

Автобиография исследователя времени



Владимиров Юрий Сергеевич.
Родился 16 июля 1938 г. в г. Москве. Окончил физический факультет Московского гос. университета им. М.В.Ломоносова (1961). Квалификация: физик.

Кандидат физико-математических наук (1964), доктор физико-математических наук (1975). Профессор (1994). Ведущий научный

сотрудник кафедры теоретической физики физического факультета МГУ (1986).

Область научных интересов: теоретическая физика (основания и системы отсчета в теории гравитации, квантование гравитации; многомерные геометрические модели физических взаимодействий, теория прямого межчастичного взаимодействия, бинарная геометрофизика - объединенная теория пространства-времени и физических взаимодействий; философские вопросы фундаментальной теоретической физики).

Основные результаты: Проанализированы эффекты 2-гравитонной и фотон-гравитонной аннигиляции электрона и позитрона; построена аксиоматика общей теории относительности; развитый метод кинематрических инвариантов применен для построения гамильтоновой формулировки ОТО; разработан диадный формализм в групповых калибровках, предназначенный для описания специализированных систем отсчета в ОТО; в русле многомерных теорий Калуцы-Клейна построены 6- и 7-мерные модели гравитационно-электрослабых взаимодействий, объединяющие ОТО с моделью электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама-Глэшоу, а также 8-мерная модель гравитационно-сильных взаимодействий, объединяющая ОТО с классической хромодинамикой; развиты основы бинарной геометрофизики - нового направления в теории пространства-времени и физических взаимодействий, опирающегося на идеи бинарных систем комплексных отношений, многомерных теорий

Калуцы-Клейна и теории прямого межчастичного взаимодействия.

Тема кандидатской диссертации (1964): "О квантовании геометрических полей", тема докторской диссертации (1975): "Применение монадного и диадного методов и их групповых калибровок для анализа проблем общей теории относительности".

На физическом факультете МГУ прочитал спецкурсы: "Классическая теория гравитации", "Квантовая теория гравитации", "Проблемы теории гравитации", "Теория прямого межчастичного взаимодействия", "Размерность физического пространства-времени", "Бинарная геометрофизика" для студентов IV-V курсов.

Подготовил более 20 кандидатов наук.

Ю.С.Владимиров с 60-х годов по 1974 год - ученый секретарь секции гравитации, а с 1974 года по 1984 год - заместитель председателя секции гравитации Минвуза СССР. С 1988 года по настоящее время - вице-президент Российского Гравитационного Общества (РГО).

Участник и член оргкомитетов с 1-й Советской гравитационной конференции (1961 г.) по 11-ю Российскую гравитационную конференцию (2002 г.).

Автор более 10 книг по общей теории относительности и смежным вопросам теоретической физики:

- 1. Д.Иваненко, Ю.С.Владимиров. Теория гравитации (Часть 1). М.: Изд-во Моск. ун-та.*
- 2. Ю.С.Владимиров. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.*
- 3. Ю.С.Владимиров, Н.В.Мицкевич, Я.Хорски. Пространство, время, гравитация. М.: Наука, 1984.*
- 4. Ю.С.Владимиров, А.Ю.Турьгин. Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1985.*
- 5. Yu.S.Vladimirov, N.V.Mitskievich, J.Horsky. Space, Time, Gravitation. M.: Mir Publishers, 1987.*
- 6. Ю.С.Владимиров. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.*
- 7. Ю.С.Владимиров. Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.*

8. Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Изд-во "Архимед", 1992.
9. Ю.С.Владимиров. Фундаментальная физика, философия и религия. Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.
10. Ю.С.Владимиров. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996.
11. Ю.С.Владимиров. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
12. Ю.С.Владимиров. Метафизика. М.: Изд-во "Лаборатория базовых знаний", 2002.

Ю.С.

**СИСТЕМЫ
ОТСЧЁТА
В ТЕОРИИ**

ГРАВИТАЦИИ

Ю.С. Владимиров

СИСТЕМЫ
ОТСЧЁТА
В ТЕОРИИ
ГРАВИТАЦИИ

Рецензент *Н. В. Мицкевич*

Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. — 256 с.

Систематически изложены методы задания систем отсчета в общей теории относительности. Основное внимание уделено монадному методу и его калибровкам: хронометрической и кинеметрической. Продемонстрировано применение монадного метода для анализа классических задач ОТО в трех важнейших метриках: Шварцшильда, Керра и однородных изотропных космологических моделях. Последовательно рассмотрены более детальные методы описания систем отсчета: диадный, диарный и тетрадный, а также их групповые калибровки. На их основе проанализировано состояние основных проблем ОТО: энергии-импульса, гравитационных (гравиинерциальных) волн и подходов к квантованию гравитации. С помощью монадного метода развита калибровочно-инвариантная 5-мерная теория гравитации, электромагнетизма и скалярного поля. Обсуждена проблема размерности физического пространства-времени.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по проблемам теории относительности и смежным вопросам физики.

Табл. 1. Ил. 22. Библиогр. 224.

ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ ВЛАДИМИРОВ
Системы отсчета в теории гравитации

Редактор *Е. В. Сатарова*
Переплет художника *О. Н. Гребенюка*
Технический редактор *Н. Н. Хотулева*
Корректор *Н. А. Смирнова*

ИБ № 423

Сдано в набор 24.12.81. Подписано в печать 24.08.82. Т-14164
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура шрифта литературная
Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Усл. кр.-отт. 16,0. Уч.-изд. л. 18,36.
Тираж 2300 экз. Зак. тип. 1152 Цена 3 р.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10
Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли.

109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение. Системы отсчета и общая теория относительности	7
Часть I. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	12
Глава 1. Метрические отношения и пространственно-временная симметрия	12
1.1. Допустимые системы координат	12
1.2. Ковариантные и контравариантные величины. Основы тензорной алгебры	13
1.3. Метрический тензор	16
1.4. Символы Кристоффеля. Уравнения геодезической	19
1.5. Операторы ковариантного дифференцирования. Параллельный перенос	20
1.6. Тензор кривизны и его свойства	23
1.7. Важнейшие уравнения общей теории относительности	25
1.8. Подвижность римановых пространств	28
1.9. Соответствия между римановыми пространствами	32
Глава 2. Асимметрия пространства и времени	34
2.1. Сигнатура пространства-времени	34
2.2. Алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна	36
2.3. Хроногеометрия	39
2.4. Уравнения движения пробных частиц	43
2.5. Системы отсчета	46
Глава 3. Монадный метод задания движения систем отсчета	48
3.1. Алгебра общековариантного монадного метода	49
3.2. Монадные физико-геометрические тензоры	51
3.3. Операторы дифференцирования в монадном формализме	54
3.4. Основные уравнения общей теории относительности и теории поля в монадном виде	56
3.5. Монадный метод в хронометрических системах координат	59
3.6. Нормальные системы отсчета. Кинеметрические инварианты	64
3.7. Частные виды систем отсчета	69
3.8. Переход от одной системы отсчета к другой	71
3.9. Понятие о тетрадах. Калибровка Ламе	76
Часть II. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	78
Глава 4. Наблюдаемые в сферически-симметричной метрике	78
4.1. Метрика Шварцшильда	78
4.2. Движение монополярных пробных тел в метрике Шварцшильда	82
4.3. Эффект смещения перигелия Меркурия	84
4.4. Отклонение лучей света, проходящих вблизи Солнца. Гравитационное красное смещение	85
4.5. Малые колебания пробных тел на круговых орбитах (эффект Широкова)	87
4.6. Общерелятивистская связь поступательного и вращательного движения планет	91
4.7. Сферически-симметричные метрики	95

Глава 5. Некоторые эффекты общей теории относительности в аксиально-симметричных метриках	96
5.1. Метрика Керра	96
5.2. Уравнения движения монополярных пробных тел в метрике Керра	99
5.3. Дрейф точки встречи двух монополярных пробных частиц, движущихся по круговым орбитам навстречу друг другу (эффект Мицкевича)	102
5.4. Эффект Шиффа	104
5.5. Малые колебания пробных тел на круговых орбитах в метрике Керра	108
5.6. Аксиально-симметричные частицеподобные решения уравнений Эйнштейна — Максвелла типа D	110
Глава 6. Пространственные сечения и время в космологических моделях	111
6.1. Однородные изотропные космологические модели. Постановка задачи	111
6.2. Пространственные сечения постоянной положительной, отрицательной и нулевой кривизны	113
6.3. Однородные изотропные модели Вселенной	116
6.4. Зависимость характера пространственных сечений в космологических моделях от выбора системы отсчета	119
6.5. Наблюдаемые в моделях Фридмана	123
6.6. Однородные анизотропные модели Вселенной	125
ЧАСТЬ III. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	
Глава 7. Полные и неполные описания наблюдателей в общей теории относительности	129
7.1. Математический аппарат общековариантного диадного формализма	129
7.2. Групповые калибровки диадного формализма	132
7.3. Физические приложения диадного формализма	136
7.4. Общековариантный диарный формализм	139
7.5. Групповые калибровки диарного формализма	140
7.6. Возможные физические интерпретации диарного формализма	143
7.7. Тетрадный формализм	145
7.8. Калибровки тетрадного формализма	149
7.9. Уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени	151
7.10. Формализм изотропных тетрад Ньюмена — Пенроуза и его связь с диадным методом	153
Глава 8. Проблема энергии-импульса гравитационного поля	155
8.1. Суть проблемы энергии-импульса в общей теории относительности	155
8.2. Псевдотензоры энергии-импульса гравитационного поля	158
8.3. Моноадные векторы энергии гравиинерциального поля	161
8.4. Определения суперэнергии гравиинерциального поля	164
8.5. Диадные и тетрадные комплексы энергии-импульса гравиинерциального поля	165
Глава 9. Гравиинерциальные волны	167
9.1. Проблема описания гравитационных волн	167
9.2. Алгебраические критерии гравитационных волн	169
9.3. Референционное определение гравиинерциальных волн	173
9.4. Диадное описание гравиинерциальных волн	175
9.5. Примеры точных волновых решений уравнений Эйнштейна	178
9.6. Слабые плоские гравиинерциальные волны	182
9.7. Поведение приборов в слабой плоской гравиинерциальной волне	184

Глава 10. На пути к квантованию гравитации	190
10.1. Необходимость построения квантовой теории гравитации	190
10.2. Постановка задачи и трудности квантования гравитации	192
10.3. Гамильтонов формализм в искривленном пространстве-времени	194
10.4. Гамильтонова формулировка общей теории относительности и кинематрические инварианты	198
10.5. Выделение двух пар динамических переменных с помощью диадного метода	202
10.6. Примеры выделения гравитационных динамических переменных	205
10.7. К теории суперпространства	208
10.8. Примеры суперпространств	210
ЧАСТЬ IV. РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ	
Глава 11. Калибровочно-инвариантная 5-мерная теория пространства-времени	213
11.1. 5-Мерие и монадный метод	213
11.2. Математический аппарат калибровочно-инвариантной 5-мерной теории	215
11.3. Физическая реальность и цилиндрически-симметричная по пятой координате 5-мерная риманова геометрия	218
11.4. Электрически заряженное поле в 5-мерной теории	222
11.5. Сферически-симметричные решения 5-мерных «уравнений Эйнштейна»	226
11.6. Однородные изотропные космологические модели в 5-мерной теории	230
Глава 12. Особенности пространственно-временного 4-мерия	234
12.1. Проблема обоснования 4-мерности пространства-времени	234
12.2. Общековариантные особенности 4-мерных многообразий	236
12.3. Физические особенности 4-мерия в статических пространственно-временных многообразиях	237
12.4. Свойства решений волновых уравнений в пространственно-временных многообразиях $n+1$ измерений	239
12.5. Жесткость уравнений поля. Число динамических переменных	241
12.6. Алгебраические особенности и дискретные преобразования в многообразиях с сигнатурой $(+ - - - \dots)$	243
Заключение	245
Приложение. Единая 5-мерная теория гравитации, электромагнетизма и электрически заряженной материи	247
Список литературы	250

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга призвана заполнить пробел в книжной литературе — осветить вопросы задания и применения систем отсчета в общей теории относительности. По этой теме в последнее десятилетие было выполнено значительное число работ, придавших общей теории относительности заключенный в ее названии смысл физической теории описания явлений относительно произвольных систем отсчета. В настоящее время обширный материал, накопленный по данному вопросу, разбросан в виде статей в научных журналах, сборниках, трудах совещаний и конференций. В этой книге произведена попытка систематического изложения накопившегося материала.

Следует подчеркнуть, что понятие системы отсчета пронизывает все содержание современной теории гравитации (общей теории относительности). Именно поэтому автор построил изложение не для узкого круга специалистов, а рассмотрел роль систем отсчета во всей современной теории гравитации. Более того, изложение сделано в виде, доступном для начинающего изучать этот раздел науки. Отметим, что в уже изданной литературе по общей теории относительности есть прекрасные книги, предназначенные для изучения теории гравитации (см., например, [1—12]). Однако, во-первых, многие из этих книг сейчас уже стали библиографической редкостью, во-вторых, они нуждаются в существенном дополнении материалом по системам отсчета и другими результатами, полученными в последние 20 лет (новые точные решения, современный взгляд на основные проблемы и др.).

Книга основана на курсе лекций по общей теории относительности, читаемых автором в течение многих лет на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. В книгу вошли результаты работ самого автора и его учеников и результаты работ, выполненных другими учеными в нашей стране и за рубежом. Заметим, что в последние полтора десятилетия именно в нашей стране уделялось особое внимание вопросам задания и применения систем отсчета в общей теории относительности. Среди основных групп, занимающихся этой темой в СССР, следует назвать группы А. Л. Зельманова (Москва), О. С. Иваницкой (Минск), А. Е. Левашева (Минск), Н. В. Мицкевича (Москва), В. И. Родичева (Москва) и ряд других. Автор пользуется случаем выразить всем им свою искреннюю признательность за большую роль, которую они фактически сыграли при его работе над темой и при написании книги. Автор также глубоко благодарен своим ученикам: В. И. Антонову, Б. Г. Алиеву, Л. Ф. Владимировой, В. Н. Ефремову, А. И. Легкому, С. В. Румянцеву, С. В. Родичеву и другим, оказавшим ему помощь и содействие в этой работе.

ВВЕДЕНИЕ

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Общеизвестно значение теории относительности для физики XX в. Закономерности физического мира, вскрытые специальной и общей теорией относительности, знаменуют собой этап наиболее глубокого проникновения человека в сущность природы, в частности в сущность пространства и времени. Как это ни парадоксально, но укоренившееся в науке название *общая теория относительности* (ОТО) не отражает в полной мере истинной сути этой теории. Название скорее относится к свойству физического мира, сопутствующему вскрытой закономерности, однако и это свойство в течение длительного времени трактовали не вполне четко. Следует согласиться с В. А. Фоком, утверждавшим: «Истинной логической основой теории тяготения Эйнштейна являются не идея общей относительности и не принцип эквивалентности, а другие две идеи, именно: идея объединения пространства и времени в единое четырехмерное хроногеометрическое многообразие с индефинитной метрикой (эта идея была осуществлена Эйнштейном уже в его теории 1905 г. — в «частной» теории относительности) и отказ от «жесткости» метрики, позволивший связать ее с явлением тяготения, а тем самым и с весомой материей (уравнения тяготения Эйнштейна). Идеи же общей ковариантности уравнений (так называемая общая относительность) и кинематического толкования тяготения (так называемая эквивалентность) сыграли лишь эвристическую роль» [13].

Отказ от «жесткости» метрики в теории Эйнштейна или обобщение метрических свойств плоского пространства-времени для описания гравитационного взаимодействия явились логическим завершением развития цепочки гениальных идей выдающихся мыслителей почти целого столетия [14]. В ее начале были идеи Н. И. Лобачевского, а также независимо от него сына и отца Бояи и Гаусса, которые впервые отказались от пятого постулата Евклида и построили первую неевклидову гиперболическую геометрию. Затем существенные шаги последовательно были сделаны Риманом, Клиффордом, Махом, которые, с одной стороны, подготовили почву для описания реального мира посредством неевклидовых геометрий и, с другой стороны, подвели научную мысль к возможности использования в физике многообразий большего, нежели три, числа измерений n . Кроме того, для решающего шага требовалось дальнейшее развитие неевклидовых геометрий. Такие работы были выполнены видными математиками: Бельтрами,

Ф. Клейном, Софусом Ли, Риччи, Кристоффелем, Бианки и др. [15, 16].

Но причем здесь общая относительность? Напомним, что в специальной (или частной) теории относительности (СТО), в которой объединены пространство и время в единое 4-мерное многообразие, показано, что значения промежутков времени и пространственных расстояний между двумя точками-событиями (так же как и компоненты 4-мерных векторов и тензоров) относительны, зависят от выбранной инерциальной системы отсчета, тогда как физические законы в своей простейшей форме одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Характерно, что механика как в пространстве-времени Ньютона, так и в пространстве-времени СТО формулируется в классе выделенных (преимущественных) инерциальных систем отсчета. Все инерциальные системы отсчета абсолютно равноправны. Так вот, переход к искривленным (римановым) пространствам в общем случае лишает смысла понятие инерциальной системы отсчета. Как угодно введенные в ОТО системы отсчета, вообще говоря, являются неинерциальными, причем в ОТО нет достаточно веского критерия для выделения преимущественного класса систем отсчета, которые могут играть роль инерциальных систем отсчета в СТО. А раз так, то законы природы, выражаемые дифференциальными уравнениями, должны иметь в искривленных пространствах одинаковую форму (записываться одинаково) во всех неинерциальных системах отсчета. Эти соображения, сыгравшие важную эвристическую роль при создании ОТО, и послужили причиной такого ее названия.

Теперь перейдем к обсуждению самого понятия системы отсчета, играющего в ОТО такую важную роль, что определило даже название теории. Сам Эйнштейн фактически смешивал понятия системы координат и системы отсчета [17, 18]. Он писал: «Если координатная система K выбрана так, что физические законы в ней справедливы в своей простейшей форме, то *те же самые* законы справедливы во всякой другой координатной системе K' , которая движется равномерно и прямолинейно относительно K . Мы называем этот постулат «специальным принципом относительности» [17, с. 453]. Далее Эйнштейн писал об общей относительности: «*Общие законы природы должны быть выражены через уравнения, справедливые во всех координатных системах, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общековариантными)*. Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворит и общему постулату относительности. Ибо в совокупности *всех* подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем» [17, с. 459].

Однако в общем случае понятия системы координат и системы отсчета совершенно различны. Между понятием системы отсчета и той или иной совокупностью систем координат можно установить соответствие, специальным образом оговорив это (см. § 3,5

и 3.6), но соответствия априори не существует! Этой же точки зрения придерживался В. А. Фок: «Понятие физической системы отсчета (лаборатории) не равносильно, в общем случае, понятию системы координат, даже если отвлечься от всех свойств лаборатории, кроме ее движения, как целого» [13]. То же утверждает Н. В. Мицкевич: «Часто путают понятие системы отсчета и понятие системы координат. Однако между этими понятиями нет ничего общего...» [19]. Возможность соответствия между этими понятиями изучалась в группах А. Л. Зельманова, О. С. Иваницкой, Мёллера [10], Шмутцера и др.

Что же такое система отсчета? Это необходимое для любого измерения сложное понятие, соответствующее привычному комплексу приспособлений, приборов, составляющему лабораторию или систему лабораторий. Система отсчета — это идеализированная совокупность конечного или бесконечного (континуума) числа пронумерованных пробных тел, снабженных приборами для измерения времени и расстояния. Если пробных тел континуум, то они снабжены как минимум часами для измерения времени в своей окрестности, а в достаточно общем случае — еще и линейками для измерения длины в трех взаимно перпендикулярных направлениях (в своей окрестности). Если пробных тел конечное число, то измерительная аппаратура должна включать в себя дополнительные приборы, например радиолокационную аппаратуру, компенсирующие сокращение числа приборов. Все эти требования, предъявляемые к сложному понятию системы отсчета, поддаются строгой математической формулировке. Этому вопросу посвящены гл. 2, 3, 7. Оказалось, что строгая формулировка понятия системы отсчета и ее применение для решения конкретных задач потребовали создания специального математического аппарата, составляющего сейчас важный элемент структуры ОТО. Существенно, что математический аппарат описания систем отсчета основан на обратном $1+3$ -расщеплении 4-мерного пространственно-временного многообразия.

Понятие системы отсчета в ОТО имеет не меньшую важность, чем система понятий в современной квантовой теории, позволяющих описывать наблюдаемые в микромире. Разве можно в квантовой теории проинтерпретировать возможные результаты измерений, если ограничиться только самими уравнениями (например, Шредингера, Дирака) и их точными решениями? Эту аналогию между ОТО и квантовой механикой подчеркивал В. А. Фок: «Понятие относительности к средствам наблюдения (в квантовой механике — Ю. В.) есть в известном смысле обобщение понятия относительности к системе отсчета. Оба понятия играют в соответствующих теориях аналогичную роль. Но в то время как теория относительности, которая опирается на понятие относительности к системе отсчета, учитывает лишь движение средств наблюдения как целого, в квантовой механике необходимо учитывать и более глубокие свойства средств наблюдения» [20, с. 73].

Не случайно математический аппарат различных методов описания систем отсчета и их сопоставление между собой были завершены в 70-х годах. Это диктовалось возросшим числом задач и проблем, решаемых в рамках ОТО. Прежде всего, резко возросло число экспериментальных работ по проверке ОТО. В наши дни ОТО из чисто теоретической науки довольно быстро становится экспериментальным разделом физики. Применение методов задания систем отсчета для интерпретации и предсказания новых экспериментов имеет первостепенное значение. Кроме того, оказалось, что для разработки проблемы квантования гравитации, изучения связи ОТО с физикой микромира также важно понятие системы отсчета. Например, работы Дирака по канонической формулировке ОТО или де Витта по теории суперпространств, нацеленные на решение проблемы квантования в ОТО, оказались тесно связанными с использованием метода задания нормальных систем отсчета. Примечательно, что значительное число последних исследований по проблемам энергии-импульса в ОТО или по описанию гравитационных волн основано на обсуждении указанных проблем с позиций методов задания систем отсчета. Это относится и к работам в других разделах ОТО.

Книга разделена на четыре части и содержит 12 глав. Первая часть вводная. В ней три главы. В гл. 1 изложены основы современной теории гравитации, основанные на 4-мерной пространственно-временной симметрии. В гл. 2 сделан упор на те факторы ОТО, для которых существенна сигнатура пространства-времени, т. е. обращено внимание на те стороны ОТО, в которых проявляется асимметрия временного и пространственных направлений. В гл. 3 развит математический аппарат монадного метода задания систем отсчета, или формализм $1+3$ -расщепления пространственно-временного многообразия. Это ключевая глава книги.

Назначение второй части — продемонстрировать применение монадного метода задания систем отсчета в классических задачах ОТО. Таковыми являются эффекты в трех классах метрик: сферически-симметричных (Шварцшильда и др.), аксиально-симметричных (Керра и др.) и однородных изотропных космологических моделях. Это определило разбиение части на три соответствующие главы. Автор не преследовал цели всесторонне исследовать все решения или изучавшиеся ранее эффекты. Задача состояла в том, чтобы показать целесообразность и даже необходимость применения монадного метода для корректной интерпретации самих метрик и экспериментальных данных.

Третья часть посвящена обсуждению трех, уже ставших классическими, проблем ОТО: энергии и импульса, описания гравитационных волн и квантования гравитации. Трех соответствующим главам предшествует глава, в которой подробно развиты более полные, нежели монадный, методы описания систем отсчета: диадный и тетрадный. Их можно также назвать формализмами $1+1+2$ - и $1+1+1+1$ -расщеплений пространственно-временного многообразия

Наконец, последняя, четвертая часть посвящена обсуждению вопросов размерности физического пространства-времени. В гл. 11 на основе монадного метода (1+4-расщепления) рассмотрена 5-мерная теория гравитации, электромагнетизма и скалярного поля. Эта глава связана со всеми предыдущими благодаря использованному монадному методу. Монадный метод возник в 30-х годах именно в рамках 5-мерных теорий. Представляется, что возможности 5-мерной теории далеко не исчерпаны. В гл. 11 показано, что дает эта теория при использовании усовершенствованного в рамках 4-мерия монадного метода и соображений о конформном соответствии метрик, введенных Вейлем.

В последней главе обсуждаются особенности физического мира в 4-мерном (5-мерном) пространстве-времени по сравнению с многообразиями иного числа измерений, имеющих сигнатуру (+— — — ...).

Приложение содержит материал, который должен был бы входить составной частью в гл. 11, однако по техническим причинам добавлен в конце книги. В нем показано, каким образом 5-мерную теорию можно привести в соответствие со стандартной квантовой теорией. В частности, показано, что пятнадцатая компонента 5-метрики G_{55} выражается через общепринятую комплексную волновую функцию электрически заряженных скалярных частиц. Здесь же кратко обсуждается вопрос о получении наблюдаемых значений масс элементарных частиц в теориях с размерностью, большей четырех.

Таким образом, основное внимание в книге уделено физическим аспектам размерности пространственно-временного многообразия, вопросам расщепления его на составные части. Центральное место занимает теория систем отсчета, тесно связанная с 1+3-расщеплением 4-мерного многообразия на пространство и время. Рассмотрены физические следствия перехода от одной системы отсчета к другой. Аналогичные переходы между различными способами 1+4-расщепления 5-мерного многообразия (между «обобщенными системами отсчета») приводят к изменениям (вплоть до генерации или уничтожения) электромагнитного и скалярного полей.

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава I

МЕТРИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СИММЕТРИЯ

1.1. ДОПУСТИМЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В теории относительности описываются отношения между физическими событиями. В рассматриваемой теории относительности приближении реального мира оказывается справедливой соответствующая математическая модель множества возможных событий. Эту модель имеют в виду всякий раз, когда говорят о классическом пространстве-времени. Каждому физическому событию в модели сопоставляется точка, точнее, арифметическая n -точка ($n=4$).

Напомним основные понятия используемой в ОТО математической модели [21, 22]. *Арифметической n -точкой* называют упорядоченную систему из n действительных чисел $\{x^\alpha\} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Множество всех арифметических точек для данного значения n называют *арифметическим пространством n измерений*. Множество точек в арифметическом пространстве n измерений, задаваемых неравенствами вида $|x^\alpha - x_0^\alpha| < \delta$, где $\delta > 0$, называют *n -кубом* с центром в точке x_0 . Множество арифметических точек $[x]$ называется *n -областью* в том и только в том случае, когда каждая точка x является центром некоторого n -куба, содержащегося в $[x]$.

В границах применимости классической физики оправдано введение взаимно-однозначного соответствия подмножества физических событий с арифметической n -областью. Такое соответствие называют *системой координат*. Особо следует подчеркнуть, что в теории относительности (специальной и особенно в общей) нет необходимости (и оснований) требовать наличия системы координат для всего физического мира, так же как и предполагать физическую значимость всех точек арифметического 4-мерного пространства. Достаточно говорить о соответствии подмножеств.

Как задаются системы координат? Несомненно, это вопрос физический, а не математический. Существует ряд конструктивных способов задания систем координат, некоторые из них будут в дальнейшем рассмотрены. Однако если каким угодно образом задана одна система координат $\{x^\alpha\}$, то, определяя четыре функции $F^\beta(x^\alpha)$, можно перейти к новым нумерациям точек или дру-

гим системам координат так, что $x'^{\beta} = F^{\beta}(x^{\alpha}) \equiv x'^{\beta}(x^{\alpha})$. Из бесконечного множества всех возможных систем координат, получаемых таким образом, в ОТО используется лишь подмножество так называемых *допустимых систем координат*. Чтобы их охарактеризовать, напомним ряд определений.

Функцию $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$, определенную для всех точек арифметической n -области $[x]$, называют *функцией класса* u , если она и ее производные порядка, меньшего или равного u , существуют и непрерывны в каждой точке области $[x]$. Здесь u — любое целое положительное число. В ОТО обычно полагают $u \geq 2$. Соответственно, при котором арифметической n -области $[x]$ сопоставляется некоторое множество $[x']$ при помощи n функций класса $u: x'^1(x), x'^2(x), \dots, x'^n(x)$, — называется *преобразованием класса u* , переводящим $[x]$ в $[x']$. Преобразование арифметической n -области $[x]$ называют *регулярным* класса u тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и его якобиан не обращается в нуль ни в одной точке $[x]$.

Множество допустимых систем координат определяется как совокупность систем координат, получаемых из физически заданной системы координат посредством всевозможных регулярных преобразований $x'^{\beta} = x'^{\beta}(x^{\alpha})$. Такие преобразования, связывающие допустимые системы координат, обычно также называют допустимыми.

Легко видеть, что два последовательно произведенные допустимые преобразования образуют также допустимое преобразование координат. Каждое допустимое преобразование имеет обратное допустимое преобразование $x^{\alpha} = x^{\alpha}(x'^{\beta})$. Следовательно, *совокупность всех допустимых преобразований координат образует группу*. Все допустимые системы координат равноправны, и если это особо не оговорено, то несущественно, из какой системы координат этого множества нужно исходить.

В этой главе будем опираться лишь на сам факт наличия системы координат, а следовательно, и целого множества допустимых систем координат. Этого достаточно для изложения геометрии искривленного (риманова) многообразия, введения основных уравнений ОТО и обсуждения их математических свойств.

1.2. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассмотрим величины, при помощи которых описываются свойства пространства-времени в различных точках и характеристики находящейся в них материи. Не будем пока углубляться в обсуждение вопросов, связанных с наличием двух типов объектов: пространственно-временных и материальных. Отложим на будущее также попытки сведения всех объектов к одному типу, например геометризацию электромагнитного и других полей. В сов-

ременной ОТО имеются объекты двух типов, причем они характеризуются математически одинаковыми величинами /

Пусть для описания свойств каких-либо объектов необходимо сопоставить наборы из m чисел $B(s|x)$ или отдельным точкам пространства-времени, или каждой точке некоторой области. В последнем случае говорят о задании поля величин. Какие же из бесконечного множества возможностей задания наборов чисел следует предпочесть? Вспомним, что сами точки пространства-времени можно нумеровать посредством бесчисленного множества допустимых систем координат, преобразования между которыми образуют группу. Естественно, что наборы чисел $B(s|x)$ должны зависеть от нумерации точек и изменяться при переходах к новым координатным системам. Отсюда следует преимущество таких наборов чисел $B(s|x)$, которые при допустимых преобразованиях координат изменяются также по групповому закону. Оказывается, наборы таких величин удовлетворяют следующим условиям.

1. Число величин m в наборе должно быть целой степенью размерности пространственно-временного многообразия: $m = 4^N$. Это принято изображать совокупностью N буквенных индексов (будем использовать греческие буквы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3). Например, $B(\mu|x) \equiv B(\mu)$ состоит из четырех чисел, $B(\mu\nu|x)$ содержит 16 компонент и т. д. В дальнейшем будем опускать обозначение точки, где определены наборы величин. Число N буквенных индексов называют *рангом*.

2. Существует только два закона группового преобразования наборов величин, соответствующих группе допустимых преобразований координат $\{x\} \rightarrow \{x'\}$:

$$B'^{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \dots B^{\alpha\beta\dots};$$

$$B'_{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots B_{\alpha\beta\dots}$$

Преобразующиеся таким способом величины называют *тензорами*. Тензоры, преобразующиеся по первому закону, называют *контравариантными* (индексы пишут сверху), а по второму закону — *ковариантными* (индексы пишут снизу). Возможны смешанные тензоры произвольного ранга. Тензор нулевого ранга называют *скаляром* (число, которое не изменяется при преобразованиях координат); тензор первого ранга называют *вектором*. Простейшим примером контравариантных векторов является набор из дифференциалов самих координат, а примером ковариантных векторов могут служить компоненты градиента скаляра.

Для упрощения записи принято не писать знаки суммы и подразумевать суммирование всякий раз, когда встречаются два одинаковых индекса. Так, закон преобразования произвольного тензора принимает вид:

$$B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \dots B_{\lambda\sigma\dots}^{\delta\rho\dots} \quad (1.1)$$

Всякий дважды встречающийся индекс, часто называемый «немым», можно заменить любым другим.

В множестве тензорных величин определены три операции.

1. Операция сложения и вычитания тензоров одинакового ранга и одинаковой ковариантности, т. е. с одинаковыми числами соответственно ко- и контравариантных индексов.

2. Операция *внешнего произведения* двух и более тензоров. В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров.

3. Операция *внутреннего произведения* тензоров $A^{\mu\nu\dots} B_{\mu\alpha\dots} = C_\alpha^{\nu\dots}$ приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров минус удвоенное число немых индексов.

Для установления трансформационных свойств величин полезна *строгая теорема частного*: «Величина, при внутреннем умножении которой на произвольный вектор получается тензор, является тензором».

Тензор $B_{\mu\nu\alpha}$ называют *симметричным* по индексам μ и ν , если $B_{\mu\nu\alpha} = B_{\nu\mu\alpha} \equiv B_{\underline{\mu\nu}\alpha}$. Тензор $A_{\mu\nu\alpha}$ называется *антисимметричным* по индексам μ и ν , если $A_{\mu\nu\alpha} = -A_{\nu\mu\alpha} \equiv A_{\underline{\mu\nu}\alpha}$. Любой тензор с двумя индексами одинаковой ковариантности можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного по этим индексам тензоров. Внутреннее произведение по двум парам индексов симметричного (по этим индексам) тензора на антисимметричный (по этим же индексам) равно нулю.

Особый интерес представляют антисимметричные по всем индексам тензоры ранга, равного размерности многообразия. Рассмотрим в 4-мерном многообразии такой тензор $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Очевидно, что все его компоненты с хотя бы двумя совпадающими индексами равны нулю. Остальные компоненты четной или нечетной перестановкой индексов можно привести к компоненте $B^{0123} \equiv B$. Следовательно, все 256 компонент тензора $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ принимают одно из трех значений: $+B$, 0 , $-B$. Представим этот тензор в виде

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta} = B \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — антисимметричный по всем индексам *символ Леви-Чивиты* с компонентами

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации} \\ & 0123 \text{ четным числом перестановок;} \\ 0, & \text{если есть совпадающие индексы;} \\ -1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации} \\ & 0123 \text{ нечетным числом перестановок} \end{cases}$$

Символ Леви-Чивиты (не являющийся тензором) чрезвычайно полезен при построении детерминантов произвольных величин $B_{\mu\nu}$ (не обязательно тензорных). Легко убедиться, что определитель $\|B_{\mu\nu}\|$ записывают с его помощью в виде

$$\|B_{\mu\nu}\| = (1/4!) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} B_{\alpha\mu} B_{\beta\nu} B_{\gamma\lambda} B_{\delta\sigma}. \quad (1.3)$$

В частности, якобиан \mathcal{J} преобразования координат представляется следующим образом:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}}. \quad (1.4)$$

Величина B в (1.2) — не скаляр. Она преобразуется по закону $B' = \mathcal{J} B$.

1.3. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

Важным элементом пространственно-временных отношений между событиями (точками) является метрика*. Она означает, что в множестве точек-событий определена действительная двухточечная скалярная функция $\mathcal{U}(x, y)$, где x и y — две точки. Эта функция обладает свойствами:

$$\mathcal{U}(x, y) = \mathcal{U}(y, x); \quad \mathcal{U}(x, x) = 0. \quad (1.5)$$

Можно было бы развить теорию, опираясь на глобальное задание метрических отношений. Элементы этой теории можно найти в книге [5], где метрическая функция $\mathcal{U}(x, y)$ названа мировой функцией. Однако целесообразно исходить из инфинитезимального задания метрики, т. е. ее определения для двух бесконечно близких точек. Тогда эта функция называется квадратом интервала и записывается в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.6)$$

где dx^{μ} — разность координат двух близких точек. Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ — функции координат — определяют метрические свойства пространства-времени. С помощью строгой теоремы частного

* Еще Риман ставил вопрос «о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». При этом он писал: «Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте» [14, с. 32]. Скорее всего, классические метрические отношения обязаны принципам квантовой механики. Именно атомно-молекулярная структура твердых тел позволяет говорить об измерении длины и времени. По-видимому, можно высказать более сильное утверждение, что постулаты квантовой механики как в теории Бора, так и в современной квантовой теории следует рассматривать как заменяющие постулаты метрических отношений.

легко показать, что $g_{\mu\nu}$ является ковариантным тензором второго ранга. Очевидно, что (1.6) представляет собой простейшее выражение для метрической функции между близкими точками, удовлетворяющее (1.5)*.

Представим метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $g_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}} + g_{\overline{\mu\nu}}$. Величина $dx^\mu dx^\nu$ в (1.6) — симметричный тензор второго ранга. Следовательно, для определения квадрата интервала (метрики) антисимметричная часть метрического тензора несущественна**, поэтому без ущерба для общности следует считать метрический тензор симметричным. Это значит, что в общем случае $g_{\mu\nu}$ имеет десять различных компонент. [В многообразии n измерений различных компонент может быть $(1/2)n(n+1)$.]

Метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ сопоставляется контравариантный тензор

$$g^{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}/g, \quad (1.7)$$

где $g \equiv \|g_{\mu\nu}\|$ — определитель матрицы $\{g_{\mu\nu}\}$; $\Delta_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $g_{\mu\nu}$. Внутреннее произведение $g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma} = g^\nu_\sigma$ определяет смешанный метрический тензор, имеющий одинаковые компоненты во всех системах координат (символ Кронекера):

$$g^\nu_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = \nu \\ 0, & \text{если } \sigma \neq \nu \end{cases} \equiv \delta^\nu_\sigma. \quad (1.8)$$

При помощи метрического тензора произвольным тензорам однозначно сопоставляются тензоры противоположной ковариантности, например: $B_\nu \rightarrow B^\mu = B_\nu g^{\mu\nu}$; $B^\sigma \rightarrow B_\nu = B^\sigma g_{\sigma\nu}$ и т. д.

Квадрат интервала (1.6) представляет собой квадратичную форму, а по основной теореме о квадратичных формах в алгебре всякую квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести некоторым невырожденным линейным преобразованием с действительными коэффициентами к диагональному виду. Следовательно, в любой точке допустимыми преобразованиями координат метрический тензор можно привести к виду $g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu}$. Такие системы координат называют *локально-декартовыми*. Их бесконечно много.

* Математики исследовали геометрии с более общими, нежели (1.6), видами метрики. Такие геометрии в литературе обычно называют финслеровыми [23]. Пока не ясна целесообразность применения финслеровых геометрий для описания физического пространства-времени. Заметим, что впервые обратил внимание на возможность построения таких более общих геометрий Риман [14, с. 18].

** Не будем пока обсуждать попытки Эйнштейна в последние годы жизни использовать антисимметричную часть метрики для построения единой теории гравитации и электромагнетизма ($g_{\mu\nu} \leftrightarrow F_{\mu\nu}$) [18, с. 615].

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu,\sigma} &\equiv \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma'_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\alpha\beta}; \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma'_{\alpha\beta}{}^{\sigma} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}. \end{aligned} \right\} (1.15)$$

Из этих формул видно, что тензорный закон преобразования нарушается присутствием справа вторых производных. При линейных преобразованиях координат $x'^{\mu} = \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, где $\omega^{\mu}_{\nu} = \text{const}$, «лишние» члены исчезают и символы Кристоффеля преобразуются, как тензоры.

Для любой точки A многообразия всегда можно выбрать такую систему координат $\{x'\}$, что в ней все компоненты символа Кристоффеля в точке A равны нулю. Легко убедиться с помощью формул (1.15), что подобный переход осуществляется следующим допустимым преобразованием координат:

$$\bar{x}'^{\mu} = (x^{\mu} - x_A^{\mu}) + (1/2) (\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu})_A (x^{\alpha} - x_A^{\alpha}) (x^{\beta} - x_A^{\beta}), \quad (1.16)$$

где $(\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu})_A$ — постоянные величины, равные значениям символов Кристоффеля в точке A в системе координат $\{x\}$; x_A^{α} — координаты точки A . Такую систему координат называют *локально-геодезической*.

Преобразование (1.16) примечательно еще тем, что значения компонент метрического тензора в точке A в системах координат $\{x\}$ и $\{x'\}$ совпадают. Воспользовавшись этим, можно сначала перейти в данной точке в локально-декартовую систему координат, а затем с помощью (1.16) в локально-геодезическую. В результате получим *локально-инерциальную* систему координат.

Нетрудно показать, что для любой геодезической в рассматриваемом многообразии можно выбрать такую систему координат, что все компоненты символа Кристоффеля во всех точках геодезической обращаются в нуль. Такая система координат называется *геодезической*.

1.5. ОПЕРАТОРЫ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Легко показать, что частные производные от тензорных величин не являются тензорами. Однако, учитывая трансформационный закон для символов Кристоффеля (1.15), частной производной можно сопоставить оператор, приводящий к тензорному результату

$$\nabla_{\sigma} \underbrace{B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}}_m \equiv B_{\mu\nu\dots;\sigma}^{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}}{\partial x^{\sigma}} + \underbrace{\Gamma_{\sigma\lambda}^{\alpha} B_{\mu\nu\dots}^{\lambda\beta\dots} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\beta} B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\lambda\dots} + \dots}_n - \underbrace{\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} B_{\lambda\nu\dots}^{\alpha\beta\dots} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} B_{\mu\lambda\dots}^{\alpha\beta\dots} + \dots}_m. \quad (1.17)$$

и называемый *ковариантной производной* тензора $B_{\mu\nu}^{\alpha\beta\dots}$.

Операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами:

а) ковариантная производная от скаляров совпадает с частной производной, т. е.

$$\nabla_{\sigma} B = \partial B / \partial x^{\sigma};$$

$$\text{б) } \nabla_{\sigma} (A_{\alpha\beta}^{\mu\nu\dots} + B_{\alpha\beta}^{\mu\nu\dots}) = \nabla_{\sigma} A_{\alpha\beta}^{\mu\nu\dots} + \nabla_{\sigma} B_{\alpha\beta}^{\mu\nu\dots}.$$

в) для ковариантного дифференцирования произведения тензоров (внешнего и внутреннего) справедливо правило Лейбница

$$\nabla_{\sigma} (A_{\alpha}^{\mu\dots} B_{\beta}^{\nu\dots}) = (\nabla_{\sigma} A_{\alpha}^{\mu\dots}) B_{\beta}^{\nu\dots} + A_{\alpha}^{\mu\dots} (\nabla_{\sigma} B_{\beta}^{\nu\dots});$$

г) ковариантные производные от метрического тензора равны нулю, т. е. при ковариантном дифференцировании метрический тензор следует рассматривать как постоянную, которую можно выносить за знак дифференцирования.

Обсудим геометрический смысл ковариантного дифференцирования. Для этого введем понятие бесконечно малого параллельного переноса малых смещений или тензорных величин, причем это понятие будем рассматривать несколько шире рамок римановой геометрии.

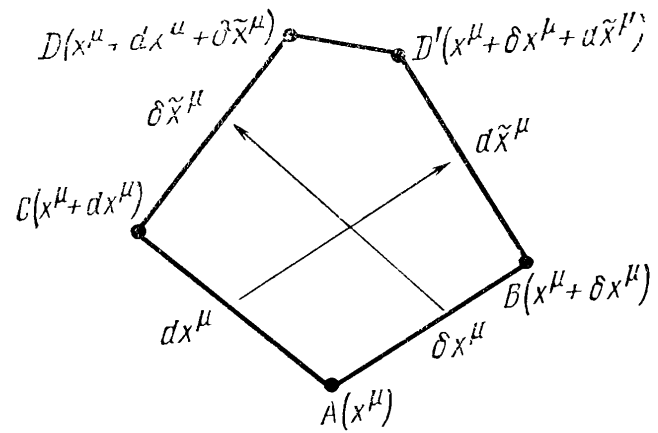


Рис. 1. Параллельный перенос смещений

Пусть смещение δx^μ соединяет близкие точки A и B с координатами x^μ и $x^\mu + \delta x^\mu$ соответственно (рис. 1). Возьмем третью точку C с координатами $x^\mu + dx^\mu$ (δx^μ и dx^μ — величины одного порядка). Зададимся целью сопоставить смещению AB смещение CD такое, что $(CD)^\mu = \delta \tilde{x}^\mu$ линейно выражается через смещения dx^μ и δx^μ , т. е.

$$\delta \tilde{x}^\mu = \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^{\mu} dx^{\alpha} \delta x^{\beta}, \quad (1.18)$$

где величины $K_{\alpha\beta}^{\mu}$, называемые *коэффициентами связности* (или *связностью*), являются важными характеристиками дифференциальной геометрии. Такое сопоставление называют *параллельным переносом* относительно $K_{\alpha\beta}^{\mu}$. Особо подчеркнем, что $K_{\alpha\beta}^{\mu}$ в общем случае не обязаны быть симметричными.

Наложим на геометрию дополнительное условие сохранения длины смещения при параллельном переносе:

$$ds_{AB}^2 = g_{\mu\nu}(A) \delta x^{\mu} \delta x^{\nu} = ds_{CD}^2 = g_{\mu\nu}(C) \delta \tilde{x}^{\mu} \delta \tilde{x}^{\nu}. \quad (1.19)$$

Тогда, подставляя (1.18) в (1.19) и учитывая, что в первом приближении $g_{\mu\nu}(C) = g_{\mu\nu}(A) + [\partial g_{\mu\nu}(A)/\partial x^\sigma] dx^\sigma$, находим:

$$-\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\sigma + K_{\sigma\mu,\nu} + K_{\sigma\nu,\mu} = 0. \quad (1.20)$$

Здесь все величины определены в точке A . Складывая три соотношения вида (1.20) с соответствующим образом переставленными индексами и знаками, получаем связь между символами Кристоффеля и коэффициентами связности:

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = (1/2) [(K_{\nu\mu,\sigma} + K_{\mu\nu,\sigma}) + (K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\sigma\nu,\mu}) + (K_{\mu\sigma,\nu} - K_{\sigma\mu,\nu})]. \quad (1.21)$$

Если коэффициенты связности симметричны, то они совпадают с символами Кристоффеля. Именно так обстоит дело в римановой геометрии ($\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = K_{\mu\nu}^\sigma$), где согласно (1.20) обращение в нуль ковариантной производной от метрического тензора имеет геометрический смысл сохранения длины интервала при параллельном переносе.

Для параллельного переноса ковариантных векторов естественно положить:

$$B_\mu(x + dx) = B_\mu(x) - \tilde{K}_{\sigma\mu}^\alpha dx^\sigma B_\alpha(x), \quad (1.22)$$

где $\tilde{K}_{\sigma\mu}^\alpha$ — коэффициенты связности, определяющие перенос ковариантных тензоров. В римановой геометрии требование равенства длин векторов в обеих точках означает, что $\tilde{K}_{\sigma\mu}^\alpha = -\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha$.

Выясним геометрический смысл возможной антисимметричной составляющей коэффициентов связности. Для этого перенесем смещение AC вдоль δx^μ (см. рис. 1). Тогда точке C будет соответствовать точка D' с координатами $x^\mu + \delta x^\mu + \tilde{d}x^\mu$, где $\tilde{d}x^\mu$ выражается формулой вида (1.18). Эта точка в общем случае не совпадает с точкой D . Компоненты отрезка DD'

$$\begin{aligned} (DD')^\mu &= (x^\mu + dx^\mu + \delta\tilde{x}^\mu) - (x^\mu + \delta x^\mu + \tilde{d}x^\mu) = \\ &= (K_{\beta\alpha}^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu) dx^\alpha \delta x^\beta \equiv 2S_{\beta\alpha}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \end{aligned}$$

где согласно строгой теореме частного

$$S_{\alpha\beta}^\mu = (1/2) (K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) \quad (1.23)$$

является тензором и называется *тензором кручения*.

Таким образом, в пространствах с кручением точки D и D' не совпадают во втором порядке малости, т. е. в этом приближении нарушается правило параллелограмма.

Взглянем на изложенное с позиций более общих дифференциальных геометрий Схоутена [24], в которых ковариантный дифференциал есть однородная линейная функция как относительно дифференцируемой величины, так и относительно перемещения, а для

операции ковариантного дифференцирования выполняются свойства а) — в) ковариантных производных.

Дифференциальные геометрии, удовлетворяющие этим требованиям, полностью характеризуются тремя тензорными величинами:

тензором кручения $S_{\alpha\beta}^{\mu}$;

разностью коэффициентов связности, определяющих дифференцирование ко- и контравариантных тензоров,

$$\tilde{K}_{\alpha\beta}^{\mu} - K_{\alpha\beta}^{\mu} = W_{\alpha\beta}^{\mu}; \quad (1.24)$$

ковариантной производной (относительно связности $\tilde{K}_{\alpha\beta}^{\mu}$) метрического тензора

$$g_{\mu\nu| \sigma} = Q_{\mu\nu\sigma}, \quad (1.25)$$

которая в общем случае отлична от нуля*.

Каждая из этих трех характеристик может быть нормальной, вырождающейся или нулевой. Таким образом, приходим к выводу о возможности $3^3 = 27$ типов дифференциальных геометрий. Риманова геометрия, которая используется для описания теории гравитации, является простейшей из них, когда все три тензорные характеристики (схоутены) обращаются в нуль.

1.6. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ И ЕГО СВОЙСТВА

Введем важную характеристику римановой геометрии, строящуюся с участием вторых производных от метрического тензора, — *тензор кривизны*. Это можно сделать несколькими способами. Выберем наиболее непосредственный, формальный. Прокмутируем операторы ковариантного дифференцирования, действующие на произвольный вектор B_{α} :

$$\begin{aligned} B_{\alpha; \nu; \mu} - B_{\alpha; \mu; \nu} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \right) B_{\lambda} \equiv \\ &\equiv R^{\lambda}_{\alpha\nu\mu} B_{\lambda}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$R^{\lambda}_{\alpha\nu\mu} = \partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} / \partial x^{\nu} - \partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} / \partial x^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \quad (1.27)$$

согласно строгой теореме частного является тензором. Он называется тензором кривизны четвертого ранга или *тензором Римана — Кристоффеля*. Верхний индекс будем считать первым, так что $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\lambda}_{\beta\mu\nu} g_{\lambda\alpha}$.

* Геометрии с $Q_{\mu\nu\sigma} \neq 0$ использованы Вейлем [14, с. 513] и Эддингтоном [1, 25] для построения единой теории гравитации и электромагнетизма. В теории Вейля $Q_{\mu\nu\sigma} = g_{\mu\nu} A_{\sigma}$, где A_{σ} с точностью до множителя представляет собой векторный потенциал электромагнитного поля (см. § 11.4).

Тензор Римана — Кристоффеля обладает следующими свойствами:

1. Из формулы (1.27) непосредственно видно, что

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\mu} = -R^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu\nu}; \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}. \quad (1.28)$$

2. Раскрывая в (1.27) символы Кристоффеля через производные от метрического тензора, можно убедиться, что

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (1.29)$$

3. Аналогично можно показать, что

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1.30)$$

4. Используя локально-геодезическую систему координат, легко доказать *тождество Риччи*

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\mu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\nu\mu\alpha} = 0. \quad (1.31)$$

5. Кроме перечисленных алгебраических свойств имеют место дифференциальные *тождества Бианки*

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\mu; \sigma} + R^{\lambda}_{\cdot\alpha\sigma\nu; \mu} + R^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu\sigma; \nu} = 0. \quad (1.32)$$

Их также легко доказать с помощью локально-геодезической системы координат.

Используя свойства симметрии (1.28) — (1.31), можно показать, что в многообразии n измерений в общем случае число алгебраически независимых компонент тензора Римана — Кристоффеля $N = (1/12)n^2(n^2 - 1)$.

Параллельно перенося тензоры из произвольной точки A в точку D вдоль различных сторон параллелограмма (см. рис. 1), легко убедиться в том, что тензор Римана — Кристоффеля определяет разность компонент тензоров, перенесенных из одной точки в другую (близкую) двумя разными путями:

$$\Delta \underbrace{B^{\alpha\beta\cdots}_{\mu\nu\cdots}}_m(D) = \underbrace{-(1/2) R^{\alpha}_{\cdot\lambda\sigma\kappa} B^{\lambda\beta\cdots}_{\mu\nu\cdots} ds^{\sigma\kappa} - \dots +}_{n} + \underbrace{(1/2) R^{\lambda}_{\cdot\mu\sigma\kappa} B^{\alpha\beta\cdots}_{\lambda\nu\cdots} ds^{\sigma\kappa} + \dots}_{m}, \quad (1.33)$$

где $ds^{\sigma\kappa} = dx^{\sigma}\delta x^{\kappa} - dx^{\kappa}\delta x^{\sigma}$ — площадь параллелограмма $ABCD$ ($ABCD'$). Равносильно утверждение, что тензор кривизны определяет разность компонент тензоров: исходного и после переноса по замкнутому контуру*.

Тензору Римана — Кристоффеля можно сопоставить, производя свертку по двум индексам, тензор кривизны второго ранга:

* Можно развить теорию искривленного многообразия, выбирая в качестве первичного понятия перенос по бесконечно малому замкнутому контуру — перемещение, ассоциированное с циклом [26]. Такие формулировки ОТО развивались в работах [27, 28] и др.

$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$, называемый *тензором Риччи* (свертка с последним индексом приводит к выражению с обратным знаком). С помощью (1.30) легко убедиться, что $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Умножая $R_{\mu\nu}$ внутренним образом на $g^{\mu\nu}$, получаем *скалярную кривизну* $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$.

1.7. ВАЖНЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Уравнения Эйнштейна. Центральное место в ОТО занимает вопрос о зависимости искривления пространства-времени от распределения и свойств находящейся в нем материи. Этот вопрос был решен в 1915—1916 гг. открытием уравнений Эйнштейна*.

Искомые уравнения должны были связать геометрические пространственно-временные величины и физические характеристики материи. Уже из ньютоновой теории гравитации следует, что в качестве источника гравитации следует выбирать величину, содержащую плотность или массу материи. После создания СТО стало ясно, что искомая характеристика должна содержать скорость. Игнорируя экзотические комбинации, можно ограничиться простыми тензорными выражениями. Простейшим из них является импульс материи. Но эта величина фактически уже занята в электродинамике, где во второй паре уравнений Максвелла справа стоит ток. Следующим кандидатом на роль источника искривления был тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}$. Это предположение и оказалось правильным.

Какую геометрическую величину надо сопоставить $T^{\alpha\beta}$? Во-первых, это также должна быть тензорная величина второго ранга. Во-вторых, она должна обладать таким же важным свойством, что и $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (1.34)$$

являющимся обобщением известного в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах) соотношения $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^{\beta} = 0$, приводящего к закону сохранения энергии-импульса материи. Эту геометрическую величину можно получить сверткой тождеств Бианки (1.32) по индексам λ, ν и умножением их на $g^{\alpha\mu}$. В результате находим:

$$R_{;\sigma} - 2R^{\beta}_{\sigma;\beta} = 0 \rightarrow [R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R]_{;\beta} = 0. \quad (1.35)$$

Для получения уравнений Эйнштейна остается только приравнять с помощью размерного коэффициента две величины:

$$R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R \equiv G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (1.36)$$

где коэффициент κ называется *эйнштейновской гравитационной постоянной*. Из сопоставления с уравнением Пуассона в ньютоно-

* Фундаментальные уравнения физики по существу не выводят, а открывают. Даже в тех случаях, когда как будто предлагается их вывод (из вариационного или иного принципа), на самом деле производится замена постулатов.

вой теории гравитации следует $\kappa = 8\pi k/c^4$, где k — ньютонова гравитационная постоянная; c — скорость света. Иногда удобно записывать уравнения Эйнштейна в ином виде. Умножив (1.36) на $g_{\alpha\beta}$, получим $R = -\kappa T$. Подставляя это соотношение в (1.36), находим:

$$R^{\alpha\beta} = \kappa [T^{\alpha\beta} - (1/2) g^{\alpha\beta} T]. \quad (1.36a)$$

Для пустого пространства-времени уравнения Эйнштейна упрощаются:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.37)$$

Если быть до конца последовательными, то нужно учитывать, что обращается в нуль ковариантная дивергенция еще от одной геометрической величины: $g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, поэтому уравнения Эйнштейна можно обобщить:

$$R^{\alpha\beta} - (1/2) g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}. \quad (1.38)$$

Здесь коэффициент Λ обычно называют *космологической постоянной*. Чаще всего полагают $\Lambda = 0$, однако вопрос о необходимости космологической постоянной и значении Λ еще дискутируется.

Под компактной записью уравнений (1.36) — (1.38) скрыта сложная система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений (в частных производных) второго порядка относительно компонент $g_{\mu\nu}$. Однако вследствие четырех тождеств Бианки (1.35) из 10 уравнений Эйнштейна независимыми являются только шесть. Поэтому для нахождения 10 компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ следует использовать четыре дополнительных необщековариантных (координатных) условия

$$f_{(\alpha)}(g_{\mu\nu}, x^\lambda) = 0. \quad (1.39)$$

Важнейшие уравнения поля в искривленном пространстве-времени. Как уже отмечалось, пока лишь гравитационное поле принято описывать с помощью внутренних пространственно-временных характеристик. Остальные поля описываются через внешние к пространственно-временным величины. (Геометризацию электромагнитного и скалярного полей в рамках 5-мерной теории см. в гл. 11.)

Выпишем основные уравнения для таких полей в искривленном пространстве-времени. При этом будем руководствоваться следующим правилом: соответствующие уравнения нужно записать в тензорном лоренц-ковариантном виде, а затем метрический тензор плоского пространства-времени заменить величиной $g_{\mu\nu}$, а частные производные — ковариантными.

Уравнения Максвелла. Легко убедиться, что в искривленном пространстве-времени тензор электромагнитного поля можно записывать в обычном виде:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu; \mu} - A_{\mu; \nu} = \partial A_{\nu} / \partial x^{\mu} - \partial A_{\mu} / \partial x^{\nu}. \quad (1.40)$$

Первая пара уравнений Максвелла в ОТО также сохраняет свой обычный вид:

$$F_{\mu\nu; \lambda} + F_{\nu\lambda; \mu} + F_{\lambda\mu; \nu} = \partial F_{\mu\nu} / \partial x^{\lambda} + \partial F_{\nu\lambda} / \partial x^{\mu} + \partial F_{\lambda\mu} / \partial x^{\nu} = 0. \quad (1.41)$$

Вторая пара уравнений Максвелла в плоском пространстве-времени записывается следующим образом (в декартовых координатах):

$$\partial F^{\mu\nu} / \partial x^{\nu} = 4\pi j^{\mu},$$

где $j^{\mu} = \epsilon dx^{\mu} / ds$ — 4-ток; ϵ — плотность электрического заряда. Произведя необходимые замены, получим в искривленном пространстве-времени

$$F^{\mu\nu};_{\nu} = (1/\sqrt{-g}) (\partial/\partial x^{\nu}) (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 4\pi j^{\mu}. \quad (1.42)$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu} = - (1/4\pi) [F^{\mu}_{\alpha} F^{\nu\alpha} - (1/4) g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}]. \quad (1.43)$$

Уравнение Клейна — Фока. После необходимых замен это уравнение имеет вид:

$$g^{\mu\nu} (\partial^2 \Psi / \partial x^{\mu} \partial x^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \partial \Psi / \partial x^{\alpha}) + (mc/\hbar)^2 \Psi = 0. \quad (1.44)$$

Однако в него можно добавить еще одно слагаемое

$$[g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + (mc/\hbar)^2 + aR] \Psi = 0, \quad (1.44a)$$

где R — скалярная кривизна; a — некоторая постоянная. Ее значение зависит от способа получения этого уравнения или других соображений: $a = -1/4$ — при получении уравнения Клейна — Фока квадрированием уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени; $a = -1/3$ — при выводе уравнения Клейна — Фока на основе фейнмановского суммирования по историям в ОТО; $a = -1/6$ — при требовании конформной инвариантности уравнения для безмассового скалярного поля.

Тензор энергии-импульса скалярного нейтрального поля чаще всего записывают в виде

$$T_{\mu\nu} = \Psi_{, \mu} \Psi_{, \nu} + (1/2) g_{\mu\nu} [(mc/\hbar)^2 \Psi^2 - g^{\alpha\beta} \Psi_{, \alpha} \Psi_{, \beta}]. \quad (1.45)$$

Следует заметить, что вид тензора энергии-импульса скалярного поля окончательно не ясен [29]. В ряде работ отмечалось, что, во-первых, $T_{\mu\nu}$ скалярного поля должен быть таким, чтобы при $m=0$ его след обращался в нуль ($T=0$); во-вторых, $T_{\mu\nu}$ может содержать вторые производные от Ψ . В связи с этим предлагались различные выражения для $T_{\mu\nu}$. Например, в статьях А. А. Гриба, С. Г. Мамаева, В. М. Мостепаненко для заряженного скалярного поля использовалось выражение

$$T'_{\mu\nu} = 2 \{ \Psi^*_{,\mu} \Psi_{,\nu} + (1/2) g_{\mu\nu} [(mc/\hbar)^2 \Psi^* \Psi - (R/6) \Psi^* \Psi - g^{\alpha\beta} \Psi^*_{,\alpha} \Psi_{,\beta}] \} - (1/3) (\nabla_\mu \nabla_\nu - R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta) \Psi^* \Psi.$$

Для полноты картины следовало бы здесь же записать уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени. Однако это будет сделано в гл. 7, где изложен необходимый математический аппарат (тетрадный формализм).

Некоторые важнейшие уравнения мировых линий. Уравнения движения заряженной частицы (с зарядом q) в электромагнитном поле и искривленном пространстве-времени имеют вид:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2} F^\mu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (1.46)$$

Уравнения изотропных геодезических (вдоль которых $s=0$) можно получить из условия параллельного переноса волнового вектора k^α вдоль самого себя:

$$k^\sigma \nabla_\sigma k^\mu = 0 \rightarrow k^\sigma (\partial k^\mu / \partial x^\sigma + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu k^\lambda) = 0. \quad (1.47)$$

Волновой вектор k^μ касателен к изотропной геодезической, и его длина равна нулю $k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = 0$.

1.8. ПОДВИЖНОСТЬ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В общем случае записанные уравнения очень сложны. Нет универсального метода нахождения решений уравнений Эйнштейна, тем более совместных систем из уравнений Эйнштейна и других полей. Однако получение решений существенно упрощается, если искомая метрика обладает некоторыми симметриями. В ряде случаев задача вообще сводится к решению системы алгебраических уравнений. В этом параграфе сформулированы основы теории симметрий, или подвижности римановых пространств.

Предварительно введем новую операцию — *дифференцирование Ли*. Пусть в римановом многообразии задано векторное поле ξ^μ , тогда можно определить тензорный оператор \mathfrak{L} , называемый *производной Ли* *, вдоль векторного поля ξ^μ [30]:

$$\mathfrak{L} B_{\beta \dots \alpha}^{\nu \dots \sigma} = \xi^\sigma \nabla_\sigma B_{\beta \dots \alpha}^{\nu \dots \sigma} - \underbrace{B_{\beta \dots \alpha}^{\sigma \dots \nu} \nabla_\sigma \xi^\nu}_{n} - \dots + \underbrace{B_{\sigma \dots \alpha}^{\nu \dots \beta} \nabla_\beta \xi^\sigma}_{m} + \dots, \quad (1.48)$$

где $B_{\beta \dots \alpha}^{\nu \dots \sigma}$ — произвольный тензор; ∇_σ — оператор ковариантно-

* Производные Ли были введены в 1931 г. В. Шлебодзиньским [31]. Название «производная Ли» предложил Ван Данциг.

го дифференцирования. Расписывая явно оператор ∇ , легко привести производную Ли к более простому виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\xi} \underbrace{B_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m^n &= \xi^{\sigma} \partial B_{\beta \dots}^{\nu \dots} / \partial x^{\sigma} - \underbrace{B_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \partial \xi^{\nu} / \partial x^{\sigma}}_n - \dots + \\ &\quad + \underbrace{B_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \partial \xi^{\sigma} / \partial x^{\beta}}_m + \dots \end{aligned} \quad (1.49)$$

К производным Ли можно прийти, рассуждая следующим образом. Пусть в окрестности точки с координатами x^{σ} определен произвольный тензор $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}(x^{\sigma})$. Произведем бесконечно малое смещение вдоль вектора ξ^{σ} на величину $d\lambda$:

$$x^{\sigma} \rightarrow x'^{\sigma} = x^{\sigma} + \xi^{\sigma} d\lambda \quad (1.50)$$

и рассмотрим тензор с измененным аргументом

$$B'_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^{\sigma} + \xi^{\sigma} d\lambda) = B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^{\sigma}) + \xi^{\sigma} (\partial B_{\alpha \dots}^{\mu \dots} / \partial x^{\sigma}) d\lambda. \quad (1.51)$$

Понимая эту величину определенной в системе координат $\{x'\}$, преобразуем ее в первоначальную систему координат $\{x\}$

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} = (\partial x^{\nu} / \partial x'^{\mu}) \dots (\partial x'^{\alpha} / \partial x^{\beta}) \dots B'_{\alpha \dots}^{\mu \dots},$$

где согласно (1.50)

$$\partial x'^{\alpha} / \partial x^{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \xi^{\alpha}_{, \beta} d\lambda; \quad \partial x^{\nu} / \partial x'^{\mu} = \delta_{\mu}^{\nu} - \xi^{\nu}_{, \mu} d\lambda. \quad (1.52)$$

Разность тензоров

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} - B_{\beta \dots}^{\nu \dots} \equiv \mathfrak{L}_{\xi} B_{\beta \dots}^{\nu \dots} d\lambda \quad (1.53)$$

называется дифференциалом Ли от тензора $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}$ относительно векторного поля ξ^{μ} . Учитывая (1.51) и (1.52), приходим к выражению (1.49) для производной Ли.

Перечислим основные свойства производных Ли.

1. Производная Ли от суммы величин одинакового сорта равна сумме производных Ли от слагаемых.

2. Для производной Ли от произведения величин A и B справедливо правило Лейбница $\mathfrak{L}_{\xi}(AB) = (\mathfrak{L}_{\xi}A)B + A(\mathfrak{L}_{\xi}B)$.

3. Производная Ли от тензорной плотности $\bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}$ произвольного веса ω также является тензорной плотностью того же веса. Она записывается в виде

$$\mathfrak{L}_{\xi} \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m^n = \xi^{\sigma} \frac{\partial \bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^{\sigma}} - \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}}_n - \dots +$$

$$+ \underbrace{\bar{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \dots + \omega \bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}}_{m}, \quad (1.54)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\xi} \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m &= \xi^{\sigma} \nabla_{\sigma} \bar{B}_{\beta}^{\nu} - \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \nabla_{\sigma} \xi^{\nu}}_m - \dots + \underbrace{\bar{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \nabla_{\beta} \xi^{\sigma}}_m + \dots + \\ &+ \omega \bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} \nabla_{\sigma} \xi^{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.54a)$$

4. Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

Теперь можно перейти к определению подвижности риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие *допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля* ξ^{μ} , если производная Ли от $g_{\mu\nu}$ вдоль ξ^{μ} обращается в нуль:

$$\mathfrak{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi^{\sigma} \partial g_{\mu\nu} / \partial x^{\sigma} + g_{\sigma\nu} \partial \xi^{\sigma} / \partial x^{\mu} + g_{\mu\sigma} \partial \xi^{\sigma} / \partial x^{\nu} = 0. \quad (1.55)$$

Исходя из смысла производной Ли (1.53), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (1.50) метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ должна быть точно такой же функцией аргумента x' , что и первоначальная функция $g_{\mu\nu}(x)$ ее начального аргумента x , т. е. $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$. Легко убедиться, что (1.55) можно записать иначе:

$$\mathfrak{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi_{\nu; \mu} + \xi_{\mu; \nu} = 0. \quad (1.55a)$$

Уравнения (1.55) называют *уравнениями Киллинга*, а векторное поле ξ^{σ} , удовлетворяющее уравнению Киллинга, — *вектором Киллинга*.

Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга. Конкретное риманово пространство не обязательно обладает вектором Киллинга. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга $\xi_{\nu}^{(s)}$ ($s=1, 2, 3, \dots$).

Обсудим важнейшие свойства векторов Киллинга.

Прокоммутируем вторые ковариантные производные от ξ_{ν} :

$$\xi_{\nu; \alpha; \beta} - \xi_{\nu; \beta; \alpha} = R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta} \xi_{\lambda}. \quad (1.56)$$

Прибавляя к этому соотношению еще два, отличающиеся циклической перестановкой индексов ν, α, β , учитывая тождества Риччи (1.31) и (1.55a), находим:

$$\xi_{\nu; \alpha; \beta} = R^{\lambda}_{\beta\alpha\nu} \xi_{\lambda}. \quad (1.57)$$

Это означает, что, дифференцируя (1.57) и затем используя его опять, можно выразить ковариантные производные от ξ_v любого порядка через ξ_v и $\xi_{v,\alpha}$ (с коэффициентами, зависящими от выбранной точки). Отсюда следует, что любой вектор Киллинга $\xi_v^{(s)}$ в произвольной точке x можно выразить через вектор Киллинга и его ковариантную производную в другой точке y . Действительно, разлагая $\xi_v^{(s)}(x)$ в ряд Тейлора и используя (1.57), можно записать [32]:

$$\xi_v^{(s)}(x) = A_v^\lambda(x, y) \xi_\lambda^{(s)}(y) + B_v^{\lambda\sigma}(x, y) \xi_{\lambda;\sigma}^{(s)}(y), \quad (1.58)$$

где $A_v^\lambda(x, y)$ и $B_v^{\lambda\sigma}(x, y)$ — функции, зависящие от метрики и точек x и y . Они не зависят от номера s вектора Киллинга.

Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (1.55).

Набор векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$ образует линейно-независимую систему в многообразии, если нельзя так подобрать постоянные коэффициенты $c_{(s)}$, чтобы в любой точке x выполнялось соотношение

$$\sum_{(s)} c_{(s)} \xi_v^{(s)}(x) = 0. \quad (1.59)$$

В общем случае коэффициенты в комбинации (1.59) меняются от точки к точке. Из соотношения (1.58) следует, что максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = n(n + 1)/2.$$

Укажем несколько важных классов многообразий с характерными наборами векторов Киллинга.

1. Метрическое многообразие называют *однородным*, если оно обладает подвижностью, позволяющей преобразованием (1.50) перевести его произвольную точку x в любую другую точку окрестности x . Другими словами, в каждой точке многообразия метрика допускает существование векторов Киллинга, принимающих произвольные значения. Многообразие с таким свойством образует *группу Ли*.

Очевидно, в каждой точке однородного n -мерного многообразия должно существовать n линейно-независимых векторов Киллинга $\xi_{(\alpha)}^v$ (индекс α нумерует векторы Киллинга). Операторы дифференцирования Ли вдоль выбранных векторов, действующие на скаляры, обозначим:

$$X_{(\alpha)} = \mathfrak{L}_{\xi_{(\alpha)}^v} = \xi_{(\alpha)}^v \partial / \partial x^v. \quad (1.60)$$

Говорят, что операторы (1.60) определяют базис группы, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же операторы, т. е.

$$+ \underbrace{\bar{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \dots + \omega \bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}}_{m}, \quad (1.54)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\xi} \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m &= \xi^{\sigma} \nabla_{\sigma} \bar{B}_{\beta}^{\nu} - \underbrace{\bar{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \nabla_{\sigma} \xi^{\nu}}_m - \dots + \underbrace{\bar{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \nabla_{\beta} \xi^{\sigma}}_m + \dots + \\ &+ \omega \bar{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} \nabla_{\sigma} \xi^{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.54a)$$

4. Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

Теперь можно перейти к определению подвижности риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие *допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля* ξ^{μ} , если производная Ли от $g_{\mu\nu}$ вдоль ξ^{μ} обращается в нуль:

$$\mathfrak{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi^{\sigma} \partial g_{\mu\nu} / \partial x^{\sigma} + g_{\sigma\nu} \partial \xi^{\sigma} / \partial x^{\mu} + g_{\mu\sigma} \partial \xi^{\sigma} / \partial x^{\nu} = 0. \quad (1.55)$$

Исходя из смысла производной Ли (1.53), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (1.50) метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ должна быть точно такой же функцией аргумента x' , что и первоначальная функция $g_{\mu\nu}(x)$ ее начального аргумента x , т. е. $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$. Легко убедиться, что (1.55) можно записать иначе:

$$\mathfrak{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi_{\nu; \mu} + \xi_{\mu; \nu} = 0. \quad (1.55a)$$

Уравнения (1.55) называют *уравнениями Киллинга*, а векторное поле ξ^{σ} , удовлетворяющее уравнению Киллинга, — *вектором Киллинга*.

Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга. Конкретное риманово пространство не обязательно обладает вектором Киллинга. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга $\xi_{\nu}^{(s)}$ ($s=1, 2, 3, \dots$).

Обсудим важнейшие свойства векторов Киллинга.

Прокоммутируем вторые ковариантные производные от ξ_{ν} :

$$\xi_{\nu; \alpha; \beta} - \xi_{\nu; \beta; \alpha} = R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta} \xi_{\lambda}. \quad (1.56)$$

Прибавляя к этому соотношению еще два, отличающиеся циклической перестановкой индексов ν, α, β , учитывая тождества Риччи (1.31) и (1.55a), находим:

$$\xi_{\nu; \alpha; \beta} = R^{\lambda}_{\beta\alpha\nu} \xi_{\lambda}. \quad (1.57)$$

Это означает, что, дифференцируя (1.57) и затем используя его опять, можно выразить ковариантные производные от ξ_v любого порядка через ξ_v и $\xi_{v,\alpha}$ (с коэффициентами, зависящими от выбранной точки). Отсюда следует, что любой вектор Киллинга $\xi_v^{(s)}$ в произвольной точке x можно выразить через вектор Киллинга и его ковариантную производную в другой точке y . Действительно, разлагая $\xi_v^{(s)}(x)$ в ряд Тейлора и используя (1.57), можно записать [32]:

$$\xi_v^{(s)}(x) = A_v^\lambda(x, y) \xi_\lambda^{(s)}(y) + B_v^{\lambda\sigma}(x, y) \xi_{\lambda;\sigma}^{(s)}(y), \quad (1.58)$$

где $A_v^\lambda(x, y)$ и $B_v^{\lambda\sigma}(x, y)$ — функции, зависящие от метрики и точек x и y . Они не зависят от номера s вектора Киллинга.

Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (1.55).

Набор векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$ образует линейно-независимую систему в многообразии, если нельзя так подобрать постоянные коэффициенты $c_{(s)}$, чтобы в любой точке x выполнялось соотношение

$$\sum_{(s)} c_{(s)} \xi_v^{(s)}(x) = 0. \quad (1.59)$$

В общем случае коэффициенты в комбинации (1.59) меняются от точки к точке. Из соотношения (1.58) следует, что максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = n(n+1)/2.$$

Укажем несколько важных классов многообразий с характерными наборами векторов Киллинга.

1. Метрическое многообразие называют *однородным*, если оно обладает подвижностью, позволяющей преобразованием (1.50) перевести его произвольную точку x в любую другую точку окрестности x . Другими словами, в каждой точке многообразия метрика допускает существование векторов Киллинга, принимающих произвольные значения. Многообразие с таким свойством образует *группу Ли*.

Очевидно, в каждой точке однородного n -мерного многообразия должно существовать n линейно-независимых векторов Киллинга $\xi_{(\alpha)}^v$ (индекс α нумерует векторы Киллинга). Операторы дифференцирования Ли вдоль выбранных векторов, действующие на скаляры, обозначим:

$$X_{(\alpha)} = \mathfrak{L}_{\xi_{(\alpha)}^v} = \xi_{(\alpha)}^v \partial / \partial x^v. \quad (1.60)$$

Говорят, что операторы (1.60) определяют базис группы, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же операторы, т. е.

$$[X_{(\alpha)}X_{(\beta)}] \equiv X_{(\alpha)}X_{(\beta)} - X_{(\beta)}X_{(\alpha)} = C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)}X_{(\gamma)}, \quad (1.61)$$

где $C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)}$ — постоянные, называемые *структурными константами* группы. Соотношения (1.61) являются математической формулировкой однородности многообразия. Сопоставляя векторам Киллинга $\xi_{(\alpha)}^{\nu}$ обратные им векторы $\xi_{\nu}^{(\beta)}$ согласно $\xi_{(\alpha)}^{\nu}\xi_{\nu}^{(\beta)} = \delta_{(\alpha)}^{(\beta)}$; $\xi_{(\alpha)}^{\sigma}\xi_{\lambda}^{(\alpha)} = g_{\lambda}^{\sigma}$, из (1.61) находим:

$$C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)} = \xi_{(\alpha)}^{\lambda}\xi_{(\beta)}^{\mu} (\partial_{\xi_{\lambda}^{(\gamma)}} - \partial_{\xi_{\mu}^{(\gamma)}}). \quad (1.62)$$

Структурные константы удовлетворяют соотношению

$$C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)}C_{(\nu\gamma)}^{(\mu)} + C_{(\nu\alpha)}^{(\gamma)}C_{(\beta\gamma)}^{(\mu)} + C_{(\beta\nu)}^{(\gamma)}C_{(\alpha\gamma)}^{(\mu)} = 0, \quad (1.63)$$

соответствующему групповому свойству ассоциативности.

В однородных пространствах в качестве n линейно-независимых векторов можно выбрать $\xi_{\nu}^{(\beta)} = \delta_{\nu}^{\beta}$.

2. Метрическое многообразие называют *изотропным* в данной точке y (относительно y), если оно обладает подвижностью, оставляющей неподвижной эту точку [т. е. $\xi_{\nu}(y) = 0$], а первые производные $\xi_{\nu;\alpha}(y)$ в такой точке принимают все возможные значения, подчиняясь лишь условию антисимметрии (1.55а). В изотропном многообразии n измерений можно выбрать $n(n-1)/2$ векторов Киллинга $\xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}$ [значки $(\alpha\beta)$ нумеруют векторы Киллинга], удовлетворяющих условиям:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(x, y) &= -\xi_{\nu}^{(\beta\alpha)}(x, y); \quad \xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(y, y) = 0; \\ \xi_{\nu;\mu}^{(\alpha\beta)}(y, y) &= [(\partial/\partial x^{\mu})\xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(x, y)]_{x=y} = \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Можно сказать, что векторы Киллинга $\xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}$ определяют повороты многообразия вокруг осей, проходящих через точку y .

3. Однородные изотропные метрические многообразия являются максимально симметричными, так как они обладают $n(n+1)/2$ линейно-независимыми векторами Киллинга. Можно показать, что изотропное в каждой точке многообразие является однородным.

1.9. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ РИМАНОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Несомненный физический интерес представляют некоторые виды соответствий между различными римановыми пространствами, определенными на одном и том же множестве точек с единой системой координат. Рассмотрим несколько важнейших из них.

Двуметрические теории. В них фигурируют многообразия, снабженные двумя произвольными римановыми метриками $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g_{\alpha\beta}^*(x)$. Существенная особенность двуметрической теории состоит в том, что разность символов Кристоффеля, образован-

ных из соответствующих метрик, является тензором *. В этом легко убедиться, учитывая трансформационные свойства символов Кристоффеля (1.15) при преобразованиях координат. Двуметрическую теорию широко используют для описания «слабого» гравитационного поля», когда метрика рассматриваемого риманова пространства мало отличается от метрики плоского пространства-времени. Последнюю выбирают в качестве второй метрики.

Конформное соответствие римановых пространств. Два римановых пространства с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g_{\alpha\beta}^*(x)$, определенными на одном и том же многообразии точек, называют *конформно-соответствующими*, если

$$g_{\alpha\beta}^*(x) = \exp[2\sigma(x)] g_{\alpha\beta}(x), \quad (1.65)$$

где $\sigma(x)$ — некоторая скалярная функция координат. В таких пространствах длины векторов с компонентами dx^α различаются множителем, зависящим только от выбранной точки: $ds =$

$= \sqrt{g_{\alpha\beta}^*(x) dx^\alpha dx^\beta} = \exp[\sigma(x)] ds$. В конформно-соответствующих пространствах углы между соответствующими парами векторов равны. Действительно, для углов между векторами dx^α и δx^α имеем:

$$\cos(\widehat{dx^\alpha, \delta x^\alpha}) = \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta x^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \sqrt{g_{\lambda\kappa} \delta x^\lambda \delta x^\kappa}} = \cos^*(\widehat{dx^\alpha, \delta x^\alpha}).$$

Из определения (1.65) следуют соотношения между геометрическими величинами конформно-соответствующих римановых пространств произвольной размерности n :

$$g^{*\alpha\beta} = \exp(-2\sigma) g^{\alpha\beta}; \quad g_{\alpha}^{*\beta} = g_{\alpha}^{\beta} \equiv g_{\alpha}^{\beta}; \quad \sqrt{-g^*} = \exp(n\sigma) \sqrt{-g}; \quad (1.66)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{*\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + g_{\beta}^{\alpha} \sigma_{\gamma} + g_{\gamma}^{\alpha} \sigma_{\beta} - g_{\beta\gamma} g^{\alpha\tau} \sigma_{\tau}; \quad (1.67)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{*\alpha} = R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + g_{\delta}^{\alpha} \sigma_{\beta\gamma} - g_{\gamma}^{\alpha} \sigma_{\beta\delta} + g^{\alpha\nu} (g_{\beta\gamma} \sigma_{\nu\delta} - g_{\beta\delta} \sigma_{\nu\gamma}) + (g_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma} - g_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta}) \Delta_1 \sigma; \quad (1.68)$$

$$R_{\beta\delta}^{*\alpha} = R_{\beta\delta}^{\alpha} - (n-2) \sigma_{\beta\delta} - [\Delta_2 \sigma + (n-2) \Delta_1 \sigma] g_{\beta\delta}; \quad (1.69)$$

$$\bar{R}^* = \exp(-2\sigma) [R - 2(n-1) \Delta_2 \sigma - (n-1)(n-2) \Delta_1 \sigma], \quad (1.70)$$

где использованы обозначения:

$$\sigma_{\mu} = \partial\sigma/\partial x^{\mu}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \sigma - (\partial\sigma/\partial x^{\alpha}) \partial\sigma/\partial x^{\beta};$$

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} (\partial\sigma/\partial x^{\alpha}) \partial\sigma/\partial x^{\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \sigma.$$

* Эта особенность послужила основой для цикла работ по неэйнштейновской, так называемой двуметрической теории гравитации [33]. Слабое место такой теории связано с вопросами о физическом смысле и наблюдаемости второй римановой метрики.

Из компонент тензора кривизны можно сконструировать конформно-инвариантный тензор

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + (n-2)^{-1} (g^{\alpha}_{\gamma} R_{\beta\delta} - g^{\alpha}_{\delta} R_{\beta\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma} g_{\beta\delta} - R^{\alpha}_{\delta} g_{\beta\gamma}) + \\ + [R/(n-1)(n-2)] (g^{\alpha}_{\delta} g_{\beta\gamma} - g^{\alpha}_{\gamma} g_{\beta\delta}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

называемый тензором Вейля. Он обладает следующими основными свойствами:

1. В пустом пространстве-времени, когда $R_{\mu\nu}=0$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$.
2. $C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ имеет те же самые свойства симметрии (1.28) — (1.31), что и тензор Римана — Кристоффеля.
3. В многообразии трех измерений $C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$. (О конформном соответствии римановых пространств двух и трех измерений — см. § 10.5 и 12.2.)

4. Необходимым и достаточным признаком конформно-плоских многообразий при $n \geq 4$ является обращение в нуль тензора Вейля.

Из соотношений (1.69), (1.70) следует, что уравнения Эйнштейна не обладают свойством конформной инвариантности, тогда как уравнения Максвелла в вакууме являются конформно-инвариантными, если положить, что при конформных преобразованиях метрики (1.65) ковариантные компоненты векторного потенциала остаются инвариантными: $\tilde{A}_{\mu} = A_{\mu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

Для безмассового скалярного поля Ψ уравнение [34]

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Psi - (1/6) R \Psi = 0 \quad (1.72)$$

является конформно-инвариантным, если при конформном преобразовании (1.65) Ψ изменяется по закону

$$\tilde{\Psi} = \exp(-\sigma) \Psi. \quad (1.73)$$

Именно по этой причине уравнение Клейна — Фока в искривленном пространстве-времени записывают в виде (1.44а) с коэффициентом $a = -1/6$.

Некоторые типы соответствий римановых пространств (например, проективные, Керра—Шилда) здесь рассматриваться не будут.

Глава 2

АСИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

2.1. СИГНАТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В предыдущей главе рассмотрены метрические свойства пространства-времени, формулируемые симметрично относительно всех координат риманова многообразия. Открытие 4-мерной симметрии пространства и времени явилось одним из наиболее важных достижений теории относительности. Из-за незнания 4-мер-

ной симметрии не смогли создать до Эйнштейна ОТО ни Риман, ни Клиффорд, ни Мах, хотя они были близки к этому. Все развитие теоретической физики с начала нашего века проходило под влиянием открытия 4-мерной симметрии.

Однако полной симметрии нет! Об этом свидетельствует практика, все измерения в конце концов заставляют нас говорить отдельно о пространстве и времени. Такая асимметрия пронизывает всю структуру ОТО, составляет другую сторону диалектического единства 4-мерия.

Математически это выражается в следующем. Как уже отмечалось, с помощью допустимых преобразований координат метрический тензор в произвольной точке всегда можно привести к каноническому виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Сумму диагональных элементов этой матрицы называют *сигнатурой*. Значение сигнатуры является инвариантной характеристикой метрики в соответствующей точке (закон инерции квадратичных форм). Часто под сигнатурой понимают эквивалентный данному определению вид строки из знаков при единицах на диагонали, например (+— —...).

Физическое пространство-время, описываемое ОТО, имеет сигнатуру $s = -2$, т. е. (+— — —). Заметим, что ничего не изменится, если выбрать сигнатуру (— + + +). Главное, что одна координата (временно-подобная) выделена по сравнению с тремя остальными (пространственно-подобными).

Сигнатура (+— — —) соответствует важному свойству *физического* пространства-времени — отношению частичной упорядоченности между точками-событиями. Напомним, что до создания СТО абсолютное одномерное время и трехмерное пространство были совершенно различными категориями. Абсолютность времени в дорелятивистских представлениях можно понимать как *свойство линейной упорядоченности* пространственно-временных точек-событий. Оно означает, что для любых двух событий a и b имеет место одно из трех отношений: либо b следует за a ($b > a$), либо a следует за b ($b < a$), либо a и b одновременны ($a = b$). Свойство линейной упорядоченности физически обусловлено допущением о наличии сигналов с бесконечной скоростью распространения.

Принятие постулата СТО о предельной скорости (света) привело к замене свойства линейной упорядоченности свойством частичной упорядоченности. Последнее означает, что для любых двух различных точек a и b имеет место одно из трех отношений: либо b следует за a ($b > a$), либо a следует за b ($b < a$), либо a и b не следуют друг за другом, т. е. они не упорядочены. Первые два

отношения означают временно-подобность рассматриваемых событий, последнее — пространственно-подобность.

Свойство частичной упорядоченности можно рассматривать как наиболее глубокую (фундаментальную) составную часть классических пространственно-временных отношений. Именно отношения упорядоченности при соответствующей увязке их с другими свойствами (аксиомами) пространства-времени обуславливают понятие причинности в физике. Отношения частичной упорядоченности подчиняются ряду аксиом [35—38], формирующих понятие светового конуса.

Можно развить довольно содержательную теорию множества лишь со свойствами частичной упорядоченности (кинематику), затем перейти к структуре с топологией, порождаемой частичной упорядоченностью, потом к заданию допустимых координат (этот вопрос затронут в § 2.3) и лишь затем ввести на основе всего предыдущего рассмотрение метрики и ее связь с распределением материи [37, 39, 40]. В результате последовательного развития теории согласно этой схеме можно прийти к содержанию ОТО. При этом наиболее естественно проявляется имеющаяся в ОТО связь между метрическими свойствами пространства-времени и свойствами частичной упорядоченности: квадрат интервала между близкими точками положителен ($ds^2 > 0$), если точки-события упорядочены (временно-подобны), и отрицателен ($ds^2 < 0$), если точки-события не упорядочены (пространственно-подобны).

2.2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕТРОВА ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

С сигнатурой 4-мерного пространства-времени тесно связана алгебраическая классификация решений уравнений Эйнштейна (точнее, пространств Эйнштейна), предложенная А. З. Петровым [41]. Эта классификация основана на следующем. Матрице $M_{AB}(R)$ из компонент тензора Римана (или Вейля) сопоставляется характеристическая матрица $M_{AB}(R) - \lambda \tilde{I}_{AB}$, где λ — собственные значения, т. е. корни характеристического уравнения $\|M_{AB}(R) - \lambda \tilde{I}_{AB}\| = 0$; A, B — индексы, нумерующие элементы матрицы; \tilde{I}_{AB} — аналог единичной матрицы, образованный из компонент метрического тензора. Характеристическая матрица (λ -матрица, см. ниже) приводится к канонической (нормальной) форме. Возможные канонические формы определяют алгебраические классы пространств по Петрову.

Выведем классификацию Петрова последовательно, но прежде всего дадим определение. Римановы многообразия, удовлетворяющие соотношению

$$R_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

где σ — некоторая постоянная, при любой размерности и любой сигнатуре метрики называются *пространствами Эйнштейна*. Соотношение (2.1) в общем случае не совпадает с уравнениями Эйнштейна, однако пространства Эйнштейна охватывают все решения уравнений Эйнштейна. Действительно, все вакуумные решения последних являются пространствами Эйнштейна с $\sigma = 0$. Для невакуумных решений вместо тензора $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ следует взять тензор Вейля $C^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, который обладает всеми алгебраическими свойствами тензора Римана—Кристоффеля и для которого $C_{\mu\nu} \equiv 0$.

Используя свойства симметрии тензора Римана—Кристоффеля (Вейля)

(1.28)–(1.30), введем для каждой пары индексов специальные (бивекторные) обозначения, которых вследствие антисимметрии должно быть шесть:

$$(10) \rightarrow 1; \quad (20) \rightarrow 2; \quad (30) \rightarrow 3; \quad (23) \rightarrow \dot{1}; \quad (31) \rightarrow \dot{2}; \quad (12) \rightarrow \dot{3}.$$

В этих обозначениях все компоненты тензора Римана—Кристоффеля (Вейля) можно представить в виде симметричной квадратной матрицы:

$$M_{AB}(R) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y_{1\dot{1}} & Y_{1\dot{2}} & Y_{1\dot{3}} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & Y_{2\dot{1}} & Y_{2\dot{2}} & Y_{2\dot{3}} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & Y_{3\dot{1}} & Y_{3\dot{2}} & Y_{3\dot{3}} \\ Y_{\dot{1}1} & Y_{\dot{1}2} & Y_{\dot{1}3} & Z_{\dot{1}\dot{1}} & Z_{\dot{1}\dot{2}} & Z_{\dot{1}\dot{3}} \\ Y_{\dot{2}1} & Y_{\dot{2}2} & Y_{\dot{2}3} & Z_{\dot{2}\dot{1}} & Z_{\dot{2}\dot{2}} & Z_{\dot{2}\dot{3}} \\ Y_{\dot{3}1} & Y_{\dot{3}2} & Y_{\dot{3}3} & Z_{\dot{3}\dot{1}} & Z_{\dot{3}\dot{2}} & Z_{\dot{3}\dot{3}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} XY \\ YZ \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где использованы обозначения:

$$X_{ik} = R_{0i0k}; \quad Y_{r\dot{k}} = R_{r0sl} (1/2) \varepsilon_{ksl}; \quad Z_{\dot{i}\dot{k}} = (1/4) R_{srmn} \varepsilon_{lsr} \varepsilon_{kmn}.$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения: 1, 2, 3; ε_{ksl} — трехмерный символ Леви-Чивиты.

Десять условий (2.1) приводят к дополнительным симметриям в матрице (2.2). В локально-декартовой системе координат эти условия означают, что

$$X_{lk} = -Z_{\dot{l}\dot{k}}; \quad Y_{s\dot{i}} = Y_{\dot{s}i}. \quad (2.3)$$

Следовательно, матрица M_{AB} имеет структуру, связанную с выделенностью времени

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}. \quad (2.2a)$$

Подматрица X состоит из величин с двумя временными индексами, а Y — из величин с одним временным индексом.

Для следа подматрицы X находим из (2.1)

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = -\sigma. \quad (2.4)$$

Из тождеств Риччи (1.31) следует, что

$$Y_{\dot{1}1} + Y_{\dot{2}2} + Y_{\dot{3}3} = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, 10 условий (2.1) уменьшают число алгебраически независимых компонент тензора Римана—Кристоффеля (Вейля) до 10.

Построим характеристическое уравнение для матрицы M_{AB} в виде

$$\| M_{AB} - \lambda \bar{g}_{AB} \| = 0, \quad (2.6)$$

где \bar{g}_{AB} — метрический тензор бивекторного (6-мерного) пространства:

$$\bar{g}_{AB} \rightarrow g_{\alpha\beta\mu\nu} = (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}), \quad (2.7)$$

обладающий теми же свойствами симметрии, что и $R_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = -g_{\beta\alpha\mu\nu} = -g_{\alpha\beta\nu\mu} = g_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

В локально-декартовой системе координат при сигнатуре физического пространства-времени (+ — — —) матрица \bar{g}_{AB} имеет вид (при ранее введенных обозначениях для парных индексов):

$$\bar{g}_{AB} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (2.6) имеет структуру

$$\left\| \begin{array}{cc} X + \lambda I & Y \\ Y & -X - \lambda I \end{array} \right\| = 0. \quad (2.10)$$

Прибавляя к столбцам и строкам матрицы (2.10) другие столбцы и строки с соответствующими коэффициентами, (2.10) можно привести к виду

$$\left\| \begin{array}{cc} X + iY + \lambda I & 0 \\ 0 & -(X - iY + \lambda I) \end{array} \right\| = 0. \quad (2.11)$$

Следовательно, характеристическое уравнение (2.6) принимает вид:

$$\|X + iY + \lambda I\| \|X - iY + \lambda I\| = 0. \quad (2.11a)$$

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть характеристическое уравнение

$$\|X + iY + \lambda I\| = 0, \quad (2.12)$$

а затем учесть комплексно-сопряженное.

Таким образом, классификация 4-мерных физических пространств Эйнштейна сводится к классификации комплексных 3×3 - λ -матриц (2.12). Напомним основные сведения из алгебры λ -матриц [42].

Многочленной матрицей, или *λ -матрицей*, называют матрицу (прямоугольную или квадратную), элементами которой являются многочлены от одного переменного λ с комплексными коэффициентами. Таковыми, в частности, являются характеристические матрицы. Над λ -матрицами можно производить так называемые *элементарные преобразования* трех типов: перестановку двух строк (столбцов); умножение строки (или столбца) на число $c \neq 0$; прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любой многочлен $f(\lambda)$.

Две λ -матрицы одинаковых размеров называются эквивалентными, если конечным числом элементарных преобразований можно получить из одной матрицы другую. Таким образом, все матрицы одинаковых размеров разбиваются на непересекающиеся *классы эквивалентности*. В каждом классе эквивалентности можно определить *каноническую* (или *нормальную*) λ -матрицу. Для квадратных канонических λ -матриц (размер $n \times n$) отличны от нуля только элементы на главной диагонали, причем они являются многочленами: $E_{11}(\lambda), E_{22}(\lambda), \dots, E_{nn}(\lambda)$ с равным 1 коэффициентом при высших степенях λ (если многочлен $E_{ii}(\lambda) \neq 0$). Кроме того, эти диагональные элементы таковы, что каждый следующий многочлен делится на предыдущий. Многочлены нулевой степени (единицы) стоят в начале диагонали, а нули — в конце. Канонические λ -матрицы являются единственными в своем классе эквивалентности; они характеризуют весь класс.

Очевидно, определитель любой матрицы из соответствующего класса эквивалентности можно выразить через диагональные элементы (*инвариантные множители*) канонической матрицы: $\|B(\lambda)\| = c \prod_{j=1}^n E_{jj}(\lambda)$, где c — постоянная.

Однако определитель $\|B(\lambda)\|$ можно записать в виде $\|B(\lambda)\| = c \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ где m_k — кратность соответствующего корня λ_k ; $(\lambda - \lambda_k)$ — так называемые элементарные множители. Из сопоставления этих выражений следует, что инвариантные множители канонической матрицы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{12}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{1s}}; \\ E_{22} &= (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{22}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{2s}}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ E_{nn} &= (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{n1}} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{n2}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{ns}}, \end{aligned} \right\}$$

где кратности корней в инвариантных множителях удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \alpha_{1k} \leq \alpha_{2k} \leq \dots \leq \alpha_{nk} \leq m_k; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\}$$

Каждому классу эквивалентности сопоставляется характеристика $[(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}) (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n2}) \dots (\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \dots, \alpha_{ns})]$.

Возвращаясь к случаю характеристических 3×3 -матриц, где максимальное число корней равно 3, легко видеть, что может существовать три и только три типа таких матриц:

$$T'_1 \rightarrow [111]; \quad T'_2 \rightarrow [12]; \quad T'_3 \rightarrow [3].$$

К ним относятся и классы, соответствующие нескольким инвариантным множителям ненулевой степени. Чтобы различить эти возможности, в характеристике следует расставить скобки:

$$\left. \begin{aligned} T'_1 &\rightarrow [(1) (1) (1)]; \quad [(1, 1) (1)]; \quad [(1, 1, 1)] \\ &\text{— три подтипа первого типа;} \\ T'_2 &\rightarrow [(2) (1)]; \quad [(1, 2)] \\ &\text{— два подтипа второго типа;} \\ T'_3 &\rightarrow [(3)] \\ &\text{— третий тип.} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Учитывая комплексно-сопряженный множитель характеристического уравнения (2.11а), три типа Петрова следует обозначить так:

$$T_1 \leftarrow [111, \overline{111}]; \quad T_2 \rightarrow [12, \overline{12}]; \\ T_3 \rightarrow [3, \overline{3}],$$

где черта сверху означает комплексно-сопряженные элементарные множители (корни).

Пенроуз предложил диаграмму для изображения всех возможных подтипов классификации Петрова (рис. 2). На диаграмме введены обозначения: I, D, O — подтипы первого типа Петрова [соответствуют первой строке (2.13)]; II, N — подтипы второго типа Петрова [соответствуют второй строке (2.13)]; III — третий тип Петрова. Заметим, что эти шесть возможностей (подтипов) обычно называют типами по Петрову (например, тип D , тип N и т. д.).

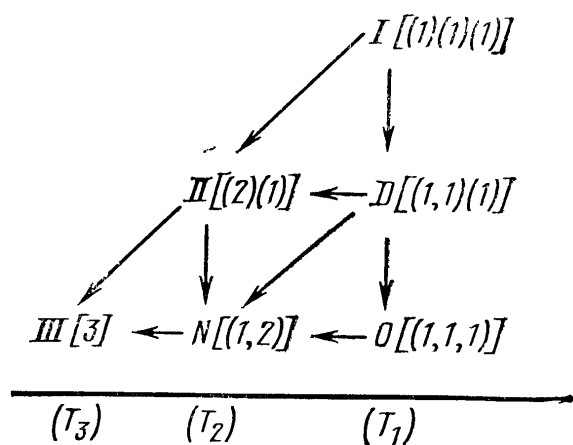


Рис. 2. Диаграмма Петрова — Пенроуза для пространств Эйнштейна

2.3. ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

Остановимся на измерении времени. Оказывается, пользуясь часами на произвольной временно-подобной мировой линии и возможностью излучать и принимать отраженные сигналы (например, световые — т. е. возможностью радиолокации), можно развить конструктивный вариант теории искривленного пространства-времени в окрестности этой мировой линии. Этот вариант теории, основан-

ный на измерении времени, будем называть *хроногеометрией*. Такую формулировку ОТО подробно рассматривал, например, Синг [5]. Так, Синг пишет: «Для нас единственной *основной мерой является время*. Длина (или расстояние), поскольку возникает необходимость или желательность их введения, будет рассматриваться как строго производное понятие». И далее: «Фактически мы имеем дело с римановой *хронометрией*, а не с *геометрией*, слово *геометрия*, внушающее опасение, что нам, чего доброго, придется возиться с измерениями длин с помощью *метровой линейки*, можно было бы в этой связи полностью исключить из употребления, если бы грубое буквальное значение понятия геометрии не приобрело глубокой связи с абстрактными математическими определениями «пространства», «метрик» и т. д.» [5, с. 101].

Действительно, укажем, как можно развернуть содержание геометрии искривленного пространства-времени, ввести ее основные понятия и соотношения, исходя из показаний часов на временно-подобной мировой линии и фиксации времен испускания и приема световых сигналов.

1. На мировой линии имеем монотонно изменяющийся параметр τ — собственное время наблюдателя. Квадрат интервала s_{12}^2 между двумя событиями на этой мировой линии задается часами: $s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2$.

2. В окрестности своей мировой линии (не обязательно малой) наблюдатель самым непосредственным образом может ввести две координаты окружающих точек-событий. Поясним это. Пусть наблюдателя интересуют координаты точки-события M (вне его мировой линии), и пусть наблюдатель, испустив сигнал в момент собственного времени τ_1 , отсчитываемого от некоторой точки O , получил отраженный от M сигнал в момент τ_2 . Значение τ_i положительно, если точка O предшествует τ_i , и отрицательно, если O выбрано после τ_i . Время события M относительно O можно определить величиной

$$\tau_{OM} = (1/2) (\tau_2 + \tau_1), \quad (2.14)$$

расстояние между события O и M задать формулой (рис. 3)

$$l_{OM} = (1/2) (\tau_2 - \tau_1), \quad (2.15)$$

а квадрат пространственно-временного интервала между событиями — формулой

$$s_{OM}^2 = \tau_1 \tau_2. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что выполняется обычное соотношение *

$$s_{OM}^2 = \tau_{OM}^2 - l_{OM}^2. \quad (2.17)$$

3. Если точка O_1 лежит между близкими моментами испуска-

* Заметим, что эту схему рассуждений анализировали как философы [43, с. 302], так и физики [44, с. 49; 45; 46].

ния сигнала и приема его после отражения (рис. 4), то согласно (2.16) малый отрезок O_1M пространственно-подобен, т. е.

$$ds_{O_1M}^2 = (O_1M)^2 = -AO_1O_1B < 0. \quad (2.18)$$

Хроногеометрическим способом можно ввести понятие скалярного произведения малого временно-подобного вектора O_1B и простран-

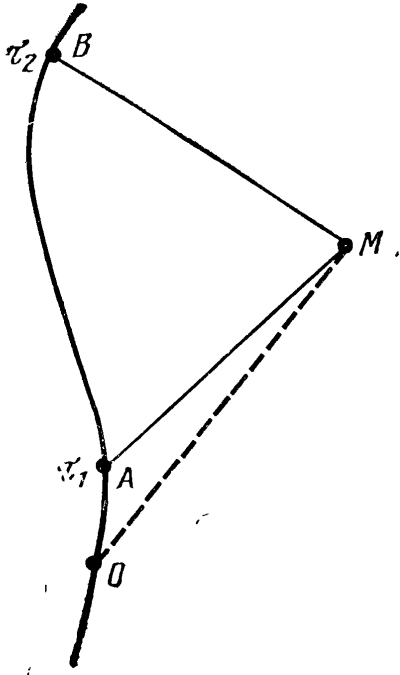


Рис. 3. Определение момента времени и расстояния события M относительно события O в хроногеометрии

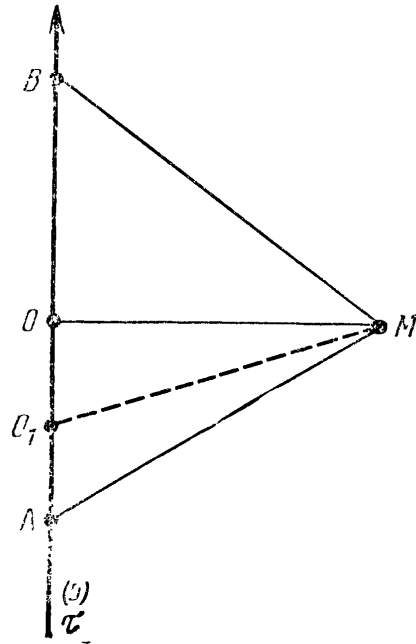


Рис. 4. Определение скалярного произведения в хроногеометрии

ственно-подобного вектора O_1M с началом в одной точке O_1 выбранной мировой линии $\tau^{(0)}$. Для этого рассмотрим треугольник O_1BM . Для составляющих его малых векторов имеем $MB^\mu = O_1B^\mu - O_1M^\mu$. Запишем квадрат этого выражения

$$MB^\mu MB_\mu = O_1B^\mu O_1B_\mu - 2O_1B^\mu O_1M_\mu + O_1M^\mu O_1M_\mu = O_1B^2 + O_1M^2 - 2O_1B^\mu O_1M_\mu.$$

Ввиду того, что MB^μ — изотропный вектор ($MB^\mu MB_\mu = 0$), хроногеометрическое определение скалярного произведения записывается следующим образом:

$$O_1B^\mu O_1M_\mu = (1/2) (O_1B^2 + O_1M^2). \quad (2.19)$$

Учитывая (2.18), находим, что векторы OB^μ и OM^μ ортогональны, если имеет место хроногеометрическое условие $AO = OB$ [5].

С помощью хроногеометрической формулы (2.19) можно определять также проекции любых смещений других векторов (в точках данной мировой линии) на направления (временно-подобные) этой мировой линии. Так, если определен 4-импульс p_μ какой-то

частицы в точке O_1 , то энергия этой частицы $E(O_1) = \tau^\mu(O_1) p_\mu(O_1)$, где $\tau^\mu(O_1)$ — единичный вектор, направленный вдоль мировой линии τ .

4. В хроногеометрической схеме не содержатся две оставшиеся координаты (например, углы θ и φ). Для их введения необходимо дополнительно определить в окрестности мировой линии τ как минимум две другие (опорные) мировые линии $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ и допустить возможность сравнения направлений приходящих и испущенных сигналов с направлениями на опорные мировые линии. Это легко понять, вспомнив опорные направления в определениях сферических и цилиндрических координат в плоском пространстве. Для задания координат, аналогичных декартовым, удобнее определить три опорные мировые линии. Тогда в малой окрестности исходной мировой линии τ можно определить триаду пространственно-подобных векторов OM_k , ортогональных временно-подобному вектору OB .

5. Покажем, как в рамках хроногеометрии можно определить значения метрического тензора $g_{\mu\nu}(0)$ в произвольной точке O мировой линии τ [47]. Пусть в малой окрестности точки O каким угодно способом введена система координат. Ею может быть и система с хроногеометрическим заданием координат $x^0 = \tau$, $x^1 = l$ согласно п. 2. Выберем в этой окрестности 10 различных точек-событий $M_{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, 10$), тогда получим 10 хроногеометрически измеримых интервалов $ds_{OM(r)}^2$ с началом в общей точке O . Координаты выбранных точек $\{x_0^\mu + dx_{(r)}^\mu\}$. Определим квадратную матрицу, имеющую размер 10×10 : $y_{(rp)} \equiv y_{(r)}^{\mu\nu} = \{dx_{(r)}^\mu dx_{(r)}^\nu\}$, где индексом p пронумерованы 10 возможных симметричных комбинаций индексов μ и ν в 40-мерном многообразии. Десять точек-событий $M_{(r)}$ будем называть независимыми, если определитель $\|y_{(pr)}\| \neq 0$. Положим, что выбранные точки-события $M_{(r)}$ независимы. Тогда систему из 10 соотношений

$$ds_{OM(r)}^2 = g_{\mu\nu}(0) dx_{(r)}^\mu dx_{(r)}^\nu \quad (2.20)$$

можно рассматривать как систему уравнений относительно 10 неизвестных компонент метрического тензора с матрицей известных коэффициентов $y_{(pr)}$ и хроногеометрически заданных $ds_{OM(r)}^2$. Решая эту систему, находим искомые компоненты метрики $g_{\mu\nu}(0)$.

6. Анализ процессов трехкратного отражения сигнала между двумя временно-подобными геодезическими $\tau^{(0)}$ и $\tau^{(1)}$ позволяет хроногеометрически ввести величины, соответствующие компонентам символов Кристоффеля.

7. Наконец, анализ процессов пятикратного отражения сигнала между двумя временно-подобными геодезическими приводит к хроногеометрическому определению величин, непосредственно связанных с компонентами тензора кривизны [47, с. 59].

2.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

На явном использовании физической асимметрии временной и пространственных координат основан вывод уравнений движения пробных частиц. Как уже отмечалось, движение свободных пробных частиц по временно-подобным геодезическим сначала постулировалось, а затем было выведено из уравнений Эйнштейна. Кроме того, оказалось, что уравнения движения, вообще говоря, зависят от внутренней структуры частиц. Если ее учесть, то уравнения движения следует немного подправить. Покажем это, основываясь на методе Фока и следуя работе [48].

Пусть пробная частица имеет размеры, малые по сравнению с характеристическими размерами внешнего поля. Будем считать, что ее размеры стремятся к нулю. Эволюцию частицы во времени можно изобразить в виде трубки временно-подобных мировых линий. Тензор энергии-импульса частицы $T^{\mu\nu}$ отличен от нуля только внутри трубки. Выделим внутри трубки некоторую линию τ , координаты точек которой будем обозначать $x_{(0)}^\alpha$. Координаты остальных точек на пространственно-подобных сечениях трубки мало отличаются от $x_{(0)}^\alpha$: $x^\alpha - x_{(0)}^\alpha = \xi^\alpha$. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma; \quad \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_{,i}^\lambda d\sigma; \quad \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi^\lambda \xi^\rho d\sigma; \dots, \quad (2.21)$$

где интегрирование производится по малой области (внутри трубки) 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ (рис. 5). Следует заметить, что в общем случае в искривленном пространстве-времени не определены интегралы от тензорных величин, однако в малой области они имеют смысл. Эти интегралы характеризуют внутреннюю структуру пробной частицы. Пробную частицу называют *монопольной*, если отличны от нуля лишь какие-то компоненты интеграла $\int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma$, тогда как все остальные интегралы обращаются в нуль. *Дипольной* частицей называется такая, которая имеет отличные от нуля компоненты только первых двух интегралов (2.21), *квадрупольной* — трех интегралов и т. д.

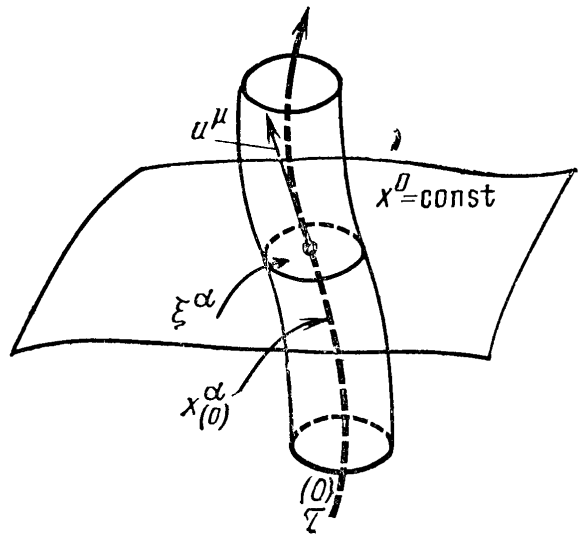


Рис. 5. Трубка временно-подобных мировых линий протяженной частицы

Выведем уравнения движения для монопольных и дипольных частиц.

Монопольные частицы. Согласно уравнениям Эйнштейна

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \rightarrow (\partial/\partial x^\beta) (\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sqrt{-g} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Отсюда следуют также соотношения:

$$(\partial/\partial x^\gamma) (x^\alpha \sqrt{-g} T^{\beta\gamma}) = \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} - x^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta \sqrt{-g} T^{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Интегрируя (2.22) и (2.23) по 3-мерной гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, имеем соответственно

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g} T^{\alpha 0} d\alpha = - \int \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\sigma; \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dx^0} \int x^{\alpha} T^{\beta 0} \sqrt{-g} d\sigma = \int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} d\sigma - \int x^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma. \quad (2.25)$$

Внутри трубки разложим символы Кристоффеля в ряд

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\alpha} + \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{(0)\alpha} \xi^{\sigma} + \dots, \quad (2.26)$$

где индекс (0) сверху соответствует значению величин на линии $\tau^{(0)}$. Подставляя это разложение в (2.24), (2.25) и учитывая, что частица монополярная, находим в основном приближении:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g} T^{\alpha 0} d\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\alpha} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma = 0; \quad (2.24a)$$

$$\int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} d\sigma = \frac{dx_{(0)}^{\alpha}}{dx^0} \int \sqrt{-g} T^{\beta 0} d\sigma. \quad (2.25a)$$

Введем обозначение

$$M^{\alpha\beta} = u^0 \int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} d\sigma, \quad (2.27)$$

где $u^0 = dx_{(0)}^0/ds$; $ds^2 = g_{\mu\nu} dx_{(0)}^{\mu} dx_{(0)}^{\nu}$.

Тогда уравнения (2.24), (2.25) принимают вид:

$$(d/ds) (M^{\alpha 0}/u^0) + \Gamma_{\mu\nu}^{(0)\alpha} M^{\mu\nu} = 0; \quad (2.24б)$$

$$M^{\alpha\beta} = u^{\alpha} M^{\beta 0}/u^0, \quad (2.25б)$$

где $u^{\alpha} = dx_{(0)}^{\alpha}/ds$. Полагая в (2.25б) $\beta=0$ и подставляя результат опять в (2.25б) справа, можно записать:

$$M^{\alpha\beta} = m_0 u^{\alpha} u^{\beta}, \quad (2.28)$$

где $m_0 = (u^0)^{-2} M^{00}$ (физический смысл этого и других выражений корректно обосновывается в терминах систем отсчета, см. гл. 3). Используя (2.28) и опуская индекс (0) сверху у $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, выражение (2.24б) можно представить в виде

$$(d/ds) (m_0 u^{\alpha}) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} m_0 u^{\mu} u^{\nu} = 0. \quad (2.29)$$

Если использовать вполне понятное свойство (сохранения массы частицы)

$$dm_0/ds = 0, \quad (2.30)$$

то приходим к выводу, что монополярные пробные частицы движутся по временно-подобным геодезическим (1.13).

Дипольные частицы. В этом случае к уравнениям (2.22), (2.23) следует добавить соотношение, также следующее из (2.22):

$$\frac{\partial}{\partial x^{\delta}} (x^{\alpha} x^{\beta} \sqrt{-g} T^{\gamma\delta}) = x^{\beta} \sqrt{-g} T^{\gamma\alpha} + x^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\gamma\beta} - x^{\alpha} x^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} \sqrt{-g} T^{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Опять производя интегрирование по 3-мерной пространственно-подобной гипер-

поверхности $x^0 = \text{const}$ и используя разложение (2.26), из этих трех соотношений находим соответственно:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g} T^{\alpha 0} d\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma + \Gamma_{\mu\nu, \lambda}^{\alpha} \int \xi^{\lambda} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma = 0; \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} d\sigma &= \frac{dx_{(0)}^{\alpha}}{dx^0} \int \sqrt{-g} T^{\beta 0} d\sigma + \\ &+ \frac{d}{dx^0} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\beta 0} d\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{(0)}^{\alpha}}{dx^0} \int \xi^{\beta} \sqrt{-g} T^{\nu 0} d\sigma + \frac{dx_{(0)}^{\alpha}}{dx^0} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\nu 0} d\sigma &= \\ = \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\beta\nu} d\sigma + \int \xi^{\beta} \sqrt{-g} T^{\alpha\nu} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Введем обозначение, аналогичное (2.27):

$$M^{\lambda\mu\nu} = -u^0 \int \xi^{\lambda} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma. \quad (2.35)$$

Очевидно, что $M^{0\mu\nu} = 0$. Определим важную величину — *тензор спина частицы*

$$S^{\alpha\beta} = -(1/u^0) (M^{\alpha\beta 0} - M^{\beta\alpha 0}). \quad (2.36)$$

Используя (2.27), соотношение (2.34) можно записать в виде

$$u^0 (M^{\alpha\beta\gamma} + M^{\beta\alpha\gamma}) = u^{\alpha} M^{\beta\gamma 0} + u^{\beta} M^{\alpha\gamma 0}. \quad (2.34a)$$

С помощью простых алгебраических выкладок из (2.34a) и (2.36) выразим $M^{\alpha\beta\gamma}$ через $S^{\alpha\beta}$ и u^{α} :

$$M^{\alpha\beta\gamma} = -(S^{\alpha\beta} u^{\gamma} + S^{\alpha\gamma} u^{\beta}) + (u^{\alpha}/u^0) (S^{0\beta} u^{\gamma} + S^{0\gamma} u^{\beta}). \quad (2.37)$$

Используя обозначения (2.27) и (2.35), соотношения (2.32) и (2.33) запишем следующим образом:

$$(d/ds) (M^{\alpha 0}/u^0) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} M^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu, \sigma}^{\alpha} M^{\sigma\mu\nu} = 0; \quad (2.32a)$$

$$M^{\alpha\beta} = u^{\alpha} M^{\beta 0}/u^0 - (d/ds) (M^{\alpha\beta 0}/u^0) - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu}. \quad (2.33a)$$

Подставляя в последнее уравнение $M^{\alpha\beta\gamma}$, выраженное через тензор спина согласно (2.37), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^{\alpha}}{u^0} \frac{dS^{\beta 0}}{ds} - \frac{u^{\beta}}{u^0} \frac{dS^{\alpha 0}}{ds} + \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{u^{\alpha}}{u^0} \Gamma_{\mu\nu}^0 \right) M^{\beta\mu\nu} - \\ - \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \frac{u^{\beta}}{u^0} \Gamma_{\mu\nu}^0 \right) M^{\alpha\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (2.33b)$$

т. е. производные по ds присутствуют только от тензора спина. Следовательно, уравнения (2.33) можно назвать *уравнениями движения спина*. Уравнения же (2.32) следует понимать как *уравнения движения спиновых (дипольных) частиц*.

Ясно, что уравнения (2.32), (2.33) можно записать с помощью величин m_0 , $S^{\alpha\beta}$, u^{α} и их производных. В работе [48] показано, что $S^{\alpha\beta}$ является тензором, а m_0 — скаляром относительно допустимых преобразований координат. Учитывая это и вводя общековариантный дифференциальный оператор

$$DB_{\nu}^{\mu}:::/Ds = dB_{\nu}^{\mu}:::/ds + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} B_{\nu}^{\lambda}::: u^{\sigma} + \dots - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} B_{\lambda}^{\mu}::: u^{\sigma} - \dots, \quad (2.38)$$

где $B_{\nu}^{\mu} \dots$ произвольный тензор, нетрудно показать, что уравнения (2.32) и (2.33) можно представить в общеквариантном виде:

$$(D/Ds) (m_0 u^\alpha + u_\rho DS^{\alpha\beta}/Ds) = - (1/2) S^{\mu\nu} u^\sigma R^\alpha_{\sigma\mu\nu}; \quad (2.39)$$

$$DS^{\alpha\beta}/Ds + u^\alpha u_\rho DS^{\beta\rho}/Ds - u^\beta u_\rho DS^{\alpha\rho}/Ds = 0. \quad (2.40)$$

Эти уравнения известны под названием уравнений Матиссона—Папаметру. Легко видеть, что при $S^{\alpha\beta} = 0$ (для монопольной частицы) уравнения (2.39) совпадают с (2.29), т. е. (2.39) является обобщением уравнений геодезической на случай вращающихся частиц.

Существенно, что система уравнений Матиссона—Папаметру неполная. Для их решения необходимо использовать три дополнительных условия [49],

2.5. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В гл. 1 был рассмотрен смысл введения систем координат. Подчеркивалось, что назначение координат — не более, чем обеспечение нумерации различных точек-событий. Выбор той или иной системы координат диктуется соображениями удобства, и если это специально не оговорено, то не имеет физического смысла. Все введенные в теорию объекты: векторы и тензоры произвольного ранга — имеют компоненты, зависящие от выбора системы координат (способа нумерации точек). Каким образом можно сопоставить компоненты таких тензоров величинам, которые может измерять наблюдатель? Какие величины может измерять наблюдатель? Как зависят результаты измерения от состояния движения наблюдателя?

Возникает необходимость дополнения теории аппаратом (методами) математического описания наблюдателей (одиночного или системы наблюдателей) и привязки наблюдателем тензорных величин к возможностям своей измерительной аппаратуры. Такой математический аппарат будем называть методом задания систем отсчета. Одним из примеров такого метода является хроногеометрия.

Прежде чем охарактеризовать другие методы задания систем отсчета, выделим важнейшую составную часть задач указанных методов — описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя. Это опять приводит к выделенности времени. Из СТО хорошо известно, что ход часов и компоненты тензорных величин в сравниваемых системах отсчета существенно зависят от относительной скорости этих систем отсчета. Будем полагать, что каждый наблюдатель как минимум располагает собственными часами, а также имеет возможность выделять (измерять) из определенных в месте его нахождения тензорных величин временные составляющие и дополнительные к ним пространственно-подобные. Этим условиям удовлетворяет одиночный наблюдатель в хроногеометрии.

Подчеркнем, что наблюдатель обладает перечисленными возможностями именно в месте своего расположения, т. е. на своей

временно-подобной мировой линии A как быть с другими точками-событиями? В хроногеометрии наблюдатель был снабжен радиолокационной аппаратурой. Это позволяло получать информацию об окрестности его мировой линии. Но можно поступить иначе — рассматривать не одного наблюдателя, а их систему. Более того, можно идеализировать эту систему — перейти к континууму наблюдателей, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, так что в каждой точке рассматриваемой области пространства определен наблюдатель. Тогда информация о физической ситуации в этой области собирается всей системой наблюдателей.

Каждому наблюдателю соответствует своя временно-подобная мировая линия. В общем случае такие линии могут пересекаться, но тогда в точках пересечения окажутся два или несколько наблюдателей, что может существенно осложнить рассмотрение. Поэтому обычно ограничиваются случаями, когда мировые линии, соответствующие разным наблюдателям, не пересекаются. В результате приходим к важному понятию — конгруэнции временно-подобных мировых линий. (Под конгруэнцией понимают такую совокупность линий, когда через каждую точку проходит одна и только одна линия). Следовательно, указанный метод задания систем отсчета основан на определении в рассматриваемой области конгруэнции временно-подобных мировых линий. Конгруэнции можно однозначно сопоставить поле единичных векторов τ^μ (монад), касательных к линиям конгруэнции. Вот почему этот метод задания систем отсчета принято называть *монадным методом* *.

Сделаем несколько замечаний:

1. Монадный метод нацелен на решение наиболее существенной части задач, стоящих перед методами задания систем отсчета, — на описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателей. Как будет показано, развитый аппарат монадного метода позволяет блестяще справляться с этими задачами. На его основе четко разделяются временные и пространственные составляющие тензоров. Однако с его помощью

* Монадный метод возник в 30-х годах в рамках 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма как метод выделения из 5-мерного многообразия 4-мерного пространства-времени (см., например, [52]). В рамках 4-мерия для расщепления многообразия на время и 3-мерное пространство этот метод, пожалуй, впервые был применен (в объеме алгебры) Эккартом в 1940 г. [50]. Затем элементы общековариантного монадного метода вводились и использовались в работах Лифа [51], Ульмана [52], Пирани [53], Денена [54], Мицкевича [55], Шмутцера [56] и др. В 1968 г. в кратких тезисах доклада А. Л. Зельманова [57] сообщалось, что им построено «общековариантное обобщение хронометрических инвариантов». По-видимому, имелся в виду аппарат общековариантного монадного метода. Сами термины *монада* и *монадный формализм* предложил А. Л. Зельманов [58]. Монадный формализм на языке внешних форм Картана излагается в работах [59, 60].

Обратим также внимание на важный вопрос о возможности глобального задания поля монады в n -мерном многообразии. Оказывается, эта возможность тесно связана с сигнатурой многообразия. Показано (см., например, [61]), что в многообразиях с сигнатурой $(+ \text{ --- } \text{ --- } \dots \text{ ---})$ всегда можно глобально задать поле временно-подобной монады.

нельзя описать наблюдаемые величины по отдельным пространственно-подобным направлениям. Для решения таких задач необходимо наделять наблюдателей большими возможностями, в частности нужно снабдить их совокупностями пространственно-подобных ортов. Это решается в рамках более полных — диадных и тетрадных методов, которые будут рассмотрены в гл. 7.

2. Использование аппарата, основанного на континууме наблюдателей, может показаться чересчур сильной идеализацией. Однако следует напомнить, что, во-первых, в СТО она уже фактически используется и ее применение в случае искривленного пространства-времени представляет собой естественное обобщение привычных понятий. Во-вторых, переход от дискретного (конечного) множества реально осуществимых приборов наблюдателя к континууму идеализированных приборов-наблюдателей представляет собой процедуру такого же рода, как переход от множества материальных точек (частиц) к континууму точек пространства, когда только в части из них находятся реальные частицы.

3. Особо подчеркнем, что приборы-наблюдатели предполагаются пробными, т. е. не влияющими на геометрию пространства-времени.

Хроногеометрия и монадный (континуальный) метод не исчерпывают всех возможностей. Можно развить *концепцию* так называемого *одиночного наблюдателя* [62], когда исходной опять является одна временно-подобная мировая линия наблюдателя и указан способ (путь) переноса тензорных величин из произвольной точки пространства-времени на мировую линию этого наблюдателя. Напомним, что в ОТО результат переноса тензоров существенно зависит от пути переноса. В качестве путей можно использовать, например, изотропные (световые) геодезические от произвольных точек до мировой линии наблюдателя. Заметим, что Землю и людей на ней можно рассматривать как одиночного наблюдателя, получающего информацию об окружающем мире с помощью приходящих световых сигналов.

Глава 3

МОНАДНЫЙ МЕТОД ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

ОТО (в собственном смысле этого названия) начинается после введения систем отсчета. Эта глава посвящена систематическому изложению математического аппарата монадного метода задания систем отсчета на основе работ [63—65]. Этот аппарат целесообразно представить в виде четырех составных частей:

- 1) алгебры монадного метода;
- 2) определения монадных физико-геометрических тензоров, под которыми будем понимать тензорные величины, построенные из составляющих метрического тензора и их первых производных (они частично заменяют символы Кристоффеля);

3) определения монадных операторов дифференцирования (анализ);

4) записи основных соотношений, уравнений и тождеств ОТО через монадные величины и операторы.

3.1. АЛГЕБРА ОБЩЕКОВАРИАНТНОГО МОНАДНОГО МЕТОДА

Как уже отмечалось в § 2.5, монадный метод (формализм) основан на задании временно-подобной конгруэнции мировых линий. Очевидно, таких конгруэнций можно задать бесконечно много — разным конгруэнциям будут соответствовать разные движения систем отсчета.

Пусть выбрана некая временно-подобная конгруэнция, тогда в каждой точке пространства-времени можно определить единичный вектор τ^μ вдоль касательной к мировой линии, проходящей через выбранную точку. Вектор τ^μ имеет вполне определенный физический смысл, его следует понимать как 4-скорость u^μ соответствующего прибора (наблюдателя) системы отсчета:

$$\tau^\mu \equiv u^\mu = dx^\mu/ds, \quad (3.1)$$

где dx^μ и ds взяты вдоль выбранной мировой линии. По определению вектор τ^μ обладает свойством 4-скорости (нормировки)

$$\tau^\mu \tau_\mu = \tau^\mu \tau^\nu g_{\mu\nu} = 1. \quad (3.2)$$

Покажем, как в рамках монадного метода математически осуществляется переход от произвольных тензорных величин к наблюдаемым в данной системе отсчета. Эта процедура связана с разделением тензорных компонент на временные и пространственные составляющие. Определим *временную компоненту* произвольного тензора $B_\mu^{\nu\cdots}$ как проекцию этого тензора по всем индексам на векторное поле τ^μ : $B = B_\mu^{\nu\cdots} \tau_\nu \cdots \tau^\mu \cdots$.

Для определения пространственных (и смешанных) компонент представим метрический тензор в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

где $h_{\mu\nu}$ — очевидно, тензорная величина. Тогда справедливо соотношение $g^{\mu\nu} = \tau^\mu \tau^\nu - h^{\mu\nu}$, где $h^{\mu\nu} = h_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$. Отсюда и из (3.2) следует ортогональность τ_ν и $h^{\mu\nu}$:

$$\tau_\mu h^{\mu\nu} = \tau_\mu (\tau^\mu \tau^\nu - g^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что справедливы также соотношения $\tau^\mu h_{\mu\nu} = \tau^\mu h_\mu^\nu = \tau_\mu h_\nu^\mu = 0$, где $h_\mu^\nu = h_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$.

Назовем *пространственно-спроектированным тензором* следующую величину, сопоставленную произвольному тензору $B_\mu^{\nu\cdots}$:

$$\underbrace{\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots}}_m = H_{\nu \dots}^{\alpha \dots} \underbrace{\mu \dots}_{n} B_{\mu \dots}^{\nu \dots} \quad (3.5)$$

Здесь введен оператор пространственного проектирования

$$H_{\nu \dots}^{\alpha \dots} \underbrace{\mu \dots}_{n} = (-1)^{n+m} \underbrace{h_{\nu \dots}^{\alpha \dots}}_n \underbrace{h_{\beta \dots}^{\mu \dots}}_m \quad (3.5a)$$

Термин *пространственно-спроектированный* тесно связан с рассматриваемой системой отсчета и обоснован тем, что свертка по любому индексу тензора $\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ с вектором τ_{μ} (временным направлением системы отсчета) по определению равна нулю: $\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \tau_{\alpha} = B_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \tau^{\beta} = 0$. Из произвольного тензора $\tilde{B}_{\mu\sigma \dots}^{\nu\lambda \dots}$ можно образовать пространственно-спроектированные тензоры меньшего ранга («смешанные» компоненты), например:

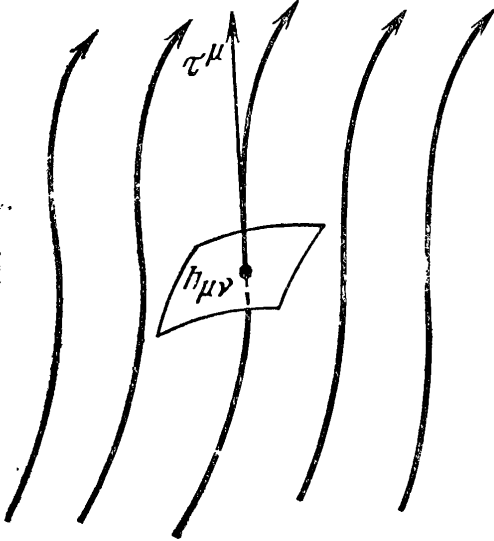


Рис. 6. Локальное 1+3-расщепление пространства-времени

$$\underbrace{\tilde{B}_{\beta \gamma \dots}^{\alpha \dots}}_m = (-1)^{n+m-1} B_{\mu\sigma \dots}^{\nu\lambda \dots} \tau_{\nu} h_{\lambda}^{\alpha} \dots \dots \dots h_{\beta}^{\mu} h_{\mu}^{\sigma} \dots \dots \quad (3.6)$$

В монадном методе оперируют исключительно со скалярами и пространственно-спроектированными тензорами [типа (3.5) и (3.6)].

Образуем из произвольного смещения dx^{μ} временную и пространственные составляющие: $d\tau = \tau_{\mu} dx^{\mu}$; $d\tilde{x}^{\nu} = -h_{\mu}^{\nu} dx^{\mu}$, тогда квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = (\tau_{\mu} \tau_{\nu} - h_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} = d\tau^2 - h_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu} \equiv d\tau^2 - d\tilde{l}^2. \quad (3.7)$$

Тензор $h_{\mu\nu}$ следует понимать как метрический тензор локального пространственно-подобного 3-мерного сечения, ортогонального τ^{μ} (рис. 6). Несмотря на то что $h_{\mu\nu}$ в общем случае имеет 10 компонент, вследствие условия (3.4) независимыми являются только шесть. Кроме того, поскольку $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 = \tau_{\mu} \tau^{\mu} \tau_{\nu} \tau^{\nu} + h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 1 + h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, имеем $h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 3$.

Заметим, что поднимать и опускать индексы у пространственно-спроектированных тензоров можно как 4-мерным метрическим тензором $g_{\mu\nu}^{\text{пр}}$, так и 3-мерным тензором $h_{\mu\nu}$ с обратным знаком. Именно этим объясняется выбор коэффициента $(-1)^{n+m}$ в операторе пространственного проектирования (3.5a). Следует иметь в виду, что $h_{\alpha}^{\mu} h_{\mu\beta} = -h_{\alpha\beta}$; $h_{\mu\alpha} h^{\alpha\nu} = -h_{\mu}^{\nu}$.

Введем 3-мерные тензоры Леви-Чивиты:

$$e_{\nu\lambda\sigma} = \tau^\mu E_{\alpha\nu\lambda\sigma} = \sqrt{-g} \tau^\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}; \quad e^{\nu\lambda\sigma} = \tau_\mu E^{\mu\nu\lambda\sigma} = -(\tau_\mu / \sqrt{-g}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что тензоры $e_{\nu\lambda\sigma}$ и $e^{\nu\lambda\sigma}$ являются пространственно-спроектированными. Антисимметричным пространственно-спроектированным тензорам второго ранга можно сопоставить дуальные векторы:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\sigma} = \tilde{F}_{\mu\nu} e^{\mu\nu\sigma}; \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_\sigma = \tilde{F}^{\mu\nu} e_{\mu\nu\sigma}.$$

3.2. МОНАДНЫЕ ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ

Так же как из $g_{\mu\nu}$ дифференцированием по координатам были получены символы Кристоффеля, из первых производных от τ^μ и $h_{\mu\nu}$ можно получить несколько новых величин. Три из них являются тензорами, они играют важную роль характеристик систем отсчета. В дальнейшем будем называть их *физико-геометрическими тензорами*.

Введем их формальным образом. Возьмем ковариантную производную от τ_μ и разобьем ее на симметричную и антисимметричную части: $\tau_{\mu; \nu} = (1/2)(\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) + (1/2)(\tau_{\mu; \nu} + \tau_{\nu; \mu})$. Так как нас интересуют лишь пространственно-спроектированные тензоры и скаляры, спроектируем два полученных тензора посредством τ^μ и h_α^μ всеми возможными способами:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) \tau^\mu \tau^\nu &= 0; & (\tau_{\mu; \nu} + \tau_{\nu; \mu}) \tau^\mu \tau^\nu &= 0; \\ -(\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) \tau^\nu h_\alpha^\mu &= -(\tau_{\mu; \nu} + \tau_{\nu; \mu}) \tau^\mu h_\alpha^\nu = \tau^\nu (\tau_{\alpha, \nu} - \tau_{\nu, \alpha}) = F_{\alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$(1/2)(\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = A_{\alpha\beta}; \quad (3.10)$$

$$-(1/2)(\tau_{\mu; \nu} + \tau_{\nu; \mu}) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = (1/2)(\tau^\lambda h_{\alpha\beta, \lambda} + h_{\alpha\lambda} \tau_{, \beta}^\lambda + h_{\beta\lambda} \tau_{, \alpha}^\lambda) = D_{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

Таким образом, получились три тензорные величины $F_\alpha; A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}; D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$. Дифференцирование $h_{\mu\nu}$ по координатам к новым величинам не приводит, так как

$$h_{\alpha\mu; \sigma} = (g_\alpha^\lambda \tau_\mu + g_\mu^\lambda \tau_\alpha) (A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma} + F_\lambda \tau_\sigma). \quad (3.12)$$

Выпишем несколько полезных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\mu; \nu} &= A_{\mu\nu} - D_{\mu\nu} + F_\mu \tau_\nu; \\ A_{\mu\nu} &= (1/2)(\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) + (1/2)(\tau_\mu F_\nu - \tau_\nu F_\mu); \\ \tau^\mu \tau_{\mu; \nu} &= 0; \quad h_{\alpha\beta; \sigma} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Выясним физический смысл введенных тензоров. По определению система отсчета представляет собой некую безмассовую сплошную среду из приборов, а τ_μ является 4-скоростью этих приборов. Тогда антисимметричный тензор $A_{\alpha\beta}$ следует считать тензором *угловой скорости вращения*, а симметричный тензор $D_{\mu\nu}$ — тензором *скоростей деформаций* системы отсчета.

Для определения физического смысла F_α заметим, что, зная конгруэнцию мировых линий, можно определить в каждой точке пространства-времени четверку ортонормированных векторов: τ^μ , l^μ , β^μ , γ^μ , сопровождающую тетраду [7]. Для них имеют место формулы Френе — Серре:

$$\tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = R_1 l^\mu; \quad (3.14)$$

$$\tau^\nu l_{;\nu}^\mu = R_2 \beta^\mu + R_1 \tau^\mu; \quad \tau^\nu \beta_{;\nu}^\mu = R_3 \gamma^\mu - R_2 l^\mu; \quad \tau^\nu \gamma_{;\nu}^\mu = -R_3 \beta^\mu, \quad (3.15)$$

где τ^μ направлено вдоль линии, а l^μ , β^μ и γ^μ — соответственно первая, вторая и третья нормали к линии в рассматриваемой точке. Векторы ортонормированы, т. е.

$$l_\mu l^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = -1; \quad \tau_\mu l^\mu = \tau_\mu \beta^\mu = \dots = l_\mu \beta^\mu = 0.$$

Коэффициенты R_1 , R_2 и R_3 называют соответственно первой, второй и третьей кривизнами линии в данной точке.

Из уравнения (3.14) находим: $R_1 l^\mu = F^\mu$; $R_1^2 = -F_\mu F^\mu$, т. е. вектор F^μ определяет первую кривизну линии и является *ускорением* прибора системы отсчета. Из (3.14) следует, что для геодезических $F_\mu = 0$. Вторая и третья кривизны определяются через первые и вторые производные от F_μ .

Конгруэнцию временно-подобных мировых линий системы отсчета можно охарактеризовать четырьмя скалярами:

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= -F_\mu F^\mu; \\ \varepsilon &= (1/2) \tau_{;\mu}^\mu = (1/2) h^{\mu\nu} D_{\mu\nu} = -(1/2) D; \\ \Omega^2 &= (1/4) (\tau_{\mu;\nu} - \tau_{\nu;\mu}) \tau^{\mu;\nu} + (1/4) R_1^2 = (1/2) A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}; \\ \sigma^2 &= (1/4) (\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}) \tau^{\mu;\nu} - \varepsilon^2 + (1/4) R_1^2 = \\ &= (1/2) [D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} - (1/2) D^2], \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

определяющими соответственно первую кривизну, растяжение, вращение и сдвиг конгруэнции.

Вывод об указанном физическом смысле тензоров F_μ , $A_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}$ подкрепляется также интерпретацией отдельных членов в уравнениях геодезической, записанных в монадном виде. Для записи уравнений геодезической учтем формулу

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = (L_{\alpha\beta}^{\mu} + h_{\alpha,\beta}^{\mu}) - \tau^{\mu}(A_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} + F_{\alpha}\tau_{\beta}) + \\ + F^{\mu}\tau_{\alpha}\tau_{\beta} + (\tau_{\alpha}A_{\beta}^{\mu} + \tau_{\beta}A_{\alpha}^{\mu}) - \tau_{\alpha}\tau_{\beta}^{\mu}, \quad (3.17)$$

где $L_{\alpha\beta}^{\mu} = (1/2)h^{\mu\lambda}(h_{\lambda\alpha,\beta} + h_{\lambda\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\lambda})$ — трехмерные «символы Кристоффеля». Кроме того, введем ряд 3-мерных обозначений:

$$\left. \begin{aligned} v^{\mu} &= \frac{-h_{\nu}^{\mu}dx^{\nu}}{\tau_{\alpha}dx^{\alpha}} = -h_{\nu}^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad \text{— пространственные компоненты} \\ &\quad \text{скорости частицы;} \\ ds &= d\tau\sqrt{1-v^2}; \\ m &= m_0\frac{\tau_{\alpha}dx^{\alpha}}{ds} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{— динамическая масса частицы} \\ &\quad (m_0 \text{— масса покоя);} \\ p^{\mu} &= -m_0h_{\alpha}^{\mu}\frac{dx^{\alpha}}{ds} = mv^{\mu} \quad \text{— компоненты 3-импульса.} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

После несложных выкладок легко выразить 4-мерные скорости и ускорения через 3-мерные:

$$\left. \begin{aligned} u^{\mu} &= dx^{\mu}/ds = (\tau^{\mu} + v^{\mu})/\sqrt{1-v^2}; \\ m\frac{du^{\mu}}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{dp^{\mu}}{d\tau} + \tau^{\mu}\frac{dm}{d\tau} + m\tau^{\alpha}\tau_{\alpha,\mu}^{\mu} + p^{\alpha}\tau_{\alpha,\mu}^{\mu}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Подставляя формулы (3.17) — (3.19) в уравнение геодезической (1.13) и проектируя его посредством τ^{μ} и h_{μ}^{ν} , окончательно получаем:

$$dm/d\tau = p^{\mu}F_{\mu} - D_{\alpha\beta}p^{\alpha}v^{\beta}; \quad (3.20)$$

$$-h_{\mu}^{\nu}(dp^{\mu}/d\tau - N_{\beta}^{\mu}p^{\beta}) + L_{\alpha\beta}^{\nu}p^{\alpha}v^{\beta} = -mF^{\nu} - 2p^{\beta}(A_{\beta}^{\nu} - D_{\beta}^{\nu}), \quad (3.21)$$

где $N_{\beta}^{\mu} = \tau_{\beta}^{\mu} - \tau^{\mu}F_{\beta}$ — нетензорная величина.

В следующем параграфе будет показано, что в (3.21) слева стоит тензорная величина, которую следует понимать как монадную временную производную от импульса. Сопоставим (3.21) с уравнением движения точки в неинерциальной системе отсчета в ньютоновой механике.

$$(d/dt)\mathbf{p}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{пер}} - m\mathbf{a}_{\text{кор}},$$

где $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]$, или (в тензорных обозначениях) $a_{\text{кор}}^i = 2\omega^i_j v^j$; $\boldsymbol{\omega}(\omega_{ij})$ — угловая скорость вращения системы отсчета; \mathbf{F} — реальная сила, действующая на точку. В (3.21) отсутствует аналог силы \mathbf{F} , так как это уравнение геодезической. Из сравнения правых частей находим: $-F^{\nu}$ — ускорение; A_{β}^{ν} — тензор угловой скорости вращения; D_{β}^{ν} — тензор скоростей деформаций (в механике сплошных сред D_{β}^{ν} обычно появляется вместе с A_{β}^{ν}) системы отсчета относительно локально геодезической системы отсчета с осью времени вдоль τ^{μ} .

3.3. ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В МОНАДНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

В § 1.8 были определены производные Ли, сопоставленные произвольному векторному полю ξ^μ . В монадном формализме таким полем служит поле временно-подобного вектора τ^μ . Производные Ли вдоль τ^μ играют существенную роль в этом формализме. Прежде всего, запишем производные Ли от составляющих метрического тензора:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}_\tau \tau_\mu &= \tau^\sigma \tau_{\mu,\sigma} + \tau_\sigma \tau^\sigma_{,\mu} = \tau^\sigma (\tau_{\mu,\sigma} - \tau_{\sigma,\mu}) = F_\mu; \\ \mathfrak{L}_\tau h_{\mu\nu} &= \tau^\sigma h_{\mu\nu,\sigma} + h_{\sigma\nu} \tau^\sigma_{,\mu} + h_{\mu\sigma} \tau^\sigma_{,\nu} = 2D_{\mu\nu}; \\ \mathfrak{L}_\tau g_{\mu\nu} &= \tau_{\nu;\mu} + \tau_{\mu;\nu} = \tau_\nu F_\mu + \tau_\mu F_\nu - 2D_{\mu\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Вспомним, что мы условились работать лишь с пространственно-спроектированными тензорными величинами, поэтому образуем из производной Ли такой оператор, который при действии на пространственно-спроектированный тензор давал бы опять пространственно-спроектированный тензор. Таким оператором является

$$\begin{aligned} \partial_T \underbrace{\widetilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m &\equiv H_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} \mathfrak{L}_\tau \widetilde{B}_{\alpha \dots}^{\mu \dots} = \tau^\sigma \frac{\partial \widetilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^\sigma} - \\ &\underbrace{- N_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \widetilde{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots}}_n - \dots + \underbrace{N_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \widetilde{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} + \dots}_m, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $N_{\mu \dots}^{\nu \dots} = \tau_{\mu \dots}^{\nu \dots} - \tau^{\nu \dots} F_{\mu \dots}$. В дальнейшем будем называть этот оператор *монадной временной производной*.

Заметим, что из оператора ковариантного дифференцирования ∇_σ , оператора пространственного проектирования $H_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots}$ и вектора τ^σ можно образовать еще несколько тензорных операторов дифференцирования, например:

$$\nabla_T \widetilde{B}_{\alpha \dots}^{\mu \dots} \equiv \tau^\sigma \nabla_\sigma \widetilde{B}_{\alpha \dots}^{\mu \dots}; \quad \widetilde{\nabla}_T \widetilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} \equiv H_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} \tau^\sigma \nabla_\sigma \widetilde{B}_{\alpha \dots}^{\mu \dots}. \quad (3.24)$$

Последний оператор связан с монадной временной производной соотношением

$$\widetilde{\nabla}_T \underbrace{\widetilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m = \partial_T \widetilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} - \underbrace{(A_{\sigma \dots}^{\nu \dots} - D_{\sigma \dots}^{\nu \dots}) \widetilde{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots}}_n - \dots + \underbrace{(A_{\beta \dots}^{\sigma \dots} - D_{\beta \dots}^{\sigma \dots}) \widetilde{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} + \dots}_m \quad (3.25)$$

В дальнейшем будем использовать в основном оператор (3.23).

Определим оператор *монадного пространственного ковариантного дифференцирования* следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} \underbrace{\tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}_m &= -h_{\tilde{\lambda}}^{\sigma} (\nabla_{\sigma} \tilde{B}_{\alpha \dots}^{\mu \dots}) H_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} = -h_{\tilde{\lambda}}^{\sigma} \left[\frac{\partial \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{dx^{\sigma}} + \right. \\ &\left. + \underbrace{(L_{\gamma\sigma}^{\nu} + h_{\gamma, \sigma}^{\nu}) \tilde{B}_{\beta \dots}^{\gamma \dots}}_n + \dots + \underbrace{(L_{\alpha\sigma}^{\gamma} h_{\beta}^{\alpha} + h_{\beta, \sigma}^{\gamma}) \tilde{B}_{\gamma \dots}^{\nu \dots}}_m + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $L_{\gamma\sigma}^{\nu} = (1/2)h^{\nu\lambda} (h_{\lambda\gamma, \sigma} + h_{\lambda\sigma, \gamma} - h_{\gamma\sigma, \lambda})$.

Приведем результат действия введенных операторов на 3-мерный метрический тензор $h_{\mu\nu}$:

$$\partial_T h_{\mu\nu} = 2D_{\mu\nu}; \quad \partial_T h^{\mu\nu} = -2D^{\mu\nu}; \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} h_{\mu\nu} = 0, \quad (3.27)$$

а также результаты коммутации операторов, действующих на произвольный вектор \tilde{B}^{λ} :

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} \partial_T - \partial_T \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}) \tilde{B}^{\lambda} &= F_{\alpha} \partial_T \tilde{B}^{\lambda} + \tilde{B}^{\mu} [2F_{\mu} (A_{\alpha}^{\lambda} - D_{\alpha}^{\lambda}) - 2F^{\lambda} (A_{\mu\alpha} - D_{\mu\alpha}) + \\ &+ (\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\lambda}} - F^{\lambda}) D_{\mu\alpha} - (\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} - F_{\mu}^{\lambda}) D_{\alpha}^{\lambda} - (\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} - F_{\alpha}) D_{\mu}^{\lambda}]; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} \tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - \tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}) \tilde{B}^{\lambda} = {}^3R^{\lambda}_{\rho\alpha\beta} \tilde{B}^{\rho} + 2A_{\alpha\beta} (\partial_T \tilde{B}^{\lambda} + D_{\sigma}^{\lambda} \tilde{B}^{\sigma}), \quad (3.29)$$

где

$${}^3R^{\lambda}_{\rho\alpha\beta} = H^{\lambda\mu\nu\sigma}_{\varepsilon\alpha\beta\rho} (\partial \tilde{L}_{\sigma\nu}^{\varepsilon} / \partial x^{\mu} - \partial \tilde{L}_{\sigma\mu}^{\varepsilon} / \partial x^{\nu} + \tilde{L}_{\lambda\mu}^{\varepsilon} \tilde{L}_{\sigma\nu}^{\lambda} - \tilde{L}_{\lambda\nu}^{\varepsilon} \tilde{L}_{\sigma\mu}^{\lambda}) \quad (3.30)$$

—тензор кривизны 3-мерного пространственного сечения, ортогонального τ^{μ} ; $\tilde{L}_{\sigma\nu}^{\varepsilon} = L_{\sigma\nu}^{\varepsilon} + h_{\sigma, \nu}^{\varepsilon}$ — обобщенные коэффициенты 3-связности.

Используя определения монадных производных (3.23) и (3.26), перепишем в монадном виде левые части уравнений геодезических (3.20) и (3.21):

$$\left. \begin{aligned} Dm/d\tau &\equiv dm/d\tau = \partial_T m + v^{\nu} \tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} m; \\ D\tilde{p}^{\nu}/d\tau &\equiv -h_{\mu}^{\nu} (\partial p^{\mu}/\partial \tau - N_{\beta}^{\mu} p^{\beta}) + L_{\alpha\beta}^{\nu} p^{\alpha} v^{\beta} = \partial_T p^{\nu} + v^{\mu} \tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} p^{\nu}. \end{aligned} \right\} (3.31)$$

Таким образом, оператор $D/d\tau$ имеет смысл субстанциальной временной производной в механике сплошных сред. Формулы (3.20), (3.21) с учетом (3.31) и все последующие, записанные в монадном виде, как правило, имеют привычный (из физики в плоском пространстве-времени) вид с заменой частной производной по времени оператором ∂_T , а пространственных производных — операторами $\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}}$.

Ковариантные производные от произвольных тензоров всегда можно записать в монадном виде, т. е. представить их через спроектированные величины, монадные операторы и физико-геометрические тензоры. Например, для произвольного вектора B_{ν} имеем:

$$\nabla_{\mu} B_{\nu} = \nabla_{\mu} (B\tau_{\nu} + \tilde{B}_{\nu}) = \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{B}_{\nu} - B (A_{\mu\nu} + D_{\mu\nu}) + \tau_{\mu} \tau_{\nu} (\partial_T B - F^{\lambda} \tilde{B}_{\lambda}) + \\ + \tau_{\mu} [\partial_T \tilde{B}_{\nu} - \tilde{B}_{\lambda} (A_{\nu}^{\lambda} - D_{\nu}^{\lambda}) + B F_{\nu}] - \tau_{\nu} [\tilde{\nabla}_{\mu} B - \tilde{B}_{\lambda} (A_{\mu}^{\lambda} - D_{\mu}^{\lambda})].$$

3.4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИИ ПОЛЯ В МОНАДНОМ ВИДЕ

Уравнения Эйнштейна и тождества римановой геометрии. Прежде всего запишем проекции компонент тензора Риччи:

$${}^4R_{\mu\nu} \tau^{\mu} \tau^{\nu} = (\partial_T D - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta}) + A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + (\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^{\lambda} - F_{\lambda} F^{\lambda}); \quad (3.32)$$

$$- {}^4R_{\mu\nu} h_{\alpha}^{\nu} \tau^{\mu} = \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} D - \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} (A_{\alpha}^{\lambda} + D_{\alpha}^{\lambda}) - 2F_{\lambda} A^{\lambda}_{\alpha}; \quad (3.33)$$

$${}^4R_{\mu\nu} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} = (\partial_T - D) (A_{\beta\alpha} - D_{\beta\alpha}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} F_{\alpha} - F_{\alpha} F_{\beta}) + \\ + 2 (D_{\alpha}^{\lambda} D_{\beta\lambda} + A_{\alpha}^{\lambda} A_{\beta\lambda} + A_{\beta}^{\lambda} D_{\alpha\lambda}) + {}^3R_{\alpha\beta}, \quad (3.34)$$

где ${}^3R_{\alpha\beta} = {}^3R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}$ — 3-мерный тензор Риччи; $D = -D_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$.

Скалярную кривизну запишем следующим образом:

$${}^4R = 2\partial_T D - (D^2 + D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta}) - A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + 2 (\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^{\lambda} - F_{\lambda} F^{\lambda}) + {}^3R, \quad (3.35)$$

где ${}^3R = -h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Напомним, что во всех формулах индексы поднимаются и опускаются посредством $g^{\mu\nu}$ (или, что равносильно, посредством $-h^{\mu\nu}$).

Проекции уравнений Эйнштейна находим в виде

$$[{}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R] \tau^{\mu} \tau^{\nu} = (1/2) (D^2 - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta}) + \\ + (3/2) A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} - (1/2) {}^3R = \kappa T_{\mu\nu} \tau^{\mu} \tau^{\nu}; \quad (3.36)$$

$$- [{}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R] \tau^{\mu} h_{\alpha}^{\nu} = \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} D - \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} (A_{\alpha}^{\lambda} + D_{\alpha}^{\lambda}) - \\ - 2F_{\lambda} A^{\lambda}_{\alpha} = -\kappa T_{\mu\nu} \tau^{\mu} h_{\alpha}^{\nu}; \quad (3.37)$$

$$[{}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R] h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} = (\partial_T - D) (A_{\beta\alpha} + D_{\beta\alpha}) + h_{\alpha\beta} \partial_T^* D + \\ + [{}^3R_{\alpha\beta} + (1/2) h_{\alpha\beta} {}^3R] + 2 (D_{\alpha}^{\gamma} D_{\gamma\beta} + A_{\alpha}^{\gamma} A_{\beta\gamma} + A_{\beta}^{\gamma} D_{\alpha\gamma}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} F_{\alpha} - F_{\alpha} F_{\beta}) + \\ + h_{\alpha\beta} (\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^{\lambda} - F_{\lambda} F^{\lambda}) - (1/2) h_{\alpha\beta} (D^2 + D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} + A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}) = \\ = \kappa T_{\mu\nu} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu}. \quad (3.38)$$

Из тензора Римана — Кристоффеля ${}^4R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ всеми возможными способами проектирования можно получить три пространственно-проектированных тензора:

$$Z^{\lambda}_{\cdot\kappa\gamma\varepsilon} \equiv H^{\lambda\beta\mu\nu} {}^4R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = {}^3R^{\lambda}_{\cdot\kappa\gamma\varepsilon} + 2A^{\lambda}_{\cdot\kappa} A_{\varepsilon\gamma} + \\ + (D_{\varepsilon}^{\lambda} + A_{\varepsilon}^{\lambda}) (D_{\gamma\kappa} + A_{\gamma\kappa}) - (D_{\gamma}^{\lambda} + A_{\gamma}^{\lambda}) (D_{\varepsilon\kappa} + A_{\varepsilon\kappa}); \quad (3.39)$$

$$Y_{\kappa\gamma\varepsilon} \equiv {}^4R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\tau_{\alpha}h_{\kappa}^{\beta}h_{\gamma}^{\mu}h_{\varepsilon}^{\nu} = -2F_{\kappa}A_{\gamma\varepsilon} + \\ + \tilde{\nabla}_{\varepsilon}^{\sim}(D_{\gamma\kappa} + A_{\gamma\kappa}) - \tilde{\nabla}_{\gamma}^{\sim}(D_{\varepsilon\kappa} + A_{\varepsilon\kappa}); \quad (3.40)$$

$$-X_{\kappa\gamma} \equiv {}^4R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\tau_{\alpha}\tau^{\nu}h_{\kappa}^{\beta}h_{\gamma}^{\mu} = -\partial_T(D_{\gamma\kappa} + A_{\gamma\kappa}) - \\ - (D_{\kappa}^{\sigma} + A_{\kappa}^{\sigma})(D_{\gamma\sigma} + A_{\gamma\sigma}) - \tilde{\nabla}_{\gamma}^{\sim}F_{\kappa} + F_{\kappa}F_{\gamma}. \quad (3.41)$$

Используя предыдущие формулы, запишем тождества Риччи:

$$\partial_T A_{\nu\mu} = (1/2)(\tilde{\nabla}_{\mu}^{\sim}F_{\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu}^{\sim}F_{\mu}); \quad (3.42)$$

$$(\tilde{\nabla}_{\nu}^{\sim} + F_{\nu})A_{\mu\beta} + (\tilde{\nabla}_{\beta}^{\sim} + F_{\beta})A_{\nu\mu} + (\tilde{\nabla}_{\mu}^{\sim} + F_{\mu})A_{\beta\nu} = 0; \quad (3.43)$$

$$Z_{\mu\nu\sigma\lambda} + Z_{\mu\lambda\nu\sigma} + Z_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0. \quad (3.44)$$

Тождества Бианки в монадном виде выглядят громоздко.

Важнейшие уравнения поля в ОТО. Электромагнитные величины и уравнения.

Векторный потенциал электромагнитного поля A_{μ} представляются в виде $A_{\mu} = \tau_{\mu}A + \tilde{A}_{\mu}$, где

$$A = A_{\mu}\tau^{\mu}; \quad \tilde{A}_{\mu} = -h_{\mu}^{\nu}A_{\nu}. \quad (3.45)$$

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ записывается с помощью этих величин следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \tilde{A}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \tilde{A}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) + \left(\tau_{\nu} \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}} - \tau_{\mu} \frac{\partial A}{\partial x^{\nu}} \right) + \\ + A(2A_{\nu\mu} + F_{\nu}\tau_{\mu} - F_{\mu}\tau_{\nu}).$$

Из него можно построить пространственно-спроектированный вектор (напряженность электрического поля) и тензор (напряженность магнитного поля):

$$\left. \begin{aligned} E_{\nu} &= -\tau^{\alpha}h_{\nu}^{\beta}F_{\alpha\beta} = \partial_T \tilde{A}_{\nu} - (\tilde{\nabla}_{\nu}^{\sim} - F_{\nu})A; \\ H_{\mu\nu} &= h_{\mu}^{\alpha}h_{\nu}^{\beta}F_{\alpha\beta} = (\tilde{\nabla}_{\mu}^{\sim}\tilde{A}_{\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu}^{\sim}\tilde{A}_{\mu}) + 2AA_{\nu\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

причем имеет место соотношение $F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \tau_{\mu}E_{\nu} - \tau_{\nu}E_{\mu}$.

Первую пару уравнений Максвелла (1.41) в монадном виде можно выразить так:

$$\partial_T H_{\alpha\beta} = (\tilde{\nabla}_{\alpha}^{\sim} - F_{\alpha})E_{\beta} - (\tilde{\nabla}_{\beta}^{\sim} - F_{\beta})E_{\alpha}; \quad (3.47)$$

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}^{\sim}H_{\beta\gamma} + \tilde{\nabla}_{\beta}^{\sim}H_{\gamma\alpha} + \tilde{\nabla}_{\gamma}^{\sim}H_{\alpha\beta} = 2(E_{\alpha}A_{\beta\gamma} + E_{\beta}A_{\gamma\alpha} + E_{\gamma}A_{\alpha\beta}). \quad (3.48)$$

Заметим, что эти уравнения очень похожи на монадные тождества (3.42) и (3.43), если сопоставить величины $A_{\alpha\beta} \leftrightarrow -(1/2)H_{\alpha\beta}$; $F_{\alpha} \leftrightarrow E_{\alpha}$.

Вторую пару уравнений Максвелла (1.42) можно представить в виде*:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha} E^{\alpha} - H^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 4\pi J; \quad (3.49)$$

$$(\partial_T - D) E^{\alpha} + (\tilde{\nabla}_{\beta} - F_{\beta}) H^{\alpha\beta} = 4\pi \tilde{J}^{\alpha}, \quad (3.50)$$

где использованы обозначения для плотности заряда и вектора тока $J = \tau_{\mu} j^{\mu}$; $\tilde{J}^{\alpha} = -h_{\mu}^{\alpha} j^{\mu}$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет следующие проекции:

$$T^{\mu\nu} \tau_{\mu} \tau_{\nu} = - (1/8\pi) [E_{\lambda} E^{\lambda} - (1/2) H_{\lambda\sigma} H^{\lambda\sigma}]; \quad (3.51)$$

$$- T^{\mu\nu} h_{\mu}^{\alpha} \tau_{\nu} = - (1/4\pi) H^{\alpha\beta} E_{\beta}; \quad (3.52)$$

$$T^{\mu\nu} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} = - (1/4\pi) [E^{\alpha} E^{\beta} + H^{\alpha}_{\sigma} H^{\beta\sigma} + (1/4) h^{\alpha\beta} (2E_{\lambda} E^{\lambda} + H_{\lambda\sigma} H^{\lambda\sigma})]. \quad (3.53)$$

Уравнение Клейна-Фока (1.44а) имеет вид:

$$(\partial_T - D) \mathcal{E} + (\tilde{\nabla}_{\mu} - F_{\mu}) p^{\mu} + (mc/\hbar)^2 \Psi + a^4 R \Psi = 0, \quad (3.54)$$

где

$$\mathcal{E} = \tau^{\nu} \partial \Psi / \partial x^{\nu}; \quad p_{\mu} = - h_{\mu}^{\nu} \partial \Psi / \partial x^{\nu}. \quad (3.55)$$

Важнейшие уравнения мировых линий в монадном виде. Уравнения неизотропных геодезических:

$$(\partial_T m + v^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{m}) + D_{\mu\nu} p^{\mu} v^{\nu} - F_{\mu} p^{\mu} = 0; \quad (3.56)$$

$$(\partial_T p^{\nu} + v^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} p^{\nu}) + 2p^{\mu} (A^{\nu}_{\mu} - D_{\mu}^{\nu}) + m F^{\nu} = 0. \quad (3.57)$$

Уравнения изотропных геодезических (1.47):

$$(1/\omega) \partial_T \omega + (\tilde{l}^{\mu}/\omega) \tilde{\nabla}_{\mu} \omega + D_{\mu\nu} \tilde{l}^{\mu} \tilde{l}^{\nu} - F_{\mu} \tilde{l}^{\mu} = 0; \quad (3.58)$$

$$\partial_T \tilde{k}^{\nu} + \tilde{l}^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{k}^{\nu} + 2 \tilde{k}_{\mu}^{\nu} (A^{\nu}_{\mu} - D_{\mu}^{\nu}) + \omega F^{\nu} = 0, \quad (3.59)$$

где $\omega = k^{\mu} \tau_{\mu}$ — частота изотропного излучения; $\tilde{k}^{\nu} = -k^{\mu} h_{\mu}^{\nu} = \omega \tilde{d}x^{\nu}/d\tau = \omega \tilde{l}^{\nu}$ — пространственная часть волнового вектора; $\tilde{l}^{\nu} = (1/\omega) \tilde{k}^{\nu}$ — направление распространения изотропного излучения.

Уравнения Матиссона — Папапетру (2.39), (2.40) в монадном виде в общем случае довольно громоздки, поэтому запишем их [67], сразу воспользовавшись дополнительным условием Кориналдези — Папапетру

* Запись уравнений Максвелла через векторы E_{μ} и $B_{\mu} = (1/2) e_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ см. в [66].

$$S^{\mu\nu}\tau_\mu = 0, \quad (3.60)$$

которое означает, что тензор спина $S^{\mu\nu}$ является пространственно-спроектированным: $S^{\mu\nu} = \tilde{S}^{\mu\nu}$.

Начнем с уравнений спина (2.40), которые можно представить в виде

$$(g_\mu^\alpha - u^\alpha u_\mu)(g_\nu^\beta - u^\beta u_\nu) DS^{\mu\nu}/Ds = 0 \quad \text{или} \quad \tilde{h}_\mu^\alpha \tilde{h}_\nu^\beta DS^{\mu\nu}/Ds = 0, \quad (3.61)$$

где $\tilde{h}_\mu^\alpha = (g_\mu^\alpha - u^\alpha u_\mu)$ — метрический тензор пространственно-го сечения, ортогонального линии τ , представляющей точки (см. рис. 5). Будем использовать произвольную систему отсчета. Смешанная проекция (3.61) означает, что

$$v_\rho \left[v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S^{\rho\nu} + \partial_\tau S^{\rho\nu} + 2S^{\lambda\nu} A_{\cdot\lambda}^\rho - S^{\rho\lambda} (D_\lambda^\nu - A_{\cdot\lambda}^\nu) \right] - S^{\lambda\nu} F_\lambda = - [v^\sigma (A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}) + F_\lambda] S^{\lambda\rho} (\delta_\rho^\nu / u^2 - v_\rho v^\nu) u, \quad (3.62)$$

где $v^\sigma = -(1/u) h_\lambda^\sigma u^\lambda$; $u = \tau_\alpha u^\alpha$. Пространственно-спроектированные по всем индексам уравнения (3.61) записываются в виде

$$\begin{aligned} \partial_\tau S^{\mu\nu} + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S^{\mu\nu} = & -S^{\lambda\nu} (A_{\cdot\lambda}^\mu - D_\lambda^\mu) - S^{\mu\lambda} (A_{\cdot\lambda}^\nu - D_\lambda^\nu) + \\ & + [(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}) v^\sigma + F_\lambda] (S^{\lambda\mu} v^\nu - S^{\lambda\nu} v^\mu). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Уравнения движения спиновых частиц (2.39) можно выразить следующим образом:

$$(\partial_\tau \tilde{m} + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{m}) - \tilde{p}^\lambda [v^\sigma (A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}) + F_\lambda] = -(1/2) v^\sigma S^{\mu\nu} Y_{\sigma\mu\nu}; \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\tau \tilde{P}^\alpha + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{P}^\alpha) + \tilde{m} [(A_{\cdot\sigma}^\alpha - D_\sigma^\alpha) v^\sigma + F^\alpha] + \\ + \tilde{P}^\lambda (A_{\cdot\lambda}^\alpha - D_\lambda^\alpha) = (1/2) S^{\mu\nu} (Y_{\cdot\mu\nu}^\alpha - v^\sigma Z_{\cdot\sigma\mu\nu}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.65)$$

где введены величины:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{S^{\lambda\beta} v_\beta}{(1-v^2)} [v^\sigma (A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}) + F_\lambda]; \\ \tilde{P}^\alpha &= \frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{S^{\lambda\rho}}{(1-v^2)^{3/2}} [v^\sigma (A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}) + F_\lambda] [\delta_\rho^\alpha (1-v^2) - v_\rho v^\alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

3.5. МОНАДНЫЙ МЕТОД В ХРОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Монадный метод наиболее эффективен в специальных системах координат, выбранных так, что конгруэнция координатных линий x^0 ($x^i = \text{const}$) совпадает с конгруэнцией временно-подоб-

ных мировых линий системы отсчета τ^* . Такие системы координат иногда называют физическими, сопутствующими системе отсчета или *хронометрическими*. Будем придерживаться последнего названия. В этих системах приборы системы отсчета имеют неизменные пространственные координаты ($x^i = \text{const}$) (рис. 7), т. е. отлична от

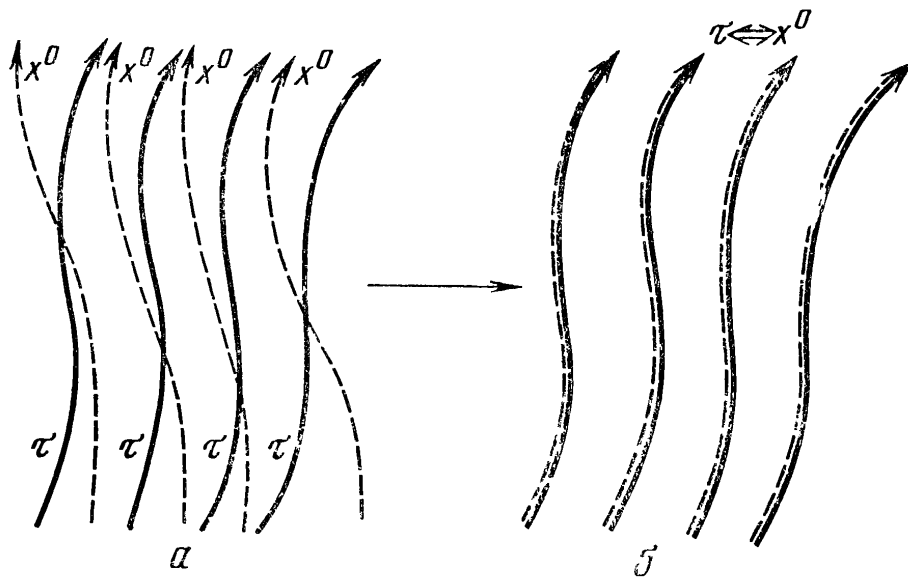


Рис. 7. В общем случае имеются две конгруэнции временно-подобных линий: τ и x^0 ($x^i = \text{const}$) (а); в хронометрических системах координат конгруэнции τ и x^0 совпадают (б)

нуля только нулевая компонента 4-скорости ($\tau^i = dx^i/ds = 0$). Учитывая условие нормировки τ^μ : $\tau^\mu \tau^\nu g_{\mu\nu} = \tau^0 \tau^0 g_{00} = 1$, — находим контравариантные компоненты τ^μ («калибруем» монаду):

$$\tau^\mu = g_0^\mu / \sqrt{g_{00}}. \quad (3.67)$$

Из алгебраических соотношений (3.3) легко выразить компоненты τ_μ и $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} \tau_\mu &= \tau^\nu g_{\mu\nu} = g_{0\mu} / \sqrt{g_{00}}; & h_{ik} &= g_{0i} g_{0k} / g_{00} - g_{ik}; \\ h_{0\mu} &= 0; & h_0^0 &= 0; & h_i^0 &= g_{0i} / g_{00}; & h_i^k &= -g_i^k; \\ h^{ik} &= -g^{ik}; & h^{0i} &= -g^{0i}; & h^{00} &= (1 - g_{00} g^{00}) / g_{00}. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Условие совпадения конгруэнций τ и $x^i = \text{const}$ позволяет выделить не одну, а целый класс хронометрических систем координат, связанных друг с другом специальными «хронометрическими» преобразованиями координат. Эти преобразования находятся из условия $\tau^i = 0$ во всех хронометрических системах координат:

$$\tau'^i = \tau^\alpha \partial x'^i / \partial x^\alpha = \tau^0 \partial x'^i / \partial x^0 = 0 \rightarrow \partial x'^i / \partial x^0 = 0,$$

* Монадный метод в таких системах координат известен как метод хронометрических инвариантов. Его разработал А. Л. Зельманов [68] и несколько позже независимо от него Каттанео [69].

т. е. они имеют вид:

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad (3.69)$$

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \quad (3.70)$$

Хронометрические преобразования дополняются до произвольных преобразованиями

$$x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (3.71)$$

которые приводят к расщеплению единой конгруэнции на две: исходную конгруэнцию τ , совпадающую с $x^i = \text{const}$ и остающуюся неизменной, и новую временно-подобную конгруэнцию $x'^i = \text{const}$. Если новую координатную конгруэнцию связать с конгруэнцией второй системы отсчета τ' , то можно сказать, что преобразованием координат (3.71) описывается переход от одной системы отсчета к другой. Однако при этом не следует забывать, что *сами по себе преобразования координат не означают перехода к новой системе отсчета, переход производится лишь после отождествления второй координатной конгруэнции с конгруэнцией новой системы отсчета*. Но последнего можно и не делать.

Таким образом, наряду с хронометрическими системами координат, привязанными к какой-то исходной конгруэнции системы отсчета, можно говорить и о *хронометрической системе отсчета*, определяемой конгруэнцией линий времени ($x^i = \text{const}$) заданной системы координат. Тогда можно сказать, что преобразования (3.71) описывают переход между хронометрическими системами отсчета, а (3.69) и (3.70) оставляют все в рамках одной и той же хронометрической системы отсчета.

В хронометрических системах координат проектирования произвольного тензора $B_{\nu}^{\mu \dots}$ на направление τ вследствие калибровки (3.67) состоит в следующем:

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{B_{\nu}^{\mu \dots}}_m \underbrace{\tau_{\mu} \dots}_n \underbrace{\tau^{\nu} \dots}_m = \underbrace{B_{\nu \dots \mu \dots}}_{n+m} \underbrace{\tau^{\nu} \dots \tau^{\mu} \dots}_{n+m} = \\ &= \underbrace{B_{00 \dots 0}}_{n+m} ! (g_{00})^{\frac{n+m}{2}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Все контравариантные «пространственные» компоненты $B^{i \dots k}$ произвольного тензора являются пространственно-спроектированными:

$$\widetilde{B}^{i \dots k} = B^{\mu \dots \nu} \underbrace{(-1)^n h_{\mu}^i \dots h_{\nu}^k}_n = B^{i \dots k}, \quad (3.73)$$

так как согласно (3.68) $h_0^i = 0$, $h_{\mu}^i = -g_{\mu}^i$. Все ковариантные компоненты пространственно-спроектированных тензоров имеют только «пространственные» компоненты и образуются опусканием

индексов у компонент (3.73) посредством 3-мерного метрического тензора h_{ik} :

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{B}_{\underbrace{0\mu\dots\nu}_n} &= (-1)^n B_{\alpha\beta\dots\gamma} h_0^\alpha h_\mu^\beta \dots h_\nu^\gamma = 0 \text{ вследствие } h_0^\alpha = 0; \\ \widetilde{B}_{\underbrace{i\dots k}_n} &= (-1)^n B^{j\dots s} \underbrace{h_{ji}\dots h_{sk}}_n, \end{aligned} \right\} (3.74)$$

так как согласно (3.68) $h_{00} = h_{0i} = 0$.

Аналогично из произвольного тензора $B_{\alpha\dots\beta}^{\mu\dots\nu}$ можно построить компоненты пространственно-спроектированных тензоров меньшего ранга, например:

$$\widetilde{B}^{\underbrace{i\dots k}_m} = (-1)^m \underbrace{B_{\underbrace{\mu\dots\nu}_{n-m}}^{\lambda\dots\tau}}_{n-m} \dots \underbrace{h_\nu^i \dots h_\lambda^k}_m = \underbrace{B_{\underbrace{0\dots 0}_{n-m}}^{i\dots k}}_{n-m} / (g_{00})^{\frac{n-m}{2}}. (3.75)$$

Из рассмотренного следует, что в хронометрических системах координат пространственно-спроектированные тензоры соответствующего ранга определяются величинами только с пространственными компонентами ($i, k, \dots = 1, 2, 3$) этого же ранга, найденными по формулам (3.73) — (3.75), а временно-спроектированные компоненты — ковариантными временными компонентами согласно (3.72) и (3.75). Выпавшие из рассмотрения контравариантные пространственно-спроектированные компоненты с временным индексом (типа $B^{0\dots\mu}$) линейно выражаются через рассмотренные величины и не представляют самостоятельного интереса, например:

$$\widetilde{B}^0 = -B^{\mu\dots 0}_\mu = -B^i h_i^0 = -(g_{0i}/g_{00}) B^i.$$

Указанные выше спроектированные величины в хронометрических системах координат обладают замечательными свойствами: они инвариантны при произвольных преобразованиях координаты x^0 (3.69) и ковариантны относительно чисто пространственных преобразований координат x^i (3.70). Первое называют свойством хронометрической инвариантности, а сами величины (3.72) — (3.75) — *хронометрически-инвариантными (х. и.) 3-тензорами* или *хронометрическими инвариантами*.

Это свойство указанных величин продемонстрируем на примере произвольного вектора B^μ . Рассмотрим преобразование различных его компонент при выполнении (3.69) и (3.70):

$$\begin{aligned} B'_0 &= B_\mu \partial x^\mu / \partial x'^0 = B_0 \partial x^0 / \partial x'^0; \\ B'_k &= B_\mu \partial x^\mu / \partial x'^k = B_0 \partial x^0 / \partial x'^k + B_i \partial x^i / \partial x'^k; \\ B'^0 &= B^\mu \partial x'^0 / \partial x^\mu = B^0 \partial x'^0 / \partial x^0 + B^i \partial x'^0 / \partial x^i; \\ B'^k &= B^\mu \partial x'^k / \partial x^\mu = B^i \partial x'^k / \partial x^i. \end{aligned}$$

Учитывая, что $g'_{00} = g_{\mu\nu} (\partial x^\mu / \partial x'^0) \partial x^\nu / \partial x'^0 = g_{00} (\partial x^0 / \partial x'^0)^2$, убеждаемся в инвариантности $B_0 / \sqrt{g_{00}}$. Очевидно, что B^k ковариантно относительно пространственных преобразований. В хронометрической инвариантности h_{ik} убедиться нетрудно. Легко показать также, что произведение х. и. величин также х. и.

Отметим, что в хронометрических системах координат.

$$\sqrt{-g} = \tau_0 \sqrt{h}, \quad (3.76)$$

где h — определитель матрицы $\{h_{ik}\}$. С учетом этой формулы имеем выражения для 3-мерных тензоров Леви-Чивиты.

$$e_{ijk} = \sqrt{h} \varepsilon_{0ijk} \equiv \sqrt{h} \varepsilon_{ijk}; \quad e^{ijk} = -(1/\sqrt{h}) \varepsilon_{ijk}, \quad (3.77)$$

где ε_{ijk} — 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Из сказанного выше следует, что монадные физико-геометрические тензоры в хронометрических системах координат хронометрически-инвариантны и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} *F_i &= \tau^0 (\tau_{i,0} - \tau_{0,i}); \\ *A_{ik} &= (1/2) (\tau_{i,k} - \tau_{k,i}) + (1/2) (\tau_i^* F_k - \tau_k^* F_i); \\ *D_{ik} &= (1/2) \tau^0 h_{ik,0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой слева вверху будем обозначать монадные величины и операторы в хронометрической системе координат.

В хронометрических системах координат вследствие того, что $*N_i^k = 0$, существенно упрощается оператор монадного временно-го дифференцирования (3.23):

$$*\partial_T \tilde{B}_{k\dots}^i = \tau^0 \tilde{\partial} B_{k\dots}^i / \partial x^0. \quad (3.79)$$

Он не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины.

Для записи монадного пространственного ковариантного дифференцирования учтем, что в формуле (3.26) теперь $h_{k,\sigma}^i = 0$, а 3-мерные связности можно представить в виде

$$-h_i^\sigma h_s^\nu L_{\nu\sigma}^k \equiv \Delta_{is}^k \equiv (1/2) h^{kl} (*\partial_i h_{ls} + *\partial_s h_{li} - *\partial_l h_{is}), \quad (3.80)$$

где Δ_{is}^k — дополнительная к монадным физико-геометрическим тензорам х. и. величина; значком $*\partial_i$ здесь обозначен новый х. и. оператор пространственного дифференцирования:

$$*\partial_i \equiv \partial / \partial x^i - (g_{0i} / g_{00}) \partial / \partial x^0, \quad (3.81)$$

также не зависящий от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. В результате для оператора $*\tilde{\nabla}_s$ (3.26) получаем выражение

$$\begin{aligned}
 * \widetilde{\nabla}_s \underbrace{\widetilde{B}_i^k \dots}_{m} &= * \partial_s \widetilde{B}_i^k \dots + \underbrace{\Delta_{si}^k \widetilde{B}_i^i \dots}_{n} + \dots - \\
 &\underbrace{- \Delta_{sl}^i \widetilde{B}_i^k \dots}_{m} - \dots \equiv * \nabla_s \widetilde{B}_i^k \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

Все формулы и уравнения в монадном виде, приведенные в § 3.4, сохраняют свой вид в хронометрических координатах. В них нужно произвести незначительные переобозначения: перейти к 3-мерным индексам и учесть появление нового оператора $*\partial_i$ и величины Δ_{sl}^i [согласно (3.82)].

3.6. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. КИНЕМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Важный класс систем отсчета образуют *нормальные системы отсчета*, т. е. системы без вращения ($A_{\mu\nu} = 0$). Для них характерна возможность введения такой однопараметрической совокупности 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей

$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0$, что монаду τ_μ можно считать пропорциональной нормалю к этим гиперповерхностям (рис. 8):

$$b \tau_\mu = \partial f_{(\lambda)}(x^\nu) / \partial x^\mu, \tag{3.83}$$

где b — скалярная функция координат. Для нормальной конгруэнции можно подобрать такую систему координат, что в качестве параметра λ , нумерующего совокупность гиперповерхностей, будет выступать временно-подобная координата x^0 *, а уравнение гиперповерхностей приобретет вид:

$$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0 \rightarrow x^0 = \text{const}, \tag{3.84}$$

откуда следует, что $\tau_i = 0$. Такие системы координат будем называть *кинеметрическими*.

Учитывая условие нормировки $\tau_\mu \tau_\nu g^{\mu\nu} = \tau_0 \tau_0 g^{00} = 1$, найдем ковариантные компоненты τ_μ («калибруем» монаду):

$$\tau_\mu = g_\mu^0 / \sqrt{g^{00}}. \tag{3.85}$$

* Монадный метод в таких системах координат известен как метод кинеметрических инвариантов. Сам метод и его название предложены А. Л. Зельмановым [70] (см. также [71, 72]).

Тогда из алгебраических соотношений (3.3) однозначно выражаются все компоненты τ^μ и тензора $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= g^{0\mu}/\sqrt{g^{00}}; & h^{ik} &= g^{0i}g^{0k}/g^{00} - g^{ik}; \\ h^{0\mu} &= 0; & h_\mu^0 &= 0; & h_0^i &= g^{0i}/g^{00}; & h_i^k &= -g_i^k; \\ h_{ik} &= -g_{ik}; & h_{0i} &= -g_{0i}; & h_{00} &= (1 - g_{00}g^{00})/g^{00}. \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Осуществляемое таким образом глобальное расщепление пространственно-временного многообразия на совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей и ортогональную им конгруэнцию временно-подобных линий обычно называют 1+3-расщеплением пространства-времени. На каждой пространственно-подобной гиперповерхности оказывается заданной 3-мерная координатная сетка x^i , а ее геометрия определяется тензором h_{ik} .

В общем случае конгруэнции мировых линий системы отсчета τ и линий времени ($x^i = \text{const}$) не совпадают (рис. 9). Рассмотрим переход из точки M_1 на одной пространственно-подобной гиперповерхности V_3 к точкам M_2 и M_3 , лежащим на близкой гиперповерхности V_3' причем точка M_2 лежит на одной линии τ с точкой M_1 , а M_3 на одной линии x^0 с точкой M_1 . Точки M_2 и M_3 характеризуются одной и той же координатой x^0 , а точки M_1 и M_3 имеют одинаковые пространственные координаты x^i . Найдем разность пространственных координат точек M_2 и M_3 . Так как вектор τ^μ , касательный к τ в точке M_1 , имеет компоненты $\{ \sqrt{g^{00}}; g^{0i}/\sqrt{g^{00}} \}$, малое смещение вдоль него на величину $d\tau = \tau_\mu dx^\mu = dx^0/\sqrt{g^{00}}$ соответствует разности координат x_2^i и x_3^i :

$$dx^i = \tau^i d\tau = (g^{0i}/g^{00}) dx^0. \quad (3.87)$$

Угол наклона линии τ к линии x^0 определяется отношением длин смещений $M_1M_2 = d\tau$ и $M_1M_3 = ds = \sqrt{g_{00}} dx^0$:

$$\cos \alpha = M_1M_2/M_1M_3 = 1/\sqrt{g_{00}g^{00}}. \quad (3.88)$$

Очевидно, если смешанные компоненты метрического тензора g^{0i} равны нулю, конгруэнции τ и x^0 совпадают.

Кинеметрическая система координат определена неоднозначно; для одной и той же нормальной конгруэнции τ имеется набор кинеметрических систем координат. Множество преобразований ко-

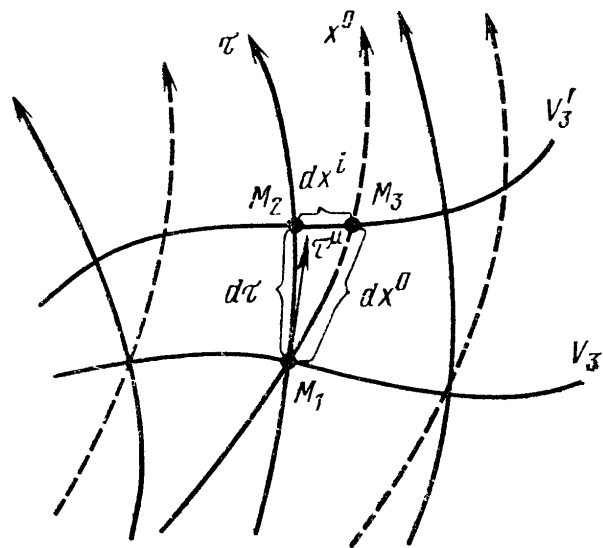


Рис. 9. Соотношение конгруэнций линий τ и x^0 в формализме кинеметрических инвариантов

ординат, связывающих эти системы, находим из условия $\tau'_i = = \tau_\alpha \partial x^\alpha / \partial x'^i = \tau_0 \partial x^0 / \partial x'^i = 0 \rightarrow \partial x^0 / \partial x'^i = 0$, т. е. такие преобразования имеют вид:

$$x'^0 = x'^0(x^0) \quad (3.89)$$

$$x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (3.90)$$

Назовем эти преобразования кинеметрическими.

Преобразования (3.90) — дополнительные к хронометрическим; ранее они описывали переходы между хронометрическими системами отсчета. Однако теперь эти преобразования соответствуют одной и той же конгруэнции мировых линий нормальной системы отсчета. Дополнительными к кинеметрическим являются преобразования

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (3.91)$$

Такое преобразование исходной кинеметрической системы координат позволяет ввести новую совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей $x'^0 = \text{const}$, а следовательно, и новую ортогональную ей конгруэнцию временно-подобных линий τ' , где $\tau'_\mu = g_\mu^0 \sqrt{g^{00}}$. С этой временно-подобной конгруэнцией можно связать вторую нормальную систему отсчета. Значит, с помощью преобразований координат (3.91) можно производить переходы между нормальными системами отсчета, но только в том случае, если с исходной и с результирующей системами координат связаны системы отсчета согласно калибровке (3.85). Систему отсчета, ассоциированную со взятой системой координат, согласно формулам (3.85), (3.86) назовем *кинеметрической системой отсчета*.

Следовательно, преобразования координат (3.89), (3.30) соответствуют одной кинеметрической системе отсчета, а (3.91) описывает переходы между различными кинеметрическими системами отсчета. Различие между преобразованиями (3.71) и (3.91) еще раз свидетельствует о том, что переходы между системами отсчета связаны с преобразованиями координат только при наличии дополнительных соглашений, причем они могут быть различными. Отметим также, что в общем случае одной и той же системе координат можно сопоставить несколько систем отсчета, в частности хронометрическую и кинеметрическую.

В кинеметрических системах координат проектирование произвольного тензора $B_\nu^\mu \dots$ на направление τ состоит в определении величины

$$B = B^{\overbrace{\mu \dots \nu \dots}^n} \underbrace{\tau_\mu \dots \tau_\nu}_{n} \dots = B^{\overbrace{0 \dots 0}^n} / (g^{00})^{n/2}. \quad (3.92)$$

Все ковариантные «пространственные» компоненты $B_{i \dots k}$ произвольного тензора являются пространственно-спроектированными:

$$\underbrace{\tilde{B}_{i\dots k}}_n = \underbrace{B_{\mu\dots\nu}}_n (-1)^n \underbrace{h_i^\mu \dots h_k^\nu}_n = B_{\mu\dots\nu} \underbrace{g_i^\mu \dots g_k^\nu}_n = B_{i\dots k}, \quad (3.93)$$

так как согласно (3.86) $h_i^0 = 0$, $h_i^\mu = -g_i^\mu$. Все контравариантные компоненты пространственно-спроектированных тензоров имеют только «пространственные» компоненты и образуются поднятием индексов у компонент (3.93) посредством 3-мерного метрического тензора h^{ik} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}^{0\mu\dots\nu} &= (-1)^n \underbrace{B^{\alpha\beta\dots\nu} h_\alpha^0 h_\beta^\mu \dots h_\nu^\nu}_n = 0, \quad \text{так как } h_\alpha^0 = 0; \\ \tilde{B}^{i\dots k} &= (-1)^n \underbrace{B_{\mu\dots\nu} h^{\mu i} \dots h^{\nu k}}_n = (-1)^n B_{j\dots s} h^{ji} \dots h^{sk}, \end{aligned} \right\} (3.94)$$

поскольку согласно (3.86) $h^{00} = h^{0i} = 0$.

Точно так же из произвольного тензора $B^{\mu\dots\nu}$ ранга n можно построить компоненты пространственно-спроектированных тензоров меньшего ранга m , например:

$$\tilde{B}_{i\dots k} = \underbrace{B_{i\dots k}^{0\dots 0}}_m \left| (g^{00})^{(n-m)/2} \right. \quad (3.95)$$

Так же как в хронометрической калибровке, в кинеметрических системах координат пространственно-спроектированные тензоры определяются лишь компонентами с «пространственными» индексами ($i, j, \dots = 1, 2, 3$). Компоненты ковариантных пространственно-спроектированных тензоров с индексом 0 линейно выражаются через компоненты с 3-мерными индексами и не представляют интереса.

Рассмотренные спроектированные величины в кинеметрических системах координат обладают свойствами кинеметрической инвариантности: они инвариантны при преобразованиях (3.89) и пространственно-ковариантны относительно преобразований координат (3.90). Эти величины в дальнейшем будем называть *кинеметрически-инвариантными (к. и.) 3-тензорами*. Кинеметрическую инвариантность величин (3.92) — (3.95) можно показать точно так же, как и хронометрическую инвариантность величин, введенных в § 3.5.

В кинеметрических системах координат, как и в хронометрических, $\sqrt{-g} = \tau_0 \sqrt{h}$. Сохраняют силу также формулы (3.77) для 3-мерных тензоров Леви-Чивиты.

Моноадные физико-геометрические тензоры и операторы в кинеметрических системах координат (кинеметрической калибровке) будем обозначать крестиком слева сверху:

$$\left. \begin{aligned} {}^+F_i &= \tau_0 \tau^0_{,i}; & {}^+A_{ik} &\equiv 0; \\ {}^+D_{ik} &= (1/2) (\tau^\mu \partial h_{ik} / \partial x^\mu + h_{\alpha k} \partial \tau^\alpha / \partial x^i + h_{i\alpha} \partial \tau^\alpha / \partial x^k); \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} +\partial_T \underbrace{\widetilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}_m &= \sqrt{g^{00}} \frac{\partial \widetilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^0} + \frac{g^{0s}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial \widetilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^s} - \\ &\quad - \underbrace{N_s \cdot \widetilde{B}_{k\dots}^{s\dots}}_n - \dots + \underbrace{N_k \cdot \widetilde{B}_{s\dots}^{i\dots}}_m + \dots, \end{aligned} \quad (3.97)$$

где $N_s \cdot^i = -h_\sigma^i \tau^\sigma_{,s} = \tau^i_{,s} - \tau^{i+} F_s$;

$$+\widetilde{\nabla}_l \underbrace{\widetilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}_m = \frac{\partial \widetilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^l} + \underbrace{L_{sl}^i \widetilde{B}_{k\dots}^{s\dots}}_n + \dots - \underbrace{L_{kl}^s \widetilde{B}_{s\dots}^{i\dots}}_m - \dots \quad (3.98)$$

Формула (3.98) полностью идентична 3-мерной ковариантной производной от 3-мерного тензора. Эта закономерность распространяется и на все другие 3-мерные величины в кинеметрической калибровке; например, 3-мерный тензор Риччи

$${}^3R_{ik}^+ = \partial L_{ik}^l / \partial x^l - \partial L_{il}^l / \partial x^k + L_{ik}^l L_{ls}^s - L_{il}^s L_{ks}^l. \quad (3.99)$$

Все формулы § 3.4 в кинеметрической калибровке имеют тот же вид, только в них следует положить $A_{\mu\nu} = 0$ и везде писать лишь 3-мерные индексы.

Рассматриваемый формализм можно понимать как способ выделения в 4-мерном римановом пространстве-времени 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей. С позиций известной в дифференциальной геометрии теории вложения $n-1$ -мерных гиперповерхностей в риманово пространство размерности n [7] тензор скоростей деформаций D_{ik} представляет собой второй основной тензор 3-мерной гиперповерхности в 4-мерном многообразии.

Формальные условия интегрируемости в теории вложения так называемых деривационных уравнений приводят к уравнениям Гаусса

$${}^3R_{iksr} = {}^4R_{iksr} + (D_{is} D_{rh} - D_{ir} D_{hs}) \quad (3.100)$$

и к уравнениям Петерсона — Кодацци

$${}^4R_{ik\beta} \tau^\beta = +\widetilde{\nabla}_k D_{is} - +\widetilde{\nabla}_i D_{sk}. \quad (3.101)$$

Видно, что эти уравнения совпадают соответственно с (3.39) и (3.40) в кинеметрической калибровке. Уравнения Гаусса означают, что 3-мерный тензор Римана — Кристоффеля складывается из двух частей: первая часть обусловлена кривизной вмещающего 4-мерного пространства-времени, спроектированного на 3-мерную гиперповерхность, а вторая часть связана с искривленностью самой гиперповерхности в 4-мерном многообразии. Уравнения Петерсона — Кодацци выражают через 4-мерный тензор Римана — Кри-

стоффеля отклонение тензора ${}^+ \tilde{\nabla}_k D_{is}$ от симметрии по всем трем индексам.

Спроектированную на τ левую часть уравнений Эйнштейна (3.36) в кинематической калибровке можно получить из уравнений Гаусса, а смешанные компоненты тензора Эйнштейна (3.37) — сверткой уравнений Петерсона — Кодацци.

3.7. ЧАСТНЫЕ ВИДЫ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Об одном частном виде — нормальных системах отсчета ($A_{\mu\nu} = 0$) — уже говорилось в § 3.6. Рассмотрим другие частные виды систем отсчета, характеризующиеся либо обращением в нуль монадных физико-геометрических тензоров (в отдельности или в комбинациях), либо связью этих тензоров с физическими полями.

Киллинговы системы отсчета можно ввести в том случае, если в рассматриваемой области пространства-времени существует временно-подобный вектор Киллинга. 4-Скорость киллинговой системы отсчета направлена вдоль этого вектора: $\xi^\mu = \varphi \tau^\mu$, где φ — скалярная функция координат, характеризующая длину вектора Киллинга. Подставив в уравнения Киллинга (1.55) монадное представление метрического тензора (3.3) и спроектировав соотношение последовательно посредством $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta$, $-\tau^\alpha h_\nu^\beta$, $\tau^\alpha \tau^\beta$, находим, что в киллинговых системах отсчета

$$D_{\mu\nu} = 0; \quad (3.102)$$

$$F_\nu = h_\nu^\beta \varphi_{,\beta} / \varphi; \quad \varphi_{,\beta} \tau^\beta = 0. \quad (3.103)$$

Из (3.103) следует, что вектор ускорения имеет дивергентный вид $F_\nu = -(\partial/\partial x^\nu)(\ln \varphi)$. Тензор $A_{\mu\nu}$ в общем случае отличен от нуля и обладает свойством $\partial_T A_{\mu\nu} = 0$. Имеется класс многообразий, допускающих существование конформного вектора Киллинга ξ^α , т. е. вектора, удовлетворяющего конформным уравнениям Киллинга:

$$\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = (1/2) g_{\mu\nu} \xi^\lambda{}_{;\lambda} \quad (3.104)$$

Если вектор ξ^ν временно-подобен, то в таких многообразиях можно ввести понятие *конформно-киллинговых систем отсчета* ($\xi^\mu = \varphi \tau^\mu$). В этих системах отсчета

$$D_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \partial_T (\ln \varphi); \quad F_\nu = -(\partial/\partial x^\nu)(\ln \varphi); \quad \partial_T A_{\mu\nu} = 0. \quad (3.105)$$

Геодезические системы отсчета задаются геодезической конгруэнцией временно-подобных мировых линий. В них $F_\mu = 0$. Заметим, что не во всяком пространстве-времени возможно задание геодезической системы отсчета в конечной 4-мерной области. Однако такую систему отсчета всегда можно определить в окрест-

ности 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности. За пределами окрестности в общем случае геодезические пересекаются.

Синхронными системами отсчета называются нормальные геодезические системы отсчета. Они характеризуются условиями $A_{\mu\nu} = 0$; $F_\mu = 0$. Для синхронных систем отсчета справедливо сделанное выше замечание о возможности задания геодезических систем отсчета.

Ассоциированные с электромагнитным полем системы отсчета [73], в которых с точностью до постоянного множителя вектор ускорения F^α и тензор угловой скорости вращения $A_{\alpha\beta}$ (этих систем отсчета) равны соответственно напряженности электрического E^α и магнитного $H_{\alpha\beta}$ полей, всегда можно определить при наличии электромагнитного поля. Действительно, введем безразмерный векторный потенциал электромагнитного поля $a_\mu = (\sqrt{2k/c^2}) A_\mu$. Векторный потенциал A_μ , как известно, определен с точностью до калибровочного преобразования $\tilde{a}_\mu = a_\mu + \nabla_\mu \varphi$. Из-за произвольности функции φ ее всегда [73] можно выбрать так, чтобы вектор \tilde{a}_μ был нормирован на ± 1 . Рассмотрим случай временно-подобного вектора \tilde{a}_μ

$$\tilde{a}_\mu \tilde{a}^\mu = a_\mu a^\mu + 2a^\mu \nabla_\mu \varphi + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi = 1. \quad (3.106)$$

Это уравнение аналогично уравнению Гамильтона — Якоби. Тогда можно выбрать систему отсчета так, чтобы

$$\tau^\mu = \tilde{a}^\mu = (\sqrt{2k/c^2}) A^\mu. \quad (3.107)$$

Условие (3.106) однозначно не фиксирует φ . Если задана одна система отсчета, то можно перейти к другой, вектор τ_μ^* которой связан с τ^μ соотношением $\tau_\mu^* = \tau_\mu + \nabla_\mu^* \varphi$, где φ^* согласно (3.106) удовлетворяет условию $2a^\mu \nabla_\mu^* \varphi + g^{\mu\nu} \nabla_\mu^* \varphi \nabla_\nu^* \varphi = 0$. Таким образом, имеется класс систем отсчета, ассоциированных с электромагнитным полем.

В силу (3.107) тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$(\sqrt{2k/c^2}) F_{\mu\nu} = -2A_{\mu\nu} + \tau_\mu F_\nu - \tau_\nu F_\mu.$$

Проектируя это соотношение посредством τ^μ и $-h_{\alpha}^\mu$, находим в таких системах отсчета

$$(\sqrt{2k/c^2}) E_\nu = F_\nu; \quad (\sqrt{2k/c^2}) H_{\mu\nu} = -2A_{\mu\nu}. \quad (3.108)$$

Характерно, что в ассоциированных с электромагнитным полем системах отсчета электровакуумные уравнения Эйнштейна упрощаются (часть членов справа сокращается с членами слева):

$$\partial_T D - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^{\lambda} - (1/2) F_{\lambda} F^{\lambda} = 0; \quad (3.109)$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} D - \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} (A_{\alpha}^{\lambda} + D_{\alpha}^{\lambda}) = 0; \quad (3.110)$$

$$(\partial_T - D) (A_{\beta\alpha} + D_{\beta\alpha}) + 2 (D_{\alpha}^{\lambda} D_{\beta\lambda} - A_{\alpha}^{\lambda} A_{\beta\lambda} + A_{\beta}^{\lambda} D_{\alpha\lambda}) + \\ + \hat{\nabla}_{\hat{\beta}} F_{\alpha} + {}^3R_{\alpha\beta} = - (1/2) h_{\alpha\beta} (F_{\lambda} F^{\lambda} + 2A_{\lambda\sigma} A^{\lambda\sigma}). \quad (3.111)$$

Первая пара уравнений Максвелла (3.47), (3.48) в точности совпадает с тождествами Риччи в монадном виде (3.42), (3.43), а вторая пара уравнений Максвелла (в вакууме) представляет собой дополнительные условия на монадные физико-геометрические тензоры:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} F^{\alpha} + 2A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0; \quad (3.112)$$

$$(\partial_T - D) F^{\alpha} - 2 (\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - F_{\beta}) A^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.113)$$

Из (3.112) следует, что в таких системах отсчета обязательно должно присутствовать электромагнитное поле.

Ассоциированные с электромагнитным полем системы отсчета в принципе можно реализовать с помощью идеализированной заряженной пыли (из невзаимодействующих между собой частиц), которая движется в заданном электромагнитном поле.

Можно определить системы отсчета, ассоциированные со скалярным полем. В этом случае $\tau_{\mu} = (1/B) T_{\mu\nu} \tau^{\nu}$, где $1/B$ — нормирующий множитель; $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса скалярного поля (1.45).

3.8. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА К ДРУГОЙ

Пусть в пространстве-времени с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ определены две системы отсчета, т. е. заданы два поля монад: τ^{μ} и τ^{μ}

(рис. 10). Рассмотрим движение одной системы отсчета относительно другой, а также преобразование временно- и пространственно-спроектированных величин от одной системы отсчета к другой [55]. Для этого представим метрический тензор в двух видах:

$$g^{\mu\nu} = \tau^{\mu} \tau^{\nu} - h^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \tau^{\mu} \tau^{\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.114)$$

Пусть dx^{ν} взято вдоль конгруэнции τ , тогда скорость второй

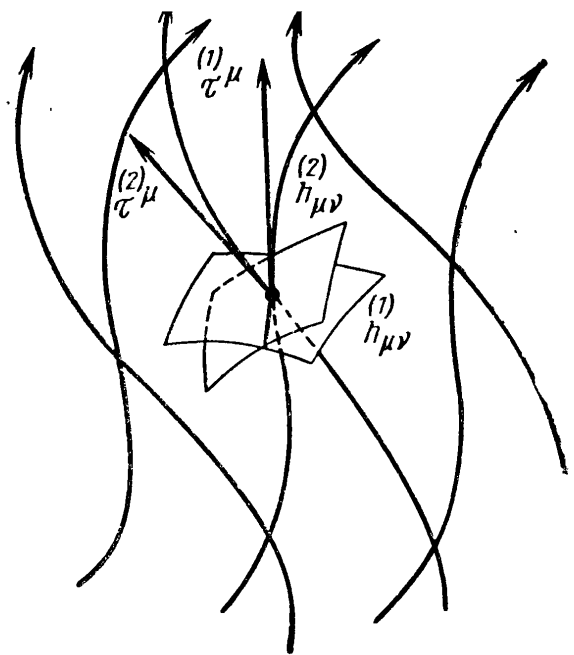


Рис. 10. Сопоставление двух систем отсчета

системы отсчета относительно первой

$$v^\mu = dx^\mu/d\tau, \quad (3.115)$$

где $dx^\mu = -h_{\nu}^{\mu} dx^\nu$ — пространственное смещение; $d\tau = \tau_\nu dx^\nu$ — интервал времени относительно первой системы отсчета. Используя формулу $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = d\tau \sqrt{1 - v^2}$, где $v^2 = h_{\mu\nu}^{(1)} v^\mu v^\nu$, а также соотношения

$$\tau_\mu \tau^\mu \equiv \tau_\mu dx^\mu/ds = 1 / \sqrt{1 - v^2}; \quad (3.116)$$

$$-h_{\mu}^{\nu} \tau^\mu \equiv -h_{\mu}^{\nu} dx^\mu/ds = v^\nu / \sqrt{1 - v^2},$$

приходим к релятивистской формуле сложения скоростей

$$\tau^\mu = \tau^\nu g_{\nu}^{\mu} = \tau^\nu \left(\tau_\nu \tau^\mu - h_{\nu}^{\mu} \right) = \left(\tau^\mu + v^\mu \right) / \sqrt{1 - v^2}. \quad (3.117)$$

Отсюда получаем формулу, связывающую 3-мерные метрические тензоры двух систем отсчета:

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} &= \tau^\mu \tau^\nu - g^{\mu\nu} = \\ &= \left(\tau^\mu + v^\mu \right) \left(\tau^\nu + v^\nu \right) / \left(1 - v^2 \right) - \tau^\mu \tau^\nu + h^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \left(\tau^\mu \tau^\nu v^2 + \right. \\ &\quad \left. + v^\mu v^\nu + \tau^\mu v^\nu + \tau^\nu v^\mu \right) / \left(1 - v^2 \right). \end{aligned} \quad (3.118)$$

С помощью формул (3.117) и (3.118) легко найти переход между компонентами тензоров, спроектированных на временные и пространственные направления обеих систем отсчета. Так, для произвольного вектора B^μ имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= \left(B + B^\mu v_\mu \right) / \sqrt{1 - v^2}; \\ \bar{B}^\mu &= \bar{B}^\mu - \left[B \left(\tau^\mu v^2 + v^\mu \right) + B^\nu v_\nu \left(v^\mu + \tau^\mu \right) \right] / \left(1 - v^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.119)$$

где $\bar{B} = \bar{B}_\mu \tau^\mu$ — временные проекции; $\bar{B}^\mu = -h_{\nu}^{\mu} B^\nu$ — пространственные компоненты вектора относительно системы отсчета s ($s=1,2$).

Остановимся на случае, когда B^μ является вектором 4-скорости некоторой частицы, рассматриваемой из двух введенных систем отсчета, т. е. $B^\mu = dx_B^\mu/ds_B$, где dx_B^μ — смещение частицы. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^\mu &= U^\mu / \sqrt{1 - U^2}; & \bar{B}^\mu &= U^\mu / \sqrt{1 - U^2}; \\ \bar{B} &= 1 / \sqrt{1 - U^2}; & \bar{B} &= 1 / \sqrt{1 - U^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.120)$$

где $d\tau_B^{(s)} = dx_B^v \tau_\nu^{(s)}$; $U^\mu = -dx_B^v h_\nu^\mu / d\tau_B^{(s)}$
 — компоненты 3-скорости частицы в соответствующей системе от-
 счета $U^2 = h_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$. Используя формулу (3.177), получаем:

$$d\tau_B^{(2)} = \frac{1 - (\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)}}{\sqrt{1 - v^2}} d\tau_B^{(1)} \quad (3.121)$$

где $(\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)} = -v_\mu U^\mu$. Аналогично с помощью формул (3.118) и (3.121) находим соотношение между квадратами 3-скоростей:

$$1 - U^2 = \left\{ (1 - v^2) / [1 - (\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)}]^2 \right\} (1 - U^{(1)2}). \quad (3.122)$$

Подставляя эти формулы в (3.120), а последние в (3.119), приходим к обобщению релятивистской теоремы сложения скоростей:

$$U^\mu = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{[1 - (\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)}]} \left[U^{(1)\mu} + \tau^\mu - \frac{[1 - (\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)}] (\tau^\mu + v^\mu)}{1 - v^2} \right]. \quad (3.123)$$

Внешне эта формула не похожа на соответствующее выражение в СТО [74]. Однако следует учесть, что формула в СТО имеет место для $U_\mu \parallel v_\mu$. Такую формулу удобнее получить из (3.122), полагая $(\mathbf{v}\mathbf{U})^2 = v^2 U^2$; в результате имеем:

$$U = (U^{(1)} - v) / [1 - (\mathbf{v}\mathbf{U})^{(1)}]. \quad (3.124)$$

Используя (3.117) и (3.118), запишем общековариантные формулы связи физико-геометрических тензоров в двух системах отсчета:

$$F_\alpha^{(2)} = \frac{1}{1 - v^2} \left(F_\alpha^{(1)} - \tau_\alpha v^\nu F_\nu^{(1)} + 2v^\beta A_{\alpha\beta}^{(1)} \right) + \frac{(\tau^\nu + v^\nu)}{1 - v^2} (v_{\alpha,\nu} - v_{\nu,\alpha}) + \\ + \frac{(\tau_\alpha + v_\alpha)(\tau^\nu + v^\nu)}{2(1 - v^2)^2} \frac{\partial(v^2)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2(1 - v^2)} \frac{\partial(v^2)}{\partial x^\alpha}; \quad (3.125)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(A_{\alpha\beta}^{(1)} - A_{\alpha\nu}^{(1)} v^\nu \frac{(\tau_\beta + v_\beta)}{1 - v^2} + A_{\beta\nu}^{(1)} v^\nu \frac{(\tau_\alpha + v_\alpha)}{1 - v^2} \right) + \\ + \frac{1}{2(1 - v^2)^{3/2}} \left[v^2 (\tau_\alpha F_\beta^{(1)} - \tau_\beta F_\alpha^{(1)}) + (v_\alpha F_\beta^{(1)} - v_\beta F_\alpha^{(1)}) + \right. \\ \left. + F_\mu^{(1)} v^\mu (v_\beta \tau_\alpha - \tau_\beta v_\alpha) \right] + \frac{(v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu})}{2\sqrt{1 - v^2}} \left\{ h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + \frac{(v^\nu + \tau^\nu)}{1 - v^2} \times \right.$$

$$\times \left[h_{\alpha}^{\mu(1)} (v_{\beta} + \tau_{\beta}) - h_{\beta}^{\mu(1)} (v_{\alpha} + \tau_{\alpha}) \right] + \frac{\tau^{\nu(1)} v^{\mu(1)}}{1 - v^2} (\tau_{\alpha} v_{\beta} - \tau_{\beta} v_{\alpha}) + \left. + \tau^{\nu(1)} (h_{\beta}^{\mu(1)} \tau_{\alpha} - h_{\alpha}^{\mu(1)} \tau_{\beta}) \right\}. \quad (3.126)$$

Рассмотрим переходы между хронометрическими и кинеметрическими системами отсчета в одной и различных системах координат.

Связь между хронометрической τ и кинеметрической τ системами отсчета, определенными в одной и той же системе координат [75]. Скорость движения кинеметрической системы отсчета относительно хронометрической согласно (3.115) находим в виде

$$v^k = \sqrt{g_{00}} g^{0k}; \quad v^0 = (g_{00} g^{00} - 1) / \sqrt{g_{00}}; \quad 1 - v^2 = g_{00} g^{00}. \quad (3.127)$$

Используя (3.119), в качестве примера запишем закон преобразования компонент спроектированного вектора:

$$\left. \begin{aligned} B^{(2)} &= B^{(1)} / \sqrt{g_{00} g^{00}} - (g_{0i} / \sqrt{g_{00}}) B^{(1)i} / \sqrt{g_{00} g^{00}}; \\ B^{(2)k} &= B^{(1)k} + B^{(1)i} g_{0i} g^{0k} / g_{00} g^{00} - B^{(1)} g^{0k} / \sqrt{g_{00}} g^{00}. \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

Переход от одной хронометрической системы отсчета к другой хронометрической [55]. Пусть вторая система отсчета τ движется относительно первой со скоростью V^k , тогда переход между системами отсчета описывается преобразованием координат

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0} = - \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{v^k \sqrt{g_{00}}}{1 - (g_{0j} / \sqrt{g_{00}}) v^j}. \quad (3.129)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^0} = \frac{v^k \sqrt{g_{00}}}{1 - (g_{0i} / \sqrt{g_{00}}) v^i} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0}.$$

Например, для пространственно-спроектированных компонент вектора B^{μ} закон преобразования (3.119) имеет вид:

$$B^{(2)'i} = \left[B^{(1)k} - \frac{(1) B v^k - (g_{0s} / \sqrt{g_{00}}) (1) B^s v^k}{1 - (g_{0j} / \sqrt{g_{00}}) v^j} \right] \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}. \quad (3.130)$$

Переход от одной кинеметрической системы отсчета к другой кинеметрической [75]. Этот переход описывается преобразованием координат

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^k} = \frac{v_k \sqrt{g^{00}}}{1 - (g^{0j}/\sqrt{g^{00}}) v_j} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}. \quad (3.131)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^k} = - \frac{v_i \sqrt{g^{00}}}{1 - (g^{i0}/\sqrt{g^{00}}) v_j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

Например, для пространственно-спроектированных компонент вектора имеем закон преобразования

$$B'_k{}^{(2)} = \left[B_i{}^{(1)} - v_i \frac{B - (g^{0s}/\sqrt{g^{00}}) B_s{}^{(1)}}{1 - (g^{0j}/\sqrt{g^{00}}) v_j} \right] \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}. \quad (3.132)$$

Переход от кинеметрической системы отсчета к новой хронометрической [75]. Такой переход описывается преобразованием

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x_0} = - \frac{v^k + g^{0k}/\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}, \quad (3.133)$$

где скорость второй системы отсчета относительно первой (кинеметрической) согласно (3.115) $v^k = \sqrt{g^{00}} dx^k/dx^0 - g^{0k}/\sqrt{g^{00}}$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^0} = \frac{v^k + g^{0k} \sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0}.$$

Для спроектированных компонент вектора B^μ закон преобразования запишем следующим образом:

$$B' = (B + B_k v^k) / \sqrt{1 - v^2}; \quad B'^i = (B^k - B v^k) \partial x'^i / \partial x^k. \quad (3.134)$$

Переход от хронометрической системы отсчета к новой кинеметрической. Этот переход описывается преобразованием координат [75]:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^k} = \frac{v_k + g_{0k}/\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}, \quad (3.135)$$

где скорость второй системы отсчета относительно первой $v^i = dx^i / [\sqrt{g_{00}} dx^0 + (g_{0k}/\sqrt{g_{00}}) dx^k]$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^k} = - \frac{(v_i + g_{0i}/\sqrt{g_{00}})}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

Для пространственно-спроектированных компонент вектора получаем закон преобразования

$$B_k{}^{(2)} = (B_i{}^{(1)} - B v_i) \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}. \quad (3.136)$$

Как уже подчеркивалось, в монадном формализме произвольным тензорным величинам сопоставляют либо скаляры (полностью спроектированные на τ тензоры), либо пространственно-спроектированные тензоры (того же ранга или меньшего из-за частичного проектирования на τ). Может создаться впечатление, что все эти величины, а также х. и. или к. и. величины в соответствующих калибровках, непосредственно описывают наблюдаемые в ОТО. Это не так. *Наблюдаемые в ОТО могут описываться только скалярными величинами!* Таким образом, полностью спроектированные на τ величины непосредственно описывают наблюдаемые. Например, из тензора энергии-импульса материи $T^{\mu\nu}$ имеем наблюдаемую плотность энергии $\mathcal{E} = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$. Но как перейти к наблюдаемым от пространственно-спроектированных тензоров? Для этого необходимо расширить измерительные возможности используемых систем отсчета, позволив определять в локальном пространственном сечении длины вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. Это означает добавление к вектору монады τ^μ еще трех пространственно-спроектированных ортонормированных векторов $g^\mu(i)$, где $i=1, 2, 3$. Наблюдаемые будут непосредственно описываться скалярами — тензорными величинами, свернутыми по всем индексам с векторами τ^μ и $g^\mu(i)$. Например, из пространственно-спроектированного вектора импульса $\tilde{P}_\alpha = -T^{\mu\nu}\tau_\mu h_{\nu\alpha}$ можно образовать три наблюдаемые компоненты импульса $P(i) = \tilde{P}_\alpha g^\alpha(i)$.

Такое расширение теории означает переход к *тетраднему формализму* (см., например, [76]). Изложим самые необходимые сведения об алгебре тетрадного формализма. Более подробно весь аппарат этого формализма со специфическими тетрадными физико-геометрическими величинами и операторами рассмотрен в гл. 7.

Пусть в некоторой области 4-мерного пространства-времени задана координатная сетка, тогда в каждой точке этой области определена четверка векторов e_μ (аффинная тетрада), касательных к линиям этой сетки. Они связаны с метрическим тензором соотношениями:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu; \quad g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu; \quad e^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu. \quad (3.137)$$

Кроме них независимо от координатной сетки в каждой точке рассматриваемой области бесконечным числом способов можно определить другую четверку ортонормированных векторов (реперов) $e(\alpha)$, где $\alpha=0, 1, 2, 3$. Одним из этих векторов может быть временно-подобный вектор скорости системы отсчета $\tau = e(0)$. Орты $e(\alpha)$ удовлетворяют соотношениям:

$$e(\alpha) e(\beta) = \varepsilon(\alpha\beta), \quad (3.138)$$

где $\varepsilon(\alpha\beta)$ — метрический тензор плоского (касательного) пространства-времени в декартовых координатах.

Попарные произведения единичных векторов из разных наборов тетрад образуют матрицу коэффициентов Ламе [компонент векторов $\mathbf{e}(\alpha)$ в используемой координатной сетке]

$$g_{\mu}(\alpha) = \mathbf{e}_{\mu} \mathbf{e}(\alpha); \quad g^{\mu}(\alpha) = \mathbf{e}^{\mu} \mathbf{e}(\alpha). \quad (3.139)$$

Учитывая (3.137) и (3.138), метрический тензор $g_{\mu\nu}$ можно записать через коэффициенты Ламе следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu}(\alpha) g_{\nu}(\alpha) = g_{\mu}(0) g_{\nu}(0) - g_{\mu}(1) g_{\nu}(1) - \\ - g_{\mu}(2) g_{\nu}(2) - g_{\mu}(3) g_{\nu}(3). \quad (3.140)$$

Это тетрадное представление метрического тензора соответствует монадному разбиению (3.3). Если положить $g^{\mu}(0) = \mathbf{e}^{\mu} \boldsymbol{\tau} = \tau^{\mu}$, то*

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu}(i) g_{\nu}(i) = g_{\mu}(1) g_{\nu}(1) + g_{\mu}(2) g_{\nu}(2) + \\ + g_{\mu}(3) g_{\nu}(3) \equiv h_{\mu}(i) h_{\nu}(i). \quad (3.141)$$

Для ортогональных систем координат ($h_{ik} = 0$ при $i \equiv \neq k$) коэффициенты Ламе $g_k(k) \equiv h_k(k)$ имеют вид:

$$h_k(k) = \sqrt{h_{kk}}. \quad (3.142)$$

Теорию Ламе можно рассматривать как триадный метод (в 3-мерном пространстве) в специальной калибровке триад — векторы $\mathbf{e}(k)$ выбраны вдоль координатных линий ортогональных систем координат. В гл. 7 будут рассмотрены более общие способы калибровки тетрад (триад), в частности обобщающие хронометрическую и кинеметрическую калибровки монадного метода. В следующей части достаточно будет ограничиться калибровкой Ламе.

Продемонстрируем калибровки Ламе на примере сферических координат в плоском 3-мерном пространстве. Метрика, как известно, имеет вид $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Сферические координаты являются ортогональными. Компоненты триад Ламе находят в виде $h_1(1) = 1$; $h_2(2) = r$; $h_3(3) = r \sin \theta$.

* Отметим, что основоположником этого метода следует считать Ламе, который еще в 1859 г. развил метод дополнения 3-мерных криволинейных ортогональных систем координат полем локальных соприкасающихся систем декартовых квазиординат, т. е. ввел в 3-мерном пространстве афинную \mathbf{e}_k и ортонормированную $\mathbf{e}(i)$ соприкасающиеся триады, удовлетворяющие 3-мерным соотношениям типа (3.137) и (3.138).

ЧАСТЬ II

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ОТСЧЕТА В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 4 НАБЛЮДАЕМЫЕ В СФЕРИЧЕСКИ- СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ

4.1. МЕТРИКА ШВАРЦШИЛЬДА

Наиболее важным для практики является решение уравнений Эйнштейна, описывающее метрику пространства-времени вокруг сферически-симметричного материального источника (метрика Шварцшильда [14, с. 199]). Именно эта метрика с высокой степенью точности описывает гравитационное поле в Солнечной системе и в окрестности Земли, из нее можно в основном приближении получить закон тяготения Ньютона, а в следующем приближении — объяснить известные эффекты, подтверждающие ОТО.

Для вывода метрики Шварцшильда воспользуемся нормальной системой отсчета, т. е. пусть $A_{\mu\nu} = 0$. Тогда искомое пространственно-временное многообразие глобально расщепляется на пространственные сечения и время. Сформулируем условия сферической симметрии на основе введенных ранее понятий подвижности многообразия. Ясно, что эти условия относятся к пространственным сечениям и означают возможность их поворотов вокруг выделенного центра (изотропность), т. е. искомое многообразие допускает систему из трех пространственно-подобных векторов Киллинга $\xi_{(s)}^\mu$. В кинеметрической калибровке τ^μ

$$\xi_{(s)}^\mu \tau_\mu = 0 \rightarrow \xi_{(s)}^0 = 0. \quad (4.1)$$

Запишем уравнения Киллинга для пространственно-подобных векторов Киллинга в монадном виде. Проектируя уравнения Киллинга (1.55) посредством $h_i^\mu h_k^\nu$, $h_k^\mu \tau^\nu$, $\tau^\mu \tau^\nu$ и учитывая (4.1), соответственно находим в кинеметрической калибровке

$$\xi_{(s)}^l h_{ik,l} + h_{lk} \xi_{(s),i}^l + h_{il} \xi_{(s),k}^l = 0; \quad (4.2)$$

$$h_{k\beta} (\xi_{(s)}^\mu \tau_{,\mu}^\beta - \tau^\mu \xi_{(s),\mu}^\beta) = 0; \quad (4.3)$$

$$F_i \xi_{(s)}^i = 0. \quad (4.4)$$

Из соображений соответствия с вращениями плоского пространства запишем векторы Киллинга (в сферических координатах) в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi_{(1)}^\mu &= \{0; 0; \sin \varphi; \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi\}; \\ \xi_{(2)}^\mu &= \{0; 0; -\cos \varphi; \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi\}; \\ \xi_{(3)}^\mu &= \{0; 0; 0; -1\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Подставляя эти векторы в уравнения (4.2), получаем, что метрика пространственных сечений должна иметь вид:

$$dl^2 = h_{11}(x^0, r) dr^2 + b^2(x^0, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.6)$$

где $b^2(x^0, r)$ — «постоянная» интегрирования.

Из уравнений (4.4) с векторами Киллинга (4.5) легко находим:

$$F_2 = F_3 = 0 \rightarrow \partial\tau^0/\partial\theta = \partial\tau^0/\partial\varphi = 0, \quad (4.7)$$

т. е. может быть отличной от нуля лишь радиальная компонента ускорения. Уравнения (4.3) приводят к соотношениям:

$$\partial\tau^i/\partial\theta = \partial\tau^i/\partial\varphi = 0; \quad \tau^2 = \tau^3 = 0.$$

Уточним выбор системы отсчета. После проведенных рассуждений остались неизвестными функции $\tau^0, \tau^1, h_{11}, h_{22}$ от координат x^0 и r . Преобразованием этих двух координат всегда можно добиться, чтобы $\tau^1=0; h_{22}=r^2$. Это означает выбор из множества радиально движущихся систем отсчета одной, а именно имеющей постоянную площадь поверхности с фиксированным значением параметра r . Такую систему отсчета следует назвать *покоящейся* относительно источника. Остаются неизвестными лишь две функции.

Выпишем геометрические характеристики пространственных сечений выбранной системы отсчета. Согласно изложенному имеем компоненты метрического тензора h_{ik} :

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= h_{11}(x^0, r); \quad h_{22} = r^2; \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta; \\ h^{11} &= 1/h_{11}; \quad h^{22} = 1/r^2; \quad h^{33} = 1/r^2 \sin^2 \theta; \\ h_{ik} &= 0 \text{ при } i \neq k; \quad h^{ik} = 0 \text{ при } i \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Отличными от нуля являются следующие компоненты 3-мерной связности L_{ik}^l :

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^1 &= \frac{1}{2} h_{11,1}/h_{11}; \quad L_{22}^1 = -r/h_{11}; \quad L_{33}^1 = -r \sin^2 \theta/h_{11}; \\ L_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; \quad L_{21}^2 = L_{31}^3 = 1/r; \quad L_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где $h_{11,1} = \partial h_{11}/\partial r$. Используя эти соотношения, по формуле (3.99) находим отличные от нуля компоненты 3-мерного тензора Риччи и скалярную кривизну:

$${}^3R_{11} = h_{11,1}/r h_{11}; \quad (4.10)$$

$${}^3R_{22} = {}^3R_{33}/\sin^2 \theta = 1 - 1/h_{11} + (r/2h_{11}^2) h_{11,1}; \quad (4.11)$$

$${}^3R = (2/r^2 h_{11}^2) (h_{11} - r h_{11,1} - h_{11}^2). \quad (4.12)$$

В выбранной системе отсчета неизвестную компоненту h_{11} можно получить из уравнения Эйнштейна (3.36) (в вакууме)

$$G_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu = -(1/2)^3 R = 0 \rightarrow rh_{11,1} + h_{11}^2 - h_{11} = 0, \quad (4.13)$$

где учтено, что согласно (4.8) $D_{22}=D_{33}=0$, а компонента D_{11} не входит в это уравнение. Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:

$$h_{11} = (1 - C_1/r)^{-1}, \quad (4.14)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Из смешанного уравнения Эйнштейна (3.37) (при $\alpha=1$), учитывая (4.9), находим, что $D_{11}=0$, т. е. h_{11} не зависит от x^0 . Следовательно, $D_{ik}=0$. Рассматриваемое многообразие обладает еще одним вектором Киллинга $\xi_{(0)}^\mu = \delta_0^\mu$, а выбранная система отсчета является киллинговой.

Для нахождения компоненты τ^0 учтем, что согласно (4.7) отлична от нуля лишь одна компонента ускорения F_1 . Значит, все величины в уравнениях Эйнштейна, содержащие F_i , можно выразить через F_1 :

$$\left. \begin{aligned} F^1 &= -\frac{F_1}{h_{11}}; & F_i F^i &= -\frac{F_1^2}{h_{11}}; & \nabla_1 F_1 &= F_{1,1} - \frac{1}{2} \frac{h_{11,1}}{h_{11}} F_1; \\ \nabla_2 F_2 &= \frac{r}{h_{11}} F_1; & \nabla_3 F_3 &= \frac{r}{h_{11}} F_1 \sin^2 \theta; \\ \nabla_i F^i &= -\frac{F_{1,1}}{h_{11}} + \frac{1}{2} \frac{h_{11,1}}{h_{11}^2} F_1 - \frac{2F_1}{h_{11}r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15), (4.10) и (4.12) в уравнения Эйнштейна (3.38), находим:

$$G_{\mu\nu}h_1^\mu h_1^\nu = 0 \rightarrow F_1 = (1 - h_{11})/2r = -C_1/2r^2 (1 - C_1/r). \quad (4.16)$$

Из соответствия с выражением для ускорения свободного падения в центральном ньютоновом гравитационном поле

$$g = -kM/r^2 \leftrightarrow F_1 h^1(1) c^2 \approx -C_1/2r^2 - C_1^2/4r^3, \quad (4.17)$$

где k — ньютонова гравитационная постоянная; M — масса центрального источника; c — скорость света; $h^1(1) = \sqrt{1 - C_1/r}$ — компонента тетрады в калибровке Ламе, находим, что постоянную интегрирования C_1 следует выбрать равной $2kM/c^2$. Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета

$$F_1 = -\frac{kM}{c^2 r^2 (1 - 2kM/c^2 r)}; \quad c^2 F(1) \approx -\frac{kM}{r^2} - \frac{k^2 M^2}{c^2 r^3}, \quad (4.18)$$

т. е. к ньютоновой силе добавляется эйнштейновская «сила», обратно пропорциональная r^3 .

Уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu}h_2^\mu h_2^\nu = (1/\sin^2 \theta) G_{\mu\nu}h_3^\mu h_3^\nu = 0$ соглас-

но тождествам Бианки являются следствием двух уже рассмотренных. Остальные уравнения Эйнштейна тождественно обращаются в нуль.

В рассматриваемой кинеметрической (хронометрической) калибровке вектор ускорения $F_1 = \tau_0 \tau_{0,1}^0 = -\tau_{0,1}/\tau_0$, так как $\tau^0 = 1/\tau_0$. Подставляя это выражение в (4.18), находим простое дифференциальное уравнение для τ_0 : $\tau_{0,1}/\tau_0 = kM/c^2 r^2 (1 - 2kM/c^2 r)$. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\tau_0 = (1/C_2) \sqrt{1 - 2kM/c^2 r}, \quad (4.19)$$

где C_2 — постоянная интегрирования. Надлежащим выбором координаты x^0 всегда можно добиться равенства $C_2 = 1$. В результате получим метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 - 2kM/c^2 r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.20)$$

где было использовано, что $h_{ik} = -g_{ik}$; $g_{00} = \tau_0^2$. Систему координат, в которой записана эта метрика, часто называют *координатами кривизн*.

В пространственном сечении покоящейся системы отсчета длина окружности с центром в источнике выражается через параметр r обычным образом ($l = 2\pi r$), а расстояние вдоль радиуса до окружности

$$R = \int_{r'}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - 2kM/c^2 r}} > r. \quad (4.21)$$

При больших значениях r пространственное сечение становится почти плоским.

Обратим внимание на то, что в координатах кривизн компонента 3-мерной метрики h_{11} и определитель \sqrt{h} имеют особенность при $r = r_g = 2kM/c^2$ (*гравитационный радиус*). При переходе через гравитационный радиус координата x^0 приобретает пространственно-подобный, а r — временно-подобный характер. На гравитационном радиусе обращается в бесконечность вектор ускорения, так как

$$F_l F^l = k^2 M^2 / c^4 r^4 (1 - 2kM/c^2 r). \quad (4.22)$$

Не вдаваясь в подробности, отметив, что с понятием гравитационного радиуса связана гипотеза существования черных дыр — объектов с геометрическим радиусом, меньшим гравитационного. (Для Солнца, например, $r_g = 1,47$ км, для Земли $r_g = 0,5$ см)

Запишем метрику Шварцшильда в еще одной важной системе координат, по отношению к которой кинеметрическая (хронометрическая) система отсчета является синхронной (*свободно падающей*) Для этого сделаем преобразование координат:

$$y_0 = \int_{r'_0}^r \frac{\sqrt{r_g/r}}{1 - r_g/r} dr + x_0; \quad y_1 = \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{r/r_g}}{1 - r_g/r} dr + x_0, \quad (4.23)$$

где $r_0, r'_0 > r_g$ (для внешней области решения $r > r_g$). В новой системе координат метрика Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = dy_0^2 - \frac{dy_1^2}{[(3/2r_g)(y_1 - y_0)]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(y_1 - y_0) \right]^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.24)$$

Такую систему называют *координатной системой Леметра*. Легко видеть, что в свободно падающей системе отсчета $A_{\mu\nu} = 0; F_\mu = 0; D_{ik} \neq 0$.

4.2. ДВИЖЕНИЕ МОНОПОЛЬНЫХ ПРОБНЫХ ТЕЛ В МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Пусть масса центрального тела, искривляющего пространство-время, равна M , а масса пробного тела есть m_0 . Возьмем метрику Шварцшильда в виде (4.20) и воспользуемся монадными уравнениями геодезической в хронометрической калибровке, т. е. движение пробных тел рассмотрим в покоящейся системе отсчета.

Спроектированное на τ уравнение геодезической (3.20) имеет смысл теоремы изменения кинетической энергии пробного тела и в данном случае имеет вид:

$$\frac{dm}{d\tau} = F_1 p^1 = - \frac{kMm}{r^2 c^2 (1 - 2kM/c^2 r)} \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.25)$$

где $p^1 = m v_r = m dr/d\tau$. Используя соотношение $F_1 = -\tau_{0,1}/\tau_0$, (4.25) можно представить в виде $dm/m = -d\tau_0/\tau_0$, откуда получаем общерелятивистский аналог закона сохранения энергии:

$$m = (E/c^2)/\tau_0, \quad (4.26)$$

где E/c^2 — постоянная интегрирования. При $r \gg r_g$ и скоростях $v \ll c$, используя соотношения:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 + m_0 v^2 / 2c^2 + \dots;$$

$$1/\tau_0 = 1/\sqrt{1 - 2kM/c^2 r} = 1 + kM/c^2 r + O(r_g/r)^2;$$

$$E = E_0 + m_0 c^2; \quad E_0 \ll m_0 c^2,$$

приходим в наинишем приближении к известному выражению

$$m_0 v^2 / 2 - kMm_0 / r = E_0.$$

Вторая компонента уравнения (3.21) (соответствующая углу θ) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$- dp^2/d\tau - (2/r) p^2 v^1 + \sin \theta \cos \theta p^3 v^3 = 0. \quad (4.27)$$

С учетом начальных условий: $\theta_0 = \pi/2$, $v^2 = d\theta/d\tau|_0 = 0$ это уравнение означает, что траектория точки плоская

$$\theta = \pi/2 = \text{const.}$$

Третья компонента уравнения (3.21) (соответствующая углу φ) с учетом (4.9) имеет смысл теоремы изменения момента количества движения

$$dp^3/d\tau + (2/r) p^3 v^1 = 0, \quad (4.28)$$

где $p^3 = md\varphi/d\tau$. Деля (4.28) на $p^3 v^1 = p^3 dr/d\tau$, находим, что $dp^3/p^3 = -(2/r) dr$. Интегрируя это уравнение, находим обобщение закона сохранения момента количества движения:

$$p^3 = \sigma m_0 / r^2 \rightarrow mr^2 d\varphi/d\tau = m_0 \sigma, \quad (4.29)$$

где $m_0 \sigma$ — постоянная интегрирования.

Первая компонента уравнения (3.21) довольно сложна:

$$- dp^1/d\tau = L_{11}^1 p^1 v^1 + L_{33}^1 p^3 v^3 + mF^1,$$

поэтому используем обходной путь. Возьмем квадрат интервала (4.20) и разделим его на $ds^2/m_0^2 = dt^2/m^2$ (при $\theta = \pi/2 = \text{const}$):

$$m_0^2 = m^2 - (p^1)^2 / (1 - 2kM/c^2 r) - r^2 (p^3)^2.$$

Используя формулы (4.26) и (4.29), находим:

$$m_0^2 = \frac{E^2}{c^4 (1 - 2kM/c^2 r)} - \frac{(p^1)^2}{1 - 2kM/c^2 r} - \frac{\sigma^2 m_0^2}{r^2}. \quad (4.30)$$

Переходя от r к $u = 1/r$ и от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ так, что

$$p^1 = mdr/d\tau = m(dr/d\varphi) d\varphi/d\tau = -m_0 \sigma du/d\varphi,$$

приводим уравнение (4.30) к виду

$$\sigma^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{m_0^2 c^4} + \frac{2kMu}{c^2} + \frac{2kM\sigma^2 u^3}{c^2}, \quad (4.31)$$

что означает общерелятивистский аналог закона сохранения энергии (4.26) в сферических координатах. Дифференцируя (4.31) по φ , находим:

$$d^2 u/d\varphi^2 + u = kM/\sigma^2 c^2 + 3kMu^2/c^2. \quad (4.32)$$

Умножая это уравнение на $-m_0 u^2 \sigma^2 c^2$, получаем обобщенный второй закон Ньютона (координатный) вдоль радиального направления:

$$m_0 a_r = -kMm_0/r^2 - (3kMm_0/r^4)\sigma^2 \equiv \mathcal{F}_H + \mathcal{F}_\varepsilon. \quad (4.33)$$

«Справа кроме ньютоновой силы притяжения стоит эйнштейновская «сила притяжения»

$$\mathcal{F}_\Delta = - (3kMm_0/r^4) \sigma^2 = \mathcal{F}_H 3\sigma_0^2/r^2 c^2, \quad (4.34)$$

где $\sigma = \sigma_0/c$. Для объектов Солнечной системы множитель $3\sigma_0^2/r^2 c^2$ мал; действительно, можно положить $\sigma_0 = r^2 \varphi \approx vr$, тогда $\mathcal{F}_\Delta \equiv \mathcal{F}_H (v/c)^2$, т. е. при $v \ll c$ \mathcal{F}_Δ можно пренебречь.

При рассмотрении радиальных геодезических удобно исходить из формулы (4.30). Полагая $\sigma = 0$, находим:

$$p^1 = m \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^4} + \frac{2kM}{rc^2} m_0^2}. \quad (4.35)$$

Отсюда легко получить в покоящейся системе отсчета время свободного перемещения частицы между двумя точками с разными значениями r . В частности, время свободного падения частицы от точки с $r=R$ до гравитационного радиуса в этой системе отсчета оказывается конечным. Однако оно соответствует бесконечному интервалу изменения параметра x^0 . Учитывая соотношение $d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0$, приходим к выводу, что по часам любого покоящегося по отношению к источнику наблюдателя время свободного падения тела до гравитационного радиуса тоже равно бесконечности. Легко также показать, что в свободно падающей системе отсчета (системе Леметра) время достижения гравитационного радиуса конечно.

4.3. ЭФФЕКТ СМЕЩЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

Рассмотрим эффект смещения перигелия планет в пространстве-времени, искривленном Солнцем согласно ОТО. Для этого, воспользовавшись малостью последнего слагаемого в (4.32) справа, найдем приближенное решение уравнения. Запишем (4.32) в виде

$$u'' + u = a + \epsilon u^2, \quad (4.36)$$

где $a = kM/\sigma^2 c^2$, $\epsilon = 3kM/c^2$. Очевидно, в нулевом приближении, когда пренебрегаем последним членом, для финитного движения получаем замкнутую эллиптическую траекторию

$$u_0 = a + A_0 \cos \varphi \rightarrow r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad (4.37)$$

где A_0 — постоянная интегрирования: $p = 1/a$; $e = A_0/a < 1$ — эксцентриситет. Вторая постоянная интегрирования, соответствующая выбору начала отсчета угла φ , положена равной нулю.

Произведем в (4.36) замену $u(\varphi) = a + \xi(\varphi)$, тогда (4.36) принимает вид:

$$\xi'' + \xi = \epsilon (a + \xi)^2. \quad (4.38)$$

Решая это уравнение, например, методом Крылова — Боголюбова, в первом приближении находим:

$$u = a + \xi = a + A_0 \cos(1 - \varepsilon a) \varphi + \varepsilon [a^2 + (1/2) A_0^2] - (1/6) \varepsilon A_0^2 \cos 2(1 - \varepsilon a) \varphi + O(\varepsilon^2). \quad (4.39)$$

Смещение перигелия планеты определяется аргументом во втором слагаемом справа. Легко видеть, что, сделав полный оборот ($\varphi = 2\pi$), планета еще не окажется на том же минимальном расстоянии от Солнца, что и при $\varphi = 0$. Она окажется там при

$$(1 - \varepsilon a) \varphi = 2\pi \rightarrow \varphi = 2\pi / (1 - \varepsilon a) \approx 2\pi (1 + \varepsilon a).$$

Это означает, что ей необходимо повернуться еще на малый угол $\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon a$. Вспоминая введенные в (4.36) обозначения, находим для смещения перигелия планеты за один оборот в покоящейся системе отсчета

$$\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon a = 6\pi k^2 M^2 / \sigma^2 c^4. \quad (4.40)$$

Для ближайших к Солнцу планет Солнечной системы (Меркурий, Венера, Земля) эти смещения за 100 лет равны $42,9''$, $8,6''$, $3,8''$ соответственно. Наблюдаемое смещение перигелия Меркурия хорошо согласуется с теоретически предсказанным. Для других планет Солнечной системы этот эффект лежит за пределами экспериментальных возможностей. Не обнаружимы пока и малые общерелятивистские деформации орбиты, даваемые другими членами в (4.39).

Следует отметить, что в рамках плоского пространства-времени СТО и ньютонова гравитационного потенциала также происходит смещение перигелия, однако оно в шесть раз меньше.

4.4. ОТКЛОНЕНИЕ ЛУЧЕЙ СВЕТА, ПРОХОДЯЩИХ ВБЛИЗИ СОЛНЦА. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

Уравнения изотропных геодезических в метрике Шварцшильда. Решения этих уравнений, получаемых из формул (3.58) и (3.59), аналогичны рассмотренным в § 4.2 для частиц с массой покоя.

Спроектированное на τ уравнение (3.58) в данном случае имеет вид:

$$(1/\omega) d\omega/d\tau = F_1 l. \quad (4.41)$$

Его решение с учетом ранее использованных формул записывается следующим образом:

$$\omega = \omega_0 / \tau_0 = \varphi_0 / \sqrt{1 - 2kM/c^2 r}, \quad (4.42)$$

где ω_0 — постоянная интегрирования; ω — частота электромагнитного излучения.

Из (3.59) для угла θ опять следует, что луч лежит в одной

«плоскости». Выберем координаты так, чтобы эта плоскость была экваториальной, т. е. $\theta = \pi/2$.

Уравнение (3.59) для угла φ имеет вид:

$$dk^3/d\tau + (2/r) k^3 l^1 = 0, \quad (4.43)$$

где, напомним, $k^3 = \omega d\varphi/d\tau = \omega l^3$, $l^1 = dr/d\tau$. Решением этого уравнения является

$$l^3 = d\varphi/d\tau = \mu/\omega r^2, \quad (4.44)$$

где μ — постоянная интегрирования.

Радиальное уравнение геодезической опять получим из выражения для квадрата интервала

$$0 = d\tau^2 - dr^2/(1 - 2kM/c^2 r) - r^2 d\varphi^2.$$

Деля это соотношение на $d\tau^2$, используя (4.42) и (4.44) и переходя опять от r к $u = 1/r$ и к дифференцированию по φ , находим:

$$(du/d\varphi)^2 + u^2 = \omega_0^2/\mu^2 + (2kM/c^2) u^3. \quad (4.45)$$

Дифференцируя (4.45) по φ , получаем:

$$d^2u/d\varphi^2 + u = (3kM/c^2) u^2. \quad (4.46)$$

Отклонение лучей света, проходящих вблизи Солнца. Правую часть уравнения (4.46) следует рассматривать как малую величину. Пренебрегая ею, находим решение в нулевом приближении:

$$u_0 = (1/\rho_0) \cos \varphi \quad \text{или} \quad r_0 = \rho_0/\cos \varphi. \quad (4.47)$$

Это решение соответствует распространению света по прямой, отстоящей от искривляющего центра на расстояние ρ_0 .

Первое приближение можно найти опять с помощью метода Крылова — Боголюбова. При этом все выкладки будут такие же, как и в предыдущем параграфе, если везде положить $a=0$. Из (4.39) сразу получаем решение

$$u = u_0 + u_1 = (1/\rho_0) \cos \varphi + (\varepsilon/6\rho_0^2) (3 - \cos 2\varphi),$$

где ε имеет то же значение, что и в (4.36). В итоге имеем:

$$1/r = (1/\rho_0) \cos \varphi + (kM/c^2 \rho_0^2) (2\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi). \quad (4.48)$$

Введем декартовы координаты: $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$. Умножая (4.48) на $r\rho_0$, находим:

$$x = \rho_0 - (kM/c^2 \rho_0) (x^2 + 2y^2)/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

При больших y из этого выражения получаем:

$$x \approx \rho_0 \mp (2kM/c^2 \rho_0) y,$$

откуда вычисляем угол $\chi/2$ между асимптотой и осью y :

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = | dx/dy | = 2kM/c^2 \rho_0 \approx \chi/2.$$

$$\chi = 4kM/c^2\rho_0. \quad (4.49)$$

Для лучей света, проходящих вблизи Солнца, $\chi=1,75$, что хорошо согласуется с наблюдениями.

В теории Ньютона угол отклонения луча можно подсчитать, положив, что корпускула света обладает массой $m=hc/\nu$ и притягивается к Солнцу. Тогда стандартными вычислениями легко найти, что в плоском пространстве-времени угол отклонения ровно в два раза меньше значения (4.49).

Гравитационное красное смещение спектральных линий. В ОТО этот эффект следует рассматривать на основе решения уравнения изотропной геодезической, спроектированного на τ (4.42). Пусть свет распространяется между двумя точками, находящимися на различных расстояниях от Солнца. Пусть им соответствуют радиальные параметры r_1 и r_2 , причем $r_1 < r_2$. Тогда согласно (4.42)

$$\omega_1 = \omega_0 / \sqrt{1 - 2kM/c^2 r_1} > \omega_2 = \omega_0 / \sqrt{1 - 2kM/c^2 r_2},$$

т. е. приходящий в более удаленные точки свет будет иметь меньшую частоту. Другими словами, спектр приходящегося излучения будет сдвинут в красную сторону по сравнению со спектром аналогичного излучения, испущенного в точке наблюдения. Разность частот определяется формулой

$$(\omega_2 - \omega_1) / \omega_1 \approx - (kM/c^2) (r_2 - r_1) / r_1 r_2. \quad (4.50)$$

Конечно, здесь допускается, что аналогично излученные кванты в момент рождения всегда имеют одинаковую частоту.

Гравитационное красное смещение будет иметь место и в том случае, когда свет приходит, например, на Землю от звезды, на поверхности которой

$$M_{\text{звезды}} / R_{\text{звезды}} > M_{\text{земли}} / R_{\text{земли}}.$$

В теории тяготения Ньютона красное смещение спектра в рассматриваемом приближении определяется такой же величиной. Этот эффект можно понимать как потерю энергии светом при преодолении ньютонова гравитационного притяжения. Тогда

$$-\Delta E = \omega_2 - \omega_1 = -mg\Delta h \approx -\omega_0 (kM/c^2) (r_2 - r_1) / r^2, \quad (4.51)$$

где для не слишком большого перепада высот $r \sim r_1 \sim r_2$.

Таким образом, гравитационное красное смещение (в рассматриваемом приближении) нельзя считать сугубо общерелятивистским эффектом.

4.5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОБНЫХ ТЕЛ НА КРУГОВЫХ ОРБИТАХ (ЭФФЕКТ ШИРОКОВА)

Эффект Широкова [77] состоит в следующем: если в свободно вращающейся по круговой орбите системе отсчета (например, в

спутнике без сноса) пробным массам сообщить малые скорости в радиальном или перпендикулярном плоскости орбиты направлении, то возникнут их малые колебания, причем периоды малых колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях различны. Их разность зависит от радиуса круговой орбиты и гравитационного радиуса центрального источника.

Подсчитаем периоды этих малых колебаний*. Для этого перейдем от покоящейся системы отсчета, в которой рассматривались все предыдущие эффекты, во вращающуюся. Это можно сделать, произведя преобразования исходных координат кривизн $x'^i = x'^i(x^0, x^k)$ и затем перейдя в хронометрическую по отношению к новым координатам систему отсчета. Можно определить бесконечно много разных вращающихся систем отсчета. Они могут различаться, например, зависимостью своих угловых скоростей вращения от радиальной координаты или угла θ . Особо подчеркнем, что монадный метод задания движения систем отсчета основан на понятиях конгруэнции мировых линий в пространственно-временной области. (Одной мировой линии недостаточно — нужна, по крайней мере, трубка мировых линий).

Ограничимся простейшим случаем — «твердотельным» вращением, когда хронометрическая система координат новой системы отсчета получается из координат кривизн преобразованием

$$x'^0 = x^0; \quad r' = r; \quad \theta' = \theta; \quad \varphi' = \varphi - \Omega x^0, \quad (4.52)$$

где $\Omega = \text{const}$ определяется из условия свободного движения по круговой орбите (геодезической) центра спутника без сноса. Очевидно, что новая хронометрическая система отсчета не может быть определена сразу во всем пространственно-временном многообразии, так как при достаточно больших r скорость этой системы отсчета будет превышать скорость света. Однако в данной задаче это неважно, поскольку нам нужна конгруэнция мировых линий лишь в окрестности именно опорной круговой орбиты.

Определим Ω . Из радиального уравнения геодезической (3.21) в неподвижной системе отсчета для круговой орбиты ($p^1 = 0$) $L_{33}^1 (v^3)^2 + F^1 = 0$ находим:

$$v^3 = d\varphi/d\tau = \sqrt{r_g/2r_0^3(1 - r_g/r_0)}. \quad (4.53)$$

где r_0 — радиальный параметр опорной круговой орбиты. Учитывая, что $d\tau = \sqrt{1 - r_g/r_0} dx^0$, имеем $d\varphi/dx^0 = \sqrt{r_g/2r_0^3}$. Используя формулу перехода между двумя хронометрическими системами отсчета (3.129), которая в рассматриваемом случае записывается в виде $\partial\varphi'/\partial x^0 = -(\partial\varphi'/\partial\varphi) v^3 \sqrt{g_{00}}$, получаем:

* Рассмотрение здесь производится на основе монадного метода. В работе [77] этот эффект вычислен с помощью уравнений девиаций близких мировых линий.

$$\Omega = \sqrt{r_g/2r_0^3}. \quad (4.54)$$

В новой системе координат метрика

$$ds^2 = (1 - r_g/r - r^2\Omega^2 \sin^2 \theta) dx_0^2 - dr^2/(1 - r_g/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - 2r^2\Omega \sin^2 \theta d\varphi dx_0. \quad (4.55)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи у новых координат писать не будем. Составляющие метрического тензора (τ^μ и h_{ik}) в хронометрической по отношению к этим координатам системе отсчета находим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \{1/\sqrt{g_{00}}; 0; 0; 0\}; \quad \tau_\mu = \{\sqrt{g_{00}}; 0; 0; -r^2\Omega \sin^2 \theta/\sqrt{g_{00}}\} \\ h_{11} &= \frac{1}{(1 - r_g/r)}; \quad h_{22} = r^2; \quad h_{33} = \frac{r^2 \sin^2 \theta (1 - r_g/r)}{g_{00}}; \\ h^{11} &= 1 - \frac{r_g}{r}; \quad h^{22} = \frac{1}{r^2}; \quad h^{33} = \frac{g_{00}}{(1 - r_g/r) r^2 \sin^2 \theta}; \\ h_{ik} &= h^{ik} = 0 \text{ при } i \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Монадные физико-геометрические тензоры имеют компоненты:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{r_g - 2r^3\Omega^2 \sin^2 \theta}{2r^2 g_{00}}; \quad F_2 = \frac{r^2\Omega^2 \sin 2\theta}{2g_{00}}; \\ A_{13} &= \frac{\Omega r (1 - 3r_g/2r) \sin^2 \theta}{(g_{00})^{3/2}}; \quad A_{23} = \frac{\Omega r^2 (1 - r_g/r) \sin 2\theta}{2(g_{00})^{3/2}}; \\ D_{ik} &= 0; \quad F_3 = 0; \quad A_{12} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Положим, что в новой системе отсчета компоненты пространственных смещений от опорной линии и 3-скорости пробного тела малы, причем имеют один порядок ($\delta r \sim r_0 \delta \theta \sim v^1 \sim r_0 v^2 \sim r_0 v^3$). Ограничиваясь величинами первого порядка, т. е. пренебрегая $L_{kj}^i v^k v^j$, выпишем уравнения геодезических (в монадном виде):

$$dm/d\tau = F_1 p^1 + F_2 p^2; \quad (4.58)$$

$$dp^1/d\tau + 2p^3 A_{.3}^1 + mF^1 = 0; \quad (4.59)$$

$$dp^2/d\tau + 2p^3 A_{.3}^2 + mF^2 = 0; \quad (4.60)$$

$$dp^3/d\tau + 2p^1 A_{.1}^3 + 2p^2 A_{.2}^3 = 0. \quad (4.61)$$

Отдельно рассмотрим колебания в плоскости круговой орбиты и в перпендикулярной ей плоскости.

Колебания в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты (по углу θ). Пусть $\theta = \pi/2 + \xi$, тогда $A_{.3}^2$ — величина первого порядка по ξ . Следовательно, в уравнении (4.60) второй член имеет второй порядок и может быть опущен. Учитывая, что $dm/d\tau$ согласно (4.58) имеет первый порядок, (4.60) можно представить в виде

$$d^2\theta/d\tau^2 + F^2 = 0.$$

Разлагая F^2 в ряд по ξ (первый порядок), приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} + \frac{\Omega^2}{1 - r_g/r - r^2\Omega^2} \xi = 0, \quad (4.60a)$$

где точки означают дифференцирование по τ . Отсюда находим частоту колебаний:

$$\omega_1 = \frac{c\Omega}{\sqrt{1 - r_g/r_0 - r_0^2\Omega^2}} \approx c \sqrt{\frac{r_g}{2r_0^3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0}\right)} \quad (4.62)$$

и период

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \frac{2\pi}{c \sqrt{r_g/2r_0^3}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0}\right). \quad (4.63)$$

Легко показать, что период равен периоду обращения пробного тела по круговой орбите радиуса r_0 в собственной (вращающейся) системе отсчета. Эти колебания пробного тела относительно центра спутника обусловлены малым углом наклона круговых орбит пробного тела и центра спутника.

Колебания в плоскости круговой орбиты. Пусть $\theta = \pi/2 = \text{const}$. Введем обозначения: $r = r_0 + \zeta$, $r_0 d\phi/d\tau = r_0 d\phi_0/d\tau + \eta$, где ζ и η одного порядка. Тогда уравнения (4.59) и (4.61) принимают вид:

$$\ddot{\zeta} + 2\dot{\eta}A_{.3}^1 + F^1 = 0; \quad (4.59a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\zeta}A_{.1}^3 = 0. \quad (4.61a)$$

Разложим F^1 в ряд по ζ (до величин первого порядка включительно), а коэффициент разложения при ζ — в ряд по r_g/r_0 до величин второго порядка включительно. В результате получим:

$$F^1 = -\zeta (r_g/r_0^3 + \Omega^2 + 3\Omega^4 r_0^2). \quad (4.64)$$

Решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений будем искать в виде $\zeta = B \exp(i\omega\tau)$; $\eta = C \exp(i\omega\tau)$, где B и C — постоянные. В результате получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд B и C :

$$-\left[\omega^2 + \left(\frac{3}{2} \frac{r_g}{r_0^3} + \frac{3}{4} \frac{r_g^2}{r_0^4} \right) \right] B + 2i\omega C A_{.3}^1 = 0;$$

$$2i\omega A_{.1}^3 B - \omega^2 C = 0.$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения, если определитель системы равен нулю. Из этого условия находим частоту колебаний в плоскости круговой орбиты:

$$\omega_2 = c \sqrt{4h^{11}h^{33} (A_{13})^2 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r_0} - \frac{3}{4} \frac{r_g^2}{r_0^4}} \approx$$

$$\approx c \sqrt{\frac{r_g}{2r_0^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0}\right)} \quad (4.65)$$

и период:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx \frac{2\pi}{c \sqrt{r_g/2r_0^3}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r_g}{r_0}\right). \quad (4.66)$$

Легко показать, что это колебание обязано квазиэллиптическому характеру орбиты пробного тела с общерелятивистским смещением перигелия типа наблюдаемого у Меркурия.

Разность периодов обращения (колебаний)

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{3\pi}{c \sqrt{r_g/2r_0^3}} \frac{r_g}{r_0} \quad (4.67)$$

зависит от радиуса орбиты и гравитационного радиуса шварцшильдовского источника. Этот эффект в принципе можно было бы наблюдать, сравнивая в спутнике без сноса на круговой орбите периоды малых колебаний двух пробных масс во взаимно перпендикулярных направлениях.

4.6. ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ СВЯЗЬ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

Рассмотрим общерелятивистское влияние орбитального движения планет на их вращательное движение, следуя работе [78]. Используем уравнения Матиссона—Папапетру в монадном виде (3.61)—(3.63) с дополнительным условием Кориналдези—Папапетру. Пусть пространство-время описывается метрикой Шварцшильда. Вычисления будем проводить в неподвижной системе отсчета (хронометрической по отношению к координатам кривизн). Легко показать, что влияние вращательного (собственного) движения планет Солнечной системы на орбитальное столь ничтожно, что в рассматриваемом ниже приближении им можно пренебречь. Будем считать, что планеты движутся по геодезическим (см. § 4.2). Обратное влияние орбитального движения на вращательное более существенно, поэтому наша задача будет состоять в решении уравнений спина (3.63) и в сопоставлении решения с данными наблюдений.

Уравнения (3.63), записанные по компонентам, имеют вид:

$$dS^{12}/d\tau + v^j L_{jk}^1 S^{k2} + v^j L_{jk}^2 S^{1k} = -F_1 S^{12} v^1; \quad (4.68)$$

$$dS^{13}/d\tau + v^j L_{jk}^1 S^{k3} + v^j L_{jk}^3 S^{1k} = -F_1 S^{13} v^1; \quad (4.69)$$

$$dS^{23}/d\tau + v^j L_{jk}^2 S^{k3} + v^j L_{jk}^3 S^{2k} = F_1 S^{12} v^3, \quad (4.70)$$

где согласно результатам § 4.1, 4.2

$$F_1 = -r_g u^2/2 (1 - r_g u); \quad v^1 = dr/d\tau = -(m_0 \sigma/m) du/d\varphi;$$

$$v^2 = d\theta/d\tau = 0; \quad v^3 = (m_0/m) \sigma u^2; \quad u = 1/r.$$

Здесь опять координаты выбраны так, что $\theta = \pi/2$, т. е. орбита планеты лежит в экваториальной плоскости. Используя формулы для L_{ik}^j (4.9) и переходя от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ согласно (4.29), эти уравнения можно привести к виду:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S^{12}}{u(1 - r_g u)} \right) + \frac{S^{23}}{u^2} = 0; \quad (4.68a)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S^{13}}{u(1 - r_g u)} \right) = 0; \quad (4.69a)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S^{23}}{u^2} \right) - \left(1 - \frac{3}{2} r_g u \right) \frac{S^{12}}{u(1 - r_g u)} = 0. \quad (4.70a)$$

Уравнение (4.69a) легко решить точно:

$$S^{13} = C_0 u (1 - r_g u), \quad (4.71)$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Из (4.68a) и (4.70a) следует уравнение для одной неизвестной

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{S^{12}}{u(1 - r_g u)} \right) + \left(1 - \frac{3}{2} r_g u \right) \frac{S^{12}}{u(1 - r_g u)} = 0. \quad (4.72)$$

Учтем, что в нулевом приближении согласно (4.37)

$$u = 1/r = (1/p) (1 - e \cos \varphi),$$

где p — фокальный параметр; e — эксцентриситет орбиты. Пренебрегая величинами второго порядка по $r_g/2p \equiv \eta$, решим уравнение (4.72) методом последовательных приближений. В первом приближении по η решение находим в виде

$$\frac{S^{12}}{u(1 - r_g u)} = C_1 \left[\sin \left(1 - \frac{3}{2} \eta \right) \varphi + \frac{\eta e}{2} \sin 2\varphi \right] +$$

$$+ C_2 \left[\cos \left(1 - \frac{3}{2} \eta \right) \varphi - \frac{3}{2} \eta e + \frac{\eta e}{2} \cos 2\varphi \right], \quad (4.73)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Отсюда и из (4.68a) легко найти S^{12} и S^{23} , однако запишем результат сразу для наблюдаемых величин, вводимых согласно формулам $S(i) = (1/2) \varepsilon_{ijk} S^{sr} h_s(j) h_r(k)$, где $h_s(j)$ — компоненты триады; ε_{ijk} — 3-мерные символы Леви-Чивиты. Тогда трем компонентам тензора S^{ik} соответствуют компоненты дуального ему наблюдаемого вектора кинетического момента

$$\left. \begin{aligned} S_r \equiv S(1) &= S^{23} r^2; & S_\theta \equiv S(2) &= -S^{13} r / \sqrt{1 - r_g u}; \\ S_\varphi \equiv S(3) &= S^{12} r / \sqrt{1 - r_g u}. \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

После несложных вычислений находим:

$$S_r = C_r \{ \cos [1 - (3/2) \eta] \varphi - \eta e \cos \varphi + \eta e \cos 2\varphi \} + \\ + C_\varphi \left\{ \sin [1 - (3/2) \eta] \varphi - \frac{1}{2} \eta \sin \varphi + \eta e \sin 2\varphi \right\}; \quad (4.75)$$

$$S_\varphi = -C_r \left\{ \sin [1 - (3/2) \eta] \varphi + \frac{\eta}{2} \sin \varphi - e\eta \sin \varphi + \eta e \sin 2\varphi \right\} + \\ + C_\varphi \{ \cos [1 - (3/2) \eta] \varphi - \eta e + \eta e \cos 2\varphi \}; \quad (4.76)$$

$$S_\theta = C_\theta (1 - \eta e + \eta e \cos \varphi), \quad (4.77)$$

где C_r , C_θ , C_φ — постоянные, равные соответствующим значениям величин S_r , S_θ и S_φ при $\varphi=0$. Они связаны с постоянными C_1 , C_2 , C_0 следующим образом:

$$C_1 \approx -C_r [1 + (3/2) \eta - \eta e]; \quad C_2 \approx C_\varphi (1 + \eta);$$

$$C_0 = -C_\theta (1 + \eta - \eta e).$$

Из (4.75) — (4.77) определим модуль вектора кинетического момента

$$S = \sqrt{S_r^2 + S_\theta^2 + S_\varphi^2} \approx S_0 + \eta e \left[\frac{C_r C_\varphi}{S_0} \sin \varphi + \frac{C_r^2 + C_\theta^2}{S_0} \cos \varphi \right] - \\ - \eta \left[\frac{C_r C_\varphi}{2S_0} \sin 2\varphi + \frac{C_r^2 - C_\varphi^2}{4S_0} \cos 2\varphi \right], \quad (4.78)$$

где

$$S_0 = \sqrt{(C_r^2 + C_\theta^2 + C_\varphi^2) + (1/2) \eta (C_r^2 - C_\varphi^2) - 2\eta e (C_r^2 + C_\theta^2)}$$

— среднее значение $S(\varphi)$ за один оборот. Запишем формулу для разности длительности суток $T(\varphi) \sim 1/S(\varphi)$ и среднего значения $T_0 \sim 1/S_0$ за год.

$$\delta T(\varphi) = \frac{1}{S(\varphi)} - \frac{1}{S_0} = \eta T_0 \left[-e \left(\frac{C_r C_\varphi}{S_0^2} \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_r^2 + C_\theta^2}{S_0^2} \cos \varphi \right) + \frac{C_r C_\varphi}{2S_0^2} \sin 2\varphi + \frac{C_r^2 - C_\varphi^2}{4S_0^2} \cos 2\varphi \right]. \quad (4.79)$$

Сравним полученные результаты с опытными данными по неравномерности вращения Земли [79]. Конечно, эти данные обусловлены движением Солнца, Луны и планет, атмосферной циркуляцией, сплюснутостью Земли, приливным трением и др. Многие из этих факторов приводят к эффектам значительно более существенным, чем общерелятивистские, тем не менее, как будет показано, общерелятивистские и наблюдаемые эффекты качественно похожи. Кроме того, количественно проявления эффектов различаются всего лишь на несколько порядков. Обсудим наиболее значительные эффекты.

Предварение равноденствий. Этот эффект сводится к прецессии земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики с наблюдаемой скоростью $50,26''$ в год, обусловленной в основном сплюснутостью Земли [79].

Проделанные вычисления показали, что существует аналогичный общерелятивистский эффект, обусловленный членами $\sin[1 - (3/2)\eta]\varphi$ и $\cos[1 - (3/2)\eta]\varphi$ в (4.75) и (4.76). Эти члены описывают прецессию земной оси со скоростью $3\pi\eta$ в год в направлении движения по орбите (в два раза меньшую смещения перигелия). Учитывая, что для Земли $\eta \sim 10^{-8}$, находим значение скорости общерелятивистской прецессии: $\sim 0,02''$ в год.

Сезонные отклонения длительности суток от среднегодового значения. По данным наблюдений за 1956—1965 гг. этот эффект характеризуется следующей эмпирической формулой [80] (T измеряется в миллисекундах):

$$\delta T = -0,10 \sin \varphi - 0,48 \cos \varphi - 0,25 \sin 2\varphi - 0,16 \cos 2\varphi. \quad (4.80)$$

Первые два члена описывают так называемую годовую волну (максимум длительности суток в январе, минимум — в июле), последние — полугодовую волну (максимум — в апреле и в октябре, минимум — в январе и в июле). Кроме сезонных, наблюдаются неравномерные отклонения длительности суток порядка 1 мс, причины которых неясны [79].

Согласно теоретически полученной общерелятивистской формуле (4.79) также имеются годовые и полугодовые волны сезонных отклонений длительности суток от среднегодового значения. Подстановка в (4.79) параметров Земли приводит к формуле (T измеряется в миллисекундах)

$$\delta T = +0,000 \sin \varphi - 0,014 \cos \varphi - 0,012 \sin 2\varphi + 0,033 \cos 2\varphi. \quad (4.81)$$

Если ось вращения ортогональна плоскости эклиптики ($C_r = C_\varphi = 0$), то из (4.78) следует, что

$$(S - S_0)/S_0 = \eta e \cos \varphi. \quad (4.82)$$

По этой формуле можно произвести грубую оценку максимального относительного изменения угловой скорости вращения Земли. Она составляет примерно $0,17 \cdot 10^{-19}$, тогда как наблюдения дают значение $3,5 \cdot 10^{-19}$.

Нутация земной оси. Этот эффект, наблюдаемый крайне нерегулярно, характеризуется амплитудой, не превышающей $9''$. Из формул (4.77) и (4.78) легко найти угол β наклона плоскости экватора к плоскости эклиптики: $\cos \beta = |S_\theta|/S(\varphi)$. Полагая $\beta(\varphi) = \beta_0 + \Delta\beta(\varphi)$, получаем следующее выражение для угла нутации:

$$\Delta\beta(\varphi) = \eta e \operatorname{ctg} \beta_0 \left[\frac{C_r C_\varphi}{S_0^2} \sin \varphi - \frac{C_\varphi^2}{S_0^2} \cos \varphi \right] -$$

$$- \eta \operatorname{ctg} \beta_0 \left[\frac{C_r C_\varphi}{2S_0^2} \sin 2\varphi + \frac{C_r^2 - C_\varphi^2}{4S_0^2} \cos 2\varphi \right]. \quad (4.83)$$

Множитель $\operatorname{ctg} \beta$ приводит к существенному уменьшению амплитуды общерелятивистской нутации при стремлении оси вращения к плоскости орбиты (случай планеты Уран). Для Земли $|C_r| \gg \gg |C_\varphi|$, $\beta_0 = 23^\circ 27' 09''$, что согласно (4.83) приводит к значению амплитуды общерелятивистской нутации приблизительно $0,0002''$.

Сопоставление эмпирических данных и теоретических оценок общерелятивистских эффектов позволяет надеяться, что недалеко то время, когда точность наблюдений позволит выделить общерелятивистские эффекты из суммарного вклада влияний на Землю всех других факторов [81].

4.7. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ МЕТРИКИ

Метрику Райснера—Нордстрема — электровакуумное статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла — можно получить с помощью тех же соображений, что и метрику Шварцшильда (см. § 4.1). Она имеет вид:

$$ds^2 = (1 - 2kM/c^2r + kq^2/c^4r^2) dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 - 2kM/c^2r + kq^2/c^4r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.84)$$

где q — электрический заряд.

Для единственной (радиальной) компоненты электромагнитного поля имеем:

$$E^1 = q/r^2 \sqrt{h_{11}} \rightarrow E(1) = E^i h_i(1) = q/r^2. \quad (4.85)$$

Метрика Фишера [82] — статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Клейна—Фока для безмассового скалярного поля*. Решение можно получить примерно таким же образом, как и предыдущие метрики. Выпишем окончательный результат [83]

$$ds^2 = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{r^2} dx_0^2 - \frac{r^2}{(z - z_1)(z - z_2)} dz^2 - r^2(z) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.86)$$

где $r^2(z) = (z - z_1)^{1-\alpha} (z - z_2)^{1+\alpha}$; $z_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + kQ^2}$; $\alpha = |(z_1 + z_2)/(z_1 - z_2)|$; μ — постоянная интегрирования (обычно полагают $\mu = -r_g/2$); Q — скалярный заряд источника.

Метрика Коттлера [84] обобщает метрику Шварцшильда на случай отличной от нуля космологической постоянной:

$$ds^2 = (1 - 2kM/c^2r + \Lambda r^2/3) dx_0^2 - dr^2/(1 - 2kM/c^2r + \Lambda r^2/3) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.87)$$

Метрика Вайдья [85] представляет собой простейшее обобщение метрики Шварцшильда на случай наличия в пространстве-времени высокочастотного излучения (сферически-симметричного):

$$ds^2 = [1 - 2kM(u)/c^2r + \Lambda r^2/3] du^2 + 2du dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.88)$$

* В работе [83] изучено также статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока для безмассового скалярного поля.

где $u = x^0 - r$ — запаздывающее время; $M(u)$ — масса, зависящая от u . Метрика Вайдья является решением уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = (8\pi k/c^4) P k_\mu k_\nu, \quad (4.89)$$

где k_μ — изотропный вектор распространения излучения; P — плотность потока энергии в системе отсчета с 4-скоростью τ^μ такой, что $k^\mu \tau_\mu = 1$. Правая часть представляет собой усредненный тензор энергии-импульса высокочастотного излучения.

Глава 5

НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МЕТРИКАХ

5.1. МЕТРИКА КЕРРА

Рассмотрим второе по практической важности (после метрики Шварцшильда) точное решение уравнений Эйнштейна — метрику Керра [14, с. 208]. Это решение описывает метрику, создаваемую (в вакууме) вращающимся центральным электрически нейтральным телом. Вывод этого решения довольно громоздок, поэтому запишем его сразу в окончательном виде в наиболее часто используемых координатах Бойера — Линдквиста

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dx_0^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2r_g r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dx_0 d\varphi, \quad (5.1)$$

где r , θ , φ — сферические координаты. Это пространство-время характеризуется двумя векторами Киллинга: $\xi_{(0)}^\alpha = \delta_0^\alpha$; $\xi_{(3)}^\alpha = \delta_3^\alpha$, соответствующими стационарности и аксиальной симметрии.

Проанализируем смысл двух входящих в метрику констант: r_g и a . Легко видеть, что при $a=0$ метрика Керра (5.1) переходит в метрику Шварцшильда (4.20) в координатах кривизн. Отсюда следует, что $r_g = 2kM/c^2$ определяется массой центрального источника. При $r_g=0$ метрика (5.1) описывает плоское пространство-время.

Из сравнения метрики Керра при малых a с приближенным решением Лензе — Тирринга [86], характеризующим метрику вокруг медленно вращающегося тела с моментом количества движения \mathfrak{M}

$$ds^2 = (1 - 2kM/c^2 r) dx_0^2 - dr^2 / (1 - 2kM/c^2 r) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \\ + (4k\mathfrak{M}/c^3 r) \sin^2 \theta dx_0 d\varphi, \quad (5.2)$$

следует $a = \mathfrak{M}/cM$. В (5.2) центральное тело вращается вокруг

оси z . Керр полагал $a = (2/5)\omega R^2/c$, где ω — угловая скорость вращения; R — радиус сферического тела.

Легко видеть, что метрика (5.1) инвариантна относительно одновременного отражения времени и изменения знака ω , т. е. $x^0 \rightarrow -x^0$; $a \rightarrow -a$. Это также подтверждает справедливость отождествления a с физической величиной, пропорциональной моменту импульса.

Рассмотрим физико-геометрические тензоры в двух системах отсчета.

Хронометрическая система отсчета, соответствующая координатам Бойера — Линдквиста. В этой системе отсчета монадные составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \frac{g_0^\mu}{\sqrt{1 - r_g r / \rho^2}}; \quad \tau_\mu = \left\{ \sqrt{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}; \quad 0; \quad 0; \quad \frac{r_g r a \sin^2 \theta}{\rho^2 \sqrt{1 - r_g r / \rho^2}} \right\}; \\ h_{ik} &= \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 \Delta}{\rho^2 - r_g r} \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где использованы обозначения: $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$; $\Delta = r^2 + a^2 - r_g r$.

По формулам § 3.5 вектор ускорения находим в виде

$$F_1 = \frac{r_g (\rho^2 - 2r^2)}{2\rho^2 (\rho^2 - r_g r)}; \quad F_2 = \frac{r_g r a^2 \sin 2\theta}{2\rho^2 (\rho^2 - r_g r)}; \quad F_3 = 0, \quad (5.4)$$

что соответствует в данной системе отсчета наблюдаемым ускорениям в радиальном и меридиональном направлениях

$$F_r = F_1 h^1(1) = \frac{r_g (\rho^2 - 2r^2) \sqrt{\Delta}}{2\rho^3 (\rho^2 - r_g r)}; \quad F_\theta = F_2 h^2(2) = \frac{r_g r a^2 \sin 2\theta}{2 (\rho^2 - r_g r) \rho^3}. \quad (5.4a)$$

Тензор угловой скорости вращения имеет компоненты:

$$A_{13} = -\frac{r_g a (\rho^2 - 2r^2) \sin^2 \theta}{2\rho (\rho^2 - r_g r)^{3/2}}; \quad A_{23} = -\frac{r_g r a \Delta \sin 2\theta}{2\rho (\rho^2 - r_g r)^{3/2}}. \quad (5.5)$$

Тензор скоростей деформации $D_{ik} = 0$, так как данная хронометрическая система отсчета является киллинговой.

Кинеметрическая система отсчета, соответствующая координатам Бойера — Линдквиста. В ней составляющие метрического тензора

$$\left. \begin{aligned} \tau_\mu &= \frac{g_\mu^0 \sqrt{\rho^2 \Delta}}{\sqrt{\Delta_1}}; \quad \tau^\mu = \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\rho^2 \Delta}}; 0; 0; \frac{r_g r a}{\sqrt{\rho^2 \Delta \Delta_1}} \right\}; \\ h_{ik} &= \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_1 \sin^2 \theta}{\rho^2} \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2}{\Delta_1 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} (5.6)$$

где $\Delta_1 = \rho^2 (r^2 + a^2) + r_g r a^2 \sin^2 \theta$. Используя формулу (3.127) для скорости движения кинеметрической системы отсчета относительно хронометрической в одной и той же системе координат, находим, что новая система отсчета движется относительно старой (хронометрической) по концентрическим окружностям в широтном направлении со скоростями

$$v(3) = v^3 h_3(3) = \sqrt{g_{00}} g^{03} h_3(3) = r_g r a \sin \theta / \rho^2 \sqrt{\Delta}; \quad v(1) = v(2) = 0. \quad (5.7)$$

Компоненты вектора ускорения кинеметрической системы отсчета $F_i = \tau_0 \tau_{,i}^0$ найдем в виде

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= (r_g / 2 \rho^2 \Delta \Delta_1) [(r^2 + a^2)' (a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 2r^3 r_g a^2 \sin^2 \theta]; \\ F_2 &= a^2 \sin 2\theta r_g r (r^2 + a^2) / 2 \rho^2 \Delta_1; \quad F_3 = 0. \end{aligned} \right\} (5.8)$$

Тензор угловой скорости вращения по определению системы отсчета равен нулю ($A_{ik} = 0$), однако в отличие от предыдущего случая не равен нулю тензор скоростей деформаций:

$$\left. \begin{aligned} D_{13} &= -r_g a [2r^2 (r^2 + a^2) + \rho^2 (r^2 - a^2)] \sin^2 \theta / 2 \rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta \Delta_1}; \\ D_{23} &= r_g r a^3 \sin^3 \theta \cos \theta \sqrt{\Delta} / \rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta_1}; \quad D_{11} = D_{12} = D_{22} = D_{33} = 0. \end{aligned} \right\} (5.9)$$

Для метрики Керра (5.1) можно указать две характерные поверхности, на которых составляющие метрического тензора τ^μ и h_{ik} в хронометрической системе отсчета имеют особенности (рис. 11).

Одна из них — *горизонт* — определяется условием

$$h_{11} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta = 0 \rightarrow r_{\text{гор}} = r_g / 2 + \sqrt{r_g^2 / 4 - a^2}.$$

Легко показать, что нормаль n^μ к этой поверхности изотропна ($n_\mu n^\mu = 0$).

Поверхность бесконечного красного смещения — определяется условием

$$\tau^\mu = 0, \quad \text{т. е.} \quad \rho^2 - r_g r = 0 \rightarrow r_\infty = r_g / 2 + \sqrt{r_g^2 / 4 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Из формул (5.4), (5.5) следует, что в хронометрической системе

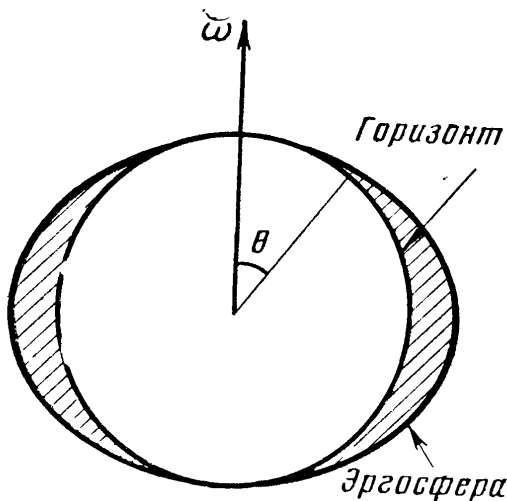


Рис. 11. Характерные поверхности в метрике Керра

отсчета на ней обращаются в бесконечность длины векторов ускорения и угловой скорости вращения системы отсчета.

Эти две поверхности соприкасаются в полюсах (при $\theta=0$ и $\theta=\pi$). В метрике Шварцшильда они совпадают

5.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МОНОПОЛЬНЫХ ПРОБНЫХ ТЕЛ В МЕТРИКЕ КЕРРА

Рассмотрим уравнения геодезических в метрике Керра (5.1) в монадном виде в хронометрической системе отсчета. Для этого воспользуемся формулами (3.20), (3.21) и выражениями для монадных физико-геометрических тензоров (5.4), (5.5). Кроме того, учтем, что отличные от нуля 3-мерные коэффициенты связности в метрике Керра ${}^* \Delta_{is}^k = L_{is}^k$

$$\left. \begin{aligned} L_{11}^1 &= \frac{2r\Delta - \rho^2(2r - r_g)}{2\rho^2\Delta}; & L_{11}^2 &= \frac{a^2}{2\rho^2\Delta} \sin 2\theta; \\ L_{12}^1 &= -\frac{a^2}{2\rho^2} \sin 2\theta; & L_{12}^2 &= \frac{r}{\rho^2}; \\ L_{22}^1 &= -\frac{r\Delta}{\rho^2}; & L_{22}^2 &= -\frac{a^2}{2\rho^2} \sin 2\theta; \\ L_{33}^1 &= -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)^2} [2r\Delta(\rho^2 - r_g r) - \rho^2(2r - r_g)a^2 \sin^2 \theta]; \\ L_{33}^2 &= -\frac{\Delta \sin 2\theta}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)^2} [\rho^2(\rho^2 - r_g r) + r_g r a^2 \sin^2 \theta]; \\ L_{13}^3 &= \frac{2r\Delta(\rho^2 - r_g r) - \rho^2(2r - r_g)a^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2\Delta(\rho^2 - r_g r)}; \\ L_{23}^3 &= \frac{\rho^2(\rho^2 - r_g r) + r_g r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2(\rho^2 - r_g r)} \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \right\} (5.10)$$

где использованы обозначения предыдущего параграфа.

Тогда временное (скалярное) уравнение геодезической можно записать в виде $dm/d\tau = F_1 p^1 + F_2 p^2$ или

$$dm/d\tau = [r_g/2\rho^2(\rho^2 - r_g r)] [(\rho^2 - 2r^2)p^1 + ra^2 \sin 2\theta p^2]. \quad (5.11)$$

Пространственное уравнение, соответствующее углу θ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp^2}{d\tau} + \frac{\sin 2\theta}{2\rho^2} \left[\frac{a^2}{\Delta} p^1 v^1 - a^2 p^2 v^2 - \frac{[\rho^2(\rho^2 - r_g r) + r_g r a^2 \sin^2 \theta] \Delta}{(\rho^2 - r_g r)^2} p^3 v^3 \right] + \\ + \frac{2r}{\rho^2} p^1 v^2 + \frac{r_g r a \Delta \sin 2\theta}{\rho^3(\rho^2 - r_g r)^{3/2}} p^3 - \frac{m r_g r a^2 \sin 2\theta}{2\rho^4(\rho^2 - r_g r)} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Пространственное уравнение, соответствующее углу φ , записывается в форме

$$\frac{dp^3}{d\tau} + \frac{[2r\Delta(\rho^2 - r_g r) - \rho^2(2r - r_g)a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2\Delta(\rho^2 - r_g r)} p^1 v^3 +$$

$$+ \frac{2 [\rho^2 (\rho^2 - r_g r) + r_g r a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2 (\rho^2 - r_g r)} \operatorname{ctg} \theta p^2 v^3 - \frac{a r_g}{\rho^3 \sqrt{\rho^2 - r_g r}} \times \\ \times \left[\frac{\rho^2 - 2r^2}{\Delta} p^1 + 2r \operatorname{ctg} \theta p^2 \right] = 0. \quad (5.13)$$

Радиальная составляющая пространственно-спроектированного уравнения

$$dp^1/d\tau + L_{11}^1 p^1 v^1 + L_{22}^1 p^2 v^2 + L_{33}^1 p^3 v^3 + 2L_{12}^1 p^1 v^2 + 2p^3 A_{.3}^1 + mF^1 = 0. \quad (5.14)$$

Полученные уравнения сложны; проинтегрировать их в общем случае трудно, однако, это можно сделать для некоторых частных случаев. В качестве примера рассмотрим траектории движения монополярных пробных тел с начальными данными в экваториальной «плоскости» вращающегося источника (в начальный момент $\theta = \pi/2$ и $v^2 = d\theta/d\tau = 0$). Подставляя эти значения в уравнение (5.12), сразу же находим, что вся траектория тела лежит в экваториальной плоскости (плоскость Лапласа).

Временное уравнение геодезической (5.11) в экваториальной плоскости имеет тот же вид, что и в метрике Шварцшильда. Его решение

$$m = E \sqrt{r/c^2} \sqrt{r - r_g}, \quad (5.15)$$

где E/c^2 — постоянная интегрирования.

Уравнение (5.13) можно представить следующим образом:

$$\frac{dp^3}{d\tau} + \frac{2r(r - r_g)^2 - r_g a^2}{r(r - r_g)[r(r - r_g) + a^2]} p^3 \frac{dr}{d\tau} + \\ + \frac{a r_g}{r \sqrt{r(r - r_g)}} \frac{m}{[r(r - r_g) + a^2]} \frac{dr}{d\tau} = 0.$$

Подставляя сюда m из (5.15) и деля уравнение на $dr/d\tau$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dp^3}{dr} + \frac{2r(r - r_g)^2 - r_g a^2}{r(r - r_g)[r(r - r_g) + a^2]} p^3 + \frac{E a r_g}{c^2 r(r - r_g)[r(r - r_g) + a^2]} = 0. \quad (5.16)$$

Его решение получаем в виде

$$p^3 = E a r_g [1 + C_2 (r - r_g)] / c^2 r [r(r - r_g) + a^2], \quad (5.17)$$

где C_2 — постоянная интегрирования. Потребуем, чтобы (5.17) при $a=0$ переходило в ранее найденное (4.29) для метрики Шварцшильда. Из этого условия находим:

$$C_2 = \sigma m_0 c^2 / E a r_g,$$

где σ — постоянная ($\sigma = \sigma_0/c$; σ_0 — удвоенная секторная скорость), использованная в § 4.2. В результате получаем в экваториальной плоскости метрики Керра аналог закона сохранения момента количества движения

$$[r^2(1 - r_g/r) + a^2] p^3 = \sigma m_0(1 - r_g/r) + (Ea/c^2) r_g/r. \quad (5.18)$$

Знак модуля у второго члена справа зависит от соотношения направлений вращения источника и пробного тела (знаки совпадают, если a и σ одинаково направлены).

Вместо непосредственного решения радиального уравнения геодезической (5.14) проще исходить из выражения для квадрата интервала (5.1). Умножая обе части (5.1) на $m_0^2/ds^2 = m^2/d\tau^2$, при $\theta = \pi/2 = \text{const}$, приходим к соотношению

$$m_0^2 = m^2 - \frac{r^2}{r(r - r_g) + a^2} (p^1)^2 - \frac{r[r(r - r_g) + a^2]}{r - r_g} (p^3)^2 = 0. \quad (5.19)$$

Произведя с помощью (5.18) переход от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ , находим:

$$p^1 = m \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = - \frac{[\sigma m_0(1 - r_g u) + (Ea/c^2) r_g u]}{1 - r_g u + a^2 u^2} \frac{du}{d\varphi}, \quad (5.20)$$

где использовано обозначение $u = 1/r$. Подставляя (5.15), (5.18) и (5.20) в (5.19), приходим к обобщению на метрику Керра шварцшильдовского закона сохранения энергии (4.31) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} & [\sigma m_0(1 - r_g u) + (Ea/c^2) r_g u]^2 [(du/d\varphi)^2 + u^2(1 - r_g u + a^2 u^2)^2 / (1 - r_g u)] = \\ & = [E/c^4(1 - r_g u) - m_0^2] (1 - r_g u + a^2 u^2)^3. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Обсудим некоторые физические следствия этого уравнения, разлагая его в ряд по $r_g u$. Ограничимся величинами до второго порядка по $r_g u$ включительно. При этом, имея в виду свойство $a^2 < r_g^2$, будем считать $r_g u$ и au одного порядка. Кроме того, естественно положить $v^2/c^2 \sim r_g u$; $(E^2 - m_0^2 c^4)/m_0^2 c^4 \sim r_g u$. Тогда из (5.21) находим:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] & \approx \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{m_0^2 c^4} + r_g u \left[1 - \frac{2Ea(E^2 - m_0^2 c^4)}{m_0^3 c^6 \sigma} \right] - \\ & - r_g^2 u^2 \frac{2E^3 a}{m_0^3 c^6 \sigma} + u^3 \sigma^2 (r_g - 2a^2 u). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Продифференцировав (5.22) по u , запишем обобщение на случай метрики Керра ньютонова (координатного) закона гравитационного взаимодействия в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) & \approx \frac{r_g}{2} \left[1 - \frac{2Ea(E^2 - m_0^2 c^4)}{m_0^3 c^6 \sigma} \right] - \\ & - \frac{2E^3 a}{m_0^3 c^6 \sigma} r_g^2 u + \frac{3}{2} r_g u^2 \sigma^2 - 4a^2 u^3 \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Имея в виду, что первый справа член $r_g/2$ соответствует ньютоновой силе гравитационного притяжения; а предпоследний член —

Эйнштейновской «силе притяжения» [см. (4.32)], можно в силовой (координатной) интерпретации записать:

$$\mathcal{F}_{\text{гп}} = -k \frac{Mm}{r^2} \left(1 - \frac{2aE}{\sigma m_0 c^2} \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{8k^2 M^2 m}{r^3 c^2} \frac{a}{\sigma} - \frac{3kMm}{r^4} \sigma^2 + \frac{4a^2}{r^5} m \sigma^2 c^2, \quad (5.24)$$

т. е. появляются две керровские «силы», обратно пропорциональные r^3 и r^5 . Кроме того, в ньютонову силу притяжения входит дополнительный множитель, зависящий от вращения центрального тела и параметров движения пробного тела.

5.3. ДРЕЙФ ТОЧКИ ВСТРЕЧИ ДВУХ МОНОПОЛЬНЫХ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО КРУГОВЫМ ОРБИТАМ НАВСТРЕЧУ ДРУГ ДРУГУ (ЭФФЕКТ МИЦКЕВИЧА)

Эффект Мицкевича [87, 88] в хронометрической по отношению к координатам (5.1) системе отсчета. Будем исходить из радиального уравнения геодезической (5.14), которое для круговых экваториальных орбит ($v^1 = v^2 = 0$; $\theta = \pi/2$) с учетом (5.15) можно представить в виде

$$[2r(r - r_g)^2 - r_g a^2] (p^3)^2 + 2r_g a E p^3 - E^2 r_g = 0. \quad (5.25)$$

Решая это квадратное уравнение относительно импульса p^3 , имеем:

$$p_{\pm}^3 = \pm (E_{\pm}/c^2) \sqrt{r_g/2r} / [(r - r_g) \pm a \sqrt{r_g/2r}]. \quad (5.26)$$

Здесь учтено, что интеграл энергии E_{\pm} различен для частиц, движущихся по орбитам с одним и тем же значением r , но в противоположных направлениях. Подставляя в $p_{\pm}^3 = m_{\pm} d\varphi_{\pm}/d\tau$ еще раз (5.15), находим:

$$d\varphi_{\pm}/d\tau = \pm \sqrt{(r_g/2)(r - r_g)}/r [(r - r_g) \pm a \sqrt{r_g/2r}]. \quad (5.27)$$

Интегрируя, получаем точные выражения для периодов обращения частиц вокруг источника:

$$T_{\pm} = (2\pi r/c \sqrt{(r_g/2)(r - r_g)}) [(r - r_g) \pm a \sqrt{r_g/2r}]. \quad (5.28)$$

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета период обращения частицы, движущейся в направлении вращения источника (T_+), больше, чем период обращения частицы, движущейся в противоположном направлении (T_-). Разность периодов

$$T_+ - T_- = 4\pi a/c \sqrt{1 - r_g/r} \quad (5.29)$$

определяется характеристикой a центрального источника. Следует особо подчеркнуть, что эта величина в основном приближении не зависит ни от радиуса круговой орбиты, ни от массы источника,

ни от гравитационной постоянной. Это существенно новое качество гравитационного эффекта, присущее метрике Керра.

Подсчитаем угол $\Delta\varphi$ смещения (дрейфа) точки встречи пробных частиц (рис. 12). Частица, движущаяся в направлении вращения источника, будет отставать.

Очевидно, что встреча частиц произойдет через время

$$t = 1/(v_+ + v_-) = T_+ T_- / c(T_+ + T_-).$$

Угол смещения точки встречи от угла $\varphi = \pi$ равен:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \omega_+ \left(\frac{T_+}{2c} - t \right) = \frac{\pi(T_+ - T_-)}{T_+ + T_-} = \\ &= \frac{a\pi}{r} \frac{\sqrt{r_g/2r}}{(1 - r_g/r)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

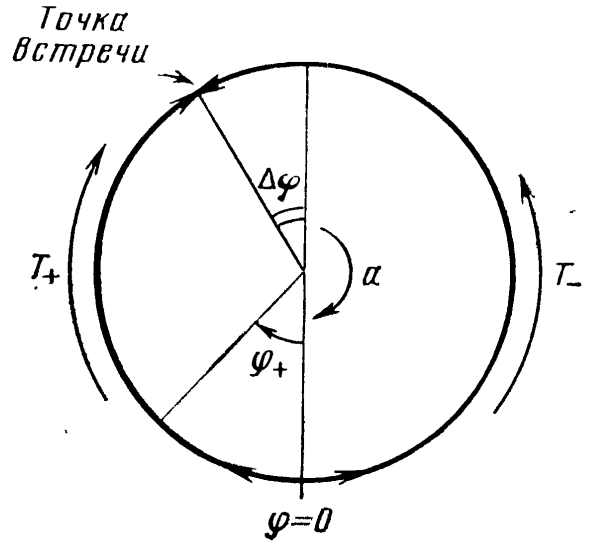


Рис. 12. Эффект Мицкевича. Дрейф точки встречи пробных частиц на круговых орбитах

Легко убедиться, что при $a=0$ периоды обращения двух частиц (5.28) одинаковы и совпадают со значением T в метрике Шварцшильда, а в основном приближении по r_g/r представляют собой период обращения в теории Ньютона $T_0 = 2\pi r/c \sqrt{r_g/2r} = 2\pi r/v_0$, где $v_0 = \sqrt{kM/r}$ — линейная скорость движения точки по круговой орбите в ньютоновом гравитационном поле.

Как уже отмечалось, в метрике Керра интегралы энергии E_{\pm} и момента σ_{\pm} для частиц, вращающихся в разные стороны по круговым орбитам с одним и тем же r , различны. Подсчитаем эти величины. Чтобы найти E_{\pm} , воспользуемся соотношением (5.19), следующим из выражения для квадрата интервала. Для круговых орбит при учете (5.15) оно имеет вид:

$$[r(r - r_g) + a^2](p^3)^2 - [E_{\pm}^2/c^4 - m_0^2(1 - r_g/r)] = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$p_{\pm}^3 = \pm \sqrt{\frac{E_{\pm}^2/c^4 - m_0^2(1 - r_g/r)}{r(r - r_g) + a^2}}. \quad (5.31)$$

Приравнивая друг другу выражения (5.26) и (5.31), находим:

$$E_{\pm}^2 = m_0^2 c^4 \frac{[1 - r_g/r \pm (a/r) \sqrt{r_g/2r}]^2}{1 - (3/2) r_g/r \pm (a/r) \sqrt{2r_g/r}}. \quad (5.32)$$

Как легко убедиться, при $a=0$ отсюда следует, что $E^2 \approx \approx m_0^2 c^4 [1 - (1/2) r_g/r]$, а это соответствует известному выражению для интеграла энергии, если учесть, что в ньютоновом поле квадрат линейной скорости на круговой орбите $v_0^2 = kM/r$.

Для нахождения константы σ_{\pm} следует сопоставить (5.18) и (5.26), откуда получаем:

$$\sigma_{\pm} = \pm \frac{E_{\pm}}{m_0 c^2} \sqrt{\frac{r_g}{2r} \frac{[(r^2 + a^2) \mp ar \sqrt{2r_g/r}]}{[(r - r_g) \pm a \sqrt{r_g/2r}]}} , \quad (5.33)$$

где E_{\pm} определяется формулой (5.32).

Эффект Мицкевича в кинеметрической по отношению к координатам (5.1) системе отсчета. В этом случае также различны периоды обращения частиц, вращающихся по одинаковым круговым орбитам в противоположные стороны. Учитывая формулы (5.6) — (5.9), как в предыдущем случае, находим:

$$T_{\pm} = \frac{2\pi}{c} \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - r_g r}}{\sqrt{(r_g/2) [r + (a^2/r^2) (r + r_g)]}} \left(r \pm a \sqrt{\frac{r_g}{2r}} \right). \quad (5.34)$$

Таким образом, в кинеметрической системе отсчета частица, движущаяся в направлении вращения центрального источника, опять имеет больший период, т. е. отстает. Разность периодов

$$T_+ - T_- = 4\pi a \sqrt{r(r^2 + a^2 - r_g r)} / c \sqrt{r(r^2 + a^2) + r_g a^2} \quad (5.35)$$

в основном приближении, как и в хронометрической системе отсчета, не зависит ни от радиуса орбиты, ни от массы центрального источника, ни от гравитационной постоянной. Различия в эффектах дрейфа точки встречи частиц в рассматриваемых двух системах отсчета проявляются в более высоких порядках по r_g/r .

5.4. ЭФФЕКТ ШИФФА

Рассмотрим эффект, предсказанный Шиффом [89]. Суть его состоит в том, что ось гироскопа, выведенного спутником на круговую орбиту вокруг вращающегося источника гравитационного поля (например, вокруг Земли), в системе отсчета спутника будет прецессировать с некоторой угловой скоростью Ω , зависящей от радиуса R круговой орбиты гироскопа, его орбитальной скорости v и параметров центрального источника (массы M , угловой скорости вращения ω и момента инерции I). Заметим, что в теории гравитации Ньютона сферический гироскоп прецессировать не должен.

Угловую скорость прецессии оси гироскопа найдем, опираясь на уравнения Матиссона — Папапетру в монадном виде (3.61) — (3.63) (с дополнительным условием Кориалдези) [67]. Более того, будем считать, что орбита движения центра спутника (представляющей точки) задана, так что используем лишь уравнение (3.63). Задачу будем решать в четыре этапа.

1. Проанализируем и решим уравнение Матиссона — Папапетру (3.63) в самом общем виде в системе отсчета, сопутствующей представляющей точке гироскопа. Заметим, что таких систем

отсчета бесконечно много. Общим свойством этих систем является лишь то, что их конгруэнциям принадлежит мировая линия представляющей точки.

2. Выразим угловую скорость прецессии оси гироскопа в сопутствующей системе отсчета через параметры произвольной второй системы отсчета (угловую скорость вращения, ускорение и относительную скорость).

3. Конкретизируем вид сопутствующей гироскопу системы отсчета. Выберем жестко вращающуюся систему.

4. Конкретизируем вторую систему в используемой метрике Керра (выберем хронометрическую систему отсчета в координатах Бойера — Линдквиста). Тем самым угловая скорость прецессии оси гироскопа в сопутствующей жестко вращающейся системе отсчета окажется выраженной через скорость этой системы относительно одной из наиболее употребительных систем отсчета в метрике Керра и параметры центрального источника.

1. В сопутствующей системе отсчета $v^\sigma = 0$, следовательно, уравнение Матиссона — Папапетру (3.63) существенно упрощается:

$$dS_0^{\mu\nu}/d\tau \equiv \partial_T S_0^{\mu\nu} = -S_0^{\lambda\nu} \left(A_{0\lambda}^\mu - D_{0\lambda}^\mu \right) - S_0^{\mu\lambda} \left(A_{0\lambda}^\nu - D_{0\lambda}^\nu \right). \quad (5.36)$$

Здесь индекс нуль снизу означает, что величины взяты в сопутствующей системе отсчета. Введем длину вектора кинетического момента (тензора спина) $S_0 = \sqrt{h_{\mu\alpha} h_{\nu\beta} S_0^{\mu\nu} S_0^{\alpha\beta}}$, так что

$$(1/2) (d/d\tau) S_0^2 = S_{0\mu\nu} \partial_T S_0^{\mu\nu} - D_{0\mu\alpha} S_0^\mu S_0^{\alpha\beta} - D_{0\nu\beta} S_0^\nu S_0^{\alpha\beta}. \quad (5.37)$$

Умножая (5.36) внутренним образом на $S_{0\mu\nu}$ и учитывая (5.37), получаем, что в сопутствующей системе отсчета длина тензора кинетического момента не меняется. Переходя к сопряженному вектору кинетического момента $S_0^\mu = (1/2) e^{\mu\alpha\beta} S_{0\alpha\beta}$, находим, что все изменение S_0^μ сводится к его прецессии с угловой скоростью

$$\Omega_0^\mu = - (1/2) e^{\mu\alpha\beta} A_{0\alpha\beta}. \quad (5.38)$$

Следовательно, угловая скорость прецессии оси гироскопа в сопутствующей системе отсчета равна по значению и противоположна по знаку угловой скорости вращения сопутствующей системы отсчета.

2. Соотношение между тензорами угловых скоростей вращения двух систем отсчета описывается формулой (3.126). Перейдем от

тензора угловой скорости к сопряженному вектору $A^\mu = (1/2) e^{\mu\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$. Умножая соотношение (3.126) на

$$-(\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}/2 \sqrt{-g})^{(2)} \tau_\lambda = -(\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}/2 \sqrt{-g})^{(1)} (\tau_\lambda + v_\lambda) / \sqrt{1-v^2}$$

и учитывая (5.38), находим:

$$\begin{aligned} \Omega_0^\mu = (1/\gamma^2) [& -A^\mu + \tau^\mu A^\lambda v_\lambda + (\tau^\mu/2) e^{\lambda\alpha\beta} v_\lambda v_{\alpha,\beta} - \\ & - (1/2) e^{\mu\alpha\beta} v_{\alpha,\beta} - (1/2) e^{\mu\alpha\beta} v_\lambda (F_\beta - \partial_T v_\beta)], \end{aligned} \quad (5.39)$$

где $\gamma = \sqrt{1-v^2} = \sqrt{1-h_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}$. Еще раз подчеркнем, что в формуле (5.39) пока не конкретизированы ни метрика, ни две сопоставляемые системы отсчета.

3. Из сопутствующих систем отсчета для круговой орбиты выберем такую, которая в метрике Керра имеет компоненты скорости $v^\mu = -h_3^\mu \dot{\omega}_0$ относительно хронометрической системы отсчета, соответствующей координатам Бойера — Линдквиста. Здесь ω_0 — постоянная угловая скорость кругового орбитального движения спутника с гироскопом. Используя формулы для составляющих метрического тензора в метрике Керра (5.3), находим компоненты скорости

$$\left. \begin{aligned} v^1 = v^2 = 0; \quad v^3 = \omega_0; \quad v^0 = -\omega_0 r_g r a \sin^2 \theta / (\rho^2 - r_g r); \\ v_1 = v_2 = 0; \quad v_3 = -\omega_0 \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \Delta / (\rho^2 - r_g r). \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Выбранную таким образом систему отсчета можно назвать жестко вращающейся, так как она удовлетворяет следующим условиям:

1) направления 3-мерных скоростей точек поперечного сечения параллельны в исходной системе отсчета. Это означает, что

$$\gamma^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\tilde{\nu}} (v_\lambda/v) = 0, \quad (5.41)$$

где $\gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu / v^2 \equiv h^{\mu\nu} - l^\mu l^\nu$ — метрический тензор 2-мерного поперечного сечения; $v^2 = h_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$; $l^\mu = v^\mu / v$;

2) мгновенные угловые скорости всех точек поперечного сечения одинаковы, т. е. $\gamma^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\tilde{\nu}} v = -\dot{v} \rho^\mu$, где $\rho^\mu = l^\alpha \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} l^\mu$ — 3-вектор первой кривизны представляющей точки во второй системе отсчета (исходной).

4. Системы отсчета уже конкретизированы в предыдущем пункте. Остается только подставить компоненты A_μ , F_μ , скорости (5.40) и производные от них в формулу (5.39). С помощью формул (5.3) — (5.5) находим точное выражение для угловой скорости прецессии:

$$\left. \begin{aligned}
\Omega_0^1 &= \frac{\Delta \cos \theta}{\gamma^2 \rho^2} \left[\frac{r_g r a}{\rho^2 (\rho^2 - r_g r)} - \omega_0 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - r_g r} \right)^{3/2} \times \right. \\
&\times \left. \left(1 - \frac{5}{2} \frac{r_g r}{\rho^2} + \frac{3}{2} \frac{r_g r \Delta}{\rho^4} + \frac{3}{2} \frac{r_g^2 r^2}{\rho^4} \right) \right]; \\
\Omega_0^2 &= \frac{r \sin \theta}{\gamma^2 \rho^2} \left\{ \frac{a}{\rho^2 - r_g r} - \omega_0 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - r_g r} \right)^{3/2} \times \right. \\
&\times \left. \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r_g r \Delta}{\rho^4} - \frac{r_g}{4r \rho^2} (r^2 + r_g r - 3a^2) \right] \right\}; \\
\Omega_0^3 &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Разложим эти компоненты в ряд, ограничиваясь членами порядка a/r , r_g/r и $r_g a/\omega_0 r^3$. Введя момент инерции I и угловую скорость собственного вращения ω центрального тела согласно равенству $Ma = I\omega$, получим наблюдаемые значения угловой скорости прецессии гироскопа:

$$\left. \begin{aligned}
\Omega_0(1) &\approx (\cos \theta / \gamma^2) (-\omega_0 + 2k\omega I / c^2 r^3); \\
\Omega_0(2) &\approx \frac{\sin \theta}{\gamma^2} \left(\omega_0 - \frac{3}{2} \frac{kM}{c^2 r} \omega_0 + \frac{k\omega I}{c^2 r^3} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Эта формула хорошо согласуется с приближенной формулой, полученной Шиффом [89]:

$$\Omega_0 \approx \frac{3}{2} \frac{kM}{c^2 r^3} [\mathbf{rv}] + \frac{1}{2c^2} [\mathbf{av}] + \frac{kI}{c^2 r^3} \left(\frac{3r(\boldsymbol{\omega r})}{r^2} - \boldsymbol{\omega} \right), \quad (5.44)$$

где \mathbf{a} — внешнее негравитационное ускорение.

Последний член в (5.44) соответствует последним членам в (5.43). Вклад этого слагаемого обычно называют прецессией Лензе — Тирринга или прецессией Шиффа. Он обусловлен угловой скоростью вращения A^μ хронометрической системы отсчета, соответствующей системе координат Бойера — Линдквиста.

Первый член в (5.44) соответствует второму члену в выражении для $\Omega_0(2)$ [см. (5.43)]. Это слагаемое обычно называют геодезической прецессией или прецессией де Ситтера. Оно определяется распределением скоростей сопутствующей системы отсчета относительно второй и ускорением последней [четвертый и пятый члены справа в формуле (5.39)].

Второй член в (5.44), описывающий прецессию Томаса, возникает при несвободном движении гироскопа уже в СТО.

Основное различие формул (5.43) и (5.44) состоит в наличии первых слагаемых (нулевого порядка) справа в (5.43). Эти слагаемые соответствуют кажущейся прецессии, обусловленной поворотом корпуса спутника при орбитальном движении, и возникают вследствие нашего выбора сопутствующей системы отсчета.

Другое различие состоит в множителе $1/\gamma^2 = 1/(1 - v^2)$, возни-

кающем из-за того, что у Шиффа дифференцирование производилось по координатному времени x^0 , а не по локальному времени неподвижной (второй) системы отсчета.

Наконец, запишем выражение для угла прецессии оси гироскопа $\Delta\alpha$ за один оборот при его движении в экваториальной плоскости:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c} \int_0^1 \Omega d\tau \approx 2\pi - \frac{2\pi kM}{c^2 r} + \frac{2\pi kI}{c^2 r^3} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (5.45)$$

где $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_\mu \Omega^\mu}$. Из этой формулы очевиден смысл членов нулевого порядка в (5.43).

5.5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОБНЫХ ТЕЛ НА КРУГОВЫХ ОРБИТАХ В МЕТРИКЕ КЕРРА

1. Эффект, основанный на разности частот малых колебаний пробных тел в двух взаимно перпендикулярных направлениях на экваториальной круговой орбите (эффект Широкова), в метрике Керра подсчитывается совершенно аналогично случаю метрики Шварцшильда (см. § 4.5). Основное различие состоит в появлении двух возможностей: а) вращение по круговой орбите происходит в направлении вращения источника и б) вращение в противоположном направлении. Опять будем различать эти возможности соответственно знаками плюс и минус. Опуская все промежуточные выкладки, приведем результат во вращающейся по круговой орбите системе отсчета [Rodichev S. V. Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups. Proc. Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Jena, Univ., 1980, p. 365]:

$$\omega_{1\pm} = \pm c\Omega (1 + 3r_g/4r_0 \mp 3a\Omega) \quad (5.46)$$

— частота колебаний в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, где $\Omega = \sqrt{r_g/2r_0^3}$;

$$\omega_{2\pm} = \pm c\Omega (1 - 3r_g/4r_0 \pm 3a\Omega) \quad (5.47)$$

— частота колебаний в плоскости орбиты;

$$\Delta T_{\pm} = (2\pi/c\Omega) (3r_g/2r_0 \mp 6a\Omega) \quad (5.48)$$

— разность периодов. Очевидно, при $a=0$ эти формулы совпадают соответственно с (4.62), (4.65) и (4.67).

2. Рассмотрим эффект крутильных колебаний маятника относительно платформы, вращающейся по «круговой» неэкваториальной орбите вокруг источника метрики Керра (Лензе — Тирринга) [Карпов О. Б., Родичев С. В. — Известия вузов. Сер. физ., 1982, № 1, с. 47]. Этот эффект обязан появлению в системе отсчета платформы периодических сил инерции, действующих на концы маятника.

Уравнение траектории (геодезической) центра масс платформы, вращающейся по орбите радиуса $r_0 = \text{const}$ и составляющей угол θ_0 с направлением момента источника, приближенно находится решением уравнений геодезической (или уравнений Гамильтона — Якоби, как в [9, с. 417]):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arcsin(\text{ctg } \theta / \text{ctg } \theta_0) + 2a\Omega^2 x^0; \\ \cos \theta &= \cos \theta_0 \cos \omega x^0, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

где $\omega = \pm \Omega(1 \mp 3a\Omega \sin \theta_0)$. Эти формулы описывают круговую орбиту, прецессирующую с угловой скоростью $2a\Omega^2 c$. Здесь мы пренебрегли членами, пропорциональными $a\Omega r_g / r_0$, и членами более высокого порядка.

Для перехода в систему отсчета вращающейся платформы произведем последовательно три преобразования координат, а именно:

а) переход к «следящей» за прецессией Лензе — Тирринга системе координат:

$$x'^0 = x^0; \quad r' = r; \quad \theta' = \theta; \quad \varphi' = \varphi - 2x^0 a \Omega^2; \quad (5.50)$$

б) поворот системы координат на угол $\pi/2 - \theta_0$:

$$\left. \begin{aligned} x''^0 &= x'^0; \quad r'' = r'; \\ \theta'' &= \arcsin(\cos \theta' \sin \theta_0 - \sin \theta' \sin \varphi' \cos \theta_0); \\ \varphi'' &= \arcsin(\text{tg } \varphi' \sin \theta_0 + \text{ctg } \theta' \cos \theta_0 / \cos \varphi') \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

(в этой системе координат платформа движется по экваториальной окружности с угловой скоростью $d\varphi''/dx^0 = \omega$);

в) переход к вращающейся системе координат с угловой скоростью ω :

$$x'''^0 = x''^0; \quad r''' = r''; \quad \theta''' = \theta''; \quad \varphi''' = \varphi'' - \omega x''^0. \quad (5.52)$$

В дальнейшем штрихи писать не будем.

Система отсчета вращающейся платформы является хронометрической по отношению к полученной таким образом системе координат. Вычислив моадные физико-геометрические тензоры, подставим их в уравнения (3.21) с вкладом негравитационных сил справа. С помощью этих уравнений рассмотрим крутильные колебания маятника, представляющего собой невесомый стержень с расположенными на концах одинаковыми массами. Представляет интерес поведение маятника при двух ориентациях, когда возникают его вынужденные колебания, причем будем полагать, что его отклонения от положения равновесия малы.

1. Пусть в положении равновесия маятник ориентирован вдоль радиуса и пусть его ось закреплена так, что он имеет возможность отклоняться только в плоскости, перпендикулярной плоскости движения платформы (колебания по углу θ). Пренебрегая в соответствующем уравнении мировой линии членами второго по-

рядка малости, имеем для угла отклонения от положения равновесия:

$$d^2\xi/d\tau^2 + 2\lambda d\xi/d\tau + (K + \tilde{\omega}^2)\xi = \pm 12c^2a\Omega^3 \cos\theta_0 \sin\tilde{\omega}\tau, \quad (5.53)$$

где

$$\tilde{\omega} = \omega x^0/\tau = \pm \Omega(1 + 3r_g/4r_0 \mp 3a\Omega \sin\theta_0) \quad (5.54)$$

— угловая скорость вращения платформы в собственной системе отсчета платформы, совпадающая при $\theta_0 = \pi/2$ с (5.46); K и λ — соответственно коэффициенты упругости и трения.

2. Пусть маятник ориентирован в перпендикулярном плоскости вращения платформы направлении и имеет возможность отклоняться только в радиальном направлении. Тогда для угла отклонения имеем уравнение

$$d^2\zeta/d\tau^2 + 2\lambda d\zeta/d\tau + [K - 3c^2\Omega(1 + r_g/r_0 \mp 2a\Omega \sin\theta_0)]\zeta = \pm 6c^2a\Omega^3 \cos\theta_0 \sin\tilde{\omega}\tau. \quad (5.55)$$

В иных ортогональных указанным ориентациях маятника вынужденные колебания отсутствуют. По-видимому, описанные общерелятивистские эффекты можно обнаружить современной экспериментальной аппаратурой.

5.6. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА — МАКСВЕЛЛА ТИПА D

Для полноты картины в этой главе следует упомянуть о более общих, нежели метрика Керра, аксиально-симметричных стационарных решениях типа D по Петрову. Оказывается, наиболее общее «частицеподобное» (создаваемое частицей-центром) решение уравнений Эйнштейна—Максвелла (с космологическим членом) типа D содержит семь произвольных параметров [90]: m , n , a , b , q , g , Λ . Эти параметры обычно интерпретируют следующим образом: m — масса; n — параметр НУТ (Ньюмена, Унти, Тамбурино) (мнимая масса?); a — параметр, характеризующий вращение; b — ускорение; q — электрический заряд источника; g — магнитный заряд; Λ — космологическая постоянная. Часто говорят о зависимости метрик от четырех величин: $m+in$, $a+ib$, $q+ig$, Λ . К данному множеству метрик относятся решение Шварцшильда, метрики, рассмотренные в § 4.7, и др. (см. в [91]).

Выпишем несколько более общих решений.

1. Обобщением метрики Керра на случай электрически заряженного источника является метрика Керра—Ньюмена [92], зависящая от трех констант

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r - e_g^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dx_0^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r + e_g^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{(r_g r - e_g^2) a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2(r_g r - e_g^2) a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dx_0 d\varphi, \quad (5.56)$$

где $r_g = 2km/c^2$; $e_g = \sqrt{k} q/c^2$.

2. При обобщении метрики Шварцшильда на случай $n \neq 0$ получается решение НУТ [93]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}\right) \left(dx_0 + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{1 - (r_g r + 2n^2)/(r^2 + n^2)} - (r^2 + n^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.57)$$

3. Обобщением решения НУТ, зависящим от пяти констант, является метрика [94] (записана не в координатах Бойера—Линдквиста):

$$ds^2 = \Phi(r) \left(dx_0 + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{\Phi(r)} - (r^2 + n^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.58)$$

где $\Phi(r) = 1 - \frac{r_g r + 2n^2 + (8/3) \Lambda n^4}{r^2 + n^2} + \frac{q^2 + g^2}{r^2 + n^2} + \frac{\Lambda}{3} (r^2 + 5n^2)$.

4. Выпишем в координатах Бойера—Линдквиста метрику, которая так же обобщает решение НУТ, как метрика Керра обобщает метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + n^2 - 2an \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta}\right) dx_0^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + a^2 - r_g r - n^2} dr^2 - \frac{\sin^2 \theta (r^2 + a^2 + n^2)^2 - (r^2 + a^2 - r_g r - n^2) (a \sin^2 \theta + 2n \cos \theta)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} d\varphi^2 + \frac{2[2a \sin^2 \theta (r_g r/2 + n^2) - 2n (r^2 + a^2 - r_g r - n^2) \cos \theta]}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} dx_0 d\varphi - [r^2 + (n - a \cos \theta)^2] d\theta^2. \quad (5.59)$$

Глава 6

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СЕЧЕНИЯ И ВРЕМЯ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

6.1. ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

ОТО в принципе позволяет ставить и решать задачу описания всего физического мира — Вселенной как целого. При решении этой задачи, конечно, допускается экстраполяция наших представлений о природе пространства и времени далеко за пределы изученной области Вселенной. Однако изучение подобных задач необходимо, поскольку только это позволит ответить на вопрос, в какой степени такая экстраполяция правомерна, когда и каким образом следует изменить наши представления о природе мироздания.

Основу современной космологии составляют однородные изотропные космологические модели Фридмана [14, с. 320]. Сформулируем математически используемые предположения и общие свойства этих моделей.

Допустим, что материю Вселенной можно представить в виде сплошной среды наподобие пыли, когда в качестве отдельных пылинок рассматриваются галактики или даже скопления галактик. Кроме того, положим, что можно пренебречь рядом индивидуальных (пикулярных) движений пылинок и выбрать *сопутствующую* материи систему отсчета, т. е. такую, в которой приборы системы отсчета в целом можно считать движущимися одинаково с материальной средой (пылинками). В этом случае движение среды описывается характеристиками 3-мерных пространственных сечений сопутствующей системы отсчета. Допустим также, что сопутствующая система отсчета нормальная (среда не вращается), т. е. $A_{\mu\nu} = 0$. Тогда пространственно-временное многообразие допускает глобальное расщепление на совокупность пространственных сечений и время.

Условие *изотропности* пространственных сечений уже обсуждалось при выводе метрики Шварцшильда (см. § 4.1). Оно означает наличие трех пространственно-подобных векторов Киллинга, соответствующих симметрии пространственных сечений относительно поворотов вокруг избранной точки. При этом можно выбрать такую хронометрическую (кинеметрическую) систему координат, что см. (4.6)]

$$ds^2 = \tau_0^2 dx_0^2 - [h_{11}(x^0, x^1) dx_1^2 + b^2(x^0, x^1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.1)$$

Условие *однородности* означает существование еще трех линейно-независимых векторов Киллинга, соответствующих симметрии пространственных сечений относительно сдвигов из одной точки в любую другую. Таким образом, все точки каждого пространственного сечения сопутствующей системы отсчета равноправны, т. е. метрику можно записать в виде (6.1) с центром в любой точке.

Из уравнений Киллинга (4.4), используя линейную независимость трех векторов Киллинга $\xi_{(s)}^i$, находим, что $F_i \equiv \tau_0 \tau_{,i}^0 = 0$, т. е. система отсчета синхронная. Следовательно, τ_0 зависит лишь от координаты x^0 . Из проекций уравнений Киллинга (4.2) следует, что в однородных пространственных сечениях компоненты 3-мерного метрического тензора одинаково зависят от x^0 , т. е. $h_{ik} = a(x^0) b_{ik}(x^s)$. Преобразованиями координат $x'^0 = x'^0(x^0)$; $x'^1 = x'^1(x^1)$, не меняющими в использованной калибровке систему отсчета, метрику (6.1) можно привести к виду

$$ds^2 = a^2(x^0) \{dx_0^2 - [dx_1^2 + b^2(x^1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]\}, \quad (6.2)$$

т. е. компоненты составляющих метрического тензора:

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= 1/\tau^0 = a(x^0); & h_{11} &= 1/h^{11} = a^2(x^0); \\ h_{22} &= 1/h^{22} = a^2(x^0) b^2(x^1); & h_{33} &= 1/h^{33} = \\ &= a^2(x^0) b^2(x^1) \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что компоненты тензора скоростей деформаций представляются следующим образом:

$$D_{ik} = (1/2) \tau^0 h_{ik,0} = (\dot{a}/a^2) h_{ik}; \quad D = -D_{ik} h^{ik} = -3\dot{a}/a^2, \quad (6.4)$$

где $\dot{a} = da/dx^0$.

Возьмем уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} = \kappa [T_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} T] - \Lambda g_{\mu\nu},$$

где в общем случае

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}; \quad (6.5)$$

p — давление среды; ρ — плотность материи в сопутствующей системе отсчета. Поскольку мы уже выбрали сопутствующую систему отсчета, $u^i = \tau^i = 0$ (материя неподвижна, «вморожена» в пространство). Используя (6.3), получаем необходимые проекции тензора энергии-импульса материи:

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu &= \rho c^2; & T_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^\nu &= p h_{ik}; \\ T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= \rho c^2 - 3p; & T_{ik} + (1/2) h_{ik} T &= (1/2) (\rho c^2 - p) h_{ik}; \\ \tau^\mu \tau^\nu [T_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} T] &= (1/2) (\rho c^2 + 3p). \end{aligned} \right\} (6.6)$$

Чтобы записать уравнения Эйнштейна в монадном виде, вычислим производные от тензора скоростей деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nabla}_k D_{il} &= (\dot{a}/a^2) \tilde{\nabla}_k h_{il} = 0; & \nabla_k D &= 0; \\ \partial_T D_{ik} &= (\ddot{a}/a^3) h_{ik}; & \partial_T D &= -(3/a^4) (\ddot{a}a - 2\dot{a}^2). \end{aligned} \right\} (6.7)$$

Используя формулы (6.4), (6.6), (6.7), находим уравнения Эйнштейна (проекции, образованные посредством $\tau^\mu \tau^\nu$ и $h_i^\mu h_k^\nu$ соответственно) в виде

$$-(3/a^4) (\ddot{a}a - \dot{a}^2) = (\kappa/2) (\rho c^2 + 3p) - \Lambda; \quad (6.8)$$

$$(1/a^4) (\ddot{a}a + \dot{a}^2) h_{ik} + {}^3R_{ik} = (\kappa/2) (\rho c^2 - p) h_{ik} + \Lambda h_{ik}. \quad (6.9)$$

Остальные проекции уравнений Эйнштейна тождественно равны нулю.

Из уравнений (6.9) следует важное свойство однородных изотропных космологических моделей: тензор Риччи ${}^3R_{ik}$ 3-мерных пространственных сечений сопутствующей системы отсчета пропорционален метрическому тензору h_{ik} этих сечений.

6.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СЕЧЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ, ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ И НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Прежде чем решать уравнения Эйнштейна (6.8), (6.9), проанализируем однородные изотропные пространственные сечения, опираясь на их установленное свойство

$${}^3R_{ik} = Bh_{ik}, \quad (6.10)$$

где $B(x^0)$ — функция, не зависящая от пространственных координат. Учитывая, что в пространствах трех измерений тензор Римана — Кристоффеля выражается через тензор Риччи и скалярную кривизну

$${}^3R^i{}_{jkl} = h_l^i {}^3R_{jk} - h_k^i {}^3R_{jl} + h_{jk} {}^3R_l^i - h_{jl} {}^3R_k^i - (1/2)(h_l^i h_{jk} - h_k^i h_{jl}) {}^3R, \quad (6.11)$$

находим, что все компоненты тензора Римана — Кристоффеля алгебраически определяются функцией $B(x^0)$ и компонентами метрического тензора h_{ik} :

$$\left. \begin{aligned} {}^3R^i{}_{jkl} &= (1/2) B (h_l^i h_{jk} - h_k^i h_{jl}); \\ {}^3R_{ik} &= Bh_{ik}; \quad {}^3R = -3B. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

В зависимости от знака B будем различать пространственные сечения (пространства) трех типов:

а) *постоянной* (в смысле пространственных координат) *положительной кривизны*, если $B > 0$;

б) *постоянной* (в том же смысле) *отрицательной кривизны*, если $B < 0$;

в) *нулевой кривизны*, если $B = 0$.

Очевидно, что пространства разных типов могут различаться лишь видом функции $b(x^1)$ в сферически-симметричной метрике [согласно (6.2)]

$$dl^2 = a^2 [dx_1^2 - b^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.13)$$

Выясним, каковы эти функции. Учтем, что отличны от нуля только следующие компоненты коэффициентов связности:

$$\left. \begin{aligned} L_{12}^2 &= L_{13}^3 = b'/b; \quad L_{23}^3 = \text{ctg } \theta; \quad L_{22}^1 = -bb'; \\ L_{33}^1 &= -bb' \sin^2 \theta; \quad L_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

где штрих означает дифференцирование по x^1 . Подставляя (6.14) в (6.10), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -(2/b) b'' &= Ba^2; \\ 1 - b'^2 - bb'' &= a^2 b^2 B, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

откуда следует уравнение для $b(x^1)$:

$$b''b - b'^2 + 1 = 0. \quad (6.16)$$

Возможны решения этого уравнения трех видов:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (1/C_1) \sin(C_1 x^1 + C_2); \\ b_2 &= (1/C_1) \text{sh}(C_1 x^1 + C_2); \quad b_3 = \pm x^1 + C_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. С помощью, например,

первого уравнения из (6.15) находим, что первое решение соответствует пространствам положительной кривизны:

$$B = 2/a^2 > 0 \leftrightarrow b_1 = (1/C_1) \sin(C_1 x^1 + C_2); \quad (6.18a)$$

второе решение соответствует пространствам отрицательной кривизны

$$B = -(2/a^2) < 0 \leftrightarrow b_2 = 1/C_1 \operatorname{sh}(C_1 x^1 + C_2); \quad (6.18б)$$

третье решение — пространствам нулевой кривизны:

$$B = 0 \leftrightarrow b_3 = \pm x^1 + C_2. \quad (6.18в)$$

Исследуем геометрические свойства этих пространств.

а. Пространства постоянной положительной кривизны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 [dx_1^2 + \sin^2 x_1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (6.13a)$$

где без ущерба общности принято $C_1=1$, $C_2=0$. Параметр x^1 может изменяться в пределах $0 \leq x^1 \leq \pi$.

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат, характеризуемые параметрами x^1 и $\theta=\pi/2$, соответственно равны $l=2\pi a \sin x^1$, $S=4\pi a^2 \sin^2 x^1$. При увеличении x^1 они сначала растут, достигают максимальных значений ($l_{\max}=2\pi a$, $S_{\max}=4\pi a^2$), затем уменьшаются до нуля. Радиус $r(x^1)$ окружности или сферы, соответствующий параметру x^1 , равен ax^1 . Его максимальное значение $r_{\max}=\pi a$. Отношение длины окружности к радиусу $l/r=2\pi \sin x^1/x^1 < 2\pi$.

Таким образом, в данном случае мы имеем дело с геометрией на 3-мерной сфере с радиусом a в 4-мерном евклидовом пространстве. Объем всего 3-мерного пространства конечен:

$$V = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 x^1 \sin \theta dx^1 d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3.$$

По этой причине такие пространства обычно называют замкнутыми или конечными*.

б. Пространства постоянной отрицательной кривизны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 [dx_1^2 + \operatorname{sh}^2 x_1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (6.13б)$$

где опять принято $C_1=1$, $C_2=0$. Параметр x^1 теперь может изменяться в пределах $0 \leq x_1 < \infty$.

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат и с параметрами x^1 , $\theta=\pi/2$ равны: $l=2\pi a \operatorname{sh} x^1$, $S=$

* Геометрию таких замкнутых пространств развил Риман. Она явилась вторым (после геометрии Лобачевского) примером неевклидовых геометрий. Геометрию 3-мерных пространств постоянной положительной кривизны часто называют римановой геометрией (в узком смысле). Возможность описания реального пространства такой сферической римановой геометрией подробно обсуждал Клиффорд [14, с. 38], а затем Мах [14, с. 73] задолго до создания ОТО.

$= 4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 x^1$. При увеличении x^1 они изменяются от нуля до бесконечности. По-прежнему $r = ax^1$ и может иметь сколь угодно большое значение; $l/r = 2\pi \operatorname{sh} x^1/x^1 > 2\pi$. Объем пространства бесконечен. По этой причине пространства постоянной отрицательной кривизны называют открытыми. Они описываются геометрией Лобачевского*, которую можно рассматривать как геометрию на гиперboloиде в 4-мерном евклидовом пространстве, отчего ее часто называют гиперболической.

в. Пространства нулевой кривизны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 [dx_1^2 + x_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (6.13в)$$

т. е. являются плоскими или евклидовыми пространствами с хорошо известными свойствами. Напомним, что в евклидовом пространстве $l/r = 2\pi$.

6.3. ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ

Вернемся к 4-мерному пространству-времени, описываемому уравнениями (6.8), (6.9), где космологическая постоянная Λ может быть положительной, отрицательной и нулевой. Кроме того, возможны пространственные сечения трех типов. Итого, мы имеем девять возможных вариантов моделей однородной изотропной Вселенной. Сюда следует добавить различные виды уравнений состояния материи (соотношений между p и ρ). Рассмотрим подробнее несколько из этих вариантов:

а. Закрытая модель Фридмана [14, с. 320] соответствует условиям $B = 2/a^2 > 0$; $\Lambda = 0$; $p = 0$. В этом случае уравнения (6.8), (6.9) принимают вид:

$$-(3/a^4) (\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \kappa \rho c^2/2; \quad (6.19a)$$

$$(1/a^4) (\ddot{a}a + \dot{a}^2) + 2/a^2 = \kappa \rho c^2/2. \quad (6.20a)$$

Вычитая одно уравнение из другого, находим:

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + a^2 = 0. \quad (6.21a)$$

Произведя замену $\dot{a}^2 = z(a)$, получаем решение

$$z(a) = (C_1 - a)a; \quad a = (C_1/2) [1 - \sin(C_2 + x^0)],$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Выбирая C_2 так, чтобы при $x^0 = 0$ было $a = 0$, т. е. $C_2 = \pi/2$, и обозначая $C_1/2 = a_0$, имеем:

* Геометрия 3-мерных пространств постоянной отрицательной кривизны была развита Н. И. Лобачевским (и независимо чуть позже Я. Бойаи и Гауссом) и явилась первым примером неевклидовых геометрий. Она возникла в результате отказа от пятого постулата Евклида.

$$a = a_0 (1 - \cos x^0). \quad (6.22a)$$

Интервал времени $d\tau$ определяется параметром x^0 : $d\tau = adx^0$. Отсюда находим изменение времени через параметр x^0 :

$$\tau = a_0 (x^0 - \sin x^0). \quad (6.23a)$$

Уравнения (6.22a) и (6.23a) определяют в плоскости (a, τ) циклоиду в параметрическом виде. Таким образом, полученное решение описывает модель с закрытыми пространственными сечениями, радиус кривизны которых «пульсирует» во времени.

Плотность материи получаем, например, из (6.19a):

$$\rho = 6/\kappa a_0^2 c^2 (1 - \cos x^0)^3. \quad (6.24a)$$

При $x^0 = 0, 2\pi \dots$ (моменты времени $\tau = 0, 2\pi a_0 \dots$) плотность материи становится бесконечной, т. е. имеют место особенности. Это говорит о том, что правомерно рассматривать только один цикл циклоиды. Около особых точек, по-видимому, выводы ОТО теряют силу. Следует ожидать, что вблизи них при сверхплотных состояниях материи доминируют закономерности квантовой теории и физики элементарных частиц.

б Открытая модель Фрийдмана [14, с. 330] соответствует условиям $B = -2/a^2 < 0$; $\Lambda = 0$; $p = 0$. Учитывая их, уравнения (6.8), (6.9) можно записать в виде

$$-(3/a^4) (\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \kappa \rho c^2 / 2; \quad (6.19б)$$

$$(1/a^4) (\ddot{a}a + \dot{a}^2) - 2/a^2 = \kappa \rho c^2 / 2. \quad (6.20б)$$

Из них получаем уравнение для $a(x^0)$

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 - a^2 = 0. \quad (6.21б)$$

Решение имеет вид:

$$a = (C_1/2) \{ (1/2) [C_2 \exp x_0 + (1/C_2) \exp (-x_0)] - 1 \},$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Выбирая $C_2 = 1$ и обозначая $C_1/2 = a_0$, находим зависимость $a(\tau)$ в параметрическом виде

$$a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad (6.22б)$$

$$\tau = a_0 (\operatorname{sh} x^0 - x^0). \quad (6.23б)$$

Выбирая область изменения x^0 : $-\infty < x^0 \leq 0$, приходим к сжимающейся открытой модели Фрийдмана. При $0 \leq x^0 < \infty$ получаем расширяющуюся открытую модель Фрийдмана. Из уравнения (6.19б) находим закон изменения плотности материи:

$$\rho = 6/\kappa a_0^2 c^2 (\operatorname{ch} x^0 - 1)^3. \quad (6.24б)$$

При $\tau \rightarrow 0$ ($x^0 \rightarrow 0$) плотность материи, как и в закрытой модели, стремится к бесконечности. По-видимому, опять в рамках клас-

сической ОТО неправомерно рассматривать области в окрестности сингулярности.

в. Статический цилиндрический мир Эйнштейна [14, с. 287] явился первой космологической моделью Вселенной, построенной на основе ОТО. Этой модели соответствуют условия $\dot{a}=0$ (статичность); $\Lambda \neq 0$; $p=0$. Подставляя эти условия в (6.8) и (6.9), находим:

$$0 = \kappa r c^2 / 2 - \Lambda; \quad (6.19в)$$

$$B = \kappa r c^2 / 2 + \Lambda. \quad (6.20в)$$

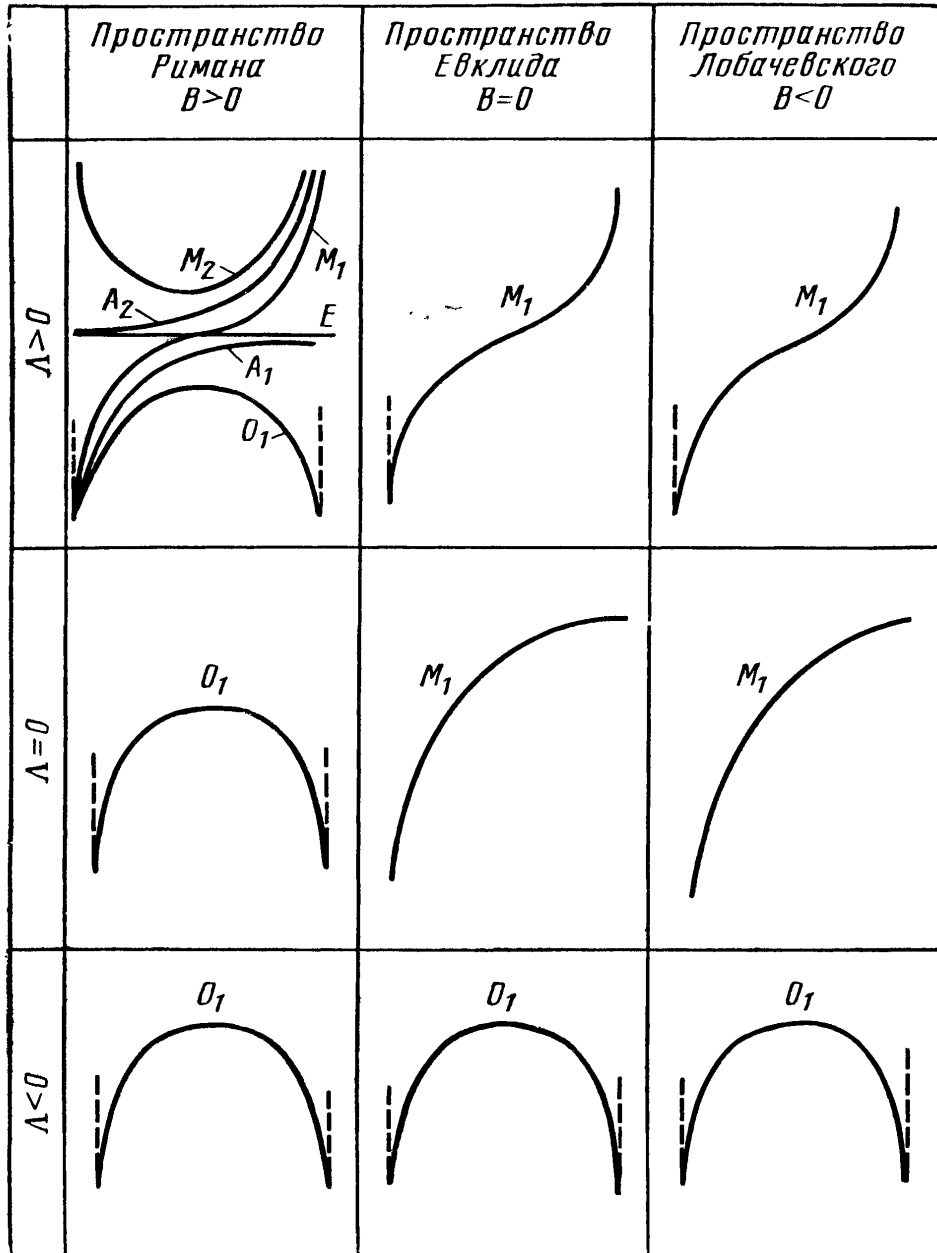


Рис. 13. Однородные изотропные космологические решения

Из (6.19в), (6.20в) получаем, что пространственное сечение в этой модели имеет положительную постоянную кривизну (закрытая модель):

$$B = 2/a^2 = \kappa r c^2 > 0; \quad \Lambda > 0; \quad a = \text{const};$$

кроме того,

$$\rho = 2/\kappa c^2 a^2 = 2\Lambda/\kappa c^2; \quad \Lambda = 1/a^2. \quad (6.24в)$$

Учитывая, что объем мира конечен, легко подсчитать массу всей материи в модели мира Эйнштейна:

$$M = \rho V = 4\pi^2 a/\kappa c^2. \quad (6.25)$$

г. Метрика де Ситтера [14, с. 299]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 + \Lambda r^2/3} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.26)$$

описывает пустой мир (без материи). Эту метрику можно рассматривать как частный случай решения Коттлера (4.87).

д. Прочие однородные изотропные модели Вселенной. Не приводя подробных выкладок, изобразим (рис. 13) эволюцию во времени всех девяти возможных вариантов однородных изотропных моделей, причем с учетом обсуждаемых далее данных наблюдений укажем лишь те модели, которые хотя бы на отдельных этапах описывают расширение Вселенной. На всех графиках по оси ординат отложены значения a , а по оси абсцисс значения τ .

Сделаем несколько замечаний.

1. Статическое состояние однородной изотропной Вселенной невозможно (при $\Lambda \leq 0$) или оказывается неустойчивым (при $\Lambda > 0$ — в модели Эйнштейна).

2. Отрицательная космологическая постоянная соответствует, если можно так выразиться, усилению космического притяжения, что приводит к неизбежности замены расширения сжатием.

3. Положительная космологическая постоянная соответствует некоему космическому отталкиванию.

4. При $\Lambda > 0$, $B > 0$, как видно из рис. 13, имеется несколько возможностей: неустойчивое статическое состояние, описываемое моделью Эйнштейна; ускоренное расширение от неустойчивого статического состояния; замена сжатия расширением; замедленное расширение; замена расширения сжатием (аналог закрытой модели Фридмана); извечное расширение от сингулярного состояния сначала с замедлением, а затем с ускорением.

6.4. ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕЧЕНИЙ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОТ ВЫБОРА СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В ОТО характер пространственных сечений в космологических моделях — их конечность или бесконечность — существенно зависит от используемой системы отсчета. В предыдущих параграфах этой главы речь шла о характере пространственных сечений в сопутствующих системах отсчета. Оказывается, переход к иным системам отсчета в рамках одной космологической модели может означать переход от конечных пространственных сечений к бесконечным и наоборот, т. е. свойство конечности или бесконечности

3-мерного пространства в ОТО не является инвариантным понятием, а всегда должно рассматриваться в связи с используемой системой отсчета [95—97].

На первый взгляд это может показаться парадоксальным, особенно если иметь в виду привычное нам бесконечное плоское пространство Галилея—Ньютона или пространство СТО. Однако в этих теориях пространственно-временное многообразие достаточно простое и, кроме того, в них использовался класс равноправных во всех отношениях инерциальных систем отсчета. В ОТО ситуация значительно сложнее из-за возможности существования множества пространственно-временных многообразий и широкого класса возможных систем отсчета. Уже сравнительно узкое множество однородных изотропных космологических моделей вполне позволяет убедиться в зависимости характера пространственных сечений от используемых систем отсчета.

Под объемом пространства следует понимать сумму объемов локальных пространственных сечений, ортогональных конгруэнции мировых линий системы отсчета. Определение объема особенно просто в случае нормальных конгруэнций. Очевидно, что при переходе к иным конгруэнциям вследствие отличных от нуля относительных скоростей систем отсчета происходит лоренцово сокращение длин, а это приводит, вообще говоря, к изменению объема пространственного сечения. Оказывается, изменение может быть настолько существенным, что изменится сам характер конечности или бесконечности исходного пространственного сечения.

Рассмотрим кратко, какие возможности изменения характера пространственных сечений предоставляет нам множество однородных изотропных космологических моделей. Прежде всего, следует различать два класса моделей.

I. 4-Мерный объем модели конечен. К этому классу относятся модели с пространствами положительной кривизны (конечные) в сопутствующей системе отсчета и имеющие конечное время эволюции — модели типа O_1 на рис. 13 при любых значениях космологической постоянной. Можно показать [95, 97], что в любой системе отсчета пространственные сечения таких моделей имеют конечные объемы, т. е. являются *абсолютно замкнутыми*.

II. 4-Мерный объем модели бесконечен. К этому классу относятся все остальные модели, изображенные на рис. 13. В сопутствующих системах отсчета в них бесконечны либо время эволюции, либо объем пространственного сечения, либо и то и другое. Здесь следует различать четыре частных случая.

1. В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения конечны, время существования моделей бесконечно и в процессе эволюции их пространственные объемы не могут стать как угодно большими. К этому случаю относятся модели A_1 и E (эйнштейновский статический мир) при $V > 0$ и $\Lambda > 0$. Показано [97], что в этих моделях пространственные сечения также *абсолютно замкнуты*.

В остальных трех случаях характер пространственных сечений зависит от выбора системы отсчета.

2. В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения конечны, время существования моделей бесконечно и в процессе эволюции их пространственные объемы становятся как угодно большими (модели A_2 и M_2 при $B > 0$ и $\Lambda > 0$). Проиллюстрируем зависимость замкнутости пространственного сечения от системы отсчета на конкретной модели [95]. Возьмем модель типа A_2 мира, заполненного излучением, давление которого $p = (1/3)\rho c^2$, где ρc^2 — плотность энергии излучения. Метрика этой модели в хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета имеет вид:

$$ds^2 = \frac{3}{2\Lambda} \left[\frac{1 + \exp(\sqrt{2} x^0)}{1 - \exp(\sqrt{2} x^0)} \right]^2 [dx_0^2 - dx_1^2 - \sin^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.27)$$

Очевидно, пространственные сечения в этой системе отсчета конечны. Перейдем к новой системе отсчета. Для этого сделаем преобразование координат: $\operatorname{tg} x^0 = \operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1$; $\operatorname{tg} x^1 = \operatorname{sh} y_1 / \operatorname{ch} y_0$. В новой системе координат метрика принимает вид:

$$ds^2 = \frac{3}{2\Lambda} \left\{ \frac{1 + \exp[\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)]}{1 - \exp(\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)} \right\}^2 \times \\ \times \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0} [dy_0^2 - dy_1^2 - \operatorname{sh}^2 y_1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.28)$$

Рассмотрим пространственные сечения хронометрической по отношению к новым координатам системы отсчета (уже не сопутствующей). Конгруэнция мировых линий новой системы отсчета является нормальной, т. е. имеет место глобальное 1+3-расщепление. Легко показать, что плотность импульса направлена к началу координат несопутствующей системы отсчета, т. е. пространство новой системы отсчета расширяется быстрее среды. Объем пространственного сечения

$$V = 4\pi \left(\frac{3}{2\Lambda} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left\{ \frac{1 + \exp[\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)]}{1 - \exp(\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)} \right\}^3 \frac{\operatorname{sh}^2 y_1 dy_1}{(\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0)^{3/2}}$$

бесконечен. Модель эволюционирует от $y_0 = -\infty$ до $y_0 = 0$. Время расширения модели

$$\tau = \left(\frac{3}{2\Lambda} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \frac{1 + \exp[\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)]}{1 - \exp[\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sh} y_0 / \operatorname{ch} y_1)]} \frac{dy_0}{(\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0)^{1/2}}$$

также бесконечно.

3. В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения имеют бесконечный объем, а время эволюции модели конечно (модели типа O_1 при $B \leq 0$ и $\Lambda < 0$). Проиллюстрируем зависи-

мость замкнутости пространственного сечения от системы отсчета опять на примере модели мира, заполненного излучением с $p = (1/3)\rho c^2$ [95]. В хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета метрика такой модели при $B < 0$ имеет вид:

$$ds^2 = a^2 \frac{\operatorname{sn}^2 bx^0}{\operatorname{dn}^2 bx_0} [dx_0^2 - dx_1^2 - \operatorname{sh}^2 x_1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (6.29)$$

где $0 < b = \operatorname{const}$; $\operatorname{sn} bx^0$ и $\operatorname{dn} bx^0$ — эллиптические функции Якоби, причем $0 \leq x^0 \leq 2K$; K — полный эллиптический интеграл:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - [|R_1^2| / (|R_1^2| - R_2^2)] \sin^2 \varphi}}.$$

Объем пространственных сечений в этой системе отсчета бесконечен. Произведем преобразование координат: $x^0 = \ln \sqrt{y_0^2 - y_1^2}$; $x^1 = \operatorname{Arth}(y_1/y_0)$. В новой системе координат метрика принимает вид:

$$ds^2 = a^2 \frac{\operatorname{sn}^2 \left(b \ln \sqrt{y_0^2 - y_1^2} \right)}{\operatorname{dn}^2 \left(b \ln \sqrt{y_0^2 - y_1^2} \right)} \frac{dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{y_0^2 - y_1^2}. \quad (6.30)$$

Модель эволюционирует в пределах $-1 < y_0 < \infty$. Область изменения y_1 определяется соотношением $\sqrt{y_0^2 - \exp(4K/b)} \leq y_1 \leq \sqrt{y_0^2 - 1}$. Пространственные сечения хронометрической по отношению к новым координатам системы отсчета имеют конечный объем.

Аналогичный пример можно привести для $B=0$ и $\Lambda < 0$.

4. В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения имеют бесконечный объем и время эволюции модели бесконечно. К этому случаю относятся модели типа M_1 с пространственными сечениями нулевой и отрицательной кривизны ($B \leq 0$) и с $\Lambda \geq 0$. Приведем два примера, иллюстрирующих зависимость конечности объема пространственных сечений от системы отсчета.

а. Модель мира с $B=0$ и $\Lambda=0$, заполненного пылевидной средой. В хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета метрика задается формулой

$$ds^2 = a_0^2 x_0^4 [dx_0^2 - dx_1^2 - x_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.31)$$

Объем пространственных сечений бесконечен. Преобразованием координат

$$x^0 = \frac{1 + y_1^2 - y_0^2}{(y_0 - 1)^2 - y_1^2}; \quad x^1 = \frac{2y_1}{(y_0 - 1)^2 - y_1^2}$$

метрика (6.31) приводится к виду

$$ds^2 = 4a_0^2 \frac{(1 + y_1^2 - y_0^2)^4}{[(y_0 - 1)^2 - y_1^2]^6} [dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.32)$$

Выражение для плотности материи в хронометрической по отношению к новым координатам системе отсчета имеет физический смысл, если $(y_0 - 1)^2 - y_1^2 > 0$. Можно рассмотреть отдельно несколько стадий эволюции модели. На стадии сжатия как сопутствующей, так и несопутствующей системы отсчета, когда $y_1^2 \leq y_0^2 - 1$, объем пространственного сечения сопутствующей системы отсчета конечен.

б. Модель мира с $B < 0$ и $\Lambda = 0$, заполненного излучением ($p = \rho c^2/3$). Сопутствующей (хронометрической) системе отсчета соответствует метрика

$$ds^2 = a_0^2 \text{sh}^2 x^0 [dx_0^2 - dx_1^2 - \text{sh}^2 x_1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.33)$$

Преобразованием координат $x^0 = \ln \sqrt{y_0^2 - y_1^2}$; $x^1 = \text{arth}(y_1/y_0)$. метрика приводится к виду

$$ds^2 = \frac{a_0^2}{4} \left(1 - \frac{1}{y_0^2 - y_1^2}\right)^2 [dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (6.34)$$

Легко проверить, что объем пространственных сечений в несопутствующей системе отсчета (хронометрической по отношению к новым координатам) конечен. Время эволюции модели в новой системе отсчета бесконечно.

Таким образом, зависимость конечности пространственных сечений от системы отсчета имеет место для широкого класса однородных изотропных моделей Вселенной, заполненных как излучением, так и пылевидной средой. Можно показать, что аналогичная зависимость имеет место и для модели пустого мира де Ситтера. В последнем случае ситуация осложняется отсутствием физически выделенной (сопутствующей материи) системы отсчета.

6.5. НАБЛЮДАЕМЫЕ В МОДЕЛЯХ ФРИДМАНА

1. Расширение Вселенной или эффект разбегания галактик обнаружен по красному смещению линий спектра света, приходящего от далеких галактик. Вычислим смещение частоты на основе моделей Фридмана. Для этого рассмотрим уравнения изотропных геодезических (3.58), (3.59). В моделях Фридмана в сопутствующей системе отсчета эти уравнения принимают вид:

$$(1/\omega) \partial_T \omega + (\tilde{k}^i/\omega^2) \tilde{\nabla}_i \omega + (1/\omega^2) D_{ik} \tilde{k}^i \tilde{k}^k = 0; \quad (6.35)$$

$$\partial_T \tilde{k}^i + (\tilde{k}^k/\omega) \tilde{\nabla}_k \tilde{k}^i - 2\tilde{k}^k D_k^i = 0, \quad (6.36)$$

где $\omega = k^\mu \tau_\mu$; $\tilde{k}^k = -h_\mu^k k^\mu$. Предположим, что нас интересует

свет, пришедший от некоторой звезды. Выберем сферические координаты с началом в точке наблюдения так, чтобы звезда лежала в экваториальной «плоскости» $\theta = \pi/2$, причем $\varphi = 0$, и пусть ее радиальная координата $x^1 = r$. Так как система отсчета сопутствующая, в процессе эволюции Вселенной координаты звезды меняться не будут. Используя значения компонент D_{ik} и L_{sr}^i согласно формулам (6.4) и (6.14), из уравнений (6.36) легко найти, что если в начальный момент $k^2|_0 = 0$ и $\bar{k}^3|_0 = 0$, то они останутся равными нулю и в дальнейшем, т. е. вектор k^i направлен вдоль радиальной линии. Учитывая изотропность k^μ , находим:

$$k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \omega^2 - (k^1)^2 a^2 = 0; \quad k^1 = \omega/a. \quad (6.37)$$

Подставляя (6.37) и (6.14) в (6.35), приходим к уравнению

$$(\partial/\partial x^0 - \partial/\partial x^1) \omega a = 0. \quad (6.38)$$

Решение этого уравнения

$$\omega = f(x^0 + x^1)/a(x^0), \quad (6.39)$$

где $f(x^0 + x^1)$ — функция, определяющая форму светового сигнала. Переходя от энергии $\omega = h\nu$ к частотам ν и сопоставляя частоты светового сигнала в момент его испускания ($x^0 = x_{(1)}^0$) и в момент наблюдения ($x^0 = x_{(2)}^0$), из (6.39) получаем:

$$\nu_2 a(x_{(2)}^0) = \nu_1 a(x_{(1)}^0) \quad \text{или} \quad \nu_2/\nu_1 = a(x_{(1)}^0)/a(x_{(2)}^0). \quad (6.40)$$

Поскольку изменение параметра x^0 за время распространения сигнала от звезды до наблюдателя мало по сравнению с его значением, т. е. $\Delta x^0 = x_{(2)}^0 - x_{(1)}^0 \ll x_{(2)}^0$, представим $a(x_{(1)}^0)$ в виде $a(x_{(1)}^0) \approx a(x_{(2)}^0) - \dot{a} \Delta x^0$. Подставляем это выражение в (6.40):

$$(\nu_2 - \nu_1)/\nu_1 = \Delta\nu/\nu = -(\dot{a}/a) \Delta x^0.$$

Величине Δx^0 соответствует разность координат $x^1 = r$ или расстояние $l \approx \sqrt{h_{11} r^2} = ar$. В результате получаем окончательную формулу для относительной разности частот:

$$\Delta\nu/\nu = -(\dot{a}/a^2) l \equiv -Hl. \quad (6.41)$$

При расширении Вселенной ($\dot{a} > 0$) изменение частоты отрицательное (красное смещение), а при сжатии — положительное (фиолетовое смещение).

Эффект космологического красного смещения обнаружил экспериментально Хаббл в конце 20-х годов. Коэффициент пропорциональности H в (6.41) назван его именем. По современным данным постоянная Хаббла равна $H = \dot{a}/a^2 \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, данные наблюдений выделяют из всех возможных космологических моделей лишь те, которые хотя бы на отдельных этапах эволюции соответствуют расширению.

2. Каково пространство в сопутствующей системе отсчета: от-

крытое или замкнутое? Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к уравнениям Эйнштейна для однородных изотропных моделей (6.8), (6.9) при $\Lambda=0$, $p=0$. Умножим (6.9) на h^{ik} и сложим с (6.8). В результате получим:

$$B = 2(\kappa c^2/3 - H^2). \quad (6.42)$$

Отсюда находим, что пространство замкнуто ($B > 0$), если

$$\rho > 3H^2/\kappa c^2 \equiv \rho_{кр} \approx 2 \cdot 10^{-29},$$

и пространство открыто ($B < 0$), если

$$\rho < 3H^2/\kappa c^2 \approx 2 \cdot 10^{-29}$$

(в граммах на кубический сантиметр).

В настоящий момент плотность ρ наблюдаемой части Вселенной оценивается значением [98] $\rho \approx 5 \cdot 10^{-31}$ г/см³. Экстраполируя эти данные на всю Вселенную, приходим к выводу о соответствии данным наблюдений открытой модели Фридмана. Таким образом, пространственные сечения в сопутствующей материи системе отсчета, скорее всего, описываются геометрией Лобачевского. Однако может оказаться, что при оценке ρ учитывается не вся материя. По мере открытия новых объектов и новых видов материи оценка средней плотности постепенно будет приближаться к критической плотности $\rho_{кр}$. Если еще учесть возможность $\Lambda > 0$, то оказывается, что на данном этапе трудно с уверенностью произвести окончательный выбор реализуемой в природе модели Вселенной.

3. Каков «возраст» Вселенной? Если бы Вселенная всегда расширялась в наблюдаемом темпе (при $\Lambda=0$), то для расширения до современного состояния в сопутствующей системе отсчета понадобилось бы $T_1 \approx 1/H \approx 3 \cdot 10^{17}$ с $\approx 10^{10}$ лет. На самом деле, как это видно из графиков эволюции моделей Вселенной (см. рис. 13), в ранние этапы расширение должно было быть более быстрым (в «начальный» момент — взрыв). Поэтому следует брать значение $T_2 \approx (2/3)T_1$. Тогда возраст Вселенной $T_2 \approx 7 \cdot 10^9$ лет. Это небольшой возраст. Он одного порядка с оцениваемым геологами возрастом земной коры и даже в два-три раза меньше приводимого астрономами возраста старых звезд. Выход из этого противоречия может состоять в рассмотрении более сложных моделей: анизотропных, неоднородных или одновременно и анизотропных и неоднородных.

6.6. ОДНОРОДНЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ

Рассмотрим кратко некоторые модели Вселенной, обладающие более общими — однородными пространственными сечениями. Для этого прежде всего изложим классификацию 3-мерных однородных пространств* (возможных одно-

* Эта классификация дана Бианки [99]. Аналогичная классификация однородных 4-мерных пространств произведена Г. И. Кручковичем: [100], Она изложена в [41, с. 72].

родных пространственных сечений в нормальных системах отсчета). В § 1.8 уже было сформулировано условие однородности многообразий произвольной размерности. Здесь понадобятся формулы (1.61) — (1.63) для 3-мерных пространств (все греческие индексы в них должны быть заменены латинскими). Сопоставим структурным константам величину с двумя индексами: $C_{(sr)}^{(ij)} = \varepsilon_{(sri)} C^{(ij)}$, где $\varepsilon_{(sri)}$ — символ Леви-Чивиты. Тогда (1.63) можно записать в виде

$$\varepsilon_{(ijk)} C^{(jk)} C^{(is)} = 0. \quad (6.43)$$

Представим $C^{(ij)}$, как сумму симметричной и антисимметричной частей

$$C^{(ij)} = n^{(ij)} + a^{(ij)} = n^{(ij)} + \varepsilon_{(ijk)} a_{(k)}, \quad (6.44)$$

где $n^{(ij)} = n^{(ji)}$; $a^{(ij)} = -a^{(ji)}$.

Поскольку линейная комбинация векторов Киллинга также является вектором Киллинга, в пространстве этих векторов можно определить линейные преобразования. При этом все величины с индексами в скобках будут изменяться по тензорному закону. С помощью таких преобразований симметричный тензор n^{ij} приводится к диагональному виду. Пусть n_1, n_2, n_3 — его главные значения. Пользуясь произволом в выборе постоянных множителей при операторах (1.60), можно обратить отличные от нуля главные значения n_i в ± 1 . Используя (6.44), соотношения (6.43) запишем в виде

$$a_{(i)} n^{(is)} = 0. \quad (6.45)$$

Это означает, что отличными от нуля (в главных осях) могут быть лишь такие компоненты вектора $a_{(i)}$, которые соответствуют нулевым главным значениям n_i . Если имеются два или три нулевых главных значения n_i , то подходящие преобразования обращают в нуль соответственно одну или две из оставшихся компонент $a_{(i)}$. Таким образом, не теряя общности, можно считать, что вектор $a_{(i)}$, если он отличен от нуля, имеет лишь одну ненулевую компоненту. Положим, что такой компонентой является $a_{(1)} \equiv a$. С учетом изложенного коммутаторы (1.61) выразим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} [X_{(1)} X_{(2)}] &= -aX_{(2)} + n_3X_{(3)}; \\ [X_{(3)} X_{(1)}] &= n_2X_{(2)} + aX_{(3)}; \\ [X_{(2)} X_{(3)}] &= n_1X_{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Перебирая все указанные для n_i и a значения, получаем однородные пространства девяти типов Бианки. Выпишем соответствующие этим типам значения n_i и a [9, с. 487]:

Тип	I	II	VII	VI	IX	VIII	V	IV	VII	<u>III(=1) VI(a≠1)</u>
a	0	0	0	0	0	0	1	1	a	a
n_1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
n_2	0	0	1	-1	1	1	0	0	1	1
n_3	0	0	0	0	1	-1	0	1	1	-1

Заметим, что спроектированные на направления базисных векторов $\xi_{(s)}^i$ компоненты 3-мерного тензора Риччи алгебраически выражаются через структурные константы группы*. Используя это и вид тензора Эйнштейна (3.36) — (3.38) в синхронной системе отсчета, легко записать уравнения Эйнштейна для метрик с пространственными сечениями всех типов Бианки.

Выпишем несколько пространственно-временных метрик, имеющих пространственные сечения различных типов Бианки.

Тип I — абелева группа Ли — соответствует евклидовому пространственному сечению. Кроме метрики Минковского к этому случаю относится плоская анизотропная модель мира Казнера [9, с. 491] (вакуумное решение):

$$ds^2 = dx_0^2 - x_0^{2\beta_1} dx_1^2 - x_0^{2\beta_2} dx_2^2 - x_0^{2\beta_3} dx_3^2, \quad (6.47)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — константы, удовлетворяющие условиям:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (6.48)$$

Если их расположить в порядке возрастания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, то они лежат в интервалах:

$$-1/3 \leq \beta_1 \leq 0; \quad 0 \leq \beta_2 \leq 2/3; \quad 2/3 \leq \beta_3 \leq 1. \quad (6.48a)$$

С увеличением x^0 в хронометрической (кинеметрической) системе отсчета в пространственных сечениях линейные расстояния вдоль осей x^2 и x^3 увеличиваются, а вдоль оси x^1 уменьшаются.

Тип IX. К этому типу относится модель с замкнутыми пространственными сечениями, в некотором смысле обобщающая модель Казнера [101]:

$$ds^2 = dx_0^2 - \exp(2\alpha) [\exp(2\beta_{11}) dl_{(1)}^2 + \exp(2\beta_{22}) dl_{(2)}^2 + \exp(2\beta_{33}) dl_{(3)}^2], \quad (6.49)$$

где $\alpha, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ — функции координаты x^0 , удовлетворяющие условию

$$\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0, \quad (6.50)$$

а $dl_{(i)} = l_{(i)}^\mu dx^\mu$ — три ортогональных смещения вдоль векторов с компонентами:

$$\left. \begin{aligned} l_{(1)\mu} &= \{0; \sin x^3; -\cos x^3 \sin x^1; 0\}; \\ l_{(2)\mu} &= \{0; \cos x^3; \sin x^3 \sin x^1; 0\}; \\ l_{(3)\mu} &= \{0; 0; \cos x^1; 1\} \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

в системе координат, где $0 \leq x^1 \leq \pi$; $0 \leq x^2 \leq 2\pi$; $0 \leq x^3 \leq 4\pi$. Ввиду условия (6.50) независимы лишь две функции β_{ii} . Можно перейти к новым независимым величинам β_+ и β_- , так что

$$\beta_{11} = \beta_+ + \sqrt{3} \beta_-; \quad \beta_{22} = \beta_+ - \sqrt{3} \beta_-; \quad \beta_{33} = -2\beta_+. \quad (6.50a)$$

Величина $\beta = \sqrt{\beta_+^2 + \beta_-^2}$ характеризует суммарную анизотропию мира,

* Это легко понять на языке тетрадного (см. § 7.7) или в данном случае триадного формализма. Структурные константы фактически являются объектами неголономности, из которых алгебраически строятся коэффициенты вращения Риччи, образующие тензор кривизны подобно символам Кристоффеля. Производные от них из-за постоянства $C_{(ab)}^{(i)}$ равны нулю. Остаются лишь квадратичные комбинации коэффициентов вращения Риччи или структурных констант.

а $\sigma = \arccos(\beta_+ / \sqrt{\beta_+^2 + \beta_-^2})$ определяет отклонение мира от аксиальной симметрии.

При $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33}$, т. е. $\beta_+ = \beta_- = 0$, пространственные сечения имеют постоянную положительную кривизну. Таким образом, закрытая модель Фридмана является частным случаем моделей мира с однородными пространственными сечениями типа IX Бианки. Эволюция модели мира с метрикой (6.49) соответствует смене казнеровских эпох попеременно вдоль трех осей. При $x^0 \rightarrow 0$ число осцилляций стремится к бесконечности [102].

Описанная модель однородной анизотропной Вселенной использована Мизнером [179] для построения квантовой космологической модели. Этот вопрос кратко изложен в § 10.8. Там же рассмотрена эта метрика с позиции теории суперпространств. Подробное обсуждение этой и других анизотропных космологических моделей (как классических, так и квантовых аспектов) можно найти в книге Райана (**Ryan M.** *Hamiltonian Cosmology: Lect. Not. Phys. Berlin — Heidelberg — New York, Springer — Verlag, 1972*).

Пространства постоянной отрицательной кривизны являются частным случаем пространств типа V Бианки.

Общие виды метрик 3-мерных пространств всех девяти типов Бианки можно найти в монографии [41, с. 156—157].

ЧАСТЬ III
СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА
И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Глава 7

**ПОЛНЫЕ И НЕПОЛНЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ
НАБЛЮДАТЕЛЕЙ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

При детальном рассмотрении некоторых проблем и конкретных задач теории гравитации часто приходится отказываться от полной симметрии даже среди пространственных координат (направлений). В таких случаях может оказаться целесообразным использование методов 1+1+2- или 2+2-расщеплений пространственно-временного многообразия по образцу уже рассмотренных в гл. 3 1+3-расщеплений, что осуществляется соответственно диадным и диарным формализмами. Кроме практической важности эти формализмы позволяют более глубоко осмыслить математическую структуру монадного метода. Наконец, для полного описания наблюдателей в ОТО необходим формализм 1+1+1+1-расщепления пространственно-временного многообразия — тетрадный формализм. Все упомянутые формализмы систематически изложены в этой главе.

**7.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОБЩЕКОВАРИАНТНОГО
ДИАДНОГО ФОРМАЛИЗМА**

Диадный формализм (метод) [103], так же как и монадный, складывается из четырех частей. Кратко изложим их последовательно.

А л г е б р а. В диадном формализме метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - l_\mu l_\nu - \gamma_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

где составляющие удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \tau_\mu \tau^\mu &= 1; & l_\mu l^\mu &= -1; & \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} &= 2; \\ \tau_\mu l^\mu &= \tau_\mu \gamma^{\mu\nu} = l_\mu \gamma^{\mu\nu} & &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

($\gamma_{\mu\nu}$ — метрический тензор 2-мерного пространственно-подобного локального сечения, ортогонального τ^μ и l^μ). В диадном формализме используются либо скаляры — тензорные величины, свернутые по всем индексам с векторами τ^μ и l^μ (например, $B = B_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu$, $\hat{B} = B_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$, $B' = B_{\mu\nu} \tau^\mu l^\nu$), либо 2-мерные тензоры —

тензорные величины, спроектированные на направления 2-мерной поверхности посредством $\bar{\gamma}_\nu^\mu: \bar{B}_\nu = -B_\mu \gamma_\nu^\mu; \dots \bar{B}_\beta^\alpha \dots = \Gamma_{\mu \dots \beta}^{\alpha \dots \nu} \dots B_\nu^\mu \dots$, где

$$\Gamma_{\mu \dots \beta}^{\alpha \dots \nu} = (-1)^{n+m} \underbrace{\gamma_\mu^\alpha \dots \gamma_\mu^\alpha}_n \cdot \underbrace{\gamma_\beta^\nu \dots \gamma_\beta^\nu}_m \quad (7.3)$$

— оператор проектирования на 2-мерные направления.

Диадные физико-геометрические тензоры. Из диадных составляющих метрического тензора и их первых производных можно построить 11 независимых *диадных физико-геометрических тензоров*.

Семь тензоров получаются всевозможными проектированиями монадных физико-геометрических тензоров на направления γ и l :

$$\bar{D}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu D_{\mu\nu} = -\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu E_{\mu\nu, \sigma} \tau^\sigma; \quad (7.4)$$

$$(q_\alpha + \Lambda_\alpha) \equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu D_{\mu\nu} \text{ [см. (7.13), (7.14)];}$$

$$\hat{D} \equiv l^\mu l^\nu D_{\mu\nu} = \tau^\mu l^\nu (l_{\mu, \nu} - l_{\nu, \mu}); \quad (7.5)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_\alpha^\nu \gamma_\beta^\mu A_{\nu\mu} = (1/2) \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}); \quad (7.6)$$

$$Q_\alpha \equiv \gamma_\alpha^\mu l^\nu A_{\mu\nu} = (1/2) \gamma_\alpha^\mu l^\nu (\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}); \quad (7.7)$$

$$\bar{F}_\alpha \equiv -\gamma_\alpha^\mu F_\mu = -\gamma_\alpha^\mu \tau^\nu (\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}) = \tau^\nu (\tau_{\alpha, \nu} - \tau_{\nu, \alpha}) + l_\alpha \hat{F}; \quad (7.8)$$

$$\hat{F} \equiv l^\mu F_\mu = l^\mu \tau^\nu (\tau_{\mu, \nu} - \tau_{\nu, \mu}). \quad (7.9)$$

Здесь $E_{\mu\nu, \sigma} = (1/2) (\partial \gamma_{\mu\sigma} / \partial x^\nu + \partial \gamma_{\nu\sigma} / \partial x^\mu - \partial \gamma_{\mu\nu} / \partial x^\sigma)$.

Три диадных физико-геометрических тензора получаются аналогично монадным заменой τ^μ и $h_{\mu\nu}$ соответственно величинами l^μ и $\gamma_{\mu\nu}$:

$$d_{\alpha\beta} \equiv - (1/2) \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu, \nu} + l_{\nu, \mu}) = -\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu E_{\mu\nu, \sigma} l^\sigma; \quad (7.10)$$

$$a_{\alpha\beta} \equiv (1/2) \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu, \nu} - l_{\nu, \mu}); \quad (7.11)$$

$$f_\alpha \equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu (l_{\mu, \nu} - l_{\nu, \mu}) = l^\nu (l_{\alpha, \nu} - l_{\nu, \alpha}) - \tau_\alpha \hat{D}. \quad (7.12)$$

Наконец, одна векторная величина появляется из совместного рассмотрения двух векторных полей:

$$q_\alpha \equiv (1/2) \gamma_\alpha^\mu \tau^\nu (l_{\mu, \nu} - l_{\nu, \mu}) = - (1/2) \tau^\nu (l_{\alpha, \nu} - l_{\nu, \alpha}) + (1/2) l_\alpha \hat{D}. \quad (7.13)$$

Комбинируя формулу для $-\gamma_\alpha^\mu l^\nu D_{\mu\nu}$ и (7.13), находим:

$$\Lambda_\alpha = (1/2) \gamma_{\alpha\beta} (l^\sigma \tau_{\sigma, \beta}^\beta - \tau^\sigma l_{\sigma, \beta}^\beta). \quad (7.14)$$

Итого, имеем: четыре тензора второго ранга; пять векторов и два скаляра.

Задание диадных операторов дифференцирования. В качестве основных *диадных операторов дифференцирования*

вания выберем следующие три, которые при действии на γ -спроектированные тензоры дают опять ν -спроектированные тензоры: диадный оператор временного дифференцирования

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_T \overbrace{\bar{B}_\nu^{\mu \dots}}^m = \Gamma_{\alpha \dots \nu}^{\mu \dots \beta} \underset{\tau}{\bar{\partial}} \bar{B}_\beta^{\alpha \dots} = \tau^\sigma \partial \bar{B}_\nu^{\mu \dots} / \partial x^\sigma - \\ - \underbrace{\bar{N}_\sigma^{\mu \dots} \bar{B}_\nu^{\sigma \dots}}_m - \dots + \underbrace{\bar{N}_\nu^{\sigma \dots} \bar{B}_\sigma^{\mu \dots}}_n + \dots, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $\bar{N}_\lambda^\sigma = \tau_{,\lambda}^\sigma - \tau^\sigma F_\lambda - 2l^\sigma q_\lambda - 2l_\lambda \Lambda^\sigma$;

диадный оператор дифференцирования вдоль l

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_L \overbrace{\bar{B}_\nu^{\mu \dots}}^m = \Gamma_{\alpha \dots \nu}^{\mu \dots \beta} \underset{l}{\bar{\partial}} \bar{B}_\beta^{\alpha \dots} = l^\sigma \partial \bar{B}_\nu^{\mu \dots} / \partial x^\sigma - \\ - \underbrace{\bar{L}_\sigma^{\mu \dots} \bar{B}_\nu^{\sigma \dots}}_m - \dots + \underbrace{\bar{L}_\nu^{\sigma \dots} \bar{B}_\sigma^{\mu \dots}}_n + \dots, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $\bar{L}_\lambda^\sigma = l_{,\lambda}^\sigma - l^\sigma f_\lambda + 2\tau^\sigma Q_\lambda - 2\tau_\lambda \Lambda^\sigma$;

диадную ковариантную производную вдоль направлений γ

$$\bar{\nabla}_\sigma \bar{B}_\nu^{\mu \dots} = - \Gamma_{\alpha \dots \nu}^{\mu \dots \beta \dots} \gamma_\sigma^\lambda \bar{\nabla}_\lambda \bar{B}_\beta^{\alpha \dots} \quad (7.17)$$

Запишем результат коммутации операторов $\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}$ и $\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}$, действующих на произвольный вектор \bar{B}^μ :

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} - \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}) \bar{B}^\mu = {}^2R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} \bar{B}^\lambda + 2\bar{A}_{\alpha\beta} (\bar{\partial}_T \bar{B}^\mu - \bar{D}_\lambda^\mu \bar{B}^\lambda) - \\ - 2a_{\alpha\beta} (\bar{\partial}_L \bar{B}^\mu - d_\lambda^\mu \bar{B}^\lambda), \end{aligned} \quad (7.18)$$

где ${}^2R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu}$ — тензор кривизны 2-мерной γ -поверхности:

$${}^2R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\epsilon\lambda\alpha\beta}^{\mu\gamma\kappa\nu} (\partial \bar{E}_{\gamma\nu}^\epsilon / \partial x^\kappa - \partial \bar{E}_{\gamma\kappa}^\epsilon / \partial x^\nu + \bar{E}_{\sigma\kappa}^\epsilon \bar{E}_{\gamma\nu}^\sigma - \bar{E}_{\sigma\nu}^\epsilon \bar{E}_{\gamma\kappa}^\sigma) \quad (7.19)$$

($\bar{E}_{\alpha\beta}^\epsilon = E_{\alpha\beta}^\epsilon + \gamma_{\alpha,\beta}^\epsilon$ — обобщенная 2-связность).

Запись основных соотношений ОТО в диадном виде. Все общековариантные соотношения и величины можно представить в *диадном виде*, т. е. записать только через скаляры, γ -спроектированные тензоры, диадные физико-геометрические тензоры и диадные операторы дифференцирования. Уравнения и тождества ОТО в диадном виде имеют довольно громоздкий вид. В дальнейшем будем приводить некоторые соотношения по мере надобности.

Введем групповые калибровки диадного формализма, аналогичные изложенным в гл. 3 калибровкам монадного метода. Теперь их будет значительно больше. Ограничимся лишь случаями первичного выделения временно-подобного вектора τ^μ , тогда имеем четыре калибровки диадного формализма. Подробно изложим одну из них и кратко охарактеризуем остальные три.

Кинеметрическая калибровка*. Алгебра. Откалибруем диаду $\{\tau^\mu, l^\mu\}$ в два этапа способом, аналогичным кинеметрической калибровке монады:

$$\left. \begin{aligned} \tau_\mu &= g_\mu^0 / \sqrt{g^{00}} \rightarrow \tau^\mu = g^{0\mu} / \sqrt{g^{00}}; \\ l_\mu &= \frac{{}^+h_\mu^1}{\sqrt{{}^+h^{11}}} = \left\{ \frac{g^{01}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}}; -\frac{\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}}; 0; 0 \right\} \rightarrow \\ \rightarrow l^\mu &= \frac{{}^+h^{\mu 1}}{\sqrt{{}^+h^{11}}} = \left\{ 0; \frac{\sqrt{g^{01}g^{00} - g^{00}g^{11}}}{\sqrt{g^{00}}}; \right. \\ &\left. \frac{g^{01}g^{02} - g^{12}g^{00}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}}; \frac{g^{01}g^{03} - g^{13}g^{00}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}} \right\}, \end{aligned} \right\} (7.20)$$

где ${}^+h^{\mu 1}$ — компоненты метрического тензора 3-мерного пространственного сечения в кинеметрической калибровке монады. Компоненты 2-мерного метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ тогда найдем в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{\xi\eta} &= \frac{g^{0\xi}g^{0\eta} - g^{\xi\eta}g^{00}}{g^{00}} - \frac{(g^{01}g^{\xi 0} - g^{1\xi}g^{00})(g^{10}g^{\eta 0} - g^{1\eta}g^{00})}{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}; \\ \gamma^{0\mu} &= \gamma^{1\mu} = 0; \quad \gamma_{\xi\eta} = -g_{\xi\eta}; \quad \gamma_{00} = -g_{00} - \frac{g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \\ \gamma_{11} &= -g_{11} - \frac{g^{00}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_{01} = -g_{01} + \\ &+ \frac{g^{01}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_\eta^\xi = -g_\eta^\xi; \\ \gamma_0^\xi &= \frac{g^{01}g^{1\xi} - g^{0\xi}g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_1^\xi = \frac{g^{01}g^{0\xi} - g^{00}g^{\xi 1}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_\mu^0 = \gamma_\mu^1 = 0. \end{aligned} \right\} (7.21)$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\xi, \zeta, \eta, \varphi, \chi, \psi$ пробегают значения 2, 3.

* Ранее в работах [103—105] и др. эту калибровку называли дважды кинеметрической. Автору представляется, что термин «орометрическое» (по-гречески ο'ραω — «вижу») для 1+2-расщепления 3-мерного пространства соответствует термину «кинеметрическое» для аналогичного 1+3-расщепления 4-мерного пространства-времени. Такое название, во-первых, сохраняет преемственность с ранее введенной терминологией монадного формализма и, во-вторых, отражает основное приложение данной калибровки для описания волновых процессов.

Системы координат, в которых $\tau_i = \tau'_i = 0$, $l_\xi = l'_\xi = 0$, связаны такими преобразованиями координат, что $\partial x^0 / \partial x'^i = 0$; $\partial x^1 / \partial x'^\xi = 0$. Это приводит к выделению класса преобразований координат:

$$x'^0 = x'^0(x^0); \quad x'^1 = x'^1(x^0, x^1); \quad (7.22)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (7.23)$$

Назовем кинеметрически-инвариантными (к. о. и.) 2-тензорами такие величины, которые инвариантны при преобразованиях (7.22) и ковариантны относительно преобразований (7.23). Таким свойством обладают следующие комплексы, сопоставленные произвольному тензору $B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{B_{\mu \dots}^{\alpha \dots}}_m \underbrace{\dots}_n \underbrace{\dots}_p \underbrace{\tau^\mu \dots}_m \underbrace{\dots}_n \underbrace{\dots}_{p+k} (-1)^{p+k} \underbrace{\gamma_\alpha^\sigma \dots}_k \underbrace{\dots}_p \rightarrow \\ & \rightarrow \underbrace{B_{ij \dots s\xi\eta \dots}^{00 \dots 0}}_n \frac{1}{(g^{00})^{m/2}} \frac{1}{(h^{11})^{n/2}} \underbrace{h^{i1} h^{j1} \dots h^{s1}}_n. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Таким образом, к. о. и. являются все τ - и l -спроектированные тензоры (скаляры), а также все контравариантные и только с ковариантными индексами 2 и 3 γ -спроектированные тензоры. В такой калибровке достаточно использовать лишь к. о. и. величины. Будем их обозначать двумя крестиками сверху.

Диадные физико-геометрические тензоры. Три из 11 таких тензоров в данной калибровке тождественно обращаются в нуль:

$$\overset{++}{Q}_\beta \equiv 0; \quad \overset{++}{A}_{\alpha\beta} \equiv 0; \quad \overset{++}{a}_{\alpha\beta} \equiv 0. \quad (7.25)$$

Остальные диадные к. о. и. физико-геометрические тензоры записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \overset{++}{D}_{\xi\eta} &= -\tau^\nu E_{\xi\eta, \nu} = (1/2) \partial_T \gamma_{\xi\eta}; & \overset{++}{d}_{\xi\eta} &= -l^\nu E_{\xi\eta, \nu} = (1/2) \partial_L \gamma_{\xi\eta}; \\ \overset{++}{\widehat{D}} &= \tau_0 l^\nu l_{0, \nu} - l_{1, \nu} (\tau^\nu l^1 - \tau^1 l^\nu); & \overset{++}{\widehat{F}} &= \tau_0 l^\nu \tau_{0, \nu}; \\ \overset{++}{\widehat{F}}_\xi &= -\tau^0 \tau_{0, \xi}; & \overset{++}{f}_\xi &= -l^1 l_{1, \xi}; & \overset{++}{q}_\xi &= (1/2) \tau^\sigma l_{\sigma, \xi}; \\ \overset{++}{\Lambda}_\xi &= (1/2) \gamma_{\xi\sigma, \mu} (\tau^\mu l^\sigma - \tau^\sigma l^\mu) = - (1/2) \gamma_{\xi i}^+ \partial_T l^i. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Здесь в нескольких формулах использованы диадные к. о. и. операторы, определенные ниже.

Основные операторы дифференцирования к. о. и. величин:

к. о. и. оператор временного дифференцирования

$$\overset{++}{\partial_T} \bar{B}_\eta^\xi \dots = \tau^\lambda \partial \bar{B}_\eta^\xi \dots / \partial x^\lambda - \bar{N}_\varphi^\xi \bar{B}_\eta^\varphi \dots - \dots + \bar{N}_\eta^\varphi \bar{B}_\varphi^\xi \dots + \dots, \quad (7.27)$$

где $\bar{N}_\varphi^\xi = \tau^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi}^\xi$;

к. о. и. оператор дифференцирования вдоль l

$$\overset{++}{\partial_L} \bar{B}_\eta^\xi \dots = l^i \partial \bar{B}_\eta^\xi \dots / \partial x^i - \bar{L}_\varphi^\xi \bar{B}_\eta^\varphi \dots - \dots + \bar{L}_\eta^\varphi \bar{B}_\varphi^\xi \dots + \dots, \quad (7.28)$$

где $\bar{L}_\varphi^\xi = l^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi}^\xi$;

к. о. и. диадная ковариантная γ -производная

$$\overset{++}{\nabla_\xi} \bar{B}_\eta^\xi \dots = \partial \bar{B}_\eta^\xi \dots / \partial x^\xi + E_{\varphi\xi}^\xi \bar{B}_\eta^\varphi \dots + \dots - E_{\eta\xi}^\varphi \bar{B}_\varphi^\xi \dots - \dots, \quad (7.29)$$

где $E_{\varphi\xi}^\xi = \frac{1}{2} \gamma^{\xi\psi} \left(\frac{\partial \gamma_{\varphi\psi}}{\partial x^\xi} + \frac{\partial \gamma_{\xi\psi}}{\partial x^\varphi} - \frac{\partial \gamma_{\varphi\xi}}{\partial x^\psi} \right)$.

С помощью коммутации операторов $\overset{++}{\nabla_\xi}$ и $\overset{++}{\nabla_\eta}$ можно прийти к 2-мерному тензору кривизны. Запишем к. о. и. 2-мерный тензор Риччи:

$${}^2R_{\xi\eta} = \frac{\partial E_{\xi\eta}^\varphi}{\partial x^\varphi} - \frac{\partial E_{\xi\varphi}^\eta}{\partial x^\eta} + E_{\chi\varphi}^\varphi E_{\xi\eta}^\chi - E_{\chi\xi}^\varphi E_{\eta\varphi}^\chi. \quad (7.30)$$

Хронохориометрическая калибровка* означает последовательное задание векторов τ^μ и l^μ способом, аналогичным хронометрической калибровке монады:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= g_{00}^\mu / \sqrt{g_{00}} \rightarrow \tau_\mu = g_{0\mu} / \sqrt{g_{00}}; \\ l^\mu &= \frac{{}^*h_1^\mu}{\sqrt{{}^*h_{11}}} = \left\{ \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})}}; -\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}; 0; 0 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

где ${}^*h_{\mu\nu}$ — компоненты 3-мерного метрического тензора в хронометрической калибровке.

В этой калибровке из множества всевозможных допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3); \quad (7.32)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^2, x^3), \quad (7.33)$$

* Ранее эта калибровка называлась хронорадиальной [106] или дважды хронометрической [103]. Представляется, что для локального пространственного расщепления термин «хориометрическое», производный от греческого χωρόν — «место», — соответствует термину «хронометрическое» для выделения времени (χρόνος — время).

а данный вариант диадного формализма имеет дело с 2-тензорами, инвариантными при преобразованиях (7.32) и ковариантными относительно преобразований (7.33) (*метод хронохориометрических инвариантов*). В хронохориометрической калибровке отличны от нуля 10 диадных физико-геометрических тензоров ($\Lambda_\beta \equiv 0$), а диадные операторы дифференцирования аналогичны монадным операторам в хронометрической калибровке.

Кинехориометрическая калибровка диады* означает калибровку τ^μ кинеметрическим способом, а затем l^μ — хориометрическим образом (смешанная калибровка):

$$\tau_\mu = g_\mu^0 / \sqrt{g^{00}}; \quad l^\mu = {}^+h_1^\mu / \sqrt{{}^+h_{11}} = \{0; -1/\sqrt{-g_{11}}; 0; 0\}, \quad (7.34)$$

где ${}^+h_{\mu\nu}$ — компоненты 3-мерного метрического тензора в кинеметрической калибровке. В таком формализме из множества допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^0 = x'^0(x^0); \quad x'^1 = x'^1(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad (7.35)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^0, x^2, x^3), \quad (7.36)$$

а используемые величины и операторы инвариантны при преобразованиях (7.35) и ковариантны относительно (7.36) (*метод кинехориометрических инвариантов*).

В данной калибровке физико-геометрические тензоры $A_{\mu\nu}$ и Q_μ тождественно равны нулю. Диадные операторы $\overset{+*}{\partial}_L$ и $\overset{+*}{\nabla}_\Phi$ обладают свойствами монадных операторов в хронометрической калибровке, а оператор $\overset{+*}{\partial}_T$ аналогичен оператору монадного временного дифференцирования в кинеметрической калибровке.

Хроноорометрическая калибровка диады** (также смешанная) задается соотношениями:

$$\tau^\mu = g_\mu^0 / \sqrt{g_{00}}; \quad l_\mu = \frac{{}^*h_\mu^1}{\sqrt{{}^*h_{11}}} = \left\{0; -\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}; 0; 0\right\}, \quad (7.37)$$

где ${}^*h_{\mu\nu}$ — 3-мерный метрический тензор в хронометрической калибровке. В данном варианте диадного формализма выделяется класс преобразований координат

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1); \quad (7.38)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^1, x^2, x^3), \quad (7.39)$$

а используемые величины инвариантны при преобразованиях (7.38) и ковариантны относительно преобразований (7.39) (*формализм хроноорометрических инвариантов*).

* В первых работах [103, 107] эта калибровка называлась кинехронометрической.

** Ранее [103, 108] эту калибровку называли хронокинеметрической.

В этом формализме физико-геометрические тензоры $a_{\mu\nu}$ и q_{μ} тождественно равны нулю. Диадные операторы $\overset{*+}{\partial}_T$ и $\overset{*+}{\nabla}_\Phi$ обладают свойствами монадных операторов в хронометрической калибровке, а $\overset{*+}{\partial}_L$ определяется аналогично оператору монадного временного дифференцирования в кинеметрической калибровке.

7.3. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИАДНОГО ФОРМАЛИЗМА

Если монадный метод нужен для описания систем отсчета в ОТО, то диадный метод наиболее естествен для описания монохроматического электромагнитного или иного излучения относительно выделенной системы отсчета. Действительно, электромагнитное и любое другое изотропное излучение характеризуются волновым вектором k^μ , удовлетворяющим условию изотропности

$$k_\mu k^\mu = 0. \quad (7.40)$$

Временно-подобная часть этого вектора определяется 4-скоростью $u^\mu = \tau^\mu$ используемой системы отсчета. Пространственно-подобную часть $-h^\mu_\nu k^\nu$ используем для определения второго единичного вектора диады l^μ , ортогонального τ^μ так, что

$$k^\mu = (\tau^\mu \pm l^\mu) \omega(x), \quad (7.41)$$

где $\omega(x)$ — частота излучения (скалярная функция). Соотношение (7.40) тогда выполняется автоматически.

Характер конгруэнции изотропных линий можно описать с помощью трех оптических инвариантов [109] [ср. с (3.16)]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= (1/2) k^\mu_{;\mu}; & \Omega^2 &= (1/4) (k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu}) k^{\mu;\nu} \\ \sigma^2 &= (1/4) (k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu}) k^{\mu;\nu} - \varepsilon^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

которые позволяют сопоставить контуры непрозрачного предмета и его тень на экране, расположенном на расстоянии dr за предметом. Величина εdr характеризует растяжение или сжатие тени (рис. 14, а); Ωdr — поворот (рис. 14, б), а $|\sigma| dr$ — сдвиг (сплюснутость) тени (рис. 14, в). Эти инварианты легко записать через диадные физико-геометрические тензоры. Однако учтем, что изотропные линии, к которым касателен волновой вектор k^μ электромагнитного или иного излучения, являются геодезическими, т. е. k^μ удовлетворяет условию [здесь и в дальнейшем верхний знак соответствует выбору $k^\mu = (\tau^\mu + l^\mu) \omega$, а нижний знак — выбору $k^\mu = (\tau^\mu - l^\mu) \omega$]:

$$k^\mu_{;\nu} k^\nu = 0 \rightarrow (\tau^\nu \pm l^\nu) [\omega_{;\nu} (\tau^\mu \pm l^\mu) + \omega (\tau^\mu \pm l^\mu)_{;\nu}] = 0. \quad (7.43)$$

Проектируя это соотношение на направления τ , l , γ , получаем:

$$\widehat{D} \mp \widehat{F} + (1/\omega^2) \omega_{,v} k^v = 0; \quad (7.44)$$

$$\bar{F}_v + f_v \mp 2 (Q_v + q_v) = 0. \quad (7.45)$$

Используя (7.44), (7.45), оптические скаляры можно записать в виде

$$\varepsilon = -(\omega/2) (\bar{D} \pm d); \quad (7.46)$$

$$\Omega^2 = (\omega^2/2) (\bar{A}_{\mu\nu} \pm a_{\mu\nu}) (\bar{A}^{\mu\nu} \pm a^{\mu\nu}); \quad (7.47)$$

$$\sigma^2 = (\omega^2/2) (\bar{D}_{\mu\nu} \pm d_{\mu\nu}) (\bar{D}^{\mu\nu} \pm d^{\mu\nu}) - (\omega^2/4) (\bar{D} \pm d)^2. \quad (7.48)$$

Эти формулы позволяют наделить физическим смыслом диадные физико-геометрические тензоры $a_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ и d , которые не определяются из монадных.

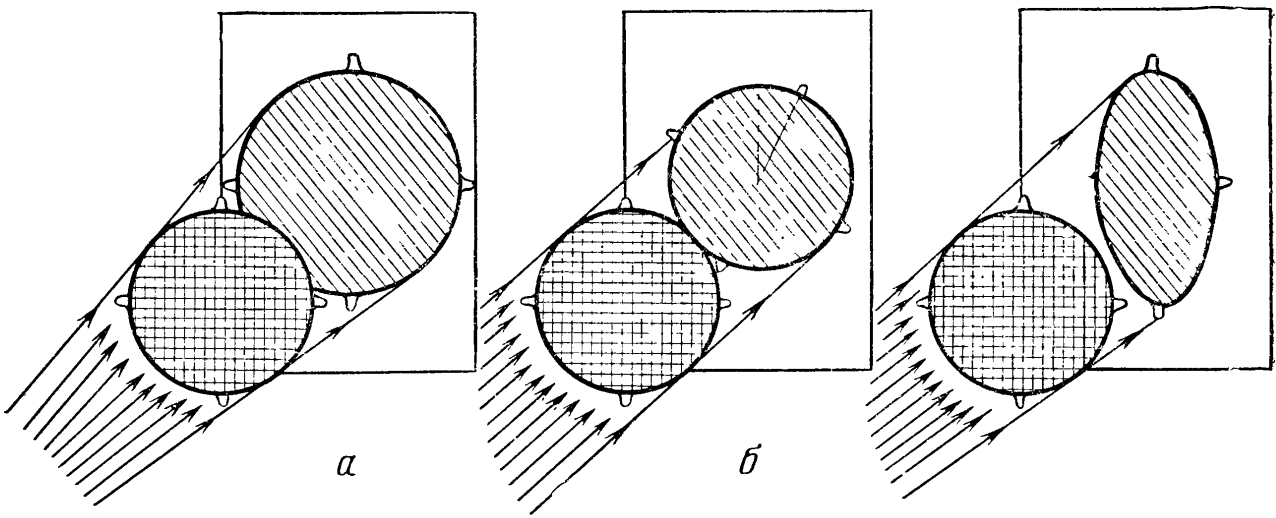


Рис. 14. Геометрический смысл трех оптических инвариантов

Покажем, что ранее описанный метод хроногеометрии (см. § 2.3), соответствующий радиолокационному способу задания координат $T=\tau$ и $R=l$ одиночным наблюдателем, естественно связан с диадным формализмом [110]. Пусть

$$f_1(R, T, y^\alpha) = f(x^\alpha(T+R); y^\alpha) = 0; \quad (7.49)$$

$$f_2(R, T, y^\alpha) = f(x^\alpha(T-R); y^\alpha) = 0 \quad (7.50)$$

— уравнения двух изотропных конусов с вершинами соответственно в точках $x^\alpha(T+R)$ и $x^\alpha(T-R)$ на мировой линии одиночного наблюдателя; y^α — координата наблюдаемой точки, лежащей на пересечении этих конусов. Нормали к конусам $f_{1\alpha} \equiv \partial f_1 / \partial y^\alpha$; $f_{2\alpha} \equiv \partial f_2 / \partial y^\alpha$ также являются изотропными. Вводя обозначения $f_{1R} = \partial f_1 / \partial R$; $f_{2R} = \partial f_2 / \partial R$, находим два вектора диады:

$$\tau_\alpha = \frac{f_{1R} f_{2\alpha} - f_{1\alpha} f_{2R}}{\sqrt{2f_{1R} f_{2R} f_{1\beta} f_{2\beta}}}; \quad l_\alpha = -\frac{f_{2\alpha} f_{1R} + f_{1\alpha} f_{2R}}{\sqrt{2f_{1R} f_{2R} f_{1\beta} f_{2\beta}}}, \quad (7.51)$$

соответственно ортогональные поверхности $T = \text{const}$ и $R = \text{const}$. Применяя формулы монадного и диадного формализмов, легко показать, что $A_{\alpha\beta} = 0$; $a_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, для описания данной ситуации целесообразно использовать диадный формализм в кинеметрической калибровке.

Безотносительно к радиолокационному способу задания двух координат при выделении из конгруэнции системы отсчета одной из мировых линий (выделенного или одиночного наблюдателя) второй вектор диады может означать пространственно-подобное направление на положение (или от него) выделенной мировой линии (радиальное направление).

Пока, не вдаваясь в подробности, кратко укажем другие возможные приложения диадного формализма.

Одним из них является использование его при описании областей пространства-времени, в которых имеется физически выделенное одно пространственно-подобное направление, например существует вектор напряженности электрического или магнитного поля. В этом случае направление напряженности можно связать с вектором l^μ , который вместе с вектором 4-скорости системы отсчета τ^μ образует диаду.

Как будет показано в гл. 10, монадный формализм оказался эффективным методом при построении гамильтоновой формулировки ОТО. Последняя важна для осуществления программы выделения двух пар динамических гравитационных переменных, подлежащих квантованию в квантовой теории гравитации. Работы Дирака и других авторов (фактически на основе монадного метода) позволили «исключить» четыре переменные τ^μ из 10 составляющих метрического тензора $g^{\mu\nu}$. Использование диадного формализма целесообразно для дальнейшего исключения «лишних» переменных. В гл. 10 на основе диадного формализма в кинеметрической калибровке будет обсуждена задача «исключения» еще трех переменных l^i .

Как уже отмечалось, монадный формализм своим истоком имеет метод выделения пятой координаты в 5-мерной римановой геометрии. В гл. 11 5-мерная теория рассмотрена на основе усовершенствования монадного метода, осуществляющего такое 1+4-расщепление. Однако в получившемся 4-мерном пространственно-временном сечении для описания системы отсчета и наблюдаемых необходимо произвести еще одно расщепление (1+3). Таким образом, в совокупности опять приходим к двойному расщеплению (1+1+3), т. е. к диадному формализму.

Наконец, могут возникнуть задачи, в которых необходимо выделить два пространственно-подобных направления (а не одно временно-подобное и одно пространственно-подобное, как в предыдущих задачах): когда требуется задать два угла (сферические координаты) или когда требуется описание ориентации относительно двух выделенных объектов.

Диарный формализм основан на расщеплении 4-мерного пространственно-временного многообразия в каждой точке на два 2-мерных сечения (2+2-расщепление) без выделения отдельных направлений внутри них. Математический аппарат диарного формализма, так же как и монадного или диарного, целесообразно представить в виде четырех составных частей.

Алгебра. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = b^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}, \quad (7.52)$$

где $b_{\mu\nu}$ — метрический тензор 2-мерного сечения, содержащего временно-подобные направления, а $\gamma_{\mu\nu}$ — метрический тензор 2-мерного пространственно-подобного сечения. Метрические тензоры $b_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ ортогональны:

$$b_{\mu\nu} \gamma^{\mu\alpha} = 0. \quad (7.53)$$

Кроме того, имеют место соотношения:

$$b_{\mu}^{\nu} = b_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = b_{\mu\alpha} b^{\alpha\nu}; \quad \gamma_{\mu}^{\nu} = \gamma_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = -\gamma_{\mu\alpha} \gamma^{\alpha\nu}. \quad (7.54)$$

Введем операторы проектирования на 2-мерные b -сечения:

$$B_{\beta\nu\dots\sigma}^{\alpha\mu\dots\lambda} \equiv b_{\beta}^{\alpha} b_{\nu}^{\mu} \dots b_{\sigma}^{\lambda},$$

так что для произвольного тензора $A_{\beta\dots}^{\nu\dots}$ имеем:

$$\widehat{A}_{\alpha\dots}^{\mu\dots} \equiv B_{\nu\dots\alpha\dots}^{\mu\dots\beta\dots} A_{\beta\dots}^{\nu\dots}. \quad (7.55)$$

Получившиеся тензоры $\widehat{A}_{\alpha\dots}^{\mu\dots}$ будем называть b -спроектированными.

Аналогично введем операторы проектирования на 2-мерные пространственно-подобные γ -сечения:

$$\underbrace{\Gamma_{\beta\nu\dots\sigma}^{\alpha\mu\dots\lambda}}_p \equiv (-1)^p \gamma_{\beta}^{\alpha} \gamma_{\nu}^{\mu} \dots \gamma_{\sigma}^{\lambda},$$

так что для произвольного тензора $A_{\beta\dots}^{\nu\dots}$

$$\overline{A}_{\alpha\dots}^{\mu\dots} \equiv \Gamma_{\nu\dots\alpha\dots}^{\mu\dots\beta\dots} A_{\beta\dots}^{\nu\dots}. \quad (7.56)$$

Результирующие тензоры $\overline{A}_{\alpha\dots}^{\mu\dots}$ назовем γ -спроектированными. Например, квадрат пространственно-временного интервала можно записать следующим образом: $ds^2 = b_{\mu\nu} d\widehat{x}^{\mu} d\widehat{x}^{\nu} - \gamma_{\mu\nu} d\overline{x}^{\mu} d\overline{x}^{\nu}$.

Очевидно, возможны смешанные проекции, тогда значок проектирования « \wedge » или « $\overline{}$ » следует ставить над соответствующим индексом.

Диарные физико-геометрические тензоры. Из первых производных от диарных составляющих метрического тензора можно построить четыре и только четыре независимых диарных физико-геометрических тензора:

$$Q_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma},\overline{\beta}} = (1/2) (b_{\alpha}^{\mu} b_{\gamma}^{\sigma} + b_{\gamma}^{\mu} b_{\alpha}^{\sigma}) \gamma_{\beta}^{\nu} b_{\mu\nu;\sigma} = b_{\gamma}^{\sigma} b_{\alpha}^{\mu} B_{\mu\sigma,\varepsilon} \gamma_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (7.57)$$

$$S_{\overline{\alpha}\overline{\gamma},\overline{\beta}} = (1/2) (\gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\gamma}^{\sigma} + \gamma_{\gamma}^{\mu} \gamma_{\alpha}^{\sigma}) b_{\beta}^{\nu} b_{\mu\nu;\sigma} = \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\gamma}^{\sigma} E_{\mu\sigma,\varepsilon} b_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (7.58)$$

* Общековариантный диарный формализм под названием диадного развит в работах [111—113].

$$\Lambda_{\alpha}^{\widehat{\gamma}, \widehat{\beta}} = (1/2) (b_{\alpha}^{\mu} b_{\gamma}^{\sigma} - b_{\gamma}^{\mu} b_{\alpha}^{\sigma}) \gamma_{\beta}^{\nu} b_{\mu\nu;\sigma} = b_{\alpha}^{\mu} b_{\gamma}^{\sigma} E_{\varepsilon\sigma, \mu} \gamma_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (7.59)$$

$$W_{\alpha}^{\widehat{\gamma}, \widehat{\beta}} = (1/2) (\gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\gamma}^{\sigma} - \gamma_{\gamma}^{\mu} \gamma_{\alpha}^{\sigma}) b_{\beta}^{\nu} b_{\mu\nu;\sigma} = \gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\gamma}^{\sigma} B_{\varepsilon\sigma, \mu} b_{\beta}^{\varepsilon}. \quad (7.60)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения:

$$B_{\mu\sigma, \varepsilon} = (1/2) (b_{\mu\varepsilon, \sigma} + b_{\sigma\varepsilon, \mu} - b_{\mu\sigma, \varepsilon}); \quad B_{\mu\sigma}^{\lambda} = b^{\lambda\varepsilon} B_{\mu\sigma, \varepsilon};$$

$$E_{\mu\sigma, \varepsilon} = (1/2) (\gamma_{\mu\varepsilon, \sigma} + \gamma_{\sigma\varepsilon, \mu} - \gamma_{\mu\sigma, \varepsilon}); \quad E_{\mu\sigma}^{\lambda} = \gamma^{\lambda\varepsilon} E_{\mu\sigma, \varepsilon}.$$

Диарные операторы дифференцирования. Введем следующие четыре оператора дифференцирования b - и γ -спроектированных тензоров: диарную b -производную от γ -спроектированных тензоров

$$\overline{\partial}_{\lambda}^{\widehat{\gamma}} \overline{B}_{\beta}^{\nu \dots \alpha \dots} \equiv \Gamma_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} b_{\lambda}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \overline{B}_{\alpha}^{\mu \dots}, \quad (7.61)$$

ковариантную γ -производную от γ -спроектированных тензоров

$$\overline{\nabla}_{\lambda}^{\widehat{\gamma}} \overline{B}_{\beta}^{\nu \dots \alpha \dots} \equiv - \Gamma_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} \gamma_{\lambda}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \overline{B}_{\alpha}^{\mu \dots}, \quad (7.62)$$

диарную γ -производную от b -спроектированных тензоров

$$\widehat{\partial}_{\lambda}^{\widehat{\gamma}} \widehat{B}_{\beta}^{\nu \dots \alpha \dots} \equiv - B_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} \gamma_{\lambda}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \widehat{B}_{\alpha}^{\mu \dots}, \quad (7.63)$$

ковариантную b -производную от b -спроектированных тензоров

$$\widehat{\nabla}_{\lambda}^{\widehat{\gamma}} \widehat{B}_{\beta}^{\nu \dots \alpha \dots} \equiv B_{\mu \dots \beta \dots}^{\nu \dots \alpha \dots} b_{\lambda}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \widehat{B}_{\alpha}^{\mu \dots}. \quad (7.64)$$

Здесь ∇_{σ} — оператор обычного ковариантного дифференцирования относительно символов Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, которые выражаются через введенные величины следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = B_{\alpha\beta}^{\mu} + E_{\alpha\beta}^{\mu} - \gamma^{\mu\varepsilon} B_{\alpha\beta, \varepsilon} - b^{\mu\varepsilon} E_{\alpha\beta, \varepsilon}. \quad (7.65)$$

Запись общековариантных уравнений и соотношений в диарном виде. Это можно сделать, используя введенные диарные физико-геометрические тензоры и операторы проектирования и дифференцирования.

7.5. ГРУППОВЫЕ КАЛИБРОВКИ ДИАРНОГО ФОРМАЛИЗМА

В диарном формализме, так же как в монадном и диадном, существуют групповые калибровки, связанные с выделением характерных классов преобразований координат [114, 115]. Прямыми аналогами ранее рассмотренных калибровок являются четыре, которые, как будет показано, встречаются парами. Будем обозначать эти калибровки парами прописных букв: В (временно-подобное направление) и П (пространственно-подобное направление); причем, когда калибровки являются аналогами хронометрической (хориометрической) калибровки будем писать при этих буквах индекс выделяемой координаты вверху, а когда они являются аналогами кинеметрической (орометрической) калибровки, будем писать индекс выделяемой координаты внизу.

В⁰П¹- и П₂П₃-калибровки. Алгебра. Рассмотрим класс таких систем, в которых контравариантный метрический тензор $b^{\mu\nu}$ имеет вид (В⁰П¹-калибровка):

$$b^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} b^{00} & b^{01} & 0 & 0 \\ b^{10} & b^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. } b^{ab} \neq 0; \quad b^{\mu\varepsilon} = 0. \quad (7.66)$$

Здесь и в дальнейшем индексы $a, b, c \dots$ принимают значения 0 и 1, а индексы $\xi, \eta, \varphi, \psi, \zeta$ — значения 2 и 3. Все подобные системы координат связаны такими преобразованиями, что

$$b'^{\xi\sigma} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} b^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^0} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^1} = 0.$$

Это значит, что выделяются преобразования координат

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad (7.67)$$

$$x'^2 = x'^2(x^2, x^3); \quad x''^3 = x'^3(x^2, x^3). \quad (7.68)$$

В монадном формализме использовалось условие нормировки $\tau^{\nu}\tau_{\nu} = 1$. В диарном формализме потребуем выполнения соотношения

$$b^{a\nu} b_{c\nu} = g_c^a. \quad (7.69)$$

Тогда, вводя обозначения

$$b \equiv g_{00}g_{11} - g_{01}^2; \quad \gamma \equiv g^{23}g^{23} - g^{22}g^{33},$$

однозначно находим все компоненты тензоров $b_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} b^{00} &= g_{11}/b; \\ b^{01} &= -g_{01}/b; \\ b^{11} &= g_{00}/b; \end{aligned} \right\} b_{\mu\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & \overbrace{b_{\xi\eta}} & \\ g_{30} & g_{31} & & \end{pmatrix}; \quad (7.70)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{22} &= g^{33}/\gamma; \quad \gamma_{23} = -g^{23}/\gamma; \quad \gamma_{33} = g^{22}/\gamma; \quad \gamma_{a\mu} = 0; \\ \gamma^{\mu\nu} &= \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma^{ab} & & -g^{02} & -g^{03} \\ \hline -g^{20} & -g^{21} & -g^{22} & -g^{23} \\ -g^{30} & -g^{31} & -g^{32} & -g^{33} \end{array} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

где

$$b_{\xi\eta} = (1/b) [g_{11}g_{0\xi}g_{0\eta} + g_{00}g_{1\xi}g_{1\eta} - g_{01}(g_{0\xi}g_{1\eta} + g_{1\xi}g_{0\eta})];$$

$$\gamma^{ab} = (1/\gamma) [g^{33}g^{2a}g^{2b} + g^{22}g^{3a}g^{3b} - g^{23}(g^{2a}g^{3b} + g^{3a}g^{2b})].$$

Легко видеть, что формулы (7.70) и (7.71) можно было получить, исходя из $\Pi_2\Pi_3$ -калибровки, т. е. рассматривая такие системы координат, в которых ковариантный метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{т. е. } \gamma_{\xi\eta} \neq 0; \quad \gamma_{a\mu} = 0. \quad (7.72)$$

При этом опять приходим к выделению преобразований координат (7.67), (7.68). Условие (7.69) соответствует равенству

$$\gamma^{\xi\nu} \gamma_{\eta\nu} = g_{\eta}^{\xi}. \quad (7.73)$$

Назовем $V^0\Pi^1$ -инвариантными ($V^0\Pi^1$ - и.) 2-тензорами величины, которые остаются инвариантными при преобразованиях координат (7.67) и являются 2-мерно ковариантными при преобразованиях (7.68). Аналогично, назовем $\Pi_2\Pi_3$ -инвариантными ($\Pi_2\Pi_3$ - и.) 2-тензорами величины, которые, наоборот, инвариантны при преобразованиях (7.68) и 2-мерно ковариантны при преобразованиях (7.67). Свойством $V^0\Pi^1$ - и. обладают компоненты с индексами $\xi, \eta \dots = 2, 3$ γ -спроектированных тензоров, т. е.

$$\bar{A}_{\eta \dots}^{\xi \dots} = \Gamma_{\mu \dots \eta \dots}^{\xi \dots \nu \dots} A_{\nu \dots}^{\mu \dots} \quad (7.74)$$

Свойством $\Pi_2\Pi_3$ -и. обладают компоненты с индексами $a, b, c \dots = 0, 1$ b -спроектированных тензоров, т. е.

$$\widehat{A}_{b \dots}^a \dots = B_{\mu \dots b \dots}^a \dots A_{\nu \dots}^{\mu \dots} \quad (7.75)$$

Существенным свойством рассматриваемой калибровки диарного формализма является одновременное наличие величин двух типов: $V^0\Pi^1$ -и. и $\Pi_2\Pi_3$ -и. В хронометрической и кинеметрической калибровках монадного метода фактически имела место аналогичная ситуация, однако там из величин одного типа (пользуясь их одномерностью) можно было образовать инварианты относительно выделенного класса преобразований координат (делением на $\sqrt{g_{00}}$ или $\sqrt{g^{00}}$). Аналогичные инварианты можно построить и в этой калибровке диарного формализма, однако только из тензоров четного ранга. Так, для симметричных тензоров второго ранга $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$ имеем инварианты:

$$\left. \begin{aligned} B_{\mu\nu} b^{\mu\nu} &\equiv \widehat{B} = \frac{B_{00}g_{11} - 2B_{01}g_{01} + B_{11}g_{00}}{g_{00}g_{11} - g_{01}^2}; \\ B^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} &\equiv \bar{B} = \frac{B^{22}g^{33} - 2B^{23}g^{23} + B^{33}g^{22}}{g^{23}g^{23} - g^{22}g^{33}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.76)$$

Для антисимметричных тензоров второго ранга $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, воспользовавшись соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} (g_{00}g_{11} - g_{01}g_{01})' &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} - \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \right) (g_{00}g_{11} - g_{01}g_{01}); \\ (g^{23}g^{23} - g^{22}g^{33})' &= \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} - \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} \right) (g^{23}g^{23} - g^{22}g^{33}), \end{aligned} \right\} \quad (7.77)$$

получаем инварианты:

$$A_{01}/\sqrt{g_{01}g_{01} - g_{00}g_{11}}; A^{23}/\sqrt{g^{22}g^{33} - g^{23}g^{23}} \quad (7.78)$$

Физико-геометрические тензоры. В данной калибровке один из физико-геометрических тензоров тождественно обращается в нуль: $\Lambda_{ab, \xi} \equiv 0$; из оставшихся трех величин можно образовать смешанные тензоры: $Q_{ab, \xi}$; $S_{\xi\eta, a}$; $W_{\xi\eta, a}$.

Диарные операторы дифференцирования. Перечислим их.

1. Диарная b -производная по индексам 0, 1 от γ -спроектированных $V^0\Pi^1$ -и. величин записывается в виде

$$\bar{\partial}_a \bar{B}_{\eta \dots}^{\xi \dots} = \bar{\partial} B_{\eta \dots}^{\xi \dots} / \partial x^a \quad (7.79)$$

Действие оператора (7.79) не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. Этот оператор является прямым аналогом х. и. оператора временного дифференцирования в хронометрической калибровке монадного формализма.

2. Ковариантная γ -производная по индексам 2 и 3 от $V^0\Pi^1$ -и. тензоров

$$\bar{\nabla}_{\varphi} \bar{B}_{\eta \dots}^{\xi \dots} = -\gamma_{\varphi}^{\sigma} \bar{\partial} B_{\eta \dots}^{\xi \dots} / \partial x^{\sigma} + \bar{\Delta}_{\gamma\varphi}^{\xi} \bar{B}_{\eta \dots}^{\gamma \dots} + \dots - \bar{\Delta}_{\eta\varphi}^{\psi} \bar{B}_{\psi \dots}^{\xi \dots} - \dots \quad (7.80)$$

приводит к $V^0\Pi^1$ -и. выражениям. Здесь использовано обозначение $V^0\Pi^1$ -и. величины

$$\bar{\Delta}_{\psi\varphi}^{\xi} = \frac{1}{2} \gamma^{\xi\zeta} \left(-\gamma_{\varphi}^{\sigma} \frac{\partial \gamma_{\zeta\psi}}{\partial x^{\sigma}} - \gamma_{\psi}^{\sigma} \frac{\partial \gamma_{\zeta\varphi}}{\partial x^{\sigma}} + \gamma_{\zeta}^{\sigma} \frac{\partial \gamma_{\psi\varphi}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (7.81)$$

Оператор (7.81) — прямой аналог х. и. оператора ковариантного дифференцирования (3.82). Заметим, что оператор дифференцирования $V^0\Pi^1$ -и. тензоров

$$\bar{\partial}/\partial x^\sigma \equiv -\gamma_\sigma^\sigma \partial/\partial x^\sigma \quad (7.82)$$

также является $V^0\Pi^1$ -и. и не зависит от ранга дифференцируемой величины. Он является аналогом х. и. оператора пространственного дифференцирования (3.81).

3. Диарная γ -производная по индексам 2 и 3 от $\Pi_2\Pi_3$ -и. величин

$$\widehat{\partial}_\xi \widehat{B}_b^{a::} = -\gamma_\xi^\sigma \partial \widehat{B}_b^{a::} / \partial x^\sigma - \gamma_\xi^\sigma b_{\sigma,c}^a \widehat{B}_b^{c::} - \dots + \gamma_\xi^\sigma b_{\sigma,b}^c \widehat{B}_c^{a::} + \dots \quad (7.83)$$

по форме соответствует монадной временной производной (3.97) в кинеметрической калибровке.

4. Ковариантная b -производная по индексам 0 и 1 от $\Pi_2\Pi_3$ -и. величин

$$\widehat{\nabla}_c \widehat{A}_b^{a::} = \partial \widehat{A}_b^{a::} / \partial x^c + B_{cd}^a \widehat{A}_b^{d::} + \dots - B_{cb}^d \widehat{A}_d^{a::} - \dots \quad (7.84)$$

представляет собой 2-мерную ковариантную производную и по форме является прямым аналогом пространственной производной в кинеметрической калибровке монадного метода (или кинеметрической калибровке диадного формализма).

Запись основных соотношений ОТО. Зная выражение символов Кристоффеля через диарные величины

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = B_{\alpha\beta}^\mu + E_{\alpha\beta}^\mu - Q_{\alpha\beta}^\mu - S_{\alpha\beta}^\mu + W_{\beta,\alpha}^\mu + \bar{W}_{\alpha,\beta}^\mu + \Lambda_{\alpha,\beta}^\mu + \bar{\Lambda}_{\beta,\alpha}^\mu, \quad (7.85)$$

не трудно записать соотношения ОТО и теории поля через введенные $V^0\Pi^1$ -и. и $\Pi_2\Pi_3$ -и. величины и операторы.

Совокупность ($V_0\Pi_1$)- и ($\Pi^2\Pi^3$)-калибровок диарного метода. Эта совокупность представляет собой формализм, в некотором смысле обратный изложенному. Их соотношение такое же, как соотношение хронометрической и кинеметрической калибровок монадного формализма.

Данный вариант диарного формализма определяется условием, что ковариантный метрический тензор $b_{\mu\nu}$ имеет вид:

$$b_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & 0 & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } b_{ab} \neq 0; b_{\mu\xi} = 0. \quad (7.86)$$

В результате выделяются преобразования координат:

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1); x'^1 = x'^1(x^0, x^1); \quad (7.87)$$

$$x'^2 = x'^2(x^0, x^1, x^2, x^3); x'^3 = x'^3(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (7.88)$$

Все остальные элементы этого формализма строятся аналогично изложенному выше (см. [115]).

7.6. ВОЗМОЖНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДИАРНОГО ФОРМАЛИЗМА

Хроногеометрия и диарный формализм. Из определения диарного формализма следует, что он может оказаться полезным в тех задачах, где две координаты необходимо рассматривать симметрично друг другу. Именно такая ситуация имеет место в хроногеометрии (введение координат $T=\tau$ и $R=l$ методом послыки и приема световых сигналов). Как указывалось в § 2.3, там координаты времени и расстояния вводятся симметричным образом, причем имеющийся в хроногеометрии произвол в задании координат T, R, x^2, x^3 обус-

ловлен тремя факторами [116]: ходом часов одиночного наблюдателя (параметризацией мировой линии); выбором закона $T(s_1, s_2)$ и $R(s_1, s_2)$, где s_1 и s_2 — моменты собственного времени наблюдателя, соответствующие испусканию и приему сигнала [разумеется, чисто формально можно определить T и R иначе, чем это сделано в формулах (2.14) и (2.15)]; выбором координат на поверхностях $T = \text{const}$, $R = \text{const}$. Этот произвол соответствует преобразованиям координат: $T' = T'(T, R)$; $R' = R'(T, R)$; $x'^2 = x'^2(T, R, x^2, x^3)$; $x'^3 = x'^3(T, R, x^2, x^3)$. Видно, что эти преобразования совпадают с диарными преобразованиями (7.87) и (7.88) в $V_0\Pi_1$ -калибровке.

Диарный формализм как метод рассмотрения совокупности систем отсчета. Выясним возможный физический смысл $V_0\Pi_1$ -калибровки диарного формализма с позиций диадного метода в кинеметрической калибровке. Пусть нормальной системе отсчета с 4-скоростью $\tau^{(1)\mu}$ сопоставлена кинеметрическая система координат $(\tau^{(1)\mu})$ откалибрована кинеметрическим способом) и пусть в данной системе отсчета выделено кинеметрическим образом пространственно-подобное направление $l^{(1)\mu}$. Выберем вторую нормальную систему отсчета $(\tau^{(2)\mu})$ так, чтобы ее 3-скорость v^μ относительно первой системы отсчета была направлена вдоль вектора $l^{(1)\mu}$, т. е. $v^\mu = v l^{(1)\mu}$, где v — модуль 3-скорости (рис. 15). 3-Скорость системы $\tau^{(2)}$ относительно $\tau^{(1)}$ находится согласно соотношению (3.116). Переход от одной кинеметрической системы отсчета к другой, кинеметрически откалиброванной в новой системе координат, можно описать преобразованием координат (3.131). Подставляя в (3.131) выражение $v^\mu = v l^{(1)\mu}$ и учитывая, что в кинеметрической калибровке $l_k^{(1)} = -g_k^1 / \sqrt{+h^{11}}$, находим:

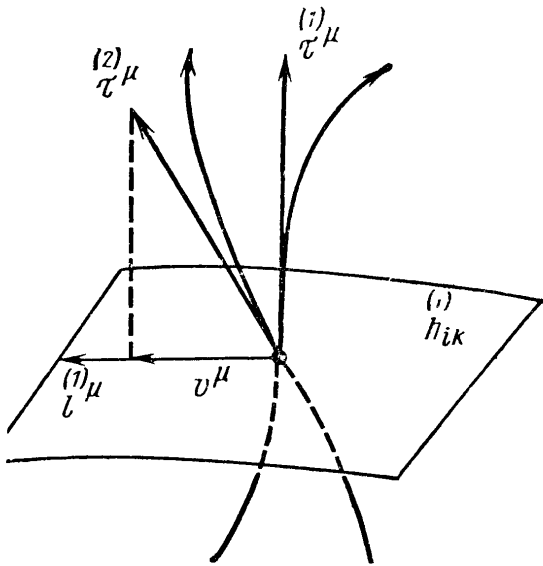


Рис. 15. Движение одной системы отсчета $(\tau^{(2)\mu})$ относительно другой $(\tau^{(1)\mu})$ вдоль вектора $l^{(1)\mu}$

вдоль выделенного кинеметрической калибровкой пространственно-подобного направления.

Аналогичный физический смысл может иметь диарный формализм в $V^0\Pi^1$ -калибровке с позиций диадного метода в хронохориометрической калибровке. В этом случае следует рассмотреть две системы отсчета с соответствующими координатными сетками, где их векторы $\tau^{(1)\mu}$ и $\tau^{(2)\mu}$ откалиброваны хронометрическим способом, а направление движения второй системы отсчета относительно первой $l^{(1)\mu}$ откалибровано хронохориометрическим способом.

Используя формулы предыдущих параграфов этой главы, легко сопоставить диарные и диадные физико-геометрические тензоры:

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_{\alpha\beta} &= -\tau^\lambda S_{\alpha\beta\lambda}; & d_{\alpha\beta} &= -l^\lambda S_{\alpha\beta\lambda}; \\ \bar{A}_{\alpha\beta} &= \tau^\lambda W_{\alpha\beta\lambda}; & a_{\alpha\beta} &= l^\lambda W_{\alpha\beta\lambda}; \\ \bar{F}_\beta &= -\tau^\alpha \tau^\lambda Q_{\alpha\lambda\beta}; & f_\beta &= -l^\alpha l^\lambda Q_{\alpha\lambda\beta}; \\ Q_\beta + q_\beta &= \tau^\alpha l^\lambda Q_{\alpha\lambda\beta}; & \Lambda_\beta &= \tau^\alpha l^\nu \Lambda_{\alpha\nu\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.89)$$

Отсюда следует возможная физическая интерпретация диарных физико-геометрических тензоров через диадные и монадные.

7.7. ТЕТРАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Легко видеть, что в 4-мерном многообразии задание в каждой точке трех ортогональных векторов равносильно определению всех четырех ортов. В таких случаях целесообразно использовать *тетрадный формализм* (метод) [117—122], который уже полностью характеризует наблюдателей в каждой точке, определяет весь ортонормированный набор пространственно-временных направлений. Основы математического аппарата тетрадного формализма, так же как математический аппарат монадного, диадного и диарного формализмов, изложим в виде четырех составных частей.

Алгебра. Как уже отмечалось, метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = g_\mu(\alpha) g_\nu(\alpha) = g_\mu(0) g_\nu(0) - g_\mu(1) g_\nu(1) - g_\mu(2) g_\nu(2) - g_\mu(3) g_\nu(3), \quad (7.90)$$

где четыре вектора тетрады $g_\mu(\alpha)$ ортонормированы:

$$g_\mu(0) g^\mu(\beta) = \varepsilon(\alpha\beta) = \begin{cases} +1 & \text{при } \alpha = \beta = 0; \\ -1 & \text{при } \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (7.91)$$

Напомним, что монадные и диадные составляющие метрического тензора следующим образом связаны с компонентами тетрады:

$$g_\mu(0) = \tau_\mu; \quad g_\mu(1) = l_\mu; \quad h_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 g_\mu(i) g_\nu(i);$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \sum_{\xi=2}^3 g_\mu(\xi) g_\nu(\xi). \quad (7.92)$$

Очевидно, что все четыре вектора тетрады в этом формализме равноправны. Теперь нецелесообразно вводить специальные обозначения операторов проектирования на отдельные направления, достаточно заменять универсальные индексы номером соответствующего проектирующего вектора в скобках, например;

$$B^\mu g_\mu(\alpha) \equiv B(\alpha); \quad B_\nu^\mu \dots g_\mu(\alpha) \dots g_\nu(\sigma) \dots = B(\alpha \dots \sigma \dots).$$

В наиболее распространенном варианте тетрадного формализма

используются смешанные величины, т. е. тензоры, лишь частично спроектированные, например $B_{\nu}^{\mu} \dots (\alpha \dots)$. Таким образом, в рассматриваемом формализме величины имеют индексы двух типов: универсальные (ковариантные и контравариантные) и локальные (в скобках). В этом состоит существенное отличие излагаемого тетрадного формализма от уже обсуждавшихся монадного, диадного и диарного, где используются лишь полностью спроектированные (на τ и h или на τ, l, γ и т. д.) тензоры. Можно сказать, что этот формализм имеет промежуточный (или смешанный) характер. В последовательном тетрадном формализме должны были присутствовать лишь проекции тензорных величин по всем индексам, т. е. скаляры. Примером такого последовательного тетрадного формализма является кратко изложенный в § 7.10 формализм изотропных тетрад Ньюмена — Пенроуза. Отметим, что сами компоненты тетрады можно понимать как метрический тензор с универсальным и локальным индексами:

$$g_{\mu}(\alpha) = g_{\mu\nu} g^{\nu}(\alpha); \quad g^{\mu}(\alpha) = g^{\mu\nu} g_{\nu}(\alpha).$$

В каждой точке пространства-времени с помощью соответствующего поворота можно перейти к новой тетраде:

$$g_{\mu}(\alpha)' = \omega(\alpha\beta) g_{\mu}(\beta), \quad (7.93)$$

где $\omega(\alpha\beta)$ — коэффициенты линейных преобразований компонент тетрады. Очевидно, что при таком преобразовании изменятся значения проекций тензоров на компоненты тетрады, т. е. величины с локальными индексами преобразуются по закону

$$B_{\nu}^{\mu} \dots (\alpha, \beta \dots)' = \omega(\alpha\gamma) \omega(\beta\lambda) \dots B_{\nu}^{\mu} \dots (\gamma\lambda \dots). \quad (7.94)$$

Таким образом, в тетрадном формализме определены две группы преобразований [119]: *группа универсальных допустимых преобразований* координат ОТО $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ (относительно этих преобразований скалярами являются величины только с локальными индексами); *группа локальных ортогональных преобразований* — поворотов тетрады (7.93) (относительно этих преобразований инвариантны тензоры только с универсальными индексами).

Тетрадные физико-геометрические тензоры. Тетрады в двух близких точках могут быть ориентированы относительно друг друга произвольно. Ограничимся случаями, когда в близких точках ориентации векторов близки, т. е. $g_{\mu}(\alpha)$ являются дифференцируемыми функциями. Тогда из первых производных $g_{\mu}(\alpha)$ можно образовать четыре тензора

$$C_{\nu\mu}(\alpha) = -C_{\mu\nu}(\alpha) = (1/2) (\partial g_{\mu}(\alpha) / \partial x^{\nu} - \partial g_{\nu}(\alpha) / \partial x^{\mu}), \quad (7.95)$$

обычно называемых *объектами неголономности*. Всевозможным образом проектируя их на векторы тетрады, можно образовать 24

величины (скаляра относительно группы универсальных допустимых координатных преобразований):

$$C(\lambda\sigma, \alpha) = C_{\nu\mu}(\alpha) g^\nu(\lambda) g^\mu(\sigma), \quad (7.96)$$

соответствующие ранее вводимым физико-геометрическим тензорам.

Термин «объект неголономности» связан со следующим обстоятельством. Дифференциалам координат dx^μ можно сопоставить смещения $dx(\alpha)$ в касательном в данной точке плоском пространстве $dx(\alpha) = g_\mu(\alpha) dx^\mu$. В случае стличных от нуля объектов неголономности компоненты тетрады не являются компонентами градиента ($g_\mu(\alpha) \neq \partial X(\alpha)/\partial x^\mu$), а следовательно, величины $dx(\alpha)$ не являются полными дифференциалами в отличие от выражения $dx'^\mu = (\partial x'^\mu/\partial x^\nu) dx^\nu$, которое можно проинтегрировать. В последнем случае преобразование $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ называют *голономным*.

Некоторые компоненты объектов неголономности ранее уже использовались при получении монадных и диадных физико-геометрических тензоров: $C_{\nu\mu}(0) \rightarrow \{F_\mu; A_{\mu\nu}\}$; $C_{\nu\mu}(1) \rightarrow \{f_\mu, a_{\mu\nu}\}$.

Дифференциальный аппарат. В связи с «промежуточным» характером рассматриваемого формализма в нем можно ввести следующие типы операторов дифференцирования.

а. Производные Ли от тензорных величин вдоль векторов тетрады

$$\begin{aligned} \partial(\alpha) B_{\nu}^{\mu}::: (\beta \dots) &\equiv \underset{g_{\sigma}(\alpha)}{\mathcal{L}} B_{\nu}^{\mu}::: (\beta \dots) = g^{\sigma}(\alpha) \partial B_{\nu}^{\mu}::: (\beta \dots) / \partial x^{\sigma} - \\ &- B_{\nu}^{\sigma}::: (\beta \dots) \partial g^{\mu}(\alpha) / \partial x^{\sigma} - \dots + \\ &+ B_{\sigma}^{\mu}::: (\beta \dots) \partial g^{\sigma}(\alpha) / \partial x^{\nu} + \dots \end{aligned} \quad (7.97)$$

В последовательном тетрадном формализме эти операторы существенно упрощаются: $\partial(\alpha) = g^{\sigma}(\alpha) \partial / \partial x^{\sigma}$.

б. Ковариантные производные от тензоров с локальными индексами. Сначала определим операцию параллельного переноса вектора $B(\alpha)$. Как обычно, полагая, что в близких точках разность компонент линейно выражается через компоненты переносимой величины и разность координат, имеем:

$$B(\alpha | x + dx) = [\delta(\alpha\beta) + \Delta_{\sigma}(\alpha\beta) dx^{\sigma}] B(\beta | x), \quad (7.98)$$

где $\Delta_{\sigma}(\alpha\beta)$ — коэффициенты вращения Риччи, которые играют роль символов Кристоффеля.

Чтобы вычислить свойства $\Delta_{\sigma}(\alpha\beta)$, учтем, что в римановой геометрии при параллельном переносе длина вектора $B_{\mu}B^{\mu} = B(\alpha)B(\alpha)$ остается неизменной, т. е.

$$\begin{aligned} B(\alpha | x + dx) B(\alpha | x + dx) &= B(\alpha | x) B(\alpha | x) \approx B(\alpha | x) B(\alpha | x) + \\ &+ B(\beta | x) B(\gamma | x) [\Delta_{\sigma}(\gamma\beta) + \Delta_{\sigma}(\beta\gamma)] dx^{\sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда следует антисимметрия коэффициентов вращения Риччи: $\Delta_\sigma(\gamma\beta) = -\Delta_\sigma(\beta\gamma)$. Ковариантная производная от вектора с локальным индексом определяется как разность частной производной и изменения вектора, вызванного различием векторов тетрады в соседних точках, т. е.

$$\nabla_\sigma B(\alpha) = \partial B(\alpha)/\partial x^\sigma - \Delta_\sigma(\alpha\beta) B(\beta).$$

Для произвольного тензора с универсальными и локальными индексами оператор ковариантного дифференцирования имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma B_v^{\mu\dots}(\alpha \dots) &= \partial B_v^{\mu\dots}(\alpha \dots)/\partial x^\sigma + \\ &+ \Gamma_{\lambda\sigma}^v B_v^{\lambda\dots}(\alpha \dots) + \dots - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda B_\lambda^{\mu\dots}(\alpha \dots) - \\ &- \dots - \Delta_\sigma(\alpha\beta) B_v^{\mu\dots}(\beta \dots) - \dots \end{aligned} \quad (7.99)$$

Установим связь между символами Кристоффеля и коэффициентами вращения Риччи. Положив $\nabla_\sigma g_\mu(\alpha) = 0$, найдем:

$$\partial g_\mu(\alpha)/\partial x^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_\lambda(\alpha) - \Delta_\nu(\alpha\beta) g_\mu(\beta) = 0.$$

Отсюда имеем искомые формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= g^\lambda(\alpha) \partial g_\mu(\alpha)/\partial x^\nu - \Delta_\nu(\alpha\beta) g_\mu(\beta) g^\lambda(\alpha); \\ \Delta_\nu(\alpha\beta) &= g^\mu(\beta) \partial g_\mu(\alpha)/\partial x^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_\lambda(\alpha) g^\mu(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (7.100)$$

Введем обозначения:

$$\Delta_{\alpha, \beta\gamma} \equiv \Delta_\alpha(\mu\nu) g_\beta(\mu) g_\gamma(\nu); \quad \Delta(\lambda, \mu\nu) \equiv \Delta_\alpha(\mu\nu) g^\alpha(\lambda).$$

Из формул (7.100) можно выразить объекты неголономности через $\Delta_\lambda(\mu\nu)$ и обратно:

$$C_{\nu\mu}(\alpha) = (1/2) g^\sigma(\alpha) (\Delta_{\nu, \sigma\mu} - \Delta_{\mu, \sigma\nu}); \quad (7.101)$$

$$\Delta_{\mu, \alpha\nu} = g_\nu(\beta) C_{\alpha\mu}(\beta) + g_\alpha(\beta) C_{\mu\nu}(\beta) - g_\mu(\beta) C_{\nu\alpha}(\beta). \quad (7.102)$$

Из (7.102) и (7.95) следует явное выражение $\Delta_{\mu, \alpha\nu}$ через производные от компонент тетрады:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu, \alpha\nu} &= \frac{1}{2} \left[g_\nu(\beta) \left(\frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^\mu} \right) + g_\alpha(\beta) \left(\frac{\partial g_\nu(\beta)}{\partial x^\mu} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^\nu} \right) + g_\mu(\beta) \left(\frac{\partial g_\nu(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Запись основных соотношений ОТО. Тензор Римана — Кристоффеля легко выражается через коэффициенты вращения Риччи или непосредственно с помощью формул (7.100), или независимо посредством параллельного переноса вектора $B(\alpha)$ по замкнутому контуру. В последнем случае

$$\Delta B(\alpha) = (1/2) R_{\sigma\nu}(\alpha\beta) B(\beta) ds^{\sigma\nu},$$

где тензор Римана — Кристоффеля имеет вид:

$$R_{\sigma\nu}(\alpha\beta) = \partial\Delta_\nu(\alpha\beta)/\partial x^\sigma - \partial\Delta_\sigma(\alpha\beta)/\partial x^\nu + \\ + \Delta_\nu(\alpha\gamma)\Delta_\sigma(\gamma\beta) - \Delta_\sigma(\alpha\gamma)\Delta_\nu(\gamma\beta). \quad (7.104)$$

Отсюда, например, для скалярной кривизны находим:

$$R = R_{\sigma\nu}(\alpha\beta)g^\sigma(\alpha)g^\nu(\beta) = 2g^\nu(\beta)g^\sigma(\alpha)\partial\Delta_\nu(\alpha\beta)/\partial x^\sigma + \\ + \Delta(\beta\alpha\gamma)\Delta(\alpha\gamma\beta) + \Delta(\beta\gamma\beta)\Delta(\beta\gamma\beta). \quad (7.105)$$

Уравнения Эйнштейна в тетрадной форме записываются следующим образом:

$$R_\nu(\alpha) - (1/2)g_\nu(\alpha)R = \kappa T_\nu(\alpha) \quad \text{или} \quad R(\alpha\beta) - (1/2)\varepsilon(\alpha\beta)R = \kappa T(\alpha\beta).$$

Другие соотношения и тождества также легко переписать в тетрадной форме. Это относится и к уравнениям для тензорных полей. Особое значение тетрадная формулировка ОТО имеет для записи уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени (см. § 7.9).

7.8. КАЛИБРОВКИ ТЕТРАДНОГО ФОРМАЛИЗМА

Исходя из известных значений метрического тензора, можно распространить групповые калибровки монадного и диадного методов на тетрадный формализм. Однако предварительно подсчитаем, сколько должно быть при этом независимых калибровочных условий, т. е. соотношений, связывающих компоненты $g_\mu(\alpha)$ с $g_{\mu\nu}$ [120, 121]: компонент $g_{\mu\nu}$ 10, а компонент $g_\mu(\alpha)$ 16. Поэтому в общем случае необходимо шесть независимых калибровочных условий. Аналогично было в монадном, диадном и диарном формализмах. Действительно, в монадном формализме 14 переменных: четыре компоненты τ_μ и 10 компонент $h_{\mu\nu}$; но компоненты τ_μ связаны одним условием нормировки $\tau_\mu\tau_\nu g^{\mu\nu} = 1$. Итого, на 13 величин налагалось три калибровочных условия: $\tau^\mu = g_0^\mu/\sqrt{g_{00}}$, или $\tau_\mu = g_\mu^0/\sqrt{g^{00}}$. В диадном формализме 18 переменных: четыре компоненты τ_μ , четыре компоненты l_μ и 10 компонент $\gamma_{\mu\nu}$. Однако на эти величины наложено два условия нормировки ($\tau_\mu\tau_\nu g^{\mu\nu} = 1$, $l_\mu l_\nu g^{\mu\nu} = -1$) и одно условие ортогональности $\tau_\mu l_\nu g^{\mu\nu} = 0$. Итого остается 15 величин, на которые налагается пять независимых калибровочных условий: $\tau_\mu = \tau_\mu(g_{\mu\nu})$; $l_\mu = l_\mu(g_{\mu\nu})$. В тетрадном формализме к этим условиям добавится еще одно.

Аналогично хронометрической калибровке монады или хронохориометрической калибровке диады можно ввести *полную хронохориометрическую калибровку тетрады*:

$$\left. \begin{aligned} g^\mu(0) = \tau^\mu = g_0^\mu/\sqrt{g_{00}}; \quad g^\mu(1) = l^\mu = *h_1^\mu/\sqrt{*h_{11}}; \\ g^\mu(2) = \xi^\mu = **\gamma_2^\mu / \sqrt{**\gamma_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.106)$$

При этом выделяется следующий класс преобразований координат:

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3); \quad (7.107)$$

$$x'^2 = x'^2(x^2, x^3); \quad x'^3 = x'^3(x^3).$$

Величины, спроектированные по всем индексам на векторы откалиброванной таким образом тетрады, инвариантны относительно этих преобразований координат. С помощью преобразований координат, выходящих за пределы указанного класса, можно описывать переход к иной ориентации тетрады при сохранении для нее полной хронохориометрической калибровки.

Подобным образом вводится *полная кинеметрическая калибровка* тетрады:

$$\left. \begin{aligned} g_\mu(0) = \tau_\mu = g_\mu^0 / \sqrt{g^{00}}; \quad g_\mu(1) = l_\mu = {}^+h_\mu^1 / \sqrt{{}^+h^{11}}; \\ g_\mu(2) = \gamma_\mu^2 / \sqrt{\gamma^{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.108)$$

Эта калибровка выделяет класс преобразований координат

$$\begin{aligned} x'^0 = x'^0(x^0); \quad x'^1 = x'^1(x^0, x^1); \\ x'^2 = x'^2(x^0, x^1, x^2); \quad x'^3 = x'^3(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (7.109)$$

В таком формализме инвариантами относительно этих преобразований являются проекции тензорных величин по всем индексам на направления откалиброванной указанным способом тетрады.

Рассмотренные здесь калибровки естественно назвать *однородными*. Заметим, что до сих пор всегда на первом этапе выделяли временную координату x^0 . Однако, как это уже отмечалось, можно построить откалиброванные формализмы с выделением на первом этапе пространственной координаты. Для таких калибровок (формализмов) можно использовать унифицированные обозначения. Буква T перед скобкой указывает упорядочение калибровок; в скобках обозначено V^0 — хронометрическая калибровка, V_0 — кинеметрическая калибровка, Π^i — хориометрическая калибровка, соответствующая координате x^i , Π_i — орометрическая калибровка, соответствующая координате x^i . Тогда, например, полная хронохориометрическая калибровка тетрады (7.106) будет обозначаться $T(V^0, \Pi^1, \Pi^2, \Pi^3)$, а полная кинеметрическая калибровка тетрады (7.108) — $T(V_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$.

Если не различать упорядоченностей среди пространственных направлений, то легко показать, что имеются четыре различные однородные тетрадные калибровки, так как из восьми тождественны следующие калибровки: $T(\Pi^1, \Pi^2, \Pi^3, V^0) = T(V_0, \Pi_3, \Pi_2, \Pi_1)$; $T(\Pi^1, \Pi^2, V^0, \Pi^3) = T(\Pi_3, V_0, \Pi_2, \Pi_1)$; $T(\Pi^1, V^0, \Pi^2, \Pi^3) = T(\Pi_3, \Pi_2, V_0, \Pi_1)$; $T(V^0, \Pi^1, \Pi^2, \Pi^3) = T(\Pi_3, \Pi_2, \Pi_1, V_0)$.

Аналогично можно рассмотреть *смешанные* калибровки тетрад, т. е. такие, когда одновременно присутствуют и хроно- (хорио-) и кинеметрические калибровки [103]. Различных тетрадных калибровок значительно меньше, чем этого можно было ожидать при формальном построении комбинаций из введенных символов. Это можно усмотреть уже на уровне диадных калибровок, где имеем три пары тождественных формализмов: $T(V^0, \Pi_1) = T(\Pi_1, V^0)$; $T(\Pi^1, V_0) = T(V_0, \Pi^1)$; $T(\Pi^1, \Pi_2) = T(\Pi_2, \Pi^1)$.

Заметим, что рассмотренные в § 3.9 калибровки Ламе компонент 3-мерного метрического тензора h_{ik} относятся к рассматриваемым здесь полным хорио- и орометрическим калибровкам. Для диагональных метрик (как в гл. 3) эти калибровки совпадают. Кроме рассмотренных здесь алгебраических калибровок, в ряде работ применялись другие алгебраические калибровки [117, 121] и калибровки в виде дифференциальных соотношений. Например, в [119, 122] широко использована калибровка

$$\nabla'_\sigma g^\sigma(\alpha) \equiv \partial g^\sigma(\alpha)/\partial x^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma g^\lambda(\alpha) = 0, \quad (7.110)$$

напоминающая условия Лоренца в электродинамике. Условия (7.110) можно записать в виде $C_{\sigma\mu}^\sigma = C_{\sigma\mu}(\alpha) g^\sigma(\alpha) = 0$. В этой калибровке формально упрощаются некоторые соотношения в тетрадной формулировке ОТО.

7.9. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Важным приложением тетрадного формализма является его использование для описания спинорных частиц в искривленном пространстве-времени. Известно, что понятие спинора имеет смысл только в плоском пространстве-времени, где определена группа преобразований Лоренца. Однако, как уже отмечалось, в тетрадной формулировке ОТО в каждой точке пространства-времени определено касательное плоское пространство-время с группой вращений, т. е. локально понятие спинора имеет смысл. При переходе от одной точки к другой меняется ориентация векторов тетрады, поэтому следует ожидать изменения компонент спиноров.

Рассмотрим соотношение компонент спиноров в близких точках, следуя работам [14, с. 415; 123]. Из общих соображений следует ожидать, что

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x+dx) &= \Psi(x) + \Gamma_\lambda \Psi(x) dx^\lambda; \\ \bar{\Psi}(x+dx) &= \bar{\Psi}(x) + \bar{\Psi}(x) \tilde{\Gamma}_\lambda dx^\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (7.111)$$

где Γ_λ и $\tilde{\Gamma}_\lambda$ — квадратные 4-рядные матрицы. Установим связь между ними. Используя соотношения: $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma(0)$; $\gamma(0)\gamma(0) = I$, находим:

$$\bar{\Psi}(x) \tilde{\Gamma}_\lambda = (\Gamma_\lambda \Psi(x))^+ \gamma(0) = \Psi^+(x) \Gamma_\lambda^+ \gamma(0) = \bar{\Psi}(x) \gamma(0) \Gamma_\lambda^+ \gamma(0),$$

$$\tilde{\Gamma}_\lambda = \gamma(0) \Gamma_\lambda^+ \gamma(0). \quad (7.112)$$

Чтобы найти явный вид матриц Γ_λ , воспользуемся тем, что из величин Ψ и $\bar{\Psi}$ можно построить вектор

$$B(\alpha) = \bar{\Psi} \gamma(\alpha) \Psi, \quad (7.113)$$

а для произвольного вектора с локальным индексом известен закон параллельного переноса (7.98). Подставляя (7.113) в (7.98) и учитывая (7.111), получаем в первом приближении

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi} \gamma(\alpha) \Psi)_{x+dx} &= (\bar{\Psi} \gamma(\alpha) \Psi)_x + \Delta_\sigma(\alpha\beta) dx^\sigma (\bar{\Psi} \gamma(\beta) \Psi)_x = \\ &= \bar{\Psi}(x+dx) \gamma(\alpha) \Psi(x+dx) = \bar{\Psi}(x) \gamma(\alpha) \Psi(x) + \\ &+ \bar{\Psi}(x) \gamma(\alpha) \Gamma_\mu \Psi(x) dx^\mu + \bar{\Psi}(x) \gamma(0) \Gamma_\lambda^+ \gamma(0) \gamma(\alpha) \Psi(x) dx^\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение для матриц Γ_λ :

$$\Delta_\sigma(\alpha\beta) \gamma(\beta) = \gamma(\alpha) \Gamma_\sigma + \gamma(0) \Gamma_\sigma + \gamma(0) \Gamma_\sigma^+ \gamma(0) \gamma(\alpha). \quad (7.114)$$

Естественно решать это уравнение в виде выражений, составленных из $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$ и матриц $\gamma(\mu)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что простейшее решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\sigma &= i A_\sigma + (1/4) \Delta_\sigma(\mu\nu) \gamma(\mu) \gamma(\nu); \\ \Gamma_\sigma^+ &= -i A_\sigma + (1/4) \Delta_\sigma(\mu\nu) \gamma^+(\nu) \gamma^+(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (7.115)$$

где A_σ — произвольный вектор.

Из (7.111) и (7.115) получаем выражение для ковариантной производной от спинора

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\mu \Psi &= \partial \Psi / \partial x^\mu - (1/4) \Delta_\mu(\alpha\beta) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) \Psi - i A_\mu \Psi; \\ \nabla_\mu \bar{\Psi} &= \partial \bar{\Psi} / \partial x^\mu - (1/4) \Delta_\mu(\alpha\beta) \bar{\Psi} \gamma(\beta) \gamma(\alpha) + i A_\mu \bar{\Psi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.116)$$

Вводя обозначение $\partial/\partial x(\lambda) \equiv g^\mu(\lambda) \partial/\partial x^\mu$ и вспоминая, что переход к искривленному пространству-времени осуществляется заменой частных производных ковариантными, находим уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени:

$$\begin{aligned} &[-i \gamma(\lambda) \partial/\partial x(\lambda) - A(\lambda) \gamma(\lambda) + \\ &+ (i/4) \Delta(\lambda\alpha\beta) \gamma(\lambda) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) + mc/\hbar] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Любопытно, что в выражениях (7.115) — (7.117) можно ввести ковариантную производную вектор A_μ , который входит точно так же, как векторный электромагнитный потенциал при учете взаимодействия спинорного и электромагнитного полей.

Уравнения (7.117) можно переписать с криволинейными универсальными индексами, вводя обозначение $\gamma^\mu = \gamma(\lambda) g^\mu(\lambda)$, где $g^\mu(\lambda)$ теперь определяют переход от криволинейной системы

координат к такой локальной декартовой, в которой матрицы $\gamma(\lambda)$ имеют обычный вид. В результате получаем*:

$$[-i\gamma^\mu \partial/\partial x^\mu - A_\mu \gamma^\mu + (i/4) \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + mc/\hbar] \Psi = 0. \quad (7.117a)$$

Этот вид уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени можно получить и при подходе Зоммерфельда — Мицкевича, когда Ψ рассматривается как набор из четырех скаляров. Тогда следует перейти к так называемой γ -матричной формулировке ОТО [124—126]. В качестве основных переменных в такой формулировке выбирают элементы γ -матриц, связанные с метрическим тензором соотношением

$$\gamma_\mu(x) \gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x) \gamma_\mu(x) = 2g_{\mu\nu}(x) I.$$

Величины $\gamma_\mu(x)$ являются векторами, зависящими от координат. Ковариантную производную от них находим обычным образом:

$$\nabla_\nu \gamma_\mu = \partial \gamma_\mu / \partial x^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda.$$

Н. В. Мицкевич показал [8, 126], что в этом подходе уравнения Дирака в плоском пространстве-времени следует записывать в виде

$$\left\{ -i\gamma(\mu) \frac{\partial}{\partial x(\mu)} + \frac{i}{8} \left[\gamma(\lambda) \frac{\partial \gamma(\kappa)}{\partial x(\lambda)} \gamma(\kappa) - \gamma(\kappa) \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial x(\lambda)} \gamma(\lambda) \right] + \frac{mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0.$$

Так как в декартовых координатах матрицы $\gamma(\lambda)$ не зависят от координат, дополнительный член в квадратных скобках в плоском пространстве-времени пропадает. В искривленном многообразии, как уже отмечалось, следует заменить частные производные ковариантными. В результате получим уравнения (7.117a).

7.10. ФОРМАЛИЗМ ИЗОТРОПНЫХ ТЕТРАД НЬЮМЕНА — ПЕНРОУЗА И ЕГО СВЯЗЬ С ДИАДНЫМ МЕТОДОМ

В большой серии работ по анализу алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна и нахождению новых точных решений уравнений Эйнштейна оказался чрезвычайно эффективным *формализм (метод) изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза* [91, 127]. В отличие от всех ранее изложенных формализмов этот метод нацелен не на описание наблюдаемых и свойств систем отсчета, а на анализ именно алгебраической структуры пространственно-временных многообразий и получение точных решений уравнений Эйнштейна. Эффективность метода объясняется тем, что тензор Римана—Кристоффеля (Вейля) обладает изотропными собственными векторами, в качестве которых можно выбрать векторы тетрады Ньюмена—Пенроуза. Таким образом, этот формализм можно органически связать со структурой пространства-времени.

Важно отметить, что в формализме Ньюмена—Пенроуза используются комплексные величины. Из четырех векторов тетрады Ньюмена—Пенроуза два являются действительными; им можно сопоставить временно-подобный вектор τ^μ и пространственно-подобный вектор l^μ , которые выделяют привилегирован-

ную систему отсчета и пространственное направление диады. Именно по этой причине в данном параграфе метод Ньюмена—Пенроуза сопоставлен диадному методу. Представим рассматриваемый формализм, как и предыдущие, в виде четырех составных частей.

Алгебра. Изотропная тетрада $\{b_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ состоит из двух действительных векторов b_μ и n_μ и двух комплексно-сопряженных, которые можно построить из двух единичных пространственно-подобных векторов a_μ и γ_μ :

$$m_\mu = (1/\sqrt{2})(a_\mu - i\gamma_\mu); \bar{m}_\mu = (1/\sqrt{2})(a_\mu + i\gamma_\mu). \quad (7.118)$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ можно записать через тетраду Ньюмена—Пенроуза

$$g_{\mu\nu} = b_\mu n_\nu + n_\mu b_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\nu m_\mu. \quad (7.119)$$

Векторы тетрады удовлетворяют следующим условиям квазиортогональности:

$$\left. \begin{aligned} b_\mu b^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0; \quad b_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1; \\ b_\mu m^\mu = b_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.120)$$

Легко видеть, что диадные составляющие метрического тензора можно связать с тетрадой Ньюмена—Пенроуза

$$\left. \begin{aligned} \tau_\mu = (1/\sqrt{2})(b_\mu + n_\mu); \quad l_\mu = (1/\sqrt{2})(b_\mu - n_\mu); \\ \gamma_{\mu\nu} = m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (7.121)$$

В формализме Ньюмена—Пенроуза, как последовательном тетрадном формализме, оперируют со скалярами, полученными из тензоров проектированием на направления изотропных тетрад. Такие проекции тензора Римана—Кристоффеля и тензора Максвелла образуют набор скаляров Ньюмена—Пенроуза. Выпишем их.

Тензор Максвелла можно представить в виде трех независимых комплексных скаляров:

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 = F_{\mu\nu} b^\mu m^\nu; \quad \phi_2 = -F_{\mu\nu} n^\mu \bar{m}^\nu; \\ \phi_1 = (1/2) F_{\mu\nu} (b^\mu n^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu). \end{aligned} \right\} \quad (7.122)$$

При помощи формулы

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta} + \Phi_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \Phi_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + \Phi_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} - \Phi_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + \\ + 2\Lambda(g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta})$$

тензор Римана—Кристоффеля можно выразить через скалярную кривизну $R \equiv -24\Lambda$, тензор Вейля $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ и девиатор тензора Риччи $2\Phi_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - (1/4)g_{\mu\nu}R$. Последним тензором сопоставлены пять комплексных скаляров:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 = -C_{\mu\nu\alpha\beta} b^\mu m^\nu b^\alpha m^\beta; \quad \Psi_1 = -C_{\mu\nu\alpha\beta} b^\mu n^\nu b^\alpha m^\beta; \\ \Psi_2 = -(1/2)C_{\mu\nu\alpha\beta} (b^\mu n^\nu b^\alpha n^\beta - b^\mu n^\nu m^\alpha \bar{m}^\beta); \\ \Psi_3 = -C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu b^\nu n^\alpha \bar{m}^\beta; \quad \Psi_4 = -C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu \bar{m}^\nu n^\alpha \bar{m}^\beta, \end{aligned} \right\} \quad (7.123)$$

три действительных и три комплексных скаляра:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{00} = \Phi_{\mu\nu} b^\mu b^\nu; \quad \Phi_{01} = \Phi_{\mu\nu} b^\mu m^\nu; \quad \Phi_{02} = \Phi_{\mu\nu} m^\mu m^\nu; \\ \Phi_{10} = \Phi_{\mu\nu} b^\mu \bar{m}^\nu; \quad \Phi_{11} = \Phi_{\mu\nu} b^\mu n^\nu; \quad \Phi_{12} = \Phi_{\mu\nu} n^\mu m^\nu; \\ \Phi_{20} = \Phi_{\mu\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu; \quad \Phi_{21} = \Phi_{\mu\nu} n^\mu \bar{m}^\nu; \quad \Phi_{22} = \Phi_{\mu\nu} n^\mu n^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (7.124)$$

Спиновые коэффициенты Ньюмена—Пенроуза (физико-геометрические скаляры). Они соответствуют основным физико-геометрическим тензорам в предыдущих формализмах и определяются как независимые проек-

ции ковариантных производных векторов тетрады (коэффициентов вращения Риччи) на направления изотропных тетрад:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= b_{\mu;\nu} m^\mu b^\nu; & \pi &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu b^\nu; \\ \tau &= b_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu; & \nu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu; \\ \sigma &= b_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu; & \mu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu; \\ \rho &= b_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu; & \lambda &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu; \\ \epsilon &= (1/2) (b_{\mu;\nu} n^\mu b^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu b^\nu); \\ \gamma &= (1/2) (b_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu); \\ \beta &= (1/2) (b_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu); \\ \alpha &= (1/2) (b_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu). \end{aligned} \right\} \quad (7.125)$$

Всего существует 12 комплексных спиновых коэффициентов Ньюмена—Пенроуза.

Диадные физико-геометрические тензоры легко записать через спиновые коэффициенты Ньюмена—Пенроуза, например:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_\beta &= - (1/2) [(\kappa + \tau - \bar{\pi} - \bar{\nu}) \bar{m}_\beta + (\bar{\kappa} + \bar{\tau} - \pi - \nu) m_\beta]; \\ f_\beta &= - (1/2) [(\kappa - \tau + \bar{\pi} - \bar{\nu}) \bar{m}_\beta + (\bar{\kappa} - \bar{\tau} + \pi - \nu) m_\beta]. \end{aligned} \right\} \quad (7.126)$$

Операторы дифференцирования. В формализме Ньюмена—Пенроуза введены специальные обозначения для операторов ковариантного дифференцирования вдоль направлений изотропной тетрады:

$$D = b^\mu \nabla_\mu; \quad \Delta = n^\mu \nabla_\mu; \quad \delta = m^\mu \nabla_\mu; \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu. \quad (7.127)$$

Так как в основном рассматривается действие этих операторов на скаляры, указанные операторы совпадают с производными Ли вдоль соответствующих направлений. Для записи диадных операторов дифференцирования через операторы (7.127) следует воспользоваться соотношением

$$\bar{B}_\mu = -B_\nu \gamma_\mu^\nu = -B_\nu (m_\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}_\mu m^\nu) = -m_\mu (B_\nu \bar{m}^\nu) - \bar{m}_\mu (B_\nu m^\nu).$$

Запись основных соотношений ОТО. В формализме Ньюмена—Пенроуза в качестве основных величин гравитационного поля рассматриваются: компоненты тетрад, спиновые коэффициенты (7.125) и полный набор независимых скалярных проекций тензора Римана—Кристоффеля (7.123), (7.124). В качестве уравнений для этих переменных рассматриваются: независимые проекции тождеств Бианки на направления изотропных тетрад, проекции тождеств Риччи, координатные уравнения для компонент тетрад. Все эти довольно громоздкие уравнения можно найти в работах и обзорах по формализму Ньюмена—Пенроуза (см., например, [91, 128]). Кроме того, конечно, используются уравнения Эйнштейна как выражения девиатора тензора Риччи Φ_{ab} и Λ через тензор энергии-импульса материи.

Глава 8

ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

8.1. СУТЬ ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Проблема энергии-импульса гравитационного поля возникла сразу же после создания ОТО; с тех пор было затрачено много

усилий для ее разрешения, однако полное единодушие по этому вопросу не достигнуто до сих пор.

Как известно, законы сохранения энергии и импульса материи в плоском пространстве-времени выводятся из соотношения

$$\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\nu = 0, \quad (8.1)$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи. Записав интеграл от (8.1) по 4-объему, с помощью теоремы Остроградского — Гаусса можно перейти к интегрированию $T^{\mu\nu}$ по 3-мерной гиперповерхности, ограничивающей выбранный 4-объем. Беря в качестве 4-объема область пространства-времени, заключенную между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями $x_{(1)}^0 = \text{const}$ и $x_{(2)}^0 = \text{const}$, и полагая, что на пространственной бесконечности $T^{\mu\nu} = 0$, получаем законы сохранения:

$$\int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = \int T^{\mu 0} d^3x \equiv P^\mu = (\text{const})^\mu. \quad (8.2)$$

В искривленном пространстве-времени тензор энергии-импульса материи обладает свойством $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, что в общем случае не соответствует сохранению какой-либо величины, так как для перехода к интегрированию по гиперповерхности необходимо иметь обычную, а не ковариантную дивергенцию. Это же выражение можно представить в виде

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = (1/\sqrt{-g}) (\partial/\partial x^\nu) (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} = 0. \quad (8.3)$$

«Лишним» оказывается последний член справа. Таким образом, в искривленном пространстве-времени ОТО, вообще говоря, не выполняются законы сохранения энергии и импульса материи.

Однако в ОТО, как и в плоском пространстве-времени, имеет место закон сохранения заряда. Последний следует из соотношения $\nabla_\mu j^\mu = 0$, которое можно записать в виде

$$\nabla_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} j^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} j^\mu) = 0. \quad (8.4)$$

Отсюда легко получить закон сохранения заряда

$$\int_V \sqrt{-g} (\nabla_\mu j^\mu) d^4x = \oint \sqrt{-g} j^\mu d\sigma_\mu = 0 \rightarrow \int \sqrt{-g} j^\mu d\sigma_\mu = \text{const}. \quad (8.5)$$

На отсутствие законов сохранения энергии и импульса материи в ОТО можно взглянуть иначе. Обычно в плоском пространстве-времени эти законы связываются соответственно с однородностью времени и пространства. Для существования закона сохранения момента количества движения необходимо свойство изотропности пространства. В общем случае эти свойства пространственно-временного многообразия следует трактовать на языке векторов Киллинга, но, как уже отмечалось, в искривленном пространстве-времени они могут отсутствовать.

В частных метриках, обладающих векторами Киллинга, можно ввести соответствующие им законы сохранения. Действительно, пусть в многообразии имеется вектор Киллинга ξ_β . Построим вектор $P^\alpha = T^{\alpha\beta}\xi_\beta$. Согласно (8.3) и уравнениям Киллинга (1.55) он удовлетворяет соотношению

$$\nabla_\alpha P^\alpha = T^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \xi_\beta = (1/2) T^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) = 0, \quad (8.6)$$

т. е. имеем свойство P^α , аналогичное (8.4) для вектора тока. Отсюда следует закон сохранения. Если вектор Киллинга ξ_β временно-подобен, то можно говорить о законе сохранения энергии, если пространственно-подобен — о законе сохранения импульса.

При обсуждении вопроса о сохранении тензорных величин следует иметь в виду, что в искривленном пространстве-времени определено интегрирование лишь скалярных величин. Для интегрирования тензорных величин их следовало бы перенести в одну точку, однако результат переноса зависит от пути.

Для определения операции интегрирования вектора энергии-импульса естественным подходом является задание конкретных путей переноса, например по геодезическим. Именно так можно задать эти величины для одиночного наблюдателя. Однако при подобном определении возникают трудности, если между двумя точками можно провести несколько геодезических.

Заметим, что сказанное не относится к закону сохранения заряда или P^α , удовлетворяющему (8.6), так как в этих случаях интегрируется плотность скалярной величины. Например, в (8.5) интегрируется $j^\mu \tau_\mu$, где τ_μ — временно-подобный вектор, перпендикулярный элементу пространственно-подобной гиперповерхности.

Понятия энергии и импульса являются важнейшими понятиями физики и привлекательны вследствие существования законов их сохранения. Отсутствие законов сохранения энергии и импульса представляется многим физикам неудовлетворительным свойством ОТО. Однако не следует преувеличивать значимость этого факта. Чаще всего при решении конкретных задач и проблем речь идет лишь о желании следовать традиционным понятиям и способам рассуждений. ОТО основана на уравнениях Эйнштейна, с помощью которых и заданной системы отсчета в принципе можно найти решение любой корректно поставленной в рамках ОТО задачи, не обращаясь к законам сохранения.

Из всего сказанного следует, что к проблеме энергии-импульса допустимо относиться по-разному [129].

1. Можно игнорировать вопросы сохранения энергии и импульса, решать уравнения Эйнштейна и движения для конкретных классических задач. Окончательные результаты всегда можно проинтерпретировать в нужной системе отсчета, однозначно введя при этом энергию и импульс материи относительно используемой системы отсчета.

2. Разумно анализировать такие случаи, когда в рамках ОТО можно говорить о законах сохранения энергии или импульса, например когда пространство-время обладает соответствующими векторами Киллинга.

3. Можно попытаться с помощью уравнений поля и каких-либо дополнительных соображений вводить в теорию законы сохранения неких величин — типа энергии или импульса (одной или множества), анализировать эти величины и решать, насколько их использование целесообразно и насколько они соответствуют привычным в плоском мире понятиям энергии и импульса. Однако не следует забывать, что все введенные таким образом понятия являются инородными конструкциями в ОТО. К этому подходу относятся попытки определения псевдотензора, вектора или иных комплексов энергии-импульса гравитационного поля. Как будет показано в следующих параграфах, здесь существенны вопросы единственности и физической значимости вводимых величин.

8.2. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Если придерживаться взгляда, что необходимо ввести в ОТО аналог закона сохранения энергии-импульса, то можно воспользоваться следующим соображением [8, 130]. Вспомним, что в ньютоновой механике в общем случае не сохраняется кинетическая энергия T механической системы. Однако закон сохранения удастся «спасти», введя потенциальную энергию U силового поля так, что

$$(d/dt) (T + U) = 0. \quad (8.7)$$

Эйнштейн и другие предложили аналогичный метод в искривленном пространстве-времени: следует требовать сохранения энергии и импульса P^μ материи вместе с дополнительным членом p^μ , понимаемым как энергия-импульс гравитационного поля. Тогда вместо (8.3) следует писать:

$$\partial T'^{\mu\nu} / \partial x^\nu \equiv (\partial / \partial x^\nu) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0, \quad (8.8)$$

где нетензорный добавок $t^{\mu\nu}$ называют *псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля*. Очевидно, что $t^{\mu\nu}$ не может быть тензором, так как действие нетензорного оператора $\partial / \partial x^\nu$ на тензорную величину не дает тензора.

Разберемся, что означает величина $t^{\mu\nu}$. Для этого запишем уравнения Эйнштейна в виде

$$[(-g)^N / \kappa] [R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R] = (-g)^N T^{\mu\nu},$$

где N — целое или полуцелое число, и разобьем левую часть на два слагаемых:

$$[(-g)^N/\kappa] [R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R] = \Theta^{\mu\nu} - (-g)^N t^{\mu\nu}. \quad (8.9)$$

Соотношение вида (8.8) выполняется, если $\Theta^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial/\partial x^\lambda) h^{\mu\nu\lambda}, \quad (8.10)$$

где $h^{\mu\nu\lambda} = -h^{\mu\lambda\nu}$ — так называемый суперпотенциал гравитационного поля. Тогда очевидно, что

$$(\partial/\partial x^\nu) (\partial h^{\mu\nu\lambda}/\partial x^\lambda) = (\partial/\partial x^\nu) [(-g)^N (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0, \quad (8.11)$$

т. е. формально получена нужная форма закона сохранения энергии-импульса.

Все было бы хорошо, если бы разбиение (8.9) было однозначным при условии (8.10). Но, оказывается, его можно произвести многими способами. Различные авторы, предлагавшие разные псевдотензоры $t^{\mu\nu}$, использовали разные разбиения, основанные на соответствующих дополнительных соображениях. В качестве примеров укажем несколько наиболее распространенных видов $t^{\mu\nu}$.

Псевдотензор Эйнштейна [17, с. 488] выводится на основе указанной Эйнштейном возможности сведения «лишнего» члена в соотношении $\sqrt{-g} T_{\mu;\sigma}^{\sigma} = 0$ к обычной дивергенции. Он имеет вид:

$$t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2\kappa \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\sigma}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g) (g^{\alpha\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\alpha})] \right\}. \quad (8.12)$$

Этому псевдотензору соответствует суперпотенциал

$$h_{\mu}^{\nu\lambda} = \frac{g_{\mu\sigma}}{2\kappa \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g) (g^{\sigma\nu} g^{\lambda\alpha} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\alpha})], \quad (8.13)$$

а закон сохранения записывается следующим образом ($N=1/2$):

$$(\partial/\partial x^\nu) (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu} + \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu}) = 0. \quad (8.14)$$

Псевдотензор Ландау и Лифшица [9, с. 358] получаем так. В произвольной точке в локально-геодезической системе координат левую часть уравнений Эйнштейна можно представить в виде

$$\frac{1}{\kappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[(-g) (g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\alpha}) \right] \right\} \equiv \frac{1}{(-g)} \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} h^{\mu\nu\lambda}. \quad (8.15)$$

Видно, что $h^{\mu\nu\lambda}$ антисимметрично по индексам ν и λ . Авторы данного подхода считают локально-геодезическую систему координат привилегированной в том смысле, что в ней псевдотензор $t^{\mu\nu} = 0$. В другой системе координат соотношение (8.15) в общем случае не выполняется, к нему справа следует добавить некоторое выражение, зависящее от первых производных от $g_{\mu\nu}$. Это выра-

жение считают псевдотензором $t^{\mu\nu}$. Следовательно, суперпотенциал Ландау — Лифшица

$$h^{\mu\nu\lambda} = (1/2\kappa) (\partial/\partial x^\alpha) [(-g) (g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\alpha})] \quad (8.16)$$

отличается от суперпотенциала Эйнштейна. Ему соответствует симметричный псевдотензор энергии-импульса

$$t^{\mu\nu} = [1/2\kappa (-g)] (\partial^2/\partial x^\lambda \partial x^\alpha) [(-g) (g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\alpha})]. \quad (8.17)$$

Закон сохранения имеет вид ($N=1$):

$$(\partial/\partial x^\nu) [(-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0. \quad (8.18)$$

Псевдотензор Меллера — Мицкевича — Шредингера [131] выводят с помощью теоремы Нёттер при определенном выборе плотности лагранжиана гравитационного поля. Он несимметричен:

$$t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2\kappa \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} [\sqrt{-g} (g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta}) g^{\nu\beta} g^{\lambda\alpha}]. \quad (8.19)$$

Псевдотензору соответствует суперпотенциал

$$h_{\mu}^{\nu\lambda} = (\sqrt{-g}/2\kappa) (\partial g_{\mu\beta}/\partial x^\alpha) (g^{\nu\beta} g^{\lambda\alpha} - g^{\nu\alpha} g^{\lambda\beta}). \quad (8.20)$$

Закон сохранения записывается так же, как и в подходе Эйнштейна (8.14).

Псевдотензор Папанетру [132]

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa \sqrt{-g}} \left[(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\alpha,\lambda} \varepsilon^{\alpha\lambda} + (\sqrt{-g} g^{\alpha\lambda})_{,\alpha,\lambda} \varepsilon^{\mu\nu} - \right. \\ \left. - (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha})_{,\alpha,\lambda} \varepsilon^{\nu\lambda} - (\sqrt{-g} g^{\nu\alpha})_{,\alpha,\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu} \right], \quad (8.21)$$

где $\varepsilon^{\alpha\lambda}$ — метрический тензор пространства-времени Минковского. Суперпотенциал можно найти из (8.10) и (8.21).

Перечисление различных псевдотензоров энергии-импульса гравитационного поля можно было бы продолжить. В частности, можно получить *счетное множество симметричных псевдотензоров* эйнштейновского типа, используя в качестве суперпотенциалов выражения вида [133]:

$$h_{\mu}^{\nu\lambda} = (1/2\kappa) (\partial/\partial x^\alpha) [(-g)^N (g_{\mu}^{\nu} g^{\lambda\alpha} - g_{\mu}^{\lambda} g^{\nu\alpha})], \quad (8.22)$$

где N — любое целое или полуцелое число.

Факт существования множества различных псевдотензоров энергии-импульса гравитационного поля представляется крайне неудовлетворительным. Огромные усилия многочисленных исследователей были затрачены на выделение единственного преимущественного псевдотензора. Однако все предложенные до сих пор варианты неприемлемы в каких-либо отношениях. Это не удивительно, так как псевдотензоры не являются тензорными величинами: соответствующим выбором системы координат можно получать на основе псевдотензоров самые нелепые результаты [134,

135]. В [136] были сформулированы пять критериев Мёллера, которым должен удовлетворять искомый псевдотензор. Там же было показано, что из компонент метрического тензора и их производных невозможно построить искомую величину.

Автору представляется разумным вывод: *следует отказаться от допущения, что в ОТО существует единственное выражение для энергии-импульса гравитационного поля.* Такое понятие не заложено в принципах, на которых основана ОТО! Нужно смириться с возможностью определения множества комплексов, которые лишь в каком-то смысле соответствуют в ОТО привычным понятиям энергии и импульса. Можно ставить вопросы о целесообразности использования тех или иных из них в конкретных ситуациях и задачах.

Псевдотензорный подход обладает еще тем недостатком, что в его рамках затруднена физическая интерпретация получаемых величин. Последнее можно сделать лишь *при использовании понятий систем отсчета.* Этот вопрос рассмотрен в следующих параграфах.

8.3. МОНАДНЫЕ ВЕКТОРЫ ЭНЕРГИИ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Монадный метод задания движения системы отсчета позволяет в каждой точке сопоставлять плотности тензора энергии-импульса материи плотность энергии и плотность модуля полного импульса материи. Без использования монадного (тетрадного или иного) метода решение этой задачи затруднительно. Действительно, пусть известны компоненты тензора энергии-импульса материи $T^{\mu\nu}$. Чему равны плотности энергии и импульса? Если действовать, как в СТО, то в каждой системе координат на значение плотности энергии будут претендовать величины T^{00} , T_{00} и T_0^0 , а на значение плотности импульса — компоненты T^{0i} , T_{0i} , T_0^i , T_i^0 . Какую взять систему координат и какие выбрать в ней компоненты?

В монадном методе эта задача в произвольной системе координат решается следующим образом: плотность энергии материи в системе отсчета с 4-вектором скорости τ^μ равна $\rho = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$. Это скаляр. Плотность импульса определяется в виде $P^\alpha = -h_\mu^\alpha\tau_\nu T^{\mu\nu}$. Модуль импульса равен $P = \sqrt{-h_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta}$.

Монадный метод позволяет также определить для каждого пространственно-подобного сечения суммарное значение энергии материи, так как определенная выше плотность энергии является скаляром, а перенос скаляра не зависит от пути. Если система отсчета нормальная, то имеется семейство пространственно-подобных гиперповерхностей, ортогональных ее конгруэнции τ . Для любой такой гиперповерхности

$$E = \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu}\tau_\nu d\sigma_\mu \equiv \int \sqrt{-g} P^\mu d\sigma_\mu. \quad (8.23)$$

В общем случае полная энергия материи, определенная согласно (8.23), не сохраняется. Попробуем «спасти» закон сохранения так же, как в псевдотензорном подходе, добавив к энергии материи некоторое выражение. Теперь следует использовать четыре (а не 10, как в § 8.2) уравнения Эйнштейна

$$(\tau_{\nu/\kappa}) [R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R] = T^{\mu\nu}\tau_{\nu} \equiv P^{\mu}, \quad (8.24)$$

где P^{μ} — 4-вектор энергии-импульса материи. Разобьем левую часть этих уравнений на два векторных слагаемых

$$(\tau_{\nu/\kappa}) [R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R] = \theta^{\mu} - p^{\mu}, \quad (8.25)$$

где

$$\theta^{\mu} = \mathcal{F}^{\mu\nu}_{;\nu}. \quad (8.26)$$

Здесь тензор $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ играет роль суперпотенциала в псевдотензорном подходе; он антисимметричен: $\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\mathcal{F}^{\nu\mu}$. Вследствие соотношения $\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ имеем закон сохранения

$$\nabla_{\mu}\theta^{\mu} = \nabla_{\mu}(P^{\mu} + p^{\mu}) = (1/\sqrt{-g})(\partial/\partial x^{\mu})[\sqrt{-g}(P^{\mu} + p^{\mu})] = 0, \quad (8.27)$$

где вектор p^{μ} — аналог псевдотензора гравитационного поля. Сохраняющейся величиной является

$$E' = \int \sqrt{-g}(P^{\mu} + p^{\mu})d\sigma_{\mu}. \quad (8.28)$$

Рассмотрим одну из конкретных реализаций этой процедуры. Используем дененовское определение величины p^{μ} [54]. В этом варианте

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = (1/\kappa)(\tau_{\nu,\mu} - \tau_{\mu,\nu}) = (1/\kappa)(-2A_{\mu\nu} - F_{\mu}\tau_{\nu} + F_{\nu}\tau_{\mu}). \quad (8.29)$$

Ковариантная дивергенция этой величины в монадном виде равна:

$$\mathcal{F}_{\mu;\nu}^{\nu} = (1/\kappa)(-2\tilde{\nabla}_{\tilde{\nu}}A_{\mu}^{\nu} + 2A_{\mu}^{\nu}F_{\nu} + 2\tau_{\mu}A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} - \partial_T F_{\mu} + D F_{\mu} - 2F^{\nu}D_{\mu\nu} + \tau_{\mu}\tilde{\nabla}_{\tilde{\nu}}F^{\nu}).$$

Учитывая монадный вид проекций уравнений Эйнштейна (3.36), (3.37), из (8.25) находим проекции вектора p^{μ} в вакууме:

$$p = p^{\mu}\tau_{\mu} = (1/\kappa)(A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} + F_{\alpha}F^{\alpha} - \partial_T D); \quad (8.30)$$

$$\tilde{p}_{\sigma} = -h_{\sigma\mu}p^{\mu} = (1/\kappa)[\tilde{\nabla}_{\tilde{\nu}}(D_{\sigma}^{\nu} + A_{\sigma}^{\nu} + h_{\sigma}^{\nu}D) + h_{\nu\sigma}(\partial_T - D)F^{\nu}]. \quad (8.31)$$

Отсюда видно, как добавок p в сохраняющемся обобщенном выражении для энергии (8.28) строится из физико-геометрических тензоров, характеризующих движение системы отсчета. В частности, в него входят квадратично тензоры угловой скорости вращения и ускорения системы отсчета. Переходя от одной системы отсчета к другой, можно в широких пределах изменять величины (8.28) и (8.30). Таким образом, величину p^{μ} естественно назвать

(дененовским) вектором энергии гравиинерциального поля.

Особенно рельефно проявляется суть вектора p^μ в вакууме в киллинговых системах отсчета:

$$p = (1/\kappa) (A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + F_\alpha F^\alpha); \quad (8.32)$$

$$\tilde{p}_\sigma = (1/\kappa) (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{A}^\nu{}_\sigma - \partial_T F_\sigma). \quad (8.33)$$

Отсюда видно, что дененовское выражение для плотности энергии гравиинерциального поля в киллинговых системах отсчета очень напоминает плотность энергии электромагнитного поля (3.51), записанную через компоненты электрической и магнитной напряженностей. Заметим, что p может быть отлично от нуля даже в плоском пространстве-времени в неинерциальной системе отсчета.

В метрике Шварцшильда в покоящейся системе отсчета плотность дененовской энергии гравиинерциального поля имеет вид:

$$p = (1/\kappa) F_\alpha F^\alpha = - (M^2 k / 8\pi r^4) (1 - 2kM/c^2 r)^{-1} \approx - (1/8\pi k) g^2, \quad (8.34)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Из формул (8.24) — (8.26) видно, что описанным методом можно получить счетное число законов сохранения. Для этого следует использовать различные виды антисимметричных тензоров $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, построенных из физико-геометрических тензоров и их производных. В общем случае в качестве $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ можно выбрать величину [129]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} = (1/\kappa) \{ & a_{01} A_{\mu\nu} + a_{02} (\tau_\mu F_\nu - \tau_\nu F_\mu) + a_{03} (\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda D_\nu^\lambda - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda D_\mu^\lambda) + \\ & + a_{04} (\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda A^\lambda{}_\nu - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda A^\lambda{}_\mu) + a_{05} (\tau_\mu \partial_T F_\nu - \tau_\nu \partial_T F_\mu) + \\ & + a_{05} (\tau_\mu \tilde{\nabla}_\nu D - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\mu D) + \dots + \end{aligned}$$

+ (те же выражения с коэффициентами a_{1i} , умноженными на D) +
+ (те же выражения с коэффициентами a_{2i} , умноженными на

$$F_\alpha F^\alpha) + \dots\}, \quad (8.35)$$

где a_{ik} — постоянные. Итого, в общем случае имеем бесконечно много возможностей*. Дененовское определение представляет собой частный случай, когда $a_{01} = -2$, $a_{02} = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю.

Несмотря на неоднозначность, монадный подход обладает рядом преимуществ по сравнению с псевдотензорным:

1) удастся ввести истинные скаляры для выражения плотности энергии (точнее, квазиэнергии) гравиинерциального поля, для которых корректно определена операция интегрирования;

2) скалярные плотности энергии сконструированы из монадных физико-геометрических тензоров, т. е. получающиеся величины

* С других позиций множество возможностей определения энергии гравиинерциального поля в рамках метода хронометрических инвариантов рассматривалось в [137, 138].

допускают однозначную физическую интерпретацию;

3) вид тензора $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, вообще говоря, приводит к сравнительно «обозримому» числу физически приемлемых вариантов выбора выражений для квазиэнергии гравиинерциального поля.

8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУПЕРЭНЕРГИИ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Многие монадные векторы энергии гравиинерциального поля из (8.35), в частности дененовский, обладают тем недостатком, что они могут быть отличными от нуля даже в плоском пространстве-времени, когда о гравитационном поле нет смысла говорить. В последнем случае плотности квазиэнергии целиком определяются характеристиками неинерциальных систем отсчета. Поэтому особо рассмотрим такие монадные векторы энергии гравиинерциального поля, входящие в множество, определенное (8.35), которые в плоском пространстве-времени обращаются в нуль.

Пусть

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = (1/\kappa) R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (8.36)$$

где в качестве антисимметричного тензора $f^{\alpha\beta} = -f^{\beta\alpha}$ можно использовать любой тензор $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ из (8.35). Тогда монадный вектор энергии определяется выражением

$$p^\mu = (1/\kappa) \nabla_\nu (R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}). \quad (8.37)$$

Используя тождества Бианки, p^μ можно представить в виде

$$p^\mu = (1/\kappa) \{ R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}{}_{;\nu} + f^{\alpha\beta} (R^\mu{}_{\alpha;\beta} - R^\mu{}_{\beta;\alpha}) \}. \quad (8.37a)$$

С помощью уравнений Эйнштейна, тензор Риччи справа можно выразить через тензор энергии-импульса материи. Тогда плотность сохраняющейся величины будет описываться выражением

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \mathcal{E} = \sqrt{-g} \{ T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu + f^{\alpha\beta} [T^\mu{}_{\alpha;\beta} - T^\mu{}_{\beta;\alpha} + (1/2) (g^\mu{}_\beta g^\sigma{}_\alpha - g^\mu{}_\alpha g^\sigma{}_\beta) \times \\ \times T_{,\sigma}] \tau_\mu + (\tau_\mu / \kappa) R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}{}_{;\nu} \}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Если здесь совокупность всех членов, содержащих тензор энергии-импульса материи, назвать плотностью суперэнергии материи, то последний член

$$\sqrt{-g} p = (\sqrt{-g} / \kappa) \tau_\mu R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}{}_{;\nu} \quad (8.39)$$

следует назвать плотностью суперэнергии гравиинерциального поля.

В качестве примера выберем

$$f^{\alpha\beta} = a (F^\alpha \tau^\beta - F^\beta \tau^\alpha), \quad (8.40)$$

где a — постоянная. Тогда

$$\sqrt{-g} p = (2a \sqrt{-g} / \kappa) [-X^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\beta F_\alpha + Y^{\gamma\alpha\beta} F_\beta (D_{\alpha\gamma} + A_{\gamma\alpha})], \quad (8.41)$$

где $X^{\alpha\beta}$ и $Y^{\gamma\alpha\beta}$ — проекции тензора Римана—Кристоффеля, определенные в (3.40), (3.41).

В [5, с. 205] тензор $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ был выбран в виде

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = (1/\kappa) R^*_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} f^{\alpha\beta}, \quad (8.42)$$

где

$$\dot{R}^{*\alpha\beta\mu\nu} = (1/2) R^{\alpha\beta}{}_{\dots\lambda\sigma} E^{\mu\nu\lambda\sigma} = (1/2) R^{\mu\nu}{}_{\dots\lambda\sigma} E^{\alpha\beta\lambda\sigma}; \quad (8.43)$$

$E^{\mu\nu\lambda\sigma}$ — тензор Леви-Чивиты (1.12); $f^{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор. Используя тождества Бианки в виде $R_{\alpha\beta\lambda\sigma;\nu} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$, находим для плотности суперэнергии гравиинерциального поля выражение

$$\sqrt{-g} \rho = (\sqrt{-g}/2\kappa) \tau_{\mu} R_{\alpha\beta\lambda\sigma} E^{\lambda\sigma\mu\nu} f^{\alpha\beta}{}_{;\nu}. \quad (8.44)$$

Если опять в качестве $f^{\alpha\beta}$ выбрать (8.40), то получим:

$$\sqrt{-g} \rho = -(a \sqrt{-g}/\kappa) e^{\lambda\sigma\nu} [Y^{\alpha}{}_{\dots\lambda\sigma} \tilde{\nabla}_{\nu} F_{\alpha} - Z_{\alpha\beta\lambda\sigma} (D_{\nu}^{\beta} + A_{\nu}^{\beta}) F^{\alpha}], \quad (8.45)$$

где проекция тензора Римана—Кристоффеля $Z_{\alpha\beta\lambda\sigma}$ определяется формулой (3.39)

Заметим, что в литературе довольно широко обсуждается под названием суперэнергии гравитационного поля (или тензора суперэнергии Беля—Робинсона [139]) принципиально иная величина, построенная исключительно из компонент тензора Римана—Кристоффеля:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu\nu} &= (1/2) [R^{\alpha\tau\mu\sigma} R^{\beta\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma} + R^{\beta\tau\mu\sigma} R^{\alpha\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma} - (1/8) g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\tau\sigma\lambda\rho} R^{\tau\sigma\lambda\rho}] = \\ &= (1/2) (R^{\alpha\tau\mu\sigma} R^{\beta\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma} + \dot{R}^{\alpha\tau\mu\sigma} \dot{R}^{\beta\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma}), \end{aligned} \quad (8.46)$$

где использовано обозначение (8.43). Это выражение примечательно в двух соотношениях.

1. Тензор суперэнергии в последней форме имеет такой же вид, как и тензор энергии-импульса электромагнитного поля, записанный через тензор напряженности $F_{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = (1/4\pi) [F^{\mu\sigma} F^{\nu}{}_{\cdot\sigma} - (1/4) g^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}] = (1/4\pi) (F^{\mu\sigma} F^{\nu}{}_{\cdot\sigma} + \dot{F}^{\mu\sigma} \dot{F}^{\nu}{}_{\cdot\sigma}), \quad (8.47)$$

где использовано обозначение, аналогичное (8.43): $\dot{F}_{\alpha\beta} = (1/2) E_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

2. Для тензора суперэнергии имеет место дифференциальный «закон сохранения». Чтобы его получить свернем тождества Бианки (1.32) с тензором Римана—Кристоффеля $R^{\tau\alpha\sigma\mu}$. В результате, имея в виду (8.46), получаем «закон сохранения» [8]

$$\nabla_{\mu} T^{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (8.48)$$

Конечно, (8.48), как и $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, не означает сохранения какой бы то ни было величины. Трудно также сказать, как связан тензор суперэнергии с обычной энергией.

8.5. ДИАДНЫЕ И ТЕТРАДНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Когда возникает необходимость одновременно рассматривать вопрос о сохранении энергии и импульса вдоль выделенного направления, целесообразно использовать диадный метод. Диада τ^{μ} , l^{μ} позволяет производить интегрирование во всем пространственно-подобном 3-мерном сечении системы отсчета двух

скалярных величин: $T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu = P(0)$ — плотности энергии материи; $T^{\mu\nu} l_\mu \tau_\nu = P(1)$ — плотности импульса материи вдоль направления l . Если нужно рассмотреть вопрос об определении или о сохранении энергии и проекций импульса по всем трем ортогональным пространственным направлениям, то следует использовать полный тетрадный формализм. Плотности энергии и импульса материи тогда определяются выражением:

$$P(\alpha) = T^{\mu\nu} g_\mu(\alpha) g_\nu(0) \equiv T^{\mu\nu} g_\mu(\alpha) \tau_\nu. \quad (8.49)$$

Для получения аналогов законов сохранения энергии и проекций импульса в симметричном виде опять следует воспользоваться методикой, характерной для псевдотензорного подхода. Уравнения Эйнштейна записываются следующим образом:

$$[g_\nu(\alpha)/\kappa] [R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R] = \theta^\mu(\alpha) - t^\mu(\alpha) = T^\mu(\alpha), \quad (8.50)$$

где $T^\mu(\alpha) = T^{\mu\nu} g_\nu(\alpha)$; $t^\mu(\alpha)$ — четыре вектора, называемых комплексом энергии-импульса гравиинерциального поля; $\theta^\mu(\alpha)$ — совокупность векторов, представимых в виде:

$$\theta^\mu(\alpha) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha)_{;\nu}, \quad (8.51)$$

где $\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha) = -\mathcal{F}^{\nu\mu}(\alpha)$. Законы сохранения следуют из соотношения

$$\nabla_\mu \theta^\mu(\alpha) = \nabla_\mu [T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)] = (1/\sqrt{-g}) (\partial/\partial x^\mu) \{ \sqrt{-g} \times [T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)] \} \quad (8.52)$$

и записываются одинаково для всех индексов:

$$p'(\alpha) = \int \sqrt{-g} [P^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)] d\sigma_\mu.$$

Конечно, опять существует бесконечно много тетрадных комплексов энергии-импульса гравиинерциального поля. Они определяются видом антисимметричного тензора $\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha)$. Рассмотрим некоторые из них.

Тетрадный комплекс Фролова [140] наиболее непосредственно обобщает дененовское определение энергии гравиинерциального поля. В качестве $\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha)$ следует выбрать

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha) = (1/\kappa) [g_\nu(\alpha)_{;\mu} - g_\mu(\alpha)_{;\nu}] = (2/\kappa) C_{\mu\nu}(\alpha), \quad (8.53)$$

где $C_{\mu\nu}(\alpha)$ — введенные ранее объекты неголономности. Очевидно, что при $\alpha=0$ получаем $g_\nu(0) = \tau_\nu$ и (8.53) совпадает с (8.29). Соответствующий тетрадный комплекс энергии-импульса имеет вид:

$$t^\mu(\alpha) = (2/\kappa) \nabla_\nu C^{\mu\nu}(\alpha) = (1/\kappa) \nabla_\nu (\Delta^{\mu(\alpha)\nu} - \Delta^{\nu(\alpha)\mu}), \quad (8.54)$$

где $\Delta^{\mu(\alpha)\nu}$ — коэффициенты вращения Риччи.

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha) = (2/\kappa) \Delta(\alpha)_{\mu\nu}. \quad (8.55)$$

Напомним, что коэффициенты вращения Риччи антисимметричны по последним двум индексам. Комплекс энергии-импульса

$$t^\mu(\alpha) = (2/\kappa) \nabla_\nu \Delta(\alpha)^{\mu\nu}. \quad (8.56)$$

Иногда используют тетрадный комплекс [140, 142]

$$t^\mu(\alpha) = (1/\kappa) \nabla_\nu [\Delta(\alpha)^{\mu\nu} + g^\mu(\alpha) \Delta^{\beta\nu}_{\cdot\cdot\beta} - g^\nu(\alpha) \Delta^{\beta\mu}_{\cdot\cdot\beta}]. \quad (8.57)$$

Соответствующий тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha)$ очевиден.

Не вдаваясь в подробности, укажем еще *тетрадное обобщение векторов суперэнергии-импульса*. По аналогии с (8.36) определим, например,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha) = (1/\kappa) R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\sigma\beta} f^{\sigma\beta}(\alpha), \quad (8.58)$$

где в качестве $f^{\sigma\beta}(\alpha)$ можно взять, в частности, выражения (8.53) или (8.55). В результате получим плотности четырех сохраняющихся величин:

$$\sqrt{-g} p(\alpha) = (\sqrt{-g}/\kappa) R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\gamma\beta} f^{\gamma\beta}(\alpha);_{\nu} g_\mu(0).$$

Перечисление тетрадных комплексов энергии-импульса гравитационного поля можно было бы продолжить*. Все они зависят от выбора системы отсчета. Нет ничего удивительного, что при переходе от одной системы отсчета к другой изменяются сохраняющиеся величины.

Глава 9

ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

9.1. ПРОБЛЕМА ОПИСАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Вопросы описания гравитационных волн, их взаимодействия с прибором привлекают пристальное внимание физиков-гравитационистов, что обусловлено не только принципиальной важностью этих вопросов, но и интенсивно ведущимися экспериментальными работами по поиску гравитационного излучения внеземного происхождения [143].

* Отметим, что в рамках тетрадного подхода неоднократно предпринимались попытки выделить один преимущественный комплекс энергии-импульса. Для этого были сформулированы условия (аналогичные условиям Мёллера в метрической формулировке псевдотензоров), которым должна удовлетворять искомая величина. Была также доказана теорема, аналогичная теореме Мёллера, о невозможности определения такой величины [142].

В чем состоит трудность описания гравитационных волн?

1. Многие вопросы теории гравитации рассматриваются по аналогии с теорией электромагнитного поля. Это относится и к гравитационному излучению. Однако оказывается, что гравитационное излучение обладает рядом качественно иных свойств. В частности, гравитационные волны иначе воздействуют на приборы. Действительно, когда рассматривается взаимодействие электромагнитных волн с заряженным телом, поведение тела можно сравнивать с поведением нейтрального объекта, который, можно считать, не реагирует на электромагнитные волны. При воздействии гравитационной волны на тело такого сравнения быть не может. Возникает искривление самого пространства-времени, что означает одинаковые возмущения (смещения) в данном месте всех объектов. Необходимо использовать специальные приемы для описания проявления таких универсальных воздействий.

2. В ОТО реализовано глубокое единство гравитации и инерции. По сути дела мы изучаем не поля гравитации, аналогичные другим физическим полям, а гравиинерциальные процессы, описываемые кинематическими характеристиками системы отсчета. Своеобразие ситуации состоит в том, что в искривленном пространстве-времени принципиально нельзя различить, что описывает инерцию, а что чистую гравитацию. Поэтому в дальнейшем чаще будем употреблять термин *гравиинерциальные волны*.

3. Как известно, электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла, а гравитационные волны — существенно нелинейными уравнениями Эйнштейна. Это также создает много трудностей при определении понятия волны. В частности, ясно, что в ОТО должно нарушаться свойство суперпозиции как угодно определенных гравитационных волн. Существенное упрощение достигается для слабого гравитационного поля, когда можно оставлять лишь линейные члены.

4. Как показывают оценки, в реальных ситуациях гравитационные волны настолько слабы, что пока не могут быть обнаружены современными приборами. Ведущиеся экспериментальные поиски рассчитаны на сверхмощные источники, в основном гипотетической природы. Это привело к тому, что в теории рассматриваются свойства пока не наблюдавшихся явлений. Впрочем, указанная особенность характерна для большинства общерелятивистских эффектов.

В настоящее время сложилось несколько направлений теоретического исследования гравитационных волн. Наиболее важными являются следующие три.

1. *Алгебраический подход* (см. § 9.2), который оперирует с произвольно искривленным пространством-временем. Он основан на алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна. Это направление дало много сведений о структуре гравиинерциальных полей. Здесь главная задача состояла в установлении критерия волновых метрик.

2. *Референционный подход* тесно связан с методами задания систем отсчета. Определение гравиинерциального излучения здесь принципиально связано с кинематическими свойствами систем отсчета — монадными и диадными физико-геометрическими тензорами.

3. Изучение *слабых гравитационных волн*. В этом направлении трудности, связанные с нелинейностью, отпадают. По существу, теория сводится к описанию слабых линейных волн тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени. К такому полю применимы методы описания других полей. Для решения задач, которые в данный момент могут представлять практический интерес, этот подход достаточен. В частности, именно при таком подходе производятся оценки характеристик гравитационного излучения от различных источников, оценки параметров ожидаемых волн в окрестности Земли. Однако и в рамках этого подхода для описания воздействия излучения на приборы необходимо использовать понятия и методы задания систем отсчета.

Указанные направления не охватывают весь поток теоретических исследований по проблеме гравитационных волн. Например, имеется серия работ по выделению динамических гравитационных переменных. Это направление основано на дираковском каноническом формализме ОТО и в основном нацелено на решение проблемы квантования гравитации; однако значительная часть работ здесь ведется на классическом (не квантовом) уровне, т. е. рассматриваются классические гравиинерциальные волны. Учитывая характер этого направления, рассмотрим его в гл. 10, посвященной подходам к решению проблемы квантования гравитации.

9.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Естественен вопрос: можно ли в самом общем виде сформулировать признак или критерий, который позволял бы выделять из решений уравнений Эйнштейна волновые метрики? Широко распространено мнение, что такой критерий должен существовать [144]. В литературе отражены довольно многочисленные попытки найти этот критерий с помощью алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна (см. § 2.2). В свое время это было очень заманчиво, так как с открытием алгебраической классификации сразу же встал вопрос о физическом смысле пространств различных типов и подтипов.

Сопоставление алгебраической классификации пространств Эйнштейна с аналогичной классификацией электромагнитных полей в какой-то степени обосновывает это направление поиска. Действительно, характеристическое уравнение для тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (в плоском пространстве-времени) имеет вид:

$$\| F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \| = 0. \quad (9.1)$$

Непосредственное вычисление определителя приводит к уравнению

$$\lambda^4 + (H^2 - E^2) \lambda^2 - (E_k H^k)^2 = 0, \quad (9.1a)$$

где коэффициентами являются инварианты электромагнитного поля $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) = 2\mathcal{Y}_1$; $F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = E_k H^k \equiv \mathcal{Y}_2$. С помощью элементарных преобразований (см. § 2.2) характеристическую 4×4 -матрицу для (9.1) можно привести к двум возможным каноническим матрицам [145]:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + \mathcal{Y}_1 \lambda^2 - \mathcal{Y}_2^2 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda^2 + \mathcal{Y}_1) \end{array} \right), \quad (9.2)$$

соответствующим $\mathcal{Y}_2 \neq 0$ и $\mathcal{Y}_2 = 0$. Первая из этих матриц соответствует наличию четырех различных корней, определяемых лишь из одного инвариантного множителя канонической матрицы, т. е. имеет характеристику [(1) (1) (1) (1)]. Назовем электромагнитные поля с характеристиками [1 1 1 1] полями первого типа T_1 , а их частный случай [(1) (1) (1) (1)] — подтипом I типа T_1 (по аналогии с названиями типов и подтипов пространств Эйнштейна в § 2.2).

Вторая из канонических матриц (9.2) соответствует корням: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = +\sqrt{\mathcal{Y}_1}$; $\lambda_4 = -\sqrt{\mathcal{Y}_1}$ при $\mathcal{Y}_1 \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ при $\mathcal{Y}_1 = 0$. Эти две возможности описываются характеристиками: [(1, 1) (1) (1)] и [(1, 3)] соответственно. Первую из них, принадлежащую к типу T_1 , назовем подтипом D (к нему принадлежит закон Кулона), а вторую назовем типом T_2 (или N).

Таким образом, электромагнитные поля могут быть только двух типов (T_1 и T_2), причем первый из них разбивается на два подтипа: I и D . Изобразим эту ситуацию с помощью диаграммы, аналогичной диаграмме Пенроуза (рис. 16). Подтипы электромагнитных полей D и N естественно назвать алгебраически специальными. Известно, что для чистого электромагнитного излучения $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = 0$, т. е. электромагнитные волны принадлежат к алгебраически специальному типу N (T_2).

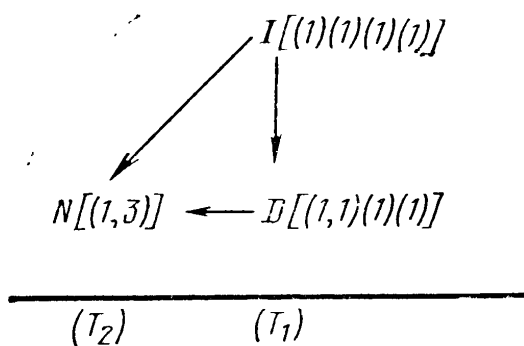


Рис. 16. Алгебраическая классификация электромагнитных полей

Алгебраическая классификация пространств Эйнштейна значительно сложнее. Тем не менее заманчиво связать метрики алгебраически специальных подтипов с гравитационными волнами. Подтип D сразу же отпадает — к нему принадлежит, в частности, статическая метрика Шварцшильда. Остаются метрики типов T_2 и T_3 по Петрову. Чтобы остановиться на каком-то варианте, необходимы дополнительные соображения. Разные авторы, сопостав-

ляя различные стороны электродинамики и ОТО, предлагали ряд критериев гравитационных волн. В настоящее время их более 10. Некоторые из них эквивалентны, отличаются лишь терминологией. Интересно отметить, что подавляющая часть критериев имеет общую область пересечения. Следуя работе [144], перечислим наиболее распространенные критерии в порядке сужения множества пространств, удовлетворяющих им.

1а. Согласно критерию *Пирани* [146] в вакууме волновыми являются все метрики, принадлежащие подтипам *II*, *N* или *III*.

1б. Критерию *Пирани* эквивалентен *первый критерий Бея*, который связан с монадным методом. В окрестности произвольной точки пустого пространства-времени существуют гравитационные волны, если для любого единичного временно-подобного вектора τ^μ в этой точке вектор потока суперэнергии отличен от нуля:

$$P^\alpha = -h_\sigma^\alpha \tau_\beta \tau_\lambda \tau_\mu T^{\sigma\beta\lambda\mu} \neq 0, \quad (9.3)$$

где $T^{\sigma\beta\lambda\mu}$ — тензор суперэнергии Бея, определенный формулой (8.46). Если $P^\alpha = 0$, то гравитационные волны в окрестности данной точки отсутствуют.

2а. Все пространства, принадлежащие гравитационным полям подтипов *N* и *III*, и только они, удовлетворяют *второму критерию Бея*. Его можно сформулировать следующим образом. Пустое пространство-время с тензором Римана — Кристоффеля, отличным от нуля, описывает свободные гравитационные волны, если обращаются в нуль все четыре фундаментальных скаляра:

$$\left. \begin{aligned} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} = 0; & \quad R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{*\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} = 0; \\ R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = 0; & \quad R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma} R^{*\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

В противном случае свободные гравитационные волны отсутствуют [144, с. 75]).

2б. *Дебеве* показал, что второй критерий Бея можно сформулировать иначе. Соотношения (9.4) эквивалентны существованию изотропного вектора k^μ , удовлетворяющего уравнениям:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu = 0; \quad R_{\alpha\beta\mu\nu}^* k^\alpha k^\mu = 0. \quad (9.5)$$

2в. Второму критерию Бея эквивалентен также *критерий Мизры и Сингха*. Пустое пространство-время с отличным от нуля тензором Римана — Кристоффеля описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда тензоры $E_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} \tau^\beta \tau^\mu \equiv X_{\alpha\lambda}$; $H_{\alpha\lambda} = -R_{\alpha\beta\lambda\mu}^* \tau^\beta \tau^\mu$, где τ^β — единичный временно-подобный вектор, удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\lambda} E^{\alpha\lambda} - H_{\alpha\lambda} H^{\alpha\lambda} = 0; \\ E_{\alpha\lambda} E_\beta^\lambda E^{\beta\gamma} = 0; & \quad H_{\alpha\lambda} H_\beta^\lambda H^{\beta\gamma} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

3а. Согласно критерию *Лихнеровича* волновыми следует считать лишь пространства, принадлежащие подтипу *N*.

36. Критерию Лихнеровича эквивалентен критерий Малдыбаевой [147], формулируемый в виде общековариантных уравнений для тензора Римана — Кристоффеля:

$$g^{\sigma\lambda} \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu} - 2R_{\rho\mu\nu\lambda} R_{\alpha\beta}{}^{\rho\lambda} = 0. \quad (9.7)$$

Следующие три критерия гравитационных волн выделяют подмножества пространств подтипа N .

4. Критерий Зельманова исключает из подтипа N два вида симметрических пространств [144, с. 84]. Пространство-время описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда его тензор Римана — Кристоффеля $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ не является ковариантно постоянным, т. е. $\nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$, и удовлетворяет общековариантному волновому уравнению

$$g^{\sigma\lambda} \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (9.8)$$

5. Критерий Хэли из пространств подтипа N выделяет случаи (так называемые волны интегрируемого типа), когда для волнового вектора k_{α} выполняется условие $k_{\alpha} = \partial k / \partial x^{\alpha}$, где k — скалярная функция координат.

6. Критерий Зунда — Левина к критерию Хэли добавляет требование, чтобы волновые пространства были конформно-плоскими.

Есть и другие алгебраические критерии гравитационных волн.

Для алгебраического подхода к поиску критериев гравитационных волн характерны следующие недостатки.

1. Как уже отмечалось, сформулировано множество критериев и нет достаточно веских оснований остановиться на одном из них.

2. Если алгебраический подход опирается на аналогию с электромагнитным полем, то следует иметь в виду, что условие равенства нулю двух инвариантов электромагнитного поля еще не означает наличия именно электромагнитного излучения. Действительно, пусть имеются взаимно перпендикулярные постоянные электрическое и магнитное поля ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$) и пусть их напряженности равны ($|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$), тогда оба инварианта обратятся в нуль, но никакого излучения нет. По-видимому, аналогичная ситуация может иметь место и в случае гравитации. Заметим, что даже для электромагнитного поля нет удовлетворительного критерия излучения.

3. Как будет показано, есть метрики, которые по ряду веских соображений следует понимать как волновые, но они не удовлетворяют ни одному из перечисленных выше критериев. Примером могут служить цилиндрические волны Эйнштейна — Розена (см. § 9.4).

4. Рассмотренные критерии относятся к идеализированным метрикам, далеким от соответствия физической реальности. Внесение сколь угодно малой массы в пространства, ранее удовлетворявшие какому-либо волновому критерию, существенно изменяет их алгебраический тип. Все это заставляет при поиске критерия излучения использовать и другие соображения.

9.3. РЕФЕРЕНЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

В этом подходе (такой подход к определению гравиинерциальных волн был предложен в работах [144, 148] в рамках метода хронометрических инвариантов) гравиинерциальные волны определяются и описываются сугубо в терминах и операторах методов задания систем отсчета. В общековариантном монадном виде референционный критерий существования гравиинерциальных волн означает [149], что

1) всевозможными способами спроектированные посредством τ^μ и h_ν^μ исследуемой системы отсчета компоненты тензора Римана — Кристоффеля R_N : $X_{\mu\nu}$, $Y_{\mu\nu\lambda}$ и $Z_{\mu\nu\alpha\beta}$ — удовлетворяют волновым уравнениям вида

$$(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) R_N = \Phi_N, \quad (9.9)$$

где Φ_N — произвольная тензорная функция координат, не содержащая производных выше первого порядка от R_N ; R_N — собирательное обозначение компонент всех проекций тензора Римана — Кристоффеля;

2) левая часть уравнений (9.9) должна быть нетривиальной хотя бы для одной компоненты R_N , т. е. соответствующий (ие) тензор R_N должен быть нестационарным и пространственно-неоднородным:

$$\partial_T R_N \neq 0; \quad \tilde{\nabla}_\nu R_N \neq 0. \quad (9.10)$$

В этом критерии существенно требование нетривиальности левой части (9.9), так как само уравнение выполняется всегда, хотя бы вследствие тождества, справедливого для пространств Эйнштейна:

$$g^{\lambda\sigma} \nabla_\lambda \nabla_\sigma R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\sigma\alpha\beta}{}^\lambda R_{\lambda\mu\nu}{}^\sigma + 2(R_{\sigma\alpha\nu\lambda} R_{\mu}{}^{\lambda\cdot\sigma} + R_{\alpha\mu\sigma}{}^\lambda R_{\nu\lambda\beta}{}^\sigma) = 0. \quad (9.11)$$

Проектируя эти тождества посредством τ^μ и h_ν^μ и переходя к монадным величинам и операторам, получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) X_{\alpha\beta} &= \Phi_{(1)\alpha\beta}; \\ (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Y_{\alpha\beta\sigma} &= \Phi_{(2)\alpha\beta\sigma}; \\ (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Z_{\alpha\beta\sigma\lambda} &= \Phi_{(3)\alpha\beta\sigma\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

где $\Phi_{(1)\alpha\beta}$, $\Phi_{(2)\alpha\beta\sigma}$, $\Phi_{(3)\alpha\beta\sigma\lambda}$ — ковариантные тензорные функции, не

содержащие производных выше первого порядка $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta\sigma}$, $Z_{\alpha\beta\sigma\lambda}$.

Важно, что референционный критерий формулируется для компонент тензора Римана — Кристоффеля. Этот подход, можно сказать, обобщает и в некоторых отношениях конкретизирует алгебраический подход. В частности, ряд алгебраических критериев гравитационных волн (Малдыбаевой, Зельманова и др.) фактиче-

ски соответствует различным способам обрезания тождества (9.11).

Если референционный критерий выполняется не для всех трех тензоров X , Y , Z , а только для одного или двух из них, то следует говорить о гравиинерциальных X -, Y -, Z -волнах или о смеси их. Однако в вакууме, вследствие соотношения $R_{\mu\nu} = 0$, величины $X_{\mu\nu}$ и $Z_{\alpha\mu\beta\nu}$ оказываются связанными друг с другом $X_{\mu\nu} + Z_{\cdot\mu\alpha\nu}^{\alpha} = 0$, так что достаточно говорить лишь о волнах двух типов: X и Y .

Важной задачей референционного подхода является выяснение условий существования гравиинерциальных волн в зависимости от значений и свойств физико-геометрических тензоров. В частности, можно сделать некоторые выводы об отсутствии волнового характера метрики в зависимости от обращения в нуль этих тензоров в отдельности или совместно в различных комбинациях. Возможны восемь таких случаев:

1. $F_{\mu} = 0$; $D_{\mu\nu} = 0$; $A_{\mu\nu} = 0$; 5. $F_{\mu} = 0$; $D_{\mu\nu} = 0$; $A_{\mu\nu} \neq 0$;
2. $F_{\mu} \neq 0$; $D_{\mu\nu} = 0$; $A_{\mu\nu} = 0$; 6. $F_{\mu} \neq 0$; $D_{\mu\nu} = 0$; $A_{\mu\nu} \neq 0$;
3. $F_{\mu} \neq 0$; $D_{\mu\nu} \neq 0$; $A_{\mu\nu} = 0$; 7. $F_{\mu} \neq 0$; $D_{\mu\nu} \neq 0$; $A_{\mu\nu} \neq 0$;
4. $F_{\mu} = 0$; $D_{\mu\nu} \neq 0$; $A_{\mu\nu} = 0$; 8. $F_{\mu} = 0$; $D_{\mu\nu} \neq 0$; $A_{\mu\nu} \neq 0$.

Учитывая формулы (3.40), (3.41), выражающие $X_{\mu\nu}$ и $Y_{\alpha\nu\sigma}$ через монадные физико-геометрические тензоры, приходим к выводу, что случай 1 тривиален. Случай 2 соответствует обращению в нуль $Y_{\mu\nu\sigma}$ и стационарности $X_{\mu\nu}$ в вакууме. В последнем легко убедиться на основе вида $Z_{\mu\nu\sigma\lambda}$ согласно (3.39) и соотношения $R_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, в случае 2 волны отсутствуют. В случае 5 анализ в хронометрических системах координат (что не нарушает общности рассмотрения) показывает, что метрика стационарна, а значит, X и Y также стационарны, т. е. волны существовать не могут. Во всех остальных случаях гравиинерциальные волны обоих типов возможны. Отметим, что имеются более тонкие условия [144, 148] отсутствия гравиинерциальных волн в зависимости от обращения в нуль производных от физико-геометрических тензоров (в зависимости от их стационарности или однородности).

Число возможностей существенно сокращается, если ограничиться рассмотрением нормальных систем отсчета ($A_{\mu\nu} = 0$). Как уже отмечалось, они наиболее адекватно описываются с помощью кинеметрической калибровки монадного метода. В таких системах отсчета гравиинерциальным волнам могут соответствовать лишь случаи 3 и 4. Видно, что в них необходимым условием является отличие от нуля тензора скоростей деформаций. Тогда напрашивается простая классификация гравиинерциальных волновых процессов в нормальных системах отсчета в зависимости от вектора F_{μ} :

1) будем говорить о *несвободном гравинерциальном волновом процессе*, когда выполнен референционный волновой критерий и $F_\mu \neq 0$;

2) *свободный гравинерциальный волновой процесс* соответствует случаю, когда выполнен референционный волновой критерий и $F_\mu = 0$.

9.4. ДИАДНОЕ ОПИСАНИЕ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Общие замечания. В гл. 7 было показано, что для описания волновых процессов целесообразно использовать диадный метод. Это в полной мере относится и к обсуждаемым здесь гравинерциальным волнам. Действительно, как угодно определенный гравинерциальный волновой процесс должен характеризоваться изотропным волновым вектором k^μ , который можно представить в виде $k^\mu = \omega (\tau^\mu \pm l^\mu)$, где τ^μ — 4-скорость используемой системы отсчета; $\pm l^\mu$ — пространственно-подобное направление распространения процесса.

Диадный метод позволяет более детально описывать гравинерциальные волны, нежели монадный, в частности с его помощью можно выделить продольные, продольно-поперечные и поперечно-поперечные составляющие тензора Римана — Кристоффеля и физико-геометрических тензоров. Так, используя диадное расщепление метрического тензора (7.1), разделим 20 компонент тензора Римана — Кристоффеля на

а) продольные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{X} &= X_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta; \\ \widehat{Y}_{\alpha\beta} &= -Y_{\lambda\mu\nu} l^\lambda \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu; \quad Z_{\alpha\beta\gamma\sigma} = Z_{\mu\nu\lambda\kappa} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\gamma^\lambda \gamma_\sigma^\kappa; \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

б) продольно-поперечные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} X_\mu &= X_{\alpha\beta} l^\alpha \gamma_\mu^\beta; \quad \widehat{Y}_\beta = -Y_{\lambda\mu\nu} l^\lambda l^\mu \gamma_\beta^\nu; \\ Z_{\sigma\alpha\beta} &= Z_{\mu\nu\lambda\kappa} l^\mu \gamma_\sigma^\nu \gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\kappa; \quad Y_{\gamma\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} \gamma_\gamma^\lambda \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu; \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

в) поперечно-поперечные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{\mu\nu} &= X_{\alpha\beta} \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta; \quad \bar{Y}_{\mu\nu} = -Y_{\lambda\alpha\beta} \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\alpha l^\beta; \\ \bar{Z}_{\mu\nu} &= Z_{\alpha\beta\lambda\sigma} l^\alpha \gamma_\mu^\beta l^\lambda \gamma_\nu^\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Компоненты выписанных тензоров связаны 10 уравнениями Эйнштейна. В вакууме ($R_{\mu\nu} = 0$) они записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \widehat{X} + \gamma^{\alpha\beta} \bar{Z}_{\alpha\beta} &= 0; & \widehat{X} + \gamma^{\alpha\beta} \bar{X}_{\alpha\beta} &= 0; \\ X_\sigma - \gamma^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta\sigma} &= 0; & \gamma^{\alpha\beta} \bar{Y}_{\alpha\beta} &= 0; \\ \bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} + \gamma^{\alpha\beta} Z_{\alpha\sigma\beta\lambda} &= 0; & \widehat{Y}_\sigma + \gamma^{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta\sigma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Эти соотношения фактически уже записывались в § 2.2 при рассмотрении алгебраической классификации Петрова пространств

Эйнштейна. Они выражают матрицу Z через компоненты матрицы X , характеризуют свойства симметрии матрицы Y и следы матриц X и Y .

Алгебраический подход и диадный метод. В диадном расщеплении (7.41) вектор τ^μ определяется используемой системой отсчета, а вектор l^μ должен задаваться с помощью некоторой геометрической характеристики пространства-времени, соответствующей волне. Наиболее подходит для этой цели *изотропный вектор Дебеве*, являющийся собственным вектором матрицы тензора Римана—Кристоффеля (тензора Вейля). Если волновой вектор (7.41) направить вдоль вектора Дебеве, то из уравнений, установленных Дебеве [147] для различных алгебраических подтипов пространств, можно получить интересные соотношения между продольными, продольно-поперечными и поперечно-поперечными компонентами тензора кривизны. Эти соотношения аналогичны свойствам компонент векторов электрической E и магнитной H напряженностей в электромагнитной волне. При этом тензор X является аналогом электрической напряженности, а тензор Y — аналогом магнитной напряженности. Запишем через компоненты (9.13)—(9.15) уравнения Дебеве в порядке сужения удовлетворяющих им множеств пространственно-временных многообразий:

Уравнения Дебеве для подтипа I Петрова имеют вид:

$$k^\beta k^\mu k_{[\rho} R_{\alpha]\beta\mu[\nu} k_{\lambda]} = 0, \quad (9.17)$$

где k^β — изотропный вектор Дебеве; [...] — символ антисимметризации. Используя диадные проекции этих уравнений, находим соотношение, связывающее поперечно-поперечные компоненты матриц X и Y :

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm (\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}) = 0. \quad (9.17a)$$

Уравнения Дебеве для подтипов II и D.

$$k^\beta k^\mu (R_{\alpha\beta\mu\nu} k_\lambda - R_{\alpha\beta\mu\lambda} k_\nu) = 0 \quad (9.18)$$

приводят к соотношениям:

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm (\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}) = 0; \hat{Y}_\sigma \pm X_\sigma = 0. \quad (9.18a)$$

Отсюда следует, что продольно-поперечные компоненты X_σ и \hat{Y}_σ матриц X и Y по модулю равны друг другу, а поперечно-поперечные компоненты связаны, как и в (9.17a).

Уравнения Дебеве для подтипа III

$$k^\mu (R_{\alpha\beta\mu\nu} k_\lambda - R_{\alpha\beta\mu\lambda} k_\nu) = 0 \quad (9.19)$$

означают, что

$$X_\sigma \pm \hat{Y}_\sigma = 0; Y_{\rho\sigma\lambda} \mp Z_{\rho\sigma\lambda} = 0; \quad (9.19a)$$

$$\bar{X}_{\lambda\sigma} \pm \bar{Y}_{\lambda\sigma} = 0; \bar{Y}_{\sigma\lambda} \pm \bar{Z}_{\sigma\lambda} = 0. \quad (9.19b)$$

Соотношения (9.19а) означают равенство друг другу продольно-поперечных компонент матриц X , Y и Z , а (9.19б) означают равенство поперечно-поперечных компонент матриц X и Y (Y и Z). Учитывая соотношения (9.16), в частности равенство нулю следа Y , находим, что продольная компонента $\hat{X} = 0$ и $Z_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$.

Уравнения Дебеве для подтипа N

$$k^\alpha R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (9.20)$$

означают, что все продольные и продольно-поперечные компоненты тензора Римана — Кристоффеля равны нулю, а поперечно-поперечные компоненты матриц X и Y одинаковы. Это полностью соответствует свойствам электромагнитной волны. Можно сказать, что гравиинерциальный процесс определяется одним тензором $\bar{X}_{\sigma\lambda}$, причем его след $\bar{X}_{\lambda\sigma}\gamma^{\sigma\lambda} = 0$.

Классификация гравиинерциальных волновых процессов по диадным физико-геометрическим тензорам и оптическим инвариантам. В общем случае имеется 11 диадных физико-геометрических тензоров (7.4) — (7.14), однако для ряда конкретных процессов число таких независимых величин существенно уменьшается. Рассмотрим некоторые из них в порядке сужения множеств метрик.

1. Для волнового гравиинерциального процесса естественно ожидать, что вектор k^μ удовлетворяет условию геодезичности (7.43). Оно соответствует соотношениям (7.44) и (7.45) между диадными физико-геометрическими тензорами. Как уже отмечалось, волновой процесс можно охарактеризовать тремя оптическими скалярами, которые при учете (7.43) принимают вид (7.46) — (7.48).

2. Пусть волновой процесс рассматривается в нормальной системе отсчета и оптический инвариант поворота равен нулю ($\Omega^2 = 0$); тогда такую ситуацию удобно описывать кинеметрической калибровкой диады. В этой калибровке $\bar{A}_{\mu\nu} \equiv 0$; $a_{\mu\nu} \equiv 0 \rightarrow \Omega^2 \equiv 0$; $Q_\mu \equiv 0$. В рассматриваемом случае в пространственном сечении нормальной системы отсчета определен 2-мерный волновой фронт, ортогональный k^μ и характеризуемый метрическим тензором $\gamma_{\xi\eta}$. Все величины можно обозначить индексами $\xi, \eta, \varphi \dots = 2, 3$. Условия (7.44), (7.45), наложенные на восемь диадных физико-геометрических тензоров, упрощаются из-за того, что $Q_\mu \equiv 0$.

Монадную классификацию гравиинерциальных волновых процессов, описанных в § 9.3, теперь можно детализировать. Будем называть волновой гравиинерциальный процесс [150]: *продольно-несвободным*, если $\bar{F}_\xi = 0$; $\hat{F} \neq 0$; *поперечно-несвободным*, если $\bar{F}_\xi \neq 0$; $\hat{F} = 0$; *общим несвободным*, если $\bar{F}_\xi \neq 0$; $\hat{F} \neq 0$; *свободным*, если $\bar{F}_\xi = 0$; $\hat{F} = 0$.

3. *Сферическими* гравиинерциальными волнами согласно опре-

делению Робинсона и Траутмана [151] называют волны, удовлетворяющие условиям:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= (1/2) k_{;\mu}^{\mu} \neq 0; \\ \sigma^2 &= 0; k_{\alpha,\beta} - k_{\beta,\alpha} = 0 \rightarrow \Omega^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

В диадном виде эти условия означают:

$$\bar{D} \pm d \neq 0; \quad (9.22a)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{D} \mp \hat{F} + (1/\omega^2) (\omega_{,v} k^v) &= 0; \bar{F}_{\mu} + f_{\mu} \mp 2(Q_{\mu} + q_{\mu}) = 0; \\ \bar{A}_{\mu\nu} \pm a_{\mu\nu} = 0; \bar{F}_{\mu} - f_{\mu} \mp 2(q_{\mu} - Q_{\mu}) + (2/\omega) \omega_{,v} \gamma_{\alpha}^v &= 0; \\ (\bar{D}_{\mu\nu} \pm d_{\mu\nu}) (\bar{D}^{\mu\nu} \pm d^{\mu\nu}) &= (1/2) (\bar{D} \pm d)^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.22b)$$

Сферические гравиинерциальные волны допускаются пространствами только подтипов *II* и *D* по классификации Петрова.

4. *Плоские* гравиинерциальные волны согласно определению Кундта [152] соответствуют обращению в нуль всех трех оптических скаляров:

$$\varepsilon = 0; \Omega^2 = 0; \sigma^2 = 0. \quad (9.23)$$

Это означает, что выполняются условия (9.22б), а вместо (9.22а) должно быть

$$\bar{D} \pm d = 0. \quad (9.24)$$

Из теоремы Шевретона следует, что плоские волны допускаются только пространствами подтипов *III* и *N*.

5. Гравиинерциальные волны подтипа *N* имеют ковариантно-постоянный волновой вектор

$$k_{\mu;v} = 0. \quad (9.25)$$

Справедливо и обратное утверждение, т. е. если пространство-время допускает векторное поле со свойством (9.25), то оно принадлежит подтипу *N* по Петрову, причем k_{μ} изотропно и единственно. Соответствующие этому подтипу уравнения Дебеве (9.20) являются условиями интегрируемости (9.25). В диадном виде (9.25) означает, что

$$\left. \begin{aligned} \hat{F} \mp \omega_{,v} \tau^v / \omega &= 0; q_{\alpha} + \Lambda_{\alpha} - Q_{\alpha} \mp (\omega_{,v} / \omega) \gamma_{\alpha}^v = 0; \\ \hat{D} \pm \omega_{,v} l^v / \omega &= 0; \bar{F}_{\alpha} + f_{\alpha} \mp 2(q_{\alpha} + Q_{\alpha}) = 0; \\ \bar{D}_{\alpha\beta} \pm d_{\alpha\beta} + \bar{A}_{\alpha\beta} \pm a_{\alpha\beta} &= 0; \bar{F}_{\alpha} - f_{\alpha} \pm 2\Lambda_{\alpha} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

9.5. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим несколько точных решений уравнений Эйнштейна, которые удовлетворяют тем или иным критериям гравитационных волн.

Волновые метрики подтипа *N*. Метрика Такено [153] чаще всего приводится в виде

$$ds^2 = (P + S) dx_0^2 - 2S dx_0 dx_1 - (P - S) dx_1^2 - B dx_2^2 - A dx_3^2 - 2D dx_2 dx_3, \quad (9.27)$$

где A, B, D, P и S — функции аргумента $x^0 - x^1$. Уравнения Эйнштейна соответствуют условию, налагаемому на функции

$$M_{,1,1} - (M_{,1})^2/M - A_{,1}B_{,1}/(D_{,1})^2 = 0, \text{ где } M \equiv AB - D^2;$$

единица после запятой означает дифференцирование по x^1 .

Определим систему отсчета кинеметрической калибровкой диады в использованной здесь системе координат. Тогда составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \left\{ \frac{\sqrt{P-S}}{P}; -\frac{S}{P\sqrt{P-S}}; 0; 0 \right\}; \\ l^\mu &= \left\{ 0; \frac{1}{\sqrt{P-S}}; 0; 0 \right\}; \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} BD \\ DA \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Легко также вычислить диадные физико-геометрические тензоры:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F} = \widehat{D} &= \frac{2SP_{,1} - PP_{,1} - PS_{,1}}{2P(P-S)^{3/2}}; \bar{F}_\xi = f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0; \\ \bar{D}_{\xi\eta} = -d_{\xi\eta} &= -\gamma_{\xi\eta,1}/2\sqrt{P-S}. \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

Оказывается, вектор Дебеве непосредственно определяется диадой (9.28): $k^\mu = \tau^\mu + l^\mu$. Видно, что k^μ удовлетворяет уравнению (9.26). Нетрудно убедиться, что отличны от нуля лишь поперечно-поперечные компоненты тензора Римана — Кристоффеля ($\bar{X}_{\xi\eta} = -\bar{Y}_{\xi\eta}$), которые в общем случае нестационарны и пространственно-неоднородны. Таким образом, данная метрика удовлетворяет как алгебраическому критерию (Лихнеровича), так и референционному. На основе диадного подхода в рассматриваемой системе отсчета метрику Такено можно интерпретировать как описывающую продольно-несвободный гравитационный волновой процесс (когда прохождение волны сопровождается ускорением системы отсчета в направлении распространения волны).

Метрику Розена [144, с. 137] можно записать в виде

$$ds^2 = \exp(2\mu) (dx_0^2 - dx_1^2) - u^2 (\exp(2\nu) dx_2^2 - \exp(-2\nu) dx_3^2), \quad (9.30)$$

где $\mu(u)$ и $\nu(u)$ — функции от $u = x^0 - x^1$, удовлетворяющие уравнению $2\mu_{,u} = u(\nu_{,u})^2$.

Определим опять диаду $\{\tau, l\}$ кинеметрическим способом в системе координат, в которой записана метрика (9.30). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \{\exp(-\mu); 0; 0; 0\}; \\ l^\mu &= \{0; \exp(-\mu); 0; 0\}; \\ \gamma^{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\exp(-2\nu)}{u^2} & 0 \\ 0 & \frac{\exp(2\nu)}{u^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

Для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F} = \widehat{D} = \exp(-\mu) \mu'; \quad \bar{F}_\xi = f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0; \\ \bar{D}_{\xi\eta} = -d_{\xi\eta} = (1/2) \exp(-\mu) \gamma'_{\xi\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

где штрих означает дифференцирование по u . Легко убедиться, что опять вектором Дебеве является $k^\mu = \tau^\mu + l^\mu$ и выполняются условия (9.26).

Таким образом, опять данная метрика в системе отсчета (9.31) описывает продольно-несвободный гравитационный волновой процесс.

Объемные волны Бонди — Пирани — Робинсона [154] описываются метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2 dx_3 + \gamma dx_3^2, \quad (9.33)$$

где α, β, γ — функции от $u = x^0 + x^1$, удовлетворяющие уравнению

$$\lambda'' - (1/2) \lambda' (\ln \lambda)' - \alpha' \gamma' - \beta'^2 = 0; \quad \lambda = \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по u .

В кинеметрической калибровке

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu = \{1; 0; 0; 0\}; \quad \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\beta & -\gamma \end{pmatrix}; \\ l^\mu = \{0; 1; 0; 0\}; \\ \widehat{F} = \widehat{D} = 0; \quad \bar{F}^\xi = f^\xi = q^\xi = \Lambda^\xi = 0; \\ \bar{D}_{\xi\eta} = (1/2) \partial \gamma_{\xi\eta} / \partial x^0; \quad d_{\xi\eta} = (1/2) \partial \gamma_{\xi\eta} / \partial x^1. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Вектор Дебеве равен $k^\mu = \tau^\mu - l^\mu$. В данной системе отсчета вектор ускорения равен нулю, т. е. этой метрикой описывается свободный гравитационный волновой процесс (конгруэнция мировых линий системы отсчета является геодезической).

Интересным примером волновой метрики подтипа N является решение Переса [155]:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - 2\varphi (dx_0 + dx_1)^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (9.35)$$

где функция $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяет соотношению $\varphi_{,2,2} + \varphi_{,3,3} = 0$. Для этой метрики в кинеметрической системе отсчета имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu = \left\{ \sqrt{1+2\varphi}; \quad -\frac{2\varphi}{\sqrt{1+2\varphi}}; \quad 0; \quad 0 \right\}; \\ l^\mu = \left\{ 0; \quad \frac{1}{\sqrt{1+2\varphi}}; \quad 0; \quad 0 \right\}; \quad \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \widehat{F} = \frac{\varphi_{,1}}{(1+2\varphi)^{3/2}}; \quad \widehat{D} = \frac{1}{(1+2\varphi)^{3/2}} [\varphi_{,0}(1+2\varphi) - 2\varphi_{,1}(1+\varphi)]; \\ \bar{F}_\xi = f_\xi = -q_\xi = \frac{\varphi_{,\xi}}{1+2\varphi}; \quad \Lambda_\xi = 0; \quad \bar{D}_{\xi\eta} = d_{\xi\eta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

Вектором Дебеве служит $k^\mu = \sqrt{1 + 2\varphi} (\tau^\mu - l^\mu)$.

Условия (9.26), налагаемые на волновой вектор, выполняются. Поперечно-поперечные компоненты тензора Римана — Кристоффеля $X_{\xi\eta} = \varphi_{,\xi,\eta}/(1 + 2\varphi)$ могут удовлетворять референционному волновому критерию. Это определяется зависимостью φ от x^0 и x^1 . Если тензор $\bar{X}_{\xi\eta}$ не является ни стационарным, ни пространственно-однородным, то эта метрика в данной системе отсчета описывает общий несвободный гравитационный волновой процесс. Распространение волны продольной деформации \hat{D} связано с продольным (\hat{F}) и поперечным \bar{F}_ξ ускорениями выбранной системы отсчета. Своеобразие этого случая заключается в постоянстве поперечно-поперечных компонент метрики, т. е. $\gamma_{\xi\eta} = \text{const}$.

Функция φ может оказаться такой, что тензор $\bar{X}_{\xi\eta}$ не удовлетворяет референционному волновому критерию (например, когда φ не зависит от x^0). Тогда метрику Переса следует рассматривать как пример метрики подтипа N , не являющейся волновой. Это аналогично ситуации в электродинамике, когда скрещенные статические однородные электрическое и магнитное поля характеризуются равными нулю инвариантами. Интересная интерпретация частного случая именно такого решения Переса предложена в работе [156]. Она состоит в том, что метрику можно понимать как описывающую искривление пространства-времени, вызванное световой нитью (лучом лазера) вдоль оси x^1 .

Волновая метрика, не удовлетворяющая ни одному алгебраическому критерию. Примером такой метрики являются цилиндрические волны Эйнштейна — Розена [157], принадлежащие подтипу I по классификации Петрова. Эту метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \exp(2\gamma - 2\psi) (dx_0^2 - d\rho^2) - \exp(2\psi) dz^2 - \rho^2 \exp(-2\psi) d\varphi^2, \quad (9.37)$$

где γ и ψ — функции x^0 и ρ , удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} = 0; \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_0}. \quad (9.39)$$

Видно, что уравнение для ψ (9.38) является хорошо известным линейным волновым, когда ρ , φ и z имеют смысл обычных цилиндрических координат. Его решение легко можно найти через цилиндрические функции; подставляя решение в (9.39), нетрудно отыскать соответствующую функцию γ .

Рассмотрим откалиброванную кинеметрическим образом диаду. Тогда

$$\left. \begin{aligned}
\tau^\mu &= \{\exp(\psi - \gamma); 0; 0; 0\}; & \gamma_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} \rho^2 \exp(-2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(2\psi) \end{pmatrix}; \\
l^\mu &= \{0; \exp(\psi - \gamma); 0; 0\}; \\
\bar{F}_\xi &= f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0; & \widehat{F} &= \exp(\psi - \gamma) (\psi' - \gamma'); \\
\widehat{D} &= \exp(\psi - \gamma) (\dot{\gamma} - \dot{\psi}); \\
\bar{D}_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} -\rho^2 \dot{\psi} \exp(-\psi - \gamma) & 0 \\ 0 & \dot{\psi} \exp(3\psi - \gamma) \end{pmatrix}; \\
d_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} \rho \exp(-\gamma - \psi) (1 - \rho\psi') & 0 \\ 0 & \psi' \exp(3\psi - \gamma) \end{pmatrix},
\end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

где точка означает дифференцирование по x^0 , а штрих — дифференцирование по ρ . Отсюда ясно, что условия, налагаемые (7.43) на волновой вектор, выполняются, если $k^\mu = \exp(\psi - \gamma) (\tau^\mu \pm l^\mu)$ в выбранной калибровке. Вследствие линейности (9.38) здесь можно одновременно рассматривать расходящуюся и сходящуюся волны. Нетрудно показать, что данная метрика удовлетворяет референционному критерию. Таким образом, метрикой Эйнштейна — Розена описывается продольно-несвободный гравинерциальный волновой процесс.

9.6. СЛАБЫЕ ПЛОСКИЕ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Как уже указывалось, именно случай слабых плоских гравинерциальных волн представляет наибольший практический интерес для земного наблюдателя, находящегося в слабом гравитационном поле далеко от возможных космических источников гравитационного излучения.

Начнем с изложения теории слабого гравинерциального поля (не обязательно волнового) в диадной формулировке [158], причем, имея в виду дальнейшее ее применение к волновым процессам, воспользуемся кинеметрической калибровкой. В качестве исходных выберем следующие представления контравариантных диадных составляющих метрического тензора:

$$\left. \begin{aligned}
\tau^0 &= 1 + a^{00}/2; & \tau^i &= a^{0i}; & l^1 &= 1 - a^{11}/2; & l^0 &\equiv 0; \\
l^\xi &= -a^{1\xi}; & \gamma^{\xi\eta} &= -\varepsilon^{\xi\eta} - a^{\xi\eta}; & \gamma^{0\mu} &= \gamma^{1\mu} \equiv 0,
\end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

где все $a^{\mu\nu} \ll 1$. Приведенные величины в дальнейшем будем рассматривать как основные переменные. Заметим, что в кинеметрической калибровке эти 10 величин — все отличные от нуля в ней контравариантные компоненты τ^μ , l^μ и $\gamma^{\mu\nu}$.

Для ковариантных компонент τ_μ, l_μ и $\gamma_{\mu\nu}$ имеем разложения в бесконечные ряды. В первом приближении находим:

$$\left. \begin{aligned}
\tau_0 &\approx 1 - a^{00}/2; & l_0 &\approx a^{01}; & l_1 &\approx -(1 + a^{11}/2); & \tau_i &\equiv 0; \\
\gamma_{0\xi} &\approx -a^{0\xi}; & \gamma_{1\xi} &\approx a^{1\xi}; & \gamma_{\xi\eta} &= -\varepsilon_{\xi\eta} + a^{\xi\eta}; & l_\xi &\equiv 0.
\end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

Диадные физико-геометрические тензоры в общем случае также представляются в виде рядов. Запишем их в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F} &\approx \frac{1}{2} a_{,1}^{00}; \quad \overline{F}_\xi \approx \frac{1}{2} a_{,\xi}^{00}; \quad f_\xi \approx \frac{1}{2} a_{,\xi}^{11}; \quad q_\xi = \frac{1}{2} a_{,\xi}^{01}; \\ \widehat{D} &\approx (1/2) a_{,0}^{11} + a_{,1}^{01}; \quad \Lambda_\xi \approx (1/2) (a_{,0}^{1\xi} + a_{,1}^{0\xi}); \\ \widehat{D}_{\xi\eta} &\approx (1/2) (a_{,0}^{\xi\eta} - a_{,\eta}^{0\xi} - a_{,\xi}^{0\eta}); \quad d_{\xi\eta} \approx (1/2) (a_{,1}^{\xi\eta} - a_{,\eta}^{1\xi} - a_{,\xi}^{1\eta}). \end{aligned} \right\} (9.43)$$

В этом приближении диадные производные от физико-геометрических тензоров следует рассматривать как частные производные, поэтому выпишем уравнения Эйнштейна в диадном виде (в вакууме) с точностью до величин первого порядка по $a^{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu \approx \partial_L d + \widetilde{\nabla}_\varphi f^\varphi - (1/2)^2 R = 0; \quad (9.44)$$

$$G_{\mu\nu} \tau^\mu l^\nu \approx \partial_L \overline{D} - \widetilde{\nabla}_\varphi (\Lambda^\varphi + q^\varphi) = 0; \quad (9.45)$$

$$G_{\mu\nu} \tau^\mu \gamma_\xi^\nu \approx -\widetilde{\nabla}_\eta [\overline{D}_\xi^\eta + \gamma_\xi^\eta (\overline{D} - \widehat{D})] + \partial_L (\Lambda_\xi - q_\xi) = 0; \quad (9.46)$$

$$G_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \approx \partial_T \overline{D} + \widetilde{\nabla}_\varphi \overline{F}^\varphi + (1/2)^2 R = 0; \quad (9.47)$$

$$G_{\mu\nu} l^\mu \gamma_\xi^\nu \approx -\widetilde{\nabla}_\eta (d_\xi^\eta + \gamma_\xi^\eta d) + \partial_T (\Lambda_\xi + q_\xi) + \widetilde{\nabla}_\xi \widehat{F} = 0; \quad (9.48)$$

$$R_{\mu\nu} \gamma_\xi^\mu \gamma_\eta^\nu = \partial_T \overline{D}_{\xi\eta} - \partial_L d_{\xi\eta} + {}^2R_{\xi\eta} + (1/2) [\widetilde{\nabla}_\xi (\overline{F}_\eta - f_\eta) + \widetilde{\nabla}_\eta (\overline{F}_\xi - f_\xi)] = 0; \quad (9.49)$$

где

$${}^2R_{\xi\eta} \approx (1/2) (a_{,\xi,\varphi}^{\eta\varphi} + a_{,\eta,\varphi}^{\xi\varphi} - a_{,\varphi,\varphi}^{\xi\eta} - a_{,\xi,\eta}^{\varphi\varphi}).$$

Пусть имеет место слабый гравиинерциальный волновой процесс с волновым вектором $k^\mu = \tau^\mu \pm l^\mu$ и пусть этот процесс является плоским по Кундту, т. е. выполняются условия (9.22б) и (9.24). Такие процессы могут описывать широкий класс как свободных, так и продольно- и поперечно-несвободных гравиинерциальных волновых явлений. В частности, могут быть и процессы, соответствующие метрике Переса.

Ограничимся рассмотрением свободных гравиинерциальных волновых процессов, соответствующих объемным волнам Бонди — Пирани — Робинсона (9.33). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \{1; 0; 0; 0\} \rightarrow a^{00} = 0; \quad a^{0i} = 0; \\ l^\mu &= \{0; 1; 0; 0\} \rightarrow a^{11} = 0; \quad a^{1\xi} = 0. \end{aligned} \right\} (9.50)$$

Остаются неизвестными три величины $a^{\xi\eta}$ зависящие от координат x^0 и x^1 . Для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F} = \widehat{D} &= 0; \quad \overline{F}_\xi = f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0; \quad {}^2R_{\xi\eta} = 0; \\ \overline{D}_{\xi\eta} &= (1/2) a_{,0}^{\xi\eta}; \quad d_{\xi\eta} = (1/2) a_{,1}^{\xi\eta}. \end{aligned} \right\} (9.51)$$

Из уравнений Эйнштейна (9.44—9.49) нетривиальными являются:

$$\partial_L d = 0 \rightarrow (\partial^2/\partial x_1^2) (a^{22} + a^{33}) = 0; \quad (9.44a)$$

$$\partial_L \bar{D} = 0 \rightarrow (\partial^2/\partial x_0 \partial x_1) (a^{22} + a^{33}) = 0; \quad (9.45a)$$

$$\partial_T \bar{D} = 0 \rightarrow (\partial^2/\partial x_0^2) (a^{22} + a^{33}) = 0; \quad (9.47a)$$

$$\partial_T \bar{D}_{\xi\eta} - \partial_L d_{\xi\eta} = 0 \rightarrow (\partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial x_1^2) a^{\xi\eta} = 0. \quad (9.49a)$$

Преобразованиями координат на 2-мерной поверхности фронта (разрешенными в пределах кинеметрической калибровки) всегда можно добиться, чтобы $a^{22} + a^{33} = 0$. Тогда остаются лишь уравнения (9.49a), являющиеся волновыми для двух независимых комбинаций: $a^{22} - a^{33}$ и a^{23} .

Таким образом, в слабом гравинерциальном поле может реализовываться свободный гравинерциальный волновой процесс, описываемый двумя независимыми поперечно-поперечными компонентами (2-мерной метрики): $\alpha = (1/2) (a^{22} - a^{33})$; $\beta = a^{23}$.

В рассмотренном приближении плоскому свободному гравинерциальному волновому процессу соответствует метрика

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 + \alpha) dx_2^2 - (1 - \alpha) dx_3^2 - 2\beta dx_2 dx_3. \quad (9.52)$$

Легко показать, что волновой вектор $k^\mu = \tau^\mu \pm l^\mu$ в данной калибровке и рассматриваемом приближении удовлетворяет условиям (9.26) (является ковариантно-постоянным), т. е. можно сказать, что метрика (9.52) принадлежит подтипу N по классификации Петрова и, следовательно, удовлетворяет алгебраическому критерию гравитационных волн Лихнеровича [159].

Отличные от нуля компоненты тензора Римана — Кристоффеля $X_{\xi\eta} = -Y_{\xi\eta} = \partial_T \bar{D}_{\xi\eta} = (1/2) \partial^2 \gamma_{\xi\eta} / \partial x_0^2$ удовлетворяют референционному волновому критерию гравинерциальных волн, если функции α и β нетривиально удовлетворяют волновым уравнениям (9.49a).

Особо следует подчеркнуть, что рассмотренный свободный волновой процесс не исчерпывает все возможности. Слабым плоским гравинерциальным волнам соответствует еще множество не-свободных волновых процессов.

9.7. ПОВЕДЕНИЕ ПРИБОРОВ В СЛАБОЙ ПЛОСКОЙ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОЙ ВОЛНЕ

Поведение систем из свободных пробных масс. Пусть пробные массы таковы, что можно выбрать сопутствующую им синхронную систему отсчета, и, кроме того, пусть τ^μ и направление распространения волны l^μ находятся кинеметрической (хронометрической) калибровкой из метрики (9.52), в которой

$$\alpha = A \sin [(\omega/c) (x^0 - x^1)]; \quad \beta = B \sin [(\omega/c) (x^0 - x^1) + \varphi]; \quad (9.53)$$

$A \ll 1; B \ll 1$. Тогда τ^μ и l^μ имеют вид (9.50), т. е. волна распространяется вдоль оси x^1 .

Возьмем точки-приборы, которые до прихода волны (при $A=0, B=0$) находились на одном расстоянии $\delta\sigma_0$ от какой-то выделенной точки O . Эти точки лежат на сфере радиуса $\delta\sigma_0$:

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 = \delta\sigma_0^2.$$

Когда волновой процесс достигает системы, расстояние от точки до другой близкой точки определяется по формуле

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2) + 2\beta\delta x_2\delta x_3}. \quad (9.54)$$

Характерно, что по определению данной калибровки пространственные координаты каждой точки-прибора неизменны, приборы «вморожены» в координатную сетку.

Рассмотрим отдельно поведение свободных пробных масс для процессов двух типов [160].

а) Пусть $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Тогда

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2)}. \quad (9.54a)$$

В координатном пространстве поверхность $\delta\sigma = \delta\sigma_0 = \text{const}$ является эллипсоидом:

$$\delta x_1^2/\delta\sigma_0^2 + \delta x_2^2(1 + \alpha)/\delta\sigma_0^2 + \delta x_3^2(1 - \alpha)/\delta\sigma_0^2 = 1$$

с полуосями $\delta\sigma_0, \delta\sigma_0/\sqrt{1 + \alpha}, \delta\sigma_0/\sqrt{1 - \alpha}$. В сечении $\delta x_1 = 0$ получим эллипс. В координатах плоской 2-мерной поверхности (x^2, x^3) на рис. 17 изображены точки, попадающие на эллипс:

$$\delta x_2^2(1 + \alpha)/\delta\sigma_0^2 + \delta x_3^2(1 - \alpha)/\delta\sigma_0^2 = 1 \quad (9.55a)$$

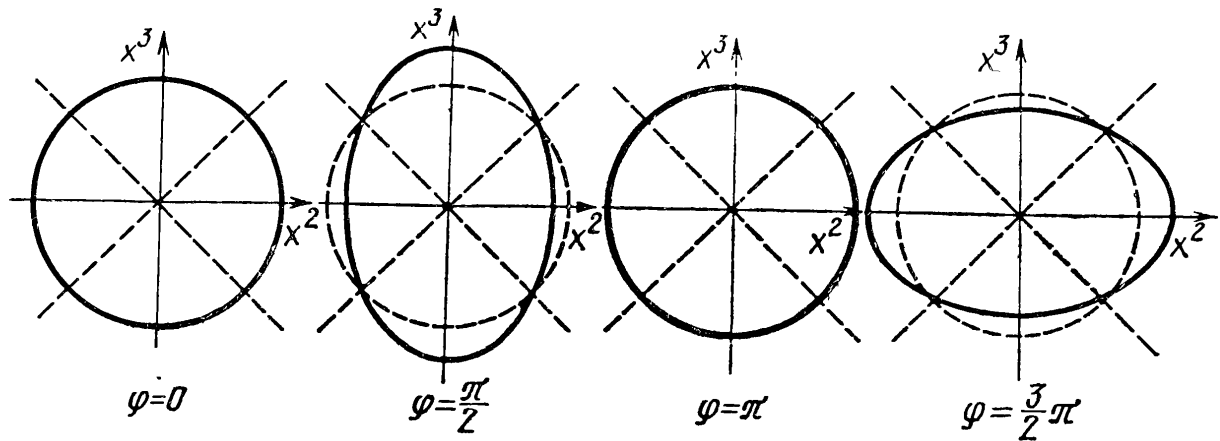


Рис. 17. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационной волны ($\alpha \neq 0; \beta = 0$)

в течение периода волны. Примечательно, что есть два направления $\delta x_2 = \pm \delta x_3$, вдоль которых расстояния не меняются.

б) Пусть $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Тогда

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + 2\beta\delta x_2\delta x_3}. \quad (9.54b)$$

Опять поверхность $\delta\sigma = \delta\sigma_0 = \text{const}$ образует эллипсоид. Сечение эллипсоида $\delta x_1 = 0$ представляет собой эллипс

$$\delta x_2^2 / \delta\sigma_0^2 + \delta x_3^2 / \delta\sigma_0^2 + 2\beta \delta x_2 \delta x_3 / \delta\sigma_0^2 = 1,$$

который поворотом координат на угол $\alpha = 45^\circ$ можно привести к канонической форме

$$\delta y_2^2 (1 + \beta) / \delta\sigma_0^2 + \delta y_3^2 (1 - \beta) / \delta\sigma_0^2 = 1. \quad (9.55 \text{ б})$$

За период волны на этот эллипс попадают точки, изображенные на рис. 18. Опять имеются два направления $\delta y_2 = \pm \delta y_3$ (по старым осям x^2 и x^3), вдоль которых расстояния не меняются.

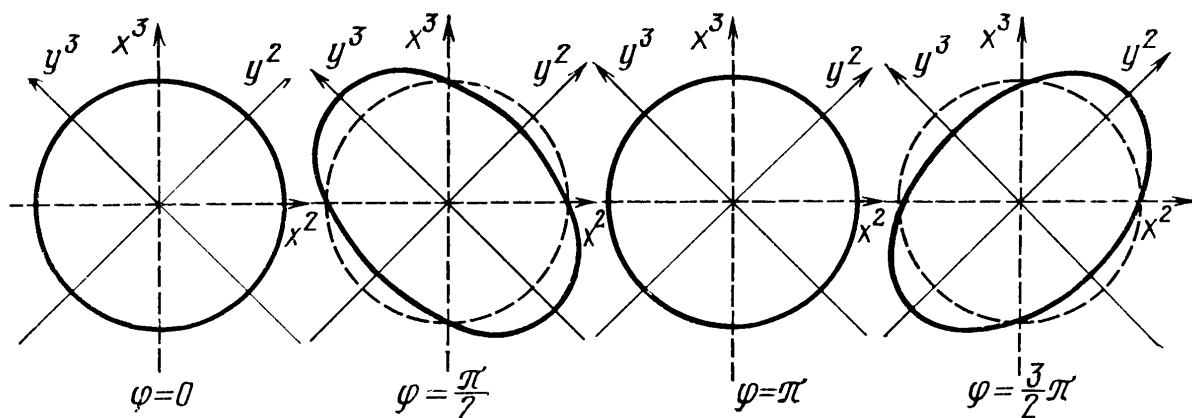


Рис. 18. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационной волны ($\alpha=0$; $\beta \neq 0$)

Таким образом, две поляризации плоской свободной гравитационной волны соответствуют периодическим растяжениям и сжатиям 2-мерной поверхности одинаковой фазы вдоль пар взаимно перпендикулярных направлений, повернутых относительно друг друга на 45° . Направления максимальных удлинений (сокращений) для одной поляризации соответствуют несмещающимся точкам в другой поляризации и наоборот. Это отмечено на рисунках.

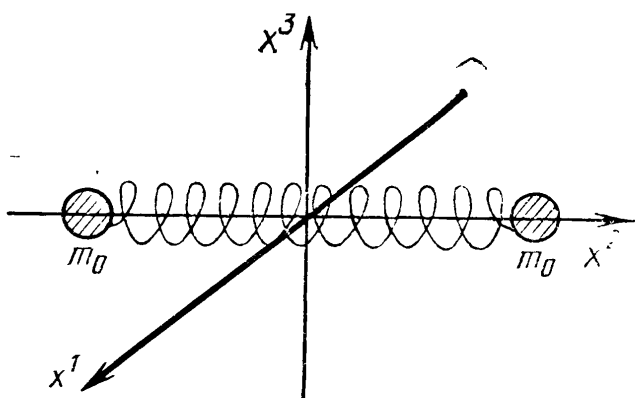


Рис. 19. Осциллятор из двух связанных пружиной масс

Поведение осциллятора в слабой плоской гравитационной волне [161]. Рассмотрим несвободные пробные частицы, моделирующие в упрощенном виде детекторы гравитационного излучения.

Поведение осциллятора в слабой плоской гравитационной волне [161]. Рассмотрим несвободные пробные частицы, моделирующие в упрощенном виде детекторы гравитационного излучения.

Постановка задачи. Пусть на линейный осциллятор, который состоит из двух одинаковых частиц массой m_0 , соединенных пружиной жесткости k и длиной $2r_0$ в ненапряженном состоянии и ориентированных вдоль направления x^2 (рис. 19), падает вдоль x^1 плоско поляризованная волна, описываемая метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 + \alpha) dx_2^2 - (1 - \alpha) dx_3^2, \quad (9.56)$$

где $\alpha = A \sin[(\omega/c)(x^0 - x^1)]$; $A \ll 1$. Здесь одна поляризация оставлена для простоты. Систему отсчета будем задавать хронометрическим способом. Пространственные уравнения мировых линий масс записываются в данной калибровке следующим образом:

$$dp^i/d\tau = L_{sk}^i p^s v^k + mF^i + 2p^k (A_{ik}^i - D_k^i) + \tilde{\Phi}^i, \quad (9.57)$$

где $\tilde{\Phi}^i$ — компоненты негравитационных сил, т. е. силы напряжения пружины Φ^i и диссипативной силы. Нам понадобится только компонента уравнения вдоль x^2 .

Сила напряжения пружины (вдоль x^2) Φ_2 пропорциональна ее жесткости и абсолютному удлинению (индексы будем писать внизу)

$$\Phi_2 = -k(\sqrt{\delta l^2} - 2r_0), \quad (9.58)$$

где $\delta l^2 = -h_{ik} \delta x^i \delta x^k$ — квадрат длины пружины (δx^i — разность координат ее концов).

Качественный анализ процесса. Для данного процесса можно указать три пары характерных мировых линий (рис. 20). Тонкие непрерывные линии соответствуют мировым линиям масс в отсутствие пружины (геодезические). Пунктирные линии изображают негеодезические мировые линии равновесия пружины. Расстояние между ними всегда равно $2r_0$. Жирными линиями показаны истинные мировые линии масс, связанных пружиной. В данной задаче имеются два положения равновесия: ненапряженное положение пружины и геодезические. Отклонения масс от них характеризуются соответственно величинами ξ и ζ .

Рассмотрим поведение масс относительно трех систем отсчета, конгруэнциям которых принадлежит три пары указанных мировых линий. При этом ограничимся рассмотрением одной лишь правой частицы. Кроме того, предположим, что до прихода гравитационной волны частицы покоились и пружина была в ненапряженном состоянии. Тогда скорости, приобретаемые массами, и смещения будут иметь порядок амплитуды падающей волны.

а) *Синхронная система отсчета* ($A_{ik} = 0, F_i = 0$). Конгруэнции этой системы отсчета принадлежат тонкие и центральная штрих-пунктирная линии. Очевидно, что система координат, в которой записана метрика (9.56), является хронометрической для синхронной системы отсчета. Координата правой массы равна $\delta x^2 = r_0 + \zeta$.

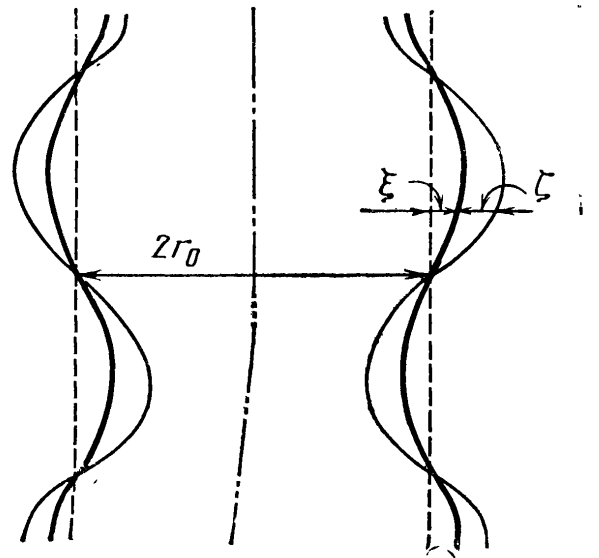


Рис. 20. Поведение осциллятора из двух связанных пружиной масс в метрике слабой плоской гравитационной волны

Пренебрежем величинами $L_{sk}^i p^s v^k$ и $2p^k D_k^i$ (третьего и второго порядков). Уравнение (9.57) тогда приобретет вид:

$$m_0 d^2 \zeta / dt^2 = \tilde{\Phi}_2. \quad (9.57a)$$

Из-за малости скоростей здесь и в дальнейшем пренебрегаем членами порядка $(v/c)^2$. Компонента Φ_2 силы напряжения пружины запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -2k \left(\sqrt{h_{22} \delta x_2^2} - r_0 \right) = -2k \left(\sqrt{(1 + \alpha)(r_0 + \zeta)^2} - r_0 \right) \approx \\ &\approx -2k [(\alpha/2) r_0 + \zeta]. \end{aligned} \quad (9.58a)$$

Подставляя Φ_2 в (9.57a) и вводя диссипативную силу, получаем:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{2k}{m_0} \zeta + \frac{\lambda}{m_0} \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{k}{m_0} \alpha r_0. \quad (9.59a)$$

Это уравнение отличается от веберовского [157] [см. также (9.59в) ниже] тем, что справа в качестве коэффициента стоит k/m_0 , а не половина квадрата частоты падающего излучения.

Если возле массы осциллятора (или торца цилиндра Вебера) повесить покоящуюся до прихода волны пробную массу на длинной нити (или поместить рядом на борту спутника), то ζ будет определять относительное смещение пробной и связанной масс (или массы и торца цилиндра Вебера).

б) *Сопутствующая массам система отсчета.* Координаты рассматриваемых масс в этой системе отсчета неизменны. Тогда $v^i = p^i = 0$, а уравнения (9.57) существенно упрощаются:

$$-mF_2 = \tilde{\Phi}_2 \quad (9.57б)$$

и имеют смысл равенства силы инерции силе напряжения пружины. Рассматриваемому случаю соответствует хронометрическая система координат, получающаяся из исходной (9.56) преобразованиями $x'^0 = x^0$; $x'^1 = x^1$; $x'^2 = x^2 [1 + \eta(x^0)]$; $x'^3 = x^3$, где $\eta(x^0) \ll 1$ и имеет порядок амплитуды падающей волны. В этой системе координат с точностью до величин первого порядка имеем: $g'_{00} = 1$; $g'_{02} \approx x_2 \dot{\eta}$; $g'_{22} \approx -(1 + \alpha - 2\eta) = -h'_{22}$. Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени выбранной системы отсчета. Подставляя последние соотношения в выражение для ускорения системы отсчета (3.78), получаем в точке нахождения массы $F_2 = g_{02,0} = r_0 \ddot{\eta}$. Силу напряжения пружины находим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -2k \left(\sqrt{h'_{22} \delta x_2'^2} - r_0 \right) = -2kr_0 \left(\sqrt{1 + \alpha - 2\eta} - 1 \right) \approx \\ &\approx -2kr_0 (\alpha/2 - \eta). \end{aligned} \quad (9.58б)$$

Подставляя два последних выражения в (9.57б), записываем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2}{dt^2} (r_0 \eta) + \frac{2k}{m_0} (r_0 \eta) + \frac{\lambda'}{m_0} \frac{d}{dt} (r_0 \eta) = \frac{k}{m_0} r_0 \alpha. \quad (9.59б)$$

Здесь опять введена диссипативная сила. Это уравнение совпадает с (9.59а), если $\xi = -r_0\eta$.

В эксперименте Вебера [162], где сигнал снимали с пьезодатчиков, жестко связанных с цилиндром, наблюдаемой, по-видимому, является величина $F_2 = r_0\ddot{\eta}$. Однако тогда вынуждающая сила отличается от теоретически полученной Вебером.

в) Система отсчета ненапряженной пружины. Пусть ее конгруэнции принадлежат пунктирные линии и средняя мировая линия (на рисунке штрихпунктирная). Остальные линии определяются из условия $h'_{ik}x'^i x'^k = \text{const}$. В хронометрической системе координат этой системы отсчета пространственные координаты x'^i мировых линий постоянны. Учитывая указанные условия, находим преобразования исходной системы координат, в которой записана метрика (9.56), в хронометрическую систему координат данной системы отсчета: $x'^0 = x^0$; $x'^1 = x^1$; $x'^2 = x^2(1 - \alpha/2)$; $x'^3 = x^3$. Искомая метрика имеет вид:

$$ds^2 = dx_0^2 - x_2 \dot{\alpha} dx_0 dx_2 - dx_1^2 - dx_2^2 - x_2 (\partial\alpha/\partial x_1) dx_1 dx_2 - (1 + \alpha) dx_3^2. \quad (9.56в)$$

Координаты массы $\delta x_2 = r_0 + \xi$, где ξ — малая величина порядка α . Сила напряжения пружины равна:

$$\Phi_2 = -2k(\sqrt{-g_{22}(r_0 + \xi)^2} - r_0) \approx -2k\xi. \quad (9.58в)$$

Оставляя в (9.57) только величины первого порядка, получаем:

$$m_0 \dot{\xi} = m_0 F_2 - 2k\xi. \quad (9.57в)$$

Учитывая, что в данной системе отсчета $\tau_2 = g_{02}/\sqrt{g_{00}} = -x_2 \dot{\alpha}/2$; $F_2 \approx -(x_2/2)\ddot{\alpha}$, и вводя диссипативную силу, находим уравнение колебаний

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2k}{m_0}\xi + \frac{\lambda''}{m_0} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2}{2}\alpha r_0, \quad (9.59в)$$

совпадающее с веберовским [157].

По-видимому, в эксперименте Брагинского [163], где сигнал снимали с емкостного датчика, непосредственно регистрировалась величина ξ , определяющая удлинение прибора.

Обсуждение результатов. В использованном приближении упругие силы пружины (9.58) во всех трех системах отсчета одинаковы, откуда следует, что

$$\xi = r_0(\alpha/2 - \eta) = (\alpha/2)r_0 + \zeta. \quad (9.60)$$

Подставив в уравнение (9.59в) вместо ξ величину $r_0(\alpha/2 - \eta)$, получаем уравнение (9.59б). Таким образом, уравнения (9.59в) и (9.59а) [или (9.59б)] описывают колебания одной и той же миро-

вой линии несвободной массы относительно двух положений равновесия: для пружины и геодезических. При резонансе ($\omega = \sqrt{2k/m_0}$) эти уравнения совпадают. При отсутствии гравитационной волны положения равновесия тождественны и уравнения совпадают. В отсутствие пружины уравнения (9.59а) и (9.59б) тривиальны, а уравнение (9.59в) описывает колебания свободных масс.

Сделаем несколько замечаний:

1. Приведенные рассуждения касаются поправки к оценке возбуждения, оказываемого волной на детектор. Обычно ожидается, что сигнал короткий, так что экспериментаторы измеряют колебания возбужденного детектора в отсутствие гравитационных волн (в плоском пространстве-времени).

2. Аналогичные рассуждения можно было бы провести для одной большой массы M (движущейся практически по геодезической) и малой массы $m_0 \ll M$ на пружинке жесткости k и длиной l_0 в ненапряженном состоянии. Результат будет отличаться заменой собственной частоты $\sqrt{2k/m_0}$ величиной $\sqrt{k/m_0}$.

Глава 10

НА ПУТИ К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ

10.1. НЕОБХОДИМОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Под квантовой теорией гравитации будем понимать теорию, совмещающую принципы ОТО и квантовой теории. Пока такая теория не создана, однако есть немало весомых доводов, свидетельствующих о необходимости ее построения. Кратко перечислим важнейшие из них [164].

1. Стало ясно, что общее космологическое решение или, по крайней мере, решения, рассматриваемые сейчас как возможные приближения реального мира, имеют особенности. Другими словами, метрика пространственно-временного многообразия регулярна лишь в течение ограниченного с той или иной стороны (или с обеих сторон) промежутка времени. Наличие особенностей — свидетельство того, что ОТО вблизи них теряет силу. Здесь появляются огромные плотности материи — такие ситуации должны описываться новой теорией, охватывающей закономерности микромира, в частности включающей в себя квантовую теорию.

2. Параллельное существование квантовой теории и ОТО ставит вопросы о сути основных понятий классического пространства-времени в микромире. В частности, возникает необходимость ограничения области применимости таких понятий, как расстояние и время [14, с. 460; 165]. Сопоставляя квантовомеханическое соотношение неопределенностей и условие $g_{00} > 0$ в окрестности произвольной массы, можно получить ограничение (в сантиметрах)

$$\Delta x > \sqrt{\hbar k/c^3} \equiv l_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-33}, \quad (10.1)$$

где l_0 — так называемая *планковская длина*.

3. Уже более 100 лет перед физиками стоит вопрос, поставленный еще Риманом. «Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве... Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное». Далее Риман добавлял: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшней день» [14, с. 32].

Неужели нет такого повода и спустя 100 с лишним лет, когда наука шагнула далеко в микромир, когда создана блестяще подтвержденная опытом квантовая теория?! Как уже отмечалось в § 1.3, представляется несомненным тот факт, что то дискретное реальное, которое, как ожидал Риман, ответственно за метрические свойства пространства, является квантовомеханическими закономерностями атома и молекулы.

4. Неуклонно крепнет убеждение физиков-теоретиков, что построение квантовой теории гравитации прольет свет на основные трудности современной квантовой электродинамики и мезодинамики, в частности позволит корректно избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Об этом же свидетельствует наличие в теории гравитации длин — гравитационных радиусов частиц, а также появление планковской длины l_0 .

5. Очень привлекательна идея с помощью квантовой гравитации построить теорию элементарных частиц. В одном из направлений таких исследований делаются попытки построения геометрических моделей элементарных частиц, а также идут поиски частицеподобных решений уравнений Эйнштейна и Максвелла.

Другое направление состоит в попытках включения гравитации в единую схему с другими физическими полями с помощью введения новых симметрий (например, использование суперсимметрий приводит к теории супергравитации).

6. Неоднократно высказывалось соображение, что при предположении лишь классического характера гравитационного поля существовала бы принципиальная возможность определения координат и импульсов частиц при помощи гравитационных взаимодействий более точно, чем допускается соотношением неопределенностей. А это ведет к несостоятельности всей квантовой теории.

7. Следует учитывать также неутолимую жажду познания, поиска все более общих и глубоких принципов, охватывающих уже известные. Сюда относится и желание объединить две важнейшие теории современной теоретической физики (квантовую теорию и ОТО), пока еще существующие независимо друг от друга. Такие исследования не могут быть бесплодными, рано или поздно они

приведут к открытию новых важных закономерностей окружающего нас мира.

Ко всему сказанному следует добавить широко распространенную уверенность в тесной связи проблемы построения квантовой теории гравитации с проблемами гравитационных волн и энергии в ОТО.

10.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТРУДНОСТИ КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ

Известно, что возникновению почти всех физических теорий предшествовало накопление экспериментального материала. Исключение составляла, пожалуй, лишь ОТО, появление которой больше было обязано накоплению значительного материала логического и философского характера. По-видимому, в этом отношении история появления квантовой теории гравитации может повториться. Построению искомой теории способствовало бы обнаружение и изучение гравитационных волн. В последнее время в связи с резким расширением экспериментальных гравитационных исследований появилась надежда на их обнаружение.

В этих условиях теоретику пока не остается ничего другого, как придерживаться тех или иных соображений логического или философского характера. Прежде всего следует различать три направления, связанных с разным пониманием природы гравитации. В рамках каждого из этих направлений по-разному ставится задача квантования гравитации и используются различные методы решения.

1. Согласно *реляционной концепции пространства-времени* [166] гравитация описывается свойствами классических пространственно-временных отношений, в которые вступают друг с другом макрообъекты. При таком понимании гравитации наиболее существенны следующие вопросы. Как трансформируются закономерности ОТО при описании поведения микрообъектов? Приводит ли совмещение принципов ОТО и квантовой теории к более глубокому пониманию основных понятий пространства и времени? Можно ли сформулировать квантовую теорию на основе более глубоких понятий, а если можно, то каких? Как сосуществуют и переходят друг в друга различные отношения между частями материи в разных масштабах. Связана ли проблема квантования гравитации с проблемой квантования пространства-времени? И так далее.

2. Согласно *субстанциальной концепции пространства-времени* гравитация материальна. Это можно понимать так, что существует фон из единой материи, описываемой пространственно-временными характеристиками. Все другие виды материи, известные и неизвестные, есть проявление этой «первичной» материи в виде различных геометрических особенностей метрического, топологического или какого-либо иного характера.

При таком понимании сущности ОТО проблема квантования гравитации прежде всего сводится к получению из геометрических

характеристик таких объектов, которые можно было бы отождествить с наблюдаемыми видами материи. Сюда относятся попытки получения частицеподобных решений уравнений Эйнштейна, введение «фридмонов», геонов и тому подобных образований [167]. Наиболее ярко представляет это направление Уилер, провозгласивший программу построения «массы без массы», «заряда без заряда», «поля без поля» [168].

В рамках данного подхода разумно ставить вопрос о получении не только известных видов материи, но и еще не открытых, которые могли бы описываться пространственно-временными характеристиками более непосредственным образом. Таким видом материи могут быть и пока гипотетические гравитоны.

Этот подход обычно связывают с именем Клиффорда, тогда как первый стоит ближе к точке зрения Маха.

3. Возможна *промежуточная концепция пространства-времени*. Согласно последней гравитацию можно рассматривать отчасти как материю, а отчасти как характеристику свойств пространства-времени. Эта точка зрения в значительной степени навеяна часто проводимой аналогией между гравитацией и теорией электромагнитного поля, где, как известно, электромагнитный потенциал можно разделить на продольную и поперечные составляющие. Продольная составляющая описывает кулоновское поле, а поперечная — электромагнитные волны (фотоны). Тогда в теории гравитации наиболее существенна задача выделения так называемых динамических переменных гравитационного поля. На классическом уровне они описывают гравитационные волны, а при переходе к квантовой теории подлежат квантованию. По аналогии с электромагнитным полем в качестве гравитационных динамических переменных можно попытаться выбрать волновую часть поперечно-поперечных составляющих метрического тензора (метрику $\gamma_{\xi\eta}$ 2-мерной поверхности, ортогональной направлению распространения волн). Остальные составляющие можно понимать как величины, описывающие систему отсчета и другие референционные понятия.

Большая часть современных физиков придерживается данного (третьего) направления. Представляется, что наиболее глубокими и фундаментальными являются задачи первого направления. Именно их решение позволило бы совместить принципы квантовой теории и ОТО. Однако значительная часть этих задач не исключается в рамках второго и третьего направлений. Кроме того, к их решению можно идти различными путями. В этой главе постараемся проанализировать точку зрения большинства (третье направление).

На пути выделения динамических гравитационных переменных встречается несколько существенных трудностей. Важнейшими из них являются ковариантность и нелинейность ОТО.

Ковариантность теории приводит к использованию значительно большего числа переменных, нежели ожидаемое число динамических степеней свободы. Кроме того, имеется широкий класс (коор-

динатных) преобразований, при которых применяемые переменные изменяются в довольно широких пределах. Необходимо разобраться в геометрическом и физическом смысле «лишних» переменных и уметь использовать произвол в выборе координат для описания динамических переменных. Эта задача будет решаться с помощью монадного и диадного методов в соответствующих калибровках. Заметим, что аналогичная трудность имеет место и в электродинамике.

Нелинейность ОТО приводит к чрезвычайно сложным соотношениям между составляющими метрического тензора, рассматриваемыми как обобщенные координаты системы, и их обобщенными скоростями и импульсами. В результате затрудняется решение получающихся из уравнений Эйнштейна уравнений (вторичных) связей относительно тех или иных величин. Кроме того, нелинейность означает отсутствие суперпозиции отдельных частных решений. Это существенно новая ситуация по сравнению с электродинамикой, где свободное электромагнитное поле описывается линейными уравнениями.

10.3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В реализации программы выделения динамических гравитационных переменных удастся продвинуться наиболее далеко с помощью гамильтоновой формулировки ОТО. Рассмотрим ее с учетом двух существенных факторов: способа введения времени и вопроса о соотношении обобщенных скоростей и импульсов.

Введение времени. Есть два способа построения гамильтонова формализма. Один основан на формальном использовании в качестве времени координаты x^0 , когда за обобщенные скорости выбраны частные производные от компонент поля по x^0 . Этот способ назовем *координатным каноническим формализмом*. Другой способ основан на использовании времени относительно системы отсчета без вращения, когда возможно глобальное расщепление многообразия на совокупность 3-мерных пространственных сечений и время. Как уже подчеркивалось, такие системы отсчета наиболее адекватно описываются монадным методом в кинеметрической калибровке. В этом способе, который назовем *референционным каноническим формализмом*, в качестве обобщенных скоростей следует использовать монадные к. и. временные производные.

Продемонстрируем эти два канонических формализма на примере скалярного поля, для которого второй указанный выше фактор не имеет места.

Плотность лагранжиана скалярного поля

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^2 \right)$$

запишем через монадные величины в кинеметрической калибровке:

$$\bar{\mathcal{L}} = (1/2) \tau_0 \sqrt{\hbar} [\mathcal{E}^2 + p_i p^i - (m^2 c^2 / \hbar^2) \Psi^2], \quad (10.2)$$

где учтены формулы (3.55) и $\sqrt{-g} = \tau_0 \sqrt{\hbar}$.

а) Координатный канонический формализм. В качестве обобщенной скорости берем $\partial\Psi/\partial x^0$, тогда обобщенный импульс равен:

$$P = \partial\bar{\mathcal{L}}/\partial(\Psi,_{,0}) = \sqrt{\hbar} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} = (1/\sqrt{\hbar}) P. \quad (10.3a)$$

Плотность координатного гамильтониана скалярного поля определяется стандартным образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_k &= \frac{\partial\Psi}{\partial x^0} P - \bar{\mathcal{L}} = \frac{\tau_0}{2\sqrt{\hbar}} P^2 - \\ &- \frac{\tau_0 \sqrt{\hbar}}{2} \left(p_i p^i - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^2 \right) - \tau_0 \tau^i \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} P. \end{aligned} \quad (10.4a)$$

Существенно, что эта величина целиком не представляется через монадные к. и. величины и их плотности.

Канонические уравнения имеют обычный вид. Так,

$$\partial P / \partial x^0 = - \delta \bar{\mathcal{H}}_k / \delta \Psi; \quad (10.5a)$$

$$\partial \Psi / \partial x^0 = \delta \bar{\mathcal{H}}_k / \delta P. \quad (10.6a)$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение

$$\delta A / \delta B = \partial A / \partial B - (\partial / \partial x^i) (\partial A / \partial B,_{,i}).$$

Видно, что (10.5a) с точностью до множителя совпадает с уравнением Клейна—Фока (3.54) (при $\alpha=0$), а (10.6a) — с (10.3a).

б) Референционный канонический формализм. В качестве обобщенной скорости выберем ${}^+ \partial_T \Psi = \mathcal{E}$, тогда обобщенный импульс

$$P = \partial\bar{\mathcal{L}}/\partial({}^+ \partial_T \Psi) = \tau_0 \sqrt{\hbar} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} = (1/\tau_0 \sqrt{\hbar}) P. \quad (10.3b)$$

Плотность референционного гамильтониана определится в монадном виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_p &= ({}^+ \partial_T \Psi) P - \bar{\mathcal{L}} = \frac{P^2}{2\tau_0 \sqrt{\hbar}} - \\ &- \frac{\tau_0 \sqrt{\hbar}}{2} \left(p_i p^i - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^2 \right). \end{aligned} \quad (10.4b)$$

Непосредственным вычислением получаем референционные канонические уравнения:

$${}^+ \partial_T P = - \delta \bar{\mathcal{H}}_p / \delta \Psi; \quad (10.5b)$$

$${}^+ \partial_T \Psi = \delta \bar{\mathcal{H}}_p / \delta P. \quad (10.6b)$$

Опять (10.5b) совпадает с ранее записанным уравнением Клей-

на— Фока, а (10.6б) совпадает с определением импульса (10.3б).

Здесь мы впервые столкнулись с монадной производной (в кинеметрической калибровке) от плотности. Ее легко найти из определения производной Ли от плотности (1.54):

$${}^+ \partial_T (\sqrt{-g} \mathcal{E}) = \tau_0 \sqrt{h} ({}^+ \partial_T \mathcal{E} - \mathcal{E} D). \quad (10.7)$$

Соотношение обобщенных скоростей и импульсов. Этот фактор обусловлен сингулярностью лагранжианов электромагнитного и гравитационного полей. На примере механических систем сказанное означает, что обобщенные скорости \dot{q}_i некоторых обобщенных координат q_i входят в лагранжиан $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ таким образом, что уравнения $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ нельзя решить относительно $\dot{q}_i(q, p)$. Это имеет место, когда часть указанных уравнений представляет собой соотношения только между q и p :

$$\varphi_m(q, p) = 0, \quad (10.8)$$

называемые первичными связями. Для таких систем (как механических, так и теории поля) Дирак разработал специальный канонический формализм [169], позволяющий уменьшать число независимых канонических переменных. Это осуществляется с помощью первичных уравнений связи (10.8) и соответствующих им вторичных уравнений связи, получающихся из классических скобок Пуассона для φ_m и функции Гамильтона $H(q, p)$:

$$\chi_m(q, p) = \{\varphi_m, H\} = 0. \quad (10.9)$$

Для нашей цели особо интересен случай первичных связей $p_i - f_i(q) = 0$. Обычно добавлением к лагранжиану соответствующим образом подобранного дивергентного члена такие первичные связи можно привести к виду

$$p_i = 0. \quad (10.10)$$

В электродинамике и ОТО первичные связи имеют вид (10.10). В таких случаях устраняется часть импульсов. Сопряженные им обобщенные координаты соответствуют произвольным функциям в общем решении.

Продемонстрируем дираковский канонический формализм на примере свободного электромагнитного поля [64, 65].

Плотность лагранжиана электромагнитного поля $\bar{\mathcal{L}} = -(\sqrt{-g}/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ запишем через монадные величины в кинеметрической калибровке:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м}} = & -(\tau_0 \sqrt{h}/2) [-h^{ik} {}^+ \partial_T \tilde{A}_i + {}^+ \partial_T \tilde{A}_k + 2h^{ik} {}^+ \partial_T A_i (\tilde{\nabla}_k - F_k) A - \\ & - h^{ik} (\tilde{\nabla}_i - F_i) A (\tilde{\nabla}_k - F_k) A + (1/2) H_{ik} H^{ik}], \end{aligned} \quad (10.11)$$

где использованы проекции электромагнитных величин, введенные в (3.45), (3.46).

а) Координатный канонический формализм электромагнитного поля. В качестве обобщенных координат

нат электромагнитного поля выберем A и \tilde{A}_k , а в качестве обобщенных скоростей используем $\partial A/\partial x^0$ и $\partial \tilde{A}_k/\partial x^0$. Тогда три импульса имеют вид:

$$p^k = \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м.}}/\partial (\tilde{A}_{k,0}) = -\sqrt{h} E^k, \quad (10.12a)$$

где E^k — напряженность электромагнитного поля. Отсюда выражаем скорости через импульсы:

$$A_{i,0} = -\tau_0 \rho_i / \sqrt{h} + \tau_0 (\tilde{\nabla}_i - F_i) A - \tau_0 \tau^k \tilde{A}_{i,k} - h_{0,i}^k \tilde{A}_k. \quad (10.13a)$$

Скорости, соответствующие компоненте A , в (10.11) отсутствуют, поэтому имеем одно первичное уравнение связи типа (10.10)

$$p^0 = \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м.}}/\partial (A_{,0}) = 0. \quad (10.14)$$

Плотность координатного гамильтониана электромагнитного поля введем обычно (она имеет не к. и. вид):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_1 = p^0 A_{,0} + p^k \tilde{A}_{k,0} - \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м.}} = p^0 A_{,0} - (\tau_0/2\sqrt{h}) p_k p^k + \\ + (\tau_0 \sqrt{h}/4) H_{ik} H^{ik} + \tau_0 p^k (\tilde{\nabla}_k - F_k) A - p^k (\tau_0 \tau^l \tilde{A}_{k,l} - h_{0,k}^l \tilde{A}_l). \end{aligned} \quad (10.15a)$$

Непосредственным вычислением находим, что половина канонических уравнений

$$p_{,0}^k = -\delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta \tilde{A}_k \rightarrow (+\partial_T - D) E^k = (\tilde{\nabla}_i - F_i) H^{ki} \quad (10.16a)$$

совпадает с уравнениями (3.50) из второй пары уравнений Максвелла без источников в кинеметрической калибровке. Другая половина канонических уравнений

$$\partial A_k/\partial x^0 = \delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta p^k \quad (10.17a)$$

совпадает с соотношениями (10.13a).

В теории поля обобщением скобок Пуассона, как известно, является выражение

$$\frac{dB(q^i, p^i)}{dx^0} = \{B, \bar{\mathcal{H}}\} = \frac{\delta B}{\delta q_i} \frac{\delta \bar{\mathcal{H}}}{\delta p^i} - \frac{\delta B}{\delta p^i} \frac{\delta \bar{\mathcal{H}}}{\delta q_i}, \quad (10.18)$$

где q_i и p^i — канонически-сопряженные переменные поля. Согласно Дираку, подставляя сюда вместо $B(q_i, p^i)$ первичное уравнение связи (10.14), получаем вторичное уравнение связи

$$\{p^0, \bar{\mathcal{H}}_1\} = -\delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta A = \tau_0 \sqrt{h} \tilde{\nabla}_k E^k = 0. \quad (10.19a)$$

Это уравнение вторичной связи совпадает с оставшимся уравнением (3.49) из второй пары уравнений Максвелла (без источников)*.

* В работе [170] развит координатный канонический формализм электромагнитного поля в плоском пространстве-времени для обобщенных координат A_μ .

Уравнения, которые можно представить в каноническом виде, в дальнейшем будем называть динамическими [например, к ним относятся уравнения Максвелла (10.16а)]. Первая пара уравнений Максвелла не является динамической, а, как известно, выполняется тождественно при постулировании соотношения между $F_{\mu\nu}$ и A_μ .

б) Референционный канонический формализм электромагнитного поля. Выберем в качестве обобщенных скоростей монадные временные производные от спроектированных потенциалов: ${}^+\partial_T \tilde{A}_i$ и ${}^+\partial_T A$. Сопряженные им три импульса тогда имеют вид:

$$p^k = \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м.}} / \partial ({}^+\partial_T \tilde{A}_k) = -\tau_0 \sqrt{\hbar} E^k. \quad (10.126)$$

Обратные соотношения находим в виде

$${}^+\partial_T \tilde{A}_i = -p_i / \tau_0 \sqrt{\hbar} + (\tilde{\nabla}_i - F_i) A. \quad (10.136)$$

Скорость, соответствующая A , по-прежнему отсутствует в (10.11), поэтому уравнение первичной связи (10.14) остается в силе.

Плотность референционного гамильтониана электромагнитного поля определим обычно

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_2 = p^0 {}^+\partial_T A + p^k {}^+\partial_T \tilde{A}_k - \bar{\mathcal{L}}_{\text{э.м.}} = p^0 {}^+\partial_T A - p_k p^k / \tau_0 \sqrt{\hbar} + \\ + p^k (\tilde{\nabla}_k - F_k) A + (\tau_0 \sqrt{\hbar} / 4) H_{ik} H^{ik}. \end{aligned} \quad (10.156)$$

Уравнения (3.50) (без источников) из второй пары уравнений Максвелла опять можно представить как половину референционных канонических уравнений:

$${}^+\partial_T p^k = -\delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta A_k \tilde{} \rightarrow ({}^+\partial_T - D) E^k = (\tilde{\nabla}_i - E_i) H^{ki}. \quad (10.166)$$

Вторая половина референционных канонических уравнений

$${}^+\partial_T \tilde{A}_k = \delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta p^k \quad (10.176)$$

опять совпадает с соотношениями между импульсами и обобщенными скоростями (10.136).

Оставшееся уравнение (3.49) из второй пары уравнений Максвелла вновь имеет смысл вторичного уравнения связи и может быть представлено как

$$\{p^0, \bar{\mathcal{H}}_2\} = \tau_0 \sqrt{\hbar} \tilde{\nabla}_k E^k = 0. \quad (10.196)$$

10.4. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КИНЕМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Перейдем непосредственно к ОТО. В качестве исходной плотности гравитационного лагранжиана возьмем плотность скалярной кривизны $\bar{\mathcal{L}}_0 = \sqrt{-g} {}^4R$, где 4R в монадном виде записано в (3.35). Будем использовать кинеметрическую калибровку. Добавим к $\bar{\mathcal{L}}_0$ дивергентные члены

$$\left. \begin{aligned} 2 \sqrt{-g} (F_i F^i - \tilde{\nabla}_i F^i) &= -2 (\sqrt{-g} F^\lambda)_{,\lambda}; \\ 2 \sqrt{-g} (D^2 - {}^+ \partial_T D) &= -2 (\tau^\lambda \sqrt{-g} D)_{,\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

В результате получим плотность гравитационного лагранжиана:

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{гп}} = \tau_0 \sqrt{h} (D^2 - D_{ik} D^{ik} + {}^3 R). \quad (10.21)$$

а) Координатный канонический формализм ОТО. Подчеркнем тесную связь канонического формализма с монадным методом задания систем отсчета в кинеметрической калибровке, для этого в качестве 10 обобщенных координат гравинерциальной системы будем использовать четыре компоненты τ^μ (компоненты 4-скорости системы отсчета) и шесть компонент h^{ik} в кинеметрической калибровке [64, 72]*.

Обобщенными скоростями являются $\tau^\mu_{,0}$ и $h^{ik}_{,0}$. Обобщенные импульсы, соответствующие h^{ik} , находятся в виде

$$p_{ik} = \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гп}} / \partial (h^{ik}_{,0}) = \sqrt{h} (D_{ik} + h_{ik} D). \quad (10.22a)$$

Они совпадают с импульсами в теории Дирака. Скорости через импульсы выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} h^{ik}_{,0} &= - (2\tau_0 / \sqrt{h}) [p^{ik} + (1/2) h^{ik} p] - \\ &- \tau_{,l}^\alpha \tau_0 (h^{il} h_\alpha^k + h^{lk} h_\alpha^i) - \tau_0 \tau^s h_{,s}^{ik}, \end{aligned} \quad (10.23a)$$

где $p = -h^{ik} p_{ik} = -2 \sqrt{h} D$. Видно, что в гравитационном лагранжиане (10.21) отсутствуют скорости $\tau^\mu_{,0}$. Эти скорости линейно входили в $\bar{\mathcal{L}}_0 = \sqrt{-g} {}^4 R$, однако в результате добавления дивергентных членов (10.20) они были исключены, поэтому уравнения первичных связей опять имеют простой вид (10.10):

$$p_\mu = \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гп}} / \partial (\tau^\mu_{,0}) = 0. \quad (10.24a)$$

Плотность координатного гравитационного гамильтониана построим обычно:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_1 &= p_\mu \tau^\mu_{,0} + p_{ik} h^{ik}_{,0} - \bar{\mathcal{L}}_{\text{гп}} + \text{дивергентный член} = \\ &= p_\mu \tau^\mu_{,0} - \frac{1}{\tau^0 \sqrt{h}} \left(p_{ik} p^{ik} - \frac{1}{2} p^2 \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{h}}{\tau^0} {}^3 R + \frac{\tau^s}{\tau^0} (2p^k_{,k} - p_{ik} h^{ik}_{,s}), \end{aligned} \quad (10.25a)$$

* Координатный канонический формализм ОТО был развит в работах Дирака [169, 171], который в качестве основных обобщенных координат гравитационного поля использовал величины $g_{\mu\nu}$ (шесть компонент $g_{ik} = -h_{ik}$ и четыре компоненты $g_{0\mu}$). Затем канонический формализм исследовали Арновит, Дезер, Мизнер [172], Уилер и др. [11] (за основные величины выбирали g_{ik} , $N = 1/\sqrt{g_{00}}$ и $N_i = g_{0i}$). Л. Д. Фаддеев [173] в качестве основных переменных брал $q^{ik} = (-g) (g^{0i} g^{0k} - g^{00} g^{ik})$; $\lambda_0 = 1/g^{00} \sqrt{-g}$ $\lambda^k = g^{0k}/g^{00}$.

где дивергентный член равен $-2 (p_k^l h_0^k)_{,l}$. Эта плотность гамильтониана не является к. и. плотностью. В результате стандартных вычислений получаем, что шесть канонических уравнений

$$\partial p_{ik}/\partial x^0 = -\delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta h^{ik} \rightarrow {}^4R_{ik} - (1/2) g_{ik} {}^4R = 0 \quad (10.26a)$$

совпадают с шестью монадными уравнениями Эйнштейна (3.38) в кинеметрической калибровке (в вакууме). Другие канонические уравнения

$$\partial h^{ik}/\partial x^0 = \delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta p_{ik} \quad (10.27a)$$

приводят к соотношениям между обобщенными скоростями и импульсами (10.23a).

Вторичные уравнения связей находят из классических скобок Пуассона для первичных связей и плотности координатного гамильтониана $\{p_\mu, \mathcal{H}_1\} = 0$. Они приводят к оставшимся четырем уравнениям Эйнштейна (3.36), (3.37) без правой части. Через канонические переменные вторичные уравнения связи записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \{p_0, \bar{\mathcal{H}}_1\} &= -\delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta \tau^0 = 0 \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_H = 2 \sqrt{\bar{h}} G^{00}/g^{00} = \\ &= (1/\sqrt{\bar{h}}) \left(\frac{p^2}{2} - p_{ik} p^{ik} \right) - \sqrt{\bar{h}} {}^3R = 0 \end{aligned} \quad (10.28a)$$

—гамильтонова вторичная связь;

$$\begin{aligned} \{p_s, \bar{\mathcal{H}}_1\} &= -\delta \bar{\mathcal{H}}_1/\delta \tau^s = 0 \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_s = 2 \sqrt{\bar{h}} G_s^0/\sqrt{g^{00}} = \\ &= 2p_{s,k}^k - p_{ik} h_{,s}^{ik} = 2 \sqrt{\bar{h}}^+ \nabla_k (p_s^k/\sqrt{\bar{h}}) = 0 \end{aligned} \quad (10.29a)$$

—продольные вторичные связи. Плотность координатного гравитационного гамильтониана можно представить в виде

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = p_\mu \tau_{,0}^\mu + (1/\tau^0) \bar{\mathcal{H}}_H + (\tau^s/\tau^0) \bar{\mathcal{H}}_s, \quad (10.30a)$$

где $\bar{\mathcal{H}}_H$ и $\bar{\mathcal{H}}_s$ не содержат переменных τ^μ .

б) Референционный канонический формализм ОТО [63—65]. Читатель, наверное, уже обратил внимание на некоторую непоследовательность координатного канонического формализма ОТО, в котором компоненты τ^μ являются обобщенными координатами, тогда как с позиций монадного описания систем отсчета их следует считать компонентами 4-скорости системы отсчета. Будем рассматривать τ^μ как обобщенные скорости. В качестве обобщенных координат тогда должны выступать пространственно-временные координаты x^μ . Действительно, координаты можно понимать как набор из четырех скаляров. (При изменении системы координат они просто заменяются новыми.) Тогда τ^μ представляют собой производные Ли от координат

$$\underset{\tau}{\mathcal{L}} x^\mu = \tau^\nu x_{,\nu}^\mu = \tau^\nu \delta_\nu^\mu = \tau^\mu, \quad (10.31)$$

а параметром эволюции является интервал $s \equiv \tau$ вдоль мировых линий системы отсчета. Обобщенные импульсы, сопряженные x^μ , находятся обычным образом:

$$P_\mu = \delta \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \delta \tau^\mu = 2\tau_0 \sqrt{\bar{h}} G_{\mu\nu} \tau^\nu, \quad (10.32)$$

где $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} R$ — тензор Эйнштейна. Заметим, что

$$\frac{\delta \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}}{\delta \tau^\mu} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}}{\partial \tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}}{\partial \tau^\mu_{,i}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}}{\partial \tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}}{\partial \tau^\mu_{,\alpha}} = 0,$$

так как в $\bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}$ отсутствуют $\tau^\mu_{,0}$, т. е. $\delta \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \delta \tau^\mu$ представляет собой действие оператора Эйлера — Лагранжа на $\bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}}$, что в лагранжевой формулировке теории приводит к четырем уравнениям Эйнштейна (в вакууме) $G_{\mu\nu} \tau^\nu = 0$. Таким образом, в теории гравитации реализуется случай, когда (для вакуума) справедливы четыре первичные уравнения связи

$$P_\mu = 0. \quad (10.246)$$

В качестве оставшихся обобщенных координат, как и в п. а), возьмем величины h^{ik} . Их обобщенные скорости следует определить через монадные временные производные ${}^+ \partial_T h^{ik} = -2D^{ik}$. Обобщенные импульсы, соответствующие h^{ik} , получаем в виде

$$p_{ik} = \delta \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \delta ({}^+ \partial_T h^{ik}) = \tau_0 \sqrt{\bar{h}} (D_{ik} + h_{ik} D). \quad (10.226)$$

Обратные соотношения имеют более элегантный вид, нежели (10.236):

$${}^+ \partial_T h^{ik} = - (2/\tau_0 \sqrt{\bar{h}}) [p^{ik} + (1/2) h^{ik} p], \quad (10.236)$$

где $p = -h^{ik} p_{ik} = -2\tau_0 \sqrt{\bar{h}} D$.

Плотность референционного гамильтониана определим, как обычно:

$$\bar{\mathcal{H}}_2 = P_\mu \tau^\mu + p_{ik} {}^+ \partial_T h^{ik} - \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} = P_\mu \tau^\mu + (1/\tau_0 \sqrt{\bar{h}}) [(1/2) p^2 - p_{ik} p^{ik}] - \tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3 R. \quad (10.256)$$

Плотность референционного гамильтониана отличается от плотности координатного гамильтониана (10.30а), в частности, отсутствием члена, пропорционального вторичной продольной связи. Это получилось вследствие замены частной временной производной $h^{ik}_{,0}$ монадной производной ${}^+ \partial_T h^{ik}$.

Канонические уравнения для переменных x^μ, P_μ тривиальны:

$${}^+ \partial_T P_\mu = -\delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta x^\mu = 0; \quad \partial_T x^\mu = \delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta P_\mu = \tau^\mu. \quad (10.33)$$

Половина из оставшихся шести пар канонических уравнений эквивалентна шести уравнениям Эйнштейна

$${}^+ \partial_T p_{ik} = -\delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta h^{ik} \rightarrow G_{ik} = 0, \quad (10.266)$$

$$+\partial_T h^{ik} = \delta \bar{\mathcal{H}}_2 / \delta p_{ik} \quad (10.276)$$

совпадает с соотношениями (10.236).

Сформулируем выводы.

1. Как референционный, так и координатный канонические формализмы ОТО приводят к записи шести пространственно-спроектированных уравнений Эйнштейна в виде половины канонических уравнений. Вот почему эти уравнения Эйнштейна часто называют динамическими.

2. Оставшиеся четыре уравнения Эйнштейна в рассмотренных формализмах имеют различный характер. В координатном каноническом формализме они являются дираковскими вторичными уравнениями связи для оставшихся шести пар переменных, тогда как в референционном формализме они представляют собой первичные связи для четырех импульсов. Возможность выражения этих импульсов через оставшиеся шесть пар динамических переменных следует из вида плотности гравитационного лагранжиана и того, что вариационная производная по τ^μ в принципе не может привести к дифференцированию по времени.

3. В гамильтоновой формулировке ОТО четыре составляющие метрического тензора τ^μ оказались выделенными. С помощью монадного формализма можно четко физически интерпретировать их как 4-скорости системы отсчета. Эти величины, как уже отмечалось, позволяют относить физические и геометрические величины к используемой системе отсчета — описывают отношения физических сущностей в пространстве-времени — и, следовательно, не могут служить динамическими гравитационными переменными, т. е. в ожидаемом квантовом варианте теории гравитации (в третьем подходе) не должны квантоваться.

10.5. ВЫДЕЛЕНИЕ ДВУХ ПАР ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ДИАДНОГО МЕТОДА

Из оставшихся шести компонент 3-мерного метрического тензора h^{ik} и сопряженных им импульсов следует устранить еще четыре «лишние» пары сопряженных величин так, чтобы остались лишь две пары сопряженных динамических гравитационных переменных. К выводу, что должно остаться именно две пары динамических переменных, можно прийти различными путями, например исходить из соображений жесткости уравнений Эйнштейна и задачи Коши (см. гл. 12) или руководствоваться следующими соображениями [174]: для 12 величин h^{ik} и p_{ik} имеют место четыре вторичные уравнения связи (10.28), (10.29); кроме того, можно использовать четыре координатных условия. В итоге получим: $12 - 4 - 4 = 4 = 2 \times 2$, т. е. две степени свободы. Однако непосредственное формальное решение вторичных уравнений связи (четыре уравне-

ния Эйнштейна в референционном подходе) представляет собой сложную, не решенную в общем случае задачу.

В этих условиях следует опираться на дополнительные соображения, позволяющие прояснить сложившуюся ситуацию. Таковую возможность предоставляет использование диадного метода.

Диадный метод и динамические переменные. Учтем, что на классическом уровне динамическими переменными описываются волновые гравитационные процессы, которым можно сопоставить изотропный волновой вектор $k^\mu = \omega (\tau^\mu \pm l^\mu)$. Таким образом, в любой системе отсчета волновой процесс характеризуется пространственным направлением распространения l^μ . Воспользуемся этим и в нормальных системах отсчета перейдем от шести компонент h^{ik} к набору диадных составляющих l^i и $\gamma^{\xi\eta}$ в кинеметрической калибровке. Это позволит интерпретировать возникающие в рассматриваемом формализме величины.

Построим референционный канонический формализм ОТО в диадном виде. Выразим плотность гравитационного лагранжиана (10.21) через диадные физико-геометрические величины и операторы. В кинеметрической калибровке

$$\mathcal{L}_{\text{гр}} = \tau_0 l_1 \sqrt{\gamma} [\bar{D}^2 - \bar{D}_{\xi\eta} D^{\xi\eta} - 2\bar{D}\hat{D} - 2\partial_L d + 2(\Lambda_\xi + q_\xi)(\Lambda^\xi + q^\xi) + d^2 - d_{\xi\eta} d^{\xi\eta} - 2(\bar{\nabla}_\xi + f_\xi) f^\xi + {}^2R]. \quad (10.34)$$

Все, что касается четырех величин τ^μ , оставим без изменений, как в § 10.4. Сосредоточим внимание на других шести составляющих метрического тензора. Выберем в качестве обобщенных координат величины $\tilde{k}_\pm^i = \tau^i \pm l^i$ и $\gamma^{\xi\eta}$. Тогда обобщенными скоростями будут:

$${}^+\partial_T \tilde{k}_\pm^i = \pm (2\Lambda^i - l^i \hat{D}); \quad {}^{++}\partial_T \gamma^{\xi\eta} = -2\bar{D}^{\xi\eta}. \quad (10.35)$$

Так как $\mathcal{L}\tau^\mu = 0$, определенные таким образом скорости для \tilde{k}_\pm^i совпадают со скоростями, сопряженными второму вектору диады l^i . Обобщенные импульсы находим обычным образом:

$$\left. \begin{aligned} \pi_\pm &= l^i \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \partial (\partial_T \tilde{k}_\pm^i) = \pm 2 \sqrt{-g} \bar{D}; \\ \pi_{\xi\pm} &= \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \partial (\mp \gamma_\alpha^\xi + \partial_T l^\alpha) = \pm 2 \sqrt{-g} (\Lambda_\xi + q_\xi); \\ p_{\xi\eta} &= \partial \bar{\mathcal{L}}_{\text{гр}} / \partial ({}^{++}\partial_T \gamma^{\xi\eta}) = \sqrt{-g} (\bar{D}_{\xi\eta} + \gamma_{\xi\eta} \bar{D} - \gamma_{\xi\eta} \hat{D}). \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

Определяя для этих переменных плотность референционного гамильтониана, запишем три пары продольно-поперечных и продольных канонических уравнений*:

* Три пары канонических уравнений (10.37), (10.38) соответствуют канонической системе для изотропного излучения в приближении геометрической оптики [14]: $\partial k^i / \partial \tau = -\partial H / \partial x^i$; $\partial x^i / \partial \tau = \partial H / \partial k^i$.

$${}^+ \partial_T \tilde{k}_\pm^i = \delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гп}} / \delta \pi_{i\pm}; \quad (10.37)$$

$${}^+ \partial_T \pi_\pm = \delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гп}} / \delta \tilde{k}_\pm^1; \quad {}^{++} \partial_T \pi_{\xi\pm} = - \delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гп}} / \delta \tilde{k}_\pm^\xi, \quad (10.38)$$

которые эквивалентны уравнениям Эйнштейна (в вакууме): $G_{\mu\nu} l^\mu \gamma_\xi^\nu = 0$; $G_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0$.

Легко также записать в стандартном виде три пары поперечно-поперечных канонических уравнений, одна половина которых эквивалентна трем (поперечно-поперечным) уравнениям Эйнштейна $G_{\xi\eta} = 0$, а другая совпадает с соотношениями между обобщенными скоростями и импульсами.

Таким образом, использование диадного метода позволяет наглядно интерпретировать еще три пары сопряженных переменных и соответствующие им канонические уравнения. Разумно предположить, что эти переменные не могут претендовать на роль динамических гравитационных переменных.

Конформная инвариантность и динамические переменные [175]. Для устранения из трех компонент $\gamma^{\xi\eta}$ еще одной «лишней» переменной воспользуемся соображениями конформной инвариантности на 2-мерных поверхностях фронта волны. Из величин $\gamma^{\xi\eta}$ можно образовать две алгебраически независимые конформно-инвариантные величины: $\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \gamma^{\xi\eta} / \sqrt{\|\gamma^{\xi\eta}\|} = \sqrt{\bar{\gamma}} \gamma^{\xi\eta}$ (или $\tilde{\gamma}_{\xi\eta} = \gamma_{\xi\eta} / \sqrt{\bar{\gamma}}$) и одну конформно-неинвариантную $\sqrt{\bar{\gamma}} \equiv \sqrt{\|\gamma_{\xi\eta}\|}$. Известно, что любые два 2-мерные римановы пространства конформны друг другу, т. е. их метрики в соответствующих системах координат различаются только значением конформного фактора: $\gamma^{*\xi\eta} = \exp(-2\sigma) \gamma^{\xi\eta}$; $\gamma_{*\xi\eta} = \exp(2\sigma) \gamma_{\xi\eta}$. Можно высказать гипотезу, что в подходяще выбранных системах отсчета динамическими гравитационными переменными являются две компоненты $\tilde{\gamma}^{\xi\eta}$ и сопряженные им импульсы.

Введем бесследные плотности тензоров $\bar{D}_{\xi\eta}$ и $d^{\xi\eta}$:

$$\bar{D}_{\xi\eta} = (1/\sqrt{\bar{\gamma}}) [\bar{D}_{\xi\eta} + (1/2) \gamma_{\xi\eta} \bar{D}]; \quad \bar{d}_{\xi\eta} = (1/\sqrt{\bar{\gamma}}) [d_{\xi\eta} + (1/2) \gamma_{\xi\eta} d].$$

Вместо $\gamma^{\xi\eta}$ в качестве обобщенных координат будем рассматривать величины $\tilde{\gamma}^{\xi\eta}$ и $\ln \sqrt{\bar{\gamma}}$, а в качестве их скоростей выражения:

$$\tilde{v} = \bar{\partial}_T \ln \sqrt{\bar{\gamma}} = -\bar{D}; \quad \tilde{v}^{\xi\eta} = \bar{\partial}_T \tilde{\gamma}^{\xi\eta} = -2\bar{D}^{\xi\eta}. \quad (10.39)$$

Остальные переменные оставим без изменения. Новые импульсы тогда находим в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{гп}} / \partial \tilde{v} = \tau_0 \sqrt{\bar{h}} (2\bar{D} - \bar{D}); \\ \tilde{p}_{\xi\eta} &= \partial \tilde{\mathcal{L}}_{\text{гп}} / \partial \tilde{v}^{\xi\eta} = \tau_0 \sqrt{\bar{h}} \bar{D}_{\xi\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

Плотность гамильтониана, соответствующая новому набору переменных,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{\text{гр}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{1}{2} \tilde{p}^2 - \tilde{p}_{\xi\eta} \tilde{p}^{\xi\eta} \right) + \frac{1}{2} \pi_{\xi} \pi^{\xi} + \frac{\pi^2}{8} + \right. \\ \left. + \frac{\pi \tilde{p}}{2} - 2\pi_{\xi} q^{\xi} \right] - \sqrt{-g} {}^3R. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Новые канонические уравнения можно записать следующим образом:

$$\tilde{\partial}_T \tilde{p}_{\xi\eta} = -\delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гр}} / \delta \tilde{\gamma}^{\xi\eta}; \quad \tilde{\partial}_T \tilde{p} = -\delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гр}} / \delta (\ln \sqrt{\bar{\gamma}}); \quad (10.42)$$

$$\tilde{\partial}_T \tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гр}} / \delta \tilde{p}_{\xi\eta}; \quad \tilde{\partial}_T (\ln \sqrt{\bar{\gamma}}) = \delta \bar{\mathcal{H}}_{\text{гр}} / \delta \tilde{p}. \quad (10.43)$$

Канонические уравнения (10.42) приводят к трем уравнениям Эйнштейна соответственно в виде

$$\tilde{G}_{\xi\eta} = (1/\sqrt{\bar{\gamma}}) [\tilde{G}_{\xi\eta} + (1/2) \gamma_{\xi\eta} \bar{G}] = 0; \quad G \equiv -\gamma^{\xi\eta} G_{\xi\eta} = 0.$$

Уравнения (10.43) эквивалентны соотношениям между импульсами и скоростями (10.40).

10.6. ПРИМЕРЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как уже отмечалось, еще не построена квантовая теория гравитации ни в одном из подходов к природе гравитации, сформулированных в § 10.2. В рамках третьего (промежуточного) подхода удалось развить квантование слабых плоских гравитационных волн и разработать квантовые модели для нескольких точных волновых решений уравнений Эйнштейна. Покажем, что во всех этих случаях подтверждается сформулированная в предыдущем параграфе гипотеза: динамическими гравитационными переменными являются две конформно-поперечные компоненты $\tilde{\gamma}^{\xi\eta}$ и сопряженные им импульсы $\tilde{p}_{\xi\eta}$.

Теория слабых плоских гравитационных волн. Классическая (неквантовая) часть этой теории подробно рассмотрена в § 9.6, где были выделены динамические переменные q_1 и q_2 , подвергающиеся квантованию в квантовом варианте теории. Остается показать, что эти переменные конформно-поперечны. Используя соотношения (9.42), имеем в первом приближении

$$\sqrt{\|\gamma_{\xi\eta}\|} = \frac{1}{\sqrt{\|\gamma^{\xi\eta}\|}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^{22} + a^{33} + O(a^2)}} \approx 1 - (1/2)(a^{22} + a^{33}). \quad (10.44)$$

Отсюда легко находим конформно-поперечные компоненты (в первом приближении):

$$\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \sqrt{\bar{\gamma}} \gamma^{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(a^{22} - a^{33}) & a^{23} \\ a^{23} & 1 - \frac{1}{2}(a^{22} - a^{33}) \end{pmatrix}, \quad (10.45)$$

что и требовалось показать. Канонически-сопряженные им импульсы (10.40) получаем в виде $p_1 = (1/2)q_{1,0}$; $p_2 = (1/2)q_{2,0}$.

Квантовая теория слабых плоских гравитационных волн фактически представляет собой квантовую теорию линейного тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени (см. [164, 176]). Вторичное квантование компонент q_1 и q_2 можно осуществить аналогично квантованию электромагнитного поля в плоском пространстве-времени. При этом следует позаботиться о правильной размерности плотностей гравитационного лагранжиана, гамильтониана и импульсов, т. е. осуществить переход

$$\overline{\mathcal{L}}_{\text{гр}} \rightarrow (1/2\kappa)\overline{\mathcal{L}}_{\text{гр}}; \quad \overline{\mathcal{H}}_{\text{гр}} \rightarrow (1/2\kappa)\overline{\mathcal{H}}_{\text{гр}}; \quad \tilde{p}_{\xi\eta} \rightarrow (1/2\kappa)\tilde{p}_{\xi\eta}, \quad (10.46)$$

где $\kappa = 8\pi k/c^4$. Перестановочные соотношения, как и в электродинамике, задаются в виде

$$[q_s(\mathbf{x}), p_r(\mathbf{x}')] = i\hbar\delta_{sr}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (10.47)$$

где $s, r = 1, 2$. Так как теория слабого поля является линейной, можно использовать разложения компонент q_s и p_r в интеграл Фурье:

$$\left. \begin{aligned} q_s^\pm(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{x})}{\sqrt{2k_0}} a_s^\pm(\mathbf{k}) d^3k; \\ p_r^\pm(\mathbf{x}') &= \frac{1}{4\kappa(2\pi)^{3/2}} \int \frac{(\pm k'_0) \exp(\pm i\mathbf{k}'\mathbf{x}')}{\sqrt{2k'_0}} a_r^\pm(\mathbf{k}') d^3k', \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

где $a_s^\pm(\mathbf{k})$ следует понимать как операторы рождения и уничтожения гравитонов двух типов. Подставляя (10.48) в (10.47), легко найти перестановочные соотношения между операторами:

$$\left. \begin{aligned} a_s^+(\mathbf{k}) a_r^+(\mathbf{k}') - a_r^+(\mathbf{k}') a_s^+(\mathbf{k}) &= \\ = a_s^-(\mathbf{k}) a_r^-(\mathbf{k}') - a_r^-(\mathbf{k}') a_s^-(\mathbf{k}) &= 0; \\ a_s^-(\mathbf{k}) a_r^+(\mathbf{k}') - a_r^+(\mathbf{k}') a_s^-(\mathbf{k}) &= \\ = \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') 4\kappa\hbar = 16l_0^2 \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

Существенно, что эти коммутационные соотношения содержат справа квадрат планковской длины $l_0^2 = \hbar k/c^3$. На основе такой теории можно вычислять эффекты рождения, взаимного превращения и поглощения гравитонов и квантов обычной материи. (Обзор процессов, изучавшихся на базе квантовой теории слабого гравитационного поля, можно найти в работе [164].)

Цилиндрические волны Эйнштейна — Розена (9.37). Достоинством этой метрики, позволившим построить модельную квантовую теорию, является тот факт, что функция ψ удовлетворяет линейному волновому уравнению (9.38). Покажем, что подвергающаяся квантованию величина ψ характеризует конформно-поперечные компоненты поля. Как уже отмечалось, эта

метрика описывает цилиндрический волновой процесс. Выбирая на 2-мерной цилиндрической поверхности фронта волны координаты $x_2 = \rho\varphi$ ($0 \leq x_2 \leq 2\pi\rho$) и $x_3 = z$, получаем компоненты 2-мерной метрики

$$\gamma^{\xi\eta} = \tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \exp(2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(-2\psi) \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \exp(-2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(2\psi) \end{pmatrix}. \quad (10.50)$$

В этой метрике $\sqrt{\gamma} = 1$, т. е. в теории используются конформно-поперечные компоненты. При $\psi \ll 1$ эта 2-мерная метрика соответствует одной поляризации слабых плоских волн (10.45).

Построение квантовой модели для данной метрики не представляет особого труда ввиду линейности уравнения (9.38). Его решение

$$\psi = A(\omega) J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) \cos \frac{\omega x^0}{c} + B(\omega) N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) \sin \frac{\omega x^0}{c}, \quad (10.51)$$

где $J_0(\omega\rho/c)$ и $N_0(\omega\rho/c)$ — цилиндрические функции Бесселя и Неймана. Обычно полагают $B(\omega) = 0$, исключая тем самым функции $N_0(\omega\rho/c)$, имеющие особенность в нуле. Оставшаяся часть ψ представляется в виде интеграла Фурье. Операторы можно ввести через коэффициенты разложения Фурье [177].

Метрики Гоуди. Они имеют вид [178]:

$$ds^2 = \exp(2a) (dx_0^2 - dx_1^2) - \Phi [\exp(-2\psi) dx_2^2 + \exp(2\psi) dx_3^2], \quad (10.52)$$

где a , Φ и ψ — функции только координат x^0 и x^1 ; dx_2 и dx_3 — смещения на 2-мерной поверхности. Можно показать, что эти метрики допускают 2-параметрическую группу движения G_2 с 2-мерными поверхностями транзитивности, описываемыми уравнениями $x^0 = \text{const}$, $x^1 = \text{const}$. Очевидно, цилиндрические волны Эйнштейна—Розена (9.37) являются частным случаем метрики Гоуди при $\Phi = 1$.

Кинеметрическим образом откалиброванная диада (τ^μ, l^μ) имеет компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \tau^\mu &= \{\exp(-a); 0; 0; 0\}; & \tau_\mu &= \{\exp a; 0; 0; 0\}; \\ l^\mu &= \{0; \exp(-a); 0; 0\}; & l_\mu &= \{0; -\exp a; 0; 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

Видно, что в общем случае метрика Гоуди описывает несвободный продольный гравитационный волновой процесс, характеризуемый волновым вектором $k^\mu = \exp(-a) (\tau^\mu \pm l^\mu)$. Для конформно-инвариантной части метрики $\sqrt{|\gamma^{\xi\eta}|} = 1/\Phi$. Конформно-инвариантные компоненты 2-мерной метрики характеризуются одной величиной ψ , так как $\tilde{\gamma}^{\xi\eta}$ опять представляется в виде (10.50). Из динамических уравнений Эйнштейна $\tilde{G}_{\xi\eta} = 0$ находим, что функция ψ удовлетворяет линейному уравнению

$$(\partial/\partial x^0) (\Phi \partial\psi/\partial x^0) - (\partial/\partial x^1) (\Phi \partial\psi/\partial x^1) = 0. \quad (10.54)$$

Линейность этого уравнения обеспечивает возможность построения квантового варианта теории [178, 179].

10.7. К ТЕОРИИ СУПЕРПРОСТРАНСТВА

Предыдущие два параграфа в основном посвящены квантованию гравитационных волн (или волновых моделей), распространяющихся в рассматриваемой области пространства-времени. При этом либо глобальная структура Вселенной была несущественной, либо модель Вселенной предполагалась открытой. Однако существует еще одно направление исследований, нацеленное на квантование Вселенной, точнее, космологических моделей. Для этой цели оказалась полезной теория суперпространства, предложенная Уилером [180] и де Виттом [181]*. В этом параграфе изложены основы теории суперпространства в рамках монадного метода в кинеметрической калибровке [182]. Заметим, что эта теория интересна и сама по себе. Она позволяет взглянуть еще с иной стороны на структуру уравнений Эйнштейна, на физический и геометрический смысл составляющих метрического тензора.

Будем исходить из 3-мерных римановых пространств, понимаемых как пространственно-подобные сечения 4-мерного пространства-времени, ортогональные конгруэнциям соответствующих нормальных систем отсчета. Как известно, метрики римановых пространств задаются на компактном хаусдорфовом многообразии, которое будем обозначать 3M . Рассмотрим множество $\text{Riem}({}^3M)$, каждой точкой которого является возможная риманова метрика в 3M .

Очевидно, одну и ту же риманову метрику можно записать в разных системах координат. Это значит, что в $\text{Riem}({}^3M)$ многим точкам соответствует одно и то же риманово пространство. Обозначим допустимые преобразования координат [соответствующие кинеметрическим преобразованиям (3.90)] символом $\text{Diff}({}^3M)$. отождествим все точки в $\text{Riem}({}^3M)$, связанные преобразованием $\text{Diff}({}^3M)$. В результате получим *первичное суперпространство* $S({}^3M) = \text{Riem}({}^3M)/\text{Diff}({}^3M)$. Все точки в $\text{Riem}({}^3M)$, полученные из одной (μ) преобразованиями $\text{Diff}({}^3M)$, называются *орбитой* этой точки.

В множестве (пространстве) $\text{Riem}({}^3M)$ можно задать метрику инфинитезимальным образом («расстояние» между двумя близкими 3-мерными римановыми пространствами):

* По мнению Уилера [180], сейчас ситуация в ОТО напоминает положение, сложившееся в классической электродинамике в начале века, когда было установлено, что атом состоит из ядра и вращающихся электронов, но с позиций классической электродинамики неизбежно падение электронов на ядро — коллапс. Выход из противоречия состоял в квантовании атома в плоском пространстве. Сейчас представляется, что решение проблемы коллапса Вселенной состоит в квантовании ОТО, причем оно будет осуществляться в суперпространстве.

$$d\sigma^2 = \int \int \tilde{G}^{ijk'l'} \delta h_{ij} \delta h_{k'l'} d^3x d^3x', \quad (10.55)$$

где δh_{ik} — бесконечно малые различия метрик двух близких по значениям h_{ik} 3-мерных пространств; $\tilde{G}^{ijk'l'}$ — суперметрический тензор. В этой формуле δh_{ik} выступает в роли, аналогичной роли dx^μ при определении интервала в римановом пространстве $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Из общих соображений следует, что $\tilde{G}^{ijk'l'}$ должен удовлетворять следующим требованиям:

1) содержать $\delta^3(x-x')$, т. е. связывать сопоставленные точки в двух римановых пространствах;

2) быть пропорциональным тензору четвертого ранга (чтобы $d\sigma^2$ было скаляром);

3) быть тензорной плотностью по $\sqrt{\hbar}$ веса 1 (для обеспечения интегрирования по d^3x);

4) быть симметричным относительно перестановки первой и второй пары индексов;

5) строиться из компонент 3-метрики h_{ik} . Всем этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\tilde{G}^{ijk'l'} = (\sqrt{\hbar}/2\omega) \delta^3(x-x') (h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{kj} - 2h^{ij}h^{kl}) \equiv G^{ijkl} \delta^3(x-x'), \quad (10.56)$$

где ω — произвольная скалярная функция. Будем полагать $\omega = 1/\tau_0$.

Ковариантные компоненты суперметрического тензора определяются из естественного условия

$$\int \tilde{G}_{ijm'n'} \tilde{G}^{m'n'k'l'} d^3x'' = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) \delta^3(x-x'). \quad (10.57)$$

Используя (10.56), отсюда находим:

$$\tilde{G}_{ijk'l'} = (\omega/2\sqrt{\hbar}) \delta^3(x-x') (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{kj} - h_{ij}h_{kl}) \equiv G_{ijkl} \delta^4(x-x'). \quad (10.58)$$

Легко видеть, что след суперметрического тензора равен:

$$\int \tilde{G}_{ijm'n'} \tilde{G}^{m'n'ij} d^3x = 6\delta^3(x-x'). \quad (10.59)$$

Эволюцию пространственных сечений нормальных систем отсчета при смещении вдоль соответствующих конгруэнций можно представить в виде линий в суперпространстве. Каждой линии соответствует решение шести пространственно-спроектированных уравнений Эйнштейна (3.38). Оказывается, эти уравнения можно записать в виде геодезической с правой частью в пространстве $\text{Riem}({}^3M)$ с суперметрикой G_{ijkl} (в дальнейшем будем ее использовать без δ -функции).

Аналогично символам Кристоффеля в обычном римановом пространстве определим коэффициенты связности в $\text{Riem}({}^3M)$ по формуле

$$\Gamma_{ik}^{jlmn} = \frac{1}{2} G_{ikrs} \left(\frac{\delta G^{mnrs}}{\delta h_{jl}} + \frac{\delta G^{jlr s}}{\delta h_{mn}} - \frac{\delta G^{jlmn}}{\delta h_{rs}} \right). \quad (10.60)$$

Тогда можно показать, что уравнения Эйнштейна (3.38) без источников представимы в виде

$$\begin{aligned} & {}^+\partial_T ({}^+\partial_T h_{ik}) + \Gamma_{ik}^{jlmn} ({}^+\partial_T h_{jl}) ({}^+\partial_T h_{mn}) = \\ & = -\tau_0 G_{ikmn} \delta (2\tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3R) / \delta h_{mn}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Эти уравнения напоминают уравнения движения

$$d^2 x^\mu / ds^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (dx^\alpha / ds) (dx^\beta / ds) = \mathcal{F}^\mu.$$

Правую часть (10.61) можно понимать как некую суперсилу, получаемую из плотности суперпотенциала $2\tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3R$ способом, похожим на обычный:

$$\mathcal{F}_{ik} = -G_{ikmn} \delta (2\tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3R) / \delta h_{mn}. \quad (10.62)$$

Обобщенные импульсы (10.22б) и плотность референционного гравитационного гамильтониана (10.26б) можно более компактно записать через суперметрический тензор:

$$p^{ik} = G^{ikmn} D_{mn}; \quad (10.63)$$

$$\bar{\mathcal{H}}'_2 = G_{ikmn} p^{ik} p^{mn} + \tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3R. \quad (10.64)$$

В работах Дирака и других авторов было предложено представить уравнения вторичной гамильтоновой связи в виде уравнений Гамильтона — Якоби. Введя для этого функционал S , такой, что $p^{ik} = \partial S / \partial h_{ik}$, получим гравитационное уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$G_{ikmn} (\partial S / \partial h_{ik}) (\partial S / \partial h_{mn}) + \tau_0 \sqrt{\bar{h}} {}^3R = 0. \quad (10.65)$$

10.8. ПРИМЕРЫ СУПЕРПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим несколько конкретных примеров 3-геометрий с симметриями, приводящими к конечной размерности суперпространств.

Суперпространство 3-мерных геометрий с метриками [183]

$$dl^2 = a_1 (1 + a_2 \sin \theta + a_3 \cos \theta) (d\theta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2). \quad (10.66)$$

Здесь координаты θ , φ и ψ изменяются от 0 до 2π , а a_1 , a_2 , a_3 — произвольные функции от x^0 , удовлетворяющие условиям $a_1(x^0) > 0$; $a_2^2(x^0) + a_3^2(x^0) < 1$. Метрики (10.66) имеют топологию 3-тора.

Очевидно, что каждая из 3-геометрий рассматриваемого множества полностью характеризуется значениями трех параметров a_i . Следовательно, множество $\text{Riem}({}^3M)$ таких геометрий изображается совокупностью внутренних точек неограниченного с одной стороны цилиндра в пространстве $\{a_1, a_2, a_3\}$ (рис. 21).

Видно, что не все точки внутри цилиндра соответствуют различным геометриям. Метрики (10.66) сохраняют свой вид при преобразованиях координат $\text{Diff}({}^3M)$:

$$\theta' = \theta + \theta_0; \quad \varphi' = \varphi + \varphi_0; \quad \psi' = \psi + \psi_0. \quad (10.67)$$

Первое из этих преобразований соответствует преобразованиям параметров a_2 и a_3 [поворотам в плоскости (a_2, a_3)]. Это означает, что все точки на концентрических окружностях с центром на оси a_1 описывают одну и ту же 3-геометрию, т. е. представляют собой орбиты одной геометрии. Все орбиты один раз пересекают полуплоскость (a_1, a_3) , т. е. заштрихованная полуограниченная лента $(0 \leq a_3 < 1; a_1 > 0)$ изображает 2-мерное суперпространство рассматриваемых 3-геометрий.

Суперпространство однородных изотропных миров Фрийдмана. Оно одномерно. Все пространственные сечения в сопутствующей системе отсчета характеризуются значением параметра $a(x^0)$. Ограничимся случаем закрытых моделей Фрийдмана, когда метрика 3-мерных сечений имеет вид (6.13а).

Кратко изложим гамильтонов формализм для закрытых моделей Фрийдмана в терминах параметра $a(x^0)$ [184]. Поскольку для метрики (6.13а) $\sqrt{h} = a^3(\sin^2 x^1) \sin \theta$, 3-мерная плотность лагранжиана имеет вид:

$$\overline{\mathcal{L}} = \sqrt{h} (D^2 - D_{ik} D^{ik} + {}^3R) = (6/a) (\dot{a}^2 - a^2) \sin^2 x^1 \sin \theta.$$

Произведя интегрирование по всему пространству, находим:

$$L = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{6}{a} (\dot{a}^2 - a^2) \sin^2 x^1 \sin \theta dx' d\theta d\varphi = \frac{12\pi^2}{a} (\dot{a}^2 - a^2). \quad (10.68)$$

Отсюда получаем референционный импульс

$$p = \partial L / \partial \dot{a} = 24\pi^2 \dot{a}, \quad \text{где } \partial_T a = \dot{a}/a, \quad (10.69)$$

и референционный гамильтониан

$$H = (\dot{a}/a) p - L = (1/48\pi^2) p^2/a + 12\pi^2 a. \quad (10.70)$$

В квантовой модельной теории де Витта [184] вводится функционал состояния мира в a -представлении $\Psi(a)$; импульс p , как обычно, заменяется оператором: $p \rightarrow i\partial/\partial a$. После этого дираковскую гамильтонову связь можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{1}{48\pi^2 a^{1/4}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^{1/4}} - 12\pi^2 a \right) \Psi = -\kappa N m \Psi, \quad (10.71)$$

где выбран специальный вид упорядочения операторов a и $\partial/\partial a$ и введено обозначение $Nm = T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu$. Произведя замену $x = a^{3/2}$ и $\Phi = \Psi \sqrt{da/dx} = \sqrt{2/3} \Psi/a^{1/4}$, приводим (10.71) к виду уравнения Клейна—Фока со специальным потенциалом

$$(3/64\pi^2) \partial^2 \Phi / \partial x^2 - 12\pi^2 x^{2/3} \Phi = -\kappa N m \Phi. \quad (10.72)$$

Суперпространство обобщенных моделей Казнера, описываемых метрикой (6.49). Оно 3-мерно, так как на четыре параметра: $\alpha, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ наложено одно условие (6.50). Будем использовать независимые параметры α, β_+, β_- . Учитывая вид смещений $dl^u_{(i)}$ согласно (6.51),

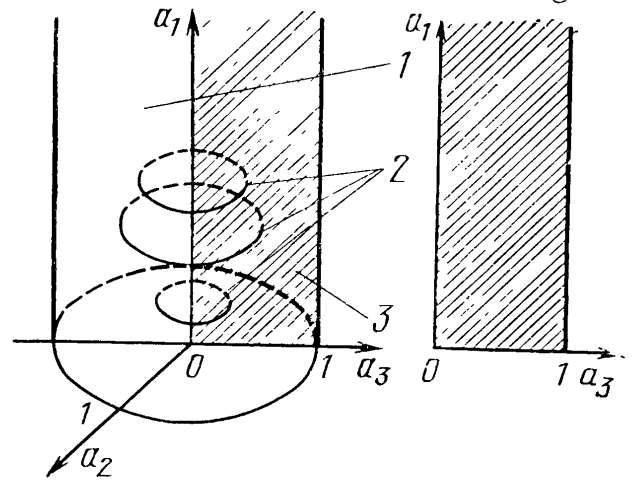


Рис. 21. Суперпространство геометрий с топологией 3-тора:

1 — внутренность цилиндра — многообразие $\text{Riem}({}^3M)$; 2 — орбиты отдельных 3-геометрий; 3 — суперпространство $S({}^3M)$

можно показать, что (первичное) суперпространство \mathcal{S} состоит из точек, образующих заштрихованный на рис. 22 цилиндрический сектор.

Гамильтонов формализм для данных моделей удобно строить на основе метрики при смещениях $dl_{(i)}^\mu$. Тогда метрический тензор имеет компоненты:

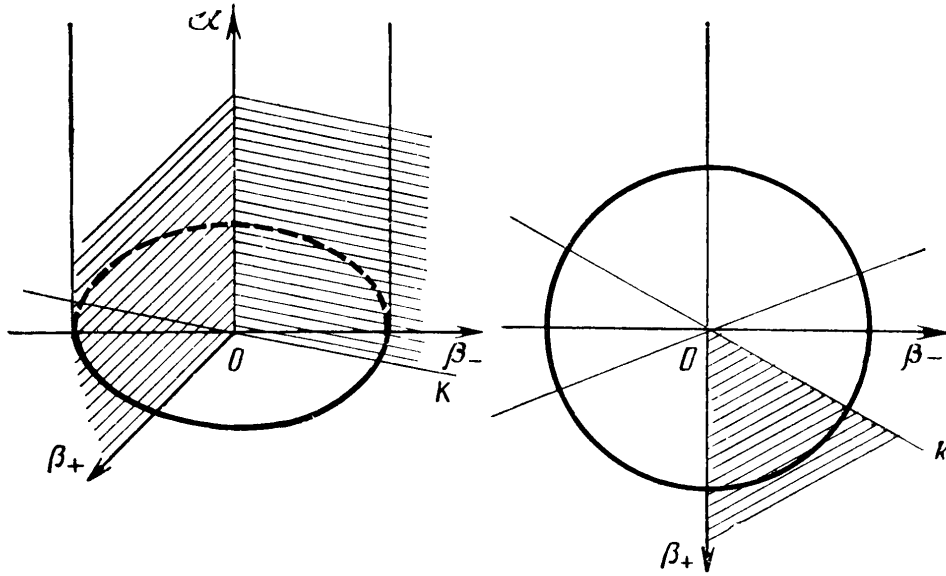


Рис. 22. Суперпространство обобщенных моделей Казнера

$$h_{11} = \exp(2\alpha + 2\beta_{11}); \quad h_{22} = \exp(2\alpha + 2\beta_{22}); \quad h_{33} = \exp(2\alpha + 2\beta_{33});$$

$$\sqrt{h} = \exp(3\alpha). \quad (10.73)$$

Плотность лагранжиана

$$\bar{\mathcal{L}} = \exp(3\alpha) [6(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_+^2 - \dot{\beta}_-^2) + V], \quad (10.74)$$

где V соответствует скалярной 3-мерной кривизне. Отсюда находим три импульса [согласно (6.49) $\tau_0=1$]:

$$p_{\pm} = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \dot{\beta}_{\pm} = 12 \exp(3\alpha) \dot{\beta}_{\pm}; \quad p_{\alpha} = 12 \exp(3\alpha) \dot{\alpha}. \quad (10.75)$$

В этих переменных плотность гамильтониана выглядит просто:

$$\bar{\mathcal{H}} = \exp(3\alpha) [(\exp(-6\alpha)/24)(p_{\alpha}^2 - p_+^2 - p_-^2) - V] \quad (10.76)$$

и напоминает гамильтониан частицы с временно-подобной координатой α и двумя пространственно-подобными координатами: β_+ и β_- .

В квантовой модельной теории Мизнера [101] вводится функционал состояния Вселенной $\Psi(\alpha, \beta_+, \beta_-)$, а импульсы заменяются операторами: $p_{\alpha} = i\partial/\partial\alpha$, $p_{\pm} = i\partial/\partial\beta_{\pm}$. Тогда вторичная гамильтонова связь приводит к волновым уравнениям Мизнера

$$(\partial^2/\partial\alpha^2 - \partial^2/\partial\beta_+^2 - \partial^2/\partial\beta_-^2 + \bar{V}) \Psi = 0. \quad (10.77)$$

Параметр α здесь рассматривается как время.

При построении квантовых модельных теорий возникает множество вопросов. Так, модели де Витта и Мизнера можно понимать как первые два звена в цепочке квантовых моделей миров со все меньшей и меньшей симметрией. Однако эти теории пока не дают конструктивного способа дальнейших обобщений, необходимых для перехода к другим звеньям. Не ясен смысл функционала состояния. Он должен описывать мир как единое целое. Каков его смысл, если не существуют внешние классические измерительные приборы? Можно было бы поставить и другие вопросы (см. [101, 183, 184]), но подробное обсуждение их выходит за рамки этой книги.

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Глава 11

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ 5-МЕРНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

11.1. 5-МЕРИЕ И МОНАДНЫЙ МЕТОД

Неоднократно подчеркивались многочисленные аналогии между теориями электромагнетизма и гравитации. По-видимому, существует глубокая связь между электромагнетизмом и гравитацией, основанная на фундаментальных понятиях и свойствах прообраза классического пространства-времени, ответственных за классические понятия, такие как метрика, свойство частичной упорядоченности, размерность и др. Замеченные аналогии, скорее всего, следует воспринимать как проявление этих глубинных закономерностей, пока еще в достаточной мере не разгаданных.

Признание тесной связи между гравитацией и электромагнетизмом вызвало в 20—40-х годах настойчивые попытки объединить эти две теории в единое целое. Поиски единой теории гравитации и электромагнетизма осуществлялись широким фронтом. Наибольшее внимание привлекли три направления: 1) единые теории на основе 4-мерных дифференциальных геометрий, более общих, нежели риманова: теории Вейля [14, с. 513], Эддингтона [25] и другие, где использовались многообразия с сегментарной кривизной и с кручением; 2) единые 4-мерные теории с несимметричной метрикой (теории Эйнштейна [18]), которые, по-видимому, сводятся к геометриям с кручением; 3) теории на основе римановых 5-мерных пространств*. На наш взгляд, последнее направление исследований привело к созданию наиболее красивой и содержательной схемы, объединяющей две теории.

Было предложено несколько вариантов 5-мерных теорий. К классическим результатам этого направления следует отнести естественное введение напряженности электромагнитного поля, а также получение известных уравнений Эйнштейна с правой частью в виде тензора энергии-импульса электромагнитного поля, уравнений Максвелла и уравнений движения заряженных частиц в искривленном пространстве-времени. Был достигнут несомненный

* Это направление исследований начали Калуца [14, с. 529] и, по-видимому, независимо Мандель [185], развивали его де Бройль [186], Клейн [187], Эйнштейн [18], Бергман [2], В. А. Фок [188], Ю. Б. Румер [189], Шмутцер [190] и многие другие [191—198].

успех в формальном совмещении известных теорий в рамках одной схемы, однако теория не вскрыла глубоких корней этих результатов, не привела к открытию новых закономерностей и предсказанию новых эффектов, которые можно было бы обнаружить с помощью современных экспериментальных средств. Попутно были получены другие интересные результаты, например с ее помощью впервые было введено уравнение Клейна — Фока, сформулирована скалярно-тензорная теория гравитации и т. д.

Другим важным следствием этого направления является развитие в его рамках элементов монадного метода. Впервые его применяли для выделения пятой координаты. Однако в работах 20—40-х годов не были окончательно определены операторы дифференцирования спроектированных тензоров, не были достаточно проанализированы уравнения геодезических в монадном методе. Опираясь на завершённый монадный метод в 4-мерном пространстве-времени, не сложно восполнить эти пробелы. Все получающиеся формулы, кроме уравнений геодезических, аналогичны формулам гл. 3. Наибольший интерес представляет калибровка 5-мерной монады, аналогичная хронометрической (когда поле монады выбрано вдоль конгруэнции линий пятой координаты). Эта калибровка использовалась в старых работах по 5-мерию и создала предпосылки для возникновения метода хронометрических инвариантов. В данной главе систематически развит вариант 5-мерной теории без использования общековариантного монадного метода, на основе именно указанной калибровки монады. Назовем эту теорию *калибровочно-инвариантной* (кл. и.) [193, 194].

Независимо от попыток построения единой теории гравитации и электромагнетизма излагаемая здесь теория представляет интерес и по следующим соображениям. Известно, что наличие электромагнитного поля ($F_{\mu\nu} \neq 0$) можно понимать, как неголономность 4-мерного пространства-времени для электрически заряженных частиц*. Однако неголономность 4-мерного пространства-времени можно понимать и описывать различным образом, в том числе и с помощью формального введения пятой координаты. Тогда неголономность 4-мерного пространственно-временного сечения имеет тот же смысл, что и неголономность 3-мерного пространственного сечения в хронометрической калибровке монадного формализма, характеризуемая тензором угловой скорости вращения $A_{ik} \neq 0$. Теперь вместо A_{ik} выступает тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

Приступая к изложению математического аппарата кл. и. 5-мерной теории, заметим, что на первый взгляд возможны две сигнатуры 5-мерного риманова пространства $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$: $(+ - - - +)$ и $(+ - - - -)$. В § 11.2 будем строить теорию сразу для обеих сигнатур. Во всех формулах верхний знак будет соответствовать первой сигнатуре, а нижний — второй. В § 11.3,

* Это отмечал, например, Магдальстам [28], развивший для реализации этой идеи путезависимую формулировку электродинамики.

сопоставляя полученную теорию с ОТО и электродинамикой, убедимся, что следует остановиться на сигнатуре $(+ - - - -)$. Это показал еще Эйнштейн [18, с. 197].

11.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЙ 5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ

Целесообразно опять представить теорию в виде четырех составных частей.

Алгебра. Запишем 5-мерный метрический тензор G_{AB} в виде

$$G_{AB} = \pm \lambda_A \lambda_B + \tilde{g}_{AB}, \quad (11.1)$$

где λ_A — монада (5-вектор); \tilde{g}_{AB} — метрический тензор пространственно-временного сечения, ортогонального линиям λ . Здесь и в дальнейшем заглавные латинские индексы пробегают значения: 0, 1, 2, 3, 5. Для составляющих метрического тензора справедливы соотношения:

$$\lambda_A \lambda_B G^{AB} = \pm 1; \quad \lambda_A \tilde{g}^{AB} = 0; \quad \tilde{g}_{AB} \tilde{g}^{AB} = 4. \quad (11.2)$$

Произвольному 5-тензору $B_D^C \dots$ можно сопоставить скаляр и совокупность пространственно-временных 4-тензоров равного и меньших рангов проектированием его посредством λ_B и \tilde{g}_B^A :

$$B = B_D^C \dots \lambda_C \dots \lambda^D \dots; \quad \tilde{B}_B^A \dots = B_D^C \dots \tilde{g}_C^A \dots \tilde{g}_B^D \dots$$

Откалибруем монаду λ_A следующим образом:

$$\lambda^B = G_5^B / \sqrt{\pm G_{55}} \rightarrow \lambda_B = G_{B5} / \sqrt{\pm G_{55}} \quad (11.3)$$

и введем обозначения: $\pm G_{55} \equiv \varphi^2$; $G_{5\mu} = \varphi \lambda_\mu$. Тогда составляющие метрического тензора будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^5 &= 1/\varphi; \quad \lambda^\mu = 0; \quad \lambda_5 = \pm \varphi; \quad \lambda_\mu = G_{5\mu}/\varphi; \\ \tilde{g}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} \mp \lambda_\mu \lambda_\nu; \quad \tilde{g}_{5B} = 0; \\ \tilde{g}^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu}; \quad \tilde{g}^{55} = \pm (\varphi^4 - 1)/\varphi^2; \quad \tilde{g}^{5\mu} = G^{5\mu}; \\ \tilde{g}_\mu^5 &= G_\mu^5; \quad \tilde{g}_\mu^5 = \mp \lambda_\mu/\varphi; \quad \tilde{g}_5^B = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

В данной калибровке выделяется множество систем координат, связанных преобразованиями

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5); \quad (11.5)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (11.6)$$

Назовем *кл. и 4-тензорами* величины, инвариантные при преобразованиях (11.5) и 4-мерно-ковариантные относительно преобразований (11.6). Преобразования (11.5), как будет показано в § 11.3, обобщают калибровочные электромагнитные преобразова-

ния. Физически значимыми в дальнейшем будем считать только кл. и. (в указанном общем или частных смыслах) 4-тензоры. Таковыми будут спроектированные на пространство-время тензорные величины с индексами 0, 1, 2, 3, т. е. выражения:

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \underbrace{B_{55\dots 5}^{\mu\nu\dots 5}}_n / (\pm G_{55})^{n/2} = B_{55\dots 5}^{\mu\nu} / \varphi^n \quad (11.7)$$

и полученные из них опусканием индексов с помощью 4-мерного тензора $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Видно, что компоненты $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}^{\mu\nu}$ 4-мерного пространственно-временного тензора образуют кл. и. 4-тензоры. Квадрат интервала 5-мерного риманова пространства представляется в виде

$$(dl)^2 = G_{AB} dx^A dx^B = \pm (d\lambda)^2 + ds^2, \quad (11.8)$$

где $d\lambda = \lambda_B dx^B = G_{5B} dx^B / \varphi$ — интервал вдоль пятой координаты (кл. и. скаляр); $ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — интервал 4-мерного пространственно-временного сечения (в общем случае неголономного), ортогонального линиям λ .

Физико-геометрические 4-тензоры. Как и в 4-мерном случае (см. § 3.5), из компонент метрического тензора и их производных первого порядка можно построить следующие кл. и. тензоры:

$$\Phi_A = \mp \lambda^B (\lambda_{A, B} - \lambda_{B, A}) \rightarrow \Phi_\mu = (1/\varphi) (\partial\varphi/\partial x^\mu \mp \partial\lambda_\mu/\partial x^5) \quad (11.9)$$

— аналог вектора ускорения F_μ в 4-мерном случае;

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{AB} &= \pm (1/2) \tilde{g}_A^C \tilde{g}_B^D (\lambda_{C, D} - \lambda_{D, C}) \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \\ &= \pm (1/2) (\partial\lambda_\mu/\partial x^\nu - \partial\lambda_\nu/\partial x^\mu + \Phi_\mu \lambda_\nu^5 - \Phi_\nu \lambda_\mu^5) \end{aligned} \quad (11.10)$$

— аналог тензора угловой скорости вращения A_{ik} ;

$$\begin{aligned} D_{AB} &= (1/2) (\tilde{g}_{AB, C} \lambda^C + \tilde{g}_{AC} \lambda_{, B}^C + \tilde{g}_{BC} \lambda_{, A}^C) \rightarrow D_{\alpha\beta} = (1/2\varphi) \partial\tilde{g}_{\alpha\beta}/\partial x^5; \\ D^{\alpha\beta} &= - (1/2\varphi) \partial\tilde{g}^{\alpha\beta}/\partial x^5 \end{aligned} \quad (11.11)$$

— аналог тензора скоростей деформаций D_{ik} .

Операторы дифференцирования. Будем пользоваться следующими двумя операторами, действующими на кл. и. 4-тензоры и сохраняющими их свойство калибровочной инвариантности.

а) Моноадный оператор дифференцирования по пятой координате

$$\partial_5^+ \tilde{B}_\nu^\mu \dots = \lambda^B \partial \tilde{B}_\nu^\mu \dots / \partial x^B = (1/\varphi) \partial \tilde{B}_\nu^\mu \dots / \partial x^5. \quad (11.12)$$

Этот оператор не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. Он соответствует оператору *d_T в § 3.5.

б) Оператор ковариантного пространственно-временного дифференцирования

$$\widetilde{\nabla}_{\sigma}^{\pm} \underbrace{\widetilde{B}_{\nu}^{\mu \dots}}_m = \underbrace{\partial_{\sigma}^{\pm} \widetilde{B}_{\nu}^{\mu \dots}}_n + \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \widetilde{B}_{\nu}^{\nu \dots}}_n + \dots - \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\nu} \widetilde{B}_{\nu}^{\mu \dots}}_m - \dots, \quad (11.13)$$

где использованы обозначения

$$\partial_{\sigma}^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} - \frac{G_{\sigma 5}}{G_{55}} \frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \mp \frac{\lambda_{\sigma}}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x^5} \quad (11.14)$$

— кл. и. оператор пространственно-временного дифференцирования;

$$\widetilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^{\mu} = (1/2) \widetilde{\partial}^{\mu\nu} (\partial_{\lambda}^{\pm} \widetilde{g}_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}^{\pm} \widetilde{g}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}^{\pm} \widetilde{g}_{\sigma\lambda}) \quad (11.15)$$

— кл. и. 4-связность.

Основные соотношения и уравнения 5-мерной теории. Запишем их через монадные величины и операторы в данной калибровке.

а) Уравнения геодезических в 5-мерной теории имеют вид:

$$d^2 x^A / dI^2 = - P_{BC}^A (dx^B / dI) dx^C / dI, \quad (11.16)$$

где 5-мерные символы Кристоффеля

$$P_{BC}^A = (1/2) G^{AD} (\partial G_{DB} / \partial x^C + \partial G_{DC} / \partial x^B - \partial G_{BC} / \partial x^D).$$

Введем кл.и. компоненты 5-скорости:

$$u^{\mu} = dx^{\mu} / ds; \quad d\lambda / ds = \pm \varphi dx^5 / ds + \lambda_{\mu} u^{\mu} \quad (11.17)$$

и используем соотношения:

$$\frac{dx^{\mu}}{dI} = \frac{u^{\mu}}{\sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}}; \quad \frac{dx^5}{dI} = \frac{\pm 1}{\varphi \sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}} \left(\frac{d\lambda}{ds} - \lambda_{\mu} u^{\mu} \right);$$

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dI^2} = \frac{1}{1 \pm (d\lambda/ds)^2} \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} \mp \frac{u^{\mu}}{[1 \pm (d\lambda/ds)^2]^2} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d^2 \lambda}{ds^2}.$$

Тогда уравнения геодезических можно представить в кл. и. виде:

$$\frac{d^2 \lambda}{ds^2} = \left[1 \pm \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] \left(D_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} - \frac{d\lambda}{ds} \Phi_{\mu} u^{\mu} \right); \quad (11.18)$$

$$\frac{dp^{\mu}}{ds} = - \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} u^{\alpha} p^{\beta} - 2 \frac{d\lambda}{ds} p^{\nu} (\widetilde{F}_{\nu}^{\mu} \pm D_{\nu}^{\mu}) \pm m \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \Phi^{\mu}, \quad (11.19)$$

где уравнения, спроектированные на пространство-время, умножены на массу «покоя» m_0 и при их записи использованы обозначения: $m = m_0 / \sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}$; $p^{\mu} = m u^{\mu}$.

б) Скалярная кривизна и компоненты тензора кривизны в кл. и. форме запишем следующим образом:

$${}^5R = {}^5R_{AB} G^{AB} = {}^4\tilde{R} \mp D^2 \mp D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \\ - 2 \left(\pm \partial_5^+ D \mp \Phi_\alpha \Phi^\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha^\pm \Phi^\alpha \right); \quad (11.20)$$

$${}^5R^{\mu\nu} = {}^4\tilde{R}^{\mu\nu} - \tilde{\Phi}^\mu \Phi^\nu \mp D D^{\mu\nu} - D \tilde{F}^{\mu\nu} \pm 2 D^{\mu\sigma} D_\sigma^\nu \mp 2 \tilde{F}^{\mu\sigma} \tilde{F}^{\nu\sigma} - \\ - \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \left[(1/2) \left(\tilde{\nabla}_\alpha^\pm \Phi_\beta + \tilde{\nabla}_\beta^\pm \Phi_\alpha \right) \pm \partial_5^+ D_{\alpha\beta} \right]; \quad (11.21)$$

$${}^5R_B^\mu \lambda^B = \tilde{\nabla}_\nu^\pm \left(D^{\nu\mu} \pm \tilde{F}^{\nu\mu} - D \tilde{g}^{\nu\mu} \right) \pm 2 \Phi_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu}; \quad (11.22)$$

$${}^5R_{AB} \lambda^A \lambda^B = \mp \left(\mp \tilde{\nabla}_\alpha^\pm \Phi^\alpha - \partial_5^+ D \mp \Phi_\alpha \Phi^\alpha - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \right), \quad (11.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} {}^4\tilde{R}^{\sigma}_{\mu\nu\rho} &= \partial_\nu^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\rho^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\rho\alpha}^\sigma; \\ {}^4\tilde{R}^{\mu\nu} &= {}^4\tilde{R}^{\rho\mu \cdot \nu}_{\cdot \cdot \rho}; \quad {}^4\tilde{R} = {}^4R^{\alpha\beta}_{\cdot \cdot \alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

в) 5-Мерные «уравнения Эйнштейна» постулируем в виде

$${}^5R_{AB} - (1/2) G_{AB} {}^5R + \Lambda G_{AB} = \kappa Q_{AB}, \quad (11.25)$$

где Λ — космологическая постоянная; $\kappa = 8\pi k/c^4$; Q_{AB} — 5-мерный тензор энергии-импульса источника. Используя кл. и. тензоры и операторы, эти уравнения можно записать следующим образом:

$${}^4\tilde{R}_{\mu\nu} - (1/2) \tilde{g}_{\mu\nu} {}^4\tilde{R} + \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = \pm [2 \tilde{F}_{\mu\alpha} \tilde{F}^{\alpha\nu} - (1/2) \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}] + \\ + \Phi_\mu \Phi_\nu + (1/2) \left(\tilde{\nabla}_\mu^\pm \Phi_\nu + \tilde{\nabla}_\nu^\pm \Phi_\mu \right) - \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha^\pm \Phi^\alpha \right) + \\ + D \left(\tilde{F}_{\mu\nu} \pm D_{\mu\nu} \right) \mp 2 D_{\mu\alpha} D_\nu^\alpha \pm \partial_5^+ D_{\mu\nu} \mp (1/2) \tilde{g}_{\mu\nu} \left(D^2 + \right. \\ \left. + D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + 2 \partial_5^+ D \right) + 2 F_\nu^\alpha D_{\mu\alpha} + \kappa Q_{\mu\nu}; \quad (11.26)$$

$$\tilde{\nabla}_\nu^\pm \left(D^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\nu\mu} - D \tilde{g}^{\mu\nu} \right) \pm 2 \Phi_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu} = \kappa Q_B^\mu \lambda^B; \quad (11.27)$$

$$- (1/2) {}^4R \pm (3/2) \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \mp \Lambda \pm (1/2) \left(D^2 - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} \right) = - \kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (11.28)$$

Эти формулы соответствуют (3.36), (3.37) и (3.38) — 4-мерным уравнениям Эйнштейна в монадном виде.

11.3. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛЬНОСТЬ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ ПО ПЯТОЙ КООРДИНАТЕ 5-МЕРНАЯ РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

Даже беглое сопоставление 5-мерных уравнений (11.26), (11.27) и геодезических (11.19) со стандартными уравнениями Эйнштейна (1.36) и второй парой уравнений Максвелла (1.42) и (1.44) заставляет серьезно относиться к 5-мерному обобщению ОТО. Основным препятствием для признания взаимного соответствия этих уравнений является отсутствие зависимости всех ве-

личин от пятой координаты в стандартных уравнениях. Его можно преодолеть постулированием независимости геометрических величин от пятой координаты (условие цилиндричности теории по пятой координате). Это означает использование лишь таких 5-мерных римановых пространств, которые допускают существование пространственно-подобного поля вектора Киллинга, причем в используемой калибровке векторы λ^A выбраны вдоль векторов Киллинга [см. 5-мерный аналог уравнений Киллинга (3.102), (3.103)].

При условии цилиндричности по пятой координате $D_{\mu\nu} = 0$ и остаются лишь два физико-геометрических тензора: $\tilde{F}_{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\nu\mu}$, претендующий на роль тензора электромагнитного поля, и $\Phi_\mu = (1/\varphi) \partial\varphi/\partial x^\mu$, который можно считать напряженностью скалярного поля φ . В работах Калуцы [14, с. 529] и других авторов поле φ исключалось дополнительным условием $G_{55} = -1^*$, но мы этого делать не будем. Операторы дифференцирования также упрощаются. 4-Связности $\tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu$ совпадают с символами Кристоффеля, а ∂_σ^+ , действующее на геометрические величины, является оператором частного дифференцирования. Тензор кривизны (11.24) совпадает с обычным тензором Римана—Кристоффеля.

Выделенный класс преобразований пятой координаты (11.5) при условии цилиндричности сужается до преобразований

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (11.29)$$

Это сужение класса преобразований вызывает расширение множества инвариантных при таких преобразованиях величин. Назовем величины, инвариантные при преобразованиях (11.29) и ковариантные относительно (11.6), специально калибровочно-инвариантными (с.к.и.). В частности, с.к.и. становятся компоненты G_{55} , а следовательно, и потенциал скалярного поля φ . Если теперь считать физически значимыми с.к.и. величины, то таковых становится много. В частности, ими являются все величины, получаемые из к.и. умножением на произвольную функцию $\mathcal{F}(\varphi)$. В связи с этим возникает вопрос: какие конструкции из геометрических характеристик должны быть сопоставлены физическим величинам, главным образом тензору электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и 4-мерному метрическому тензору $g_{\mu\nu}$?

Электромагнитные величины. Определим их из двух условий: 1) чтобы преобразования векторного потенциала A_μ при (11.29) совпадали с обычными калибровочными преобразованиями в электродинамике и 2) чтобы в уравнениях (11.26)

* В теории Калуцы 14 неизвестных компонент G_{AB} . Для них вариационным методом из плотности лагранжиана $\sqrt{G} {}^5R$ выводятся 14 уравнений, тождественно совпадающих (в отсутствие внешней материи) с 10 стандартными уравнениями Эйнштейна (с тензором энергии-импульса электромагнитного поля справа) и четырьмя уравнениями второй пары Максвелла (без источников справа). Пятнадцатое уравнение типа (11.28) в теории Калуцы отсутствует.

перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля стоял стандартный размерный коэффициент. Эти условия приводят к отождествлению:

$$\lambda_\mu = (2\sqrt{k}/c^2) \varphi A_\mu; \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = (\sqrt{k}/c^2) \varphi F_{\mu\nu}, \quad (11.30)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$. Видно, что при преобразованиях (11.29)

$$\lambda'_\mu = \lambda_\mu + \varphi \partial f/\partial x^\mu; \quad A'_\mu = A_\mu + \partial \tilde{f}/\partial x^\mu; \quad \tilde{f} = (c^2/2\sqrt{k})f. \quad (11.31)$$

Метрический тензор. Совокупность с.к.и. 4-метрик образует множество конформно-соответствующих (посредством конформного фактора $\mathcal{F}(\varphi)$) метрик:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{F}(\varphi) g_{\mu\nu}; \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}/\mathcal{F}(\varphi). \quad (11.32)$$

Какая из конформно-соответствующих метрик описывает физическое пространство-время? Рассмотрим несколько вариантов.

а) Пусть $\mathcal{F}(\varphi) = 1$ (непосредственное отождествление с физической метрикой метрики, получающейся при 1+4-расщеплении 5-мерной геометрии). В этом случае уравнения (11.26) — (11.28) принимают вид:

$${}^4R_{\mu\nu} - (1/2) \tilde{g}_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = - (2k/c^4) \varphi^2 [F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - (1/4) \tilde{g}_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + \\ + (1/\varphi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi) + \kappa T_{\mu\nu}; \quad (11.33a)$$

$$- \nabla_\nu F^{\nu\mu} - 2\Phi_\alpha F^{\alpha\mu} = (c^2/\sqrt{k}) \kappa Q_A^\mu \lambda^A; \quad (11.34a)$$

$$(1/2) {}^4R + (3/2) (k/c^4) \varphi^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \Lambda = \kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (11.35a)$$

Недостатком этого варианта можно считать переменность гравитационной постоянной из-за множителя φ^2 в (11.33a) справа перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля.

б) Пусть $\mathcal{F}(\varphi) = 1/\varphi$, т. е. произведем конформное преобразование исходной метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$: $\tilde{g}_{\mu\nu} = (1/\varphi) g_{\mu\nu}$; $\tilde{g}^{\mu\nu} = \varphi g^{\mu\nu}$. Тогда уравнения (11.26) — (11.28) запишем следующим образом:

$${}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda (1/\varphi) g_{\mu\nu} = - (2k/c^4) \varphi^3 [F_{\mu\nu} F_\nu^\alpha - \\ - (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + (3/2\varphi^2) [\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}] + \kappa T_{\mu\nu}; \quad (11.33б)$$

$$- \nabla_\nu (\varphi^3 F^{\nu\mu}) = (c^2/\sqrt{k}) \kappa \varphi Q_A^\mu \lambda^A; \quad (11.34б)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi - (2/3) \Lambda - (3/2\varphi) g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} + \\ + (1/3) {}^4R \varphi + (k/c^4) \varphi^4 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = (2/3) \kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (11.35б)$$

Характерной особенностью уравнений (11.33б) — (11.35б) является отсутствие гравитационной постоянной κ перед вкладом скалярного поля. Однако κ можно ввести, произведя преобразование

$$\varphi = \Psi \exp \sqrt{2\kappa/3}. \quad (11.36)$$

Тогда уравнения (11.33б) и (11.35б) принимают вид в вакууме при учете свертки уравнений (11.33б):

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda (1/\varphi) g_{\mu\nu} = & - (2k/c^4) \varphi^3 [F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \\ & - (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + \kappa [\Psi_{,\mu} \Psi_{,\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Psi_{,\alpha} \Psi_{,\beta}]; \end{aligned} \quad (11.37)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Psi + (1/\sqrt{6\kappa}) \Lambda/\varphi + (k/c^4) \sqrt{3/2\kappa} \varphi^3 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (11.38)$$

Легко видеть, что (11.38) в отсутствие электромагнитного поля и при $\Lambda=0$ представляет собой уравнение Клейна—Фока для безмассового скалярного поля, а (11.37) — уравнения Эйнштейна с наиболее распространенным видом тензора энергии-импульса скалярного поля (1.47).

в) Произведем конформное преобразование исходной метрики: $\tilde{g}_{\mu\nu} (\mathcal{F} = \varphi^2)$:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi^2 g_{\mu\nu}; \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = (1/\varphi^2) g^{\mu\nu}.$$

Тогда 5-мерные «уравнения Эйнштейна» принимают вид:

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda \varphi^2 g_{\mu\nu} = & - (2k/c^4) [F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + \\ & + (3/\varphi) (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi) - 6\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} / \varphi^2 + \kappa T_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (11.33в)$$

$$-\nabla_{\nu} F^{\nu\mu} - 3F^{\nu\mu} \varphi_{,\nu} / \varphi = (c^2 \kappa / \sqrt{k}) \varphi^3 Q_{AB}^{\mu} \lambda^B; \quad (11.34в)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi - (1/6) {}^4R \varphi + (1/3) \Lambda \varphi^3 - (k\varphi/2c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -(\kappa/3) \varphi^3 Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (11.35в)$$

Уравнение (11.35в) в вакууме (при $\Lambda=0$, $F_{\alpha\beta}=0$) представляет собой уравнение Клейна—Фока с дополнительным членом $-(1/6) {}^4R \varphi$, вводимым обычно из соображений конформной инвариантности уравнения безмассового скалярного поля [см. (1.72)]. Интересно, что наличие космологического члена Λ соответствует появлению в уравнении нелинейного члена, пропорционального $\sim \varphi^3$ и вводимого в нелинейной теории поля из других соображений. Еще одним преимуществом данного варианта является постоянство гравитационной постоянной перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля в (11.33в). Вследствие указанных и ряда других свойств наиболее предпочтителен именно вариант отождествления в).

Заметим, что конформные преобразования (11.32) произведены на 4-мерном уровне, т. е. использовалась схема: сначала 1+4-расщепление 5-мерного многообразия, затем конформное преобразование в 4-мерном пространственно-временном сечении. К тем же результатам можно было прийти, используя обратный порядок процедур: сначала конформное преобразование в рамках 5-мерия, потом 1+4-расщепление в конформно-соответствующем исходному 5-мерному многообразии. Например, вариант в) соот-

ветствует 5-мерному конформному преобразованию исходной метрики G_{AB} :

$$G_{AB} = \varphi^2 G_{AB}^*; \quad G^{AB} = (1/\varphi^2) G^{AB*}, \quad (11.39)$$

так что в новой метрике G_{AB}^* имеем $G_{55}^* = -1$. Последующее 1+4-расщепление многообразия с метрикой G_{AB}^* и скалярным полем φ как источником приводит к уравнениям (11.33в) — (11.35в).

Появление в 5-мерной теории скалярного поля φ позволяет выдвинуть гипотезу, что нет необходимости волевым образом вводить в правую часть уравнений Эйнштейна тензор энергии-импульса внешней материи. Ей может соответствовать геометрическое скалярное поле φ , автоматически возникающее при 1+4-расщеплении 5-мерного риманова многообразия. С учетом этой гипотезы следует выделить две крайние ветви исследований 5-мерной теории.

1. Исследование 5-мерной теории с дополнительными источниками в виде Q_{AB} справа. Тогда 5-мерие можно использовать для описания в единых рамках теории гравитации, электромагнетизма и дополнительного безмассового скалярного поля φ , пока еще экспериментально не обнаруженного. Такая 5-мерная теория смыкается с вариантом скалярно-тензорной теории гравитации.

2. Исследования 5-мерной «вакуумной» теории, из которой предполагается получить единую теорию гравитации $(g_{\mu\nu})$, электромагнетизма (A_μ) и известной остальной материи (φ) .

Возможны промежуточные варианты.

11.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОЕ ПОЛЕ В 5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим вопрос о геометрическом смысле электрических зарядов в 5-мерной теории. Для этого сопоставим пространственно-временные уравнения 5-геодезической (11.19) в варианте метрики в)

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{ds} = & -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta - \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \frac{d\lambda}{ds} F^\mu{}_{\cdot\alpha} u^\alpha + \\ & + \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] (\Phi^\mu - u^\mu \Phi_\alpha u^\alpha) \end{aligned} \quad (11.40)$$

со стандартными уравнениями движения электрических зарядов в искривленном пространстве-времени (1.46). Отсюда следует отождествление

$$d\lambda/ds = -q/2m\sqrt{k}, \quad (11.41)$$

т. е. отношение электрического заряда q к массе m пробного тела с точностью до константы является кл. и. компонентой 5-скорости тела вдоль пятой координаты. Это отношение в общем

случае — переменная величина, определяемая с.к.л.и. и конформно-инвариантным пятым уравнением геодезической (11.18) (при $D_{\mu\nu} = 0$). При условии цилиндричности его можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \frac{(d\lambda/ds)^2}{1 - (d\lambda/ds)^2} \right| = -2 \frac{d}{ds} \ln \varphi. \quad (11.42)$$

Интегрируя его, находим:

$$(d\lambda/ds)^2 = W_0 / [\varphi^2 + W_0(1 - \varphi^2)] = q^2/4km^2, \quad (11.43)$$

где W_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, отношение q/m определяется скалярным полем φ . В отсутствие скалярного поля $q^2/4km^2 = W_0 = \text{const}$.

В ветви 5-мерной теории 1 с внешним источником в виде пылевидной материи $[Q^{AB} = \rho(dx^A/dl)dx^B/dl]$ уравнение (11.34) при данной интерпретации $d\lambda/ds$ имеет смысл второй пары уравнений Максвелла с обычным источником в виде тока.

В ветви 5-мерной теории 2 (без внешних источников) условие цилиндричности геометрических величин по пятой координате исключает возможность введения в уравнения типа второй пары уравнений Максвелла электрических зарядов [18, с. 387]. Их можно ввести, используя более общие 5-мерные римановы геометрии без условия цилиндричности, когда присутствует третий 5-мерный физико-геометрический тензор D_{AB} .

Переходя к обсуждению теории поля в 5-мерном многообразии (в ветви 1), прежде всего следует указать на поразительное сходство операторов дифференцирования в стандартной электродинамике

$${}^+\partial_\mu \Psi \equiv [\partial/\partial x^\mu - (ie/c\hbar) A_\mu] \Psi, \quad (11.44)$$

инвариантных при калибровочных преобразованиях

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp[(ie/c\hbar) \tilde{f}]; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\tilde{f}/\partial x^\mu, \quad (11.45)$$

где $\tilde{f}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ — произвольная функция, и операторов пространственно-временного дифференцирования в 5-мерии

$$\partial_\mu^+ \Psi = [\partial/\partial x^\mu - (G_{\mu 5}/G_{55}) \partial/\partial x^5] \Psi, \quad (11.46)$$

инвариантных при калибровочных (11.5) и специально калибровочных (11.29) преобразованиях. Сходство проявляется также при рассмотрении коммутаторов этих операторов:

$$[{}^+\partial_\mu, {}^+\partial_\nu]_- \Psi = i \frac{e}{c\hbar} F_{\nu\mu} \Psi; \quad [{}^+\partial_\mu, \partial_\nu^+] \Psi = 2\tilde{F}_{\mu\nu} \partial_5^+ \Psi. \quad (11.47)$$

Операторы (11.44) и (11.46) и соотношения (11.47) будут совпадать, если при условии цилиндричности геометрических величин по пятой координате произвести отождествление (11.30) и предположить зависимость негеометрической величины Ψ от x^5 вида

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp[-(i ec/2 \sqrt{k} \hbar) x^5]. \quad (11.48)$$

Тогда при преобразованиях (11.36) будем иметь аналог калибровочных преобразований Ψ в электродинамике:

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp[-(i ec/2 \sqrt{k} \hbar) f(x)]. \quad (11.49)$$

Для скалярного поля (в ветви теории 1) следует постулировать 5-мерное уравнение типа Клейна—Фока

$$G^{AB} \nabla_A \nabla_B \Psi \pm (\mu^2 c^2 / \hbar^2) \Psi + a^5 R \Psi = 0, \quad (11.50)$$

где a — постоянная; μ — фиктивная масса. Возможны различные варианты теории при разных значениях a и μ , в том числе равных нулю. Используя формулы (11.9)—(11.14), это уравнение в варианте 4-метрики а) можно представить в следующем к.и. виде:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu^+ \nabla_\nu^+ \Psi - \partial_5^+ \partial_5^+ \Psi + \Phi^\mu \nabla_\mu^+ \Psi \pm \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \Psi + a^5 R \Psi = 0 \quad (11.51)$$

или, используя (11.48):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu^+ \nabla_\nu^+ \Psi + \Phi^\mu \nabla_\mu^+ \Psi + (e^2 c^2 / 4k \hbar^2 \varphi^2 \pm \mu^2 c^2 / \hbar^2) \Psi + a^5 R \Psi = 0, \quad (11.51a)$$

где $\sqrt{e^2 / 4k \varphi^2 \pm \mu^2}$ играет роль наблюдаемой массы m и согласно (11.20)

$${}^5R = {}^4R + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - 2 \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\varphi} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi. \quad (11.52)$$

Не будем подробно обсуждать возможные физические следствия уравнения (11.51)*, обратим лишь внимание на то, что согласно (11.52) скалярное поле φ в уравнении (11.51) в значительной степени «дублирует» поле Ψ , т. е. опять приходим к доводу в пользу ветви 5-мерной теории 2.

В полностью геометризованной 5-мерной теории (ветвь 2) скалярное поле φ входит, во-первых, через физико-геометрический вектор Φ_μ , который при допущении, что A_μ не зависит от x^5 , записывается в виде

$$\Phi_\mu = \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + \frac{2 \sqrt{k}}{c^2} A_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^5} \right) = \frac{1}{\varphi} \nabla_\mu^+ \varphi, \quad (11.53)$$

и, во-вторых, как конформный фактор. В последнем случае также все производные от φ являются к.и., т. е. взаимодействие скалярного и электромагнитного полей вводится автоматически при допущении, что из всех геометрических величин от x^5 зависит только φ . Это означает отказ от условия цилиндричности по

* Впервые 4-мерное уравнение Клейна—Фока было получено из уравнения (11.51) при $a=0$, $\mu=0$, $G_{55}=-1$ и следующей зависимости Ψ от x^5 :

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp[(ic/\hbar) m x^5].$$

пятой координате, причем в теории должны использоваться не произвольные 5-мерные римановы пространства, а лишь такие, в которых зависимость от пятой координаты входит в метрику G_{AB} в виде конформного фактора. Последнее реализуется в варианте в) выбора 4-метрики:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{AB} &= -\frac{G_{AB}}{G_{55}} = \frac{G_{AB}}{\varphi^2}; & A_\mu &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{G_{5\mu}}{G_{55}} = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \bar{G}_{5\mu}; \\ g_{\mu\nu} &= \bar{G}_{\mu\nu} - \bar{G}_{\mu 5} \bar{G}_{\nu 5} / \bar{G}_{55} = \varphi^{-2} (G_{\mu\nu} - G_{\mu 5} G_{\nu 5} / G_{55}), \end{aligned} \right\} \quad (11.54)$$

где компоненты \bar{G}_{AB} не зависят от x^5 ; $\bar{G}_{55} = -1$.

Такое обобщение условия цилиндричности по пятой координате назовем *условием квазицилиндричности* (по пятой координате). Можно показать, что оно соответствует использованию 5-мерных конформно-киллинговых римановых многообразий [см. (3.104)], когда имеется пространственно-подобный конформный вектор Киллинга ξ_A , удовлетворяющий уравнению

$$\mathfrak{L}_{\xi} G_{AB} = \xi_{A; B} + \xi_{B; A} = (2/5) G_{AB} \xi^C{}_{; C},$$

причем λ_A выбрано вдоль ξ_A .

Возможность рассмотрения нескольких конформно-соответствующих метрик позволяет ввести операторы ковариантного дифференцирования относительно символов Кристоффеля, образованных из разных метрик. В частности, запишем ковариантную производную от метрики варианта в) относительно исходных символов Кристоффеля $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$:

$$g_{\mu\nu| \sigma} = \bar{\nabla}_\sigma^+ (\bar{g}_{\mu\nu} / \varphi^2) = - (g_{\mu\nu} / \varphi) [\varphi_{, \sigma} + (2\sqrt{k}/c^2) A_\sigma \varphi_{, 5}]. \quad (11.55)$$

Тогда получим объединение 5-мерия с единой теорией гравитации и электромагнетизма Вейля [14, с. 513] (см. примечание в § 1.5). В (11.55) справа, как и у Вейля, стоит член, пропорциональный векторному потенциалу электромагнитного поля.

В рассматриваемом варианте 5-мерной теории 15 компонент «уравнений Эйнштейна» имеют вид:

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda \varphi^2 g_{\mu\nu} &= - (2k/c^4) [F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \\ &- (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + (3/\varphi) (\nabla_{(\mu}^+ \nabla_{\nu)}^+ \varphi - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^+ \nabla_\beta^+ \varphi) - \\ &- (6/\varphi^2) \nabla_\mu^+ \varphi \cdot \nabla_\nu^+ \varphi + 3g_{\mu\nu} \varphi_{, 5} / \varphi; \end{aligned} \quad (11.56)$$

$$-\nabla_\nu F^{\nu\mu} - 3F^{\nu\mu} \frac{\nabla_\nu^+ \varphi}{\varphi} = \frac{3c^2}{\sqrt{k}} g^{\mu\nu} \left(\frac{\nabla_\nu^+ \varphi_{, 5}}{\varphi} - 2 \frac{\varphi_{, 5} \nabla_\nu^+ \varphi}{\varphi^2} \right); \quad (11.57)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^+ \nabla_\beta^+ \varphi - (1/6) {}^4R \varphi - [(k/2c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2\varphi_{, 5}^2 / \varphi^2] \varphi + (1/3) \Lambda \varphi^3 = 0. \quad (11.58)$$

Сделаем несколько замечаний о виде и смысле этих уравнений:

1. В уравнениях (11.56) структура членов, содержащих φ и производные от φ , такая же, как в варианте теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия Хойла и Нарликара [199] (если в [199] положить $\psi = \varphi^{3/2}$ и заменить $(1/6)R$ величиной $(3/16)R$). К аналогичным уравнениям в скалярно-тензорной теории гравитации пришел Шерер [200] (если в [200] положить $\psi = \varphi^{3/2}$ и $\omega = 4/3$), также опирающийся на реляционную концепцию пространства-времени.

2. В уравнениях (11.57), соответствующих второй паре уравнений Максвелла, справа возникает источник типа плотности тока, так как производные по x^5 согласно (11.53) определяют заряд.

3. Кроме уже отмеченных в § 11.3 характерных черт уравнения (11.58) [уравнения (11.35в)] типа Клейна—Фока, укажем:

а) обобщенный даламбертиан от φ включает в себя стандартное взаимодействие φ с электромагнитным полем, если φ зависит от x^5 следующим образом:

$$\varphi = \tilde{\varphi}(x^\mu) \exp(i e c x^5 / 2 \sqrt{k} \hbar); \quad (11.59)$$

б) роль квадрата наблюдаемой массы в (11.58), если пренебречь космологическим членом, играет величина

$$m^2 c^2 / \hbar^2 \rightarrow -[(k/2c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2\varphi_{,5}^2 / \varphi^2 + {}^4R/6]; \quad (11.60)$$

в) интересно, что согласно (11.60) зависимость от x^5 вида (11.59) при e , равном заряду электрона, приводит к вкладу в массу величины $m_1 \sim e/2 \sqrt{k} \sim 10^{-6}$ г (см. приложение).

4. С помощью 5-мерия в ветви 2 можно произвести как бы овеществление понятий (сугубо реляционных), вводимых в стандартной ОТО на базе монадного, диадного и тетрадного формализмов: идеализированных безмассовых приборов систем отсчета (им можно сопоставить скалярное поле), направлений распространения и векторов поляризации, например, электромагнитных волн (им можно сопоставить электромагнитное поле, возникающее из компонент $G_{5\mu}$).

5. Конкретное сопоставление φ волновым функциям заряженного скалярного поля Ψ изложено в приложении.

11.5. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ 5-МЕРНЫХ «УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА»

Рассмотрим цилиндрические по пятой координате статические сферически-симметричные решения 5-мерных «уравнений Эйнштейна». Простейшее из них получается из 4-мерной метрики Шварцшильда добавлением компонент $G_{55} = -1$, $G_{5\mu} = 0$:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dx_0^2 - \frac{dr}{(1 - r_g/r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dx_5^2. \quad (11.61)$$

К более общим решениям можно прийти, либо непосредственно решая уравнения (11.33)—(11.35) в любом варианте выбора 4-метрики, как это делалось независимо в работах [195, 196], либо воспользовавшись тем, что в отсутствие электромагнитного поля в варианте выбора 4-метрики б) 5-мерные уравнения (11.33б)—(11.35б) совпадают с 4-мерными стандартными уравнениями, из которых было получено решение Фишера (4.86), либо используя найденные сферически-симметричные решения в скалярно-тензорных теориях гравитации при соответствующем 5-мериию выборе произвольных констант. Любым из этих путей приходим к точному решению

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-B} dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-B} dr_1^2 - \\ - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B} dx_5^2, \quad (11.62a)$$

где \tilde{r}_g , A и B — константы, связанные соотношением $A^2 + 3B^2 = 1$. Ясно, что (11.62) переходит в метрику Шварцшильда при $B=0$, $A=+1$. Видно также, что в варианте б)

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-B} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^A dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A} dr_1^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{3B} dx_5^2 \right\} \quad (11.62б)$$

4-метрика (в квадратных скобках) совпадает с решением Фишера. Опираясь на соображения предыдущих параграфов, будем использовать вариант 4-метрики в)

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-3B} dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-3B} dr_1^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-3B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx_5^2 \right\}. \quad (11.62в)$$

Для удобства сопоставления 5-мерной теории с ОТО желательно записать 4-метрику варианта в) в координатах кривизн. Однако точно это можно сделать лишь в неявном виде [195], поэтому запишем ее в координатах кривизн приближенно. Переобозначим константы: $\alpha = 2B/(A - B) \rightarrow \tilde{r}_g = r_g \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$; $A = (\alpha + 2)/2 \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$; $B = \alpha/2 \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$ и преобразуем r_1 : $r^2 = r_1^2 (1 - \tilde{r}_g/r_1)^{1-A-3B}$. Легко видеть, что при $\alpha=0$ метрика (11.62) переходит в (11.61). Представим компоненты метрики в виде рядов по r_g/r . После несложных вычислений находим:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &\approx [1 - (1 - \alpha) r_g/r] dx_0^2 - [1 + (1 + 2\alpha) r_g/r] dr^2 - \\ &- r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \\ \varphi^2 &\approx 1 - \alpha r_g/r - [\alpha(\alpha + 1)/2] (r_g/r)^2. \end{aligned} \right\} (11.63)$$

В любой интерпретации 5-мерной теории φ описывает распределение вокруг источника безмассового скалярного поля. Константа α определяет плотность скалярного поля и одновременно его влияние на 4-метрику.

Кратко рассмотрим поведение пробных тел в сферически-симметричной 5-метрике. Для пятого уравнения геодезической ранее был получен первый интеграл в самом общем виде (11.43). Подставляя в него приближенное решение для φ^2 , получаем:

$$(d\lambda/ds)^2 \approx W_0 [1 + (\alpha r_g/r) (1 - W_0)]. \quad (11.64)$$

Из пространственно-временного уравнения геодезической (11.40) для угла θ находим, как и в метрике Шварцшильда, что если в начальный момент пробная частица двигалась в экваториальной «плоскости» ($\varphi_0 = \pi/2$, $d\theta/ds|_0 = 0$), то и вся траектория находится в этой «плоскости».

Из уравнения для угла φ вычисляем интеграл:

$$r^2 d\varphi/ds \approx \sigma [1 + (\alpha/2) (1 - W_0) r_g/r], \quad (11.65)$$

где σ — постоянная интегрирования (удвоенная секторная скорость). Аналогично, из уравнения (11.40) для $\mu=0$ находим:

$$dx^0/ds \approx V_0 [1 + r_g/r - (\alpha/2) (1 + W_0) r_g/r], \quad (11.66)$$

где V_0 — постоянная интегрирования.

Вместо оставшейся компоненты уравнения геодезической удобно использовать выражение для квадрата 4-интервала. Учитывая первые интегралы (11.64) — (11.66) и переходя от r к $u = 1/r$, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma^2 [(du/d\varphi)^2 + u^2] &= V_0^2 - 1 + r_g u [1 + \alpha (3 - 3V_0^2 - W_0)] + \\ &+ r_g u^3 \sigma^2 (1 + 2\alpha). \end{aligned} \quad (11.67)$$

Сравнивая (11.67) с соответствующим соотношением в стандартной ОТО, получаем выражение для эффективной массы центрального источника:

$$M_{\text{эф}} = (r_g c^2 / 2k) [(1 + 3\alpha) - \alpha (3V_0^2 + W_0)] = M_0 + M_1, \quad (11.68)$$

где M_1 — часть $M_{\text{эф}}$, зависящая от параметров пробной частицы. Это существенно новое свойство 5-мерной теории.

Вычисления, аналогичные проделанным в гл. 4, дают для смещения перигелия (Меркурия) значение (за один оборот)

$$\delta\varphi = (3/2) \pi r_g (1/r_{\text{мин}} + 1/r_{\text{макс}}) (1 + 2\alpha). \quad (11.69)$$

Для отклонения лучей света, проходящих на расстоянии ρ_0 от источника, находим:

$$\delta\beta = (2r/\rho_0)(1 - \alpha/2). \quad (11.70)$$

Из формул (11.68)—(11.70) следует, что при достаточно малых α различия между классическими эффектами в ОТО и в 5-мерии могут быть неощутимыми.

Кратко обсудим частный случай метрики, создаваемой центральным электрически заряженным источником. Такую метрику можно было бы найти, решая непосредственно уравнения (11.33)—(11.35) [197], однако мы поступим иначе. Будем исходить из известной метрики (11.61). Произведем линейное преобразование координат:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \alpha_{00}x'^0 + \alpha_{05}x'^5; & x^5 &= \alpha_{50}x'^0 + \alpha_{55}x'^5; & x^i &= x'^i; \\ x'^0 &= (\alpha_{55}/\Delta)x^0 - (\alpha_{05}/\Delta)x^5; & x'^5 &= -(\alpha_{50}/\Delta)x^0 + (\alpha_{00}/\Delta)x^5, \end{aligned} \right\} \quad (11.71)$$

где $\Delta = \alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50}$. Очевидно, что в новых координатах метрика по-прежнему будет решением 5-мерных «уравнений Эйнштейна»: однако преобразование (11.71) выводит нас за пределы «обобщенной системы отсчета» в данной калибровке [см. (11.5), (11.29)]; *переход к новой «обобщенной системе отсчета» индуцирует иную физическую ситуацию* — приводит к появлению электрического и скалярного полей. Действительно, в новой системе координат

$$G'_{05} = \alpha_{00}\alpha_{05} - \alpha_{50}\alpha_{55} - (r_g/r)\alpha_{00}\alpha_{05}; \quad G'_{55} = \alpha_{05}^2 - \alpha_{55}^2 - (r_g/r)\alpha_{05}^2. \quad (11.72)$$

Наложим на коэффициенты линейного преобразования (11.71) два естественных условия: $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{g}'_{00} = 1$, $\lim_{r \rightarrow \infty} G'_{55} = -1$, которые соответствуют следующим:

$$\alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50} = \pm 1; \quad \alpha_{55}^2 - \alpha_{05}^2 = 1. \quad (11.73)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Phi^2 &= 1 + \alpha_{05}^2 \frac{r_g}{r}; & \Phi_1 &= -\frac{\alpha_{05}^2}{2(1 + (r_g/r)\alpha_{05}^2)} \frac{r_g}{r^2}; \\ F_{01} &= -\frac{r_g c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\alpha_{05}\alpha_{55}}{r^2} \frac{1}{[1 + (r_g/r)\alpha_{05}^2]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.74)$$

Отсюда следует, что значение возникшего электрического заряда q связано с коэффициентами линейного преобразования:

$$q = -(r_g c^2 / 2\sqrt{k}) \alpha_{05}\alpha_{55}, \quad \text{т. е. } \alpha_{05}\alpha_{55} = -q/M\sqrt{k}. \quad (11.75)$$

Из (11.73) и (11.75) находим значения двух коэффициентов:

$$\alpha_{05}^2 = (1/2)(\sqrt{1 + 4q^2/kM^2} - 1); \quad \alpha_{55}^2 = (1/2)(\sqrt{1 + 4q^2/kM^2} + 1). \quad (11.76)$$

Пространственно-временная метрика в варианте в) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{(1 - r_g/r)}{[1 + (r_g/r) \alpha_{05}^2]^2} dx_0^2 - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r) [1 + (r_g/r) \alpha_{05}^2]} - \frac{r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{1 + (r_g/r) \alpha_{05}^2}. \quad (11.77)$$

Сделаем некоторые выводы и замечания:

1. Линейное преобразование (11.71) вместе с переходом в новую «обобщенную систему отсчета» физически означает введение в центральный источник электрического заряда q , пропорционального массе источника M , причем коэффициент пропорциональности определяется коэффициентом линейного преобразования α_{05} . При $\alpha_{05} = 0$ преобразование (11.71) не выводит нас за пределы «обобщенной системы отсчета» и электрическое поле не появляется.

2. Используя тетрадный (пентадный) метод в калибровке Ламе, находим, что наблюдаемая напряженность кулоновского поля имеет вид $E_r \approx (q/r^2) [1 - (r_g/2r) \alpha_{05}^2]$, причем здесь использованы не координаты кривизн.

3. Возникшее электрическое поле порождает напряженность скалярного поля Φ_1 , которое также определяется электрическим зарядом центрального источника.

4. Более общее решение, зависящее от трех констант, можно получить аналогично из метрики (11.62).

5. Можно показать [201], что точные решения 15 уравнений поля с зависимостью φ от пятой координаты получаются из известных решений стандартных уравнений Эйнштейна с космологическим членом. Действительно, из структуры уравнений (11.56) — (11.58) следует, что зависимость φ от пятой координаты должна иметь вид: $\varphi = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) \exp(\alpha x^5)$, где α — постоянная. Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле отсутствует, $\Lambda = 0$ и $\varphi = \exp(\alpha x^5)$. Тогда (11.57) выполняется тождественно, уравнения (11.56) принимают вид стандартных уравнений Эйнштейна с космологическим членом

$${}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R - 3\alpha^2 g_{\mu\nu} = 0, \quad (11.78)$$

а (11.58) следует из (11.56). Известно много решений этих уравнений [91]. От них можно перейти к решениям системы уравнений (11.56) — (11.58) с отличным от нуля электромагнитным полем и φ , зависящим от пятой и пространственно-временных координат, например, с помощью преобразований (11.71).

11.6. ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В 5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим однородные изотропные космологические модели в двух ветвях 5-мерной теории: 1) с внешним тензором энергии-импульса материи Q_{AB} и 2) в сугубо геометрической теории

Предположим в обеих ветвях, что в целом материя, заполняющая пространство, электрически нейтральна, т. е. $Q_5^\mu = Q_{55} = 0$, 5-метрика цилиндрична по пятой координате, $F_{\mu\nu} = 0$. Кроме того, положим $\Lambda = 0$. Согласно соображениям, изложенным в предыдущих параграфах, выберем вариант в) метрики 4-мерных пространственно-временных сечений. Тогда метрику следует искать в виде

$$dI^2 = \varphi^2 G_{AB} dx^A dx^B = \varphi^2 \left\{ a^2 \left[dx_0^2 - dx_1^2 - \left(\frac{\sin^2 x_1}{\text{sh}^2 x_1} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx_5^2 \right\}, \quad (11.79)$$

где a и φ — функции от x^0 . Представим φ в виде $\varphi = \exp(\Phi)$; $\Phi = \Phi(x^0)$. Уравнения (11.33в) — (11.35в) записываются следующим образом:

$${}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R = 3 (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi) - 3 (\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi) + \kappa T_{\mu\nu}; \quad (11.80)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi + g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi - (1/6) {}^4R = 0. \quad (11.81)$$

В ветви 1 выберем тензор энергии-импульса пылевидной материи, который в сопутствующей системе отсчета имеет компоненты:

$$T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = \rho c^2; \quad T_{\mu\nu} \tau^\mu h_k^\nu = 0; \quad T_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^\nu = 0, \quad (11.82)$$

где $\rho(x^0)$ — плотность материи.

а) Закрытые однородные изотропные модели. Используя формулы § 6.1—6.3 для монадных 4-мерных величин, находим обладающие нетривиальным содержанием компоненты уравнений (11.80), (11.81) [соответственно проекции (11.80) на $\tau^\mu \tau^\nu$, $h_i^\mu h_k^\nu$ и (11.81)]:

$$1 + \dot{a}^2/a^2 = -3\dot{\Phi}\dot{a}/a - 2\dot{\Phi}^2 + \kappa c^2 a^2/3; \quad (11.83a)$$

$$-1 + \dot{a}^2/a^2 - 2\ddot{a}/a = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}\dot{a}/a + 3\dot{\Phi}^2; \quad (11.84a)$$

$$1 + \ddot{a}/a = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}\dot{a}/a - \dot{\Phi}^2. \quad (11.85a)$$

Начнем с решения уравнений, общих для обеих ветвей.

Произведя замену $a \exp \Phi = \exp \mu$, уравнение (11.85a) приводим к виду

$$\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 + 1 = 0. \quad (11.86a)$$

Его решение есть

$$\exp \mu = A \sin(x^0 + C_1), \quad (11.87a)$$

где A и C_1 — постоянные интегрирования. В дальнейшем будем считать, что начальная фаза $C_1 = 0$.

Умножим (11.85а) на 3 и сложим с уравнением (11.84а). Тогда, вводя обозначение $\dot{a}/a = z$ и используя (11.87), находим:

$$\dot{z} - z^2 + 2 = -3z \operatorname{ctg} x^0. \quad (11.88a)$$

Из множества решений этого уравнения выделим два, представляющих наибольший интерес:

$$z_1 = \operatorname{ctg} \frac{x^0}{2} \rightarrow a = a_0 (1 - \cos x^0); \quad \varphi = \frac{A}{a_0} \operatorname{ctg} \frac{x^0}{2}; \quad (11.89a)$$

$$z_2 = \frac{1 + \cos^2 x^0}{\sin x^0 \cos x^0} \rightarrow a = a_1 \frac{\sin^2 x^0}{\cos x^0}; \quad \varphi = \frac{A}{a_1} \operatorname{ctg} x^0. \quad (11.90a)$$

Теперь отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории.

1. Подставляя решения в уравнение (11.83а), легко убедиться, что наличие внешнего материального источника соответствует лишь решению (11.89а). Для плотности ρ имеем:

$$\rho = 3/\kappa a_0^2 c^2 \sin^2 x^0 (1 - \cos x^0). \quad (11.91)$$

Эволюция этой закрытой модели описывается точно такими же уравнениями, что и эволюция закрытой модели Фридмана [см. (6.22а), (6.23а)]:

$$a = a_0 (1 - \cos x^0); \quad \tau = a_0 (x^0 - \sin x^0). \quad (11.92)$$

Полная масса внешней материи

$$M = 2\pi^2 a^3 \rho = (6\pi^2 a_0 / \kappa c^2) [1 - (2 \cos x^0 / \sin^2 x^0) (1 - \cos x^0)] \quad (11.93)$$

изменяется от нуля до бесконечности при $x^0 = \pi$, а затем опять уменьшается до нуля при $x^0 = 2\pi$. С вкладом скалярного поля φ суммарная масса Вселенной остается постоянной.

Особо следует отметить, что при $x^0 \rightarrow 0$ (π) скалярное поле φ стремится к бесконечности: $\varphi \approx 2(A/a_0)/x^0$. Как отмечалось в § 11.4, φ определяет зависимость от координат отношения электрического заряда к массе согласно (11.43). Условие вещественности значений характеристик заряженных частиц накладывает ограничения на интервал времени τ , в пределах которого сохраняется смысл вводимых понятий и уравнений [198]. Из (11.43) следует, что при $W_0 > 1$ (это имеет место для реальных частиц) стандартные понятия теряют смысл раньше, чем возникают сингулярности.

2. Полностью геометризованной теории соответствует решение (11.90), при котором $\rho = 0$, и уравнение (11.83) выполняется тождественно. Эволюция такой закрытой модели определяется следующими уравнениями в параметрическом виде:

$$a = a_1 \sin^2 x^0 / \cos x^0; \quad \tau = a_1 [\ln \operatorname{tg} (x^0/2 + \pi/4) - \sin x^0]. \quad (11.94)$$

Отсюда следует, что при $x^0 = \pi/2$ радиус мира становится бесконечным, однако это достигается за бесконечный интервал времени τ . Таким образом, в полностью геометризованной теории характер эволюции закрытой модели Вселенной качественно

иной, чем в модели Фридмана: модель бесконечно долго расширяется от сингулярного состояния.

Формально полагая правую часть (11.80) равной $\kappa c^2 \tilde{\rho}$, в данной модели получаем для эффективной плотности геометрической материи

$$\tilde{\rho} = 3(1 + 3 \cos^2 x^0) / \kappa a_1^2 c^2 \sin^6 x^0; \quad (11.95)$$

$\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0=0$ до предельного значения $\tilde{\rho} = 3/\kappa a_1^2 c^2$ при $x^0=\pi/2$.

б) Открытые однородные изотропные модели. Они находятся из уравнений:

$$-1 + \dot{a}^2/a^2 = -3\dot{\Phi}\dot{a}/a - 2\dot{\Phi}^2 + \kappa c^2 a^2/3; \quad (11.836)$$

$$1 + \dot{a}^2/a^2 - 2\ddot{a}/a = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}\dot{a}/a + 3\dot{\Phi}^2; \quad (11.846)$$

$$-1 + \ddot{a}/a = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}\dot{a}/a - \dot{\Phi}^2. \quad (11.856)$$

Аналогичная замена $a \exp \Phi = \exp \mu$ приводит уравнение (11.856) к виду $\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 - 1 = 0$, откуда находим:

$$\exp \mu = A \operatorname{sh} x^0; \quad \dot{\Phi} = \operatorname{cth} x^0 - \dot{a}/a. \quad (11.876)$$

Из уравнения $\dot{z} - z^2 - 2 = -3z \operatorname{cth} x^0$, соответствующего (11.88а), получаем:

$$z_1 = \operatorname{cth}(x^0/2) \rightarrow a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad \varphi = (A/a_0) \operatorname{cth}(x^0/2); \quad (11.896)$$

$$z_2 = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 x^0}{\operatorname{sh} x^0 \operatorname{ch} x^0} \rightarrow a = a_1 \frac{\operatorname{sh}^2 x^0}{\operatorname{ch} x^0}; \quad \varphi = \frac{A}{a_1} \operatorname{cth} x^0. \quad (11.906)$$

Опять отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории.

1. Первое решение соответствует ветви теории с внешним материальным источником. Подставляя (11.896) в (11.836), находим:

$$\rho = -3/\kappa a_0^2 c^2 \operatorname{sh}^2 x^0 (\operatorname{ch} x^0 - 1), \quad (11.96)$$

что физически неприемлемо. Эволюция этой модели описывается точно такими же уравнениями, что и эволюция открытой модели Фридмана (6.226) — (6.236):

$$a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad \tau = a_0 (\operatorname{sh} x^0 - x^0). \quad (11.97)$$

Опять отметим, что вследствие (11.43) сингулярность плотности (11.96) лежит за пределами области вещественности отношения электрического заряда к массе пробных частиц.

2. Полностью геометризованной теории соответствует решение (11.906), из которого находим закон эволюции открытой модели:

$$a = a_1 \operatorname{sh}^2 x^0 / \operatorname{ch} x^0; \quad \tau = a_1 (\operatorname{sh} x^0 - 2 \operatorname{arctg} \exp x^0 + \pi/2), \quad (11.98)$$

т. е., как и в открытой модели Фридмана, происходит бесконеч-

но долгое расширение от сингулярного состояния. Опять вводя эффективную плотность скалярной материи, получаем:

$$\tilde{\rho} = 3(1 + 3 \operatorname{ch}^2 x^0) / \kappa a_1^2 c^2 \operatorname{sh}^6 x^0, \quad (11.99)$$

т. е. $\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0=0$ до как угодно малых значений при достаточно больших x^0 .

В заключение этой главы приведем высказывание основоположника 5-мерной теории Калуцы, к которому, вероятно, присоединятся все серьезно познакомившиеся с 5-мерием: «Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности, громоздящиеся на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них степени формального единства, — всего лишь капризная игра обманчивой случайности» [14, с. 534]. Невольно возникает мысль, что достигнутое единство представляет собой внешнее проявление неких глубоких закономерностей, лежащих в самой основе физического мироздания и пока еще как следует не познанных.

Глава 12

ОСОБЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО 4-МЕРИЯ

12.1. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ 4-МЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Монадный и диадный методы, лежащие в основе рассмотрения всех затронутых выше проблем, позволяли выделять из многообразий высшего числа измерений многообразия меньшей размерности, что дало возможность упрощать или интерпретировать сложные понятия и соотношения с помощью более элементарных. Как уже отмечалось, возникновение этих методов обязано задаче выделения 4-мерного пространства-времени из 5-мерного многообразия. Таким образом, по существу мы рассматриваем физические аспекты размерности классического пространства-времени. Лишь незначительный шаг отделяет нас от более широкого подхода — от постановки задачи физического обоснования 4-мерности пространства-времени*.

* Появление представлений о многомерных пространствах (при $n > 3$) следует рассматривать как важную веху в развитии учения о структуре физического пространства. Пожалуй, рождение этой идеи можно поставить в один ряд с открытием неевклидовых геометрий. Трудно сказать, кому здесь принадлежит приоритет. Вполне отчетливо идеи многомерности были сформулированы в прошлом веке в работах Грассмана и Кэли. Довольно глубокие соображения о размерности физического пространства можно найти в работах Римана [14, с. 18] и Маха [202]. Между тем задолго до них Лагранж рассматривал в механике 4-мерные конфигурационные пространства. Этот ход мысли сыграл большую роль в формировании идеи о 4-мерном пространственно-временном многообразии теории относительности.

Взглянем на размерность с позиций реляционного подхода к пространству-времени, понимаемому как совокупность отношений, в которые вступают друг с другом материальные образования, в частности частицы (в классическом смысле). В общем случае существования в мире N частиц между ними можно было бы ожидать $N!$ независимых (симметричных) отношений. При возможности погружения частиц в n -мерное многообразие (пространство) независимых отношений становится только nN . В физическом пространстве реализуется случай $n=3$. Это одно из наиболее удивительных и загадочных свойств нашего мироздания! Можно ли его объяснить, исходя из каких-то более элементарных физических понятий и закономерностей?

В современной теории факт 3-мерности пространства (или 4-мерности пространства-времени) обычно постулируется. Однако в настоящее время уже очевидно, что пространство не является априори вместилищем материи, а в своих существенных чертах определяется физическими свойствами материи (или обязано им). Это достаточно ярко продемонстрировали революции в физике, происшедшие за последние восемь десятилетий. Перед современной теоретической физикой поставлен вопрос о создании такой физической картины мира, в основу которой были бы положены закономерности и понятия, берущие начало из физики микромира. В такой теории классические пространственно-временные представления, справедливые для макроскопических явлений, не должны быть заложены с самого начала, а должны возникать со всеми вытекающими из них свойствами на определенном этапе развития теории как нечто вторичное. Это относится и к появлению понятия размерности. Представляется, что построение такой теории (или достаточно оформленных ее фрагментов) явилось бы физическим обоснованием постулата пространственного 3-мерия, а также вскрыло бы корни 5-мерия и природу ограничений, налагаемых на пятое измерение.

Для реализации такой программы чрезвычайно важно суметь выявить те основные закономерности, которые следует заложить в фундамент новой теории, в частности усмотреть истоки понятия пространственной размерности. Конструктивным путем поиска является анализ действия физических понятий и законов в пространствах различного числа измерений. Те из них, которые справедливы лишь в 4-мерном (5-мерном) пространстве-времени и не допускают обобщения на случай других размерностей, можно считать наиболее тесно связанными с искомыми более глубокими понятиями и закономерностями, ответственными за макроскопическую размерность. Во всяком случае, такая методика может помочь выявить главное и отсеять второстепенное.

В этой главе кратко рассмотрен указанный путь исследований. Здесь использован довольно обширный накопившийся к сегодняшнему дню материал [203—222], можно сказать, своеобразная коллекция особенностей физического мира в пространстве-времени четырех измерений по сравнению с аналогичными

теориями в многообразиях иного числа измерений. Несмотря на то что пока трудно окончательно ответить на поставленный выше вопрос, из совместного рассмотрения этих особенностей вырисовывается любопытная картина уникальности нашего мира и представляется возможность выдвижения новых гипотез.

Далее везде $n+1$ означает размерность пространственно-временных многообразий с сигнатурой $(+ - - \dots)$, причем пространственные координаты полагаем равноправными.

12.2. ОБЩЕКОВАРИАНТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ 4-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1. 4-Мерные многообразия имеют наименьшую размерность, начиная с которой теория Эйнштейна в вакууме содержательна [8, с. 108]. Действительно, многообразие искривлено, если тензор Римана — Кристоффеля отличен от нуля. В многообразиях трех измерений $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ однозначно выражается через тензор Риччи согласно (6.11), а в многообразиях двух измерений — через скалярную кривизну:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = - (1/2) R (g^{\mu}_{\beta} g_{\alpha\nu} - g^{\mu}_{\alpha} g_{\nu\beta}). \quad (12.1)$$

Следовательно, многообразия с тремя измерениями в вакууме согласно уравнениям Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$ могут быть только плоскими.

2. Четыре — минимальная размерность, при которой конформно-инвариантный тензор Вейля $C^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ нетривиален. В многообразиях трех измерений вследствие (6.11) тензор Вейля тождественно равен нулю, его роль выполняет конформно-инвариантный тензор [41, с. 254]

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + (1/4) (g_{ik} \nabla_j R - g_{ij} \nabla_k R). \quad (12.2)$$

3. 4-Мерные многообразия являются единственными, в которых вторая пара уравнений Максвелла в вакууме конформно-инварианта [206]. Действительно, учитывая содержание § 1.9, вторую пару уравнений Максвелла можно записать в виде

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \exp(-4\sigma) [F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\sigma_{,\nu} F^{\mu\nu} + (n+1)\sigma_{,\alpha} F^{\mu\alpha}] = 0. \quad (12.3)$$

Справа члены с $\sigma_{,\nu}$ сокращаются только при $n+1=4$.

Учитывая, что в 5-мерной теории $F_{\mu\nu}$ возникает как монадный физико-геометрический тензор при 1+4-расщеплении многообразия, данную особенность следует отнести к выделенности 5-мерия. Дополнительный член в 5-мерных уравнениях (11.57) не нарушает данного утверждения.

4. К особенностям 4-мерного пространства-времени можно отнести наличие простой алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна. Большие размерности уже не допускают

в общем случае расщепление характеристической матрицы на аналогичные блоки.

5. К формальным особенностям 4-мерия допустимо отнести возможность сопоставления антисимметричным тензорам четного ранга сопряженных им тензоров того же ранга [207]:

$$\overset{*}{F}^{\mu\nu} = (1/2) E^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}; \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = (1/2) E_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}. \quad (12.4)$$

Ни одна из указанных особенностей не отвергает 5-мерие.

12.3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ 4-МЕРИЯ В СТАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

По-видимому, впервые Кантом [208] было отмечено, что законы обратных квадратов для гравитационной и электростатической сил связаны с 3-мерностью нашего пространства. Это легко выводится из 3-мерных уравнений Лапласа для потенциалов соответствующих полей. В гипотетической теории, описывающей явления в плоском пространстве иной размерности, естественно также ожидать наличия сил, потенциалы которых V удовлетворяют многомерному (по числу измерений) уравнению Лапласа. Его решение и центральную силу находят в виде

$$V = \alpha/r^{n-2}; \quad \mathcal{F} = -\partial V/\partial r \sim 1/r^{n-1}, \quad (12.5)$$

где α — постоянная; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Заметим, что аналогичное свойство изменения гипотетических гравитационных взаимодействий $\sim r^{-(n-1)}$ имеет место в «ОТО» в многообразии $n+1$ измерений. Так, понимая в $n+1$ -мерном многообразии под сферически-симметричными метриками (в координатах кривизн)

$$ds^2 = \exp \nu dx_0^2 - \exp \lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (12.6)$$

где $r = x^1$;

$$d\Omega^2 = dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 + \sin^2 x_2 \sin^2 x_3 dx_4^2 + \dots + \prod_{l=2}^{n-1} \sin^2 x_l dx_n^2,$$

можно показать [209], что статическое решение вакуумных «уравнений Эйнштейна» имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r^{n-2}}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r^{n-2})} - r^2 d\Omega^2. \quad (12.7)$$

В частности, анализ 5-мерных уравнений геодезических в такой метрике показывает наличие «силы притяжения», изменяющейся обратно пропорционально кубу расстояния от источника и более высоким степеням r . Это свидетельствует о необходимости выделения пятой координаты с помощью условия цилиндрично-

сти или условий, указанных в § 11.4, которые сохраняют закон убывания сил $\sim 1/r^2$.

С законом убывания потенциалов (12.5) связан ряд особенностей 4-мерного пространства-времени.

1. Только в пространстве-времени четырех и менее измерений возможны устойчивые атомы. Этот вывод можно сделать, анализируя уравнение Шредингера в плоском пространстве-времени $n+1$ измерений [210]*. Строгий анализ основан на теоремах о спектральных свойствах дифференциальных операторов и приводит к следующим результатам:

а) при $n \geq 5$ отрицательная часть спектра энергии простирается до $-\infty$, что означает падение электрона на ядро;

б) при $n=4$ возможны различные случаи в зависимости от константы $\gamma = (\mu/\hbar^2)Ze^2 - 3/4 + l(l+1)$, где Ze — заряд ядра; l — орбитальное квантовое число. Если $\gamma > 1/4$, то отрицательная часть спектра простирается до $-\infty$; при $\gamma \leq -3/4$ отрицательные уровни энергии отсутствуют; при $-3/4 < \gamma \leq 1/4$ задача не имеет решения, т. е. или не существуют отрицательные уровни энергии, или имеется один такой уровень, который может принимать все возможные значения от 0 до $-\infty$.

2а. Круговые орбиты пробных тел в «ньютоновом» гравитационном поле в плоском пространстве-времени $n+1$ измерений устойчивы при $n \leq 3$ и неустойчивы при $n \geq 4$ [212]. Это следует из анализа эффективной потенциальной энергии $V(u)$ в законе сохранения энергии, записанном с помощью первой формулы Бине:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \sigma_0^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - kMmu^{n-2} &\equiv \\ &\equiv \frac{m\sigma_0^2}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + V(u) = E_0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

2б. Вывод об устойчивости круговых орбит пробных тел только при $n \leq 3$ можно получить также, рассматривая уравнения геодезических в метриках (12.7) [213], где аналогичная (12.8) формула имеет вид [ср. с (4.31), (11.67)]:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \sigma_0^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] &= \frac{mc^2}{2} (V_0^2 - 1) + \\ &+ kMmu^{n-2} + \frac{kM}{c^2} mu^n \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Указанные особенности не противоречат 5-мерной теории лишь при дополнительных условиях, выделяющих пятую координату.

* Впервые такую задачу на основе теории квантования Бора решал Эренфест [211], который пришел к выводу о невозможности существования атомной материи в многомерном пространстве с $n > 4$.

**12.4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ
В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ
n+1 ИЗМЕРЕНИЙ**

1. Условие справедливости принципа Гюйгенса выделяет пространства нечетной размерности ($n=3, 5, 7 \dots$) [214]. Принцип Гюйгенса, первоначально сформулированный для построения фронта световой волны, в настоящее время имеет несколько формулировок. Одна из наиболее широко распространенных и довольно общих приведена в книге [215, с. 686]: «Принцип Гюйгенса есть утверждение о том, что значение решения задачи Коши для волнового уравнения зависит только от границы области зависимости на плоскости $x^0=0$, т. е. что оно зависит только от начальных значений решения φ и его производных на границе основания $r=x^0$ характеристического конуса, но не от начальных значений внутри этого основания».

Для волнового уравнения в плоском пространстве-времени

$$\partial^2 \varphi / \partial x_0^2 - \nabla_{(n)}^2 \varphi = 0 \quad (12.10)$$

в [215] показано:

а) в случае *нечетного* n решение можно представить в виде

$$\varphi(x^0, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_0^2} \right)^{\frac{n-3}{2}} [x_0^{n-2} Q(x^0, \mathbf{x})], \quad (12.11)$$

где $\frac{\partial}{\partial x_0^2} \equiv \frac{1}{2x^0} \frac{\partial}{\partial x^0}$; $Q(r, \mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int \int_{l^2=1} \Psi(\mathbf{x} - l r) d^n l$ — некоторая функция; l — единичный n -вектор. Отсюда следует, что $\varphi(x^0, \mathbf{x})$ зависит от интеграла по поверхности $n-1$ измерений, т. е. в пространствах нечетного числа измерений выполняется сформулированный принцип Гюйгенса;

б) в случае *четного* n функция $\varphi(x^0, \mathbf{x})$ записывается в виде

$$\varphi(x^0, \mathbf{x}) = \frac{x^0}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_0^2} \right)^{\frac{n-3}{2}} (x_0^{n-3} H), \quad (12.12)$$

где функция $H = \int_0^{x^0} \frac{r Q(r, \mathbf{x})}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} dr$ содержит интегрирование по n -мерной области, т. е. принцип Гюйгенса не имеет места.

2. Трехмерные пространства выделяются из множества нечетномерных пространств дополнительным требованием сферической симметрии решения волнового уравнения, т. е. условием [203]

$$\varphi(x^0, \mathbf{x}) = A(r) f(r \pm x^0), \quad (12.13)$$

где $f(r \pm x^0)$ — произвольная функция. Действительно, подставляя (12.13) в уравнение (12.10), находим:

$$Af'' = A''f + 2A'f' + Af'' + \frac{n-1}{r}(A'f + Af'). \quad (12.14)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r . Вследствие произвольности функции f можно приравнять слева и справа коэффициенты при f , f' , f'' . В результате получим уравнения для функции $A(r)$:

$$[(n-1)/r]A' + A'' = 0; \quad (12.15)$$

$$[(n-1)/r]A + 2A' = 0. \quad (12.16)$$

Из (12.16) находим $A = A_0 r^{-\frac{n-1}{2}}$, где A_0 — постоянная интегрирования. Подставляя это решение в (12.15), получаем условие на размерность: $n+1 = 2(n-1)$, т. е. $n=3$. Сферическую симметрию решения (12.13) можно понимать как условие неискажаемости переносимых волной сигналов.

3. Квантовая электродинамика перенормируема в пространствах с размерностью $n \leq 3$. Сходимость или расходимость матричного элемента произвольного процесса квантовой электродинамики зависит, грубо говоря, от числа N импульсов, входящих в подынтегральное выражение. В общем случае диаграмма Фейнмана соответствующего процесса имеет F_l внешних фермионных линий, F_i внутренних фермионных линий, B_l внешних фотонных линий, B_i внутренних фотонных линий, C вершин. Вид лагранжиана взаимодействия электромагнитного и спинорного полей $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu$ налагает два условия на числа F , B и C :

$$2F_i + F_l = 2C; \quad 2B_i + B_l = C. \quad (12.17)$$

Используя правила Фейнмана и (12.17), легко подсчитать число импульсов в подынтегральном выражении произвольного матричного элемента в пространстве n измерений:

$$N = \frac{n-3}{2}C - \frac{n}{2}F_l - \frac{n-1}{2}B_l + n + 1. \quad (12.18)$$

Если $N < 0$, то следует ожидать сходимости матричного элемента, если $N \geq 0$, то матричный элемент процесса расходится.

Для $n > 3$ величина N зависит от числа вершин C , причем число вершин дает положительный вклад в N . Это значит, что для любого процесса можно подобрать матричный элемент с таким числом C , что получится расходящееся значение. Для устранения всех расходимостей требуется сколь угодно большое число бесконечных констант, т. е. теория с $n > 3$ неперенормируема.

Для $n=3$ сходимость или расходимость матричного элемента не зависит от числа вершин C , а определяется только числом внешних линий. В этом случае имеется лишь конечное число (10) типов диаграмм с расходящимися матричными элементами. Из них физически значимы только четыре. Выбором конечного числа бесконечных констант, как известно, теорию можно перенормировать (избавиться от расходимостей).

Для $n < 3$ величина N зависит от числа вершин C , причем число вершин дает отрицательный вклад в N . Это значит, что для любого процесса выбором матричного элемента с соответствующим числом C всегда можно получить сходящееся значение.

Указанные факторы также не противоречат 5-мерной теории с дополнительными условиями на пятую координату. В пункте 3: следует иметь в виду, что векторный потенциал A_μ можно понимать как проявление компоненты 5-метрики $G_{5\mu}$.

12.5. ЖЕСТКОСТЬ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ. ЧИСЛО ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятие *жесткости* системы дифференциальных уравнений было введено Эйнштейном [18, с. 778] в связи с проблемой построения единой теории поля. Поясним это понятие.

Пусть задана система дифференциальных уравнений для N полевых функций φ_A . Число независимых аргументов функций φ_A равно размерности многообразия $n+1$. Рассмотрим класс решений этой системы, допускающих разложения в ряд Тейлора в некоторой точке $\{x_0^\alpha\}$. Подставляя эти разложения в уравнения поля, получаем тождества, которые можно понимать как некоторую совокупность соотношений, связывающих коэффициенты разложения Тейлора для φ_A . Часть коэффициентов разложения можно считать произвольными, тогда как остальные находятся из полученных соотношений. Пусть $Z(m)$ — число произвольных коэффициентов в m -м порядке разложения всех полевых функций (имеются в виду коэффициенты разложения, стоящие перед произведениями из m сомножителей типа $x^\alpha - x_0^\alpha$). Тогда при достаточно больших m число $Z(m)$ можно представить в виде

$$Z(m) = [(n+m)!/n!m!] (Z^{(0)} + Z^{(1)}/m + Z^{(2)}/m^2 + \dots), \quad (12.19)$$

где в скобках записан ряд по степеням $1/m$, а коэффициенты $Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)} \dots$ не зависят от m . Для полевых функций реальных физических полей (при $n=3$) $Z^{(0)} = 0$, а $Z^{(1)}$ называют коэффициентом жесткости соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Укажем коэффициенты $Z^{(0)}, Z^{(1)}$ уравнений основных физических полей.

Скалярное безмассовое поле:

$$Z_{\varphi}^{(0)} \equiv 0; \quad Z_{\varphi}^{(1)} = 2n. \quad (12.20)$$

Электромагнитное поле

$$Z_F^{(0)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24};$$

$$Z_F^{(1)} = \frac{n(n-1)}{12} [12 - n(n+1)(n-4)]. \quad (12.21)$$

Метрика многообразия $n+1$ измерений, подчиняющаяся соответствующим «уравнениям Эйнштейна»:

$$Z_g^{(0)} \equiv 0; \quad Z_g^{(1)} = n(n+1)(n-2). \quad (12.22)$$

Эйнштейн полагал, что для объединения теорий электромагнетизма и гравитационного поля необходимо равенство коэффициентов жесткости уравнений этих полей, т. е. должно выполняться соотношение

$$[n(n-1)/12][12 - n(n+1)(n-4)] = n(n+1)(n-2), \quad (12.23)$$

что возможно лишь при $n=0$ и $n=3$. При $n=3$

$$Z_F^{(0)} = Z_g^{(0)} = 0; \quad Z_F^{(1)} = Z_g^{(1)} = 12. \quad (12.24)$$

Любопытно отметить, что коэффициент жесткости уравнений Вейля для нейтринного поля в 4-мерном пространстве-времени принимает то же значение [216]: $Z_N^{(1)} = 12$.

Оказывается [217], значения коэффициентов жесткости $Z^{(1)}$ тесно связаны со свойствами решения задачи Коши для соответствующего поля. Действительно, характеризуя число произвольных коэффициентов в разложении общего решения, $Z^{(1)}$ указывает, насколько сильно система дифференциальных уравнений ограничивает класс допустимых решений. Начальные данные Коши, задаваемые на некоторой гиперповерхности, также характеризуют произвол общего решения. Пусть K_n — число начальных данных Коши, зависящих от n аргументов (в общем случае, в частности, для гравитационного поля начальные данные Коши включают в себя также функции меньшего числа аргументов [41]), тогда имеет место соотношение [217]: $Z^{(1)} = nK_n$.

Неоднократно отмечалась связь между числом начальных данных Коши и числом S динамических степеней свободы соответствующей физической системы; $S = K_n/2$. Тем самым коэффициент жесткости определяет и число динамических переменных:

$$S = K_n/2 = Z^{(1)}/2n. \quad (12.25)$$

Вспоминая, что в пространстве-времени четырех измерений гравитационное, электромагнитное и нейтринное поля имеют одинаковые коэффициенты жесткости $Z^{(1)} = 12$, опять приходим к вы-

воду, что все эти поля обладают двумя динамическими степенями свободы ($S=2$).

В 5-мерном римановом многообразии согласно (12.22) $Z^{(4)}=40$, следовательно, из (12.25) находим, что $S=5$. Это соответствует двум гравитационным, двум электромагнитным степеням свободы и одной степени свободы скалярного поля ϕ .

12.6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МНОГООБРАЗИЯХ С СИГНАТУРОЙ (+ — — ...).

1. До сих пор вопрос о размерности математической модели физического пространства-времени можно было понимать так: берем поле действительных чисел R^1 и на его основе строим простую «надконструкцию» — $n+1$ -мерное векторное пространство R^{n+1} . Далее ставится вопрос: чем обусловлен выбор $n=3$? Но можно подходить к данной проблеме иначе. Можно считать, что сути пространственно-временных отношений в большей степени отвечает иная надконструкция над полем действительных чисел — некоторая алгебра также с двумя бинарными операциями, как и поле действительных чисел*. Если наложить на алгебру условия существования и однозначности операции, обратной произведению, и конечномерности, то выделенными оказываются четыре алгебры с размерностями $n+1=1, 2, 4, 8$. Первые три размерности имеют по одному «представителю», что составляет содержание теоремы Фробениуса. Это коммутативные алгебры действительных ($n+1=1$), комплексных ($n+1=2$) чисел и некоммутативная алгебра кватернионов ($n+1=4$). Добавление к ним одного из представителей размерности восемь — единственной альтернативной ассоциативной алгебры (октав) — составляет содержание обобщенной теоремы Фробениуса. Перечисленные алгебры являются гиперкомплексными системами, органически содержащими в себе сигнатуру (+ — — ...).

С помощью алгебры кватернионов удастся построить хорошую модель 4-мерных пространственно-временных отношений (см., например [219]). Чисто мнимые кватернионы дают модель 3-мерного классического пространства R^3 ; алгебраическое произведение двух мнимых кватернионов дает в качестве действительной части скалярное, а в качестве мнимой — векторное произведение соответствующих векторов в R^3 .

2. Различие в свойствах пространственно-временных многообразий различной размерности проявляется также при исследовании в них дискретных преобразований: пространственного отра-

* Эддингтон [218] на основе алгебраических соображений разрабатывал «фундаментальную теорию», претендовавшую на объяснение 3-мерности физического пространства. Однако эта теория, опиравшаяся на алгебраические E -структуры Эддингтона, осталась недоработанной и не завоевала всеобщего признания.

жения (P -преобразование), отражения времени (T -преобразование) и зарядового сопряжения (C -преобразование). Рассматривая эти преобразования на примере уравнений Дирака для свободного спинорного поля, можно прийти к выводу, что операцию отражения времени, оставляющую инвариантными уравнения Дирака, можно определить лишь в многообразиях с размерностями, отличающимися от $n+1=4k-1$. Аналогично операцию зарядового сопряжения, относительно которой инвариантны уравнения Дирака, можно определить лишь для пространственно-временных многообразий размерностей, отличных от $n+1=4k+1$.

Таким образом, в пространственно-временных многообразиях нечетной размерности по указанным двум причинам теряет смысл полная совокупность преобразований P , T , C . Следовательно, о справедливости СРТ-теоремы можно говорить лишь в многообразиях четной размерности [220—222].

Однако эти соображения относятся к принятым в современной теории поля определениям дискретных операций. Как было показано в § 11.4, в 5-мерной теории пятая компонента импульса связана с электрическим зарядом. Это позволяет определить операцию зарядового сопряжения более естественно, как отражение пятой координаты. Тогда 5-мерное уравнение Дирака инвариантно относительно всех трех дискретных преобразований в отдельности, и справедливость СРТ-теоремы остается в силе [223].

Заметим, что для записи уравнений Дирака в 5-мерном многообразии достаточно набора известных матриц Дирака γ_μ . В качестве пятой компоненты будет выступать матрица $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Можно сказать, что в 4-мерном пространстве-времени одна из матриц полного набора антикоммутирующих матриц остается неиспользованной.

Подводя итог изложенному, можно с полной определенностью утверждать, что к настоящему времени вопрос о системах отсчета, о сути методов их задания и их роли в современной теории гравитации в принципе решен. Несмотря на то, что тетрадный метод (формализм) уже использовался в 20—30-х годах, необходимым был важный период развития монадного формализма в 60—70-х годах. Дело в том, что в тетрадном формализме из-за существенной 4-мерной симметрии затушевывался, оставался в тени важный комплекс понятий, определяющих характер движения системы отсчета. Кроме того, в монадном формализме важную роль играют монадные операторы дифференцирования, позволяющие особенно компактно записывать и интерпретировать дифференциальные законы. В тетрадном формализме такие операторы практически не использовались.

Осталась позади дискуссия первой половины 70-х годов: какой формализм важнее и первичнее: тетрадный, являющийся 4-кратным повторением монадного, или монадный, представляющий собой усеченный тетрадный. Время показало надуманность (искусственность) такой постановки вопроса. Необходимы и важны оба формализма. Вопрос о важности и целесообразности применения того или иного формализма всегда следует рассматривать с позиций конкретно поставленной задачи или проблемы. Ответ диктуется тем, что в задаче доминирует: выделенность одного направления движения системы отсчета или 4-мерная пространственно-временная симметрия. В процессе сопоставления этих двух формализмов были выявлены и детально развиты еще два промежуточных: диадный и диарный. Целесообразность их применения также должна определяться симметрией поставленной задачи.

Как уже отмечалось в гл. 2, кроме континуальных (монадных, тетрадных и др.) систем отсчета имеются методы, основанные на задании систем отсчета с помощью отдельной временно-подобной мировой линии или трубки таких линий: хроногеометрия и система отсчета одиночного наблюдателя. В последнее время был проведен цикл исследований [110, 116], позволивших достаточно хорошо выявить соответствие между этими методами, с одной стороны, и монадным и тетрадным, с другой стороны.

Осталось широкое поле деятельности для применения методов задания систем отсчета при решении конкретных задач (см. ч. II). Конечно, описанными в ч. II и гл. 9 эффектами далеко не исчерпываются следствия ОТО. Так, в книге [79] сделан обзор изучавшихся в литературе эффектов (как реальных, так и представляющих пока лишь академический интерес). Их уже насчи-

тывается более сотни. Наверняка будут выявлены и многие другие. Рассмотрение таких эффектов нуждается в грамотном использовании понятий систем отсчета. Особенно это важно при разработке гравитационных экспериментов. Здесь существуют немалые трудности описания конкретно используемой системы отсчета, однако они имеют лишь технический характер.

Не менее широка область применения методов описания систем отсчета при исследовании классических проблем ОТО. Еще раз обратим внимание на вопрос о физической значимости монадных комплексов энергии, их областей применимости, на важную роль выбора системы отсчета при решении задач об излучении гравитационных (гравиинерциальных) волн и их воздействии на прибор.

Следует особо подчеркнуть, что применение методов задания системы отсчета для разработки проблемы совмещения принципов квантовой теории и ОТО имеет ограниченные рамки. Как было показано в гл. 10, эти методы приложимы для выделения динамических степеней свободы, подлежащих дальнейшему квантованию. В применении к моделям квантования Вселенной монадный метод с нормальной конгруэнцией эффективен именно как метод принципиального расщепления 4-мерного многообразия на совокупность пространственных сечений и ортогональное им время. При рассмотрении закономерностей ОТО в микромире, конечно, понятия классических систем отсчета теряют силу. Здесь возникают интересные вопросы о соответствии понятий микромира и классических систем отсчета. Если окажется возможным сформулировать теорию на основе микропонятий, из которых посредством неких предельных переходов формулируются классические понятия, то не исключено, что в ее рамках будет использовано понятие «квантовые системы отношений», в каком-то смысле аналогичное понятию классических систем отсчета.

Наконец, перед исследователями лежит целина непознанного о природе размерности нашего физического многообразия. В книге речь шла о выделении из 4-мерных (5-мерных) многообразий сечений меньшей размерности. Но что определяет 4-мерие классического пространства-времени? Почему так привлекательна 5-мерная теория поля? Обсужденные в гл. 12 особенности нашего физического мира могут служить лишь предпосылками к выбору отправной точки для глубокого исследования в этой сулящей необъятные перспективы области науки.

В § 11.4 показана принципиальная возможность описания электрически заряженной материи посредством компоненты 5-метрики $G_{55} = -\varphi^2$ при условии зависимости φ от пятой координаты. Сделаем следующий шаг в развитии этой теории — конкретно покажем, как от φ перейти к стандартным волновым функциям заряженного скалярного поля Ψ .

В излагаемом варианте 5-мерной теории используется условие своеобразной цикличности (замкнутости) 5-мерного многообразия по пятой координате с очень малым периодом. Компонента метрики G_{55} должна быть связана с Ψ следующим образом:

$$\sqrt{-G_{55}} = \varphi = [1 + \phi + b\Psi \exp(-i\alpha x^5) - b\Psi^* \exp(i\alpha x^5)]^{2/3}, \quad (\text{П.1})$$

где α и b — некоторые постоянные, которые будут определены позже; Ψ^* — функция, комплексно-сопряженная Ψ , причем, конечно, Ψ зависит лишь от четырех пространственно-временных координат; ϕ — некая действительная скалярная функция, соответствующая возможности ввода фундаментального скалярного поля. Таким образом, поле обычной заряженной материи вводится через чисто мнимую добавку к единице в φ , а фундаментальное скалярное поле — через действительную добавку.

Дальнейшая задача состоит в получении уравнений поля типа общепринятых на основе формулы (П.1). Это можно сделать двумя способами: либо подставляя (П.1) в 15 5-мерных уравнений (11.56)–(11.58) (с последующим усреднением по периоду пятой координаты), либо выводя уравнения вариационным методом из плотности функции Лагранжа. Пойдем по второму пути, так как он позволяет получить вместо одного пятнадцатого три новых уравнения: для волновых функций Ψ , Ψ^* и фундаментального скалярного поля ϕ . В качестве плотности функции Лагранжа выберем плотность 5-мерной скалярной кривизны $\sqrt{G}{}^5R$. Произведя процедуры конформного преобразования (11.39) и 1+4-расщепления, из (11.20) найдем:

$$\begin{aligned} \sqrt{G}{}^5R = & -\varphi^3 \sqrt{-g} [{}^4R + (k/c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - 8g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{+} \nabla_{\beta}^{+} \varphi/\varphi - \\ & - 4g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{+} \varphi \nabla_{\beta}^{+} \varphi/\varphi^2 + 8\varphi_{,5,5}/\varphi + 4\varphi_{,5}^2/\varphi^2], \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где использованы те же обозначения, что и в § 11.4. Переобозначим $\varphi^{3/2} = \chi$. тогда действие S геометрической системы будет иметь вид

$$S = \int \int \sqrt{G}{}^5R dx^5 d^4x \equiv \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\mathcal{L} = - \int [\chi^2 ({}^4R + (k/c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) - (16/3) g^{\alpha\beta} \chi \nabla_{\alpha}^{+} \nabla_{\beta}^{+} \chi + (16/3) \chi \chi_{,5,5}] dx^5. \quad (\text{П.4})$$

Существенным моментом излагаемой теории является допущение, что пятая координата не наблюдается вследствие того, что константа α очень велика, т. е. период зависимости величин от x^5 чрезвычайно мал по сравнению с теми расстояниями, для которых имеют место стандартные уравнения поля. Тогда естественно предположить, что обычно мы имеем дело с уравнениями, усредненными по x^5 . Исходя из этого проинтегрируем (П.4) по периоду пятой координаты

$T = 2\pi/\alpha$. Учитывая, что $\int_0^T \exp(in\alpha x^5) dx^5 = 0$ при $n = -2, -1, 1, 2$, находим, что члены, однородные по Ψ^* и Ψ , исчезают. В итоге имеем:

$$\sqrt{-g} \mathcal{L} = - (2\pi/\alpha) \sqrt{-g} \{ [(1 + \phi)^2 - 2b^2 \Psi^* \Psi] [{}^4R + (k/c^4) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] -$$

$$-(32/3) b^2 (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha^+ \Psi^* \partial_\beta^+ \Psi - \alpha^2 \Psi^* \Psi) + (16/3) g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\partial_\beta^+ \Psi^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} + i \frac{2\sqrt{k}\alpha}{c^2} A_\beta \right) \Psi^*; \quad \partial_\beta^+ \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} - i \frac{2\sqrt{k}\alpha}{c^2} A_\beta \right) \Psi. \quad (\text{П.6})$$

Выражение (П.5) во многих отношениях соответствует стандартной плотности лагранжиана взаимодействующих гравитационного, электромагнитного и электрически заряженного скалярного полей.

Вторая пара уравнений Максвелла получается варьированием (П.5) по A_μ . Сравнивая его со стандартными уравнениями Максвелла, находим значения констант:

$$b^2 = 3\kappa\hbar^2/32m; \quad \alpha = ec/2\sqrt{k}\hbar, \quad (\text{П.7})$$

где \hbar — постоянная Планка; k — ньютонова и κ — эйнштейновская гравитационные постоянные; e — заряд электрона; m — масса заряженного скалярного поля. Окончательно вторая пара уравнений Максвелла в 5-мерной теории записывается в виде

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \{ [(1+\phi)^2 - (3\kappa\hbar^2/16m) \Psi^* \Psi] F^{\mu\nu} \} = \\ = (4\pi i/c) (e\hbar/2m) g^{\mu\nu} (\Psi^* \partial_\nu^+ \Psi - \Psi \partial_\nu^+ \Psi^*). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Легко видеть, что в классическом пределе (когда полагаем $\Psi = \sqrt{\rho} \exp(iS/\hbar)$, где S — классическое действие; ρ — плотность вероятности нахождения частицы, и устремляем \hbar к нулю) эти уравнения совпадают с общепринятыми уравнениями (1.42). Таким образом, из этой 5-мерной теории получаются уравнения Максвелла с электрическим током геометрического происхождения, чего не было в теории Калуцы и во всех предыдущих вариантах 5-мерных теорий.

Уравнения Эйнштейна получаются варьированием (П.5) по $g^{\mu\nu}$. После стандартных вычислений, учитывая (П.7), находим их в виде

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} {}^4R = - (2k/c^4) [F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - (1/4) g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + \\ + [(1+\phi)^2 - (3\kappa\hbar^2/16m) \Psi^* \Psi]^{-1} \{ (\kappa\hbar^2/2m) [\partial_\mu^+ \Psi^* \partial_\nu^+ \Psi + \partial_\nu^+ \Psi^* \partial_\mu^+ \Psi - \\ - g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha^+ \Psi^* \partial_\beta^+ \Psi - (cm/\hbar)^2 \Psi^* \Psi)] - (3\kappa\hbar^2/16m) [\nabla_\mu \nabla_\nu (\Psi^* \Psi) - \\ - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta (\Psi^* \Psi)] - (16/3) [\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}] + \\ + \nabla_\mu \nabla_\nu (1+\phi)^2 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta (1+\phi)^2 \}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

В классическом пределе эти уравнения переходят в стандартные уравнения Эйнштейна с обычными тензорами энергии-импульса электромагнитного поля и пылевидной материи, а также с тензором энергии-импульса фундаментального поля ϕ справа (последнее можно и не вводить). Напомним, что Эйнштейн неоднократно высказывал неудовлетворенность феноменологическим характером правой части своих уравнений. Он стремился получить ее из геометрических соображений. Таким образом, полученный здесь результат можно рассматривать как реализацию этих намерений.

Уравнение для заряженного скалярного поля Ψ получается варьированием (П.5) по Ψ^* (и сопряженное — варьированием по Ψ):

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^+ \nabla_\beta^+ \Psi - (3/16) [{}^4R + (k/c^4) F_{\alpha\alpha} F^{\alpha\beta}] \Psi + (mc/\hbar)^2 \Psi = 0. \quad (\text{П.10})$$

Это уравнение типа Клейна—Фока для комплексного скалярного поля (с отличной от нуля массой покоя), взаимодействующего с электромагнитным полем. Его особенностями являются наличие коэффициента $3/16$ перед 4R и инварианта $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

Наконец, уравнение для фундаментального безмассового скалярного поля ϕ можно получить, варьируя (П.5) по Φ :

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(1+\phi) - (3/16)[{}^4R + (k/c^4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}](1+\phi) = 0. \quad (\text{П.11})$$

Существенным следствием уравнений (П.8) — (П.10) является жесткая связь между электрическим зарядом e , гравитационной постоянной k и массой покоя заряженной скалярной частицы

$$m = e/2\sqrt{k}. \quad (\text{П.12})$$

При e , равном заряду электрона, имеем $m \sim 10^{-6}$ г — это очень большая масса по сравнению с массами реальных элементарных частиц. Но получения реальных масс (или их спектра) трудно было ожидать от подобной теории. Для этого нужно учитывать весь комплекс взаимодействий и симметрий микромира. Напомним, что в стандартной теории массы обычно вводятся феноменологически или при гипотезе об их полевом происхождении для них получаются бесконечно большие значения. В квантовом варианте обычной теории необходима перенормировка — вычитание из одного бесконечного значения другого. В 5-мерной теории вопрос стоит о вычитании одной большой, но конечной, массы из другой, также конечной. Таким образом, чтобы получить наблюдаемые массы, необходимо ввести в теорию некие дополнительные факторы, которые бы соответствовали перенормировке затравочной массы (П.12).

В частности, можно допустить, что физическая реальность диктует использовать для ее описания некие дополнительные факторы, которые эффективно можно учесть путем увеличения размерности, как минимум, еще на одно измерение. При этом, конечно, следует наложить специальные условия на вид самой 6-метрики ${}^6G_{MN}$ и на характер ее зависимости от координат. Например, это можно сделать, выбрав ${}^6G_{MN}$ в форме следующих матриц:

$${}^6G_{MN} = \begin{pmatrix} {}^5G_{AB} & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad {}^6G_{MN} = \begin{pmatrix} {}^5G_{AB} & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.13})$$

где ${}^5G_{AB}$ — ранее использованная 5-метрика; от координат x^5 и x^6 зависит только φ , причем при $\beta = \text{const}$

$$\varphi = [1 + \phi + b\Psi \exp(-i\alpha x^5 - i\beta x^6) - b^*\Psi^* \exp(i\alpha x^5 + i\beta x^6)]^{2/3}$$

и

$$\varphi = [1 + \phi + \tilde{b}\Psi \exp(-i\alpha x^5 - i\beta x^6) - \tilde{b}^*\Psi^* \exp(i\alpha x^5 + i\beta x^6)]^{1/2}$$

соответственно. Заметим, что шестая координата временно-подобна. Непосредственные вычисления, аналогичные изложенным, приводят к значению массы

$$m = (\hbar/c) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(e^2/4k) - (\hbar\beta/c)^2}. \quad (\text{П.14})$$

При этом вид уравнений (П.8) — (П.11) остается без изменения, нужно лишь везде подставить перенормированное значение массы (П.14) и во втором варианте (П.13) выбора 6-метрики ${}^6G_{MN}$ везде заменить $3/16$ коэффициентами $1/5$, так как в этом варианте $\tilde{b}^2 = 4\pi k \hbar^2 / 5mc^4$. Таким образом, подбирая значение β , можно получить массу покоя любой реальной частицы.

В настоящий момент все более популярной становится программа «большого объединения» всех известных полей и взаимодействий. В ряде работ этого направления обращается внимание на теорию Калуцы; по ее «образу и подобию» разрабатываются варианты многомерных теорий вплоть до 11 измерений [224]. В связи с этим данную 5-мерную теорию, объединяющую гравитационное, электромагнитное и скалярное взаимодействия, следует рассматривать как существенный фрагмент будущей единой теории поля.

Содержание ОТО

1. Эддингтон А. С. Теория относительности. Пер. с англ. Л. — М., Гостехиздат, 1934.
2. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
3. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
4. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
5. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. Пер. с англ. М., Мир, 1964.
7. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1967.
8. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., Наука, 1969.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.
10. Мёллер К. Теория относительности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
11. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1, 2, 3. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
12. Дирак П. А. М. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1978.

Метрические отношения и пространственно-временная симметрия

13. Фок В. А. — В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси. ТГУ, 1967, с. 5.
14. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Пер. с англ., нем., фр. М., Мир, 1979.
15. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. М., МГУ, 1963, с. 437.
16. Об основаниях геометрии. М., ГИТТЛ, 1956.
17. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1. Пер. с нем. М., Наука, 1965.
18. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 2. Пер. с нем. М., Наука, 1966.
19. Мицкевич Н. В. — В кн.: Физическая наука и философия. М., Наука, 1973, с. 303.
20. Фок В. А. — Там же, с. 73.
21. Иваненко Д., Владимиров Ю. С. Теория гравитации. Ч. 1. Введение в теорию пространства-времени. М., МГУ, 1970.
22. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
23. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Пер. с англ. М., Наука, 1981.
24. Схоутен Я. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. Пер. с нем. М., ГОНТИ, 1939.
25. Eddington A. S. — Proc. Roy. Soc., 1921, v. A99, p. 104.
26. Cartan E. — Enseign. math., 1924, v. 24, p. 5.
27. Левашев А. Е., Ушаков Е. А. — В кн.: Теория относительности и гравитация. М., Наука, 1976, с. 64.
28. Mandelstam S. — Ann. Phys., 1962, v. 19, p. 1; Proc. Roy. Soc., 1962, v. 270, p. 346.

29. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1973, с. 23.
30. **Kentaro Yano.** The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Amsterdam, North-Holland Publ., 1955.
31. **Slebodzinski W.** — Bull. Acad. Roy. Belgique, 1931. v. 17, p. 864.
32. **Вейнберг С.** Гравитация и космология. Пер. с англ. М., Мир, 1975, с. 400.
33. **Rosen N.** — Phys. Rev., 1940, v. 57, p. 147, 150, 154.
34. **Пенроуз Р.** — В кн.: Гравитация и топология. Пер. с англ. М., Мир, 1966, с. 152.

Асимметрия пространства и времени

35. **Robb A. A.** The Absolute Relations of Time and Space. Cambridge, Univ. Press, 1921.
36. **Александров А. Д.** — Вестник ЛГУ, 1953, № 11, с. 95; Вопросы философии, 1959, № 1, с. 67.
37. **Владимиров Ю. С.** — В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, ТГУ, 1967, с. 407.
38. **Reichenbach H.** Axiomatik der relativistischen Raum—Zeit—Lehre. Braunschweig, F. Viewegg Sohn, A. G., 1924.
39. **Пименов Р. И.** Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л., Наука, 1968.
40. **Mould R. A.** — Proc. Amer. Philos. Soc., 1959, v. 103, p. 485.
41. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966.
42. **Мишина А. П., Проскуряков И. В.** Высшая алгебра. Сер. СМБ. М., Наука, 1965, с. 82.
43. **Уитроу Дж.** Естественная философия времени. Пер. с англ. М., Прогресс, 1964.
44. **Блохинцев Д. И.** Пространство и время в микромире. М., Наука, 1970.
45. **Bertotti V.** — In: Estratto da Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica «E. Fermi». XX Corso, 1962, p. 174.
46. **Пенроуз Р.** Структура пространства-времени. Пер. с англ. М., Мир, 1972.
47. **Арифов Л. Я.** Общая теория относительности и тяготение. Ташкент, Фан, 1978.
48. **Papapetrou A.** — Proc. Roy. Soc., 1951, v. 209, N 1097, p. 248.
49. **Corinaldesi E., Papapetrou A.** — Ibid., p. 259.

Монадный метод задания систем отсчета

50. **Eckart C.** — Phys. Rev., 1940, v. 58, p. 919.
51. **Leaf B.** — Ibid., 1951, v. 84, p. 345.
52. **Uhlmann A.** — In: Wiss. Z. F. Schiller Univ. Jena, Math. Naturwiss. Reine. Jena, 1959/1960.
53. **Pirani F.** Le Theories relativistes de la Gravitation. Paris, CNRS, 1962, p. 85.
54. **Денен Г.** — В кн.: Эйнштейновский сборник 1969—1970. М., Наука, 1970, с. 140.
55. **Мицкевич Н. В., Захаров В. Н.** — Докл. АН СССР, 1970, т. 195, с. 321.
56. **Schmutzer E.** Relativistische Physik. Leipzig, Teubner—Verlagsgesellschaft, 1968.
57. **Зельманов А. Л.** — В кн.: Тез. докл. на 5-й Междунар. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, ТГУ, 1968, с. 115.
58. **Зельманов А. Л.** — Докл. АН СССР, 1976, т. 227, с. 78
59. **Антонов В. И.** — Изв. вузов. Сер. физ., 1974, № 6, с. 14.
60. **Massa E.** — Gen. Relativity and Gravitation, 1974, v. 5, p. 555, 573, 715.

61. **Лихнерович А.** Теория связностей в целом и группы голономии. Пер. с фр. М., Изд-во иностр. лит., 1960, с. 21.
62. **Мицкевич Н. В.** — В кн.: Эйнштейновский сборник 1971. М., Наука, 1972, с. 67.
63. **Владимиров Ю. С.** Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. Применение монадного и диадного методов и их групповых калибровок для анализа некоторых проблем общей теории относительности. М., МГУ, 1975.
64. **Антонов В. И., Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н.** — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М., Атомиздат, 1976, с. 34.
65. **Antonov V. I., Efremov V. N., Vladimirov Yu. S.** — Gen. Relativity and Gravitation, 1978, v. 9, p. 9.
66. **Мицкевич Н. В., Калев Д. А.** — Докл. Болг. АН, 1975, т. 28, с. 735.
67. **Антонов В. И.** Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Монадный подход к теории поля и гравитационному эксперименту. М., МГУ, 1979.
68. **Зельманов А. Л.** — Докл. АН СССР, 1956, т. 107, с. 815.
69. **Cattaneo C.** — Nuovo simento, 1958, v. 10, p. 318.
70. **Зельманов А. Л.** — Докл. АН СССР, 1973, т. 209, с. 822.
71. **Владимиров Ю. С., Антонов В. И.** Препринт ИТФ-72-137Р Ин-та теорет. физ. АН УССР, Киев, 1972.
72. **Антонов В. И., Владимиров Ю. С.** — В кн.: Тез. Докл. 3-й Сов. гравитационной конф. Ереван, ЕГУ, 1972, с. 199.
73. **Штейнград З. А.** — Докл. АН СССР, 1978, т. 243, с. 85.
74. **Паули В.** Теория относительности. Пер. с нем. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
75. **Владимиров Ю. С., Румянцев С. В.** — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М., Атомиздат, 1976, с. 45.

*Применение систем отсчета в классических задачах ОТО.
Точные решения уравнений Эйнштейна*

76. **Иваницкая О. С.** Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск, Наука и техника, 1979.
77. **Shirokov M. F.** — Gen. Relativity and Gravitation, 1973, v. 4, p. 131.
78. **Антонов В. И.** — В кн.: Современные проблемы общей теории относительности. Минск, Ин-т физ. АН БССР, 1979, с. 97
79. **Куликов К. А.** Курс сферической астрономии. М., Наука, 1974.
80. **Сидоренко Н. С.** — Астрон. журн., 1967, т. 44, № 3, с. 650.
81. **Брумберг В. А.** Релятивистская небесная механика. М., Наука, 1972.
82. **Фишер И. З.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1948, т. 18, с. 636.
83. **Коркина М. П.** Препринт ИТФ-76-93Р Ин-та теорет. физ. АН УССР, Киев, 1976.
84. **Kottler F.** — Enzykl. Math. Wiss., 1922, v. 22a, p. 231.
85. **Vaidya P. C.** — Phys. Rev., 1951, v. 83, p. 10.
86. **Lense J., Thirring H.** — Phys. Z., 1918, Bd 19, S. 156.
87. **Мицкевич Н. В., Пулидо Гарсия И.** — Докл. АН СССР, 1970, т. 192, с. 1263.
88. **Мицкевич Н. В.** — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М., Атомиздат, 1976, с. 15.
89. **Schiff L. I.** — Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 5, 215; Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1960, v. 46, p. 871.
90. **Plebanski J. F., Demianski M.** — Ann. Phys., 1976, v. 98, p. 98.
91. **Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E.** Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. (Русский перевод: Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херлт Е. Точные решения уравнений Эйнштейна. М., Энергоиздат, 1982.)
92. **Newman E. T., Couch E., Chinnaparet K. e. a.** — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 918.
93. **Newman E. T., Tamburino L., Unti T. W. J.** — Ibid., 1963, v. 4, p. 915.
94. **Хлебников В. И.** — Изв. вузов. Сер. физ., 1976, № 3, с. 118.

95. Харбедия Л. И. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. К вопросу об относительности конечности и бесконечности пространства фридмановых моделей. М., МГУ, 1978.

96. Зельманов А. Л. — Докл. АН СССР, 1959, т. 124, с. 1030; В кн.: Бесконечность и Вселенная. М., Мысль, 1969, с. 274.

97. Зельманов А. Л., Харбедия Л. И. — Астрон. журн., 1978, т. 55, с. 186.

98. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., Наука, 1971.

99. Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continue finiti di trasformazioni sperrri. Pisa, 1918.

100. Кручкович Г. И. — Мат. сб., 1957, т. 41, с. 83.

101. Misner C. W. — Phys. Rev., 1969, v. 186, p. 1319.

102. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. — Успехи физ. наук, 1970, т. 102, с. 463; Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 60, с. 1969.

Диадный, диарный и тетрадный формализмы

103. Владимиров Ю. С. Диадный метод в общей теории относительности. Деп. ВИНТИ № 7228-73, 1973.

104. Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. — В кн.: Тез. докл. на Всесоюз. симпоз. по новейшим проблемам гравитации. Менделеево, ВНИИФТРИ, 1973, с. 7.

105. Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. М., Атомиздат, 1974, с. 24.

106. Владимиров Ю. С. — [72], с. 29.

107. Владимирова Л. Ф. — В кн.: Теория относительности и гравитация. М., Наука, 1977, с. 3.

108. Владимиров Ю. С., Шелковенко А. Э. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1976, № 1, с. 82.

109. Sachs R. — Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 2851; J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 908.

110. Румянцев С. В. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1977, № 6, с. 115.

111. Полищук Р. Ф. — [72], с. 138.

112. Полищук Р. Ф. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1973, № 1, с. 3.

113. Полищук Р. Ф. — Докл. АН СССР, 1973, т. 209, с. 76.

114. Владимирова Л. Ф. — В кн.: Тез. 4-й Всесоюз. конф. по современным теоретическим и экспериментальным проблемам теории относительности и гравитации. Минск, БГУ, 1976, с. 35.

115. Владимирова Л. Ф. — Изв. вузов. Сер. физ., 1976, № 7, с. 43.

116. Румянцев С. В. — Изв. вузов. Сер. физ., 1978, № 5, с. 87.

117. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, Наука и техника, 1969.

118. Левашев А. Е. — В кн.: Гравитация. Киев, Наукова думка, 1972, с. 129.

119. Родичев В. И. Теория тяготения в ортогональном репере. М., Наука, 1974.

120. Иваницкая О. С. Препринт ИТФ-73-88Р Ин-та теорет. физ. АН УССР, Киев, 1973.

121. Иваницкая О. С., Митянок В. В. Препринт Ин-та физ. АН БССР, Минск, 1974.

122. Родичев В. И. — Изв. вузов. Сер. физ., 1965, № 1, с. 142.

123. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. М. — Л., Гостехиздат, 1952, с. 643.

124. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Т. 2. Пер. с нем. М., Гостехиздат, 1956.

125. Усачев Ю. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1961, т. 41, с. 400.

126. Мицкевич Н. В. — В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 3. Казань, КГУ, 1967, с. 129.

127. Newman E. T., Penrose R. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 566; Errata J.

Math. Phys., 1963, v. 4, p. 998.

128. Алексеев Г. А., Хлебников В. И. Препринт № 66 Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1977.

129. Владимиров Ю. С., Румянцев С. В. — Изв. вузов. Сер. физ., 1981, № 12, с. 63.

Проблема энергии-импульса гравитационного поля

130. Мицкевич Н. В. Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep. Brunensis. Physica 3—4, 1975, v. 5, p. 143.

131. Мицкевич Н. В. Тр. 6-го совещ. по космогонии. М., Изд-во АН СССР, 1959.

132. Мицкевич Н. В., Нестеров А. И. — Изв. вузов. Сер. физ., 1976, № 9, с. 92.

133. Goldberg J. N. — Phys. Rev., 1958, v. 111, p. 315.

134. Широков М. Ф. — В кн.: Гравитация. Киев, Наукова думка, 1972, с. 321.

135. Логунов А. А., Фоломешкин В. Н. Препринт ОТФ 77-53 ИФВЭ, Серпухов, 1977.

136. Möller Ch. — Ann. Phys., 1961, v. 12, p. 118; Math.-fys. skr. danske vid. selskab., 1961, v. 1, № 10.

137. Зельманов А. Л., Твердохлебова В. А. — [104], с. 76.

138. Твердохлебова В. А. — [114], с. 56.

139. Bel L. — Compt. Rend. Acad. Sci. Colon., 1958, v. 247, p. 1094; Cahiers phys., 1962, v. 16, p. 59.

140. Фролов Б. Н. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астроном., 1964, № 2, с. 56.

141. Родичев В. И., Задонский Г. И. — Изв. вузов. Сер. физ., 1971, № 10, с. 57.

142. Туняк В. Н. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1977, № 2, с. 66.

Гравитационные (гравинерциальные) волны

143. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., Наука, 1970.

144. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., Наука, 1972.

145. Кислов В. В. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астроном., 1981, т. 82, № 2, с. 89.

146. Пирани Ф. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961, с. 257.

147. Малдыбаева Э. Я. — Известия вузов. Сер. физ., 1967, № 6, с. 320.

148. Григорьева Л. Б., Захаров В. Д. — В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 8. Казань, КГУ, 1971, с. 46.

149. Борисова Л. Б., Владимирова Л. Ф. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М., Атомиздат, 1979, с. 181.

150. Владимиров Ю. С., Китаев Д. Ф. Диадный метод и гравинерциальные волновые процессы. Деп. ВИНТИ № 1550-78, 1978.

151. Robinson I., Trautman A. — Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 431.

152. Kundt W. — Z. Phys., 1961, Bd 163, S. 77.

153. Takeno H. — Tensor, 1958, v. 6, p. 15; 1958, v. 8, p. 58.

154. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I. — Proc. Roy. Soc., 1959, v. A 251, p. 519.

155. Peres A. — Phys. Rev. Lett., 1959, v. 3, p. 571.

156. Mitskiévič N. V. — Experim. Techn. Phys., 1981, Bd 29, S. 213.

157. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

158. Владимиров Ю. С. — В кн.: Теория относительности и гравитация. М., Наука, 1976, с. 26.

159. Борисова Л. Б., Захаров В. Д., Колосницын Н. И., Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М., Атомиздат, 1977, с. 32.

160. Владимирюв Ю. С., Румянцев С. В. — [114], с. 32.
 161. Владимирюв Ю. С., Румянцев С. В. — Изв. вузов. Сер. физ., 1979, № 2, с. 81; В кн.: Современные проблемы общей теории относительности. Минск, Ин-т физики АН БССР, 1979, с. 73.
 162. Weber J. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 1320.
 163. Брагинский В. Б., Манукин А. Б., Попов Е. И. и др. — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, № 3, с. 157.

Квантование гравитации

164. Владимирюв Ю. С. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1972. М., Наука, 1974, с. 280.
 165. Treder H. — Fortschritte Phys., 1963, Bd 11, S. 81.
 166. Философия естествознания. М., Политиздат, 1966, с. 137.
 167. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. М., Наука, 1965.
 168. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962, с. 222.
 169. Дирак П. А. М. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961, с. 128, 139.
 170. Андерсон Дж. — В кн.: Гравитация и относительность. Пер. с англ. М., Мир, 1965, с. 435.
 171. Dirac P. A. M. — Phys. Rev., 1959, v. 114, p. 924.
 172. Арновитт Р., Дезер С., Мизнер Ч. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1967. М., Наука, 1967, с. 233.
 173. Фаддеев Л. Д. — [57], с. 229.
 174. Anderson J. L. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 1197.
 175. Ефремов В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М., Атомиздат, 1977, с. 104.
 176. Гупта С. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961, с. 325, 341.
 177. Kuchař K. — Phys. Rev., 1971, v. D 4, p. 955.
 178. Berger V. K. — Ann. Phys., 1974, v. 83, p. 458.
 179. Misner C. W. — Phys. Rev., 1973, v. D 8, p. 3271.
 180. Уилер Дж. А. Предвидение Эйнштейна. Пер. с англ. М., Мир, 1970.
 181. Де Витт Б. Докл. на VI Междунар. гравитационной конф. Копенгаген, 1971.
 182. Алиев Б. Г., Владимирюв Ю. С. Препринт ИТФ-74-7Р Ин-та теорет. физ. АН УССР, Киев, 1974.
 183. Брилл Д., Гоуди Р. — В кн.: Квантовая гравитация и топология. Пер. с англ. М., Мир, 1973, с. 66.
 184. DeWitt B. — Phys. Rev., 1967, v. 160, p. 1113.

5-Мерная теория поля

185. Mandel H. — Z. Phys., 1926, Bd 39, S. 136; 1927, Bd 45, S. 285; 1929, Bd 56, S. 838.
 186. DeBroglie L. — J. phys. et radium, 1927, sér. VI, v. VIII, № 2, p. 65.
 187. Klein O. — Z. Phys., 1926, Bd 37, S. 895; 1927, Bd 46, S. 188.
 188. Fock V. — Z. Phys., 1926, Bd 39, S. 226.
 189. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М., Гостехиздат, 1956.
 190. Schmutzer E. — Z. Phys., 1957, Bd 149, S. 329; 1959, Bd 154, S. 312.
 191. Кадышевский В. Г. — Докл. АН СССР, 1960, т. 131, с. 1305.
 192. Пытьев Ю. П. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1966, № 2, с. 102; № 5, с. 70; 1967, № 1, с. 73.
 193. Антонов В. И., Владимирюв Ю. С. — [72], с. 19.
 194. Владимирюв Ю. С., Антонов В. И. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1974, № 1, с. 54.

195. Легкий А. И. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М., Атомиздат, 1979, с. 149.
196. Kramer D. — Acta phys. polon., 1971, v. B2, p. 807.
197. Владимиров Ю. С., Парушин Е. Б. — [104], с. 46.
198. Владимиров Ю. С., Антонов В. И. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М., Атомиздат, 1977, с. 162.
199. Hoyle F., Narlikar J. V. — Proc. Roy. Soc., 1964, v. A 282, p. 191, 1966, v. A 294, p. 138.
200. Scherrer W. — Helv. phys. acta, 1949, v. 22, p. 537; 1950, v. 23, p. 547.
201. Владимиров Ю. С., Попов А. Д. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 13. М., Атомиздат, 1982 (в печати).

Размерность пространства-времени

202. Мах Э. Познание и заблуждение. Пер. с нем. М., Изд-во С. Скирмунга, 1909.
203. Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В. Четырехмерность пространства и времени. М. — Л., Наука, 1966; Природа, 1970, № 9, с. 42.
204. Андреев Э. П. — Вопросы философии, 1965, № 12, с. 70.
205. Buchel W. — Phys. Bl., 1963, Bd 19, № 12, S. 547; Amer. J. Phys., 1969, v. 37, p. 1222.
206. Weyl H. Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1923.
207. Fraris J. J. — Amer. J. Phys., 1970, v. 38, p. 1265.
208. Кант И. Мысли об истинной оценке живых сил. Пер. с нем. Т. 1. М., Соцэкгиз, 1963.
209. Tangerlini F. R. — Nuovo cimento, 1963, v. 27, p. 636.
210. Gurevish L., Mostepanenko V. — Phys. Lett., 1971, v. 35 A, № 3.
211. Ehrenfest P. — Ann. Physik, 1920, Bd 61, S. 440.
212. Whitrow G. J. — Brit. J. Philos. Sci., 1955, v. VI, № 21, p. 13.
213. Пирагас К. А. — В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 4, 5. Казань, КГУ, 1968, с. 180; вып. 7, 1970, с. 82, 90.
214. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М. — Л., Гостехиздат, 1951, с. 104.
215. Курант Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., Мир, 1964, с. 686.
216. Penney R. — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1607.
217. Legky A. I. — In: Proc. 9th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Jena, F. Schiller Univ., 1980, p. 491.
218. Eddington A. S. Fundamental Theory. Cambridge, Univ. Press, 1946.
219. Казанова Г. Векторная алгебра. Пер. с фр. М., Мир, 1979.
220. Rosen S. P. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1593.
221. Mariwalla K. H. — J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 96.
222. Легкий А. И. Деп. ВИНТИ, № 5166-80, 1980.
223. Легкий А. И. — В кн. Тезисы 5-й Всесоюз. конф. по современным теоретическим и экспериментальным проблемам теории относительности и гравитации. М., МГУ, 1981, с. 173.
224. Witten E. — Nucl Phys., 1981, v. B. 186, p. 412.



Последние публикации

- 30.01.07 Виктор Калентьев, Григорий Карпачев, Александру Ивановичу Субетто — 70 лет
 - 30.01.07 Алексей А. Корнеев. Золотой суперклин
 - 30.01.07 Сокол-Кутыловский О.Л.. Об эффекте Саньяка и опытах Физо
 - 29.01.07 Олег Вечер. О символах
 - 29.01.07 В.И. Акунов. «Введение в теорию макроквантов» (философский аспект)
 - 29.01.07 Власов В.Н.. Святая Рать Волкодавов
 - 29.01.07 Мальцев Сергей . Главные положения Ноосферологии – теории и практики формирования Ноосферной Республики (Предложения для обсуждения)
 - 29.01.07 Адамов А.К.. Главные положения Ноосферологии – теории и практики формирования Ноосферной Республики (Предложения для обсуждения)
- >>> [Все новости сайта](#)

[Найти статью](#)

[Институт Физики Вакуума - Публикации](#)

Владимиров Ю.С.

Бинарная геометрофизика

[Об авторе](#)

§1. Введение

В основе фундаментальной теоретической физики лежит теория пространства-времени. Все главные достижения физики XX века: специальная теория относительности, общая теория относительности и квантовая теория — *связаны с изменением представлений о свойствах пространства-времени*. Сейчас среди физиков-теоретиков все более крепнет убеждение, что геометрия реального пространства-времени есть физика, и основания физики должны описываться геометрией обобщенного пространства-времени. Дальнейший прогресс в фундаментальной теоретической физике следует ожидать на пути очередного пересмотра представлений о сущности физического пространства-времени.

Современная физика строится в рамках модели готового (плоского или искривленного) пространства-времени, имеющего характер вместителя всего сущего. Эти представления бытуют со времен Декарта и Ньютона. По убеждению автора, дальнейшее развитие физики и геометрии должно быть связано с переходом к *реляционной трактовке пространства-времени*, т.е. к его пониманию как некоей системы отношений между материальными образованиями. В таком понимании без материи нет и пространства-времени. Этот подход обычно связывается с именами Г.Лейбница и Э.Маха (Mah, 1909). Он альтернативен субстанциальным представлениям о природе пространства и времени, которых придерживались В.Клиффорд и Дж.Уилер.

Подходящей основой для развития реляционной концепции пространства-времени является *теория бинарных физических структур*, построенная Ю.И.Кулаковым для переформулировки ряда законов общей физики (Кулаков, 1968). В этой теории постулируется существование двух множеств элементов и отношений между ними, удовлетворяющих некоторым алгебраическим условиям. В теории физических структур Кулакова отношения — это вещественные числа, сопоставляемые элементам из одного или из двух разных множеств.

Нам представляется, что новая физическая картина мира должна опираться на систему элементарных понятий, заимствованных из физики микромира, из которых бы выводились понятия как классического пространства-времени, так и теории известных видов фундаментальных физических взаимодействий. Для построения такой теории, названной автором **бинарной геометрофизикой** (БГФ) (Владимиров, 1992), использована комплексифицированная теория бинарных физических структур симметричных рангов (r,r) . Только в этом случае имеется возможность отразить свойства физики микромира. Упрощенные математические модели такой теории конкретного ранга названы *бинарными системами комплексных отношений* (БСКО).

В рамках БСКО первого невырожденного ранга $(3,3)$ можно построить прообраз 4-мерного классического пространства-времени Минковского, 3-мерную гиперболическую геометрию (Лобачевского), интерпретируемую в рамках БГФ как *импульсное пространство* выделенного класса свободных частиц. Предлагается их трактовать как идеализированные (т.е. невзаимодействующие) массивные лептоны (первого поколения).

В настоящей работе показано, что для получения реалистической теории взаимодействующих частиц необходимо опереться на БСКО более высоких рангов на *бинарное многомерие*, являющееся прообразом общеизвестных (унарных) многомерных теорий Калуцы — Клейна. Идеи многомерия составляют второй блок исходных принципов, положенных в основу БГФ.

В рамках БГФ теория физических взаимодействий должна строиться в духе *теории прямого межчастичного взаимодействия* (ТПМЧВ) типа Фоккера — Фейнмана с той разницей, что как прообраз действия, так и пространственно-временные отношения описываются однотипными понятиями из отношений между частицами. Идеи ТПМЧВ составляют третий блок принципов БГФ.

В данной работе продемонстрирован переход от БСКО ранга $(4,4)$ и соответствующей ей плоской 3-точечной геометрии к *многомерной искривленной 2-точечной геометрии*, используемой в теориях Калуцы — Клейна. Искривленное пространство-время общей теории относительности предлагается понимать как 4-мерное пространственно-временное сечение многомерной 2-точечной геометрии, возникающей из БСКО ранга $(4,4)$ путем редукции ее к 4-мерной теории.

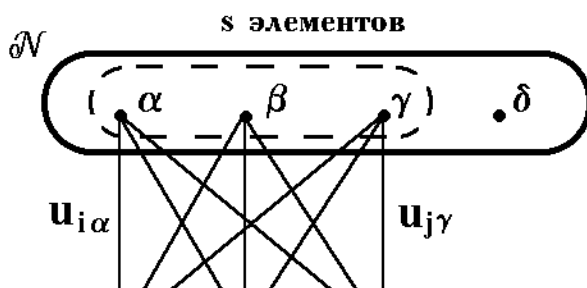


Рис.1. Бинарная система отношений ранга (r, s)

§2. Основные понятия бинарной геометрофизики

Теория бинарных систем отношений (бинарных структур) изложена в ряде наших работ (Кулаков и др., 1991; Vladimirov, 1995). Напомним самые необходимые понятия. В теории бинарных систем отношений исходным является закон Φ для отношений $u_{i\alpha}$ между элементами двух множеств $i \in M$ и $\alpha \in N$. В первом множестве M элементы нумеруются латинскими индексами, а во втором — греческими (рис.1). Ранг (4,4) означает, что закон записывается для 4 произвольных элементов множества M и для 4 произвольных элементов множества N . Согласно общей теории закон БСКО ранга (4,4) для элементов $i, k, j, s; \alpha, \beta, \gamma, \delta$ записывается в виде

$$\Phi(u_{i\alpha}, K) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Легко показать, что этот закон тождественно выполняется, если каждый элемент характеризуется тремя комплексными числами ($i \rightarrow i^1, i^2, i^3; \alpha \rightarrow \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$), и парное отношение представляется через них в виде $u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3$. (2)

Фактически это скалярное произведение двух векторов в 3-мерном комплексном пространстве.

Теорию БСКО ранга (4,4) можно понимать как своеобразное многомерное обобщение теории БСКО ранга (3,3), ответственной за наблюдаемое классическое 4-мерие (Владимиров, 1988). Напомним, что закон БСКО ранга (3,3) записывается аналогично (1), но для двух троек разноименных элементов

$$\Phi(u_{i\alpha}, K) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

когда элементы характеризуются лишь двумя комплексными параметрами, а парное отношение имеет вид

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2. \quad (4)$$

В такой теории ключевой характер имеет так называемое фундаментальное 2×2 -отношение:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

сопоставляемое двум парам разноименных элементов. Линейные преобразования элементов

$$i^s = C_{r1}^{s,r}; \quad \alpha^s = C_{r\alpha}^{*s,r} \quad (s, r = 1, 2) \quad (6)$$

с комплексными коэффициентами $C_{r\alpha}^s$, оставляющие инвариантными отдельные определители справа в (5), образуют группу $SL(2, C)$, а само соотношение (5) представляется в виде квадратичной формы

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \eta_{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (7)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор 4-мерного пространства-времени Минковского; p_μ — компоненты 4-вектора, образованного параметрами двух пар элементов: i, k, α, β . Если элементы i, α и k, β описываются комплексно сопряженными параметрами, то вектор p_μ вещественен.

Аналогичные рассуждения для БСКО ранга (4,4) выделяют группу преобразований $SL(3, C)$. Из параметров элементов можно построить вещественный 9-мерный вектор. Выделение подгруппы преобразований $SL(2, C)$ соответствует редукции теории БСКО ранга (4,4) к теории в рамках БСКО ранга (3,3), аналогичной редукции многомерных моделей типа теории Калуцы — Клейна к 4-мерной ОТО с дополнительными полями геометрического происхождения. Как известно, они описываются дополнительными компонентами многомерного метрического тензора $G_3\mu, G_6\mu$ и т.д. В данном случае следует поступать

аналогично: из параметров с индексами 1 и 2 строятся компоненты 4-мерных векторов p_μ , а с помощью дополнительных параметров определяются заряды частиц (Vladimirov, 1995; Владимиров, 1992).

В бинарной геометрофизике полагается, что в рамках БСКО ранга (3,3) описываются идеализированные (невзаимодействующие) лептоны: двумя парами элементов из разных множеств описываются массивные лептоны (электроны и позитроны), а одной парой разноименных элементов описываются нейтрино. Реалистические, т.е. взаимодействующие электрослабым образом лептоны описываются такими же числами элементов, однако из редуцированной теории БСКО ранга (4,4) (Vladimirov, 1995).

§3. Бинарные системы комплексных отношений и унарные геометрии с симметриями

Опыт работы в рамках эйнштейновской ОТО, многомерных теорий Калуцы — Клейна и квантовой

теории показывает, что каждая из них содержит важную составную часть, описывающую переход от первичных понятий к физически наблюдаемым или интерпретируемым величинам. В ОТО это методы описания систем отсчета, в теории Калуцы — Клейна это методы редукции многомерных соотношений и величин к 4-мерным понятиям, в квантовой теории это переход к эрмитовым операторам и их собственным значениям. Аналогичный прием имеется и в бинарной геометрофизике. Он состоит в переходе от БСКО к унарным системам вещественных отношений (УСВО), в рамках которых понятия имеют знакомый геометрический и физический смысл.

Это осуществляется склейкой пар или большего числа элементов из двух разных множеств БСКО в некое новое образование, играющее роль элемента унарной системы вещественных отношений (рис.2). Через парные отношения исходной БСКО строятся отношения УСВО. Как правило, склеиваются элементы двух множеств с комплексно сопряженными параметрами. Общая теория УСВО под названием теории физических структур на одном множестве элементов была ранее построена в работах Ю.И.Кулакова (1968), Г.Г.Михайличенко (1972), В.Х.Льва (1988). Было показано, что такие структуры соответствуют известным типам геометрий с группами симметрий. Для них пишутся законы некоторого ранга типа приведенных в (1) и (2) законов БСКО. Так, оказывается, геометрия 4-мерного пространства-времени Минковского описывается УСВО ранга 6. Ее закон записывается в виде равенства нулю определителя Кэли — Менгера на 6 точках:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{ij} & a_{is} & a_{il} & a_{im} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{kj} & a_{ks} & a_{kl} & a_{km} \\ 1 & a_{ji} & a_{jk} & 0 & a_{js} & a_{jl} & a_{jm} \\ 1 & a_{si} & a_{sk} & a_{sj} & 0 & a_{sl} & a_{sm} \\ 1 & a_{il} & a_{lk} & a_{lj} & a_{ls} & 0 & a_{lm} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & a_{mj} & a_{ms} & a_{ml} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где парные отношения представляются в виде

$$a_{ik} \equiv s_{ik} = (x_i^0 - x_k^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x_i^i - x_k^i)^2 \quad (9)$$

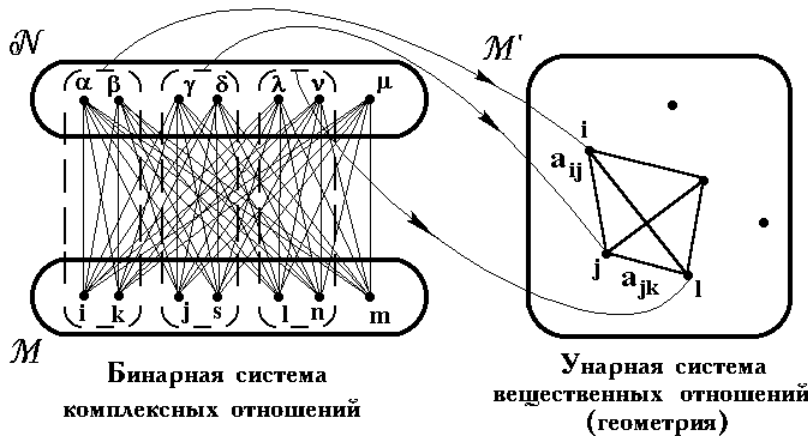


Рис.2. Переход от БСКО к УСВО (геометрии)

Здесь x_i^μ и x_k^μ — координаты точек-событий в 4-мерном пространстве-времени. В работах Ю.И.Кулакова и его соавторов (1968, 1991) записаны законы других возможных геометрий. Например, было показано, что для ранга 5 имеется 10 и только 10 возможных 3-мерных геометрий. Размерность геометрии n и ранг r вещественной структуры связаны соотношением $n = r - 2$.

Среди них имеются евклидова и псевдоевклидова геометрии, геометрия Лобачевского, геометрия Римана (постоянной положительной кривизны), симплектическая геометрия и ряд других.

Оказывается, к 4-мерному пространству-времени Минковского можно перейти от БСКО ранга (3,3). Кроме того, получается 3-мерная геометрия Лобачевского (Владимиров, 1993), которая в бинарной геометрофизике интерпретируется как импульсное пространство массивных лептонов.

По образу и подобию теории БСКО ранга (3,3) можно осуществлять переход к УСВО в рамках БСКО ранга (4,4) и более высоких рангов. При этом оказывается, что в итоге получают геометрические конструкции не только более высокой размерности (в некотором обобщенном смысле), но и с другим мероопределением. *Общепринятые парные (квадратичные) метрические отношения оказываются присутствующими лишь случая БСКО ранга (3,3)*. В рамках БСКО ранга (4,4) получаются *трехточечные геометрии* (когда число, т.е. метрика, задается для трех точек). В рамках БСКО ранга (5,5) получаются 4-точечные геометрии и т.д. Отметим, что многоточечные геометрии независимо от бинарной геометрофизики рассматривались В.Я.Скоробогатько (Скоробогатько и др., 1975). Для таких многоточечных геометрий можно записать законы в духе теории вещественных физических структур Кулакова. Однако в отличие от общепринятых геометрий с квадратичным мероопределением такие законы записываются не через обычные квадратные, а через кубические и пространственные определители. Теория таких определителей достаточно хорошо развита (Соколов, 1960), однако в теоретической физике они практически не использовались. В наших работах такие законы записаны и введен своеобразный метрический тензор, обобщающий метрику пространства-времени Минковского (Васильев, Владимиров, 1994).

§4. Базовое 4X4-отношение и усреднение по эталонным элементам

До сих пор рассматривались унарные геометрии с симметриями: пространство-время Минковского, геометрия Лобачевского, многоточечные аналоги этих и других геометрий с группами движений. Оказывается, в рамках бинарной геометрофизики можно получить геометрию искривленного пространства-времени риманова типа. Это осуществляется с помощью ряда довольно естественных принципов.

Принцип 1. Поскольку риманова геометрия, лежащая в основе ОТО и теорий Калуцы — Клейна, является унарной геометрией с парными вещественными отношениями, а в рамках БСКО ранга (4,4) получаются 3-точечные геометрии, то переход от трехточечной метрики к двухточечной должен

осуществляться суммированием трехточечных отношений с участием двух избранных "точек" по всем третьим "точкам". Символически это можно представить в виде

$$\sum a(1, 1', 2)$$

$$a(1, 1') = 2 \quad (10)$$

где слева стоит парное отношение между избранными "точками" 1 и 1', а справа — сумма тройных отношений по всем третьим точкам, символически обозначенных цифрой 2 (как вторые частицы).

Принцип 2. В качестве исходных тройных отношений будем выбирать выражение, во-первых, симметрично построенное из параметров двух четверок элементов, описывающих две массивные частицы (в рамках БСКО ранга (4,4) это пара лептонов), и, во-вторых, инвариантное относительно характерной для БСКО ранга (4,4) группы преобразований SL(3,C). Таковым является базовое 4x 4-отношение, записываемое через окаймленный определитель из парных отношений

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \gamma \delta \\ i k j s \end{matrix} \right\} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} \\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} \\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где элементы i, k, α, β соответствуют выделенной частице (1), а элементы j, s, γ, δ определяют вторую частицу (2). Легко видеть, что это выражение записывается в виде совокупности из 16 фундаментальных 3x 3-отношений, инвариантных относительно группы SL(3,C).

Принцип 3. Для перехода к классическим понятиям необходимо произвести усреднение по совокупности базисных элементов, составляющих классический макроприбор (классический наблюдатель). Подчеркнем, что до сих пор параметры элементов имели смысл отношений к некоторой тройке эталонных элементов. Это могла быть отдельная частица.

Усреднение по совокупности базисных элементов включает в себя две основные процедуры:

а) Суммирование по третьим элементам базиса, которое интерпретируется в духе принципа Маха, т.е. третьи параметры элементов трактуются как некие эффективные отношения ко всем частицам мира. На практике это означает выделение подгруппы преобразований SL(2,C), затрагивающей лишь пару параметров с индексами 1 и 2. Третий параметр остается инвариантным. В результате такого выделения базовое 4x 4-

отношение (11) представляется в виде суммы из 36 лоренц-инвариантных слагаемых вида $\begin{bmatrix} \alpha \gamma \\ i j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \delta \\ k s \end{bmatrix}$, где символ в квадратных скобках означает фундаментальное 2x 2-отношение (5), а круглые скобки обозначают комбинацию из третьих параметров

$$\begin{bmatrix} \beta \delta \\ k s \end{bmatrix} = (k^3 - s^3)(\delta^3 - \beta^3) \quad (12)$$

б) Суммирование по всем различным системам отношений, характеризуемым значениями невырожденных параметров (с индексами 1 и 2). Это будет выражаться, в частности, в виде интегрирования по импульсам обмена между взаимодействующими частицами (по импульсам "промежуточных бозонов").

Принцип 4. Для перехода к классическим понятиям следует положить, что как выделенная "частица" так и окружающие ее частицы (2) представляют собой макрообъекты. В частности, это означает усреднение по поляризациям составляющих его частиц. Импульсы частиц определены параметрами с индексами 1 и 2 неоднозначно, с точностью до преобразований на 3-мерной гиперсфере. Усреднение по поляризациям означает интегрирование по этой гиперсфере. В итоге такого усреднения из названных выше 36 лоренц-инвариантных слагаемых базового 4x 4-отношения выживают лишь 6 "диагональных" слагаемых, которые составляют комбинацию

$$a(1, 1', 2, 2') \equiv L(e_1, e_2) = \begin{bmatrix} \alpha \beta \\ i k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \delta \\ j s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \gamma \\ i j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \delta \\ k s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \delta \\ i s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \gamma \\ k j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \gamma \\ k j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \delta \\ i s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \delta \\ k s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \gamma \\ i j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \delta \\ j s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \beta \\ i k \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Это выражение было использовано в одной из предшествующих работ (Vladimirov, 1995) в качестве алгебраического аналога лагранжиана электрослабых взаимодействий двух массивных лептонов.

Кроме того, переход к макрообъектам означает пренебрежение слагаемыми, содержащими псевдовекторные слагаемые (в стандартной теории означающие взаимодействие через Z-бозоны). Векторные слагаемые интерпретируются как 4-мерные импульсы частиц (Владимиров, 1988).

§5. Основные принципы перехода к многомерной теории Калуцы—Клейна

Принцип 5. Для каждой из частиц две комбинации из дополнительных параметров составляющих их элементов имеют физический смысл 5-й и 6-й компонент многомерного импульса:

$$i^3 + k^3 \equiv C_{1L} + C_{1R} \rightarrow P(1)^5; i^3 - k^3 \equiv C_{1L} - C_{1R} \rightarrow P(1)^6;$$

$$j^3 + s^3 \equiv C_{2L} + C_{2R} \rightarrow P(2)^5; j^3 - s^3 \equiv C_{2L} - C_{2R} \rightarrow P(2)^6. \quad (14)$$

Аналогичные выражения имеют место для сопряженных параметров.

Этот принцип фактически означает переход к вырожденной БСКО ранга (4,4;а) (Владимиров и др., 1992), когда третьи параметры представляются в виде

$$i^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i\alpha_0 \mathbf{o}}; \quad \alpha^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i\alpha_0 \mathbf{o}}, \quad (15)$$

где i_0 и α_0 — новые параметры, имеющие размерность импульсов. Напомним, что в теории БСКО ранга (4,4;а) парные отношения представляются в виде

$$a_i \mathbf{O} = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2 + i_0 + \alpha_0. \quad (16)$$

При замене параметров с индексами 3 на параметры с индексами 0 стрелки в (14) превращаются в знаки равенства.

Принцип 6. Для взаимодействующих частиц параметры начальных и конечных состояний более не связаны условием комплексного сопряжения. Это условие обобщается на

$$\left(\bar{e}_{1L} \gamma^\mu e_{1L} \right) + \left(\bar{e}_{1R} \gamma^\mu e_{1R} \right) = \left(p_{(1)}^\mu - k^\mu \right) \exp\{i(\Phi_1' - \Phi_1)\}, \quad (17)$$

где слева стоит комплексное выражение, построенное по общепринятым правилам для

взаимодействующей частицы, а справа $p_{(1)}^\mu$ — конечный импульс первой частицы, k^μ — импульс передачи со стороны второй частицы, вещественными величинами Φ описываются фазы начальных и конечных состояний.

Принцип 7. Фазы экспоненциальных слагаемых, введенные в (17), представляются через 4-импульсы и координаты классического пространства-времени. Для конечных состояний имеем фактор

$$\alpha^s, \beta^s \sim \exp\{i\Phi_1^s\} = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} p_{(1)\mu}^s x_{(1)}^\mu \right\}, \quad (18)$$

где $s = 1, 2$; $x_{(1)}^\mu$ — конечные значения координат частицы. Для начальных состояний фактор записывается аналогично

$$i^s, k^s \sim \exp\{-i\phi_1^s\} = \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} p_{(1)\mu}^s x_{(1)}^\mu \right\}, \quad (19)$$

где $p_{(1)\mu}$ и $x_{(1)}^\mu$ — начальные значения импульса и координат частицы.

Легко видеть, что произведение экспоненциальных слагаемых в (17) можно представить в виде

$$\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(p_{(1)\mu}^s x_{(1)}^\mu - p_{(1)\mu}^s x_{(1)}^\mu \right) \right\} = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} dS_1 \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} k_{\mu} x_{(1)}^\mu \right\}, \quad (20)$$

где положено

$$dS_1 = p_{(1)\mu}^s dx_{(1)}^\mu. \quad (21)$$

В дальнейшем будем полагать dS_1 малым и разлагать экспоненту в ряд по dS_1 , оставляя нулевой, первый и второй порядки:

$$\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} dS_1 \right\} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} dS_1 - \frac{1}{2\hbar^2} dS_1^2. \quad (22)$$

Величину dS_1 можно представить в виде $dS_1 = mcds_1$, где m — масса частицы, ds_1 — смещение вдоль ее классической траектории. Тогда парное отношение (10) представляется в виде

$$a(1, 1') = a_0(1, 1') + \frac{imc}{\hbar} a_1(1, 1') ds_1 - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} a_2(1, 1') ds_1^2 + O(3). \quad (23)$$

Принцип 8. Постулируем, что нулевой и первый порядки разложения в (23) обращаются в нуль:

$$a_0(1, 1') = 0; \quad (24)$$

$$a_1(1, 1') = 0; \quad (25)$$

т.е. парное отношение $a(1, 1')$ в основном приближении пропорционально квадрату 4-мерного интервала выделенной частицы вдоль ее "мировой линии":

$$a(1, 1') = -\frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} a_2(1, 1') ds_1^2 + O(3). \quad (26)$$

Этот принцип сводит суммарное эффективное парное отношение выделенной частицы, построенное в рамках БСКО ранга (4,4), к парному отношению теории БСКО ранга (3,3).

Принцип 9. Положим, что ds_1 представляет собой смещение частицы вдоль некоей дополнительной координаты x^4 , тогда из суммы и разности (24) и (25) получаем два выражения. Одно из них, помноженное на

ds_1^2 , следует интерпретировать как *квадрат изотропного смещения* в 7-мерном искривленном многообразии. Таким образом приходим к 7-оптике, в некотором смысле обобщающей 5-оптику Румера (1956). Три дополнительные координаты x^4, x^5, x^6 соответствуют классическому действию (смещению вдоль траектории частицы), электрической заряженности частиц (компонента импульса p^5 имеет физический смысл электрического заряда, как в теории Калуцы — Клейна) и новому параметру, который в алгебраической модели электрослабых взаимодействий характеризовал взаимодействие через промежуточный Z-бозон.

Выпишем явно условие 7-оптики:

$$dI_{(7)}^2 = \tilde{G}_{AB} dx^A dx^B = 0, \quad (27)$$

где компоненты 7-мерной метрики имеют вид

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \sum_{(2)} \left(p_{(2)}^\mu \right)^2 \exp \left\{ \frac{2i}{h} k_\lambda x_1^\lambda \right\}, \quad (28)$$

$$\tilde{G}_{\mu 4} \approx \frac{1}{16} \sum_{(2)} p_{(2)\mu} \left[\left(p_{(2)}^5 \right)^2 + \left(p_{(2)}^6 \right)^2 \right] \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\}, \quad (29)$$

$$\tilde{G}_{\mu 5} \approx -\frac{1}{8} \sum_{(2)} p_{(2)\mu} p_{(2)}^5 \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\tilde{G}_{44} \approx -\frac{1}{8} k_\mu \sum_{(2)} p_{(2)}^\mu \left[\left(p_{(2)}^5 \right)^2 + \left(p_{(2)}^6 \right)^2 \right] \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\}, \quad (31)$$

$$\tilde{G}_{45} = \frac{1}{8} k_\mu \sum_{(2)} p_{(2)}^\mu p_{(2)}^5 \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\tilde{G}_{55} = \tilde{G}_{66} = -\frac{1}{8} k_\mu \sum_{(2)} p_{(2)}^\mu \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\}, \quad (33)$$

$$\tilde{G}_{46} = \tilde{G}_{56} = 0, \quad (34)$$

где в знак суммирования включены все суммирования как по частицам, составляющим рассматриваемые объекты, так и по системам отношений макроприбора.

§6. Электромагнитное взаимодействие

Выделим в метрике (27) слагаемые, описывающие электромагнитное взаимодействие:

$$dI_{(5)}^2 = \tilde{G}_{AB} dx^A dx^B \neq 0, \quad (35)$$

где $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$. Имея в виду, что компонента метрики \tilde{G}_{56} , как и в теории Калуцы — Клейна, пропорциональна электромагнитному векторному потенциалу, естественно положить, что

$$\frac{1}{2} k_\mu \sum_{(2)} \left(p_{(2)}^\mu + p_{(2)}^\mu \right) \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\} = \epsilon, \quad (36)$$

где $|\epsilon| \ll 1$. Это соответствует известному в электродинамике условию Лоренца. Тогда можно записать

$$\tilde{G}_{55} = -\frac{1}{16} \left(\epsilon - k_\mu k^\mu \right) \sum_{(2)} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_1^\lambda + x_2^\lambda \right) \right] \right\} \quad (37)$$

Из современной формулировки 5-мерной теории Калуцы — Клейна известно (Владимиров, 1987), что для отождествления компонент многомерной метрики с физическими величинами необходимо произвести две процедуры: (1) конформного преобразования исходной метрики и (2) операцию 1+4-расщепления. В качестве *конформного фактора* выберем величину

$$F = \frac{1}{2} \left(\epsilon - k_\mu k^\mu \right) \exp \left\{ \frac{2i}{h} k_\lambda x_1^\lambda \right\} \sum_{(2)} \left(p_{(2)}^6 \right)^2, \quad (38)$$

так что $\tilde{G}_{AB} = F G_{AB}$.

Процедуру 1+4-расщепления следует производить с метрикой G_{AB} . Для этого используем монадный метод в калибровке типа хронометрической в 4-мерной ОТО (Владимиров, 1982). Используя стандартные формулы, находим

$$A_\mu \sim \frac{G_{5\mu}}{\sqrt{G_{55}}} = \frac{1}{2 \sqrt{\sum_{(2)} \left(p_{(2)}^6 \right)^2}} \sum_{(2)} p_{(2)\mu} p_{(2)}^5 \times \frac{\exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_2^\lambda - x_1^\lambda \right) \right] \right\}}{\epsilon - k_\nu k^\nu}, \quad (39)$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon - k_\beta k^\beta} \times \quad (40)$$

$$\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{4 \sum_{(2)} \left(p_{(2)}^6 \right)^2} \sum_{(2)} p_{(2)\mu} p_{(2)\nu} \frac{\exp \left\{ \frac{i}{h} \left[dS_2 + k_\lambda \left(x_2^\lambda - x_1^\lambda \right) \right] \right\}}{\epsilon - k_\sigma k^\sigma} \right)$$

Вспомним, что процедура усреднения по эталонным элементам, образующим классический макроприбор, соответствует использованию совокупности систем отсчета, т.е. в формулах (39) и (40) следует

перейти к интегрированию по d^4k . Кроме того, следует учесть, что $p_{(2)}^5$ соответствует заряду объекта (2). В итоге (39) переходит в известное в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия Фоккера — Фейнмана (Владимиров, Турыгин, 1986) выражение для электромагнитного векторного потенциала в месте нахождения заряда (1), создаваемого всеми другими окружающими зарядами:

$$A_\mu(1) = \sum_{(2)} \int j_{(2)\mu} \delta \left(s^2(1, 2) \right) ds_2. \quad (41)$$

В нашем случае вместо δ -функции получается сингулярная функция

$$D_A^c(x_2 - x_1) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp \left\{ \frac{i}{h} k_\lambda \left(x_2^\lambda - x_1^\lambda \right) \right\}}{k_\sigma k^\sigma - \epsilon} d^4k, \quad (42)$$

которая известным образом связана с δ -функцией. В этой формуле малая величина ϵ определяет контур интегрирования.

§7. Гравитационное взаимодействие

Отдельно рассмотрим слагаемые, описывающие гравитационное взаимодействие. Для этого пренебрежем электромагнитным взаимодействием и запишем 5-мерную метрику, где в качестве пятой координаты выступает x^4 ,

$$dI_{(4)}^2 = \tilde{G}_{AB} dx^A dx^B \neq 0. \quad (43)$$

Сделаем конформное преобразование с конформным фактором, установленным ранее из вида компоненты \tilde{G}_{55} ,

$$F_g = \frac{1}{2} \left(\epsilon - k_\sigma k^\sigma \right) \sum_{(2)} \left(p_{(2)}^6 \right)^2. \quad (44)$$

Далее произведем 1+4-расщепление 5-мерной метрики по рецептам монадного метода в калибровке типа хронометрической. Поскольку имеется недиагональная компонента метрики $G_{4\mu}$, то физически интерпретируемая 4-мерная метрика принимает вид

$$g_{\mu\nu} = \sum \frac{\exp\left\{\frac{2i}{h} k_\lambda x_1^\lambda\right\}}{\epsilon - k_\sigma k^\sigma} \times \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{8 \sum (P_{(2)}^6)^2} \times \sum_{(2)} \left[(P_{(2)}^5)^2 + (P_{(2)}^6)^2 \right] P_{(2)\mu} P_{(2)\nu} \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} k_\alpha (x_2^\alpha - x_1^\alpha)\right\}}{\epsilon - k_\beta k^\beta} \right). \quad (45)$$

Здесь за скобку вынесено выражение, содержащее информацию о положении выделенной частицы (объекта) относительно начала координат эффективной системы отсчета, а в скобках оказались компоненты метрики пространства-времени Минковского и вклады в метрику со стороны всех других частиц мира. Естественно положить, что метрике эйнштейновской ОТО соответствует выражение, стоящее в круглых скобках. Вспоминая, что в знак суммирования входит усреднение по всем эталонным элементам БСКО, составляющим макроприбор, приходим к 4-мерной метрике вида

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{C}{8 \sum (P_{(2)}^6)^2} \times \sum_{(2)} \left[(P_{(2)}^5)^2 + (P_{(2)}^6)^2 \right] P_{(2)\mu} P_{(2)\nu} \int \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} k_\lambda (x_2^\lambda - x_1^\lambda)\right\}}{k_\sigma k^\sigma - \epsilon} d^4 k, \quad (46)$$

где C — некоторый размерный коэффициент.

Отметим, что это выражение соответствует часто используемому в ОТО представлению римановой метрики через метрику пространства-времени Минковского и малые добавки к ней

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (47)$$

где величины $h_{\mu\nu}$ квадратичны по 4-мерным скоростям источников, т.е. для пылевидной материи пропорциональны компонентам энергии-импульса источников.

Заметим также, что в теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия в основном приближении по гравитационной константе также получается эффективная риманова метрика вида (47), где $h_{\mu\nu}$ содержит в себе интегрирование по компонентам тензора энергии-импульса источников (см., например, (Владимиров, Турыгин, 1986)).

Не представляет труда объединить формулы двух последних разделов, т.е. рассмотреть объединенную 6-мерную теорию грави-электромагнитных взаимодействий. Для этой цели следует использовать процедуру 1+1+4-расщепления в рамках диадного метода в калибровке типа дважды примененной хронометрической (Владимиров, 1982). В этом случае в компоненты искривленной 4-мерной метрики будут давать вклады также электромагнитные слагаемые.

§8. Заключение

Подводя итоги, сделаем ряд выводов.

1. Предложенную теорию можно трактовать как обобщение и развитие концепции дальнего действия в физике, в частности, теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера — Фейнмана. Однако в данном подходе идея дальнего действия распространена и на понятия пространства-времени. Заметим, что ранее в исследованиях такого рода пространство-время полагалось априори заданным.

2. В данном подходе проливается свет на суть дополнительных размерностей в многомерных теориях типа Калуцы — Клейна. Оказывается, они обусловлены дополнительными параметрами бинарных систем комплексных отношений рангов, больших (3,3).

3. В изложенной теории нашла свое развитие идея, содержащаяся в 5-оптике Румера, где в качестве пятой координаты предлагалось взять классическое действие. (Заметим, что на квадрат интервала 4-мерного риманова пространства-времени можно смотреть как на условие 5-оптики.) Однако тогда оказывается, что 5-оптика Румера, строго говоря, не предназначена для описания электромагнитного взаимодействия. Для этой цели необходима еще одна размерность. С другой стороны, в общепринятой теории Калуцы — Клейна до сих пор не рассматривалась координата x^4 , и рассуждения начинались с искривленных компонент $G_{\mu\nu}$, фактически уже полученных с ее помощью.

4. В предложенной теории решается загадка, долгое время мешавшая восприятию 5-мерия, о сути компоненты G_{55} . Обсуждались различные гипотезы описания с ее помощью дополнительного скалярного поля геометрического происхождения, изменения физических констант и т.д. С точки зрения изложенного здесь подхода компонента G_{55} играет ключевую роль во всей физике, — ею определяются знаменатели сингулярных функций, входящих в определение промежуточных бозонов переносчиков взаимодействий.

5. В данном подходе явно проявились идеи, обычно связываемые с принципом Маха, понимаемом в широком смысле, т.е. как влияние глобальных факторов мира на локальные закономерности и понятия в физике. Это проявляется во многих моментах изложенного подхода: и в трактовке смысла дополнительных параметров, и в определении компонент римановой метрики, и в смысле фактора ϵ , и в других понятиях. Не

случайно Эйнштейн возвел соображения Маха в ранг принципа в связи с определением метрики искривленного пространства-времени (Эйнштейн, 1965, с.613).

6. Существенно подчеркнуть, что в определение метрики (гравитационного взаимодействия) вносит существенный вклад 6-я компонента многомерного импульса p^6 , определяющая взаимодействие лептонов с Z-бозонами в алгебраической модели электрослабых взаимодействий (Vladimirov, 1995).

7. Наконец, следует отметить, что в данной работе рассмотрен переход от бинарной геометрофизики к многомерным геометрическим моделям физических взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4). Для более высоких рангов, с помощью которых можно описывать барионы, суть рассуждений останется той же, лишь формулы будут иметь более громоздкий вид.

Литература

1. Васильев С.А., Владимиров Ю.С. Кубичный аналог 9-мерного пространства Минковского // В сб. тезисов докладов международной школы-семинара "Многомерная гравитация и космология". М., 1994. с.7.
2. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М., 1982.
3. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М., 1987.
4. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) // Вычислительные системы. 1988. №125. с.42—60.
5. Владимиров Ю.С. Фундаментальные взаимодействия в бинарной геометрофизике // В сб.: Гравитация и электромагнетизм. Вып.5. Минск, 1992. с.63—70.
6. Владимиров Ю.С. Бинарные структуры и неевклидовы геометрии // В сб.: Неевклидовы пространства и новые проблемы физики. Сб. статей, посвященных 200-летию Н.И.Лобачевского. М., 1993. с.45—48.
7. Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия. М., 1986. 134 с.
8. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск, 1968.
9. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М., 1991.
10. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. 1988. №125. с.90—103.
11. Мах Э. Познание и заблуждение. М., 1909.
12. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т.206, №5. с.1056—1058.
13. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. М., 1956.
14. Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А. В сб. Математические методы и физико-механические поля. вып.1. Киев, 1975. с.5—10.
15. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960.
16. Эйнштейн А. Принципы общей теории относительности // Собрание научных трудов. Т.1. М., 1965.
17. Vladimirov Yu.S. Binary geometrophysics: space-time, gravitation // Gravitation and Cosmology. 1995. №3. p.184—190.

Владимиров Ю.С. Бинарная геометрофизика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11617, 01.11.2004

[\[Обсуждение на форуме «Публицистика»\]](#)

