства в отсутствии частиц, имеют вид $|0\rangle$ и $\langle 0|$, причем вводится конструкция $\langle 0|0\rangle$, называемая «скалярным произведением вектора на со-вектор», после чего принимается равенство

$$\langle 0|0\rangle = 1. \qquad \text{(П2.1,а)}$$

Единственный нуль внутри означает, что ни одно из $\vec{P}$-состояний не заполнено. Вектор в виде $|1_j\rangle$ означает, что заполнено только одно, именно $\vec{P}_j$-состояние. Вектор в виде $|1_j, 1_k\rangle$ означает, что заполнены только два, именно $\vec{P}_j$- и $\vec{P}_k$-состояния и т. п. Принимается, что

$$\langle 1_j|1_j\rangle = 1; \quad \langle 1_j|0\rangle = 0; \quad \langle 1_j|1_k\rangle = 0 \quad \text{и т. п.} \qquad \text{(П2.1,б,в,г)}$$

$$\langle 1_k, 1_j|1_j, 1_k\rangle = 1 \quad \text{и т. п.} \qquad \text{(П2.1,д)}$$

Что касается операторов заполнения $(\widehat{C}^{+})$ и удаления $(\widehat{C}^{-})$ [1], то они работают следующим образом.

$$\left.\begin{array}{llll} \widehat{C}_j^{+}|0\rangle = |1_j\rangle; & \widehat{C}_j^{+}|1_j\rangle = 0; & \langle 1_j|\,\widehat{C}_j^{+} = \langle 0|; & \langle 0|\,\widehat{C}_j^{+} = 0; \\ \widehat{C}_j^{-}|0\rangle = 0; & \widehat{C}_j^{-}|1_j\rangle = |0\rangle; & \langle 1_j|\,\widehat{C}_j^{-} = 0; & \langle 0|\,\widehat{C}_j^{-} = \langle 1_j|; \\ \multicolumn{2}{l}{\left(\widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-} + \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_j^{+}\right)|0\rangle = |0\rangle;} & \multicolumn{2}{l}{\left(\widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-} + \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_j^{+}\right)|1_j\rangle = |1_j\rangle,} \end{array}\right\} \quad (\text{П2.2})$$

откуда, в частности, следует, что

$$\widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-} + \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_j^{+} = 1. \qquad (\text{П2.3,а})$$

Кроме того, принимается, что:

$$\begin{array}{ll} \widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_k^{-} + \widehat{C}_k^{-}\widehat{C}_j{}^{+} = 0; & \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_k^{+} + \widehat{C}_k^{+}\widehat{C}_j^{-} = 0; \\ \widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_k^{+} + \widehat{C}_k^{+}\widehat{C}_j^{+} = 0; & \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_k^{-} + \widehat{C}_k^{-}\widehat{C}_j^{-} = 0. \end{array} \qquad (\text{П2.3,б,в,г,д})$$

Далее, вводятся операторы:
стационарной степени заполнения ***одного*** состояния — величина $\widehat{N}_j \equiv$
$\equiv \widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-} + \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_j^{+}$;

заполнения ***всех*** состояний — величина $\widehat{N} \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-} + \widehat{C}_j^{-}\widehat{C}_j^{+}\right)$ [2].

Величина $\langle\Psi|\,\widehat{N}_j\,|\Psi\rangle \equiv \widetilde{N}_j$ считается средним по времени числом частиц, находящихся в $\vec{P}_j$-состоянии (здесь вектор $|\Psi\rangle$ и со-вектор $\langle\Psi|$, лишены индексов, чтобы символизировать просто некоторое заполнение состояний $\vec{P}$-пространства частицами, образующими коллектив).

Величина $\langle\Psi|\,\widehat{N}\,|\Psi\rangle \equiv \langle N\rangle_{\Delta t}$ считается средним по времени числом частиц, образующих коллектив.

П2.2. Группа частиц, не взаимодействующих друг с дружкой

Если степень заполнения одного $\vec{P}$-состояния (например, j-го) точно равна единице, а всех остальных — нулю, значит мы имеем дело с одной, ***ни с чем не взаимодействующей*** — свободной — частицей. В этом случае:

$$\langle\Psi| = \langle 1_j| = \langle 0|\,\widehat{C}_j^{-}; \quad |\Psi\rangle = |1_j\rangle = \widehat{C}_j^{+}|0\rangle;$$

$$\widetilde{N}_j = \langle 1_j|\,\widehat{C}_j^{+}\widehat{C}_j^{-}|1_j\rangle = \langle 0|0\rangle = 1;$$

$$\widetilde{N}_{k\neq j} = \langle 1_j|\,\widehat{C}_k^{+}\widehat{C}_k^{-}|1_j\rangle = \langle 0_k, 1_j|\,\widehat{C}_k^{+}\widehat{C}_k^{-}|1_j, 0_k\rangle = 0;$$

---

[1] Общепринятые названия этих операторов таковы: ***рождения*** и ***уничтожения***.

[2] Общепринятое название этого оператора — оператор числа частиц.

$$\langle N\rangle_{\Delta t} = \langle 0| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{C}_k^+ \widehat{C}_k^-\right) |0\rangle = \langle 0| \left(\widehat{C}_j^+ \widehat{C}_j^- + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \widehat{C}_k^+ \widehat{C}_k^-\right) |0\rangle =$$

$$= \langle 0| \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_j^- |0\rangle = 1.$$

Полученные результаты, по-видимому, не требуют комментариев в силу полной очевидности. Замечу только, что равенство $\langle N\rangle_{\Delta t} = 1$ означает, что число частиц не флуктуирует во времени.

Обратимся теперь к «коллективу» двух ***свободных*** частиц[3]. В этом случае:

$$\langle\Psi| = \langle 1_k; 1_j| = \langle 0| \widehat{C}_k^- \widehat{C}_j^-; \quad |\Psi\rangle = |1_j; 1_k\rangle = \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_k^+ |0\rangle.$$

Очевидно, что

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1; \quad \widetilde{N}_j = 1; \quad \widetilde{N}_k = 1; \quad \widetilde{N}_{l\neq j;\, l\neq k} = 0; \quad \langle N\rangle_{\Delta t} = 2.$$

Равенство $\langle N\rangle_{\Delta t} = 2$ означает, что число частиц не флуктуирует во времени.

Естественно, что для «коллектива» N свободных частиц

$$|\Psi\rangle = \left(\prod_{j=1}^{N} \widehat{C}_j^+\right)|0\rangle \quad \text{и т. п.}$$

Теперь представим себе, что мы имеем дело с одной частицей, но уже не свободной, а вечно движущейся в силовом поле (произвольной структуры) и потому вынужденной с ним взаимодействовать. Так как в подобной ситуации импульс частицы не может оставаться неизменным во времени, стационарная степень заполнения любого $\vec{P}$-состояния должна быть меньше единицы и больше нуля:

$$0 < \widetilde{N}_j < 1. \qquad (\text{П}2.4)$$

Именно это двойное неравенство является критерием участия отдельной частицы во взаимодействии произвольного характера.

Очевидно, что только если

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\widetilde{N}_j} \cdot \widehat{C}_j^+\right)|0\rangle; \quad \langle\Psi| = \langle 0|\left(\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{C}_j^- \cdot \sqrt{\widetilde{N}_j}\right),$$

имеют место равенства:

$$\langle\Psi| \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_j^- |\Psi\rangle = \widetilde{N}_j \text{ (для любого } j\text{)}; \quad \langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{N}_j . \qquad (\text{П}2.5,\text{а,б})$$

[3] Строго говоря, нет никакого резона называть две и более ***свободные*** частицы коллективом, разве что в кавычках. Коллективом в буквальном смысле слова следует называть две и более частицы, обязательно взаимодействующие (или — хотя бы сталкивающиеся) именно друг с дружкой вне зависимости от участия каждой отдельной частицы во взаимодействии с внешним для коллектива объектом.

Требование равенства $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ (условие нормировки) ведет к необходимости считать, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{N}_j = 1$. Последнее равенство, поскольку $\widetilde{N}_j \neq 0$ для любого j, совместимо с критерием (П2.4), который отражает факт участия частицы во взаимодействии. Физический смысл равенств (П2.5) понятен: частица распределена долями по всему $\vec{P}$-пространству.

Обратимся теперь к «коллективу» двух частиц, каждая из которых независимо от другой взаимодействует с внешним силовым полем, ***но не друг с дружкой***. В этом случае:

$$\langle\Psi| = \langle 0|\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \widehat{C}_k^- \widehat{C}_j^- \cdot \aleph_{jk}\right); \quad |\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \aleph_{jk} \cdot \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_k^+\right)|0\rangle.$$

Требование равенства $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ (условие нормировки) ведет к необходимости считать, что $\aleph_{jk} = -\aleph_{kj}$; $\aleph_{jk}^2 = \aleph_{kj}^2$. Проверка подтверждает, что тогда действительно

$$\langle\Psi|\, \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_j^-\, |\Psi\rangle = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \aleph_{jk}^2; \quad \langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \aleph_{jk}^2 = 1; \quad \langle\Psi|\, \widehat{N}\, |\Psi\rangle = 2.$$

Величина $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty} \aleph_{jk}^2$ представляет собой долю ***двух*** частиц, распределенных по $\vec{P}$-пространству так, что часть этой доли постоянно находится в одном определенном (j-м) состоянии, а другая часть постоянно «размазана» по всем остальным состояниям $\vec{P}$-пространства.

В заключение хотелось бы привлечь внимание читателя к рис. П2.1, на котором показано, как меняется во времени заполнение двух определенных состояний $\vec{P}$-пространства (j-го и k-го) в случае «коллектива» двух частиц, взаимодействующих не друг с дружкой, а каждая в отдельности (независимо одна от другой) с силовым полем.

Хотя каждая из частиц в любой момент времени в каком-то из состояний находится и, как следует из рис. П2.1, каждое из состояний заполняется частицей ***неоднократно*** и довольно часто, гораздо реже j-е и k-е *состояния* заполняются одновременно. Это вполне понятно: ведь заполнение, например, k-го состояния именно в определенный момент времени (тот самый, в который оказалось заполненным именно j-е состояние) есть событие совершенно случайное.

Итак, если частицы не взаимодействуют друг с дружкой, лишь совершенно случайно два ***определенных*** состояния могут оказаться заполненными ***одновременно***.

Давайте введем понятие стационарной степени заполнения двух состояний двумя частицами — величины $\widetilde{N}(\vec{P}_j, \vec{P}_k)$, которую определим выражением

$$\tilde{N}(\vec{P}_j, \vec{P}_k) = \lim_{\Delta t \to \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \tilde{n}(\vec{P}_j, \vec{P}_k, t) \cdot dt \right\},$$

где $\tilde{n}(\vec{P}_j, \vec{P}_k, t)$ — число пар частиц, находящихся в двух состояниях в момент времени t. При этом:

$$\tilde{n} = \begin{cases} 1, & \text{если оба состояния заполнены одновременно;} \\ 0, & \text{если оба состояния не заполнены одновременно.} \end{cases}$$

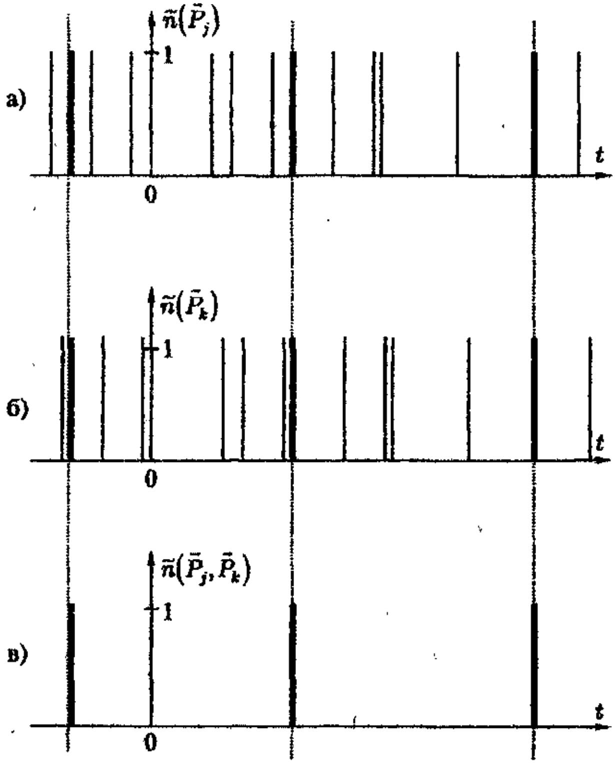


Рис. П2.1. Заполнение двух состояний.

а) Число частиц в j-м состоянии.

б) Число частиц в k-м состоянии.

в) Число пар частиц, оказывающихся в момент времени t в двух состояниях j-м и k-м.

Величина $\tilde{N}(\vec{P}_j, \vec{P}_k)$ есть доля пары частиц, постоянно находящаяся в двух определенных состояниях. Очевидно, что

$$\tilde{N}(\vec{P}_j, \vec{P}_k) = \tilde{N}(\vec{P}_j) \cdot \tilde{N}(\vec{P}_k) < \begin{cases} \tilde{N}(\vec{P}_j), \\ \tilde{N}(\vec{P}_k), \end{cases}$$

как и должно быть, коль скоро одновременное заполнение двух состояний двумя частицами является совершенно случайным событием.

П2.3. Две частицы, взаимодействующие только друг с дружкой

В ситуации, в которой каждая из частиц многочастичного «коллектива» взаимодействует только с внешним по отношению к «коллективу» объектом (естественно, каждая — независимо от других), импульс каждой частицы меняется во времени, но состояние объекта (например, силового поля) предполагается неизменным (поле считается статическим).

В ситуации, в которой частицы взаимодействуют друг с дружкой, тоже меняется импульс каждой частицы, и потому критерий (П2.4) остается в силе. Существует ли еще критерий, отображающий взаимодействие частиц именно друг с дружкой независимо от присутствия-отсутствия в пространстве силового поля?[4] Замечу попутно, что лишь существование межчастичного взаимодействия оправдывает применение термина *коллектив* уже без кавычек.

С целью выявить предполагаемый критерий предлагается рассмотреть простейшую модель коллектива — одномерную цепочку ча-

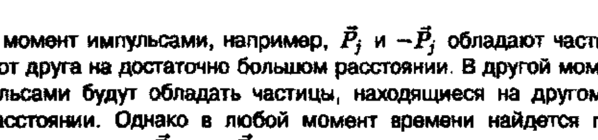


Рис. П2.2. Многочастичный коллектив, представленный в некоторый момент времени.

В этот момент импульсами, например, $\vec{P}_j$ и $-\vec{P}_j$ обладают частицы, находящиеся друг от друга на достаточно большом расстоянии. В другой момент времени этими импульсами будут обладать частицы, находящиеся на другом, возможно, меньшем расстоянии. Однако в любой момент времени найдется пара частиц, обладающих импульсами $\vec{P}_j$ и $-\vec{P}_j$. Все сказанное относится к другим парам импульсов, равных по модулю, но антипараллельных.

Если все частицы колеблются хаотически, то число их, находящееся внутри отрезка, пусть огромной, но ограниченной сверху и **фиксированной** протяженности L, естественно, будет флуктуировать во времени.

[4] Имеется в виду поле, существование которого не зависит от существования коллектива частиц.

стиц, связанных упругими силами, которые символически представлены на рис. П2.2 пружинками. Так как эти пружинки не прикреплены к X-оси, весь коллектив частиц (вместе с пружинками) способен двигаться как целое вдоль X-оси, и в этом (и только в этом) смысле слова каждая частица может считаться еще и свободной. Простоты ради, далее предлагается считать: во-первых, что средняя по времени скорость каждой частицы относительно любой точки X-оси равна нулю; во-вторых, что скорость центра масс всех частиц коллектива равна нулю в любой момент времени. В этом случае, как следует из рис. П2.2, в любой момент времени обязательно найдется множество пар частиц[5] с равными по модулю, но антипараллельными импульсами. Сказанное отражено на рис. П2.3, откуда совершенно очевидно, что $\tilde{N}(\vec{P}_j) = \tilde{N}(-\vec{P}_j)$ для любого j. Кроме того, столь же очевидно, что введенная ранее величина $\tilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j)$ теперь равна

$$\tilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j) = \tilde{N}(\vec{P}_j) = \tilde{N}(-\vec{P}_j) \equiv \tilde{N}_{|j|}. \qquad (\text{П}2.6)$$

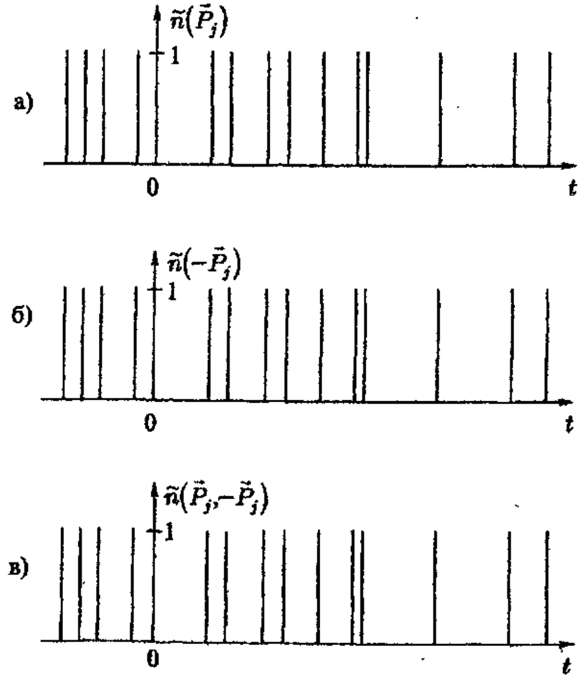


Рис. П2.3. Заполнение состояний частицами.
а) и б) Заполнение j-го и k-го состояний.
в) Заполнение состояния, спаренного из двух состояний, **парой** частиц.

[5] Разумеется, если число частиц четное.

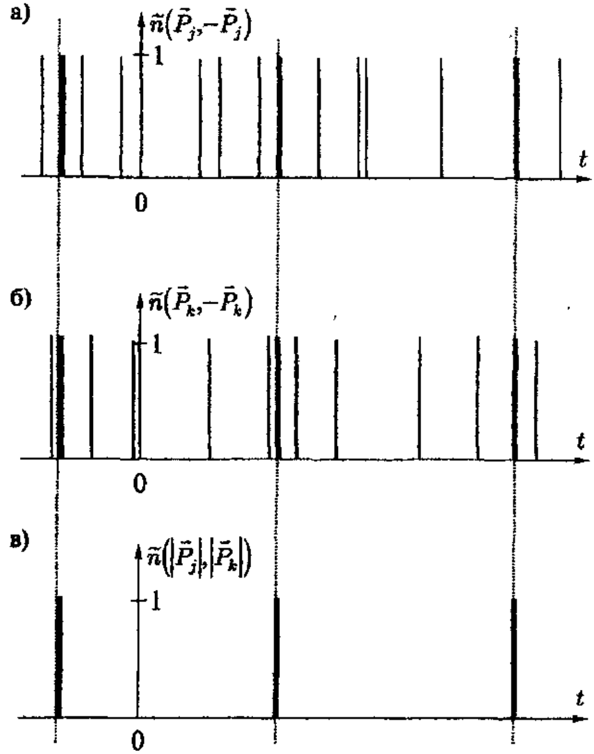


Рис. П2.4. Заполнение двух спаренных состояний двумя парами частиц (а) и б)) и заполнение состояния, составленного из двух спаренных, четверкой частиц (в)).

Взаимодействие частиц именно друг с дружкой в рамках статистического способа описания состояния коллектива означает, что одно событие (заполнение на мгновение одного состояния) происходит только в сопровождении другого события (заполнения в то же мгновение другого состояния). Тогда, разумеется, вероятность того, что происходит первое событие, равна вероятности того, что происходит второе событие, равна вероятности того, что происходят оба события.

Если бы частицы не взаимодействовали друг с дружкой, имело бы место другое равенство: $\tilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j) = \tilde{N}(\vec{P}_j) \cdot \tilde{N}(-\vec{P}_j)$, а при допущении, что $\tilde{N}(\vec{P}_j) = \tilde{N}(-\vec{P}_j)$ — равенство $\tilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j) = \left[\tilde{N}(|\vec{P}_j|)\right]^2$.

Вот и найден критерий (соотношение (П2.6)), позволяющий отобразить взаимодействие частиц именно друг с дружкой [6]. Очевидно, что,

[6] Так как было предположено (простоты ради), что средняя по времени скорость каждой частицы равна нулю (коллектив как целое покоится на X-оси), имеет место

имея дело с таким коллективом, все $\vec{P}$-состояния следует рассматривать только как спаренные.

Что касается величины $\widetilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j; \vec{P}_k, -\vec{P}_k)$, то из рис. П2.4 видно, что равенство $\widetilde{n}(\vec{P}_k, -\vec{P}_k) = 1$ лишь чисто случайно может иметь место в тот самый момент времени, когда именно $\widetilde{n}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j) = 1$. Поэтому усредненное по времени число четверок частиц, находящихся в двух таких состояниях, каждое из которых спарено из двух, равно:

$$\widetilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j; \vec{P}_k, -\vec{P}_k) = \widetilde{N}(\vec{P}_j, -\vec{P}_j) \cdot \widetilde{N}(\vec{P}_k, -\vec{P}_k) = \widetilde{N}_{|j|} \cdot \widetilde{N}_{|k|}. \tag{П2.7,а}$$

Учитывая, что число $\vec{P}$-состояний бесконечно велико, для покоящегося коллектива ***произвольного*** числа пар (N) частиц имеет место равенство[7]:

$$\widetilde{N}[\ldots, (\vec{P}_j, -\vec{P}_j), \ldots] = \prod_{j=1}^{\infty} \widetilde{N}_{|j|}. \tag{П2.7,б}$$

При этом следует иметь в виду, что ***как бы ни было велико число*** N***, оно должно быть величиной высшего порядка малости по сравнению с числом состояний.***

Давайте теперь сконструируем вектор и со-вектор, описывающие покоящийся коллектив произвольного ***четного*** числа частиц, взаимодействующих только друг с дружкой. Для этого, однако, придется ввести еще один оператор — стационарной степени заполнения $\vec{P}$-состояния, ***спаренного*** из j-го и $(-j)$-го $\vec{P}$-состояний:

$$\widehat{N}_{|j|} = \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_j^- \widehat{C}_{-j}^+ \widehat{C}_{-j}^-.$$

С учетом свойств (П2.3), которые были приписаны операторам заполнения и удаления, новый оператор $\widehat{N}_{|j|}$, как оказалось, удобно представить в виде

$$\widehat{N}_{|j|} = \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_{-j}^+ \widehat{C}_{-j}^- \widehat{C}_j^-, \tag{П2.8}$$

что позволяет ввести: оператор заполнения ***спаренного*** состояния —

$$\widehat{\mathrm{C}}_{|j|}^+ \equiv \widehat{C}_j^+ \widehat{C}_{-j}^+ \tag{П2.9,а}$$

и оператор удаления из ***спаренного*** состояния —

$$\widehat{\mathrm{C}}_{|j|}^- \equiv \widehat{C}_{-j}^- \widehat{C}_j^-, \tag{П2.9,б}$$

равенство (П2.6). Если бы коллектив как целое двигался с неизменной скоростью, то при условии, что $\vec{P}_k = \vec{P}_j + \vec{P}_0$; $\vec{P}_l = -\vec{P}_j + \vec{P}_0$ (в этом случае: $\vec{P}_k + \vec{P}_l = 2\vec{P}_0 \neq 0$), имело бы место равенство $\widetilde{N}(\vec{P}_k, \vec{P}_l) = \widetilde{N}(\vec{P}_k) = \widetilde{N}(\vec{P}_l)$.

[7] Если позабыть о выражении (П2.6) и ограничиться ***только*** выражением (П2.7,а) или (П2.7,б), возникнет иллюзия, что коллектив состоит именно из ***пар*** частиц — пространственно разделенных самостоятельных объектов, которые друг с другом ***не*** взаимодействуют, хотя каждый в отдельности взаимодействует с неким внешним телом (которого, на самом деле, нет в рассматриваемом примере).

обладающие теми же свойствами (П2.3), которые были приписаны операторам $\widehat{C}_j^+$ и $\widehat{C}_j^-$. После этого соотношение (П2.8) можно заменить более удобным для выполнения необходимых в дальнейшем операций соотношением

$$\widehat{N}_{|j|} = \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|}. \tag{П2.10}$$

Введенные ранее критерии принимают теперь следующие формы:

$$0 < \langle\Psi|\, \widehat{C}_j^+\widehat{C}_j^- \,|\Psi\rangle < 1, \tag{П2.11,а}$$

$$\langle\Psi|\, \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_j^+\widehat{C}_j^- \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_{-j}^+\widehat{C}_{-j}^- \,|\Psi\rangle. \tag{П2.11,б}$$

Кроме того: $\langle\Psi\Psi\rangle = 1$.

Конструирование вектора и со-вектора, описывающих покоящийся коллектив частиц, взаимодействующих только друг с дружкой, начнем с простейшего — допустим, что спаренное состояние всего одно.

Попробуем сначала использовать вектор и со-вектор, соответствующие паре частиц, хотя и участвующих во взаимодействии, но *не* друг с дружкой:

$$\langle\Psi| = \langle 0|\, \widehat{C}_{-j}^-\widehat{C}_j^- \cdot \aleph_{|j|}^{1/2}; \quad |\Psi\rangle = \aleph_{|j|}^{1/2} \cdot \widehat{C}_j^+\widehat{C}_{-j}^+ \,|0\rangle.$$

В этом случае:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \aleph_{|j|};$$

$$\langle\Psi|\, \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_j^+\widehat{C}_j^- \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_{-j}^+\widehat{C}_{-j}^- \,|\Psi\rangle = \aleph_{|j|}.$$

Очевидно, что из-за того, что $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|}|\Psi\rangle = \ldots$, удовлетворить и условию нормировки $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, и критериям (П2.11) невозможно.

Испытаем тогда другую конструкцию. Пусть

$$\langle\Psi| = \langle 0| \left(\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \cdot \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}}\right); \quad |\Psi\rangle = \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\right)|0\rangle.$$

В этом случае ***автоматически***:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = (1 - \widetilde{N}_{|j|}) + \widetilde{N}_{|j|} = 1;$$

$$\langle\Psi|\, \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_j^+\widehat{C}_j^- \,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\, \widehat{C}_{-j}^+\widehat{C}_{-j}^- \,|\Psi\rangle = \widetilde{N}_{|j|}.$$

Так как $\langle\Psi|\,\Psi\rangle \neq \langle\Psi|\, \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \,|\Psi\rangle$, открывается возможность допустить неравенство $\widetilde{N}_{|j|} < 1$.

Пусть теперь число спаренных состояний будет равно двум. Представим вектор и со-вектор в виде:

$$\langle\Psi| = \langle 0| \left(\widehat{\mathrm{C}}^-_{|k|}\widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \cdot \varepsilon_{|j|,|k|} + \widehat{\mathrm{C}}^-_{|k|} \cdot \chi_{|k|} + \widehat{\mathrm{C}}^-_{|j|} \cdot \chi_{|j|} + \kappa_{|j|,|k|}\right); \tag{П2.12,а}$$

$$|\Psi\rangle = \left(\kappa_{|j|,|k|} + \chi_{|j|} \cdot \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|} + \chi_{|k|} \cdot \widehat{\mathrm{C}}^+_{|k|} + \varepsilon_{|j|,|k|} \cdot \widehat{\mathrm{C}}^+_{|j|}\widehat{\mathrm{C}}^+_{|k|}\right)|0\rangle. \tag{П2.12,б}$$

Потребуем, чтобы помимо условия нормировки выполнялись критерии (П2.11). Выполняя соответствующие операции, приходим к четырем уравнениям с четырьмя неизвестными $\left(\varepsilon_{|j|,|k|}, \chi_{|k|}, \chi_{|j|}, \kappa_{|j|,|k|}\right)$:

$$\left(\varepsilon_{|j|,|k|}\right)^2 + \left(\chi_{|j|}\right)^2 = \widetilde{N}_{|j|}; \quad \left(\varepsilon_{|j|,|k|}\right)^2 + \left(\chi_{|k|}\right)^2 = \widetilde{N}_{|k|};$$
$$\left(\kappa_{|j|,|k|}\right)^2 = \left(1 - \widetilde{N}_{|j|}\right) \cdot \left(1 - \widetilde{N}_{|k|}\right); \quad \left(\varepsilon_{|j|,|k|}\right)^2 = \widetilde{N}_{|j|} \cdot \widetilde{N}_{|k|}\ ^{8)}.$$

Решая эти уравнения, и подставляя решения в выражения (П2.12), находим, что

$$\langle\Psi| = \langle 0| \left\{ \prod_{|j|=1}^{2} \left(\widehat{C}_{|j|}^{-} \cdot \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} \right) \right\}, \qquad (\text{П2.13,а})$$

$$|\Psi\rangle = \left\{ \prod_{|j|=1}^{2} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}_{|j|}^{+} \right) \right\} |0\rangle. \qquad (\text{П2.13,б})$$

Пользуясь методом математической индукции, находим, что для бесконечно большого числа состояний

$$\langle\Psi| = \langle 0| \left\{ \prod_{|j|=1}^{\infty} \left(\widehat{C}_{|j|}^{-} \cdot \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} \right) \right\}, \qquad (\text{П2.14,а})$$

$$|\Psi\rangle = \left\{ \prod_{|j|=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}_{|j|}^{+} \right) \right\} |0\rangle. \qquad (\text{П2.14,б})$$

Среднее по времени число пар частиц равно

$$\langle\Psi| \left(\sum_{|j|=1}^{\infty} \widehat{C}_{|j|}^{+} \widehat{C}_{|j|}^{-} \right) |\Psi\rangle = \sum_{|j|=1}^{\infty} \widetilde{N}_{|j|}. \qquad (\text{П2.15})$$

В заключение хотелось бы отметить одно обстоятельство.

Уже на примере вектора (П2.13,б) видно, что он ***не*** является собственным вектором оператора степени заполнения обоих спаренных состояний:

$$\left(\widehat{C}_{|j|}^{+} + \widehat{C}_{|k|}^{+}\right)|\Psi\rangle = \left\{ \left(\widehat{C}_{|j|}^{+} + \widehat{C}_{|k|}^{+}\right) \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}_{|j|}^{+} \right) \cdot \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|k|}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{\widetilde{N}_{|k|}} \cdot \widehat{C}_{|k|}^{+} \right) \right\} |0\rangle =$$
$$= 2\sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}_{|j|}^{+} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|k|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|k|}} \cdot \widehat{C}_{|k|}^{+} \right) |0\rangle +$$

8) Естественно, в этих уравнениях степени заполнения считаются величинами известными. Тем не менее, на самом деле, их приходится впоследствии находить, причем из каких-то самостоятельных соображений.

$$+ 2\sqrt{\widetilde{N}_{|k|}} \cdot \widehat{C}^{+}_{|k|} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}^{+}_{|j|} \right) |0\rangle.$$

Это означает, что в двух спаренных состояниях ***не*** находится ***точно*** две пары частиц, как было бы в случае ***взаимодействия каждой из четырех частиц в отдельности с силовым полем, но не друг с дружкой.***

Тот факт, что

$$\left(\sum_{|j|=1}^{\infty} \widehat{C}^{+}_{|j|} \widehat{C}^{-}_{|j|} \right) \left[\left\{ \prod_{|j|=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}^{+}_{|j|} \right) \right\} |0\rangle \right] \neq$$

$$\neq \mathrm{N} \cdot \left[\left\{ \prod_{|j|=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 - \widetilde{N}_{|j|}} + \sqrt{\widetilde{N}_{|j|}} \cdot \widehat{C}^{+}_{|j|} \right) \right\} |0\rangle \right],$$

(где N — пусть сколь угодно большое, но, главное, ***целое*** число пар), совершенно правильно отображает поведение частиц, взаимодействующих именно друг с дружкой. Вернемся к рис. П2.1. Естественно, число частиц, заключенных внутри отрезка пусть огромной, но ***точно фиксированной*** длины L, не может в принципе оставаться неизменным во времени: ведь каждая из частиц смещается то влево, то вправо ***хаотически***, обладая в разные мгновения разными по величине и направлению импульсами (скоростями).

Замечательная особенность вектора (П2.14,б) (автоматически и со-вектора), ***не являющегося собственным вектором оператора числа частиц*** $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{C}^{+}_{j} \widehat{C}^{-}_{j} \right)$ [9], состоит в том, что этот вектор, во-первых, описывает состояние коллектива ***произвольного*** числа пар частиц, которые — ***все*** — взаимодействуют ***именно друг с дружкой*** [10]; во-вторых, описывает взаимодействие в ***наиболее общей*** форме. Конкретный характер взаимодействия отображается явным видом зависимости величины $\widetilde{N}$ от $\vec{P}$. ***Вектор, являющийся собственным вектором оператора числа частиц, не приспособлен для описания взаимодействия частиц именно друг с дружкой.***

---

[9] Традиционное название оператора $\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{C}^{+}_{j} \widehat{C}^{-}_{j}$ оператор числа частиц (см. сноску на с. 244).

[10] Взаимодействуют друг с дружкой именно все частицы, а не пара с парой.

Приложение 3

Скобки Пуассона

Классической (то есть неквантовой) скобкой Пуассона $[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]$ принято называть конструкцию $\sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial P_i}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial P_i}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_i}\right)$, в которой символами $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{R}$ обозначены некоторые физические величины из числа тех, с помощью которых описывают состояние частицы. Символ x_1 представляет собой X-координату, а символ P_1 — X-составляющую импульса; символ x_2 представляет собой Y-координату и т. п.

Очевидно, что если исходить из определения

$$[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}] \equiv \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial P_i}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial P_i}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x_i}\right), \tag{П3.1}$$

то нетрудно прийти к нижеследующим скобкам:

$$[(\mathfrak{T}_1+\mathfrak{T}_2), \mathfrak{R}] = [\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}] + [\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}]; \tag{П3.2}$$

$$[\mathfrak{T}, (\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2)] = [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}_1] + [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}_2]; \tag{П3.3}$$

$$[\mathfrak{T}, (\mathfrak{R}_1\cdot\mathfrak{R}_2)] = [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}_1]\cdot\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1\cdot[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}_2]; \tag{П3.4}$$

$$[(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{T}_2), \mathfrak{R}] = [\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}]\cdot\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1\cdot[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}]. \tag{П3.5}$$

На всякий случай подчеркну, что порядок в расположении сомножителей сейчас строго соблюдался, хотя, с точки зрения математики, никакой необходимости в этом нет, если $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{R}$ являются ***обычными*** величинами.

Лично я не представляю себе, для решения каких задач классической механики могли понадобиться выражения (П3.2–П3.5). Дирак использовал эти соотношения для того, чтобы вычислить скобку $[(\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2), (\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)]$. Если строго соблюдать порядок сомножителей, то, согласно выражениям (П3.4) и (П3.5):

$$[(\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2), (\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)] = [\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_1]\cdot\mathfrak{T}_2\cdot\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{T}_1\cdot[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_1]\cdot\mathfrak{R}_2 + \\ + \mathfrak{R}_1\cdot[\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_2]\cdot\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{R}_1\cdot\mathfrak{T}_1[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_2]$$

$$[(\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2), (\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2)] = [\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_1]\cdot\mathfrak{R}_2\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1\cdot[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_1]\cdot\mathfrak{R}_2 + \\ + \mathfrak{R}_1\cdot[\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_2]\cdot\mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1\cdot[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_2]$$

Приравнивая правые части, получаем:

$$\frac{\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_1\cdot\mathfrak{T}_1}{[\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_1]} = \frac{\mathfrak{T}_2\cdot\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_2\cdot\mathfrak{T}_2}{[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_2]}.$$

Естественно, такое равенство, в котором фигурируют совершенно произвольные пары величин, может иметь место только при условии, что

$$\frac{\mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{T}_1}{[\mathfrak{T}_1, \mathfrak{R}_1]} = \frac{\mathfrak{T}_2 \cdot \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_2 \cdot \mathfrak{T}_2}{[\mathfrak{T}_2, \mathfrak{R}_2]} = \text{const}.$$

Вот Дирак и предложил постулировать, что:

в рамках доквантовой механики для физических величин:

$$\text{const} = 0;$$

в рамках квантовой механики для ***операторов*** *физических величин:*

$$\text{const} = i \cdot \hbar.$$

Таким образом, казалось бы, следует написать:

$$\hat{\mathfrak{T}}\hat{\mathfrak{R}} - \hat{\mathfrak{R}}\hat{\mathfrak{T}} = i \cdot \hbar \cdot \left[\hat{\mathfrak{T}}, \hat{\mathfrak{R}}\right] = i \cdot \hbar \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial \hat{\mathfrak{T}}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\mathfrak{R}}}{\partial P_i} - \frac{\partial \hat{\mathfrak{T}}}{\partial P_i} \frac{\partial \hat{\mathfrak{R}}}{\partial x_i} \right).$$

Однако, на самом деле, нужно сначала вычислить скобку Пуассона не для операторов, а для ***величин.*** Лишь после этой операции, пользуясь принципом соответствия, следует написать

$$\hat{\mathfrak{T}}\hat{\mathfrak{R}} - \hat{\mathfrak{R}}\hat{\mathfrak{T}} = i \cdot \hbar \cdot [\mathfrak{T}, \mathfrak{R}],$$

где символом $[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]$ попросту обозначен ***результат вычисления*** скобки Пуассона, в которой фигурируют не операторы величин, а сами величины. Разумеется, в таком случае скобка $[\mathfrak{T}, \mathfrak{R}]$ может быть только числом, причем число это может быть либо единицей, либо нулем. Вот, почему оказывается, что

$$\hat{\mathfrak{T}}\hat{\mathfrak{R}} - \hat{\mathfrak{R}}\hat{\mathfrak{T}} = \begin{cases} \text{либо} & i \cdot \hbar, \\ \text{либо} & 0. \end{cases}$$

Об авторе:

ВИЛЬФ Фернандо Жозевич — профессор Московского института электроники и математики. Специалист в области физики полупроводников и полупроводниковых приборов. Читает курс по этим дисциплинам свыше 30 лет. Автор четы
разделам физики.

В книге дается подробный анализ
квантовой механики.

Обоснована необходимость и достаточность статистического способа описания состояния объекта в определенных экспериментальных ситуациях. Даны физически содержательные определения характеристик точечной частицы и, в частности, такой, как «степень заполнения состояния частицей». Тщательно проанализированы так называемые соотношения неопределенностей. Показано, что их традиционная интерпретация на самом деле не соответствует ни логической, ни математической структуре квантовой механики.

Предложена модель так называемого «*пустого*» пространственно-временно́го континуума. Доказывается, что спин точечная частица приобретает в результате вращения вокруг индуцируемого ею пространственного заряда.

С использованием принципа соответствия выводится (а не постулируется) релятивистское уравнение Дирака.

Разъяснен смысл запрета Паули. Показано, что максвелловская функция распределения частиц по состояниям сохраняет следы специфической корреляции в заполнении состояний (обусловленной запретом Паули) при любой конечной температуре и любой конечной концентрации частиц.

1544 ID 6023
9 785354 003617 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet*: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46