Ю.С.Владимиров

РЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Часть 1

Теория систем отношений

Издательство Московского
университета
1996

Ю.С.Владимиров

РЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Часть 1

Теория систем отношений

Издательство Московского
университета
1996

УДК 530.12; 539.12

Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во МГУ, 1996.– 262 с., 28 рис.

Изложены алгебраические аспекты нового подхода к построению объединенной теории пространства-времени и физических взаимодействий (бинарной геометрофизики), опирающегося на понятие отношений между событиями. Математическую основу этого подхода составляет теория бинарных систем комплексных отношений (обобщение бинарных физических структур). Физический фундамент данного направления составляют три сорта идей: 1) о макроскопической природе классического пространства-времени, 2) о прямом межчастичном взаимодействии частиц (концепция дальнодействия Фоккера-Фейнмана, альтернативная теории поля) и 3) принципы многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. В книге развита теория бинарных систем комплексных отношений, являющаяся прообразом и обобщением теории систем отсчета в теории относительности. Показано, что основы теории пространства-времени и фундаментальные понятия физики микромира можно истолковать в терминах бинарных систем комплексных отношений низших рангов (размерностей).

Книга предназначена для специалистов в области теоретической физики, студентов физико-математических факультетов университетов и достаточно подготовленных лиц, интересующихся принципами построения физики.

Издание подготовлено в пакете CyrTUG-emTeX с использованием кириллических шрифтов семейства LH.

В $\dfrac{1604030000}{077(02)-96}$ **Без объявл.**

ISBN 5-211-03638-7 (Ч.1)
ISBN 5-211-03639-5

©Ю.С.Владимиров, 1996

Оглавление

Предисловие 6

Введение 10

Глава 1. Введение в теорию систем отношений 22
1.1. Определение системы отношений 22
1.2. Бинарные системы вещественных отношений 27
1.3. Объединение двух типов диагональных бинарных систем вещественных отношений 32
1.4. Унарные системы вещественных отношений низших рангов 35
1.5. Системы отсчета и координатные системы в пространстве Минковского 40
1.6. Переход от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям 46
1.7. Выводы и замечания по теории систем вещественных отношений 49

Глава 2. Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) и 2-компонентные спиноры 52
2.1. Системы отношений в бинарной геометрофизике 52
2.2. Закон и основные понятия бинарной системы комплексных отношений 56
2.3. Группа преобразований в рамках одной системы отношений 60
2.4. Переходы между разными системами отношений ранга (3,3) 64
2.5. Двухкомпонентные спиноры 67
2.6. Четырехмерные векторы 70
2.7. Преобразования Лоренца 73
2.8. Прообраз пространства Минковского 77

Глава 3. Импульсное пространство свободных лептонов 82
3.1. Геометрия Лобачевского 82

3.2. Биспиноры и 4-мерные тензоры 87
3.3. Массивная частица в собственной системе отношений 91
3.4. Массивная частица в произвольной системе отношений 96
3.5. Прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве 99
3.6. Бинарная геометрофизика и твисторная программа Пенроуза 102

Глава 4. Классическое пространство-время 108
4.1. Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2) 108
4.2. Переход к унарным системам вещественных отношений 112
4.3. БСКО ранга (2,2) как подсистема БСКО ранга (3,3) 115
4.4. Физическая интерпретация БСКО ранга (2,2) 119
4.5. Бинарная система отношений ранга (2,2;a) и хроногеометрия 122
4.6. Классическое пространство-время 126
4.7. Фундамент физического мироздания 130

Глава 5. Бинарная система комплексных отношений ранга (4,4) и 3-компонентные спиноры 133
5.1. Основные понятия бинарных систем комплексных отношений ранга (4,4) 133
5.2. Преобразования в рамках одной обобщенной системы отношений 137
5.3. Трехкомпонентные спиноры 140
5.4. Девятимерные векторы 144
5.5. Обобщение метрики Минковского 147
5.6. Обобщенная теорема косинусов 151
5.7. Кубичные детерминанты 154
5.8. Закон трехточечной геометрии 157

Глава 6. Обобщенные импульсы и частицы 162
6.1. Трехточечное обобщение геометрии Лобачевского 162
6.2. Обобщенные биспиноры и 9-мерные векторы 165
6.3. Собственная система отношений обобщенной частицы 169
6.4. Девятимерные бусты 172
6.5. Прообраз уравнения Дирака в 9-мерном импульсном пространстве 174
6.6. БСКО ранга (4,4) и хромодинамика 177

6.7. К физической интерпретации БСКО ранга (4,4) 181

Глава 7. Редукция бинарного многомерия ранга (4,4) к 4-мерной теории 184
7.1. Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна 184
7.2. Подгруппа 4-мерных преобразований $SL(2,C)$ 188
7.3. Внутреннее пространство обобщенной частицы 191
7.4. Редукция уравнений Дирака 194
7.5. Подгруппа калибровочных преобразований 197
7.6. Подгруппа суперсимметричных преобразований 200
7.7. Подгруппа квазиконформных преобразований 204

Глава 8. Алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия и БСКО ранга (4,4;a) 206
8.1. Базовое 4×4-отношение 207
8.2. Переход от невырожденной БСКО ранга (4,4) к вырожденной 209
8.3. Фундаментальные отношения в теории БСКО ранга (4,4;a) 211
8.4. Промежуточный вариант БСКО ранга (4,4) 215

Глава 9. Бинарная система комплексных отношений ранга (5,5) 218
9.1. Закон и ключевые группы преобразований БСКО ранга (5,5) 218
9.2. 6-Мерные пространства состояний 220
9.3. Группа преобразований $SO(2,4)$ 224
9.4. 16-Мерные векторы и обобщенная метрика 229
9.5. К теории четырехточечной геометрии 232
9.6. Гиперчастицы 236
9.7. Редукция БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4) 239
9.8. К физической интерпретации БСКО более высоких рангов 242

Заключение 243

Приложения А 248
А.1. Вывод закона бинарной системы вещественных отношений ранга (2,2) 248
А.2. Определение спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел 251
А.3. Коэффициенты 9-мерных преобразований 254

Литература 257

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга явилась итогом многолетних размышлений о сущности физического пространства-времени. Что такое пространство и время? Справедливы ли классические пространственно временные отношения в микромире? Можно ли найти более элементарные понятия, опирающиеся на физические свойства микромира, из которых выводились бы известные свойства классического пространства и времени? Почему классическое пространство-время 4-мерно? Почему сигнатура классического пространства-времени – $(+---)$? Что кроется за дополнительными размерностями в многомерных теориях Калуцы-Клейна? Как объединить принципы квантовой теории и общей теории относительности? и т.д.

В качестве предварительного шага на пути к решению этих проблем автор попытался разобраться в вопросе: Какой комплекс понятий и закономерностей подразумевают, когда говорят о классическом пространстве и времени? Это побудило заняться аксиоматикой геометрии и теории относительности. В частности, была предпринята попытка сформулировать аксиоматику общей теории относительности [9].

Изучение сущности и проблем общей теории относительности было обусловлено тем, что эйнштейновская теория гравитации представляет собой раздел физики, где достигнут наиболее значительный прогресс в раскрытии свойств пространства-времени. Именно эта теория сейчас представляется венцом многовековых размышлений человечества о геометрии — от Евклида до Н.И.Лобачевского, Я.Бояи, К.Гаусса, Б.Римана, затем от Э.Маха, А.Эйнштейна и до наших дней. Сейчас хорошо известно, что сутью общей теории относительности явилось, во-первых, обобщение метрических аксиом евклидова пространства и, во-вторых, объединение категорий пространства и времени в единое 4-мерное многообразие. Проблемам, связанным как с объединением этих категорий, так и, главным образом, с расщеплением 4-мерного пространства-времени на 3-мерное пространство и время наблюдателя была посвящена книга автора “Системы

отсчета в теории гравитации" [10].

Однако нельзя забывать, что общая теория относительности описала геометрическим образом лишь один из известных видов физических взаимодействий — гравитационное. С созданием общей теории относительности сразу же (и даже раньше) был поставлен вопрос о геометризации других известных взаимодействий, главным образом электромагнитного. Встал вопрос: с какими обобщениями свойств пространства и времени можно связать электромагнитное, электрослабое и сильное взаимодействия? Здесь наиболее плодотворной оказалась идея дальнейшего обобщения размерности, т.е. гипотеза Маха-Калуцы об увеличении размерности классического пространства-времени. Автор этой книги также принял участие в анализе и развитии этой идеи. Результаты проведенных исследований изложены в двух монографиях: "Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий" [13] и "Пространство-время: явные и скрытые размерности" [15].

Параллельно с этими исследованиями автора волновал вопрос о выборе одной из двух альтернативных концепций построения теории пространства-времени и физических взаимодействий: реляционной и субстанциальной (полевой). Дискуссия по этому вопросу началась со времен И.Ньютона (и даже раньше), затем она проявилась в отношении А.Эйнштейна к идеям Э.Маха. Потом концепция дальнодействия возродилась в работах А.Фоккера, Г.Тетроде, Я.И.Френкеля, Р.Фейнмана, Ф.Хойла и других в виде теории прямого межчастичного взаимодействия. Оказалось, что можно построить теории прямого межчастичного электромагнитного и даже гравитационного взаимодействий, эквивалентные общепринятым полевым теориям. В нашей книге с А.Ю.Турыгиным "Теория прямого межчастичного взаимодействия" [12] была предложена такая теория гравитации, эквивалентная общей теории относительности. Эти исследования поставили автора перед вопросом: какой путь развития теории пространства-времени предпочесть — традиционный, в рамках теории поля, или реляционный, соответствующий концепции дальнодействия? Как известно, Р.Фейнман шел к своим результатам по квантовой электродинамике, придерживаясь концепции дальнодействия.

В этот момент счастливой находкой явилось знакомство с работами Ю.И.Кулакова [27-29], который с середины 60-х годов в Новосибирске со своими учениками развивал своеобразную теорию, названную им теорией физических структур. По своей сути это универсальная (алгебраическая) теория метрических отношений. На основе ее принципов можно описывать как известные виды геометрии, так и построить новые виды, в частности би-

нарные геометрии (на двух множествах элементов).

Подробное знакомство автора с теорией физических структур состоялось летом 1984 года на первой школе по теории физических структур (ТФС-1) на озере Баланкуль вблизи Енисея. Затем проведение таких летних школ стало регулярным (в Пущино-на-Оке, во Львове, в Ярославле). На них состоялся обстоятельный анализ соотношения теории относительности, многомерных теорий Калуцы-Клейна, теории прямого межчастичного взаимодействия и квантовой гравитации с принципами теории физических структур.

Постепенно стало ясно, что комплексифицированная теория бинарных физических структур является подходящей математической основой для решения поставленных выше вопросов. Сложилась новая теоретическая конструкция (парадигма), описывающая пространственно-временные отношения и известные виды физических взаимодействий. Она была названа автором *бинарной геометрофизикой.* В математическом плане бинарная геометрофизика опирается на обобщение аппарата теории бинарных физических структур Кулакова, а в физическом плане – на идеи 1) макроскопического подхода к природе классического пространства-времени, 2) теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана и 3) многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна.

Результаты, обсуждавшиеся на школах и совещаниях, были изложены в монографии Ю.И.Кулакова, Ю.С.Владимирова, А.В.Карнаухова "Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику" [32]. Концептуальные основы бинарной геометрофизики и ее соотношение с другими физическими парадигмами обсуждены в книге автора "Фундаментальная физика, философия и религия" [21].

Первоначальный вариант этой книги под названием "Начала бинарной геометрофизики" был принят к печати в Издательстве Московского Университета в 1992 году, однако из-за финансовых трудностей в то время опубликован не был. За прошедшее время были получены новые результаты, и рукопись была радикально переработана. Из нее был выделен раздел, включающий в себя базисные алгебраические аспекты бинарной геометрофизики. Этот материал составил содержание первой части ("Теория систем отношений") задуманного сочинения под общим названием "Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий". Во вторую часть ("Теория физических взаимодействий") будут включены вопросы перехода к макропонятиям и описания физических взаимодействий.

Предполагается, что читатель достаточно хорошо владеет основами современной теоретической физики хотя бы в объеме

трех-четырех университетских курсов физико-математических факультетов.

Автор выражает признательность Ю.И.Кулакову, Г.Г.Михайличенко и В.Х.Льву за плодотворное многолетнее сотрудничество, отличающееся доброжелательностью и искренней теплотой. Автор благодарит всех участников школ и совещаний по теории физических структур, а также семинаров Российского гравитационного общества и “Геометрия и физика”, работающих на физическом факультете МГУ, за многократные обстоятельные дискуссии по затронутым в книге проблемам.

ВВЕДЕНИЕ

1. Извечные сакраментальные вопросы: Что такое пространство? Что такое время? Зная теорию относительности, можно было бы спросить: Что такое пространство-время? Однако подобные вопросы в науке не совсем корректны. Правильнее ставить вопрос иначе. Либо — Что мы подразумеваем в физике всякий раз, когда пользуемся понятием пространства-времени? Либо — Каким образом возникает это понятие из каких-то других, более первичных? В последнем случае классическое пространство-время полагается вторичным понятием, следующим из чего-то другого, более фундаментального.

Сейчас имеются все основания полагать, что классическими пространственно-временными представлениями описываются отношения между макрообъектами определенного масштаба. За его пределами эти представления теряют силу и должны быть изменены. Это проявляется как при переходе к большим масштабам, где имеют место закономерности общей теории относительности, так и в масштабах микромира, где им на смену приходят законы квантовой механики и физики элементарных частиц. В основу этой книги положены убеждения автора, что имеется некая система фундаментальных понятий, проявляющихся в физике микромира, из которой при переходе к масштабам макрообъектов возникают классические пространственно-временные представления. Искалась система понятий (теория), удовлетворяющая следующим условиям:

1) Она должна представлять собой прообраз классических пространственно-временных отношений, опирающийся на собственную (не зависящую от классических) систему представлений.

2) Фундаментальные понятия такой теории должны быть пригодны для описания квантовомеханических закономерностей.

3) Основные понятия теории должны описывать как прообраз пространственно-временных отношений в микромире, так и характеристики известных физических взаимодействий элементарных частиц.

4) Теория должна отвечать на вопрос: Как перейти от системы отношений в микромире к классическим пространственно-временным отношениям?

5) От теории ожидалось обоснование ряда ключевых свойств классического пространства-времени, в частности наблюдаемой классической 4-мерности и сигнатуры (ответ на вопрос Э.Маха: "Почему пространство трехмерно?").

6) Теория призвана также прояснить вопрос о природе и особенностях (компактификации) скрытых размерностей в многомерных теориях Калуцы-Клейна.

Развитие теории такого рода преследует и ряд других более отдаленных целей, таких, как достижение прогресса в построении теории великого объединения физических взаимодействий, решение проблемы расходимостей в теории поля, построение квантовой гравитации и т.д. Но нам представляется, что последние задачи имеют подчиненный характер. Вскрытие системы понятий, адекватно описывающей свойства микромира, не может не привести к прогрессу в решении упомянутых проблем.

Для построения такой теории пришлось отказаться от общепринятого понимания сущности пространства-времени и опереться на концепцию реляционного подхода к природе пространства-времени и физических взаимодействий.

2. Кратко напомним, что же понимается в физике под классическим пространством-временем. Прежде всего подчеркнем, что в современной физике пространство-время рассматривается как *самостоятельная категория*, выполняющая роль "вместилища" всего сущего, в которое как на арену помещаются частицы, тела и поля, переносящие взаимодействия. Именно исходя из этого допускается постановка вопроса об определении пространства-времени (геометрии) как самостоятельной сущности. При таком понимании проблемы самый строгий ответ дается в рамках *аксиоматики* геометрии (пространства и времени). Аксиоматический подход к геометрии известен с "Начал" Евклида (Ш век до н.э.). Широко известна также более чем двухтысячелетняя история с пятым постулатом Евклида. В течение последнего столетия был построен ряд более совершенных аксиоматик как геометрии Евклида, так и более общих геометрий. Оказалось, что даже 3-мерная геометрия Евклида, которой с высокой степенью точности описывается классическое пространство, является довольно сложной конструкцией.

В аксиоматическом подходе пространство (геометрия) трактуется как сложное понятие из примитивов — исходных (далее не определяемых) элементарных понятий, подчиняющихся определенной системе аксиом. В качестве примитивов выступают точки, прямые, плоскости. Имеется ряд аксиоматик евкли-

довой геометрии, например аксиоматики Гильберта, Костина и др. В них число аксиом варьируется, однако, как правило, превышает два десятка. Принято разбивать аксиомы на группы: аксиомы порядка, метрические аксиомы, аксиома Архимеда, топологические аксиомы и т.д.

После открытия специальной теории относительности (СТО) стало ясно, что 3-мерное евклидово пространство объединено с 1-мерным временем в единое 4-мерное пространство-время (Минковского). Были разработаны аксиоматики 4-мерного пространства-времени А.Робба, А.Д.Александрова и ряд других. В них в качестве примитивов выступают точки-события. Оказывается, переход к 4-мерному пространству-времени можно трактовать как изменение *аксиом упорядоченности* событий. Аксиомы линейной упорядоченности заменяются на аксиомы частичной упорядоченности [1].

В большинстве аксиоматик СТО (см., например, [1, 48, 49]) аксиомы частичной упорядоченности рассматриваются как ключевые, с которых начинается построение аксиоматики. На них нанизываются все остальные группы аксиом (см. рис. 01). Именно отношения упорядоченности обусловливают понятие причинности в физике.

Следующий важный класс аксиом пространства Минковского — *метрические аксиомы.* Их суть состоит в том, что для любой пары точек-событий задается вещественное число, называемое квадратом интервала между событиями (Δs^2). Интервал Δs обобщает понятие длины Δl между двумя точками в евклидовой геометрии или понятие промежутка абсолютного времени Δt между двумя событиями. Метрические аксиомы привязаны к аксиомам частичной упорядоченности. В частности, квадрат интервала между двумя точками положителен ($\Delta s^2 > 0$), если точки-события упорядочены (временно-подобны), и отрицателен ($\Delta s^2 < 0$), если точки-события пространственно-подобны. Отно-

[1]Напомним, абсолютность времени в дорелятивистских представлениях можно понимать как свойство линейной упорядоченности точек-событий. Оно означает, что для любых двух событий a и b имеет место одно из трех отношений: либо b' следует за a ($b' > a$), либо a следует за b'' ($b'' < a$), либо a и b''' одновременны ($a = b'''$). Свойство линейной упорядоченности физически означает наличие сигналов с бесконечной скоростью распространения. Принятие постулата специальной теории относительности (СТО) о предельной скорости (света) привело к замене свойства линейной упорядоченности свойством частичной упорядоченности. Последнее означает, что для любых двух различных точек a и b имеет место одно из трех отношений: либо b' следует за a ($b' > a$), либо a следует за b'' ($b'' < a$), либо a и b''' не следуют друг за другом ($b''' \leftrightarrow a$), т.е. они не упорядочены. Первые два отношения означают временно-подобность рассматриваемых событий, последнее — пространственно-подобность.

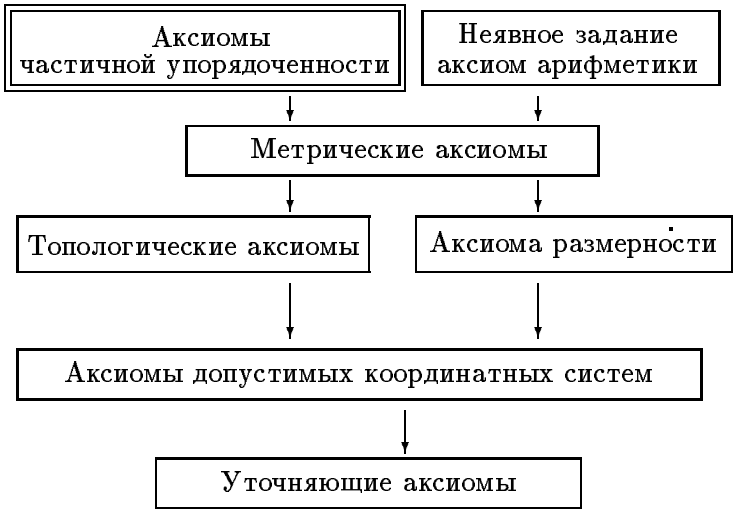


Рис. 0.1: Аксиоматика геометрии (теории физического пространства-времени)

сительно любой точки-события важную совокупность образуют точки на световом конусе — на границе между пространственно-подобными и временно-подобными событиями (рис. 0.2). Принципиально важно, что при определении метрических отношений используются вещественные числа. В связи с этим в некоторых аксиоматиках говорится о неявном задании аксиоматики арифметики. В других аксиоматиках отдельно выделяется аксиома Архимеда, утверждающая, что если даны два отрезка (числа), то складывая меньший отрезок (число) некоторое число раз, всегда можно превзойти больший отрезок (число).

Далее назовем класс *топологических аксиом*, формирующих понятие непрерывности. Среди топологических аксиом особняком стоит *аксиома размерности*. Пространство-время Минковского 4-мерно (постулируется, что размерность $n = 4$) [2]. Кроме

[2]Напомним, что физики-теоретики начиная с Э.Маха [38] ставили вопрос: почему пространство 3-мерно? Предпринимались попытки дать физическое обоснование геометрической аксиомы 3-мерности пространства (4-мерности пространства-времени).

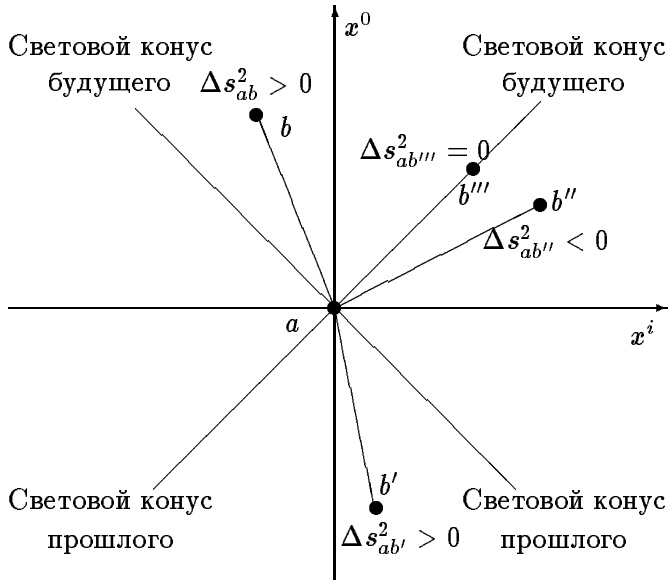


Рис. 0.2: Частичная упорядоченность в пространстве Минковского

того, имеется класс *аксиом допустимых координатных преобразований* и систем отсчета. В рамках этих аксиом формируются понятия преобразований Лоренца и Пуанкаре.

3. Переход от СТО к эйнштейновской общей теории относительности (ОТО) состоит в обобщении метрических аксиом. Метрика ds^2 задается инфинитезимально, т.е. между парами близких точек-событий. Пространство-время становится искривленным (римановым). В настоящее время построено несколько аксиоматик ОТО (см., например, [9, 43, 48]).

В последнее время интенсивно развиваются многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна [13, 24]. Их главное отличие от 4-мерной ОТО состоит в обобщении аксиомы размерности. В теории Калуцы-Клейна, объединяющей гравитационные и электромагнитные взаимодействия, размерность $n = 5$. В других теориях, претендующих на объединение гравитационных и электрослабых или даже и сильных взаимодействий, $n > 5$. Имеются варианты теорий размерностей $n = 6, 7, \ldots, 10, 11$ и более.

Уже ни у кого не вызывает сомнения, что наиболее радикальные открытия в фундаментальной теоретической физике связаны с изменением представлений о свойствах пространства-времени. Можно утверждать, что создание квантовой механики не составило исключения. Оказалось, что в микромире проявляется дополнительность геометрических и динамических свойств материи. Были предприняты попытки трактовки квантовой механики посредством изменения некоторых аксиом классического пространства-времени.

Независимо от названных проблем следует упомянуть довольно значительное число работ, в которых изучался характер мыслимых физических теорий при изменениях каких-то аксиом пространства-времени. Сейчас трудно указать аксиомы, которые бы не пробовали изменить. (Конечно, имеются в виду аксиомы из наиболее распространенных аксиоматик геометрии.) Заметим, что при использовании дифференциальных геометрий, да еще различной размерности, таких возможностей очень много. Можно назвать геометрии с кручением, с неметричностью (геометрию Вейля), финслеровы геометрии и др.

4. Однако это направление поиска далеко не исчерпывает всех возможностей. Как уже подчеркивалось, упомянутые здесь подходы к определению и к обобщениям пространства-времени опираются на понимание его как самостоятельной физической категории. Но есть и другое понимание природы пространства-времени. В связи с этим следует напомнить, что имеются две точки зрения на сущность пространства-времени: субстанциальная (или квазисубстанциальная) и реляционная.

Именно в *субстанциальном* подходе пространство-время понимается как самостоятельная категория или как некая фоновая субстанция [3]. Известно, что подобная концепция пространства в той или иной форме высказывалась еще в древности, в частности Демокритом. Классическое пространство, использованное в механике Ньютона-Галилея, соответствует субстанциальному подходу. Происшедшие с тех пор изменения в понимании свойств пространства-времени не затронули главного — представлений о фоновом характере пространства-времени как вместилища всего сущего. Не избежали этого ни эйнштейновская ОТО, ни теории Калуцы-Клейна.

Второй, *реляционный* подход отрицает самостоятельную сущность пространства-времени. Согласно этой концепции классическое пространство-время представляет собой лишь особый вид отношений, в которые вступают друг с другом макроскопические материальные объекты. Без материальных объектов нет и

[3] В ряде теорий даже предлагается из этой фоновой субстанции строить все известные виды материи.

понятий пространства и времени. Высказывания в духе этой концепции можно найти у Аристотеля, именно ее отстаивали Г.Лейбниц и затем Э.Мах. Так, Лейбниц (1646–1716) в одном из писем С.Кларку писал: "Я вовсе не говорю, что материя и пространство одно и то же, а лишь утверждаю, что без материи нет и пространства, и что пространство само по себе не представляет собой абсолютной реальности"[37, с.84]. Аналогично высказывался Э.Мах (1838–1916). Так, обсуждая понятия механики, он писал, что Ньютоном была предпринята "рискованная попытка отнести всю динамику к *абсолютному пространству* и соответственно к *абсолютному времени.* На практике это предположение, кажущееся бессмысленным, ничего не изменило в признании неподвижных звезд за систему пространственных и временных координат; оно осталось поэтому безвредным и в течение долгого времени ускользало от серьезной критики. Можно, пожалуй, сказать, что главным образом именно со времени Ньютона время и пространство стали теми *самостоятельными* и однако бестелесными сущностями, которыми считаются по настоящее время" [38, с.440]. Сам Мах так понимал эти категории:"В отношении физическом время и пространство суть особые зависимости физических элементов друг от друга" [38, с.432]. "Время и пространство существуют в определенных отношениях физических объектов, и эти отношения не только вносятся нами, а существуют в связи и во взаимной зависимости явлений"[39, с.71]. "Мы можем сказать, что во временной зависимости выражаются простейшие непосредственные физические отношения" [38, с.437]. "В пространственных отношениях находит свое выражение посредственная физическая зависимость" [38, с.438]. Особенно хотелось бы подчеркнуть использованный Махом термин "*отношение*" для определения сути пространства и времени. Этот термин будет играть ключевую роль во всей этой книге. Позднее аналогичным образом высказывались Ф.Хойл [63], Дж.Нарликар [44] и другие физики-теоретики.

Следует отметить, что современная наука (физика и математика) достаточно преуспела в построениях и в изучении возможных (непрерывных) математических моделей пространства-времени. Развит мощный аппарат дифференциальной геометрии, на который опирается вся ОТО и многочисленные возможные ее обобщения. И все это фактически находится в арсенале сторонников субстанциальной концепции пространства-времени. А что могут этому противопоставить сторонники реляционной концепции? До самого последнего времени не так уж и много, — главным образом, рассуждения философского характера, кое-какие математические фрагменты и далеко не всеми разделяемую концепцию дальнодействия в физике, именуемую как теория

прямого межчастичного взаимодействия (action at a distance). Однако, продвинувшись в описании физических взаимодействий, сторонники этой теории остановились перед задачей построения реляционной концепции самого пространства-времени. Декларируя его реляционный характер, в теории прямого межчастичного взаимодействия обычно опираются на уже готовое (чаще всего плоское) 4-мерное пространство-время.

5. И вот сравнительно недавно, в 60-х годах в Новосибирске в работах Ю.И.Кулакова [27], а затем Г.Г.Михайличенко [40-42] и В.Х.Льва [33-36] была развита своеобразная теория, названная *теорией физических структур*. Ее появление не было связано ни с теорией прямого межчастичного взаимодействия, ни с противопоставлением субстанциальной и реляционной концепций пространства-времени. Она возникла из совсем иных соображений. Однако теорией физических структур были заложены основы универсальной алгебраической теории отношений между элементами (объектами) произвольной природы. Исходными положениями теории физических структур были элементы одного или двух множеств и отношения между ними (вещественные числа). И далее из соображений равноправности элементов развивалась содержательная теория возможных отношений.

В работах новосибирской группы было показано, что, например, евклидовы 3-мерные пространственные отношения можно трактовать как частный случай физических структур на одном множестве элементов с вещественными отношениями. Оказалось, что как частные случаи возникают и другие известные (и практически неизвестные) виды геометрий. Было также показано, что существуют своеобразные *бинарные геометрии* (на двух множествах элементов), более элементарные, чем обычные геометрии. От них можно перейти к структурам на одном множестве элементов, но не наоборот.

Очевидно, что аксиоматика теории отношений (физических структур) и следующих из нее геометрий должна иметь иной характер по сравнению с аксиоматиками общепринятых геометрий. Однако, как правило, аксиоматический подход уместен для достаточно устоявшихся разделов науки и далеко не всегда плодотворен на стадиях их интенсивного развития, каковой ныне представляется теория отношений. Тем не менее уже имеется несколько попыток аксиоматизации этой теории [23, 55]. В этой книге мы не будем следовать аксиоматическому подходу. Это завело бы в дебри математических тонкостей.

В теории Кулакова провозглашается, что физические структуры описывают законы физики (отсюда и ее название), и делается попытка доказать это, демонстрируя, что ряд законов общей физики (2-й закон Ньютона, закон Ома и некоторые дру-

гие) может быть переформулирован на языке теории физических структур. Еще раз подчеркнем, что в группе Ю.И.Кулакова рассматриваются лишь вещественные отношения. Такая теория не распространяется на физику микромира, но в ее рамках установлено, что известные геометрии с симметриями, в том числе и описывающая 4-мерное пространство Минковского, могут рассматриваться как унарные (на одном множестве элементов – точек) физические структуры.

6. Для решения поставленной выше проблемы вывода теории классического пространства-времени из более элементарных понятий, проявляющихся в физике микромира, чрезвычайно важным оказалось открытие Кулаковым бинарных (на двух множествах элементов) структур (геометрий). В связи с тем, что в современной теоретической физике довольно ярко выражена тенденция геометризации физических понятий и фундаментальных взаимодействий, возникла мысль применить для этих целей новые, более элементарные — бинарные геометрии. Оказалось, что ряд понятий таких геометрий, опять-таки совсем в другом контексте, уже давно используется в современной теоретической физике. Это – понятия спиноров, амплитуд вероятностей в квантовой механике, цветов кварков в теории элементарных частиц и многие другие.

Излагаемая в книге реляционная теория пространства-времени и взаимодействий нами названа *бинарной геометрофизикой.* В этот термин заложено, во-первых, то, что теория опирается на бинарные структуры, во-вторых, что эти конструкции представляют собой своеобразные (бинарные) геометрии, и, в-третьих, что эти геометрии предлагается положить в фундамент физики и теории физического пространства-времени. Бинарная геометрофизика использует основные идеи математического аппарата теории физических структур Кулакова, однако она принципиально отличается от последней как по видению проблемы, так и по характеру ее решения. Во-первых, в бинарной геометрофизике используется обобщенная теория бинарных систем (структур) *комплексных* отношений (низших рангов), а во-вторых, ищутся не иллюстрации применимости таких систем отношений в физике, а на этом фундаменте возводится цельная система физического мироздания. При этом полагается, что алгебраическая теория бинарных систем комплексных отношений (БСКО) самым непосредственным образом описывает закономерности физики микромира. От простейших БСКО посредством предельного перехода к большим ансамблям элементов (к макрообъектам) предлагается построение физики макромира одновременно с формированием классических пространственно-временных отношений между макрообъектами. Таким образом, в этом подходе

классическое пространство-время, во-первых, имеет вторичный, производный характер – получается из более элементарных отношений – и, во-вторых, эти отношения справедливы лишь для макрообъектов, т.е. лишь в классической области.

7. Забегая вперед, укажем на некоторые аналоги групп традиционных аксиом и ключевых понятий теории систем отношений (физических структур). Оказывается, понятия упорядоченности тесно связаны с бинарностью систем отношений. Как правило, одно множество элементов будет интерпретироваться как начальные состояния (частиц), а второе множество будет соответствовать конечным состояниям.

Наиболее важным понятием в данном подходе является отношение — число, задаваемое для двух (или более) элементов. Несомненно, отношение соответствует метрике общепринятых геометрий, причем это соответствие не обязано быть непосредственным. Ниже будет показано, что привычные метрические отношения — квадрат интервала или длины будут определяться как некие функции от первичных (комплексных) отношений между элементами.

В теории отношений своеобразно возникает аналог общепринятой геометрической размерности. Оказывается, понятие размерности соответствует числам элементов – рангам, для которых записывается закон системы отношений.

8. На рисунке 0.3 изображена блок-схема бинарной геометрофизики и ее соотношение с программой теории физических структур Ю.И.Кулакова. Левая часть рисунка поясняет содержание теории физических структур (ТФС). В этой части верхний блок соответствует общей части математического аппарата теории физических структур (с вещественными отношениями). Под ним изображен блок, соответствующий геометриям с симметриями, которые можно трактовать как различные конкретные физические структуры на одном множестве элементов (унарные системы вещественных отношений различного ранга). Снизу изображен блок, соответствующий примерам законов из общей физики, которые удалось переформулировать на языке теории физических структур.

В правой части рисунка в самых общих чертах изображена блок-схема бинарной геометрофизики. Она включает в себя математический аппарат теории бинарных систем комплексных отношений, главным образом, в виде теорий ряда разновидностей БСКО низших рангов. Эта часть отмечена верхним блоком. Следующий блок содержит в себе теории унарных систем вещественных отношений (УСВО), выводимых из бинарных систем комплексных отношений (БСКО). Еще ниже расположен блок физической интерпретации понятий и соотношений БСКО

в физике микромира. На этом заканчивается материал бинарной геометрофизики, включенный в эту часть книги.

Следующая часть бинарной геометрофизики описывает переход от элементарных алгебраических понятий к понятиям макрофизики. Здесь существенны идеи, ранее развитые в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия (ТПМЧВ) Фоккера-Фейнмана. Примечательно, что процедура перехода к макрообъектам непосредственно выводит на понятия многомерного пространства-времени, где важную роль играют методы и идеи многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Только пройдя этот этап, можно выйти на теорию 4-мерного классического пространства-времени и понятия классической физики. Эти части теории отмечены тремя нижними группами блоков в правой части схемы.

На этом же рисунке отмечен материал, который включен в эту книгу. Прежде всего, это изложение математического аппарата теории систем вещественных отношений (СВО), входящего в теорию физических структур. Это сделано в первой главе. Там же показано, какие геометрии с симметриями описываются унарными системами вещественных отношений (УСВО). В последующих главах рассмотрены теории бинарных систем комплексных отношений низших рангов: (3,3), (2,2), (4,4), ..., (n,n). Попутно дана физическая интерпретация основных понятий и соотношений БСКО в рамках физики микромира, главным образом относящихся к свойствам свободных (идеализированных) частиц. Все вопросы, связанные с описанием взаимодействий между частицами, и предельный переход к макрофизике, включая окончательное формирование классического пространства-времени, намечено включить в другую часть книги.

Рис. 0.3: Блок-схема бинарной геометрофизики (БГФ) и ее соотношение с программой теории физических структур (ТФС)

Глава 1

Введение в теорию систем вещественных отношений

Задача этой главы состоит в изложении основной информации из теории систем вещественных отношений. Здесь перечислены законы бинарных и унарных систем отношений, а также проанализирован ряд их математических свойств. Основной упор сделан именно на бинарные системы отношений. В этой главе рассмотрены также законы для унарных систем вещественных отношений низших рангов и обсужден их геометрический смысл.

1.1 Определение системы отношений

1. В предложенной Ю.И.Кулаковым теории физических структур [27, 29] следует различать математический аппарат и его физические приложения. Математическую часть теории физических структур можно назвать алгебраической теорией систем отношений между элементами произвольной природы. В ней постулируется наличие одного или нескольких множеств элементов, между которыми определены отношения, обладающие специальными алгебраическими свойствами. Понятие элемента множества является примитивом теории, т.е. далее не определяется кроме того, что удовлетворяет ниже сформулированным свойствам. В качестве элементов могут выступать элементарные частицы или их составляющие части, геометрические точки-события, физические тела и т.д. В общем случае отношение между элементами — это число (вещественное, комплексное или даже совокуп-

ность из нескольких чисел), сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов, принадлежащих одному или разным множествам. В качестве отношений между элементами могут выступать расстояния между точками, метрика, скалярные произведения векторов, вклады в действия частиц, обусловленные их взаимодействием и т.д. Наиболее важными являются случаи, когда числа сопоставляются парам элементов. Именно таковыми являются метрические отношения в общепринятой геометрии или в теории линейных пространств. В этой книге основной упор делается на теории с парными отношениями, хотя в главах 5–9 рассматриваются также тройные и даже более сложные отношения.

Если рассматривать одно множество, то построенную на нем теорию будем именовать *унарной системой отношений* (УСО), а если элементы составляют два множества и рассматриваются отношения лишь между элементами разных множеств, то построенную на них теорию будем называть *бинарной системой отношений* (БСО). В принципе, можно было ожидать существование тернарных систем отношений, т.е. теории, построенной на трех множествах элементов, а также теорий еще более общих систем отношений. Однако в группе Ю.И.Кулакова показано, что содержательная теория возможна лишь на одном или на двух множествах. (На трех множествах получается лишь тривиальный вариант теории, по крайней мере для случая вещественных отношений.) В основу развиваемой в книге бинарной геометрофизики положены именно бинарные системы отношений.

2. Задание элементов и отношений между ними еще не составляет теории. Необходимо ввести еще какие-то закономерности, т.е. задать свойства этих отношений, которые сделали бы математическую конструкцию содержательной теорией. Таковым простейшим случаем является тот, когда числовые отношения между элементами удовлетворяют неким *алгебраическим соотношениям.* Каким? Простейшее, что можно придумать, это выделить из множеств элементов какие-то подмножества, взять числовые отношения между элементами этих подмножеств и предположить, что между ними имеется какое-то алгебраическое соотношение. Оказывается, эта простая мысль содержит в себе чрезвычайно много и приводит к содержательным следствиям.

Прежде всего, эта идея позволяет определить совокупность (иерархию) теорий систем отношений, различающихся числами элементов в выделенных подмножествах. Назовем эти числа *рангом* системы отношений, т.е. ранг определяет, сколько элементов должно содержать подмножество, для отношений в котором имеет место алгебраическое соотношение. Для унарных систем

отношений это одно число r. Для бинарных систем отношений ранг определяется двумя числами (r, s), характеризующими количество элементов в двух множествах.

Для унарных систем отношений ранга r с парными отношениями алгебраическое соотношение представляет собой равенство нулю некоторой функции Φ от $C_2^r = \frac{r(r-1)}{2}$ аргументов — парных отношений:

$$\Phi(a_{ik}, a_{ij}, \cdots, a_{js}) = 0, \tag{1.1.1}$$

где a_{ik} — парное отношение между элементами i и k выделенного подмножества из общего множества $\mathcal{M}$ (см. рис.1.1), где

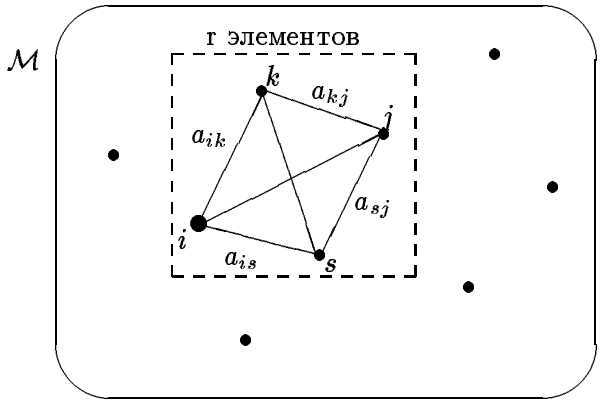


Рис. 1.1: Унарная система отношений

выделенное подмножество из r элементов обведено пунктирной рамкой. В дальнейшем будем называть соотношение вида (1.1.1) *законом* унарной системы отношений.

Для бинарных систем отношений ранга (r, s) на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ алгебраическое соотношение (*закон* бинарной системы отношений) содержит rs парных отношений и имеет вид

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \cdots, a_{j\gamma}) = 0, \tag{1.1.2}$$

где $a_{i\alpha}$ — парное отношение между элементами i и α из двух разных множеств. Здесь и в дальнейшем будем обозначать латинскими индексами элементы первого множества $\mathcal{M}$, а греческими индексами элементы второго множества $\mathcal{N}$ (см. рис. 2.2).

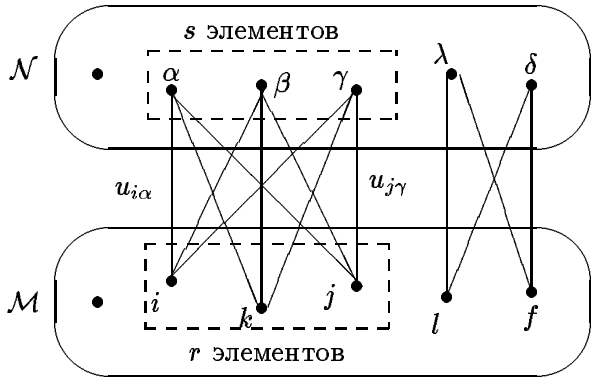


Рис. 1.2: Бинарная система отношений

3. В теории систем отношений (физических структур) ранг соответствует понятию размерности в общепринятой геометрии. Поясним это на примере бинарных систем отношений ранга (r, s). Пусть $i, k, j, \ldots$ — r произвольных элементов множества $\mathcal{M}$, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — s произвольных элементов множества $\mathcal{N}$. Потребуем, чтобы закон (1.1.2) был разрешим относительно любого из rs аргументов, т.е. чтобы его всегда можно было записать, например, в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, \ldots, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, \ldots). \tag{1.1.3}$$

Выберем в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно по $r-1$ и $s-1$ элементов и назовем их *эталонными* или образующими *базис* системы отношений. Пусть ими будут элементы $k, j, \ldots$ из множества $\mathcal{M}$ и элементы $\beta, \gamma, \ldots$ из множества $\mathcal{N}$. Для произвольных неэталонных элементов i и α формулу (1.1.3) можно переписать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, a_{i\gamma}, \ldots; a_{k\alpha}, a_{j\alpha}, \ldots; a_{k\beta}, a_{k\gamma}, \ldots, a_{j\beta}, a_{j\gamma}, \ldots), \tag{1.1.4}$$

где в первой группе выделены парные отношения элемента i со всеми $s-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{N}$ (обозначим их через i^l: $a_{i\beta} \equiv i^1$; $a_{i\gamma} \equiv i^2$; $\ldots$, где $l = 1, 2, \ldots, s-1$), во второй группе выделены парные отношения элемента α со всеми $r-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{M}$ (обозначим их через α^l: $a_{k\alpha} \equiv \alpha^1$; $a_{j\alpha}$; $\ldots$, где $l = 1, 2, \ldots, r-1$). В последней

группе сосредоточены парные отношения только между эталонными элементами. Их будем считать постоянными параметрами выбранной параметризации (базиса), поэтому парное отношение $a_{i\alpha}$ можно записать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(i^1, i^2, \ldots, i^{s-1}; \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{r-1}). \tag{1.1.5}$$

Это означает, что парные отношения между любыми (неэталонными) элементами i и α можно понимать как функцию в $r+s-2$-мерном пространстве параметров-координат.

Подставляя парные отношения вида (1.1.5) для rs неэталонных элементов в закон (1.1.2), очевидно, получаем тождество

$$\Phi(f_{i\alpha}, f_{i\delta}, \ldots, f_{j\alpha}, f_{j\delta}, \ldots) \equiv 0. \tag{1.1.6}$$

Закон (1.1.6) записан в неком базисе. Понятие базиса системы отношений будет иметь важное значение в бинарной геометрофизике.

Легко видеть, что подобное рассуждение можно провести и для унарных систем отношений ранга r. Только в этом случае эталонных элементов должно быть $r-2$. Каждый элемент унарной системы отношений будет характеризоваться $r-2$ параметрами-координатами.

4. В теории систем отношений постулируется, что все элементы, как вошедшие в выделенные подмножества, так и нет, являются равноправными. Это означает, что законы (1.1.1) и (1.1.2) должны выполняться, если заменить часть или все элементы, вошедшие в выделенные подмножества, на произвольные другие. Такая симметрия была названа *фундаментальной симметрией*. Фундаментальные симметрии играют ключевую роль в теории систем отношений. Они заменяют известные групповые симметрии как в геометрии, так и в современных физических теориях. Фундаментальные симметрии позволяют установить все конкретные виды возможных законов (1.1.1) и (1.1.2) и парных отношений a_{ik} и $a_{i\alpha}$ в них.

Введенные здесь понятия: элементы, отношения, ранг, закон и фундаментальная симметрия — составляют фундамент математической теории систем отношений. Как будет показано ниже, их достаточно для построения содержательной как математической, так и физической теорий.

1.2 Бинарные системы вещественных отношений

В приложении А.1 на основе работ Г.Г.Михайличенко [40], а также В.Х.Льва [33] продемонстрировано на примере простейшего ранга (2,2) как устанавливаются законы систем вещественных отношений (физических структур). В задачу этой книги не входит рассмотрение вывода законов систем отношений. Соответствующие выкладки довольно громоздки. С ними можно познакомиться по оригинальным работам Г.Г.Михайличенко [40-42] и В.Х.Льва [33-36]. Здесь же без доказательств приведем результаты исследований Ю.И.Кулакова и Г.Г.Михайличенко [27, 40] по теории бинарных систем вещественных отношений (БСВО). Было показано, что для случая вещественных парных отношений существуют БСВО далеко не для всех мыслимых рангов. Возможные БСВО изображены на рисунке 1.3, где по

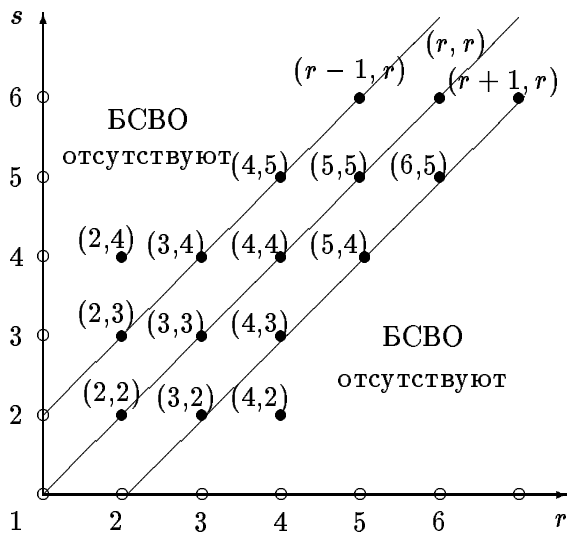


Рис. 1.3: Существующие бинарные системы вещественных отношений

вертикальной оси отложены значения s, а по горизонтальной оси r. Как видно из рисунка, существуют следующие БСВО:

1) на главной диагонали БСВО рангов (r, r), где $r \geq 2$;

2) на двух побочных диагоналях БСВО рангов $(r \pm 1, r)$;

3) исключительная БСВО ранга (4,2) и эквивалентная ей БСВО ранга (2,4).

Другие БСВО отсутствуют. Приведем законы и парные отношения для возможных БСВО.

1. Доказано, что все диагональные БСВО могут быть только двух типов. Их ранги будем обозначать посредством (r, r) и $(r, r; a)$.

Для БСВО ранга (r, r) закон записывается через определитель

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \cdots & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \cdots & u_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & \cdots & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.2.1}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ между элементами противоположных множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ представляются в виде

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \tag{1.2.2}$$

Здесь i^l параметры, сопоставляемые произвольному элементу i множества $\mathcal{M}$, а α^l параметры, сопоставляемые элементу α из множества $\mathcal{N}$.

Забегая вперед, отметим, что именно такие диагональные БСО будут играть ключевую роль в развиваемой ниже бинарной геометрофизике.

Для БСВО ранга $(r, r; a)$ закон имеет вид (записывается посредством окаймленного определителя)

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.2.3}$$

где парные отношения $a_{i\alpha}$ представляются в виде

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0 + \alpha_0. \tag{1.2.4}$$

Здесь i^l, i_0 также $r-1$ параметров, сопоставляемых элементу i, а α^l, α_0 — параметры, характеризующие элемент α.

2. Для БСВО, изображенных на побочных диагоналях, законы найдены в видах: для ранга $(r+1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.2.5)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l + \alpha_0; \qquad (1.2.6)$$

для ранга $(r-1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.2.7)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0. \qquad (1.2.8)$$

Характерно, что для того типа элементов, которых в законе меньше, число параметров оказывается на единицу больше, причем дополнительный параметр входит в парное отношение аддитивным образом.

Заметим, что БСВО минимального ранга формально можно считать БСВО рангов (2,1) и (1,2). Для них выше приведенные законы означают

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} \\ 1 & a_{k\alpha} \end{vmatrix} = a_{k\alpha} - a_{i\alpha} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} - a_{i\alpha} = 0, \qquad (1.2.9)$$

т.е. в первом случае отношение любого элемента множества $\mathcal{M}$ к произвольному элементу α множества $\mathcal{N}$ определяется одним единственным параметром элемента α: $a_{i\alpha} = a_{k\alpha} = \cdots\cdots = a_{j\alpha} = \alpha_0$, а во втором случае, наоборот, отношение любого элемента множества $\mathcal{N}$ к произвольному элементу i множества $\mathcal{M}$ определяется одним единственным параметром элемента i: $a_{i\alpha} = a_{i\beta} = \cdots = a_{i\gamma} = i_0$.

3. Для исключительных БСВО рангов (4,2) и (2,4) законы найдены соответственно в видах:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & (a_{i\alpha}a_{i\beta}) \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & (a_{k\alpha}a_{k\beta}) \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & (a_{j\alpha}a_{j\beta}) \\ 1 & a_{s\alpha} & a_{s\beta} & (a_{s\alpha}a_{s\beta}) \end{vmatrix} = 0; \qquad (1.2.10)$$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ (a_{i\alpha}a_{k\alpha}) & (a_{i\beta}a_{k\beta}) & (a_{i\gamma}a_{k\gamma}) & (a_{i\delta}a_{k\delta}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.2.11)$$

где парные отношения для БСВО ранга (4,2) определяются формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{i\alpha^1 + \alpha^2}{i + \alpha^3}; \qquad (1.2.12)$$

а для БСВО ранга (2,4) — формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{\alpha i^1 + i^2}{\alpha + i^3}. \qquad (1.2.13)$$

Здесь те элементы, которых в законе меньше, характеризуются тремя параметрами, а те, которых больше, — только одним параметром. БСВО этого ранга, оказывается, соответствует проективной геометрии.

Анализируя содержание и результаты математической части теории систем отношений (теории физических структур), невольно стараешься найти в широко разросшемся дереве современной математики ветви (давно сложившиеся или только побеги), которые бы соответствовали системам отношений. Насколько автору известно, такой поиск предпринимался Ю.И.Кулаковым. Им высказывался ряд соображений на этот счет, начиная от указаний на связь с теорией категорий и функторов и кончая гипотезой об основании теорией физических структур совершенно новой ветви математики. Не исключено, что к математическому содержанию этой теории можно подойти с разных сторон. В частности, следует отметить несколько попыток построения аксиоматики математического аппарата теории физических структур [23, 55]. Это несомненно поможет уточнению логических основ теории и прояснению ее связей с другими разделами математики.

Однако следует признать, что *наиболее близким к теории систем отношений разделом современной математики является теория линейных пространств*. При этом сопоставление

двух теорий следует начинать не со сравнения их логических основ, а со сличения ряда выводов теории систем отношений и определений скалярных произведений векторов в теории линейных пространств. Тогда приходим к выводу, что элементам диагональных БСО (см. (1.2.1) и (1.2.2)) сопоставляются векторы линейных пространств. Параметры элементов теории систем отношений выступают в качестве компонент векторов, а парные отношения (1.2.2) соответствуют скалярным произведениям векторов в теории $r-1$-мерных линейных пространств:

$$(\vec{x}_i\vec{x}_k) = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l x_k^l. \tag{1.2.14}$$

Продолжая сравнение двух теорий, следует напомнить, что в теории линейных пространств широко используются понятие и свойства *определителя Грама*. Как известно (см., например [65, с.205]), определитель Грама записывается в виде

$$G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k) = \begin{vmatrix} (\vec{x}_1\vec{x}_1) & (\vec{x}_1\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_1\vec{x}_k) \\ (\vec{x}_2\vec{x}_1) & (\vec{x}_2\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_2\vec{x}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{x}_k\vec{x}_1) & (\vec{x}_k\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_k\vec{x}_k) \end{vmatrix}. \tag{1.2.15}$$

Известна также теорема об определителе Грама: “Определитель Грама векторов $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\cdots$, $\vec{x_k}$ равен нулю, если векторы линейно зависимы, и положителен, если они линейно независимы; он равен произведению квадратов длин векторов $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\cdots$, $\vec{x_k}$, если они взаимно ортогональны, в противном случае он меньше этой величины”[65, с.207].

Сравнивая это свойство определителя Грама с законами бинарных систем отношений (1.2.2) и определениями соответствующих парных отношений (1.2.2), легко видеть, что законы этих систем отношений представляют собой не что иное как равенство нулю соответствующих определителей Грама. Ключевые понятия теории систем отношений — определители меньшего ранга — также являются определителями Грама с вытекающими из теоремы свойствами.

Таким образом, на две сравниваемые теории можно смотреть как на описывающие одни и те же закономерности, однако с разных позиций (аксиоматик). То, что в одной теории (линейных пространств) является аксиомой (например, вид скалярного произведения векторов), становится теоремой, т.е. выводится во второй теории (систем отношений). Такая ситуация типична для

геометрии, строящейся на базе разных систем аксиом. Аналогичное можно усмотреть и в различных формулировках физической теории.

Однако разные точки зрения на одну и ту же совокупность закономерностей могут дать ряд преимуществ при дальнейшем развитии и обобщении теории. На плодотворность множества формулировок в физике в свое время указывал Р.Фейнман [62]. Аналогичное, конечно, имеет место и в математике. Сопоставление теорий линейных пространств и систем отношений демонстрирует это еще раз. Так, в теории систем отношений с единой точки зрения охватываются, например, бинарные системы отношений с законами (1.2.1) и (1.2.3). Парные отношения (1.2.4) последних систем отношений в теории линейных пространств выглядят неестественно (представляются искусственными). Как правило, в теории линейных пространств векторы с таким скалярным произведением не рассматриваются. В теории же систем отношений это родственные определения парных отношений. Заметим также, что окаймленные определители, входящие в закон (1.2.3), в теории систем отношений типа a играют такую же роль, что и определитель Грама в теории систем отношений с законом (1.2.1).

С позиции теории систем отношений становится естественным и другое обобщение теории линейных пространств — на случай, соответствующий недиагональным бинарным системам отношений рангов $(r \pm 1, r)$. Парные отношения (1.2.7) и (1.2.8) также представляются неестественными в теории линейных пространств. Аналогом определителей Грама здесь выступают окаймленные с одной стороны определители видов (1.2.5) и (1.2.6). Еще более неестественными в теории линейных пространств выглядят парные отношения (1.2.11) и (1.2.12), возникающие в теории исключительных бинарных систем отношений.

1.3 Объединение двух типов диагональных бинарных систем вещественных отношений

1. БСВО рангов $(r, r; a)$ можно понимать как частные случаи БСВО соответствующих рангов (r, r). В.Х.Лев показал [33], что из соответствующих функционально-дифференциальных уравнений для диагональных БСВО получается решение, охватывающее оба типа БСВО, т.е. рангов (r, r) и $(r, r; a)$. Согласно

общему решению парное отношение представляется в виде

$$\tilde{a}_{i\alpha} = \tfrac{1}{\varepsilon_1}\left(e^{\varepsilon_1(i_{01}+\alpha_{01})} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\varepsilon_2(i_{02}+\alpha_{02})} - 1\right) + \\ \cdots + \tfrac{1}{\varepsilon_{r-1}}\left(e^{\varepsilon_{r-1}(i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})} - 1\right), \tag{1.3.1}$$

где ε_1, ε_2, $\cdots$ — совокупность из $r-1$ констант; i_{01}, i_{02}, $\cdots$ — совокупность из $r-1$ параметров, сопоставляемых элементам множества $\mathcal{M}$; α_{01}, α_{02}, $\cdots$ — совокупность из $r-1$ параметров, сопоставляемых элементам множества $\mathcal{N}$.

Общий закон БСВО ранга (r,r) с парным отношением вида (1.3.1) представляется в форме

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\varepsilon_2 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{i\alpha} & \tilde{a}_{i\beta} & \cdots & \tilde{a}_{i\gamma} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{k\alpha} & \tilde{a}_{k\beta} & \cdots & \tilde{a}_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{j\alpha} & \tilde{a}_{j\beta} & \cdots & \tilde{a}_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3.2}$$

2. Сначала покажем, что из закона (1.3.2) и парного отношения (1.3.1) получаются закон и отношения БСВО ранга (r,r). Для этого нужно положить, что все константы ε_l отличны от нуля. Разделим первый столбец в (1.3.2) на ε_1 и прибавим его к последним r столбцам. Учитывая, что первая строка получившейся матрицы состоит из одних нулей, кроме -1 в левом верхнем углу, выражение (1.3.2) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_2 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{i\alpha} & a^*_{i\beta} & \cdots & a^*_{i\gamma} \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{k\alpha} & a^*_{k\beta} & \cdots & a^*_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{j\alpha} & a^*_{j\beta} & \cdots & a^*_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3.3}$$

где

$$a^*_{i\alpha} = \frac{1}{\varepsilon_1}e^{\varepsilon_1(i_{01}+\alpha_{01})} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(e^{\varepsilon_2(i_{02}+\alpha_{02})} - 1\right) + \cdots + \\ + \frac{1}{\varepsilon_{r-1}}\left(e^{\varepsilon_{r-1}(i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})} - 1\right), \tag{1.3.4}$$

т.е. из всех парных отношений $\tilde{a}_{i\alpha}$ оказался исключенным постоянный добавок $-1/\varepsilon_1$.

Повторяя такую процедуру последовательно с константами ε_2, ε_3, $\cdots$, ε_{r-1} еще $r-2$ раза, приводим закон (1.3.2) к закону (1.3.1) с парным отношением вида

$$u_{i\alpha} = \frac{1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 (i_{01}+\alpha_{01})} + \frac{1}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 (i_{02}+\alpha_{02})} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_{r-1}} e^{\varepsilon_{r-1} (i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})}. \tag{1.3.5}$$

Произведя переобозначение параметров

$$i^l \equiv \frac{e^{\varepsilon_l i_{0l}}}{\sqrt{\varepsilon_l}}; \quad \alpha^l \equiv \frac{e^{\varepsilon_l \alpha_{0l}}}{\sqrt{\varepsilon_l}}, \tag{1.3.6}$$

приходим к ранее записанному парному отношению (1.2.2).

3. Не представляет труда получить из (1.3.1) и (1.3.2) соответствующие выражения для БСВО ранга $(r, r; a)$. Для этого нужно положить, что один из параметров, пусть это будет ε_{r-1}, стремится к нулю, тогда как все остальные отличны от нуля. Опять повторяя $r-2$ раза прежнюю процедуру, закон (1.3.2) приводим к виду

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \hat{a}_{i\alpha} & \hat{a}_{i\beta} & \cdots & \hat{a}_{i\gamma} \\ 1 & \hat{a}_{k\alpha} & \hat{a}_{k\beta} & \cdots & \hat{a}_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \hat{a}_{j\alpha} & \hat{a}_{j\beta} & \cdots & \hat{a}_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3.7}$$

где парное отношение

$$\hat{a}_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + \frac{1}{\varepsilon_{r-1}} \left(e^{\varepsilon_{r-1} (i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})} - 1 \right). \tag{1.3.8}$$

При стремлении ε к нулю в (1.3.7) возникает неопределенность. Раскрывая ее имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\varepsilon (i_0+\alpha_0)} - 1 \right) \right] = i_0 + \alpha_0, \tag{1.3.9}$$

т.е. (1.3.7) совпадает с (1.3.4), а (1.4.6) превращается в закон (1.3.3) БСВО ранга $(r, r; a)$.

Опираясь на этот результат, БСВО ранга $(r, r; a)$ будем называть *вырожденными БСВО ранга* (r, r).

4. В случае стремления к нулю нескольких констант ε_l приходим к диагональной БСВО типа меньшего ранга. Действительно, пусть $\varepsilon_{r-1} \to 0$ и $\varepsilon_{r-2} \to 0$, тогда, применив $r-2$ раза описанную выше процедуру и раскрывая неопределенности в двух слагаемых согласно (1.3.8), приводим парное отношение (1.3.1) к виду

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-3} i^l \alpha^l + i_{0r-2} + \alpha_{0r-2} + i_{0r-1} + \alpha_{0r-1} \equiv \sum_{l-1}^{r-3} i^l \alpha^l + i_0 + \alpha_0, \tag{1.3.10}$$

где произведены переобозначения:

$$i_{0r-2} + i_{0r-1} \equiv i_0; \quad \alpha_{0r-2} + \alpha_{0r-1} \equiv \alpha_0. \tag{1.3.11}$$

Можно показать, что для этого случая закон запишется через соответствующий определитель типа (1.2.3) ранга $(r-1)+1 = r$.

Аналогично можно рассмотреть БСВО типа a ранга, меньшего r, как трижды, четырежды и т.д. вырожденные БСВО ранга (r, r).

5. Отметим, что вырожденную БСКО ранга (r,r;a) можно рассматривать как частный случай невырожденной БСВО более высокого ранга (r+1,r+1) со специфическими значениями параметров элементов, когда

$$i^{r-1} = i_0; \quad i^r = 1; \quad \alpha^{r-1} = 1; \quad \alpha^r = \alpha_0. \tag{1.3.12}$$

Очевидно, вместо единицы можно взять произвольные константы, одинаковые для всех элементов множеств. При этом нужно соответствующим образом переопределить параметры с индексом 0.

1.4 Унарные системы вещественных отношений низших рангов

Для систем вещественных отношений (структур) на одном множестве элементов (УСВО) можно было ожидать более простую теорию, — в них все элементы однотипны, ранг характеризуется одним числом r, однако на самом деле теория УСВО оказалась существенно сложенее. До сих пор не найдено общего решения сразу для всех УСВО. Для каждого ранга решения приходилось искать отдельно. На сегодняшний день эта задача полностью решена лишь для УСВО низших рангов $r = 3, 4, 5$. Отсылая читателя к оригинальным работам Г.Г.Михайличенко

[40-42] и В.Х.Льва [34-36], ограничимся здесь лишь сводкой полученных результатов.

Для каждого ранга r, исходя из предположения о существовании закона УСВО (1.1.1) и фундаментальной симметрии, осуществлялся переход к системе функционально-дифференциальных уравнений аналогично тому, как это продемонстрировано в Приложении А.1. Далее решалась эта система уравнений и из нее находились возможные виды парных отношений между элементами. Для них строился закон $\Phi(a_{ik}, a_{ij}, \cdots) = 0$ в виде некого определителя из парных отношений. Каждый элемент УСВО ранга r в парных отношениях характеризуется $r-2$ параметрами (координатами).

Аналогично изложенному для БСВО закон УСВО (1.1.1) можно трактовать как уравнение относительно парного отношения a_{ik} между двумя произвольными элементами i и k. Предположив, это уравнение можно явно разрешить относительно a_{ik}, имеем

$$a_{ik} = f(a_{ij}, a_{im}, \cdots; a_{kj}, a_{km}, \cdots; a_{jm}, a_{jn}, \cdots). \qquad (1.4.1)$$

Здесь справа функция f зависит от $r(r-1)/2-1$ аргументов, которые разбиты на три группы. Во-первых, это $r-2$ отношений первого элемента i ко всем оставшимся элементам (кроме k), во-вторых, это $r-2$ отношений второго элемента k ко всем оставшимя элементам (кроме i) и, в-третьих, это $(r-2)(r-3)/2$ парных отношений между оставшимися $r-2$ элементами. Последние элементы можно объявить эталонными (базисными) данной УСВО, т.е. парные отношения между ними можно считать заданными раз навсегда и характеризовать все другие элементы через $r-2$ отношений к эталонным элементам. Эти отношения можно считать координатами элементов в конкретной координатной системе, определяемой выбором эталонных элементов. От этих координат можно перейти к произвольной (допустимой) иной координатной системе. В ней по-прежнему элементы будут характеризоваться $r-2$ числами — параметрами элементов.

В работе В.Х.Льва [35] было показано, что для УСВО ранга 5 с вещественными парными отношениями имеются десять и только десять возможных решений (видов парных отношений). Оказалось, что все эти решения можно интерпретировать как специальные виды геометрий, где параметры элементов имеют смысл координат. В общем случае УСВО ранга r соответствуют геометриям размерности: $n = r-2$. Следовательно, УСВО ранга 5 соответствуют десять видов 3-мерных геометрий. Перечислим их, разделив на несколько классов:

1. К *первому классу* отнесем четыре УСВО (геометрии), сим-

метричные парные отношения (метрики) которых имеют вид.

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right)}; \tag{1.4.2}$$

$$a_{ik}^{(2)} = x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2 + z_k^2\right)}; \tag{1.4.3}$$

$$a_{ik}^{(3)} = x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)}; \tag{1.4.4}$$

$$a_{ik}^{(4)} = -x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)}, \tag{1.4.5}$$

где x, y, z по три параметра (координаты), характеризующие элементы. Эти решения соответствуют:

$a_{ik}^{(1)}$ — 3-мерной геометрии Римана (сферической геометрии постоянной положительной кривизны);

$a_{ik}^{(2)}$ и $a_{ik}^{(3)}$ — геометриям на 3-мерных гиперсферах, вложенных в 4-мерные псевдоевклидовы пространства;

$a_{ik}^{(4)}$ — 3-мерной геометрии Лобачевского (гиперболической или геометрии постоянной отрицательной кривизны).

Для всех этих четырех геометрий (УСВО ранга 5) закон имеет один и тот же вид

$$\Phi\left(a_{ik}, a_{im}, \cdots\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ a_{ki} & 1 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ a_{mi} & a_{mk} & 1 & a_{mn} & a_{mp} \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 1 & a_{np} \\ a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.6}$$

Легко убедиться, что подстановка (1.4.2) – (1.4.5) в (1.4.6) приводит к тождеству.

Для УСВО ранга 4 имеются три аналогичные 2-мерные геометрии с симметричными парными отношениями:

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2\right)};$$

$$a_{ik}^{(2)} = x_i x_k - y_i y_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 + y_i^2\right)\left(1 - x_k^2 + y_k^2\right)};$$

$$a_{ik}^{(3)} = -x_i x_k - y_i y_k + \sqrt{\left(1 + x_i^2 + y_i^2\right)\left(1 + x_k^2 + y_k^2\right)},$$

интерпретируемые соответственно как геометрия на 2-мерной сфере, геометрия на 2-мерной сфере в 3-мерном псевдоевклидовом пространстве и геометрия на 2-мерном гиперболоиде.

Аналогично, для УСВО ранга 3 получаются две 1-мерные геометрии соответственно на окружности единичного радиуса и на гиперболе:

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2\right)\left(1 - x_k^2\right)};$$

$$a_{ik}^{(2)} = -x_i x_k + \sqrt{\left(1 + x_i^2\right)\left(1 + x_k^2\right)}.$$

Законы для этих УСВО записываются аналогично (1.4.6), только меньшего ранга.

2. Ко *второму классу* отнесем УСВО (геометрии) с симметричными парными отношениями видов:

$$a_{ik}^{(5)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2; \qquad (1.4.7)$$

$$a_{ik}^{(6)} \equiv s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2, \qquad (1.4.8)$$

соответствующие 3-мерным евклидовой и псевдоевклидовой геометриям. Для них закон записывается через определитель Кэли-Менгера на пяти элементах

$$\Phi(a_{ik}, a_{im}, \cdots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.4.9)$$

Отметим, что в евклидовой геометрии определитель Кэли-Менгера определяет квадрат $r-1$ -мерного симплекса на r точках. Следовательно, закон (1.4.9) означает обращение в нуль 4-мерного объема симплекса, образованного 5 точками. Это будет тогда, когда 5 точек принадлежат 3-мерной гиперповерхности, т.е. лежат в 3-мерном евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве.

Аналогичные два решения имеют место для УСВО ранга 4. Они соответствуют 2-мерным евклидовой и псевдоевклидовой геометриям с метриками:

$$a_{ik}^{(4)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2;$$

$$a_{ik}^{(5)} \equiv s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2.$$

Для УСВО ранга 3 имеем только одно решение, соответствующее 1-мерной геометрии на неориентированной прямой. В ней

$$a_{ik}^{(3)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2.$$

Следует заметить, что определитель Кэли-Менгера D_{ikm} в законе этой УСВО $\Phi \equiv D_{ikm} = 0$ имеет смысл (с точностью до коэффициента) квадрата площади треугольника S_{ikm} и записывается по известной формуле Герона через расстояния — длины сторон треугольника:

$$D_{ikm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{km}^2 \\ 1 & l_{mi}^2 & l_{mk}^2 & 0 \end{vmatrix} = -16S_{ikm}^2, \qquad (1.4.10)$$

где площадь треугольника представляется формулой

$$S_{ikm} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2l_{km})(p-2l_{im})(p-2l_{ik})};$$

здесь периметр $p = l_{ik} + l_{im} + l_{km}$.

3. К *третьему классу* отнесем УСВО с антисимметричным парным отношением

$$a_{ik}^{(7)} = -a_{ki}^{(7)} = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k, \qquad (1.4.11)$$

представляющую собой своеобразную 3-мерную симплектическую геометрию (геометрию на 3-мерной гиперплоскости, вложенной в 4-мерное симплектическое пространство). Эта геометрия также характеризуется законом вида (1.4.9).

Непосредственный аналог такой УСВО имеется также для нечетного ранга 3, когда парное отношение записывается в виде

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i - x_k,$$

а закон записывается в форме

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 \end{vmatrix} = -\left(a_{ik} + a_{km} + a_{mi}\right)^2 = 0. \qquad (1.4.12)$$

Эту УСВО со свойством $a_{im} = a_{ik} + a_{km}$ можно понимать как геометрию на 1-мерной ориентированной прямой.

Для *четного ранга* $r = 4$ имеем 2-мерную симплектическую геометрию с парным отношением

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i y_k - x_k y_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}. \tag{1.4.13}$$

Для нее закон записывается через неокаймленный определитель

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.14}$$

4. Наконец, к *четвертому классу* УСВО ранга 5 отнесем три решения с парными отношениями вида:

$$a_{ik}^{(8)} = \ln (x_i - x_k)^2 + \frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k}; \tag{1.4.15}$$

$$a_{ik}^{(9)} = \ln \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 \right] + \gamma \arctan \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k; \tag{1.4.16}$$

$$a_{ik}^{(10)} = \ln \left[(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 \right] + \gamma arc \tanh \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k, \tag{1.4.17}$$

где γ — параметр. Они соответствуют неким 3-мерным "экзотическим" геометриям. Для них законы не записываются в явном виде.

Таким образом, имеется десять УСВО (3-мерных геометрий) ранга 5, девять УСВО (2-мерных геометрий) ранга 4 и четыре УСВО (1-мерных геометрий) ранга 3. Для УСВО более высоких рангов полные наборы всех возможных решений пока не установлены. На сегодняшний день ясен вид естественных обобщений указанных геометрий на большие размерности, но не доказана теорема отсутствия иных геометрий.

1.5 Системы отсчета и координатные системы в пространстве Минковского

Особо остановимся на характерных чертах классического 4-мерного пространства-времени (пространства Минковского) в

реляционном подходе. Как уже отмечалось, в рамках систем отношений первичный характер имеют отношения между элементами, тогда как параметры элементов (координаты) имеют вторичный характер, — их можно выразить через отношения к набору так или иначе выбранных эталонных элементов (базиса). Напомним, что еще Э.Мах — последовательный сторонник реляционного подхода к пространству и времени — в своей книге "Познание и заблуждение"[38] поднимал вопрос о формулировке геометрии, исходя из понятий расстояния, минуя координаты. При этом он упоминал еще более ранние работы: "Интересную попытку обосновать евклидову и неевклидову геометрию на одном понятии расстояния мы находим у Де Тилли (1880 г.)"[38, с.380]. Реализацию такой программы в рамках 3-мерной евклидовой геометрии можно найти в работах Л.М.Блюменталя [4], а также Ю.И.Кулакова [30-31].

1. Рассмотрим задачу задания координат через интервалы между событиями в 4-мерном прпространстве-времени, описываемом УСВО ранга 6. Согласно изложенному в предыдущих разделах закон этой УСВО записывается через определитель Кэли-Менгера для 6 точек- событий i, k, a, b, c, d:

$$D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2_{ik} & s^2_{ia} & s^2_{ib} & s^2_{ic} & s^2_{id} \\ 1 & s^2_{ki} & 0 & s^2_{ka} & s^2_{kb} & s^2_{kc} & s^2_{kd} \\ 1 & s^2_{ai} & s^2_{ak} & 0 & s^2_{ab} & s^2_{ac} & s^2_{ad} \\ 1 & s^2_{bi} & s^2_{bk} & s^2_{ba} & 0 & s^2_{bc} & s^2_{bd} \\ 1 & s^2_{ci} & s^2_{ck} & s^2_{ca} & s^2_{cb} & 0 & s^2_{cd} \\ 1 & s^2_{di} & s^2_{dk} & s^2_{da} & s^2_{db} & s^2_{dc} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.5.1)$$

где парные отношения имеют смысл квадратов интервалов между парами точек-событий. Они представляются через параметры (координаты) точек следующим образом

$$s^2_{ik} = (x^0_i - x^0_k)^2 - \sum_{l=1}^{3}(x^l_i - x^l_k)^2 \equiv \tau^2_{ik} - l^2_{ik}. \qquad (1.5.2)$$

Здесь x^μ_i, x^μ_k — координаты точек-событий. Закон (1.5.1) выполняется тождественно при подстановке в него (1.5.2).

2. Отметим, что закон (1.5.1) не позволяет однозначно фиксировать сигнатуру 4-мерного многообразия. Допускаются сигнатуры: $(+++\,+)$, $(+---)$, $(++--)$ и эквивалентные сигнатуры с заменой знаков плюс на минусы и наоборот. Следовательно, необходимы дополнительные аксиомы, выделяющие сигнатуру (+

– – –). Эти аксиомы образуют уже упоминавшийся блок аксиом частичной упорядоченности, которые часто задают даже раньше метрических аксиом. Последние согласовываются с упорядоченностью событий. Временно-подобные события имеют $s^2 > 0$, а пространственно-подобные имеют $s^2 < 0$ (см. рис.1.4).

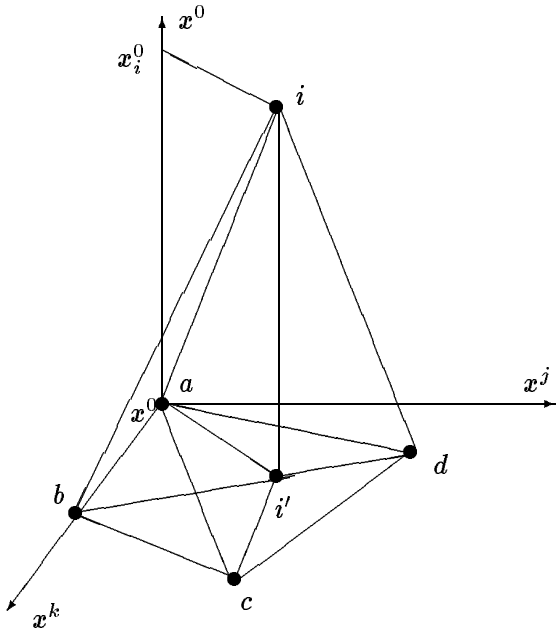


Рис. 1.4: Определение четырех координат произвольного события i через интервалы

С помощью определителей Кэли-Менгера и разделения точек-событий на пространственно- и временно-подобные можно выделить 3-мерные пространственно-подобные сечения и тем самым определить *системы отсчета* наблюдателей [11]. В частности, пусть с наблюдателем произошло событие a. Чтобы задать пространственное сечение, содержащее a, достаточно выбрать еще три (эталонные) пространственно-подобные к a точки-события: b, c, d, для которых $D_{abcd} \neq 0$. Четыре события a, b, c, d можно объявить одновременными. Задаваемому сечению принадлежат все пространственно-подобные к выделенным четырем точки-события p, для которых $D_{abcdp} = 0$. Таким условием выделяется 3-мерная евклидова геометрия, определенная ранее формулами (1.4.7) и (1.4.9).

3. Начнем решение поставленной задачи с определения временно- подобной координаты произвольной точки i через ее отношения (интервала) к четырем эталонным точкам. Поскольку эталонные четыре точки одновременны по определению, т.е. $x_a^0 = x_b^0 = x_c^0 = x_D^0 \equiv x^0$, то для 6 квадратов интервалов между ними имеем

$$\begin{aligned} s_{ab}^2 = -l_{ab}^2; \quad s_{ac}^2 = -l_{ac}^2; \quad s_{ad}^2 = -l_{ad}^2; \\ s_{bc}^2 = -l_{bc}^2; \quad s_{bd}^2 = -l_{bd}^2; \quad s_{cd}^2 = -l_{cd}^2, \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

а квадраты интервалов между событием i и эталонными точками имеют вид

$$\begin{aligned} s_{ia}^2 = \tau^2 - l_{ia}^2; \quad s_{ib}^2 = \tau^2 - l_{ib}^2; \\ s_{ic}^2 = \tau^2 - l_{ic}^2; \quad s_{id}^2 = \tau^2 - l_{id}^2, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

где $\tau = x_i^0 - x^0$. Пусть i' – проекция точки i на 3-мерное пространственное сечение, тогда для пяти точек i', a, b, c, d можно записать закон УСВО ранга 5:

$$D_{i'abcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau^2 - s_{ia}^2 & \tau^2 - s_{ib}^2 & \tau^2 - s_{ic}^2 & \tau^2 - s_{id}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{ai}^2 & 0 & l_{ab}^2 & l_{ac}^2 & l_{ad}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{bi}^2 & l_{ba}^2 & 0 & l_{bc}^2 & l_{bd}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{ci}^2 & l_{ca}^2 & l_{cb}^2 & 0 & l_{cd}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{di}^2 & l_{da}^2 & l_{db}^2 & l_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5.5}$$

Это выражение можно расссматривать как уравнение относительно неизвестной τ^2. Расписывая определитель, получаем уравнение

$$D_{iabcd} + 2\tau^2 D_{abcd} = 0, \tag{1.5.6}$$

где D_{iabcd} – определитель Кэли-Менгера, составленный из квадратов интервалов между пятью точками i, a, b, c, d, а D_{abcd} – определитель Кэли-Менгера для четырех эталонных точек. Решением уравнения является

$$\tau^2 = -\frac{D_{iabcd}}{2D_{abcd}} \to x_i^0 = x^0 + \sqrt{\frac{-D_{iabcd}}{2D_{abcd}}}. \tag{1.5.7}$$

Используя (1.5.7), из (1.5.4) легко найти l_{ia}^2, l_{ib}^2, l_{ic}^2, l_{id}^2, т.е. квадраты расстояний от проекции i' до четырех эталонных точек.

4. Для нахождения трех пространственных координат x_i^1, x_i^2, x_i^3 следует конкретизировать выбор используемой *координатной системы.* Выберем ее так, чтобы точка-событие a лежала в начале координат, ось x^1 направим вдоль вектора $\vec{ab}$, и направим ось x^2 так, чтобы точка c лежала в плоскости (x^1x^2). Тогда задача нахождения пространственных координат точки i' в 3-мерном пространстве по ее расстояниям до эталонных точек не представляет труда. Чтобы записать ответ в наиболее компактном виде, введем *обобщенный определитель Кэли-Менгера*, который записывается для двух подмножеств элементов i, k, m, $\cdots$ и a, b, c, $\cdots$, содержащих одинаковые количества элементов, которые могут совпадать, как при записи обычного определителя Кэли-Менгера, а могут и различаться. В самом общем случае такие определители имеют вид

$$D_{ikm\cdots;abc\cdots} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & a_{ia} & a_{ib} & a_{ic} & \cdots \\ 1 & a_{ka} & a_{kb} & a_{kc} & \cdots \\ 1 & a_{ma} & a_{mb} & a_{mc} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \tag{1.5.8}$$

Через обобщенный определитель Кэли-Менгера координаты точки i' записываются следующим образом [30]

$$x_i^1 = \frac{D_{ai';ab}}{\sqrt{-2D_aD_{ab}}}; \qquad x_i^2 = -\frac{D_{abi';abc}}{\sqrt{-2D_{ab}D_{abc}}};$$

$$x_i^3 = \frac{D_{abci';abcd}}{\sqrt{-2D_{abc}D_{abcd}}}, \tag{1.5.9}$$

где в первой формуле использовано обозначение определителя

$$D_a \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

для придания симметрии всей совокупности формул.

5. Отметим, что через обобщенные определители Кэли-Менгера можно записать ряд других геометрических выражений, как то: углы между двумя лучами, исходящими из одной точки, значения двугранных и телесных углов и другие. Можно сказать, что всю евклидову геометрию можно переписать через понятия расстояний.

Приведем еще формулу для определителя Кэли-Менгера порядка, на единицу меньшего того, через который записывается

закон системы отношений (геометрии). Например, в 3-мерном евклидовом пространстве определитель Кэли-Менгера на четырех точках с точностью до коэффициента определяет квадрат 3-мерного объема и записывается в форме

$$D_{abcd} = 288V^2_{abcd} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1_a & x^1_b & x^1_c & x^1_d \\ x^2_a & x^2_b & x^2_c & x^2_d \\ x^3_a & x^3_b & x^3_c & x^3_d \end{vmatrix}^2, \qquad (1.5.10)$$

где x^k_a, x^k_b, x^k_c, x^k_d — координаты четырех выбранных точек ($k = 1, 2, 3$).

6. Изменяя в (1.5.9) набор эталонных элементов a, b, c, d в 3-мерном пространстве, получим новые значения декартовых координат точки i, а также значения координат другой произвольной точки k, однако, очевидно, квадрат расстояния $l^2_{ik} = a_{ik}$ при этом не изменится. Все возможные изменения эталонных элементов в рамках выделенного пространственного сечения генерируют группу координатных преобразований в 3-мерном пространстве, оставляющую инвариантной квадратичную форму $l^2_{ik} = Const$. Эта 6-параметрическая группа распадается на две подгруппы:

а) 3-параметрическую группу вращений $O(3)$

$$x'^k = L^k_{\cdot i} x^i, \qquad (1.5.11)$$

где $i, k = 1, 2, 3$; $L^k_{\cdot i}$ — девять вещественных коэффициентов, удовлетворяющих 6 условиям:

$$L_{ki} L^k_{\cdot j} = \delta_{ij}; \qquad (1.5.12)$$

б) 3-параметрическую группу трансляций

$$x'^k = x^k + b^k, \qquad (1.5.13)$$

где b^k — три произвольных вещественных параметра.

Более общие изменения четырех эталонных элементов a, b, c, d, выводящие за пределы заданного в п.2 3-мерного пространственного сечения, генерируют 10-параметрическую группу Пуанкаре. Она разбивается на 6-параметрическую группу Лоренца

$$x'^\mu = L^\mu_{\cdot\nu} x^\nu, \qquad (1.5.14)$$

где индексы μ и ν пробегают значения:0, 1, 2, 3, а 16 параметров $L^\mu_{\cdot\nu}$ связаны 10 условиями типа (1.5.12), и на 4-параметрическую группу трансляций типа (1.5.13).

1.6 Переход от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям

Рассмотренные выше УСВО (геометрии) можно понимать как вторичные, образованные из более первичных БСВО путем некой "сшивки" элементов из двух множеств в объекты (элементы) одного нового множества. Об этом, в частности, свидетельствует схожесть видов парных отношений и законов бинарных и унарных систем отношений. В обоих случаях законы записываются через неокаймленные либо через окаймленные определители. Кроме того, обращает на себя внимание значительно большая простота теории БСВО по сравнению с теорией УСВО. Для БСВО найдены сразу все возможные решения, тогда как для УСВО их следут находить для каждого ранга в отдельности со значительно возрастающими с каждом рангом трудностями. Это говорит об элементарности именно бинарных систем отношений.

Продемонстрируем, как можно получить все приведенные выше законы и парные отношения унарных геометрий, кроме экзотических, из законов и парных отношений (1.3.1) — (1.3.4) БСВО. Это будет достигаться *сшивкой пар специально подобранных элементов* из двух разных множеств в элементы одного нового множества и определением между новыми элементами парных отношений, которые должны выражаться через парные отношения исходной БСВО. При этом законы БСВО ранга (r, r) непосредственно перейдут в соответствующие законы УСВО ранга r. Поскольку элементы БСВО ранга (r, r) характеризуются $r - 1$ параметром, а элементы УСВО ранга r характеризуются $r - 2$ параметрами, то для данного перехода необходимо *дополнительное условие* между исходными параметрами, сокращающее число независимых параметров.

1. Начнем с получения УСВО, отнесенных в предыдущем разделе к *первому классу*. Из закона (1.4.6) видно, что такие УСВО следует получать из невырожденных БСВО ранга (r, r). Будем сшивать в один новый элемент такие элементы БСВО, параметры которых связаны соотношениями:

$$i^l = \pm\alpha^l \equiv x_i^l; \quad k^l = \pm\beta^l \equiv x_k^l; \quad j^l = \pm\gamma^l \equiv x_j^l; \quad \cdots. \tag{1.6.1}$$

В дальнейшем новые элементы УСВО будем обозначать латинскими индексами элементов БСВО из множества $\mathcal{M}$. Определим парные отношения a_{ik} между новыми элементами следующим

образом

$$a_{ik} = a_{ki} = u_{i\beta} = u_{k\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \beta^l = \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon_l x_i^l x_k^l, \tag{1.6.2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. В качестве дополнительного условия, понижающего число независимых параметров, потребуем, чтобы все внутренние отношения для сшитых пар были одинаковыми. Без ущерба для общности можно положить

$$(u_{i\alpha}) = (u_{k\beta}) = \cdots = 1 \to a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1. \tag{1.6.3}$$

Здесь в скобки заключены парные отношения сшитых элементов БСВО. Пусть параметры с номером $r-1$ входят в (1.6.2) со знаком плюс. Выразим их из (1.6.3) через оставшиеся $r-2$ уже независимые параметры. В итоге получаем условия сшивки в виде

$$\begin{aligned} &i^l = \pm\alpha^l \equiv x_i^l; \quad k^l = \pm\beta^l \equiv x_k^l; \cdots \quad l = 1, 2, \cdots, r-2; \\ &i^{r-1} = \alpha^{r-1} = \sqrt{1 \mp (x_i^1)^2 \mp \cdots \mp (x_i^{r-2})^2}; \\ &k^{r-1} = \beta^{r-1} = \sqrt{1 \mp (x_k^1)^2 \mp \cdots \mp (x_k^{r-2})^2}; \cdots . \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

При этом парные отношения между разными новыми элементами принимают вид

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \pm x_i^1 x_k^1 \pm x_i^2 x_k^2 \pm \cdots + \\ &+ \sqrt{\left(1 \mp (x_i^1)^2 \mp \cdots \mp (x_i^{r-2})^2\right)\left(1 \mp (x_k^1)^2 \mp \cdots \mp (x_k^{r-2})^2\right)}, \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

соответствующий формулам (1.4.2) — (1.4.5). Очевидно, что закон БСВО (1.2.3) тогда переходит в закон вида (1.4.6).

2. Формулами (1.4.13) — (1.4.14) охарактеризован специфический вид УСВО ранга 4, соответствующий *2-мерной симплектической геометрии.* Этот случай получается из невырожденной БСВО ранга (4,4) с другим дополнительным условием на внутренние отношения для сшитых элементов:

$$(u_{i\alpha}) = (u_{k\beta}) = \cdots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 0. \tag{1.6.6}$$

При этом пара координат x^1 и x^2 УСВО следующим образом

выражается через пары сшитых элементов БСВО:

$$\begin{array}{ccc} i^1 = \alpha^1 = x_i^1; & k^1 = \beta^1 = x_k^1; & \cdots \\ i^2 = -\alpha^2 = x_i^2; & k^2 = -\beta^2 = x_k^2; & \cdots \\ i^3 = x_i^1 + x_i^2; \quad \alpha^3 = x_i^2 - x_i^1; & k^3 = x_k^1 + x_k^2; \quad \beta^3 = x_k^2 - x_k^1; & \cdots. \end{array} \tag{1.6.7}$$

Парное отношение между двумя разными элементами УСВО определяется в виде

$$a_{ik} = u_{i\beta} = x_i^1 x_k^2 - x_i^2 x_k^2 = -u_{k\alpha} = -a_{ki}, \tag{1.6.8}$$

т.е. является антисимметричным и совпадает с (1.4.13). Очевидно, что закон (1.2.3) тогда переходит в закон (1.4.14).

3. УСВО, отнесенные в разделе 1.4 ко *второму классу*, получаются из вырожденных БСВО ранга $(r, r; a)$. В этом случае следует выбрать дополнительное условие в виде равенства нулю внутренних парных отношений:

$$(a_{i\alpha}) = (a_{k\beta}) = \cdots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 0, \tag{1.6.9}$$

причем следует положить, что это обусловлено специальным видом выделенных (аддитивных) параметров. Условия сшивки записываются следующим образом:

$$i^l = \mp\alpha^l = \sqrt{2}x_i^l; \qquad k^l = \mp\beta^l = \sqrt{2}x_k^l;$$

$$i_0 = \alpha_0 = \pm(x_i^1)^2 \cdots \pm (x_i^{r-2})^2; \quad k_0 = \beta_0 = \pm(x_k^1)^2 \cdots \pm (x_k^{r-2})^2. \tag{1.6.10}$$

В этом случае парные отношения между сшитыми парами определяются в виде

$$a_{ik} = a_{i\beta} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \beta^l + i_0 + \beta_0 = \sum_{l=1}^{r-2} g_{ll} \left(x_i^l - x_k^l\right)^2 = l_{ik}^2, \tag{1.6.11}$$

где $g_{ll} = \pm 1$ — диагональные элементы метрического тензора евклидова или псевдоевклидова пространства с соответствующей сигнатурой. Очевидно, что закон БСВО ранга $(r, r; a)$ (1.2.3) непосредственно переходит в закон вида (1.4.9).

4. УСВО, отнесенные к *третьему классу*, получаются из вырожденных БСВО нечетных рангов при дополнительном условии

$$(a_{i\alpha}) = (a_{k\beta}) = \cdots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 0. \tag{1.6.12}$$

Для случая БСВО ранга (5,5;a) условия сшивки (1.6.7) обобщаются до выражений:

$$\begin{array}{ccc} i^1 = \alpha^1 = x_i; & k^1 = \beta^1 = x_k; & \cdots \\ i^2 = -\alpha^2 = y_i; & k^2 = -\beta^2 = y_k; & \cdots \\ i^3 = x_i + y_i; \quad \alpha^3 = y_i - x_i; & k^3 = x_k + y_k; \quad \beta^3 = y_k - x_k; & \cdots \\ i_0 = z_i; \quad \alpha_0 = -z_i; & k_0 = z_k; \quad \beta_0 = -z_k; & \cdots. \end{array} \tag{1.6.13}$$

Парное отношение между двумя сшитыми парами определяется в виде

$$a_{ik} = a_{i\beta} = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k = -a_{ki}. \tag{1.6.14}$$

Закон БСВО (1.2.1) тогда непосредственно переходит в (1.4.9).

Переход от (1.6.12) к одномерной симплектической геометрии (на ориентированной прямой), описываемой формулами (1.4.11) и (1.4.12), очевиден.

1.7 Выводы и замечания по теории систем вещественных отношений

Из изложенных в этой главе основ теории систем *вещественных* отношений можно сделать следующие три основных вывода. Во-первых, (унарную) геометрию классического пространства-времени можно переформулировать в реляционном духе, использовав для этого теорию систем вещественных отношений. Таким образом осуществляется задача, сформулированная еще Махом: изложить геометрию, исходя из понятий расстояний (точнее сказать, — из понятий парных отношений). Во-вторых, кроме теории унарных отношений имеется теория бинарных систем отношений. Поскольку эта теория строится по тем же правилам, что и теория унарных геометрий, то правомерно называть бинарные системы отношений *бинарными геометриями.* В-третьих, унарные геометрии можно получить из бинарных геометрий, следовательно общепринятые геометрии можно понимать как вторичные, производные конструкции, получаемые из бинарных систем отношений.

Эти выводы чрезвычайно важны для достижения целей, поставленных во введении, однако теории систем именно *вещественных* отношений явно недостаточно для осуществления намеченной там программы. Исходя из этого, сделаем ряд критических замечаний по изложенной в этой главе теории систем (структур) с вещественными отношениями. В этой теории можно усмотреть лишь намек на осуществление первой и четвертой

из перечисленных задач. Из изложенного пока не видно какой-либо связи ни с квантовой теорией, ни с физикой элементарных частиц. Пока не усматривается прогресс в обосновании свойств классического пространства-времени, таких, как его размерность, сигнатура, вид метрики. Все эти понятия в теории систем вещественных отношений по-прежнему необходимо постулировать. Различие состоит лишь в смене некоторых понятий, например, размерность заменяется на ранг.

Особенно хотелось бы выделить вопрос о характере метрических отношений в классической (унарной) геометрии. Квадратичный (парный) характер метрических отношений является одним из наиболее важных постулатов геометрии, причем, этот постулат обычно никак не связан с ее размерностью. Он имеет место как в классической евклидовой геометрии, так и в многомерных теориях Калуцы-Клейна. Но является ли постулат парности (квадратичности) метрических отношений незыблемым? Некоторый свет на этот вопрос позволяет пролить уже теория систем вещественных отношений. Для бинарных систем отношений парность отношений между элементами двух различных множеств заложена в самую основу теории [4]. Однако для унарных систем отношений этот вопрос оказался сложнее. Уже в рамках УСВО можно поставить задачу о нахождении закона и построения теории тройных отношений между элементами одного множества. Частный случай рассмотрен М.М.Михайличенко (см. Приложение к [27]). Этот вопрос можно связать с вторичным, производным характером унарных систем отношений. Ответ на него зависит от способа перехода от парных бинарных систем отношений к унарным системам отношений, которые могут быть и не парными... В этой связи следует упомянуть работы В.Я.Скоробогатько по так называемой *многоточечной геометрии* [56]. Им получен ряд интересных математических результатов и поставлен вопрос о физических приложениях такой теории. От развиваемой здесь теории естественно ожидать ответы и на эти вопросы.

Следует отметить, что в теории физических структур вещественность отношений поставлена во главу угла и по-существу является одним из основополагающих принципов миропонимания. Ю.И.Кулаков полагал, что эта теория имеет феноменологический характер, т.е. отношения должны быть наблюдаемыми, а, как известно, в физике наблюдаемые величины описываются

[4] Из общих соображений можно было бы ожидать существование теории отношений на трех множествах элементов. В ней исходными были бы тройные отношения, однако в работах группы Ю.И.Кулакова было показано, что не существует содержательной теории, построенной на трех и большем числе множеств, по крайней мере для случая вещественных отношений.

вещественными числами. Однако, на наш взгляд, эта позиция уязвима. Ничто не мешает сузить принцип вещественности, сохранив его лишь для наблюдаемых унарных геометрий, тогда как для более первичных бинарных систем отношений, из которых они выводятся, можно допустить возможность комплексных отношений.

Глава 2

Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) и 2-компонентные спиноры

2.1 Системы отношений в бинарной геометрофизике

Приступая к систематическому изложению бинарной геометрофизики, сформулируем, на какие системы отношений она опирается.

Во-первых, в основу бинарной геометрофизики положим *бинарные системы отношений*. Их теория наиболее проста. Они представляют собой наиболее элементарные системы отношений, из которых можно получить унарные системы, но не наоборот. Из изложенного в предыдущей главе очевидно, что теория бинарных систем отношений не опирается на классические представления.

Во-вторых, для построения бинарной геометрофизики, по крайней мере на первых порах, ограничимся случаем *симметричных*, т.е. изображенных на главной диагонали на рисунке 1.3 бинарных систем отношений (рангов (r, r)). Это отражает то, что в бинарной геометрофизике два множества элементов (начальные и конечные состояния) выступают равноправно, т.е. симметричным образом. В некотором смысле это соответствует однородности времени и его обратимости. В принципе, возможны обобщения теории на несимметричные системы отношений, однако в этой книге подобные обобщения не рассматриваются.

В-третьих, в основу реляционной теории пространства-времени следует положить бинарные системы отношений *наименьших рангов*: $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, ... Здесь проявляется некий принцип простоты в устройстве природы. Оказывается, наименьшие ранги в конце концов ответственны за размерность и сигнатуру классического пространства-времени.

В-четвертых, бинарную геометрофизику будем строить на базе *иерархии бинарных систем отношений* низших рангов. Оказывается, каждая из систем отношений низших рангов играет принципиально важную и неповторимую роль в построении фундамента теоретической физики. Как будет показано ниже, системы отношений рангов $(4,4)$ и выше, с одной стороны, позволяют описывать взаимодействия, а, с другой стороны, перебрасывают мостик к многомерным теориям Калуцы-Клейна. Другой аспект иерархичности бинарной геометрофизики состоит в том, что интерпретация и осознание роли каждой из бинарных систем отношений возможны лишь при рассмотрении ее внутри цельной конструкции из других отношений.

В-пятых, для построения бинарной геометрофизики обобщим рассмотренные в предыдущей главе БСВО на случай бинарных систем *комплексных* отношений (БСКО), когда парные отношения и параметры элементов описываются комплексными числами. Легко убедиться, что в комплексифицированной теории законы и парные отношения имеют тот же самый вид. Однако теперь, строго говоря, следовало бы заново доказать теоремы единственности для используемых законов. Эта математическая задача здесь не рассматривается.

Именно переход к системам комплексных отношений позволяет надеяться на реализацию второй и третьей из сформулированных во введении свойств реляционной теории пространства-времени. В связи с этим следует упомянуть близкую по духу твисторную программу Р.Пенроуза [46], где также во главу угла ставится комплексификация исходных понятий [1].

В-шестых, особо следует сказать о переходе от комплексных параметров и отношений элементов к физически интерпретируемым (наблюдаемым) понятиям, которые, как известно, описываются вещественными числами. Близкие по смыслу проблемы имеются как в общепринятой квантовой теории, так и в общей теории относительности. В квантовой теории переход от комплексных волновых функций к наблюдаемым величинам (импульсам, координатам и т.д.) осуществляется с помощью эрмито-

[1] Отметим, что в настоящее время имеются программы построения физической теории на основе кватернионов. Например, таковой является алгебродинамика, развиваемая В.В.Кассандровым [25], исходя из другой системы принципов.

вых операторов, имеющих вещественные собственные значения. В общей теории относительности переход от тензорных величин, зависящих от произвола в выборе координатной системы, к наблюдаемым величинам производится посредством проектирования на направления используемых систем отсчета. (В ОТО истинно наблюдаемыми являются лишь скаляры.) В бинарной геометрофизике аналогом указанных процедур является *переход от БСКО к УСВО* путем соответствующей сшивки элементов двух множеств в объекты (элементы) одного сорта и определения между ними вещественных отношений. Таким образом в бинарной геометрофизике появляются и УСВО, однако они имеют вторичный характер.

Для случая БСКО по-новому решается вопрос о получении УСВО. Напомним, что из БСВО ранга (r, r) получались УСВО ранга r. Больший ранг, за некоторыми исключениями, получить было нельзя из-за вещественности параметров и дополнительных условий на них типа (1.6.1). В случае же комплексных отношений получается вдвое больше вещественных параметров. Так, в случае, когда в один новый элемент сшиваются по одному элементу из двух множеств исходной БСКО ранга (r, r), новый элемент унарной системы будет характеризоваться $2(r-1)$ вещественными параметрами. (Например, для ранга $(3, 3)$ получаем четыре вещественных параметра.) Учтем, что в законе БСКО ранга (r, r) фигурируют $2r$ элементов разного сорта. После сшивки их с соответствующими элементами другого сорта, в общем случае не входящими в записанный закон, уже можно говорить, что этим законом связываются $2r$ элементов УСВО, т.е. имеется унарный закон ранга $2r$. С этим числом согласуется число вещественных параметров унарной геометрии размерности n:

$$n = r - 2 \to 2(r-1) = 2r - 2. \qquad (2.1.1)$$

Следовательно, в самом общем случае можно ожидать, что из БСКО ранга (r, r) можно получить $2r-2$–мерную унарную геометрию. Так, 4-мерную геометрию можно ожидать получить из БСКО ранга $(3, 3)$. Однако, в большинстве случаев из-за дополнительных условий ранг получаемой унарной геометрии оказывается на единицу ниже.

Проиллюстрируем изложенное с помощью блок-схемы (см. рис. 2.1), уточняющей верхнюю правую часть блок-схемы на рисунке 0.3. На этом рисунке обозначены четыре уровня блоков. Верхний уровень соответствует общей теории БСКО симметричных рангов (r, r). Будем полагать, что ее основные черты уже известны. Второй сверху уровень соответствует математическим теориям БСКО низших рангов. Третий уровень составляют

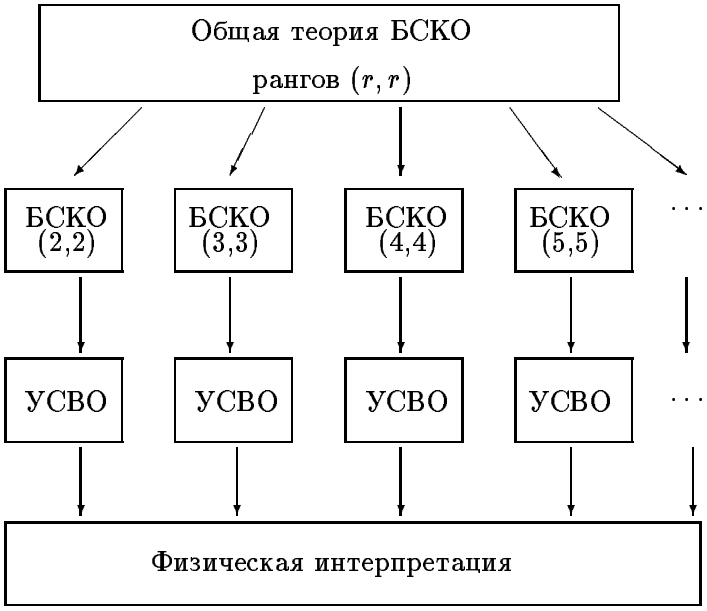


Рис. 2.1: Системы отношений в бинарной геометрофизике

переходы к УСВО, которые можно получить из БСКО соответствующих рангов. Везде будет подразумеваться, что из работ новосибирской группы известно, какие, в принципе, возможны УСВО. Только после этого появляется возможность говорить о физической интерпретации (четвертый, нижний уровень).

Приступим к построению бинарной геометрофизики с анализа БСКО ранга (3,3). Как будет показано в этой и следующей главах, именно она играет ключевую роль в бинарной геометрофизике. Роль другой БСКО самого низшего ранга (2,2) также чрезвычайно важна в построении фундамента физического мироздания, однако ее роль раскрывается по-настоящему лишь при комплексном рассмотрении в совокупности с БСКО рангов (3,3) и (4,4). По этим причинам теория БСКО ранга (2,2) будет изложена после обсуждения БСКО ранга (3,3) (в четвертой главе). Последующие главы посвящены систематическому изложению теории БСКО ранга (4,4) и более высоких рангов.

2.2 Закон и основные понятия бинарной системы комплексных отношений ранга (3,3)

1. Напомним, что согласно общей формуле (1.2.1) закон БСКО ранга (3,3) записывается в виде равенства нулю определителя, построенного из 9 парных отношений между двумя тройками произвольных элементов i, m, n и α, μ, ν из двух разных множеств

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} \\ u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} \\ u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.1}$$

где парные отношения имеют вид

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2. \tag{2.2.2}$$

Здесь i^1 и i^2 – два комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а α^1 и α^2 — комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Это парное отношение можно понимать как скалярное произведение двух 2-мерных векторов из разных пространств.

2. Как уже отмечалось, параметры элементов можно выразить через их отношения к некой системе эталонных (базисных) элементов. В данном случае ранга (3,3) базис системы отношений задается двумя элементами множества $\mathcal{M}$ и двумя элементами множества $\mathcal{N}$. Они выполняют роль базиса как при задании координатной системы в геометрии или как роль базисных тел, определяющих систему отсчета в теории относительности. Пусть эталонными являются элементы m, n, μ, ν, фигурирующие в (2.2.1). Обозначим волной сверху отношения между эталонными элементами: $\tilde{u}_{m\mu}$, $\tilde{u}_{m\nu}$, $\tilde{u}_{n\mu}$, $\tilde{u}_{n\nu}$. Отношение $u_{i\alpha}$ между произвольными неэталонными элементами i и α (см. рис.2.2) выразим с помощью закона (2.2.1) через парные отношения элементов i и α к эталонным ($u_{i\mu}$, $u_{i\nu}$, $u_{m\alpha}$, $u_{n\alpha}$) и парные отношения между эталонными элементами:

$$u_{i\alpha} = \frac{1}{\Delta}\left(u_{i\mu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\nu} + u_{i\nu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\mu} - u_{i\mu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\nu} - u_{i\nu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\mu}\right), \tag{2.2.3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} \\ \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} \end{vmatrix} = \tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu} - \tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{m\nu} \equiv \begin{bmatrix} \mu\nu \\ mn \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

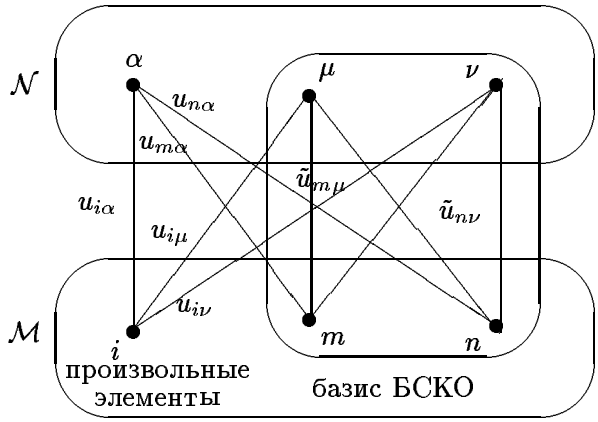


Рис. 2.2: Задание параметров пары элементов i и α через их отношения к эталонным элементам

— важное понятие в теории БСКО ранга (3.3), определяемое для двух пар разнородных элементов. Будем его называть *фундаментальным* 2×2*-отношением.* В данном случае это отношение характеризует систему эталонных элементов.

3. Выделим частный случай эталонных элементов, когда парные отношения между ними удовлетворяют условиям:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}^*_{m\mu}; \quad \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}^*_{n\nu}; \quad \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}^*_{m\nu} \ . \tag{2.2.5}$$

Такая система эталонных элементов характеризуется четырьмя вещественными числами. В общем случае отношения, удовлетворяющие (2.2.5), можно представить в виде

$$\tilde{u}_{m\mu} = u_0 + u_3; \ \tilde{u}_{n\nu} = u_0 - u_3; \ \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}^*_{m\nu} = u_1 + iu_2, \tag{2.2.6}$$

где u_0, u_1, u_2, u_3 –вещественные числа; тогда фундаментальное 2x2-отношение (2.2.4) является вещественным и записывается в форме

$$\Delta = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \tag{2.2.7}$$

соответствующей квадратичной форме с сигнатурой пространства Минковского.

4. Еще более частный случай представляет базис из двух пар элементов, удовлетворяющих условиям:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}_{n\nu} = u_0; \ \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}_{m\nu} = 0. \tag{2.2.8}$$

В этом случае

$$\Delta = u_0^2 > 0, \tag{2.2.9}$$

и парное отношение (2.2.3) между двумя произвольными неэталонными элементами в данном базисе принимает наиболее простой вид

$$u_{i\alpha} = \frac{\tilde{u}_{m\mu}}{\Delta}\left(u_{i\mu}u_{m\alpha} + u_{i\nu}u_{n\alpha}\right) \equiv i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2, \tag{2.2.10}$$

где параметры элементов представляются через отношения к базисным элементам:

$$\begin{aligned} i^1 &= \pm\tfrac{u_{i\mu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^2 = \pm\tfrac{u_{i\nu}}{\sqrt{u_0}}; \\ \alpha^1 &= \pm\tfrac{u_{m\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^2 = \pm\tfrac{u_{n\alpha}}{\sqrt{u_0}}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Назовем БСКО ранга (3,3) *собственной выделенной четверки элементов*, если отношения между ними удовлетворяют условиям (2.2.8), и, обратно, четверку элементов со свойством (2.2.8) назовем *собственным базисом* данной БСКО ранга (3,3).

5. Важное место в теории БСКО ранга (3,3) занимает переход к унарным системам вещественных отношений. От БСКО(3,3) можно перейти ко всем (по крайней мере к неэкзотическим) видам унарных геометрий, перечисленным в главе 1; причем вследствие того, что парные отношения комплексные, размерность получающихся унарных геометрий оказывается больше, чем в теории БСВО того же ранга (3,3). При переходе к унарным геометриям опять следует определить условие сшивки элементов из двух множеств. Определим сшивку через операцию комплексного сопряжения параметров:

$$i^s = \alpha^{*s};\ k^s = \beta^{*s};\ j^s = \gamma^{*s}; \cdots. \tag{2.2.12}$$

Такие пары элементов будем называть *сопряженными друг другу*. Эти условия обобщают использованные в главе 1 условия сшивки (1.6.1). Очевидно, что условия типа (2.2.5) выполняются для двух пар сопряженных элементов.

6. Продемонстрируем переход от БСКО ранга (3,3) к унарной *римановой геометрии* (к УСВО ранга 5), который оказывается наиболее простым. Это делается для специальных пар сопряженных элементов из двух разных множеств, которые становятся элементами новой УСВО.

Пусть i, α и k, β – две пары сопряженных согласно (2.2.12) элементов. Определим между ними парное отношение a_{ik} (новые

элементы будем обозначать латинскими индексами соответствующих элементов из $\mathcal{M}$) через симметричную комбинацию перекрестных отношений в БСКО ранга (3,3) [2]:

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{2}\left(u_{i\beta} + u_{k\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(i^1\beta^1 + i^2\beta^2 + k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2\right). \tag{2.2.13}$$

Очевидно, что эти парные отношения вещественны. Зададим также внутренние отношения a_{ii}, a_{kk}, ... для каждой из сшитых пар в виде

$$a_{ii} = u_{i\alpha}; \quad a_{kk} = u_{k\beta}; \quad \ldots. \tag{2.2.14}$$

Перейдем от комплексных параметров к вещественным согласно формулам:

$$\begin{array}{ll} i^1 = z_i + iv_i; & i^2 = u_i + iw_i; \\ k^1 = z_k + iv_k; & k^2 = u_k + iw_k; \\ \quad\cdots & \quad\cdots, \end{array} \tag{2.2.15}$$

тогда перекрестные и внутренние парные отношения (2.2.13) и (2.2.14) принимают вид

$$a_{ik} = z_i z_k + v_i v_k + u_i u_k + w_i w_k; \tag{2.2.16}$$

$$a_{ii} = z_i^2 + v_i^2 + u_i^2 + w_i^2; \; a_{kk} = z_k^2 + v_k^2 + u_k^2 + w_k^2; \; \cdots. \tag{2.2.17}$$

Очевидно, что (2.2.16) можно понимать как скалярное произведение двух векторов в 4-мерном евклидовом пространстве. Их длины определяются формулами (2.2.17). Этот факт можно отобразить в виде равенства нулю определителя Грама для пяти векторов (для пяти сшитых пар):

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} & a_{km} & a_{kn} \\ a_{ji} & a_{jk} & a_{jj} & a_{jm} & a_{jn} \\ a_{mi} & a_{mk} & a_{mj} & a_{mm} & a_{mn} \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nj} & a_{nm} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.18}$$

На пары сшитых элементов, для которых строится унарная геометрия, наложим дополнительные условия, обобщающие (1.6.3):

$$a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1; \to z^2 + v^2 + u^2 + w^2 = 1. \tag{2.2.19}$$

[2] Заметим, что отношения между парами сопряженных элементов, образующих собственный базис, равны нулю.

Выражая z через три независимых параметра v, u, w, приходим к 3-мерной римановой геометрии (с постоянной положительной кривизной), когда перекрестные парные отношения (2.2.16) превращаются в (1.4.2), а соотношение (2.2.18) переходит в закон (1.4.6) УСВО ранга 5.

7. Унарные геометрии других типов (геометрия Минковского, геометрия Лобачевского) получаются из БСКО ранга (3,3) другим способом. Так, прообраз *геометрии Минковского* вводится для пар сопряженных элементов $(i\alpha)$, $(k\beta)$, $\cdots$, когда парное отношение задается через фундаментальное 2x2-отношение типа (2.2.4), т.е.

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = u_{i\alpha}u_{k\beta} - u_{i\beta}u_{k\alpha} \tag{2.2.20}$$

без каких-либо дополнительных условий типа (2.2.19). Все дальнейшее содержание этой главы посвящено обсуждению вопросов, связанных с заданием парных отношений в виде (2.2.20), и получению на этой основе УСВО ранга 6.

Переход к *геометрии Лобачевского* также опирается на фундаментальные 2x2-отношения (2.2.20), однако, во-первых, элементы этой геометрии строятся не из пар, а из четверок сопряженных элементов, и, во-вторых, геометрия задается не для произвольных наборов из четверок элементов, а лишь для специальных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Эти вопросы наряду с интерпретацией в физике элементарных частиц обсуждены в третьей главе.

2.3 Группа преобразований в рамках одной системы отношений

1. Определим (сначала формально) две группы линейных преобразований параметров элементов отдельно в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} i'^1 &= C_1^1 i^1 + C_2^1 i^2; \quad \alpha'^1 = \tilde{C}_1^1 \alpha^1 + \tilde{C}_2^1 \alpha^2; \\ i'^2 &= C_1^2 i^1 + C_2^2 i^2; \quad \alpha'^2 = \tilde{C}_1^2 \alpha^1 + \tilde{C}_2^2 \alpha^2, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где C_r^s и $\tilde{C}_r^s$ – комплексные коэффициенты, характеризующие эти преобразования. Здесь s и r пробегают значения 1 и 2.

Важный частный случай составляют преобразования, оставляющие инвариантными парные отношения:

$$u'_{i\alpha} = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2 = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 = u_{i\alpha} = Inv. \tag{2.3.2}$$

Это требование налагает на коэффициенты C_r^s и $\tilde{C}_r^s$ следующие условия:

$$\begin{aligned} &C_1^1\tilde{C}_1^1 + C_1^2\tilde{C}_1^2 = 1; \quad C_1^1\tilde{C}_2^1 + C_1^2\tilde{C}_2^2 = 0; \\ &C_2^1\tilde{C}_2^1 + C_2^2\tilde{C}_2^2 = 1 \quad C_2^1\tilde{C}_1^1 + C_2^2\tilde{C}_1^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

2. Потребуем, чтобы при преобразованиях типа (2.3.1) сохранялось свойство сопряженности пар элементов (2.2.12). Это связывает преобразования в двух множествах таким образом, что

$$\tilde{C}_r^s = C_r^{*s}; \tag{2.3.4}$$

тогда условия (2.3.3) переходят в следующие три комплексные соотношения:

$$\begin{aligned} &C_1^1C_1^{*1} + C_1^2C_1^{*2} = 1; \quad C_2^1C_2^{*1} + C_2^2C_2^{*2} = 1; \\ &C_1^1C_2^{*1} + C_1^2C_2^{*2} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Это четыре условия на 8 вещественных параметров. Линейные преобразования (2.3.1) с условиями (2.3.5) образуют *унитарную* (4-параметрическую) *группу U(2)* [3]. Очевидно, что при таких преобразованиях фундаментальные 2x2-отношения (2.2.13) остаются инвариантными.

3. *Группа унитарных преобразований $U(2)$ описывает переходы между различными собственными базисами одной и той же БСКО ранга (3,3).* Продемонстрируем это. Пусть параметры произвольных элементов i и α определены в собственном базисе элементов m, n, μ, ν согласно формулам (2.2.11). Возьмем в качестве второго базиса пару сопряженных элементов l, λ; p, π (см. рис.2.3). Пусть второй базис также является собственным данной БСКО ранга (3,3), т.е. согласно (2.2.8) отношения между этими элементами удовлетворяют условиям:

$$\tilde{u}_{l\lambda} = \tilde{u}_{p\pi} = \acute{u}_0; \quad \tilde{u}_{l\pi} = \tilde{u}_{p\lambda} = 0. \tag{2.3.6}$$

[3]Термин "унитарная группа" обусловлен тем, что ее преобразования описываются унитарными матрицами. Напомним, что *унитарными* называются матрицы , удовлетворяющие условию $C^+C = I$, где C^+ – матрица, получающаяся из процедурами комплексного сопряжения и транспонирования. Легко видеть, что для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix}$$

условия (2.3.5) означают унитарность.

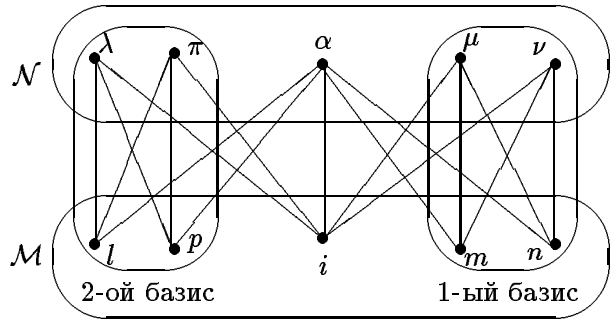


Рис. 2.3: Переход от одного базиса к другому в рамках БСКО ранга (3,3)

Тогда парное отношение $u_{i\alpha}$ можно переписать в новом базисе посредством формулы типа (2.2.10):

$$u'_{i\alpha} = \frac{\tilde{u}_{l\lambda}}{\Delta_2}\left(u_{i\lambda}u_{l\alpha} + u_{i\pi}u + p\alpha\right) = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2, \tag{2.3.7}$$

где, как и в (2.2.11),

$$\begin{aligned} i'^1 &= \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{\dot{u}_0}}; \quad i'^2 = \pm\tfrac{u_{i\pi}}{\sqrt{\dot{u}_0}}; \\ \alpha'^1 &= \pm\tfrac{u_{l\alpha}}{\sqrt{\dot{u}_0}}; \quad \alpha'^2 = \pm\tfrac{u_{p\alpha}}{\sqrt{\dot{u}_0}}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Парные отношения элементов i и α к элементам 2-го базиса можно выразить через отношения этих элементов к элементам 1-го базиса посредством закона (2.2.1). Так, чтобы найти $u_{i\lambda}$ запишем закон БСКО ранга (3,3) для элементов: i, m, n; λ, μ, ν:

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\lambda} & u_{i\mu} & u_{i\nu} \\ u_{m\lambda} & \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} \\ u_{n\lambda} & \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.9}$$

Из этого выражения находим

$$\begin{aligned} u_{i\lambda} &= \tfrac{u_0}{\Delta_1}\left(u_{i\mu}u_{m\lambda} + u_{i\nu}u_{n\lambda}\right) \to \\ i'^1 &\equiv \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{\dot{u}_0}} = C_1^1 i^1 + C_2^1 i^2, \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

где $\Delta_1 = u_0^2$, i^1 и i^2 определены в (2.2.11), а коэффициенты C_1^1 и C_2^1 выражаются через отношения элементов 2-го базиса к элементам 1-го:

$$C_1^1 = \frac{u_{m\lambda}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}};\ C_2^1 = \frac{u_{n\lambda}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}. \tag{2.3.11}$$

Аналогично находится отношение

$$\begin{gathered} u_{i\pi} = \tfrac{u_0}{\Delta_1}\left(u_{i\mu}u_{m\pi} + u_{i\nu}u_{n\pi}\right) \to \\ i'^2 \equiv \pm\tfrac{u_{i\pi}}{\sqrt{\acute{u}_0}} = C_1^2 i^1 + C_2^2 i^2, \end{gathered} \tag{2.3.12}$$

где

$$C_1^2 = \frac{u_{m\pi}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}};\quad C_2^2 = \frac{u_{n\pi}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}. \tag{2.3.13}$$

Точно так же находятся выражения для отношений $u_{l\alpha}$ и $u_{p\alpha}$.

Соотношения (2.3.10) и (2.3.12) представляют собой линейные преобразования параметров элементов вида (2.3.1), а условия на отношения элементов (2.3.6) во втором базисе, выраженные через отношения к элементам 1-го базиса, соответствуют условиям на коэффициенты линейных преобразований (2.3.5). Действительно

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{l\lambda} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{l\mu}u_{m\lambda} + u_{l\nu}u_{n\lambda}\right) = \acute{u}_0 \to \quad C_1^1 C_1^{*1} + C_2^1 C_2^{*1} = 1; \\ \tilde{u}_{p\pi} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{p\mu}u_{m\pi} + u_{p\nu}u_{n\pi}\right) = \acute{u}_0 \to \quad C_1^2 C_1^{*2} + C_2^2 C_2^{*2} = 1: \\ \tilde{u}_{l\pi} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{l\mu}u_{m\pi} + u_{l\nu}u_{n\pi}\right) = 0 \to \quad C_1^2 C_1^{*1} + C_2^2 C_2^{*1} = 0; \\ \tilde{u}_{p\lambda} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{p\mu}u_{m\lambda} + u_{p\nu}u_{n\lambda}\right) = 0 \to \quad C_1^1 C_1^{*2} + C_2^1 C_2^{*2} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Следует учесть, что из условий (2.3.5) вытекают соотношения:

$$C_1^1 C_1^{*1} = C_2^2 C_2^{*2};\quad C_1^2 C_1^{*2} = C_2^1 C_2^{*1}. \tag{2.3.15}$$

Таким образом, в рамках одной и той же БСКО ранга (3,3) имеется множество собственных базисов. Переходы между этими базисами описываются группой унитарных преобразований $U(2)$. Другими словами, можно утверждать, что *группа унитарных преобразований $U(2)$ не выводит за пределы одной и той*

же БСКО ранга (3,3). Как будет показано ниже, в общепринятой теории такие преобразования соответствуют преобразованиям координат в рамках одной и той же системы отсчета [4]. Выбор различных собственных базисов соответствует использованию разных координатных систем.

2.4 Переходы между разными системами отношений ранга (3,3)

1. Рассмотрим фундаментальное 2x2-отношение между произвольными двумя парами элементов: i, k, α, β. Легко показать, что оно представляется в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \tag{2.4.1}$$

т.е. записывается через произведение двух определителей, образованных из параметров элементов отдельных множеств.

2. Формально рассмотрим такие линейные преобразования параметров элементов в каждом множестве, которые оставляют инвариантными соответствующие определители справа в (2.4.1). В частности, для элементов множества $\mathcal{M}$ при произвольных линейных преобразованиях

$$i'^s = C^s_r i^r, \tag{2.4.2}$$

где $s, r = 1, 2$, определитель преобразуется по закону

$$\begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 \\ i'^2 & k'^2 \end{vmatrix} = \left(C^1_1 C^2_2 - C^1_2 C^2_1\right) \cdot \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Следовательно, для инвариантности определителя необходимо, чтобы коэффициенты преобразования удовлетворяли условию

$$C^1_1 C^2_2 - C^1_2 C^2_1 = 1. \tag{2.4.4}$$

Это два условия на 8 вещественных коэффициентов, составляющих C^s_r.Линейные преобразования (2.4.2) с условием (2.4.4) составляют *унимодулярную (6-параметрическую) группу* $SL(2, C)$.

[4] Следует напомнить, что в теории относительности имеется принципиальное различие между понятиями системы отсчета и координатной системы (см., например [10]).

Во втором множестве следует рассматривать комплексно сопряженные преобразования. Они также составляют группу $SL(2,C)$.

3. Рассмотренные в предыдущем разделе унитарные преобразования $U(2)$ оставляют инвариантным фундаментальное 2x2-отношение (2.4.1), однако в общем случае отдельные определители справа не являются инвариантными при этих преобразованиях. Обсудим частный случай унитарных преобразований, при которых коэффициенты удовлетворяют как условиям (2.3.5), так и (2.4.4). Такие преобразования составляют *унимодулярную унитарную (3-параметрическую) группу* $SU(2)$.

Выделяя из третьего из соотношений в (2.3.5) коэффициент $C_2^2 = -C_1^{*1}C_1^2/C_2^{*1}$ и подставляя его в (2.4.4), приходим с учетом первого соотношения из (2.3.5) к условиям на коэффициенты:

$$C_2^1 = -C_1^{*2}; \quad C_1^1 = C_2^{*2}. \tag{2.4.5}$$

Представим C_2^1 и C_1^1 через вещественные параметры a_0, a_1, a_2, a_3 так, что

$$C_2^1 = a_2 + ia_1; \quad C_1^1 = a_0 + ia_3,$$

тогда матрица унимодулярных унитарных преобразований приводится к виду

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ -C_2^{*1} & C_1^{*1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \tag{2.4.6}$$

где вследствие (2.4.4) вещественные параметры удовлетворяют соотношению

$$C_1^1C_2^2 - C_2^1C_1^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \tag{2.4.7}$$

т.е. независимыми остаются только три из них.

Очевидно, что преобразования из группы $SU(2)$ не выводят за пределы одной и той же БСКО ранга (3,3).

4. Матрицу коэффициентов $\{C_s^r\}$ произвольного $SL(2,C)$ - преобразования можно представить в виде произведения эрмитовой матрицы [5] на унитарную:

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}. \tag{2.4.8}$$

[5] Напомним, что *эрмитовыми* называются матрицы B, удовлетворяющие условию

$$B = B^\dagger,$$

где $B^\dagger$ — матрица, получающаяся из B процедурами комплексного сопряжения и транспонирования.

Данное утверждение можно обосновать, опираясь на соответствующие теоремы из теории матриц, а можно доказать и непосредственно [6]. Следовательно, можно утверждать, что *преобразования, дополняющие 3-параметрическую группу* $SU(2)$ *до полной 6- парметрической группы* $SL(2,C)$, *характеризуются эрмитовыми матрицами* вида

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.4.9)$$

где $b - 0$, b_1, b_2, b_3 — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \qquad (2.4.10)$$

т.е. независимыми являются только три. Такие преобразования не образуют подгруппу . В литературе они часто называются *бустами.*

5. При этих преобразованиях парные отношения $u_{i\alpha}$ не являются инвариантами. Они изменяются. Однако после таких преобразований измененные $u'_{i\alpha}$ образуют новую БСКО ранга (3,3), в которой фундаментальные 2x2-отношения точно такие же, что и в исходной БСКО ранга (3,3). Можно показать, что для любой четверки из двух пар сопряженных элементов с парными отношениями вида (2.2.5) имеется такой набор коэффициентов C_r^s преобразований буста, что полученная новая БСКО ранга (3,3) для них будет *собственной системой отношений.*

---

[6] Для этого матрицу $\{C_s^r\}$ следует представить в виде

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + ic_2 & c_3 + ic_4 \\ c_5 + ic_6 & c_7 + ic_8 \end{pmatrix},$$

где вследствие (2.4.4) вещественные параметры c_l $(l = 1, 2, \cdots, 8)$ удовлетворяют условиям:

$$c_1c_7 - c_2c_8 - c_3c_5 + c_4c_6 = 1; \quad c_2c_7 + c_1c_8 - c_3c_6 - c_4c_5 = 0.$$

Из (2.4.8) можно получить 8 вещественных уравнений на 8 неизвестных коэффициентов: b_0, b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3. Легко показать, что в случае

$$2 + \sum_{l=1}^{8} c_l^2 \neq 0$$

семь неизвестных b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3 выражаются через $b_0 \neq 0$ и параметры c_l.

2.5 Двухкомпонентные спиноры

1. Представление фундаментального 2x2-отношения в виде (2.4.1) и введенные условия инвариантности каждого из определителей, образованных из параметров элементов отдельных множеств, позволяют говорить о парных отношениях (метрике) в каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Так в множестве $\mathcal{M}$ двум элементам i и k оказывается сопоставленным парное отношение

$$b_{(ik)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1k^2 - i^2k^1. \qquad (2.5.1)$$

Более того, в каждом множестве элементов оказывается определенной унарная система комплексных отношений (УСКО). Ее можно считать как бы "наведенной" элементами противоположного множества. Если бы параметры были вещественными, то такая унарная система отношений с антисимметричными парными отношениями совпала бы с рассмотренной в главе 1 2-мерной симплектической геометрией с законом (1.4.14). В данном же случае имеем УСКО ранга 4 с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & b_{(ik)} & b_{(im)} & b_{(in)} \\ -b_{(ik)} & 0 & b_{(km)} & b_{(kn)} \\ -b_{(im)} & -b_{(km)} & 0 & b_{(mn)} \\ -b_{(in)} & -b_{(kn)} & -b_{(mn)} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5.2)$$

Очевидно, во втором множестве $\mathcal{N}$ имеет место аналогичная УСКО ранга 4 с парными отношениями $\tilde{b}_{\alpha\beta} = \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$.

2. Известно, что 2-мерные комплексные векторы, для которых определена антисимметричная метрика, инвариантная относительно линейных преобразований (2.4.2), называются *2- компонентными (комплексными) спинорами.* Таким образом, теория БСКО ранга (3,3) естественным образом приводит к 2-компонентным спинорам [14]. Это другой подход к определению столь важного в математике и физике понятия, отличный от общепринятого способа определения спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел [26, 54]. Его основные моменты изложены в Приложении А.2.

В связи с важностью для всего дальнейшего кратко напомним основные положения теории 2-компонентных спиноров [51, 53]. Спиноры можно обозначать как в векторном виде $(\vec{i}, \vec{k})$, так и в тензорном. В предыдущих разделах этой главы фактически уже использовались тензорные обобзначения (i^s, k^s). Еще раз

запишем скалярное произведение (антисимметричную метрику) для двух векторов (спиноров) в разных обозначениях:

$$\left(\vec{ik}\right) = g_{sr} i^s k^r = b_{(ik)}, \tag{2.5.3}$$

где s и r принимают значения 1 и 2; g_{sr} является антисимметричным 2-мерным метрическим тензором

$$g_{sr} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.4}$$

Метрический тензор совпадает с 2-мерным символом Леви-Чивиты

$$g_{sr} = \varepsilon_{sr} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & s = r; \\ +1, & sr = 12; \\ -1, & sr = 21. \end{array} \right\} \tag{2.5.5}$$

3. Величины с верхними индексами называются контравариантными, а с нижними — ковариантными. Напомним, что по одинаковым индексам, встречающимся сверху и снизу, подразумевается суммирование (в данном случае от 1 до 2). Метрический тензор в формулах (2.5.3) – (2.5.5) является ковариантным. Ему можно сопоставить контравариантный метрический тензор g^{sr} по обычным тензорным правилам

$$g^{sr} = \frac{\cdot\cdot g_{sr}}{|g_{sr}|} \to g^{sr} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Имеют место соотношения:

$$g_{sr} g^{sr} = 2; \quad g_{sr} g^{rl} = \delta_s^l, \tag{2.5.7}$$

где

$$\delta_s^l = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & s = l; \\ 0, & s \neq l \end{array} \right\}$$

– символы Кронекера. С помощью компонент метрического тензора можно ввести ковариантные компоненты спиноров (ковариантные параметры элементов):

$$i_s = g_{sr} i^r. \tag{2.5.8}$$

Особо следует подчеркнуть, что “немой” индекс у g_{sr}, по которому производится суммирование, — второй. Можно записать и обратное соотношение

$$i^s = g^{rs} i_r. \tag{2.5.9}$$

При поднятии индексов "немой" индекс у g^{rs} должен быть первым. Из формулы (2.5.8) следует

$$i_1 = g_{12} i^2 = i^2; \quad i_2 = g_{21} i^1 = -i^1. \tag{2.5.10}$$

Совершенно аналогично вводится метрический тензор во втором множестве (пространстве) $\mathcal{N}$. Всякий раз, когда будет необходимо подчеркнуть принадлежность компонент пространствам $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$, будем для пространства $\mathcal{N}$ индексы писать с точками сверху, тогда как для пространства $\mathcal{M}$ — без точек. Компоненты $g_{\dot{s}\dot{r}}$ и $g^{\dot{s}\dot{r}}$ имеют в точности те же значения, что g_{sr} и g^{sr}, так что имеют место аналогичные соотношения между ковариантными и контравариантными компонентами спиноров во втором пространстве.

4. Поскольку в теории спиноров исходными являются метрика и группа преобразований, то ключевую роль в такой теории играют объекты, преобразующиеся по различным представлениям группы. Таковыми являются всевозможные *спинтензоры* — величины, преобразующиеся как произведения произвольного числа спиноров из двух пространств. Так, спинтензор ранга $m+n$ преобразуется как

$$B^{sr\cdots\dot{l}\dot{p}\cdots} \sim i^s k^r \cdots \beta^{\dot{l}} \gamma^{\dot{p}} \cdots, \tag{2.5.11}$$

т.е.

$$B'^{sr\cdots\dot{l}\dot{p}\cdots} = C^s_a C^r_b \cdots C^{*\dot{l}}_{\dot{c}} C^{*\dot{p}}_{\dot{d}} \cdots B^{ab\cdots\dot{c}\dot{d}\cdots}. \tag{2.5.12}$$

Очевидно, что можно писать спинтензоры и с ковариантными индексами, например

$$B_{s\dot{r}} = B^{l\dot{p}} g_{sl} g_{\dot{r}\dot{p}}. \tag{2.5.13}$$

При преобразованиях из группы $SL(2,C)$ остаются инвариантными комбинации типа

$$B_{s\dot{r}} B^{s\dot{r}}, \quad B_{s\dot{r}\dot{p}} B^{s\dot{r}\dot{p}}, \cdots.$$

5. Оказалось, что в физических приложениях теории спиноров наиболее важную роль играют смешанные спинтензоры второго ранга $B^{s\dot{r}}$ и спинтензорные инварианты $B_{s\dot{r}} B^{s\dot{r}}$. Чтобы разобраться в причинах этого обстоятельства, давайте введем спинтензор $B^{s\dot{r}}$, построенный по правилу (2.5.11) из двух сопряженных элементов i и α. Вследствие условий сопряженности элементов компоненты $B^{1\dot{1}}$ и $B^{2\dot{2}}$ вещественны, а $B^{1\dot{2}}$ и $B^{2\dot{1}}$ –

комплексно сопряжены друг другу. Матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1\alpha^1 & i^1\alpha^2 \\ i^2\alpha^1 & i^2\alpha^2 \end{pmatrix} = \tag{2.5.14}$$

$$= \begin{pmatrix} k^0+k^3 & k^1-ik^2 \\ k^1+ik^2 & k^0-k^3 \end{pmatrix} = k^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} k^l \sigma_l,$$

где k^0, k^1, k^2, k^3 — четверка вещественных чисел, I_2 — единичная 2x2-матрица, σ_l — три 2x2-матрицы Паули:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.15}$$

Матрицы Паули удовлетворяют известным соотношениям [7]:

$$Sp\sigma_l = 0; \quad \sigma_i\sigma_l + \sigma_l\sigma_i = 2\delta_{il}I_2; \quad \sigma_i\sigma_l = i\varepsilon_{ilj}\sigma_j + \delta_{ij}, \tag{2.5.16}$$

где δ_{il} — символы Кронекера, ε_{ilj} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Легко убедиться, что спинтензорный инвариант $B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}}$ из $B^{s\dot{r}}$, образованных согласно (2.5.14), тождественно равен нулю:

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = \begin{vmatrix} k^0+k^3 & k^1-ik^2 \\ k^1+ik^2 & k^0-k^3 \end{vmatrix} = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0. \tag{2.5.17}$$

2.6 Четырехмерные векторы

Проанализируем вещественные величины типа k^μ, введенные в (2.5.14) для пары сопряженных элементов через смешанные спинтензоры второго ранга. Из (2.5.14) легко выразить обратно k^μ через параметры сопряженных элементов:

$$\begin{aligned} k^0(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2\right); \\ k^1(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1\right); \\ k^2(i\alpha) &= \tfrac{i}{2}\left(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}\right) = \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1\right); \\ k^3(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} - B_{2\dot{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2\right). \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

[7] Можно также сказать, что матрицы Паули являются образующими алгебры Клиффорда $C(3,0)$ (см. Приложение А.2).

Эти четыре компоненты $k^\mu(i\alpha)$ не являются независимыми. Они связаны условием (2.5.17), соответствующим свойствам изотропных векторов в 4-мерном пространстве Минковского. Таким образом, сопряженным парам элементов i, α можно сопоставить изотропный вектор с компонентами (2.6.1) в некотором 4-мерном многообразии с сигнатурой $(+---)$.

Перейдем к случаю *двух сопряженных пар*. Очевидно, для каждой четверки разноименных элементов i, α, k, β также можно определить смешанный спинор второго ранга, причем это можно сделать несколькими способами. Выделим два из них, соответствующих симметричной и антисимметричной комбинациям из двух пар сопряженных элементов.

А. *Симметричная комбинация* означает, что спинтензор $B^{s\dot{r}}$ выбирается в виде

$$B^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{2.6.2}$$

Тогда матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ для сопряженных элементов можно представить в следующих видах:

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0+p^3 & p^1-ip^2 \\ p^1+ip^2 & p^0-p^3 \end{pmatrix} = p^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} p^l\sigma_l, \tag{2.6.3}$$

где p^μ – четыре вещественных числа, σ_l — матрицы Паули.

Построим спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, \tag{2.6.4}$$

где $g_{\mu\nu}$ — компоненты метрического тензора в пространстве Минковского. Легко показать, что этот инвариант в общем случае отличен от нуля и представляется в следующих видах:

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 2k_\mu(i\alpha)k^\mu(k\beta) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix}. \tag{2.6.5}$$

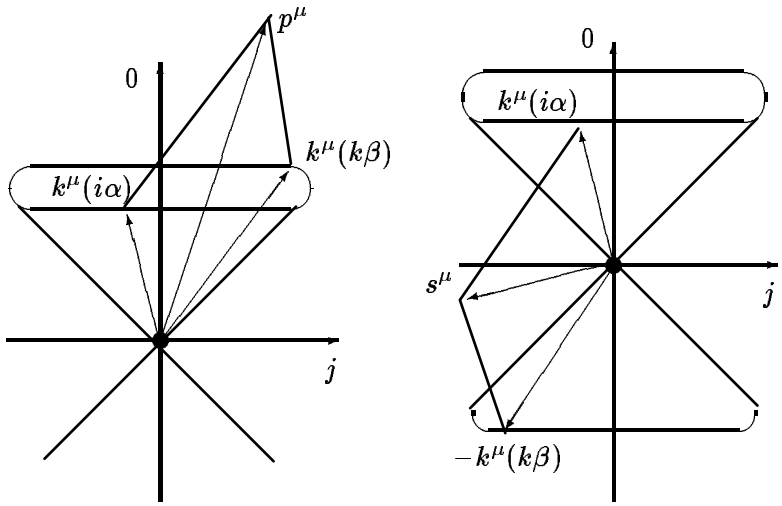
Это чрезвычайно важный результат, раскрывающий причины особой значимости в теории спиноров именно смешанных спинтензоров второго ранга: построенный из них *инвариант совпадает с фундаментальным* 2×2*-отношением* в теории БСКО ранга (3,3).

Аналогично (2.6.1) выразим компоненты p^μ через параметры

четырех элементов:

$$
\begin{aligned}
p^0 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right);\\
p^1 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1\right);\\
p^2 &= \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right);\\
p^3 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right).
\end{aligned}
\tag{2.6.6}
$$

Формула (2.6.5) позволяет сопоставлять двум парам сопряженных элементов i, α и k, β неизотропный вектор p^μ, являющийся геометрической суммой двух изотропных векторов в 4-мерном пространстве Минковского (см. рис.2.4 а).



а) Временно-подобный вектор p^μ

б) Пространственно-подобный вектор s^μ

Рис. 2.4: Неизотропные векторы, образованные парой изотропных векторов $k^\mu(i\alpha)$ и $k^\mu(k\beta)$

Б. *Антисимметричная комбинация* означает, что спинтензор $\tilde{B}^{s\dot{r}}$ выбирается в виде

$$\tilde{B}^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} - k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{2.6.7}$$

В этом случае матрицу $\tilde{B}^{s\dot{r}}$ для двух пар сопряженных элементов можно записать аналогично (2.6.3) через четыре вещественных числа s^μ:

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}^{1\dot{1}} & \tilde{B}^{1\dot{2}} \\ \tilde{B}^{2\dot{1}} & \tilde{B}^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^0 + s^3 & s^1 - is^2 \\ s^1 + is^2 & s^0 - s^3 \end{pmatrix} = s^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} s^l \sigma_l. \quad (2.6.8)$$

Спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{2}\tilde{B}_{s\dot{r}}\tilde{B}^{s\dot{r}} = g_{\mu\nu}s^\mu s^\nu \quad (2.6.9)$$

опять отличен от нуля и представляется через фундаментальное 2x2-отношение, однако с обратным знаком:

$$g_{\mu\nu}s^\mu s^\nu = -2k_\mu(i\alpha)k^\mu(k\beta) = -\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} \equiv s^2_{(ik)}. \quad (2.6.10)$$

Компоненты s^μ (см. рис. 2.4 б) записываются через параметры четырех элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} s^0 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right); \\ s^1 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right); \\ s^2 &= \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 + k^2\beta^1\right); \\ s^3 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right). \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Согласно (2.6.10) и (2.6.5) одной и той же четверке сопряженных элементов i, α и k, β можно сопоставить два неизотропных вектора p^μ и s^μ. Легко видеть, что эти два вектора ортогональны, т.е.

$$p^\mu s_\mu = 0. \quad (2.6.12)$$

2.7 Преобразования Лоренца

1. Зная закон линейных преобразований параметров элементов (2.4.2), легко показать, что построенные из них квадратичные комбинации (2.6.1), (2.6.6) и (2.6.11) тоже будут преобразовываться линейным образом

$$b'^\mu = L^\mu_{\cdot\alpha} b^\alpha, \quad (2.7.1)$$

где b^μ является собирательным обозначением величин k^μ, p^μ и s^μ, а 16 коэффициентов $L^\mu_{\cdot\alpha}$ являются вещественными, если коэффициенты C^s_r и $\tilde{C}^s_r$ в (2.3.2) комплексно сопряжены. Выпишем выражения для компонент $L^\mu_{\cdot\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
L^0_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*2}_2\right);\\
L^0_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*2}_1\right);\\
L^0_{\cdot 2} &= -\tfrac{i}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*2}_1\right);\\
L^0_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*2}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^1_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2\right);\\
L^1_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^1_2 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1\right);\\
L^1_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2\right);\\
L^1_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^2_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2\right);\\
L^2_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*1}_1\right);\\
L^2_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*2}_1\right);\\
L^2_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^3_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*2}_2\right);\\
L^3_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^2_2 C^{*2}_1\right);\\
L^3_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}\left(C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_1\right);\\
L^3_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*2}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_2 C^{*2}_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

Очевидно, что все $L^\mu_{\cdot\alpha}$, как и C^s_r для группы $SL(2,C)$, определяются 6 независимыми вещественными параметрами. Можно убедиться, что 16 коэффициентов $L^\mu_{\cdot\alpha}$ удовлетворяют 10 условиям:

$$g_{\mu\nu} L^\mu_{\cdot\alpha} L^\nu_{\cdot\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{2.7.3}$$

Преобразования с коэффициентами $L^\mu_{\cdot\alpha}$ образуют 6-параметрическую *ортогональную группу* $O(1,3)$, которую принято называть *векторным представлением группы* $SL(2,C)$. Теперь имеются все основания называть величины k^μ, p^μ, s^μ векторами.

2. Отдельно рассмотрим преобразования векторов, индуцированные подгруппой преобразований $SU(2)$. В этом случае коэффициенты C^s_r удовлетворяют условиям (2.4.5) и (2.4.7). Подставляя их в (2.7.2), находим, что в этом случае

$$L^0_{\cdot 0} = 1; \quad L^0_{\cdot i} = 0; \quad L^i_{\cdot 0} = 0. \tag{2.7.4}$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения: 1, 2, 3. Это означает, что временно-подобные компоненты векторов b^0 при таких преобразованиях не изменяются, а преобразуются друг через друга лишь пространственно-подобные компоненты b^i. Этот результат можно усмотреть также из того факта, что компоненты b^0 выражаются через парные отношения элементов, например, $p^0 = \frac{1}{2}(u_{i\alpha} + u_{k\beta})$, которые при преобразованиях $SU(2)$ остаются инвариантными. Такие 3-параметрические преобразования образуют *группу* $O(3)$.

3. Рассмотрим характерные случаи пространственно-подобных преобразований. Так, поворот в плоскости (2,3), т.е. поворот вокруг *первой оси* на угол θ_1 соответствует следующим значениям параметров a_μ из (2.4.6):

$$a_0 = \cos\frac{\theta_1}{2}; \quad a_1 = \sin\frac{\theta_1}{2}; \quad a_2 = a_3 = 0. \tag{2.7.5}$$

Вращениям вокруг *второй оси* (т.е. в плоскости (3,1)) на угол θ_2 соответствуют

$$a_0 = \cos\frac{\theta_2}{2}; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \sin\frac{\theta_2}{2}; \quad a_3 = 0. \tag{2.7.6}$$

Вращениям вокруг *третьей оси* (т.е. в плоскости (1,2)) на угол θ_3 соответствуют

$$a_0 = \cos\frac{\theta_3}{2}; \quad a_1 = a_2 = 0; \quad a_3 = \sin\frac{\theta_3}{2}. \tag{2.7.7}$$

Подставляя, например, (2.7.7) в выражения для коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$, а затем в (2.7.1), находим

$$b'^1 = b^1\cos\theta_3 + b^2\sin\theta_3; \quad b'^2 = -b^1\sin\theta_3 + b^2\cos\theta_3; \quad b'^3 = b^3. \tag{2.7.8}$$

4. Обсудим преобразования векторов, соответствующие преобразованиям спиноров через эрмитовы матрицы (2.4.9), дополняющие подгруппу $SU(2)$ до группы $SL(2,C)$. Легко видеть, что при таких преобразованиях временно-подобные и пространственноподобные компоненты векторов перемешиваются. Эти векторные преобразования дополняют подгруппу $O(3)$ до группы $O(1,3)$. Известно, что именно такими преобразованиями в специальной теории относительности описываются *переходы между различными системами отсчета*. Эти преобразования определяются тремя независимыми параметрами b_μ из (2.4.9), которые

соответствуют трем компонентам скорости движения одной системы отсчета относительно другой в 3-мерном пространстве.

5. Приведем значения параметров b_μ для трех случаев скоростей v_i второй системы отсчета вдоль соответствующих осей. Так, для движения вдоль *первой оси* (для псевдоповорота в плоскости (0,1)) параметры следует выбрать в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_1}{2}; \quad b_1 = \sinh\frac{\theta_1}{2}; \quad b_2 = b_3 = 0, \tag{2.7.9}$$

где θ_1 связано со скоростью v_1 следующим образом

$$\frac{v_1}{c} = \tanh\theta_1 = \frac{2b_0b_1}{b_0^2 + b_1^2}. \tag{2.7.10}$$

Здесь введена скорость света с для получения безразмерных величин.

Для описания перехода к другой системе отсчета, движущуйся вдоль *второй оси* (для псевдоповорота в плоскости (0,2)) со скоростью v^2, параметры следует выбрать в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_2}{2}; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = \sinh\frac{\theta_2}{2}; \quad b_3 = 0, \tag{2.7.11}$$

где

$$\frac{v_2}{c} = \tanh\theta_2 = \frac{2b_0b_2}{b_0^2 + b_2^2}. \tag{2.7.12}$$

Аналогично, для описания *псевдоповорота в плоскости* (0,3) на угол θ_3 следует взять параметры в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_3}{2}; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = \sinh\frac{\theta_3}{2}, \tag{2.7.13}$$

где

$$\frac{v_3}{c} = \tanh\theta_3 = \frac{2b_0b_3}{b_0^2 + b_3^2}. \tag{2.7.14}$$

6. Более подробно рассмотрим, например, случай движения вдоль первой оси и продемонстрируем появление общеизвестных преобразований Лоренца. Подставляя (2.7.9) в (2.4.8), имеем для данного случая

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta_1}{2} & \sinh\frac{\theta_1}{2} \\ \sinh\frac{\theta_1}{2} & \cosh\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.7.15}$$

Легко убедиться, что из всех коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ остаются отличными от нуля лишь шесть:

$$\begin{aligned} L^0_{\cdot 0} &= L^1_{\cdot 1} = b_0^2 + b_1^2 = \cosh\theta_1; \\ L^0_{\cdot 1} &= L^1_{\cdot 0} = 2b_0 b_1 = \sinh\theta_1; \\ L^2_{\cdot 2} &= L^3_{\cdot 3} = b_0^2 - b_1^2 = 1. \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Учитывая известные формулы гиперболической тригонометрии и (2.7.10):

$$\sinh\theta = \frac{\tanh\theta}{\sqrt{1-\tanh\theta^2}} = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}};$$

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

приходим к известным преобразованиям Лоренца:

$$b'^0 = \frac{b^0 + (v/c)b^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad b'^1 = \frac{(v/c)b^0 + b^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad b'^2 = b^2; \quad b'^3 = b^3. \tag{2.7.17}$$

2.8 Прообраз пространства Минковского

1. Возьмем три пары сопряженных элементов (i,α), (k,β), (j,γ) и рассмотрим скалярные произведения векторов, образованных из двух разных пар сопряженных элементов (см.рис. 2.5). Векторы будем помечать латинскими индексами соответствующих им элементов множества $\mathcal{M}$. Построим скалярное произведение двух векторов $s^{\mu}(ik)$ и $s^{\mu}(ij)$. Оно представляется в виде

$$\begin{aligned} s_{\mu}(ik)s^{\mu}(ij) &= \frac{1}{2}\left(-\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(s^2_{(ik)} + s^2_{(ij)} - s^2_{(kj)}\right). \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Это выражение следует трактовать как общеизвестную *теорему косинусов* для треугольника, изображенного на рисунке 2.5:

$$s^2_{(kj)} = s^2_{(ik)} + s^2_{(ij)} - 2s_{\mu}(ik)s^{\mu}(ij). \tag{2.8.2}$$

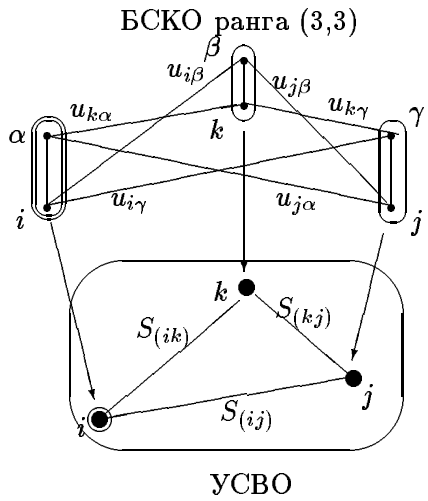


Рис. 2.5: Треугольник отношений в пространстве Минковского

Для векторов p^μ скалярное произведение записывается аналогичным образом

$$p_\mu(ik)p^\mu(ij) = \frac{1}{2}\left(p^2_{(ik)} + p^2_{(ij)} + p^2_{(kj)}\right) \tag{2.8.3}$$

и представляет собой видоизменение теоремы косинусов:

$$p^2_{(kj)} = 2p_\mu(ik)p^\mu(ij) - p^2_{(ik)} - p^2_{(ij)}. \tag{2.8.4}$$

2. Возьмем шесть пар сопряженных элементов: (i,α), (k,β), (j,γ), (m,μ), (n,ν), (l,λ), выделим из них пару (i,α) и построим пять векторов: $s^\mu(ik)$, $s^\mu(ij)$, $s^\mu(im)$, $s^\mu(in)$, $s^\mu(il)$ (см. рис.2.6). Поскольку эти векторы 4-мерные, то построенный на них определитель Грама обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} s^2_{(ik)} & s_\mu(ik)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(ik)s^\mu(il) \\ s_\mu(ij)s^\mu(ik) & s^2_{(ij)} & \cdots & s_\mu(ij)s^\mu(il) \\ s_\mu(im)s^\mu(ik) & s_\mu(im)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(im)s^\mu(il) \\ s_\mu(in)s^\mu(ik) & s_\mu(in)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(im)s^\mu(il) \\ s_\mu(il)s^\mu(ik) & s_\mu(il)s^\mu(ij) & \cdots & s^2_{(il)} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8.5}$$

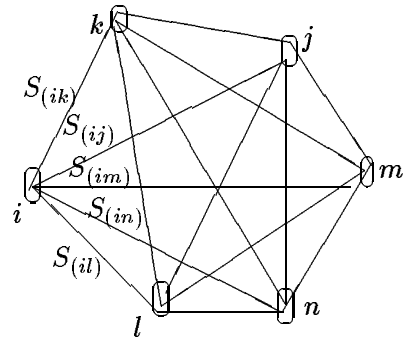


Рис. 2.6: Шесть точек-событий, выбранных для написания закона пространства Минковского

Перепишем это выражение, учтя во всех недиагональных слагаемых теорему косинусов (2.8.1)

3. Произведем тождественное преобразование получившегося определителя, состоящее в увеличении его ранга на единицу. Для этого добавим в определитель новую (первую) строку, в которой первый элемент является единицей, а все остальные элементы равны нулю. Тогда элементы добавленного (первого) столбца, кроме первой единицы, могут быть произвольными. В качестве них выберем соответствующие диагональные элементы определителя (2.8.5). Такое преобразование определителя назовем его *окаймлением.* Вычитая из второго, третьего и т.д. столбцов первый столбец, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s^2_{(ik)} & s^2_{(ik)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(kj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(kl)} \\ s^2_{(ij)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(jk)} & s^2_{(ij)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(jl)} \\ s^2_{(im)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(mk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(mj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(ml)} \\ s^2_{(in)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(nk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(nj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(nl)} \\ s^2_{(il)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(lk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(lj)} & \cdots & s^2_{(il)} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8.6}$$

4. Произведем второе окаймление, теперь образовав новый (первый) столбец из единицы на первом месте и нулей на всех остальных местах. Построим новую (первую) строку из первой единицы и из соответствующих диагональных элементов определителя в (2.8.6). Далее вычтем из третьей, четвертой и т.д. строк первую строку и, переставляя затем первую и вторую строки,

получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2_{(ik)} & s^2_{(ij)} & s^2_{(im)} & s^2_{(in)} & s^2_{(il)} \\ 1 & s^2_{(ik)} & 0 & s^2_{(kj)} & s^2_{(km)} & s^2_{(kn)} & s^2_{(kl)} \\ 1 & s^2_{(ij)} & s^2_{(jk)} & 0 & s^2_{(jm)} & s^2_{(jn)} & s^2_{(jl)} \\ 1 & s^2_{(im)} & s^2_{(mk)} & s^2_{(mj)} & 0 & s^2_{(mn)} & s^2_{(ml)} \\ 1 & s^2_{(in)} & s^2_{(nk)} & s^2_{(nj)} & s^2_{(nm)} & 0 & s^2_{(nl)} \\ 1 & s^2_{(il)} & s^2_{(lk)} & s^2_{(lj)} & s^2_{(lm)} & s^2_{(ln)} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.8.7)$$

Это определитель Кэли-Менгера, построенный на шести элементах (на шести парах сопряженных элементов). Как уже отмечалось в главе 1 (см. раздел 1.5), это соотношение является законом УСВО ранга 6. Парные отношения $s^2_{(ik)}$ представляются в виде

$$s^2_{(ik)} = (x^0_k - x^0_i)^2 - (x^1_k - x^1_i)^2 - (x^2_k - x^2_i)^2 - (x^3_k - x^3_i)^2. \quad (2.8.8)$$

Особо подчеркнем, что сигнатура этого парного отношения $(+\ -\ -\ -)$ соответствует сигнатуре скалярных произведений в (2.6.10) и (2.8.1). Таким образом, мы пришли к отношениям, соответствующим 4-мерному *пространству Минковского.*

5. Заметим, что закон (2.8.7) можно получить, исходя из пяти векторов: $p^\mu(ik)$, $p^\mu(ij)$, $p^\mu(im)$, $p^\mu(in)$, $p^\mu(il)$. Это также 4-мерные векторы. Для них определитель Грама также обращается в нуль. Далее недиагональные элементы следует переписать с учетом видоизмененной теоремы косинусов (2.8.3). Две процедуры окаймления, описанные выше, по-прежнему приводят к определителю типа (2.8.7).

6. Особо следует выделить случай, когда выбираются такая совокупность из пяти сопряженных элементов: (k, β), (j, γ), (m^μ), $\cdots$, что они совместно с парой $(i\alpha)$ образуют одну и ту же систему отношений. Это означает, что для всех образованных из них векторов s^μ временно-подобные компоненты равны нулю:

$$s^0(ik) = s^0(ij) = s^0(im) = \cdots = 0. \qquad (2.8.9)$$

В этом случае можно говорить о 3-мерных векторах:

$$s^\mu(ik) \to -r^l(ik); \quad s^\mu(ij) \to -r^l(ij); \quad \cdots, \qquad (2.8.10)$$

где $l = 1, 2, 3$. Тогда следует ограничиться *пятью* парами сопряженных элементов, т.к. для них определитель Грама типа

(2.8.5), построенный на четырех векторах, обращается в нуль. Теорема косинусов тогда записывается в привычной 3-мерной форме

$$2r_l(ik)r^l(ij) = r^2_{(ik)} + r^2_{(ij)} - r^2_{(kj)}. \qquad (2.8.11)$$

Дальнейшие процедуры, описанные выше, приводят к равному нулю определителю Кэли-Менгера, построенному на пяти элементах, т.е. к закону (1.4.9) УСВО ранга 5, соответствующему *3-мерной евклидовой геометрии* с парными отношениями вида (1.4.7).

Завершая эту главу, можно утверждать, что теория БСКО ранга (3,3) позволяет существенно продвинуться в решении основных задач бинарной геометрофизики, сформулированных во введении. Так, можно начинать построение бинарной геометрофизики с принципов, вообще говоря, не зависящих от классической физики. Изложенное в этом разделе можно назвать *прообразом классического пространства-времени.* В рамках данного подхода достигается прогресс в обосновании свойств классического пространства-времени. Можно утверждать, что размерность и сигнатура классического пространства-времени обусловлены БСКО ранга (3,3). Более того, в данном подходе автоматически возникают спинорные величины, причем они оказываются более элементарными, нежели типичные для классической физики векторные величины. Отметим также, что в рамках теории БСКО ранга (3,3) автоматически возникает квадратичное мероопределение. Однако, в то же время содержание этой главы пока не пролило свет на связь развиваемой теории с физикой микромира.

Глава 3

Импульсное пространство свободных лептонов

Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) в иной ипостаси, нежели рассмотренной в главе 2, играют ключевую роль в теории микромира. Ими описывается важнейший класс элементарных частиц — лептоны, точнее, идеализированные, т.е. не участвующие в электрослабых взаимодействиях нейтрино и массивные лептоны (электронные нейтрино, электроны и позитроны). Многие понятия и закономерности теории спинорных частиц, обычно вводимые после написания дифференциальных полевых уравнений (Дирака, Клейна-Фока), можно ввести чисто алгебраически, опираясь на теорию бинарных отношений ранга (3,3).

3.1 Геометрия Лобачевского

1. Имеется другой способ перехода от БСКО ранга (3,3) к УСВО. Он приводит к иной унарной геометрии с чрезвычайно важной физической интерпретацией — как импульсного пространства некоторого избранного класса частиц [14]. Обсудим этот переход. Для этого вернемся к неизотропным векторам, определенным на двух парах сопряженных элементов. На этот раз возьмем симметрично заданный вектор

$$p^{\mu}(ik) = k^{\mu}(i\alpha) + k^{\mu}(k\beta). \qquad (3.1.1)$$

Возьмем 5 наборов таких элементов, в общем случае не имеющих общих элементов (хотя это требование и не обязательно).

Они изображены на рисунке 3.1. Будем обозначать векторы ла-

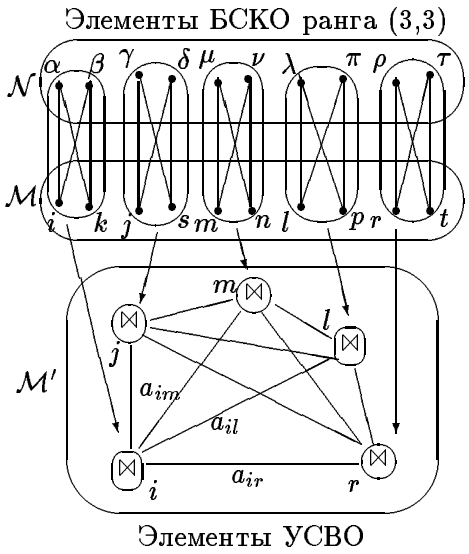


Рис. 3.1: Переход от БСКО(3,3) к импульсному пространству

тинскими индексами одного из их элементов множества $\mathcal{M}$.

2. Система из пяти 4-мерных векторов p^μ, сопоставленных пяти паборам элементов, является линейно зависимой. Следовательно, как и в разделе 2.8, из них можно образовать тождественно равный нулю определитель Грама

$$\begin{vmatrix} p^2(i) & p_\mu(i)p^\mu(j) & p_\mu(i)p^\mu(m) & p_\mu(i)p^\mu(l) & p_\mu(i)p^\mu(r) \\ p_\mu(j)p^\mu(i) & p^2(j) & p_\mu(j)p^\mu(m) & p_\mu(j)p^\mu(l) & p_\mu(j)p^\mu(r) \\ p_\mu(m)p^\mu(i) & p_\mu(m)p^\mu(j) & p^2(m) & p_\mu(m)p^\mu(l) & p_\mu(m)p^\mu(r) \\ p_\mu(l)p^\mu(i) & p_\mu(l)p^\mu(j) & p_\mu(l)p^\mu(m) & p^2(l) & p_\mu(l)p^\mu(r) \\ p_\mu(r)p^\mu(i) & p_\mu(r)p^\mu(j) & p_\mu(r)p^\mu(m) & p_\mu(r)p^\mu(l) & p^2(l) \end{vmatrix} = \\ = 0. \qquad (3.1.2)$$

Элементы этого определителя можно понимать как отношения между обобщенными элементами (из четверок исходных элементов) некоторого одного множества $\mathcal{M}'$ (см. рис. 3.1). При этом заданы как внутренние отношения элементов:

$$\tilde{a}_{ii} \equiv p^2(i) = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{smallmatrix}\right]; \quad \tilde{a}_{jj} \equiv p^2(j) = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\delta\\ is\end{smallmatrix}\right]; \quad \cdots, \qquad (3.1.3)$$

так и перекрестные парные отношения:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} = p_\mu(i)p^\mu(j) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{smallmatrix}\right] \otimes \left[\begin{smallmatrix}\gamma\delta\\ js\end{smallmatrix}\right] \equiv \\ \equiv \tfrac{1}{2}\left(\left[\begin{smallmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}\alpha\delta\\ is\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}\beta\delta\\ ks\end{smallmatrix}\right]\right).\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3. Положим, что имеется некоторое множество четверок элементов, для которых внутренние отношения одинаковы, т.е.

$$p^2(i) = p^2(j) = \cdots = C^2 \to \tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_{jj} = \cdots = C^2, \tag{3.1.5}$$

где C – некоторая константа. Заменяя в (3.1.2) скалярные произведения на перекрестные парные отношения (3.1.4) и деля все строки на C^2, получаем

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{ij} & a_{im} & a_{il} & a_{ir} \\ a_{ji} & 1 & a_{jm} & a_{jl} & a_{jr} \\ a_{mi} & a_{mj} & 1 & a_{ml} & a_{mr} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lm} & 1 & a_{lr} \\ a_{ri} & a_{rj} & a_{rm} & a_{rl} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.1.6}$$

где $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/C^2$. Это выражение представляет собой закон УСВО ранга 5. Согласно изложенному в главе 1 этот закон соответствует 3-мерной геометрии. Учитывая сигнатуру $(+---)$ в определении скалярных произведений в (3.1.4), приходим к выводу, что это *геометрия Лобачевского* с парным отношением вида (1.4.5). С учетом нормировки p^2 на константу C имеем

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} = \sqrt{\left(C^2 + p_1^2(i) + p_2^2(i) + p_3^2(i)\right)\left(C^2 + p_1^2(j) + p_2^2(j) + p_3^2(j)\right)} - \\ - p_1(i)p_1(j) - p_2(i)p_2(j) - p_3(i)p_3(j).\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

4. Поясним полученный результат с помощью рисунка 3.2. На этом рисунке изображены изотропные конусы с общей вершиной O. Во внутренность изотропных конусов вписан двуполостный гиперболоид, отстоящий от вершины O на расстояние C. Использованные выше пять векторов p_μ снесены в одну точку O. Поскольку все они имеют одинаковую "длину" в псевдоевклидовом пространстве, то все они заканчиваются на поверхности двуполостного гиперболоида. Именно поэтому можно говорить, что отношения между введенными векторами описываются гиперболической геометрией.

Рис. 3.2: Импульсное пространство частиц одного сорта (лептонов) описывается гиперболической геометрией (геометрией Лобачевского)

5. Заметим, что изложенные здесь рассуждения можно было бы проводить с использованием антисимметрично заданного 4-мерного вектора

$$s^\mu(ik) = k^\mu(i\alpha) - k^\mu(k\beta). \tag{3.1.8}$$

В этом случае по-прежнему можно записать определитель Грама типа (3.1.2) и ввести внутренние и перекрестные парные отношения формулами типа (3.1.3) — (3.1.4). Однако в этом случае внутренние отношения будут отрицательны

$$\tilde{a}_{ii} = -\left[{\alpha\beta \atop ik}\right] < 0; \quad \tilde{a}_{jj} = -\left[{\gamma\delta \atop js}\right] < 0; \quad \cdots, \tag{3.1.9}$$

а перекрестные отношения имеют вид

$$\tilde{a}_{ij} = s_\mu(i)s^\mu(j) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\delta\\ is\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\delta\\ ks\end{bmatrix}\right). \tag{3.1.10}$$

Очевидно, что для всех этих векторов условие (3.1.5) следует писать в виде

$$\tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_{jj} = \cdots = -C^2.$$

Изменяя знаки при перекрестных отношениях, опять приходим к закону (3.1.6), однако парное отношение будет записываться в виде

$$\tilde{a}_{ij} = s_1(i)s_1(j) + s_2(i)s_2(j) + s_3(i)s_3(j) -$$
$$-\sqrt{\left(C^2 - s_1^2(i) - s_2^2(i) - s_3^2(i)\right)\left(C^2 - s_1^2(j) - s_2^2(j) - s_3^2(j)\right)}. \tag{3.1.11}$$

Этот случай следует интерпретировать как 3-мерную геометрию на однополостном гиперболоиде, асимптотически приближающемся к изотропным конусам, изображенным на рис. 3.2.

6. В бинарной геометрофизике константу C будем интерпретировать как массу покоя выделенного в природе типа элементарных частиц — *массивных лептонов — электронов и позитронов*. Пусть эта константа будет размерной. Введем для нее привычное обозначение $C = mc$, где c скорость света, тогда

$$p^2(i) = p_0(i)^2 - p_1(i)^2 - p_2(i)^2 - p_3(i)^2 = m^2c^2. \tag{3.1.12}$$

Подчеркнем, что теперь рассматривается другая УСВО, полученная из одной и той же БСКО ранга (3,3). То, что в разделе 1.8 было перекрестным отношением двух элементов УСВО ранга 6, теперь стало внутренним отношением для одного нового элемента УСВО ранга 5. Нормировка этого внутреннего отношения (3.1.12) соответствует введению элементарной длины в прообраз пространственно-временных отношений раздела 1.8 [1].

[1] Если считать, что s^μ из раздела 1.8 соответствует компонентам пространственно-временного смещения, то можно ввести величину $\tilde{s}^\mu$ размерности длины так, что

$$\tilde{s}^\mu(ik) = \frac{s^\mu(ik)}{mc} l_e,$$

где l_e некоторая константа размерности длины. Из двух констант l_e и mc можно образовать константу размерности действия

$$\hbar = l_e mc \to l_e = \frac{\hbar}{mc}.$$

Естественно положить $\hbar$ *постоянной Планка*, тогда l_e имеет смысл комптоновской длины волны электрона. Заметим, что для теории систем отношений (теории физических структур [30]) характерно возникновение фундаментальной константы всякий раз, когда накладываются две системы отношений. В данном случае таковой является константа $\hbar$.

Другой тип известных лептонов (первого поколения) — нейтрино, как известно, имеет нулевую массу покоя. Его описывают изотропным вектором. Следовательно, *нейтрино* будем описывать одним элементом множества $\mathcal{M}$ и одним элементом множества $\mathcal{N}$.

3.2 Биспиноры и 4-мерные тензоры

1. Итак, массивные частицы должны описываться двумя спинорами (и двумя сопряженными спинорами), т.е. 4-компонентными величинами. Как записать четверку компонент,— это зависит от ряда обстоятельств. Приведем устоявшееся выражение, прокомментировав его через понятия бинарной геометрофизики [14].

Восемь компонент, соответствующие четырем элементам i, α, k, β, разбиваются на две четверки. Одна из них записывается в виде 4-компонентного столбца, а вторая в виде строки. Потребуем, чтобы, во-первых, элементы столбца Ψ и строки $\Psi^\dagger$ соответствовали друг другу по закону (2.3.1) нахождения двух пар элементов в парах, т.е. были комплексно сопряжены друг другу. Это еще содержит произвол, т.к. столбец Ψ может быть составлен из параметров элементов одного или разных сортов. Второе условие состоит в том, что столбец должен равноправно содержать элементы из начального и конечного состояний. Образуем столбец из параметров элементов i и β, не состоящих друг с другом в паре. Третье условие конкретизирует порядок расположения элементов в столбце. Оно связано с трансформационными свойствами параметров и означает, что, если i^s является контравариантным спинором, то для элемента β должен браться ковариантный спинор. Следовательно, каждому массивному лептону будут сопоставляться следующие 4-компонентные величины:

$$\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2 \\ -\beta^1 \end{pmatrix}; \tag{3.2.1}$$

$$\Psi^\dagger = (\alpha^1, \alpha^2, k_1, k_2) = (\alpha^1, \alpha^2, k^2, -k^1).$$

Согласно приведенным в разделе 2.5 соотношениям между ко- и контравариантными компонентами спинора столбец Ψ преобразуется при преобразованиях из группы $SL(2, C)$ следующим

образом

$$\Psi' = \begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & 0 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2^{*2} & -C_1^{*2} \\ 0 & 0 & -C_2^{*1} & C_1^{*1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \equiv S\Psi. \tag{3.2.2}$$

Поскольку матрица преобразований S приводима к блочному виду, а Ψ составлено из двух спиноров, говорят, что Ψ является *биспинором.*

2. Как уже отмечалось, при $SL(2,C)$ преобразованиях остаются инвариантными две билинейные комбинации: $i^1k^2 - i^2k^1$ и $\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$. Для записанных в (3.2.1) величин можно подобрать некую матрицу, назовем ее γ_0, такую, чтобы билинейная комбинация $\Psi^\dagger\gamma_0\Psi$ равнялась сумме инвариантов, т.е.

$$\Psi^\dagger\gamma_0\Psi = -(i^1k^2 - i^2k^1) - (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1) \equiv \overline{\Psi}\Psi. \tag{3.2.3}$$

Легко видеть, что γ_0 должно иметь вид

$$\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Здесь знак минус выбран из соображений удобства. В (3.2.3) введено обозначение

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma_0 = -(k_1, k_2, \alpha^1, \alpha^2). \tag{3.2.5}$$

Из (3.2.3) следует, что строка $\overline{\Psi}$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}S^{-1}, \tag{3.2.6}$$

где S^{-1} – матрица, обратная S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C_2^2 & -C_2^1 & 0 & 0 \\ -C_1^2 & C_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1^{*1} & C_1^{*2} \\ 0 & 0 & C_2^{*1} & C_2^{*2} \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

3. Легко показать, что компоненты p_μ в (2.6.6) записываются посредством матрицы γ_0 и трех матриц γ_i:

$$2p_\mu = \overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \tag{3.2.8}$$

где γ_i — три пространственно-подобные матрицы Дирака в стандартном представлении

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (3.2.9)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ^i – матрицы Паули, записанные в (2.5.15). Матрицы Дирака удовлетворяют известным соотношениям:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I_4, \qquad (3.2.10)$$

т.е. γ_0 временно-подобна, а матрицы γ_i — пространственно-подобны [2].

Зная как преобразуются Ψ и $\overline{\Psi}$, можно показать, что компоненты p_μ преобразуются по векторному закону

$$2p'_\mu = \left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)' = \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\mu S\Psi = 2L^\alpha_{\mu\cdot}p_\alpha, \qquad (3.2.11)$$

где $L^\alpha_{\mu\cdot}$ частично записаны в (2.7.2).

4. Обычным образом введем пятую матрицу

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \qquad (3.2.12)$$

Легко видеть, что γ_5 пространственно-подобна (т.е. $\gamma_5^2 = -1$), а пятая компонента вектора p_5 вещественна и имеет вид

$$2p_5 = \overline{\Psi}\gamma_5\Psi = i\left[\left(i^1k^2 - i^2k^1\right) - \left(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1\right)\right], \qquad (3.2.13)$$

[2] Матрицы Дирака являются образующими алгебры Клиффорда $C(1,3)$ над полем вещественных чисел. Базис этой алгебры составляют $2^4 = 16$ элементов (см. Приложение А.2)

т.е. определяется разностью инвариантов. Из (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.13) следует тождество

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 - p_6^2 = 0, \tag{3.2.14}$$

где $2p_6 = \overline{\Psi}\Psi$. Это напоминает соотношение из 6-оптики [13, с.182], аналогичной 5-оптике Румера [52].

С помощью матриц γ_5 можно ввести общепринятые понятия левых (e_L) и правых (e_R) компонент массивного лептона (электрона) [45]:

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_R \equiv \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.15}$$

Аналогично, из 4-компонентной строки получаются сопряженные компоненты:

$$\begin{aligned} \overline{e}_L &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 - i\gamma_5) = (0, 0, \alpha^1, \alpha^2); \\ \overline{e}_R &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 + i\gamma_5) = -(k_1, k_2, 0, 0). \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Таким образом, элемент i (и сопряженный ему элемент α) можно называть левой компонентой лептона, а элемент k (и сопряженный ему β) – правой компонентой.

Используя эти выражения, компоненты вектора (3.2.8) можно записать в виде

$$\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \overline{e}_L\gamma_\mu e_L + \overline{e}_R\gamma_\mu e_R. \tag{3.2.17}$$

5. Для четырех компонент комбинаций $\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi$ имеем мнимые выражения, аналогичные (2.6.11), но с другими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right); \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi &= i\left(i^1\alpha 2 + i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right); \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi &= -i^1\alpha 2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1; \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right). \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Оставшиеся 6 возможных комбинаций $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ представимы в виде

$$\begin{aligned}
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_1\Psi = i^1k^1 - i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_2\Psi = i\left(i^1k^1 + i^2k^2 + \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\right);\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_3\Psi = -i^1k^2 - i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1;\\
&\overline{\Psi}\gamma_2\gamma_3\Psi = i\left(-i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\right);\\
&\overline{\Psi}\gamma_3\gamma_1\Psi = i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 - \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_1\gamma_2\Psi = i\left(i^1k^2 + i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1\right),
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

т.е. в отличие от 10 предшествующих выражений записывается через парные комбинации из параметров элементов одного сорта.

Итого, в формулах (3.2.3), (3.2.8), (3.2.13), (3.2.18) и (3.2.19) приведены 16 квадратичных комбинаций, соответствующие всем возможным произведениям четверки матриц γ_μ (базису алгебры Клиффорда $C(1,3)$ над полем вещественных чисел). Эти величины образуют характерные тензоры. Тензорный характер преобразований, выписанных комбинаций можно доказать, используя (3.2.11). Действительно, например, для величин $\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi\right)' = \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\alpha\gamma_\beta S\Psi = \overline{\Psi}\left(S^{-1}\gamma_\alpha S\right)\left(S^{-1}\gamma_\beta S\right)\Psi =\\
&= \overline{\Psi}L^\mu_{\alpha\cdot}\gamma_\mu L^\nu_{\beta\cdot}\gamma_\nu\Psi = L^\mu_{\alpha\cdot}L^\nu_{\beta\cdot}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Это закон преобразований тензора второго ранга.

3.3 Массивная частица в собственной системе отношений

1. В предыдущем разделе были рассмотрены тензорные величины, которые можно сопоставить, вообще говоря, произвольным двум парам сопряженных элементов, в том числе и массивному лептону. Однако, для построения реалистической теории лептонов этого мало. Сопоставим частицам частный случай двух сопряженных пар, когда спинорные инварианты имеют *вещественные* значения, т.е.

$$Im\left(i^1k^2 - i^2k^1\right) = 0 \to i^1k^2 - i^2k^1 = \pm mc. \tag{3.3.1}$$

Это соотношение означает два условия на вещественные составляющие параметров. Если произвольные две пары сопряженных элементов характеризуются 4 комплексными параметрами: i^1, i^2, k^1, k^2 (8 вещественными числами), то условие (3.3.1) означает, что независимыми остаются только 6 вещественных величин.

Напомним, что в общем случае фундаментальное 2x2-отношение для сопряженных элементов вещественно и положительно. Условия (3.3.1) выделяют два частных случая: положительного и отрицательного значения инварианта. Сопоставим эти два случая двум сортам лептонов: электрону и позитрону (частице и античастице). Пусть *частица(электрон) характеризуется положительным значением инварианта*

$$i^1k^2 - i^2k^1 = +mc, \tag{3.3.2}$$

а *античастица (позитрон) характеризуется отрицательным значением инварианта*

$$i^1k^2 - i^2k^1 = -mc. \tag{3.3.3}$$

2. Проанализируем основные свойства лептонов в собственной системе отношений. Согласно изложенному в главе 2 выбор собственной системы отношений означает:

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = mc; \quad u_{i\beta} = u_{k\alpha} = 0. \tag{3.3.4}$$

Обозначим параметры лептона в собственной системе отношений значком "c" снизу, тогда условия (3.3.4) запишутся через параметры в виде

$$\begin{gathered} i_c^1\alpha_c^1 + i_c^2\alpha_c^2 = k_c^1\beta_c^1 + k_c^2\beta_c^2 = mc; \\ i_c^1\beta_c^1 + i_c^2\beta_c^2 = 0 \to k_c^1\alpha_c^1 + k_c^2\alpha_c^2 = 0, \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

где, напомним, $\alpha_c^s = i_c^{*s}; \beta_c^s = k_c^{*s}$. Из (3.3.5) следует, что все параметры можно выразить через два из них. Выберем в качестве ключевых параметры: i_c^1 и i_c^2. Используя условия (3.3.5), находим, что в собственной системе отношений лептонов

$$\begin{gathered} p_{(c)}^0 = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_c\gamma^0\Psi_c = i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} = mc; \\ p_{(c)}^i = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_c\gamma^i\Psi_c = 0, \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

т.е. как для частицы, так и для античастицы отлична от нуля только временно-подобная компонента импульса. Это оправдывает общепринятый в классической механике термин собственной системы (отсчета).

3. Используем свойства вещественности инвариантов (3.3.2) и (3.3.3) в собственной системе отношений. Из (3.3.5) имеем

$$k_c^1 = -\frac{i_c^{*2} k_c^2}{i_c^{*1}}.$$

Подставляя это выражение в значение инварианта, находим

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = \frac{k_c^2}{i_c^{*1}} \left(i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} \right) = \frac{k_c^2}{i_c^{*1}} mc = \pm mc, \qquad (3.3.7)$$

где использовано (3.3.6). Это означает условия связи параметров элементов:

$$k_c^2 = \pm i_c^{*1}; \quad k_c^1 = \mp i_c^{*2}.$$

С учетом знака инварианта частицы и античастицы следует положить *для электрона* (частицы)

$$i_c^1 = k_c^{*2}; \quad i_c^2 = -k_c^{*1}, \qquad (3.3.8)$$

а *для позитрона* (античастицы)

$$i_c^1 = -k_c^{*2}; \quad i_c^2 = k_c^{*1}. \qquad (3.3.9)$$

4. С помощью формул (3.3.8) и (3.3.9) запишем в собственной системе отношений выражения для 4-компонентных столбцов Ψ, определенных в (3.2.1). Для *электрона* имеем

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^1 \\ i_c^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.10)$$

Для *позитрона* получаем другое выражение

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ -i_c^1 \\ -i_c^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.11)$$

Как уже отмечалось, эти столбцы характеризуются лишь двумя комплексными числами, связанными одним условием (3.3.6).

5. Рассмотрим преобразования параметров из группы $SU(2)$, не выводящие из используемой (собственной) системы отношений. В общем случае они характеризуются (2.4.6) и (2.4.7). Подставляя их в (3.2.2), находим для Ψ'

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 & 0 & 0 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ 0 & 0 & -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.3.12}$$

т.е. при преобразованиях из группы $SU(2)$ контравариантные компоненты спинора i^s и ковариантные компоненты сопряженного спинора β_s преобразуются одинаково. Именно это обстоятельство побудило записывать Ψ через два типа спиноров разной ковариантности [3].

Заметим, что из параметров элементов i^s и β_s можно образовать две комбинации:

$$W(+)^s = i^s + \beta_s; \quad W(-)^s = i^s - \beta_s, \tag{3.3.13}$$

которые при $SU(2)$ – преобразованиях изменяются независимо друг от друга. Легко видеть, что данные определения частицы и античастицы соответствуют случаям:

$$W(+)^s_c \neq 0; \quad W(-)^s_c = 0; () \tag{3.3.14}$$

и

$$W(+)^s_c = 0; \quad W(-)^s_c \neq 0; () \tag{3.3.15}$$

в собственной системе отношений.

В ряде работ по квантовой электродинамике (см., например, [5]) вводится вспомогательная 4-компонентная величина

$$\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W(+)^s \\ W(-)^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^s + \beta_s \\ i^s - \beta_s \end{pmatrix}, \tag{3.3.16}$$

[3] Введенный в разделе 3.2 биспинор соответствует частному случаю 4-компонентного спинора алгебры Клиффорда $C(4,1)$ (см. Приложение А.2), т.е. как бы 5-мерному многообразию с сигнатурой $(+\ +\ +\ +\ -)$. 2-Компонентный спинор (2.4.2), как уже отмечалось, соответствует алгебре Клиффорда $C(3,0)$, т.е. 3-мерному евклидову пространству. Столбец (3.3.12) выступает как сдвоенный 2-компонентный спинор, т.е. опять биспинор, но в ином смысле, нежели в разделе 3.2.

обладающая тем свойством, что в собственной системе отношений для частицы и античастицы соответственно принимает вид

$$\psi(\pm) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi(\mp) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i_c^1 \\ i_c^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3.17}$$

Это показывает, что в собственной системе отношений четыре компоненты можно сопоставить двум видам частиц с двумя возможными проекциями спинов.

6. Последовательно выпишем в собственной системе отношений компоненты всех определенных выше тензоров. Для вектора p_c^μ компоненты уже записаны в (3.3.6). Далее запишем инварианты:

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = \overline{\Psi}_c\gamma^5\Psi_c = 0; \tag{3.3.18}$$

$$\overline{\Psi}\Psi = \overline{\Psi}_c\Psi_c = \mp 2\left(i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2}\right) = \mp 2m_0 c. \tag{3.3.19}$$

Можно утверждать, что условие (3.3.1) в определении частицы означает равенство нулю инварианта $\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$. Инвариант (3.3.19) имеет разный знак для частицы и античастицы. Условимся верхний знак писать для частицы, а нижний знак — для античастицы.

Компоненты тензора $\overline{\Psi}_c\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi_c$ находятся в виде

$$\overline{\Psi}_c\gamma^0\gamma^i\Psi_c = 0; \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_c\gamma^1\gamma^2\Psi_c &= \pm 2i\left(i_c^1 i_c^{*1} - i_c^2 i_c^{*2}\right) \equiv -4iM_{3(c)}; \\ \overline{\Psi}_c\gamma^2\gamma^3\Psi_c &= \pm 2i\left(i_c^1 i_c^{*2} + i_c^2 i_c^{*1}\right) \equiv -4iM_{1(c)}; \\ \overline{\Psi}_c\gamma^3\gamma^1\Psi_c &= \mp 2\left(i_c^1 i_c^{*2} - i_c^2 i_c^{*1}\right) \equiv -4iM_{2(c)}, \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

где в (3.3.15) справа введены 3-мерные обозначения:

$$M_j = \frac{i}{8}\varepsilon_{jik}\overline{\Psi}\gamma^i\gamma^k\Psi. \tag{3.3.22}$$

Здесь ε_{jik} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Два числа i_c^1 и i_c^2, определяющих Ψ_c, можно связать с понятием *спина частицы*. Легко убедиться, что в случае $i_c^2 = 0$ имеем $i_c^1 i_c^{*1} = m_0 c$ и

$$M_{1(c)} = M_{2(c)} = 0; \quad M_{3(c)} = \mp\frac{1}{2}m_0 c. \tag{3.3.23}$$

При $i_c^1 = 0$ аналогично получаем

$$M_{1(c)} = M_{2(c)} = 0; \quad M_{3(c)} = \pm\frac{1}{2}m_0 c. \tag{3.3.24}$$

Это можно трактовать как выражения для значений двух возможных проекций спина частицы на направление оси ^{3}.

Для компонент псевдовектора в собственной системе отношений имеем

$$\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^0\Psi_c = 0; \tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c &= 2i\left(i_c^1 i_c^{*2} + i_c^2 i_c^{*1}\right); \\
\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^2\Psi_c &= -2\left(i_c^1 i_c^{*2} - i_c^2 i_c^{*1}\right); \\
\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^3\Psi_c &= 2i\left(i_c^1 i_c^{*1} - i_c^2 i_c^{*2}\right).
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Эти выражения одинаковы для электрона и позитрона.

3.4 Массивная частица в произвольной системе отношений

1. При преобразованиях 2-компонентных спиноров, описываемых эрмитовыми матрицами (2.4.9), компоненты биспинора Ψ' из (3.2.2) изменяются по закону

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & 0 & 0 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 - b_3 & -b_1 + ib_2 \\ 0 & 0 & -b_1 - ib_2 & b_0 + b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

т.е., еще раз подчеркнем, что теперь отношения между парами элементов изменяются, а временно-подобная и пространственно-подобные компоненты вектора p^μ перемешиваются.

2. Зная вид биспинора для частицы (3.3.10) и для античастицы (3.3.11) в собственной системе отношений и закон преобразования (3.4.1), легко записать компоненты биспиноров в любой другой системе отношений. Ограничимся псевдоповоротами вокруг первой оси при $v/c \ll 1$. Для этого случая (2.6.9) пред-

ставляется в виде

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \cosh\tfrac{\theta_1}{2} \simeq 1 + \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{v}{c}\right)^2;\\
b_1 &= \sinh\tfrac{\theta_1}{2} \simeq \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{c}\right);\\
b_2 &= b_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

Тогда для электрона имеем

$$
\Psi' = \begin{pmatrix} b_0 i_c^1 + b_1 i_c^2 \\ b_1 i_c^1 + b_0 i_c^2 \\ b_0 i_c^1 - b_1 i_c^2 \\ -b_1 i_c^1 + b_0 i_c^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} i_c^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 + i_c^2 \\ i_c^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 + i_c^2 \end{pmatrix}. \tag{3.4.3}
$$

Отсюда видно, что при переходе к другой системе отношений компоненты i^1 и i^2 начинают перемешиваться.

Введенные в (3.3.17) величины в новой системе отношений записываются следующим образом

$$
\psi'(\pm) \simeq \begin{pmatrix} i_c^1 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^1 \\ i_c^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 \end{pmatrix}; \quad \psi'(\mp) \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 \\ i_c^1 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^1 \\ i_c^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.4}
$$

т.е. отличны от нуля все четыре компоненты.

3. Запишем компоненты псевдовектора $\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\Psi$ в системе отношений, движущейся относительно собственной системы отношений со скоростью v_1:

$$
\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^0\Psi &= \tfrac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c;\\
\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^1\Psi &= \tfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c;\\
\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^2\Psi &= \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^2\Psi_c;\\
\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^3\Psi &= \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^3\Psi_c.
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

Отсюда видно, что при этих преобразованиях две из трех пространственно-подобных компонент псевдовектора не меняются, тогда как компонента с индексом “1” при $v/c \to 1$ становится как

угодно большой. Это интерпретируется как стремление спина ультрарелятивистской частицы ориентироваться вдоль или против направления ее движения.

4. В произвольной системе отношений рассмотрим задачу, в некотором смысле обратную обсужденной выше, — выразим параметры элементов массивного лептона через компоненты его импульса и минимальное число независимых парметров. Как уже отмечалось, массивный лептон характеризуется 8 вещественными парметрами, на которые наложены два условия (3.3.1). Пусть элементы из множества $\mathcal{M}$ обозначаются символами i и k. Введем вещественные параметры согласно

$$\begin{aligned} i^1 &= z_1 + iv_1; \quad & i^2 &= z_2 + iv_2; \\ k^1 &= u_1 + iw_1; \quad & k^2 &= u_2 + iw_2. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Запишем компоненты 4-импульса лептона через вещественные параметры:

$$2p_0 = z_1^2 + v_1^2 + z_2^2 + v_2^2 + u_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + w_2^2; \tag{3.4.7}$$

$$2p_3 = z_1^2 + v_1^2 - z_2^2 - v_2^2 + u_1^2 + w_1^2 - u_2^2 - w_2^2; \tag{3.4.8}$$

$$p_1 = z_1 z_2 + v_1 v_2 + u_1 u_2 + w_1 w_2; \tag{3.4.9}$$

$$p_2 = z_1 v_2 - z_2 v_1 + u_1 w_2 - u_2 w_1. \tag{3.4.10}$$

Очевидно, 8 параметров элементов невозможно выразить через 4 компоненты импульса. Часть параметров оказывается независимой. Из изложенного выше известно, что на парметры массивного лептона наложено условие (3.3.2), которое в терминах (3.4.6) означает

$$z_1 u_2 - u_1 z_2 + v_2 w_1 - v_1 w_2 = mc; \tag{3.4.11}$$

$$z_1 w_2 + v_1 u_2 - z_2 w_1 - v_2 u_1 = 0. \tag{3.4.12}$$

Из (3.4.7) — (3.4.10) и соображений главы 2 следует, что остаются независимыми три вещественных параметра элементов. Выберем в качестве ключевых 4 вещественных параметра: z_1, v_1, u_1, w_1, на которые согласно (3.4.7) (3.4.8) наложено одно условие

$$z_1^2 + v_1^2 + u_1^2 + w_1^2 = p_0 + p_3, \tag{3.4.13}$$

т.е. значения этих параметров определяется точкой 3-мерной гиперсферы радиуса $p_0 + p_3$ в 4-мерном евклидовом пространстве, т.е. геометрией Римана.

5. Соотношения (3.4.9) и (3.4.10) можно понимать как два линейных уравнения относительно неизвестных u_2 и w_2. Решая эту систему и подставляя решение в условия (3.4.11) и (3.4.12), легко убедиться, что полученные соотношения можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений относительно величин z_2 и v_2. Решая эту систему, находим ответ на поставленный выше вопрос:

$$\begin{aligned} z_2 &= \tfrac{p_1 z_1 - p_2 v_1 - mcu_1}{p_0 + p_3}; \quad v_2 = \tfrac{p_2 z_1 + p_1 v_1 + mcw_1}{p_0 + p_3}; \\ u_2 &= \tfrac{p_1 u_1 - p_2 w_1 + mcz_1}{p_0 + p_3}; \quad w_2 = \tfrac{p_1 w_1 + p_2 u_1 - mcv_1}{p_0 + p_3}. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

6. Условие (3.4.13) было получено суммированием соотношений (3.4.7) и (3.4.8). Беря разность этих же соотношений, получаем

$$z_2^2 + v_2^2 + u_2^2 + w_2^2 = p_0 - p_3. \tag{3.4.15}$$

Подставляя сюда (3.4.15), получаем известное релятивистское соотношение между массой, энергией и импульсом частицы.

3.5 Прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве

Отметим, что здесь пока еще не было дифференциальных уравнений движения, тем не менее, опираясь на изложенный материал, можно ввести соотношение, являющееся прообразом известного уравнения Дирака в импульсном пространстве. Это позволяет взглянуть на эти уравнения под новым углом зрения [14].

Формально запишем в ковариантном спинтензорном виде связь между двумя парами компонент β_s и i^s, входящих в определение столбца Ψ (3.2.1) для массивной частицы,

$$\beta_{\dot{r}} = K_{\dot{r}s} i^s \to \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot{1}1} & K_{\dot{1}2} \\ K_{\dot{2}1} & K_{\dot{2}2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}. \tag{3.5.1}$$

Всегда можно подобрать матрицу $K_{\dot{r}s}$ с комплексными коэффициентами так, чтобы выполнялось это соотношение.

Пусть i^s и $\beta_{\dot{r}}$ характеризуют одну и ту же частицу. Это означает, что в ее собственной системе отношений выполняются соотношения (3.3.8). Компоненты i^s и $\beta_{\dot{r}}$ в произвольной системе

отношений выражаются через компоненты в собственной системе отношений согласно формуле (3.4.1), т.е.

$$\begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0+b_3)i_c^1 + (b_1-ib_2)i_c^2 \\ (b_1+ib_2)i_c^1 + (b_0-b_3)i_c^2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0-b_3)i_c^1 - (b_1-ib_2)i_c^2 \\ -(b_1+ib_2)i_c^1 + (b_0+b_3)i_c^2 \end{pmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Подставляя (3.5.2) в (3.5.1), имеем два комплексных соотношения. В каждом из них приравняем слева и справа коэффициенты отдельно при параметрах i_c^1 и i_c^2. В итоге получаем четыре уравнения для четырех компонент

$$\begin{aligned} &K_{\dot{1}1}(b_0+b_3) + K_{\dot{1}2}(b_1+ib_2) = b_0 - b_3; \\ &K_{\dot{1}1}(b_1-ib_2) + K_{\dot{1}2}(b_0-b_3) = -(b_1-ib_2); \\ &K_{\dot{2}1}(b_0+b_3) + K_{\dot{2}2}(b_1+ib_2) = -(b_1+ib_2); \\ &K_{\dot{2}1}(b_1-ib_2) + K_{\dot{2}2}(b_0-b_3) = b_0 + b_3. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Детерминант Δ этого уравнения согласно (2.7.3)

$$\Delta = \left(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\right)^2 = 1. \tag{3.5.4}$$

Решение уравнений (3.5.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_{\dot{1}1} & K_{\dot{1}2} \\ K_{\dot{2}1} & K_{\dot{2}2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1+2b_2(b_0-b_3) & -2b_0(b_1-ib_2) \\ -2b_0(b_1+ib_2) & -1+2b_0(b_0+b_3) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \sigma^{\mu}_{(-)} u_{\mu}, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

где $\sigma^{\mu}_{(-)} = \{I_2, -\sigma^i\}$ — набор из четырех 2-рядных матриц, а четыре компоненты u_μ означают

$$u_0 = 2b_0^2 - 1; \quad u_i = 2b_0 b_i. \tag{3.5.6}$$

Легко убедиться, что компоненты u_μ обладают свойством

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1. \tag{3.5.7}$$

Для частного случая псевдоповорота вокруг первой оси (2.7.9)

$$\begin{aligned} u_0 &= \cosh\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\ u_1 &= \sinh\theta_1 = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\ u_2 &= u_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Эти формулы позволяют интерпретировать u_μ как компоненты 4-скорости собственной системы отношений частицы (т.е. ее самой) относительно используемой системы отношений.

Вводя 2-компонентные столбцы

$$\Psi_1 \equiv \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}; \quad \Psi_2 \equiv \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{3.5.9}$$

и умножая (3.5.1) на коэффициент $m_0 c$, имеем

$$\Psi_2 m_0 c = \sigma^\mu_{(-)} m_0 c u_\mu \Psi_1 \to \sigma^\mu_{(-)} p_\mu \Psi_1 - m_0 c \Psi_2 = 0, \tag{3.5.10}$$

где введено обозначение

$$p_\mu = m_0 c u_\mu.$$

Совершенно аналогично можно найти коэффициенты $K^{s\dot{r}}$ для обратного к (3.5.1) соотношения

$$i^s = K^{s\dot{r}} \beta_{\dot{r}} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.5.11}$$

Подставляя сюда выражения (3.5.2) и расписывая уравнения типа (3.5.4), находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 + 2b_0(b_0 + b_3) & 2b_0(b_1 - ib_2) \\ 2b_0(b_1 + ib_2) & -1 + 2b_0(b_0 - b_3) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \sigma^\mu_{(+)} u_\mu, \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

где $\sigma^\mu_{(+)} = \{I_2, +\sigma^i\}$. Опять умножая (3.5.11) на коэффициент $m_0 c$, имеем

$$\Psi_1 m_0 c = \sigma^\mu_{(+)} m_0 c u_\mu \Psi_2 \to \sigma^\mu_{(+)} p_\mu \Psi_1 = 0. \tag{3.5.13}$$

Объединим 2-компонентные соотношения (3.5.10) и (3.5.13) в одно 4-компонентное выражение. Вспоминая введенные в разделе 3.2 представления матриц Дирака, имеем

$$p_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{(+)} \\ \sigma^\mu_{(-)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} - m_0 c \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0 \to$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m_0 c)\,\Psi = 0. \qquad (3.5.14)$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с общеизвестным *уравнением Дирака для свободной частицы в импульсном пространстве*. Заметим, что использование второй возможной связи двух элементов, образующих античастицу согласно (3.3.9), приводит к тому же уравнению (3.5.14), но со знаком минус перед вторым слагаемым справа.

Константа $m_0 c$, введенная в (3.5.10) и (3.5.13), совпадает со значением спинорного инварианта (3.2.3). Действительно, комбинация $\sigma^\mu p_\mu$ уже встречалась в представлении спинтензорной матрицы (2.6.3). Расписывая компоненты $B^{s\dot{r}}$ через параметры элементов и умножая эту матрицу на столбец Ψ_2, имеем

$$\sigma^\mu_{(+)} p_\mu \begin{pmatrix} \beta_{\mathrm{i}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1\mathrm{i}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\mathrm{i}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\mathrm{i}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \left(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1\right) \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix},$$

что совпадает с (3.5.13). Аналогично можно проинтерпретировать и соотношение (3.5.10). Таким образом, введенная константа означает

$$m_0 c = i^1 k^2 - i^2 k^1.$$

Очевидно, что умножив (3.5.14) слева на матрицу $\gamma^\mu p_\mu - m_0 c$, получаем

$$\left(g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m_0^2 c^2\right)\Psi = 0 \to \left(\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} - m_0^2 c^2\right)\Psi = 0, \qquad (3.5.15)$$

что соответствует *уравнению Клейна-Фока* в импульсном пространстве, или, что эквивалентно, известному релятивистскому соотношению между компонентами 4-импульса частицы.

3.6 Бинарная геометрофизика и твисторная программа Пенроуза

1. В современной литературе довольно широко представлены исследования по твисторной программе Р.Пенроуза [46, 47, 61]. Эта программа в ряде аспектов пересекается с развиваемой здесь бинарной геометрофизикой. Это относится как к идеологической части теорий, так и к ряду технических средств, используемых для их построения. Близость этих двух программ проявляется, во-первых, в одинаковом понимании классического пространства-времени как некой вторичной конструкции, которую нужно получить из более первичных понятий, используемых

в физике микромира. Во-вторых, в обеих программах в качестве более первичных понятий выступают 2-компонентные (комплексные) спиноры, более того, именно пары 2-компонентных спиноров. В программе Пенроуза они называются *твисторами*.

Так, обосновывая свою программу Р.Пенроуз пишет:"Если единый подход к квантовой физике и геометрии пространства-времени существует, то тип математического описания, пригодный для одной из них, должен подходить и для другой. Один из главных побудительных мотивов развития теории твисторов состоит в том, что она дает математическое описание физики, которое базируется целиком на *комплексной* структуре; при этом геометрия четырехмерного пространства-времени и квантовомеханический принцип суперпозиции возникают как тесно связанные аспекты этой комплексной твисторной структуры"[61, с.13-14]. В другой работе Пенроуз с сотрудниками писал:"Мы надеемся, что развитие твисторной теории приведет в конечном счете к построению лоренцевых многообразий, которые будут служить моделями пространства-времени"[61, с.132].

Вместе с тем имеются и существенные различия как в исходных положениях, так и в содержании двух программ. Отсылая читателя к оригинальным работам Р.Пенроуза и его сторонников [46, 61], где изложены мотивы и основные результаты теории твисторов, ограничимся лишь кратким сопоставлением основных понятий и соотношений в двух теориях.

2. Как уже отмечалось, *твистор* Z^α в теории Пенроуза образован парой 2-компонентных величин: спинором ω^s и ковариантным спинором $\pi_{\dot s}$ из сопряженного пространства, т.е. $Z^\alpha = (\omega^s, \pi_{\dot r})$. В теории Пенроуза из этих величин конструируются моменты $(\vec\omega)$ и импульсы $(\vec\pi)$ частиц. Принципиально важным моментом в такой теории является переход от твисторов к координатному пространству-времени. Аналогичная задача решается и в бинарной геометрофизике, однако иным способом. Пенроуз предлагает ее решать с помощью так называемого *основного соотношения теории твисторов*[4]

$$\omega^s = i x^{s\dot r} \pi_{\dot r}, \tag{3.6.1}$$

где $x^{s\dot r}$ – смешанный спинтензор второго ранга, компоненты которого трактуются как комбинации из четырех координат $\tilde x^\mu$ классического пространства-времени

$$x^{s\dot r} = \begin{pmatrix} \tilde x^0 + \tilde x^3 & \tilde x^1 - i\tilde x^2 \\ \tilde x^1 + i\tilde x^2 & \tilde x^0 - \tilde x^3 \end{pmatrix} \equiv \sigma_{(+)\mu}\tilde x^\mu. \tag{3.6.2}$$

[4]Мотивировкой написания этого соотношения послужил вид классического выражения для связи импульса и момента частицы $\vec\omega = [\vec x \vec\pi]$.

В основном соотношении теории твисторов отражена идеология программы Р.Пенроуза:"Точки пространства-времени восстанавливаются при этом по твисторному пространству (они отвечают определенным линейным подпространствам), но являются вторичным понятием по отношению к твисторам"[61, с.133].

Соотношения (3.6.1) и (3.6.2) очень напоминают выражения (3.5.13) и (3.5.11), возникавшие при выводе прообраза уравнения Дирака. Отсюда сразу видно принципиальное отличие теории Пенроуза от содержания этой главы. Здесь рассматривалось импульсное пространство, а у Пенроуза речь идет о переходе к координатному пространству. Из сравнения формул (3.5.13) и (3.6.1) в двух теориях видно, что сопоставляются следующие выражения:

$$m_0 c K^{s\dot{r}} = \sigma^{\mu}_{(+)} p_\mu \leftrightarrow x^{s\dot{r}} = \sigma_{(+)\mu} \tilde{x}^\mu. \tag{3.6.3}$$

Кроме того, пенроузовский твистор Z^α сопоставляется нашему 4-компонентному столбцу:

$$\Psi \leftrightarrow Z^\alpha; \quad i^s \leftrightarrow \omega^s; \quad \beta_{\dot{r}} \leftrightarrow i\pi_{\dot{r}}. \tag{3.6.4}$$

3. Проанализируем более подробно соотношение понятий на основе указанных соответствий. Для этого решим основное соотношение теории твисторов (3.6.1) в терминах бинарной геометрофизики. Это значит, что будем решать уравнение

$$i^s = K^{s\dot{r}} \beta_{\dot{r}} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} æ_0 + æ_3 & æ_1 - iæ_2 \\ æ_1 + iæ_2 & æ_0 - æ_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.6.5}$$

где матрица $K^{s\dot{r}}$ представлена через вещественные параметры $æ_0$, $æ_1$, $æ_2$, $æ_3$ аналогично тому, как в (3.6.2) $x^{s\dot{r}}$ записано через $\tilde{x}^\mu$. Неизвестными будем считать коэффициенты $æ_\mu$. Поскольку в теории Пенроуза условия типа (3.5.2) на i^s и $\beta_{\dot{s}}$ не накладываются, теперь получается иная ситуация. Представим i^s и $\beta_{\dot{s}}$ через восемь вещественных параметров

$$\begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} y_1 + iy_2 \\ y_3 + iy_4 \end{pmatrix} \sim i \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно имеем два уравнения, которые можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} æ_0 + æ_3 & æ_1 - iæ_2 \\ æ_1 + iæ_2 & æ_0 - æ_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iy_1 - y_2 \\ iy_3 - y_4 \end{pmatrix}. \tag{3.6.6}$$

4. Приравняем в каждом из этих уравнений слева и справа отдельно вещественные и мнимые части и получим 4 вещественных уравнения для 4 неизвестных. Легко убедиться, что детерминант этой системы тождественно равен нулю. Нетривиальные решения существуют при выполнении условия

$$z_1 y_1 - z_2 y_2 + z_3 y_3 - z_4 y_4 = 0. \tag{3.6.7}$$

Вводя элементы α и k с параметрами, комплексно сопряженными соответствующим параметрам i^s и β^s, можно убедиться что в бинарной геометрофизике условие (3.6.7) означает

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{3.6.8}$$

В работах Пенроуза твистору $Z^\alpha = \{\omega^1, \omega^2; \pi_1, \pi_2\}$ соответствует сопряженный твистор $\overline{Z}_\alpha = \{\pi_1, \pi_2; \omega^1, \omega^2\}$ и определено скалярное произведение твистора на сопряженный твистор

$$\overline{Z}_\alpha Z^\alpha = \omega^s \pi_s + \omega^{\dot{s}} \pi_{\dot{s}} \equiv 2s, \tag{3.6.9}$$

названное *спиральностью*. Подставляя в (3.6.7) компоненты $\omega^{\dot{s}}$ и $\pi^{\dot{s}}$, выраженные через вещественные величины, убеждаемся, что условие (3.6.7) означает одновременное равенство нулю следующих выражений:

$$\overline{Z}_\alpha Z^\alpha = 2s = 0 \to \overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{3.6.10}$$

Поскольку в (3.6.7) имеются два знака плюс и два знака минус, говорят, что твисторы — объекты в 4-мерном многообрразии с сигнатурой $(+-+-)$ с равным нулю квадратом.

5. Пусть условие (3.6.7) выполнено. Тогда из (3.6.6) можно найти три компоненты $æ_1$, $æ_2$ и $æ_3$ как функции четвертой компоненты $æ_0$:

$$\begin{aligned} æ_1 &= -\frac{æ_0 k^1(k\beta) - M^1}{k^0(k\beta)}; \\ æ_2 &= \frac{æ_0 k^2(k\beta) - M^2}{k^0(k\beta)}; \\ æ_3 &= \frac{æ_0 k^3(k\beta) - M^3}{k^0(k\beta)}. \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Здесь использованы введенные в (2.6.1) обозначения для компонент 4-мерного изотропного вектора $k^\mu(k\beta)$, построенного на сопряженной паре элементов k и β, и 3-мерной величины M^i, введенной согласно (3.4.22).

6. В теории Пенроуза вместо $k^\mu(k\beta)$ следует писать координаты x^μ, которые удовлетворяют аналогичному условию

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \qquad (3.6.12)$$

т.е. x^μ образуют изотропную линию в координатном пространстве-времени. Кроме того, следует положить $x^0 = æ_0$, тогда вместо (3.6.11) следует писать

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= x^1 - \tfrac{M^1}{x^0}; \\ \tilde{x}^2 &= x^2 - \tfrac{M^2}{x^0}; \\ \tilde{x}^3 &= x^3 - \tfrac{M^3}{x^0}. \end{aligned} \qquad (3.6.13)$$

Говорят, что решение (3.6.13) определяет флаг, древко которого направлено вдоль изотропного луча x^μ, а полотнище ориентировано вдоль M^i, характеризующего ориентацию спина частицы. Напомним, уже в обозначениях твистора $Z^\alpha = (\omega^s, \pi_{\dot{s}})$ заложено, что из спинора π^s (и ему сопряженного) строится изотропный вектор (импульс $k^\mu(k\beta)$), определяющий направление распространения спинорной частицы, а из спинора ω^s совместно с π^s (и им сопряженными) строится вектор момента M^i.

Легко убедиться, что беря вместо (3.6.5) обратное ему соотношение типа $\beta_{\dot{r}} = K_{\dot{r}s} i^s$, будем иметь обратную картину, т.е. получится изотропный импульс $k^\mu(i\alpha)$, сопоставленный с другой парой элементов $(i,\ \alpha)$, величина же M^i по-прежнему будет определяться всей четверкой элементов: i, α, k, β.

7. Подводя итог проведенному сопоставлению, следует подчеркнуть, что в теории твисторов две пары элементов (i,α) и (k,β) не связаны в одну массивную частицу, т.е. *твисторами описываются пары свободных нейтрино.* Этот вывод лишь частично перекрывается с интерпретацией, даваемой Пенроузом:"Твистор (простейшего типа), по-существу, можно представить себе "классически" как безмассовую частицу в свободном состоянии; при этом частица может обладать внутренним спином $\cdots$" [61, с.133]. Отличие состоит в том, что с позиции бинарной геометрофизики твистором описывается не одна, а две безмассовые частицы (два нейтрино). Характерно, что в теории твисторов рассматривается именно такой случай, когда инвариант $\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$, определенный для двух нейтрино, равен нулю. Отметим, что с точки зрения бинарной геометрофизики для одного нейтрино невозможно построить тензор $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ (или вектор M^i), — такие величины по определению (3.3.16) можно ввести лишь для двух пар элементов.

Но самое важное различие бинарной геометрофизики и теории твисторов состоит в исходных посылках теорий. В теории Пенроуза твистор постулируется, а в бинарной геометрофизике исходными являются БСКО, среди которых ключевую роль играют БСКО ранга (3,3). В их рамках понятия спиноров и биспиноров возникают автоматически.

Глава 4

Классическое пространство-время

Назначение этой главы состоит в том, чтобы опираясь на понятия БСКО указать путь построения теории координатного пространства-времени. При этом оказывается, что в формировании категории классического пространства-времени ключевую роль играет БСКО минимального ранга (2,2). Только благодаря ей осуществляется переход от двух моментов времени (начало – конец) БСКО ранга (3,3) (и более высоких рангов) к развернутой во времени картине пространственно-разнесенных событий (процессов). В этой главе дается систематическое изложение теории БСКО ранга (2,2) и тех следствий из нее, которые необходимы для построения классического пространства- времени. Здесь же показывается, что БСКО ранга (2,2) можно понимать как подсистему БСКО ранга (3,3).

4.1 Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2)

1. Обсудим наиболее важные черты БСКО наименьшего ранга (2,2). Согласно изложенной в части 1 общей теории бинарных систем отношений закон БСКО ранга (2,2) имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.1.1)$$

а парные отношения [1]

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1, \tag{4.1.2}$$

где i^1 и α^1 – в общем случае комплексные параметры соответственно элементов $i \subset \mathcal{M}$ и $\alpha \subset \mathcal{N}$. Подчеркнем, каждый элемент характеризуется только одним параметром.

2. На первый взгляд, казалось бы, следует говорить о двух теориях: БСКО ранга (2,2) и БСКО ранга (2,2;a), – однако оказывается, что эти две возможности следует понимать как две стороны одной медали. Чтобы это показать, перепишем закон (4.1.1) в форме

$$u_{i\alpha}u_{k\beta} = u_{k\alpha}u_{i\beta}$$

и прологарифмируем его. В итоге будем иметь

$$\ln u_{i\alpha} + \ln u_{k\beta} - \ln u_{k\alpha} - \ln u_{k\beta} = 0 \to$$

$$\to a_{i\alpha} + a_{k\beta} - a_{k\alpha} - a_{i\beta} = 0, \tag{4.1.3}$$

где введены обозначения:

$$Ca_{i\alpha} = \ln u_{i\alpha}; \quad Ca_{k\beta} = \ln u_{k\beta}; \cdots. \tag{4.1.4}$$

Здесь C – произвольная универсальная константа. Вспоминая вид $u_{i\alpha}$, т.е. (4.1.2), приходим к представлению $a_{i\alpha}$ через новые параметры:

$$a_{i\alpha} = \frac{1}{C}(\ln i^1 + \ln \alpha^1) \equiv i_0 + \alpha_0, \tag{4.1.5}$$

где

$$i_0 = \frac{1}{C}\ln i^1; \quad \alpha_0 = \frac{1}{C}\ln \alpha^1.$$

Очевидно, (4.1.3) можно понимать как закон БСКО ранга (2,2;a) с парным отношением (4.1.5), который можно переписать в форме

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.1.6}$$

соответствующей общему виду законов (1.2.3) для вырожденных БСКО.

Заметим, что можно было бы исходить от закона (4.1.6) и парного отношения (4.1.5) и, идя обратным путем, получить (4.1.1) и (4.1.2).

[1] Вывод закона и парного отношения БСКО ранга (2,2) приведен в Приложении А.1.

3. В связи с тем, что парные отношения комплексные, напомним определение натурального логарифма от комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$:

$$\ln z = \ln \rho + i(\varphi + 2n\pi), \tag{4.1.7}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Эта функция многозначная, поэтому часто ограничиваются главным значением φ, когда $0 < \varphi \leq 2\pi$.

Исходя из этого можно утверждать, что закон (4.1.3) БСКО ранга (2,2;а) *распадается на два закона БСКО* рангов (2,2;а)

$$\tilde{\Phi} = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} Re\tilde{\Phi} = a^{(1)}_{i\alpha} + a^{(1)}_{k\beta} - a^{(1)}_{k\alpha} - a^{(1)}_{i\beta} = 0; \\ \\ Im\tilde{\Phi} = a^{(2)}_{i\alpha} + a^{(2)}_{k\beta} - a^{(2)}_{k\alpha} - a^{(2)}_{i\beta} = 0, \end{array} \right\} \tag{4.1.8}$$

где для первой БСКО имеем

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{i\alpha} &= Re\left(\frac{\ln u_{i\alpha}}{C}\right) = Re\left(\frac{\ln i^1}{C}\right) + Re\left(\frac{\ln \alpha^1}{C}\right) = \\ &= \frac{1}{C}(\ln \rho_i + \ln \rho_\alpha) \equiv i^{(1)}_0 + \alpha^{(1)}_0. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Здесь положено, что константа С вещественная.

Для второй БСКО имеем аналогично

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{i\alpha} &= Im\left(\frac{\ln u_{i\alpha}}{C}\right) = Im\left(\frac{\ln i^1}{C}\right) + Im\left(\frac{\ln \alpha^1}{C}\right) = \\ &= \frac{1}{C}(\varphi_i + \varphi_\alpha) \equiv i^{(2)}_0 + \alpha^{(2)}_0, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где фазы понимаются в своих главных значениях.

4. Как и в случае БСКО ранга (3,3), в теории БСКО ранга (2,2) важную роль играют фундаментальные отношения как отличные от нуля миноры в законе БСКО. Для случая ранга (2,2;а) можно построить фундаментальное 2x2-отношение вида

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = (i_0 - k_0)(\beta_0 - \alpha_0) \equiv \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}_0, \tag{4.1.11}$$

которое, как и прежде, распадается на произведение однородных комбинаций из параметров элементов одного сорта.

Для БСКО ранга (2,2) в качестве фундаментальных отношений выступают сами парные отношения, однако для этого случая можно образовать отличное от нуля 2x2-отношение вида

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = (i^1 - k^1)(\beta^1 - \alpha^1) \equiv \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}. \qquad (4.1.12)$$

5. Рассмотрим возможные *преобразования параметров* элементов, оставляющие инвариантными либо определенные выше 2x2-отношения, либо сами парные отношения. Эти преобразования, как и ранее, можно понимать обусловленными изменениями наборов эталонных элементов в двух множествах БСКО. Начнем с преобразований, сохраняющих 2x2-отношения.

а) Поскольку (4.1.11) и (4.1.12) расщепляются на произведения комбинаций параметров из разных множеств, то можно говорить о преобразованиях параметров в каждом множестве в отдельности. Легко видеть, (4.1.11) и (4.1.12) остаются инвариантными соответственно при преобразованиях:

$$i'_0 = i_0 + a_0; \quad \alpha'_0 = \alpha_0 + \tilde{a}_0; \qquad (4.1.13)$$

$$i'^1 = i^1 + a^1; \quad \alpha'^1 = \alpha^1 + \tilde{a}^1, \qquad (4.1.14)$$

где a_0, $\tilde{a}_0$, a^1, $\tilde{a}^1$ – произвольные комплексные параметры, одинаковые для преобразований всех элементов соответствующих множеств. Такие преобразования естественно назвать *глобальными трансляциями.*

б) Кроме того, можно ввести увязанные друг с другом преобразования в двух множествах, оставляющие инвариантными 2x2-отношения:

$$i'_0 = b_0 i_0; \quad \alpha'_0 = b_0^{-1}\alpha_0; \qquad (4.1.15)$$

$$i'^1 = b^1 i^1; \quad \alpha'^1 = (b^1)^{-1}\alpha^1 \qquad (4.1.16)$$

соответственно для рангов (2,2;а) и (2,2). Здесь опять b^1 и b_0 произвольные комплексные коэффициенты, одинаковые для всех элементов.

в) Парные отношения в двух разновидностях БСКО остаются инвариантными относительно более узких преобразований. Так, для БСКО ранга (2,2) парные отношения допускают преобразования (4.1.16), тогда как для ранга (2,2;а) допустимы суженные преобразования (4.1.13):

$$i'_0 = i_0 + a_0; \quad \alpha'_0 = \alpha_0 - a_0, \qquad (4.1.17)$$

т.е. при $\tilde{a}_0 = -a_0$. Вспоминая связь параметров, находим, что параметры преобразований (4.1.16) и (4.1.17) выражаются друг через друга

$$a_0 = \frac{1}{C} \ln b^1. \tag{4.1.18}$$

4.2 Переход к унарным системам вещественных отношений

1. Чтобы в рамках бинарной геометрофизики проинтерпретировать физически (и геометрически) БСКО ранга (2,2) будем следовать универсальному правилу, которое, напомним, предполагает переход от БСКО к производной от нее унарной системе вещественных отношений (УСВО) путем склейки пар элементов из разных множеств. И только затем устанавливается, какие физические (и геометрические) понятия соответствуют вещественным отнеошениям построенной УСВО. В разделе 1.6 была изложена методика перехода к унарным системам отношений. Она включает в себя, во-первых, определение склейки элементов из двух множеств бинарной системы отношений, во-вторых, формирование вещественных отношений между склеенными совокупностями из разнородных элементов через отношения первичной бинарной системы и, в-третьих, нахождение закона УСВО.

2. Применим эту методику сначала к случаю БСКО ранга (2,2;a). Не лишаясь общности, будем полагать, что ее парные отношения вещественные. Начнем с условия склейки. Постулируем, что элементы из двух множеств: i и α, k и β, j и γ, ... находятся "в парах" (т.е. являются связанными), если их параметры удовлетворяют условиям:

$$i_0 = -\alpha_0; \quad k_0 = -\beta_0; \quad j_0 = -\gamma_0; \quad \cdots. \tag{4.2.1}$$

Тогда парные отношения между связанными элементами обращаются в нуль

$$a_{i\alpha} = a_{k\beta} = a_{j\gamma} = \cdots = 0. \tag{4.2.2}$$

Очевидно, это свойство инвариантно относительно преобразований (4.1.17).

Определим отношения между связанными парами непосредственно через первичные парные отношения следующим образом

$$S_{ik} = a_{i\beta} = -a_{k\alpha} = -S_{ki}, \tag{4.2.3}$$

т.е. это отношение антисимметрично. Здесь и в дальнейшем связанные пары будем помечать латинскими индексами, т.е. индексами элементов из множества $\mathcal{M}$.

При таком условии склейки бинарность системы отношений оказывается завуалированной. Получается так, что парные отношения (4.2.3) определены для элементов как из разных множеств, так и отдельно между элементами внутри множества $\mathcal{M}$:

$$S_{ik} = i_0 - k_0 \equiv S_i - S_k, \tag{4.2.4}$$

и между элементами внутри множества $\mathcal{N}$:

$$S_{\alpha\beta} = \alpha_0 - \beta_0 \equiv S_\alpha - S_\beta = k_0 - i_0 = -S_{ik}, \tag{4.2.5}$$

где введены единые параметры УСВО в соответствии с условиями склейки (4.2.1):

$$S_i = i_0 = -\alpha_0 = -S_\alpha; \quad S_k = k_0 = -\beta_0 = -S_\beta. \tag{4.2.6}$$

3. Рассмотрим закон (4.1.6) БСВО ранга (2,2;а) для нескольких частных наборов элементов.

а) Пусть закон записан для двух пар склеенных элементов (i, α) и (k, β), тогда имеем

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ki} & 0 \end{vmatrix} = S_{ki} + S_{ik} = 0, \tag{4.2.7}$$

т.е. в этом случае закон означает антисимметрию парных отношений.

б) Пусть в законе (4.1.6) одна пара элементов (i, α) склеена, а другие два элемента j и β – нет, тогда, сопоставляя элементу β четвертый, склеенный с ним элемент k, имеем

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} \end{vmatrix} = S_{ik} + S_{kj} + S_{ji} = 0. \tag{4.2.8}$$

Это соотношение выражает известное *свойство расстояний между тремя точками на ориентированной линии.*

в) Можно показать, что закон (4.1.6) для четырех элементов, не находящихся друг с другом в парах, сводится к случаю (4.2.8).

4. К соотношению (4.2.8) можно придти иначе. Поскольку был осуществлен переход к одному множеству склеенных элементов, и поскольку каждый из новых элементов характеризуется лишь одним параметром, то ранг УСВО должен быть равен 3. Все такие УСВО ранга 3 известны. Их законы выписаны в главе 1. Перебирая их, приходим к выводу, что в данном случае

имеем *одномерную симплектическую геометрию*, закон которой (1.4.12) для трех точек i, k, j имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} & S_{ij} \\ 1 & S_{ki} & 0 & S_{kj} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} & 0 \end{vmatrix} = -(S_{ik} + S_{kj} + S_{ji})^2, \qquad (4.2.9)$$

что соответствует (4.2.8). Таким образом осуществлен переход от БСКО ранга (2,2;a) к УСВО ранга (3).

5. Можно осуществить переход к УСВО от другой версии рассматриваемой БСКО, т.е. ранга (2,2). Чтобы это сделать, положим, что пары элементов i и α, k и β, j и γ, $\cdots$ связаны (сшиты) друг с другом, если их параметры комплексно сопряжены, т.е.

$$i^1 = \alpha^{*1}; \quad k^1 = \beta^{*1}; \quad j^1 = \gamma^{*1}; \quad \cdots. \qquad (4.2.10)$$

Определим вещественные парные отношения между составными элементами (i, α) и (k, β) следующим образом

$$w_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i\beta} + u_{k\alpha}) = \frac{1}{2}(i^1\beta^1 + k^1\alpha^1). \qquad (4.2.11)$$

Очевидно, что и в этом случае, опираясь на (4.2.10), можно определить системы отношений внутри каждого из двух множеств.

Перейдем от произвольных комплексных параметров к вещественным числам:

$$\begin{aligned} i^1 = x_i + iy_i; \quad &\to \quad \alpha^1 = x_i - iy_i; \\ k^1 = x_k + iy_k; \quad &\to \quad \beta^1 = x_k - iy_k, \end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

тогда парное отношение (4.2.11) принимает вид

$$w_{ik} = x_i x_k + y_i y_k. \qquad (4.2.13)$$

Естественно определить внутренние отношения для каждого составного элемента в виде, согласующимся с (4.2.11):

$$w_{ii} = i^1\alpha^1 = x_i^2 + y_i^2; \quad w_{kk} = k^1\beta^1 = x_k^2 + y_k^2. \qquad (4.2.14)$$

Легко видеть, что (4.2.13) означает скалярное произведение двух векторов в 2-мерном евклидовом пространстве с квадратами длин,

определенными в (4.2.14). Эти свойства можно выразить в виде равенства нулю определителя Грама, записанного для трех произвольных элементов:

$$\begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ik} & w_{ij} \\ w_{ki} & w_{kk} & w_{kj} \\ w_{ji} & w_{jk} & w_{jj} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.2.15)$$

Для перехода к УСВО введем дополнительные условия на внутренние отношения:

$$w_{ii} = w_{kk} = w_{jj} = \cdots = 1, \qquad (4.2.16)$$

тогда (4.2.15) превращается в закон УСВО ранга 3:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & w_{ik} & w_{ij} \\ w_{ki} & 1 & w_{kj} \\ w_{ji} & w_{jk} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.2.17)$$

соответствующий 1-мерной геометрии на окружности единичного радиуса. Напомним, что вместо единицы можно было бы взять любое другое положительное число. Легко убедиться, что закон (4.2.17) соответствует соотношению между разностями фаз (углов) для трех единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ik} + \varphi_{kj}. \qquad (4.2.18)$$

Заметим, что другой бинарной системе вещественных отношений ранга (2,2;a) в (4.1.8) (для модулей) соответствует тот случай, когда БСКО ранга (2,2) характеризуется вещественными парными отношениями и, следовательно, вещественными параметрами элементов.

4.3 БСКО ранга (2,2) как подсистема БСКО ранга (3,3)

1. В предыдущих двух разделах БСКО ранга (2,2) рассматривалась как самостоятельная система. Однако, оказывается, эту БСКО минимального ранга можно рассматривать как подсистему БСКО ранга (3,3) аналогично тому, как в теории групп некоторые группы являются подгруппами более общих групп. Для того, чтобы это показать, во-первых, нужно продемонстрировать, как в рамках БСКО ранга (3,3) возникают параметры, соответствующие элементам БСКО ранга (2,2), и, во-вторых,

следует указать критерий деления элементов с такими параметрами на два множества. Покажем, как решаются эти вопросы.

2. Прежде всего, отметим, что закон БСКО ранга (3,3) в (2.2.1) позволяет перейти от одного набора параметров элементов к другому согласно соотношениям:

$$\begin{array}{lll} i^s \to \tilde{i}^s = C_i i^s; & k^s \to \tilde{k}^s = C_k k^s; & j^s \to \tilde{j}^s = C_j j^s; \\ \alpha^s \to \tilde{\alpha}^s = C_\alpha \alpha^s; & \beta^s \to \tilde{\beta}^s = C_\beta \beta^s; & \gamma^s \to \tilde{\gamma}^s = C_\gamma \gamma^s, \end{array} \tag{4.3.1}$$

так что, например,

$$\tilde{u}_{i\alpha} = \tilde{i}^1 \tilde{\alpha}^1 + \tilde{i}^2 \tilde{\alpha}^2 = C_i C_\alpha u_{i\alpha}, \tag{4.3.2}$$

где C_i, $\cdots$, C_γ – произвольные комплексные числа, сопоставляемые соответствующим элементам. Действительно, для новых параметров закон БСКО ранга (3,3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} & \tilde{u}_{i\gamma} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} & \tilde{u}_{k\gamma} \\ \tilde{u}_{j\alpha} & \tilde{u}_{j\beta} & \tilde{u}_{j\gamma} \end{vmatrix} = \\ &= C_i C_k C_j C_\alpha C_\beta C_\gamma \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Закон выполняется, если он имеет место для прежних параметров.

3. В главе 3 на параметры элементов, описывающих одну и ту же свободную частицу, был наложен ряд дополнительных условий. Рассмотрим, как они отражаются на значениях коэффициентов C_i, $\cdots$, C_γ, если потребовать, чтобы новые параметры (с тильдой) удовлетворяли тем же условиям. Положим, что попрежнему начальные и конечные состояния описываются комплексно сопряженными параметрами, тогда

$$\tilde{i}^s = (\tilde{\alpha}^s)^* \to C_i = C_\alpha^*; \quad \tilde{k}^s = (\tilde{\beta}^s)^* \to C_k = C_\beta^*; \cdots. \tag{4.3.4}$$

Положим также, что парные отношения для связанных элементов (в теории БСКО ранга (3,3)) при преобразованиях (4.3.1) не меняются, тогда из (4.3.2) и (4.3.4) следует

$$C_i C_\alpha = C_i C_i^* = 1; \quad C_k C_\beta = C_k C_k^* = 1; \quad \cdots, \tag{4.3.5}$$

т.е. параметры C_i, $\cdots$, C_γ являются комплексными числами *с модулем, равным единице*:

$$C_i = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = e^{-i\varphi_i}; \quad C_k = e^{i\varphi_k}; \cdots, \tag{4.3.6}$$

где $\varphi_i, \cdots$ – вещественные числа.

4. Потребуем, чтобы условия (3.3.2) (или (3.3.3)), накладываемые на элементы, описывающие частицу (античастицу), попрежнему удовлетворялись. Это означает

$$\tilde{i}^1\tilde{k}^2 - \tilde{i}^2\tilde{k}^1 = C_iC_kmc \to C_iC_k = 1. \qquad (4.3.7)$$

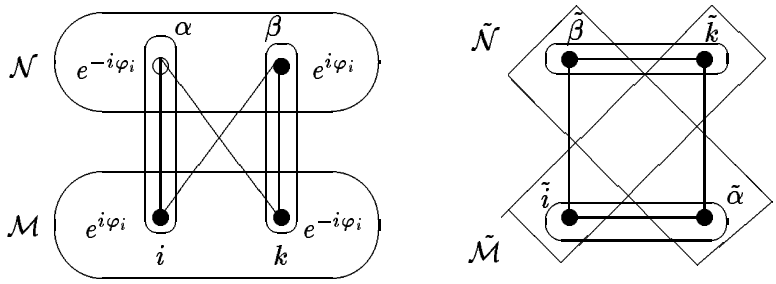
С учетом (4.3.5) отсюда получаем, что коэффициенты при параметрах одноименных элементов связаны между собой условиями:

$$C_i = C_k^* = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = C_\beta^* = e^{i\varphi_\alpha} = e^{-i\varphi_i}. \qquad (4.3.8)$$

При этих условиях 4-компонентные величины, определенные в (3.2.1), приобретают общие экспоненциальные множители:

$$\Psi \to \Psi e^{i\varphi}; \quad \Psi^\dagger \to \Psi^\dagger e^{-i\varphi}. \qquad (4.3.9)$$

Формулы (4.3.4) и (4.3.8) пояснены на рисунке 4.1а, где изображены четыре элемента, описывающие идеализированную свободную частицу в начальном и конечном состояниях. Показано,



а) БСКО ранга (3,3) б) БСКО ранга (2,2)

Рис. 4.1: Четверка элементов, описывающая состояния идеализированного массивного лептона, с позиций двух БСКО

что допустимые единичные по модулю коэффициенты совпадают у перекрестных элементов.

5. Ниже будет показано, что для *взаимодействующих* частиц упомянутые выше условия должны быть обобщены. Прежде всего, это касается условия комплексного сопряжения параметров элементов в начальных и в конечные состояниях, т.е. в общем случае должны быть изменены условия (4.3.4). Анализ показывает, что условия (4.3.7) должны быть сохранены, т.е. будем полагать, что при параметрах присутствуют экспоненциальные слагаемые, комплексно сопряженные для пар элементов (для левых

и правых компонент частицы):

$$C_i = C_k^* = e^{i\varphi_i}; \quad C_\beta = C_\alpha^* = e^{i\varphi_\beta}, \tag{4.3.10}$$

где $\varphi_i \neq \varphi_\beta$. *Эти экспоненциальные слагаемые будем считать параметрами элементов БСКО ранга (2,2).* Особо следует подчеркнуть, что они соответствуют *фазовой* (циклической) части БСКО ранга (2,2) в (4.1.8). Таким образом, каждому элементу из любого множества БСКО ранга (3,3) соответствует какой-то элемент БСКО ранга (2,2). При этом, вообще говоря, ниоткуда не следует, что эти элементы в рамках БСКО ранга (2,2) должны строго соответствовать двум множествам БСКО ранга (3,3).

6. Разделим все так введенные элементы на два множества БСКО ранга (2,2) следующим образом. Во-первых, элементы из пар, описывающих каждое из состояний массивного лептона, будем считать принадлежащими двум *разным* множествам. Так, пусть элемент i на рисунке 4.1а принадлежит множеству $\tilde{\mathcal{M}}$, а элемент k – множеству $\tilde{\mathcal{N}}$ БСКО ранга (2,2). Во-вторых, элементы из пар второго множества БСКО ранга (3,3) по отношению к уже установленным элементам первого множества БСКО ранга (3,3) отнесем к противоположным множествам БСКО ранга (2,2). В частности, для элементов, изображенных на рисунке 4.1, элемент α отнесем к множеству $\tilde{\mathcal{N}}$, а элемент β – к множеству $\tilde{\mathcal{M}}$ БСКО ранга (2,2). Присвоим всем элементам второй символ (с тильдой), характеризующий их принадлежность к одному из двух множеств БСКО ранга (2,2). Для изображенных на рисунке 4.1 элементов это означает

$$i \to \tilde{i}; \quad k \to \tilde{\alpha}; \quad \alpha \to \tilde{\beta}; \quad \beta \to \tilde{k}. \tag{4.3.11}$$

При этом согласно определению связанных пар (4.2.10) в теории БСКО ранга (2,2) элементы $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{\beta}$ следует считать "сшитыми" друг с другом. Другими словами можно сказать, элементы БСКО ранга (3,3), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами разных множеств с точки зрения БСКО ранга (2,2), и, наоборот, элементы БСКО ранга (2,2), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами одного и того же множества с точки зрения БСКО ранга (3,3) (см. рис. 4.1б).

7. С точки зрения БСКО ранга (2,2) между сшитыми парами элементов (между начальным и конечным состояниями лептона в теории БСКО ранга (3,3)) можно установить отношения, обобщающие (4.2.11), причем это можно сделать как в рамках

УСВО, так и в рамках унарной системы комплексных отношений. В последнем случае эти отношения можно задать в виде

$$\tilde{u}_{ik} = \tilde{k}\tilde{\alpha} = e^{i(\varphi_k - \varphi_i)}. \tag{4.3.12}$$

Очевидно, что в идеализированном варианте, соответствующем (4.3.6), это отношение равно единице.

От отношения (4.3.11) можно перейти к отношениям БСКО ранга (2,2;a) по описанным в разделе 4.1 рецептам, т.е.

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{C}\ln \tilde{u}_{ik} = \frac{i}{C}(\varphi_k - \varphi_i), \tag{4.3.13}$$

где C, напомним, некоторая константа из (4.1.4), которая может принимать как вещественные, так и комплексные значения.

4.4 Физическая интерпретация БСКО ранга (2,2)

1. Физическая интерпретация парных отношений БСКО ранга (2,2;a) опирается на установленное в (4.2.8) свойство аддитивности

$$S_{ij} = S_{ik} + S_{kj}. \tag{4.4.1}$$

Постулируем, что *парные отношения $a_{i\beta} \equiv S_{ik}$ БСКО ранга (2,2;a) в бинарной геометрофизике соответствуют действию между двумя состояниями (точками, событиями) одной и той же частицы.* Поскольку действие частицы с точностью до коэффициента равно длине интервала s_{ik} между двумя точками, то $a_{i\beta}$ геометрически интерпретируется как пропорциональное интервалу собственного времени t_{ik} между двумя событиями.

2. Изложенное в предыдущих разделах этой главы позволяет утверждать, что интерпретация парного отношения через действие имеет место для *фазовой части БСКО ранга (2,2;a)*. Возникает возможность пролить свет на две ипостаси БСКО ранга (2,2) — их можно понимать как *два аспекта теории: классический и квантовый*, – БСКО ранга (2,2;a) соответсвует классическому аспекту теории, а БСКО ранга (2,2) соответствует квантовому аспекту теории.

Действительно, классической аддитивности действия (4.4.1) соответствует квантовомеханический мультипликативный закон

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ij}\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right] \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{kj}\right]. \tag{4.4.2}$$

В этом случае приобретает определенный смысл константа C в (4.1.4). Она выражается через постоянную Планка:

$$C = \frac{1}{\hbar}. \tag{4.4.3}$$

3. Принципиально важным моментом в данной интерпретации является исконно циклический характер зависимости парных отношений от действия, т.е. появление действия в показателе экспоненты с мнимой единицей. Именно так входит действие в формулы для квазиклассических приближений волновых функций частиц в квантовой механике. Это можно трактовать как *компактифицированность некой дополнительной размерности с координатой* $x^4 = S$, соответствующей параметрам БСКО ранга (2,2).

В этой связи следует вспомнить идею Ю.Б.Румера, изложенную в его "Исследованиях по 5-оптике"[52]. Он предлагал интерпретировать действие как 5-ю (здесь будем ее обозначать через x^4) координату, которая компактифицирована (замкнута) с периодом $\hbar$. Это была одна из первых попыток геометрического истолкования квантовой механики, оставшаяся незавершенной. Одной из причин неудачи этой попытки Румера, на наш взгляд, являлось желание связать эту 5-ю координату одновременно и с электромагнитным взаимодействием. Последнее же диктует использование другой дополнительной координаты (размерности).

4. Однако классическое действие не имеет компактифицированного характера. Если считать циклический характер действия первичным свойством материи, то возникает вопрос о механизме (причинах) перехода от компактифицированной размерности к некомпактифицированной в классической физике, т.е. о переходе от аддитивного закона (4.4.1) на ориентированной окружности к аддитивному закону на ориентированной прямой. В бинарной геометрофизике этот принципиально важный вопрос связан с проблемой интерпретации квантовой теории и с проблемой соотношения квантовой механики и теории классического пространства-времени. Это предполагается обсудить в другой части книги. Здесь же будем опираться на факт, что такой переход имеется.

5. Наличие двух понятий: компонент импульса p_μ, введенных в главе 3 в рамках теории БСКО ранга (3,3), и действия S_{ik}, обусловленного БСКО ранга (2,2), – позволяет в согласии с общепринятыми формулами ввести понятие *разности координат* между начальными и конечными состояниями частицы. Для этого представим S_{ik} в виде

$$S_{ik} \equiv S_i - S_k = \Delta S = p_\mu \Delta x^\mu_{ik} \equiv p_\mu (x^\mu_k - x^\mu_i), \tag{4.4.4}$$

где величины Δx^μ возникли как коэффициенты в представлении инварианта ΔS через компоненты 4-мерного импульса. Это позволяет представлять фазы φ в (4.3.10) через импульсы и координаты частиц в соответствующих состояниях:

$$\varphi_i = p_\mu x_i^\mu; \quad \varphi_k = p_\mu x_k^\mu. \tag{4.4.5}$$

Для сохранения инвариантности S_{ik} при преобразованиях Лоренца введенные координаты должны преобразовываться как компоненты контравариантного 4-мерного вектора:

$$p'_\mu = L^\nu_{\mu\cdot} p_\nu \to x'^\mu = L^\mu_{\cdot\lambda} x^\lambda, \tag{4.4.6}$$

где $L^\nu_{\mu\cdot}$ – коэффициенты преобразований 4- вектора, записанные в (2.7.2).

Особо подчеркнем, что выражения (4.4.4) - (4.4.5) являются *определениями* величин x^μ, сопоставляемых через S_{ik} импульсу p_μ. Очевидно, этих соотношений недостаточно для определения всех четырех компонент dx^μ (здесь и далее Δ заменена на d), поэтому доопределим их следующим образом

$$dx^\mu = \frac{dS}{m^2c^2} p_\mu, \tag{4.4.7}$$

где mc – ранее введенная константа. Легко видеть, что при преобразованиях (4.4.6) остается инвариантной величина

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv ds^2 = \frac{dS^2}{m^2c^2}, \tag{4.4.8}$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства Минковского, а ds естественно назвать *интервалом процесса перехода* частицы из начального в конечное состояние.

6. В предыдущем разделе было показано, что БСКО ранга (2,2) является подсистемой БСКО ранга (3,3). Однако на это можно взглянуть и иначе. Если рассматривать БСКО ранга (3,3) в более узком смысле, соответствующем содержанию главы 3, то излагаемое в этом разделе можно понимать как своеобразную *композицию* двух БСКО: рангов (3,3) и (2,2). Обратим внимание, что в рамках такой композиции предлагается принципиально иная логическая схема введения трех ключевых понятий физики: координат (x^μ), импульсов (p_μ) и действия (S). В традиционном изложении физики используется схема, где первичны x^μ и p_μ, тогда как действие S вторично. В бинарной геометрофизике более первичными понятиями являются импульс и действие,

тогда как категория координатного пространства-времени вторична.

7. Принципиально важный момент, возникающий из композиции с БСКО наинизшего ранга (2,2), состоит в *появлении временной развертки.* В рассмотренных ранее аспектах теории БСКО ранга (3,3) фактически речь шла лишь о двух моментах времени, т.е. о переходе частицы из какого-то начального состояния в некое конечное состояние. Понятие импульса, можно сказать, характеризовало обобщенные угловые характеристики. Учет БСКО ранга (2,2) позволяет развернуть совокупность таких отдельных переходов в мировую историю процессов во времени (см. рис. 4.2). Можно утверждать, что *течение (классического) времени*

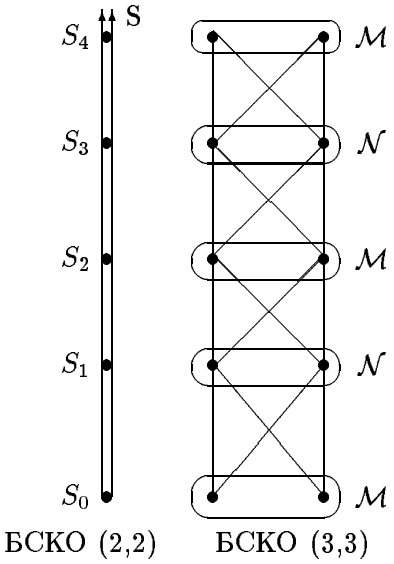


Рис. 4.2: Развертка в мировую историю процессов, посредством учета БСКО ранга (2,2)

обусловлено именно БСКО минимального ранга (2,2).

4.5 Бинарная система отношений ранга (2,2;a) и хроногеометрия

1. Рассмотрим следующий важный вопрос, состоящий в задании координат не только для истории одной выделенной час-

тицы, но и для точек-событий окружающего частицу мира. Подробно этот вопрос разбирается в другой части книги, однако вчерне его можно рассмотреть в рамках алгебраических понятий. Возьмем фундаментальное 2x2-отношение (4.1.11) БСКО ранга (2,2;a) и запишем его для двух пар связанных элементов (i, α) и (k, β):

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ik} \\ -S_{ik} & 0 \end{vmatrix} = S_{ik}^2. \qquad (4.5.1)$$

Оно с точностью до коэффициента определяет квадрат интервала между двумя событиями (на мировой линии одной частицы).

2. Можно сказать, вся теория классического пространства-времени разворачивается на основе этого числа. Укажем конкретный механизм задания координат событий за пределами мировой линии избранной частицы через интервалы на мировой линии этой частицы. Он фактически заложен в основу радиолокации. Полагается, что макроприбором фиксируется значение параметра эволюции (числа неких событий от начального момента до данного) в момент его взаимодействия (отправки сигнала) с другим объектом B (см. рис.4.3). Пусть это произошло в момент собственного времени s_{ik}, где i характеризует начало отсчета событий (точки A) на мировой линии макроприбора. Пусть взаимодействие имеет возвратный характер, т.е. положим, что второй объект вторично провзаимодействовал с первым объектом. На привычном языке это означает, что из B отправлен сигнал назад к первому объекту. Пусть повторное взаимодействие с 1-м объектом произошло при значении собственного времени s_{ij}. Тогда с помощью этих двух чисел можно определить две классические координаты события B относительно события A (или пары i, α). Назовем *разностью временных координат* двух событий A и B полусумму чисел

$$s_{AB} \equiv x^0_{AB} = \frac{1}{2}(s_{ik} + s_{ij}), \qquad (4.5.2)$$

а полуразность назовем *расстоянием* (пространственным интервалом) l_{AB} между этими событиями

$$l_{AB} = \frac{1}{2}(s_{ij} - s_{ik}). \qquad (4.5.3)$$

Легко видеть, что произведение двух чисел s_{ik} и s_{ij} можно понимать как квадрат интервала между двумя событиями в классическом понимании этого термина:

$$s_{ik}s_{ij} = (x^0_{AB})^2 - l^2_{AB} \equiv s^2_{AB}. \qquad (4.5.4)$$

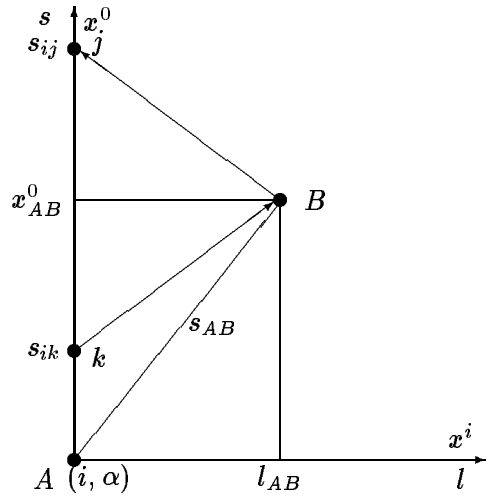


Рис. 4.3: Задание двух координат события B методом хроногеометрии

Отметим, что данная схема годится и в том случае, когда одно или оба события k и j предшествуют событию i. В случае, например, когда событие k предшествует i, число s_{ik} становится отрицательным, и согласно определению (4.5.4) события A и B становятся пространственно-подобными.

3. Комбинацию (4.5.4) можно связать со значением фундаментального 2x2-отношения БСКО ранга (2,2;a) для случая, когда одна пара элементов (i,α) связана (тильды над элементами писать не будем), а два других k и γ – не связаны:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ij} \\ -S_{ik} & S_{kj} \end{vmatrix} = S_{ik}S_{ij}. \qquad (4.5.5)$$

Здесь введен элемент γ, связанный с элементом j. Следует отметить, что имеется различие в том, сигнал испускается или принимается. Это обстоятельство можно связать с типом элементов двух множеств. Можно положить, что испускание сигнала помечается элементом из множества $\tilde{\mathcal{M}}$ (в данном случае элементом k), а поглощение сигнала помечается элементом множества $\tilde{\mathcal{N}}$ (в

данном случае элементом γ). Начало отсчета помечается сразу двумя связанными элементами i и α.

Заметим, что имеется возможность аналогичным образом проинтерпретировать фундаментальное 2x2-отношение для случая четырех несвязанных элементов. Оно имеет смысл квадрата интервала между двумя событиями, не лежащими на мировой линии наблюдателя.

4. Изложенная принципиальная схема введения двух координат событий вне мировой линии наблюдателя (макроприбора) многократно обсуждалась в работах физиков [3], геометров [1] и даже в трудах по философии естествознания. В частности, эта схема положена в основу специальной формулировки общей теории относительности как *хроногеометрии*, когда измерение координат и многих понятий теории относительности осуществляется лишь с помощью показаний часов наблюдателя (или ряда наблюдателей).

Важно отметить, что с помощью изложенной хроногеометрической схемы можно определить *лишь две координаты* x^0 и l произвольной точки-события B. Не внося в эту схему ничего дополнительного невозможно определить две оставшиеся (угловые) координаты события B. Для такого наблюдателя оказываются равнозначными все точки, изображенные на рисунке 4.4 в виде окружности из точек. В 4-мерном пространстве-времени они соответствуют 2-мерной сфере радиуса l_{AB}.

При изложении теории 4-мерного пространства-времени на основе модели хроногеометрии приходится вводить дополнительные понятия или усложнять описанную методику. Один из способов преодоления этой трудности состоит в использовании нескольких наблюдателей. Оказывается, угловые координаты события B можно определить, если его измерять, как минимум, тремя наблюдателями. При этом, конечно, полагается, что наблюдатели обмениваются между собой сигналами, определяя таким образом взаимные расстояния. Такой способ интересен тем, что не опирается на качественно иные методы получения информации и пригоден не только в плоском, но и в искривленном пространстве-времени общей теории относительности.

5. В бинарной геометрофизике этот вопрос решается иначе. Следует вспомнить, что БСКО ранга (2,2) появилась как подсистема БСКО ранга (3,3). Из этого следует, что подсистема описывает только часть координат, тогда как оставшиеся угловые координаты соответствуют направлениям (ориентациям) вектора передачи импульса k^μ, которые возникают из дальнейшего (вслед за (4.3.1) и (4.3.10)) обобщения теории БСКО ранга (3,3) на случай взаимодействующих частиц.

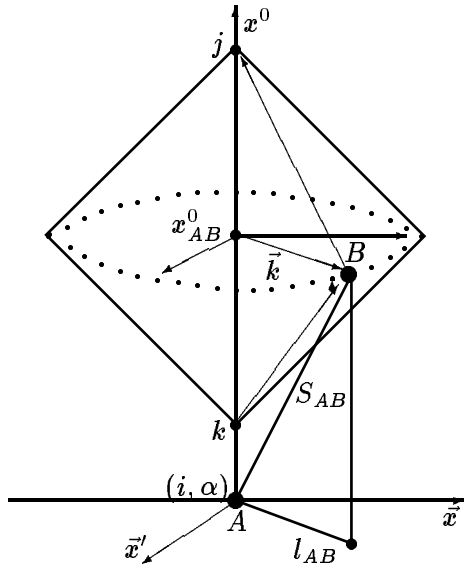


Рис. 4.4: Пары координат, установленные методом хроногеометрии, одинаковы для всех точек, лежащих на окружности

4.6 Классическое пространство-время

1. В разделе 1.5 был записан закон классического пространства Минковского в рамках теории унарных физических структур ранга 6 с *вещественными* парными отношениями, а вразделе 1.6 было показано, что формально этот закон можно получить также из БСВО ранга (6,6;a). В бинарной геометрофизике пространство Минковского должно быть выведено из БСКО. В разделе 2.8 было показано, что в рамках БСКО ранга (3,3) можно ввести прообраз пространства Минковского. Однако это не может рассматриваться как решение проблемы вывода координатного классического пространства-времени, в частности, вследствие того, что эта БСКО интерпретируется в терминах импульсного пространства, причем свободной частицы. Полное решение этой проблемы должно, во-первых, опираться на БСКО более высоких рангов, в рамках которых возможно описать взаимодействие частиц, и, во-вторых, должно опираться на БСКО ранга (2,2) с циклическим характером зависимости от действия. Теории БСКО рангов (4,4) и более высоких изложены в по-

следующих главах, а переход от циклической БСКО ранга (2,2) к классической БСКО ранга (2,2;а) рассмотрен в другой части книги. Тем не менее, опираясь на факт возможности перехода к классической БСКО ранга (2,2;а), в предварительном порядке можно вывести закон пространства Минковского в рамках расширенного понимания БСКО ранга (3,3).

2. Чтобы это сделать, необходимо еще более, чем в разделе 4.3, обобщить трактовку БСКО ранга (3,3). Для взаимодействующих частиц будем полагать, что параметры конечных элементов более существенно (не только в экспоненциальных слагаемых) отличаются от комплексно сопряженных параметров начальных элементов. Из значений параметров конечных элементов (привлекая комплексно сопряженные им значения) по известным правилам можно построить импульсы конечных состояний p'_μ. Точно так же из параметров исходных элементов строятся начальные импульсы p_μ. В результате взаимодействия импульс частицы изменяется на величину

$$k_\mu = p'_\mu - p_\prime. \tag{4.6.1}$$

В соответствии с изменением импульсов в конечных состояниях следует изменить определение фаз экспоненциальных слагаемых (4.4.5)

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_\mu x'^\mu\right] \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}p'_{mu}x'^\mu\right]. \tag{4.6.2}$$

Фундаментальные 2x2-отношения будут содержать произведения экспоненциальных слагаемых из начальных и конечных состояний, которые можно представить в виде

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'_\mu x'^\mu - p_\mu x^\mu)\right] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(p_\mu + k_\mu)(x^\mu + \Delta x^\mu) - p_\mu x^\mu\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta S\right] \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\mu x^\mu\right], \tag{4.6.3}$$

где положено

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu; \qquad p'_\mu \Delta x^\mu = \Delta S. \tag{4.6.4}$$

Величина ΔS, как и в разделе 4.4, имеет смысл изменения действия частицы при переходе из начального в конечное состояние.

3. Допустим, что вектор k_μ (или, по крайней мере, его направление в пространстве) является наблюдаемым. Это позволяет

дополнить хроногеометрию до полной 4-мерной теории. Чтобы показать это, выделим пространственно-подобную часть k^i вектора k_μ, где индекс i пробегает значения: 1, 2, 3. Длина вектора k^i записывается в виде

$$(\vec{k})^2 = h_{ij}k^i k^j,$$

где h_{ij} – метрический тензор 3-мерного пространственного сечения. Опираясь на это выражение, построим единичный пространственно-подобный вектор

$$l^i = \frac{k^i}{\sqrt{(\vec{k})^2}}. \tag{4.6.5}$$

Очевидно, все возможные изменения импульса в (4.6.1) формируют ежик из векторов, исходящих из одной точки и своими концами заполняющих единичную 2-мерную сферу (окружность на рисунке 4.4). Определим компоненты 4-мерного вектора, сопоставленного с событиями 1 и 2, следующим образом

$$s^\mu_{12} = \{x^0_{12},\ l^i l_{12}\}, \tag{4.6.6}$$

где l_{12} - расстояние между событиями 1 и 2, определенное в (4.5.3)

4. Пусть номером 1 отмечено событие на мировой линии рассматриваемой частицы (наблюдателя), а событие 2 произошло вне этой мировой линии. Возьмем пять таких событий и пометим их номерами: 2, 3, 4, 5, 6. Им можно сопоставить пять векторов s^μ_{1n} вида (4.6.6). По известным формальным правилам образуем скалярные произведения между всеми этими векторами и построим из них определитель Грама, который тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} s^2(12) & s_\mu(12)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(12)s^\mu(16) \\ s_\mu(13)s^\mu(12) & s^2(13) & \cdots & s_\mu(13)s^\mu(16) \\ s_\mu(14)s^\mu(12) & s_\mu(14)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(14)s^\mu(16) \\ s_\mu(15)s^\mu(12) & s_\mu(15)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(15)s^\mu(16) \\ s_\mu(16)s^\mu(12) & s_\mu(16)s^\mu(13) & \cdots & s^2(16) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6.7}$$

5. С помощью соотношения типа теоремы косинусов определим квадрат вектора $s^\mu(kj)$, соединяющего концы векторов с общим началом в точке 1:

$$s^2(kj) = s^2(1k) + s^2(1j) - 2s_\mu(1k)s^\mu(1j). \tag{4.6.8}$$

Следует подчеркнуть формальный характер так определенной длины вектора. При построении модели классического пространства- времени это определение следует дополнить утверждением, что эта длина будет такой же и с точки зрения любого другого наблюдателя. В частности, события k и j можно считать принадлежащими мировым линиям двух других наблюдателей. Естественно положить, что эти наблюдатели описанным выше методом хроногеометрии (радиолокации) могут измерить длины как вектора s_μ, так и векторов $s_\mu(1k)$ и $s_\mu(1j)$. Дополнительное утверждение означает, что результаты таких измерений совпадают, во-первых, со значением длины (4.6.8) и, во-вторых, с длинами векторов $s_\mu(1k)$ и $s_\mu(1j)$ с точки зрения первого наблюдателя. В дальнейшем это утверждение будет доказано. Оно следует, во-первых, из одинакового способа перехода к классическим понятиям и, во-вторых, из симметрии определения расстояния для наблюдателей, находящихся на концах вектора.

6. Дважды произведем операцию окаймления в точности так же, как и в разделе 2.8. Напомним, что процедура окаймления состоит в добавлении строки (или столбца) из нулей, кроме одной единицы, и столбца (или строки) под единицей из должным образом подобранных элементов. Затем с таким определителем производятся процедуры вычитания одних столбцов (строк) из других, не меняющих значение определителя. В итоге слева получается определитель Кэли-Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2(12) & s^2(13) & s^2(14) & s^2(15) & s^2(16) \\ 1 & s^2(21) & 0 & s^2(23) & s^2(24) & s^2(25) & s^2(26) \\ 1 & s^2(31) & s^2(32) & 0 & s^2(34) & s^2(35) & s^2(36) \\ 1 & s^2(41) & s^2(42) & s^2(43) & 0 & s^2(45) & s^2(46) \\ 1 & s^2(51) & s^2(52) & s^2(53) & s^2(54) & 0 & s^2(56) \\ 1 & s^2(61) & s^2(62) & s^2(63) & s^2(64) & s^2(65) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6.9}$$

Это закон УСВО ранга 6, при данной сигнатуре соответствующий закону (1.5.1) классического пространства Минковского.

4.7 Фундамент физического мироздания

Как уже отмечалось, ключевую роль в построении фундамента физического мироздания играют БСКО низших рангов. Среди них особое положение занимает БСКО минимального ранга (2,2). В этой главе была затронута лишь вершина айсберга связанных с этой БСКО проблем, но и этого уже достаточно, чтобы сделать ряд существенных выводов.

1. При анализе фундамента физического мироздания можно усмотреть проявление совокупности БСКО малых рангов. В этой главе показано, что понятие эволюции (расстояний) связано с БСКО ранга (2,2), однако в ее рамках нельзя ничего сказать о размерности многообразия. Классическое 4-мерие и сигнатура $(+ - - -)$ находят свое обоснование в рамках БСКО ранга (3,3), но и этого мало, – все это может проявляться только в результате взаимодействий частиц (материальных образований), а для их описания необходимо использовать БСКО еще более высоких рангов. Это уже неоднократно упоминалось в предыдущих разделах. Именно в этом смысле в разделе 2.1 говорилось об иерархичности БСКО низших рангов.

2. Следует подчеркнуть, что бинарная геометрофизика не должна рассматриваться, как прямая сумма БСКО минимальных рангов, каждая из которых играет свою индивидуальную роль. Из раздела 4.3 следует, что БСКО ранга (2,2) должна пониматься как подсистема БСКО ранга (3,3). В следующих главах при рассмотрении БСКО ранга (4,4) из последней будет выделяться БСКО ранга (3,3) и, более того, ряд характерных черт такой теории будет проявляться в результате редукции понятий и некоторых комбинаций из БСКО ранга (4,4) на теорию БСКО ранга (3,3). Этот процесс можно продлить и далее на более высокие ранги. Исходя из этого следует обратить внимание на *дедуктивный характер конструкции бинарной геометрофизики.* Следует исходить из теории БСКО некоторого ранга (r,r) (уж во всяком случае $r \geq 4$) и затем из нее выделять БСКО меньших рангов, анализируя проявления их свойств в фундаменте физики микромира. Этот характер теории проиллюстрирован блок-схемой на рисунке 4.5, доопределяющей блок-схемы, ранее изображенные на рисунках 2.1 и 0.3. На схеме в верхнем ряду изображены горизонтальные стрелки справа налево, показывающие подчиненный характер БСКО каждого ранга перед БСКО более высоких рангов. На рисунке БСКО ранга (4,4) обведена двойной рамкой, что показывает достаточность этого ранга для обоснования значительной части свойств теории взаимодействующих лептонов и ряда свойств макромира.

3. Эта часть книги посвящена изложению алгебраических аспектов бинарной геометрофизики, которые ответственны за ряд наблюдаемых свойств физики микромира Некоторые из этих свойств названы в нижней части рисунка 4.5. В частности, в этой главе лишь упомянуто, что первичная БСКО ранга (2,2) имеет циклический характер, – в мнимом показателе экспоненты стоит прообраз действия. Именно здесь заключены истоки волновых свойств материи. Вместе с формированием классического

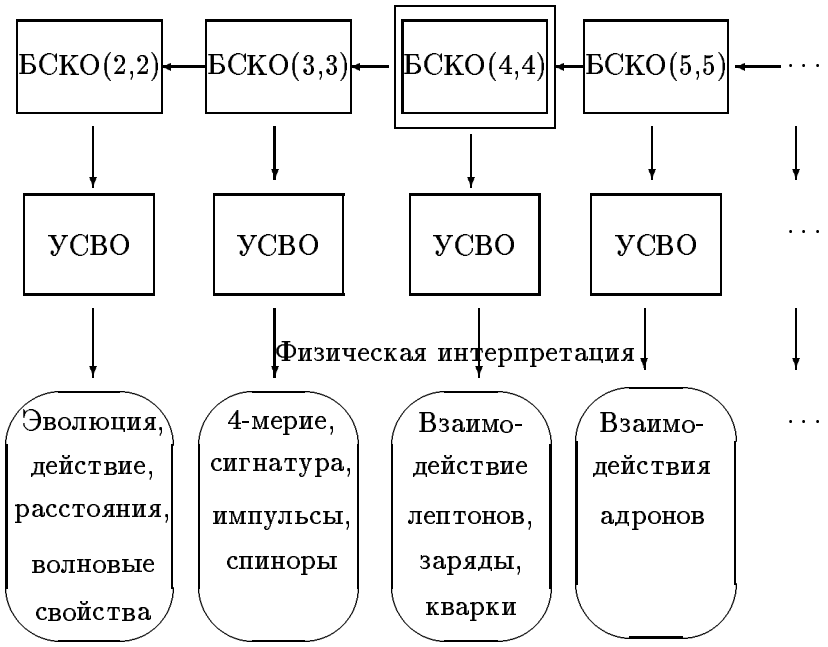


Рис. 4.5: Дедуктивный характер бинарной геометрофизики

пространства- времени из этого циклического характера отношений (зависимости от s) будут проступать контуры квантовой теории. На наш взгляд, квантовая механика есть ни что иное как результат описания (более первичных циклических) отношений, для которых не имеет место аксиома Архимеда, в рамках классических пространственно-временных отношений с аксиомой Архимеда. В связи с этим уместно напомнить высказывание Де Бройля: "Действительно, понятие пространства и времени взяты из нашего повседневного опыта и справедливы лишь для явлений большого масштаба. Нужно было бы заменить их другими понятиями, играющими фундаментальную роль в микропроцессах, которые бы асимптотически переходили при переходе от элементарных процессов к наблюдаемым явлениям обычного масштаба в привычные понятия пространства и времени. Стоит ли говорить, что это трудная задача? Было бы удивительно, если бы оказалось возможным когда-нибудь исключить из физической теории понятия, представляющие самую основу нашей

повседневной жизни. Правда, история науки показывает удивительную плодотворность человеческой мысли и не стоит терять надежды. Однако пока мы не добились успеха в распространении наших представлений в указанном представлении, мы должны стараться с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас все время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит" [6, с.187].

Близкие мысли можно найти в мемуаре Б.Римана "О гипотезах, лежащих в основании геометрии", написанном еще в середине прошлого века: "Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, – понятия твердого тела и светового луча, – по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это допущение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления" [50, с.32]. На наш взгляд, излагаемые здесь положения БСКО низших рангов представляют собой замену классических пространственно- временных представлений на более элементарные в области микромира, из которых выводятся логическим путем понятия классического мира.

Глава 5

Бинарная система комплексных отношений ранга (4,4) и 3-компонентные спиноры

Если в рамках БСКО ранга (3,3) формулируется новый подход к теории 2-компонентных спиноров и к получаемым из них 4-мерным векторам с *парными* метрическими отношениями, то в БСКО следующего ранга (4,4) (в бинарном многомерии) по тем же правилам строится теория объектов, которые естественно назвать 3-компонентными спинорами. Таким образом открывается новый канал обобщения понятия 2-компонентного спинора. Из 3-компонентных спиноров по прежним правилам строятся 9- компонентные векторы, для которых имеют место *кубичные* метрические отношения, – возникает своеобразная 3-точечная (унарная) геометрия.

5.1 Основные понятия бинарных систем комплексных отношений ранга (4,4)

1. Согласно общей формуле (1.2.2) закон БСКО ранга (4,4) записывается в виде равенства нулю определителя, составленного из 16 парных отношений между двумя четверками элементов

i, m, n, l и α, μ, ν, λ из двух разных множеств

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} & u_{i\lambda} \\ u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{5.1.1}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ задаются формулой (1.2.3)

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \tag{5.1.2}$$

Здесь i^1, i^2, i^3 — три комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а α^1, α^2, α^3 — комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Отметим, что это парное отношение можно рассматривать как скалярное произведение двух 3-мерных векторов из двух разных пространств.

2. Пусть в (5.1.1) две тройки разноименных элементов m, n, l и μ, ν, λ образуют базис БСКО ранга (4,4). Пометим волной сверху внутренние отношения между базисными элементами. Выразим парное отношение $u_{i\alpha}$ между произвольными (небазисными) элементами i и α через их парные отношения к базисным и внутренние отношения между базисными элементами. Из (5.1.1) в общем случае находим

$$\begin{aligned} u_{i\alpha} = \frac{1}{\Delta}\{ & u_{i\mu}[u_{m\alpha}(\tilde{u}_{n\nu}\tilde{u}_{l\lambda} - \tilde{u}_{l\nu}\tilde{u}_{n\lambda}) - u_{n\alpha}(\tilde{u}_{m\nu}\tilde{u}_{l\lambda} - \tilde{u}_{l\nu}\tilde{u}_{m\lambda}) + \\ & + u_{l\alpha}(\tilde{u}_{m\nu}\tilde{u}_{n\lambda} - \tilde{u}_{n\nu}\tilde{u}_{m\lambda})] - \\ & - u_{i\nu}[u_{m\alpha}(\tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{l\lambda} - \tilde{u}_{l\mu}\tilde{u}_{n\lambda}) - u_{n\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{l\lambda} - \tilde{u}_{l\mu}\tilde{u}_{m\lambda}) + \\ & + u_{l\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\lambda} - \tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{m\lambda})] + \\ & + u_{i\lambda}[u_{m\alpha}(\tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{l\nu} - \tilde{u}_{l\mu}\tilde{u}_{n\nu}) - u_{n\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{l\nu} - \tilde{u}_{l\mu}\tilde{u}_{m\nu}) + \\ & + u_{l\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu} - \tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{m\nu})]\}, \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} & \tilde{u}_{m\lambda} \\ \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} & \tilde{u}_{n\lambda} \\ \tilde{u}_{l\mu} & \tilde{u}_{l\nu} & \tilde{u}_{l\lambda} \end{vmatrix} \tag{5.1.4}$$

— важное понятие в теории БСКО ранга (4,4), определенное для двух троек элементов. По аналогии с (2.2.4) будем его называть *фундаментальным* 3×3*-отношением БСКО ранга (4,4).*

3. Аналогично теории БСКО(3,3) сосредоточим внимание на рассмотрении пар *сопряженных элементов*, т.е. таких элементов из разных множеств, параметры которых комплексно сопряжены. Для базисных элементов это означает

$$m^s = \mu^{*s}; \quad n^s = \nu^{*s}; \quad l^s = \lambda^{*s}. \tag{5.1.5}$$

Для такого базиса парные отношения связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}^*_{m\mu}; \quad \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}^*_{n\nu}; \quad \tilde{u}_{l\lambda} = \tilde{u}^*_{l\lambda}; \\ &\tilde{u}_{m\nu} = \tilde{u}^*_{n\mu}; \quad \tilde{u}_{m\lambda} = \tilde{u}^*_{l\mu}; \quad \tilde{u}_{n\lambda} = \tilde{u}^*_{l\nu}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

В самом общем случае матрица парных отношений для двух троек сопряженных элементов может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + u_3 & u_1 - iu_2 & u_4 - iu_5 \\ u_1 + iu_2 & u_0 - u_3 & u_6 - iu_7 \\ u_4 + iu_5 & u_6 + iu_7 & u_8 \end{pmatrix}, \tag{5.1.7}$$

где u_0, u_1, $\cdots$, u_8 — девять вещественных чисел, т.е. выделенная система базисных элементов характеризуется 9 вещественными числами.

4. Выделим еще более частный случай базисных элементов, характеризующихся условиями:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}_{l\lambda} = u_0; \tag{5.1.8}$$

$$\tilde{u}_{m\nu} = \tilde{u}_{m\lambda} = \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}_{n\lambda} = \tilde{u}_{l\mu} = \tilde{u}_{l\nu} = 0, \tag{5.1.9}$$

где u_0 — некоторое вещественное положительное число. Подставляя эти условия в (5.1.3), находим, что парное отношение $u_{i\alpha}$ в этом базисе записывается в виде

$$\begin{aligned} u_{i\alpha} &= \frac{1}{\Delta}\left[u_{i\mu}u_{m\alpha}(\tilde{u}_{n\nu}\tilde{u}_{l\lambda}) + u_{i\nu}u_{n\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{l\lambda}) + u_{i\lambda}u_{l\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu})\right] = \\ &= i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3, \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

где параметры небазисных элементов непосредственно записываются через их отношения к базисным элементам:

$$\begin{aligned} &i^1 = \pm\tfrac{u_{i\mu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^2 = \pm\tfrac{u_{i\nu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^3 = \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{u_0}}; \\ &\alpha^1 = \pm\tfrac{u_{m\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^2 = \pm\tfrac{u_{n\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^3 = \pm\tfrac{u_{l\alpha}}{\sqrt{u_0}}. \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Назовем базис из трех элементов, удовлетворяющий условиям (5.1.8), (5.1.9), *собственным* данной БСКО ранга (4,4) и, обратно, назовем БСКО ранга (4,4), в которой для двух троек сопряженных элементов выполняются условия (5.1.8) и (5.1.9), *собственной* данного набора элементов.

5. В теории БСКО ранга (4,4), а также при ее физической интерпретации важное место занимает вопрос о получении из нее УСВО. В этом случае имеется больше возможностей, нежели в теории БСКО ранга (3,3), причем возникают принципиально новые геометрии.

Прежде всего укажем простейший переход к многомерной *римановой геометрии*. Он осуществляется сшивкой пар разноименных элементов из двух множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ бинарной системы в один элемент унарной геометрии точно так же, как в разделе 2.2 (см. рис. 1.5), однако размерность получаемой унарной геометрии будет больше. Действительно, возьмем условия сшивки элементов в форме (5.1.5)

$$i^s = \alpha^{*s}; \quad k^s = \beta^{*s}; \quad j^s = \gamma^{*s}; \cdots, \tag{5.1.12}$$

где $s = 1, 2, 3$. Зададим унарные вещественные *парные* отношения между элементами i и k в виде

$$a_{ik} = \frac{1}{2}\left(u_{i\beta} + u_{k\alpha}\right) = a_{ki}, \tag{5.1.13}$$

тогда внутренние отношения естественно определить в форме

$$a_{ii} = u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3; \quad a_{kk} = u_{k\beta} = k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + k^3\beta^3. \tag{5.1.14}$$

Перейдем от комплексных параметров элементов к вещественным числам

$$\begin{array}{lll} i^1 = x_i^1 + ix_i^2; & k^1 = x_k^1 + ix_k^2; & \cdots \\ i^2 = x_i^3 + ix_i^4; & k^2 = x_k^3 + ix_k^4; & \cdots \\ i^3 = x_i^5 + ix_i^6; & k^3 = x_k^5 + ix_k^6; & \cdots, \end{array} \tag{5.1.15}$$

тогда перекрестные и внутренние отношения (5.1.13) и (5.1.14) принимают вид

$$a_{ik} = \sum_{l=1}^{6} x_i^l x_k^l; \tag{5.1.16}$$

$$a_{ii} = \sum_{l=1}^{6} (x_i^l)^2; \quad a_{kk} = \sum_{l=1}^{6} (x_k^l)^2. \tag{5.1.17}$$

Выражение (5.1.16) можно понимать как скалярное произведение двух вещественных векторов с длинами (5.1.17) в *6-мерном евклидовом пространстве*. Этот факт можно отобра-

зить в виде равенства нулю определителя Грама для семи произвольных векторов (элементов унарной геометрии)

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} & \cdots \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.1.18)$$

На параметры элементов наложим условия типа (2.2.19):

$$a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1 \to \sum_{l=1}^{6} (x_i^l)^2 = \sum_{l=1}^{6} (x_k^l)^2 = \cdots = 1. \qquad (5.1.19)$$

В итоге получаем 5-мерную риманову геометрию (5-мерное пространство постоянной положительной кривизны), т.е. гиперсферу в 6-мерном евклидовом пространстве.

Отметим, что изменения знаков в условиях сшивки (5.1.12) (другие знаки) приводят к геометриям на гиперповерхностях в пространствах с сигнатурами $(+++++--)$ и $(++-----)$.

6. Особый интерес представляет переход от БСКО к унарным геометриям, когда отношения в новом множестве задаются через фундаментальные отношения аналогично тому, как это делалось в главе 2. Однако в случае БСКО ранга (4,4) подобное обобщение имеет принципиально иной характер: *теперь вещественное отношение должно задаваться не для двух, а для трех пар разноименных элементов.* Прежнее парное отношение (2.2.20) обобщается на тройное отношение

$$a_{ikj} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \qquad (5.1.20)$$

При этом для элементов, входящих в пары, по-прежнему задаются условия сшивки (5.1.12). Эта глава посвящена обсуждению, именно такого перехода к унарной геометрии.

Другие способы перехода к унарным геометриям, соответствующим обобщенным импульсным пространствам, рассмотрены в следующей главе.

5.2 Преобразования в рамках одной обобщенной системы отношений

1. Введем в каждое из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ линейные преобразования параметров элементов. Для того чтобы сохранялись

условия сшивки параметров (5.1.15), следует ограничиться случаем, когда линейные преобразования в двух множествах описываются комплексно сопряженными коэффициентами, т.е.

$$i'^s = C^s_r i^r; \quad \alpha'^s = C^{*s}_r \alpha^r. \tag{5.2.1}$$

Эти преобразования в самом общем случае характеризуются 9 комплексными коэффициентами (или 18 вещественными числами).

2. Выделим частный случай преобразований (5.2.1), оставляющих инвариантными парные отношения

$$u'_{i\alpha} = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2 + i'^3\alpha'^3 = u_{i\alpha}, \tag{5.2.2}$$

т.е. не выводящих за пределы одной системы отношений ранга (4,4). Это требование налагает следующие условия на коэффициенты преобразований (5.2.1):

$$\begin{aligned} &C^1_1 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^3_1 C^{*3}_1 = 1; \\ &C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_2 C^{*2}_2 + C^3_2 C^{*3}_2 = 1; \\ &C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3 + C^3_3 C^{*3}_3 = 1; \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned} &C^1_1 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_2 + C^3_1 C^{*3}_2 = 0; \\ &C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3 + C^3_1 C^{*3}_3 = 0; \\ &C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3 + C^3_2 C^{*3}_3 = 0. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Очевидно, что соотношения (5.2.3) вещественны, а (5.2.4) комплексны, т.е. они налагают 9 условий на 18 вещественных чисел. Итого, имеем 9 независимых вещественных параметров, характеризующих введенные преобразования.

Напомним, что группа комплексных линейных преобразований (5.2.1), оставляющих инвариантной билинейную форму вида (5.2.2), называется *унитарной группой* $U(3)$. Эти преобразования соответствуют унитарным преобразованиям $U(2)$ в теории БСКО ранга (3,3), а условия (5.2.3),(5.2.4) соответствуют условиям (2.3.5).

Аналогично тому, как это делалось в разделе 2.3, можно показать, что *группа* $U(3)$ *описывает переходы между различными собственными базисами одной и той же БСКО ранга* (4,4).

3. Имеется важное свойство преобразований из группы $U(3)$: коэффициенты любого столбца матрицы (C^s_r) можно выразить через комплексно сопряженные элементы других столбцов и определитель этой матрицы. Докажем это. Начнем с коэффициентов

третьего столбца C_3^s. Выделим из (5.2.3) и (5.2.4) следующие три соотношения:

$$\begin{array}{l} C_3^1 C_3^{*1} + C_3^2 C_3^{*2} + C_3^3 C_3^{*3} = 1; \\ C_1^1 C_3^{*1} + C_1^2 C_3^{*2} + C_1^3 C_3^{*3} = 0; \\ C_2^1 C_3^{*1} + C_2^2 C_3^{*2} + C_2^3 C_3^{*3} = 0 \end{array} \tag{5.2.5}$$

и посмотрим на них как на систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно величин C_3^{*s}. Ее решение имеет вид

$$C_3^{*1} = \frac{1}{\Delta_c}(C_1^2 C_2^3 - C_1^3 C_2^2); \quad C_3^{*2} = \frac{1}{\Delta_c}(C_2^1 C_1^3 - C_1^1 C_2^3);$$

$$C_3^{*3} = \frac{1}{\Delta_c}(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1),$$

где Δ_c —детерминант матрицы (C_r^s). Аналогично находятся коэффициенты C_1^{*s} и C_2^{*s}. Собирая все эти выражения, можно записать матричное соотношение

$$\Delta_c^* \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_2^{*2} C_3^{*3} - C_2^{*3} C_3^{*2} & C_1^{*3} C_3^{*2} - C_1^{*2} C_3^{*3} & C_1^{*2} C_2^{*3} - C_1^{*3} C_2^{*2} \\ C_3^{*1} C_2^{*3} - C_2^{*1} C_3^{*3} & C_1^{*1} C_3^{*3} - C_3^{*1} C_1^{*3} & C_2^{*1} C_1^{*3} - C_1^{*1} C_2^{*3} \\ C_2^{*1} C_3^{*2} - C_2^{*2} C_3^{*1} & C_1^{*2} C_3^{*1} - C_1^{*1} C_3^{*2} & C_1^{*1} C_2^{*2} - C_2^{*2} C_2^{*1} \end{pmatrix}. \tag{5.2.6}$$

4. Обратим внимание на то, что условия (5.1.8), (5.1.9) на отношения между элементами собственного базиса записываются через параметры этих элементов (в неком другом базисе) в виде

$$\begin{array}{l} m_c^1 m_c^{*1} + m_c^2 m_c^{*2} + m_c^3 m_c^{*3} = u_0; \\ n_c^1 n_c^{*1} + n_c^2 n_c^{*2} + n_c^3 n_c^{*3} = u_0; \\ l_c^1 l_c^{*1} + l_c^2 l_c^{*2} + l_c^3 l_c^{*3} = u_0; \end{array} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{array}{l} m_c^1 n_c^{*1} + m_c^2 n_c^{*2} + m_c^3 n_c^{*3} = 0; \\ m_c^1 l_c^{*1} + m_c^2 l_c^{*2} + m_c^3 l_c^{*3} = 0; \\ n_c^1 l_c^{*1} + n_c^2 l_c^{*2} + n_c^3 l_c^{*3} = 0, \end{array} \tag{5.2.8}$$

аналогичном условиям (5.2.3),(5.2.4). Здесь при параметрах поставлены индексы “c”, означающие, что параметры взяты в собственной системе отношений.

Рассуждения, аналогичные произведенным выше, позволяют выразить одни параметры через другие посредством формул, сходных с (5.2.6):

$$\begin{pmatrix} m_c^1 & n_c^1 & l_c^1 \\ m_c^2 & n_c^2 & l_c^2 \\ m_c^3 & n_c^3 & l_c^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{u_0}{\Delta^*} \begin{pmatrix} n_c^{*2} l_c^{*3} - n_c^{*3} l_c^{*2} & l_c^{*2} m_c^{*3} - l_c^{*3} m_c^{*2} & m_c^{*2} n_c^{*3} - m_c^{*3} n_c^{*2} \\ n_c^{*3} l_c^{*1} - n_c^{*1} l_c^{*3} & l_c^{*3} m_c^{*1} - l_c^{*1} m_c^{*3} & m_c^{*3} n_c^{*1} - m_c^{*1} n_c^{*3} \\ n_c^{*1} l_c^{*2} - n_c^{*2} l_c^{*1} & l_c^{*1} m_c^{*2} - l_c^{*2} m_c^{*1} & m_c^{*1} n_c^{*2} - m_c^{*2} n_c^{*1} \end{pmatrix}, \tag{5.2.9}$$

где

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} m_c^{*1} & m_c^{*2} & m_c^{*3} \\ n_c^{*1} & n_c^{*2} & n_c^{*3} \\ l_c^{*1} & l_c^{*2} & l_c^{*3} \end{vmatrix}. \tag{5.2.10}$$

5. Пусть задано значение детерминанта Δ^*. Возникает вопрос: какие параметры можно выбрать в качестве независимых? Анализ системы соотношений (5.2.7), (5.2.8) показывает, что в качестве таковых можно выбрать 5 комплексных параметров, например: m_c^1, m_c^2, m_c^3, n_c^1, n_c^2, — на которые наложены 2 вещественных условия из (5.2.7):

$$\begin{gathered} m_c^1 m_c^{*1} + m_c^2 m_c^{*2} + m_c^3 m_c^{*3} = u_0; \\ n_c^1 n_c^{*1} + n_c^2 n_c^{*2} + n_c^3 n_c^{*3} = u_0, \end{gathered} \tag{5.2.11}$$

где параметр n_c^3 выражается через названные пять параметров следующим образом

$$n_c^3 = -\frac{1}{m_c^{*3}} (n_c^1 m_c^{*1} + n_c^2 m_c^{*2}). \tag{5.2.12}$$

5.3 Трехкомпонентные спиноры

Аналогично тому, как в теории БСКО ранга (3,3) были введены 2- компонентные спиноры, в рамках БСКО ранга (4,4) можно придти к понятию 3-компонентных спиноров. Напомним, что в литературе принято говорить о спинорах с числом компонент 2^n, где n — целое число. Именно такие спиноры получаются, если их вводить на основе алгебр Клиффорда $C(p,q)$ над полем

вещественных чисел (см. Приложение А.2). Здесь же предлагается другой канал обобщения понятия 2-компонентных спиноров, допускающий 3 и иное число компонент [16, 60].

1. *Фундаментальное* 3×3-*отношение* в теории БСКО ранга (4,4) играет такую же роль, как фундаментальное 2×2-отношение (2.4.1) в теории БСКО ранга (3,3). Оно представляется в виде

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}, \tag{5.3.1}$$

т.е. аналогично (2.4.1) записывается через произведение двух определителей отдельно из параметров элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Это позволяет ввести понятие своеобразных метрик в каждом из множеств. Так, в множестве $\mathcal{M}$ трем элементам i, k, j сопоставляется тройное отношение

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} =$$

$$= i^1k^2j^3 + i^3k^1j^2 + i^2k^3j^3 - i^3k^2j^1 - i^2k^1j^3 - i^1k^3j^2. \tag{5.3.2}$$

2. Рассмотрим такие линейные преобразования (5.2.1), которые сохраняют инвариантными фундаментальные 3x3-отношения (5.3.1). Это означает, что в каждом из множеств должно оставаться инвариантным тройное отношение типа (5.3.2). Легко убедиться, что при преобразованиях (5.2.1)

$$b'_{(ikj)} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{vmatrix} b_{(ikj)}, \tag{5.3.3}$$

т.е. для инвариантности $b_{(ikj)}$ на коэффициенты C_r^s следует наложить условие

$$C_1^1C_2^2C_3^3 + C_1^3C_2^1C_3^2 + C_1^2C_2^3C_3^1 - C_1^3C_2^2C_3^1 - C_1^1C_2^3C_3^2 - C_1^2C_2^1C_3^3 = 1, \tag{5.3.4}$$

обобщающее (2.4.4) в теории БСКО ранга (3,3). Это два условия на 18 вещественных параметров. Линейные преобразования (5.2.1) с условием (5.3.4) составляют *унимодулярную* (16-параметрическую) *группу* $SL(3,C)$. Эта группа преобразований играет в теории БСКО ранга (4,4) ту же роль, что группа $SL(3,C)$ в теории БСКО ранга (3,3).

3. Определим *3-компонентные спиноры* как элементы 3-мерного комплексного векторного пространства, в котором определена антисимметричная кубичная метрика. Это означает, что для любых трех элементов $\vec{i} = (i^1, i^2, i^3)$, $\vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$ и $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$ определена кубичная форма

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = g_{srl} i^s k^r j^l = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}, \tag{5.3.5}$$

где индексы пробегают значения: 1, 2, 3; $g_{srl} = \varepsilon_{srl}$ — метрический спин-тензор, совпадающий с 3-индексным символом Леви-Чивиты. Эта формула соответствует (2.5.3) в теории 2-компонентных спиноров.

Аналогично определяются сопряженные 3-компонентные спиноры. В тех случаях, когда возможны недоразумения, индексы сопряженных спиноров будем помечать точкой сверху.

Напомним, что в теории 2-компонентных спиноров метрический спин-тензор обладал двумя индексами. Это позволяло однозначно определять соответствие ко- и контравариантных спиноров. В данном же случае метрический спин-тензор имеет три индекса, поэтому с его помощью можно сопоставлять 2-индексным комбинациям 1-индексную и обратно:

$$l_{sr} = \varepsilon_{srl} l^l; \quad (lt)_s = \varepsilon_{srl} l^r t^l. \tag{5.3.6}$$

Примером величин с ковариантными индексами являются миноры в матрице (4.3.2):

$$\begin{aligned} &(kj)_1 = \begin{vmatrix} k^2 & j^2 \\ k^3 & j^3 \end{vmatrix} \equiv l_1; \quad (kj)_2 = \begin{vmatrix} k^3 & j^3 \\ k^1 & j^1 \end{vmatrix} \equiv l_2; \\ &(kj)_3 = \begin{vmatrix} k^1 & j^1 \\ k^2 & j^2 \end{vmatrix} \equiv l_3, \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

так что (4.2.7) можно переписать в виде

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = i^s (kj)_s \equiv i^s l_s. \tag{5.3.8}$$

4. Рассмотрим как преобразуются ковариантные спиноры при преобразованиях из группы $SL(3, C)$. Произведя преобразования (5.2.1), например, в формулах (5.3.7) легко найти, что

$$\begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1_1 & Q^2_1 & Q^3_1 \\ Q^1_2 & Q^2_2 & Q^3_2 \\ Q^1_3 & Q^2_3 & Q^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \tag{5.3.9}$$

где элементы матрицы (Q_s^k) (в соответствии с тем, как она записана в (5.3.9)) имеют вид

$$(Q_s^k) = \begin{pmatrix} C_2^2C_3^3 - C_2^3C_3^2 & C_1^3C_3^2 - C_1^2C_3^3 & C_1^2C_2^3 - C_1^3C_2^2 \\ C_3^1C_2^3 - C_2^1C_3^3 & C_1^1C_3^3 - C_3^1C_1^3 & C_2^1C_1^3 - C_1^1C_2^3 \\ C_2^1C_3^2 - C_2^2C_3^1 & C_1^2C_3^1 - C_1^1C_3^2 & C_1^1C_2^2 - C_1^2C_2^1 \end{pmatrix}. \tag{5.3.10}$$

В самом общем случае преобразований (5.2.1) матрица (Q_s^k) с точностью до коэффициента является матрицей, обратной $(C_s^k)^\top$, (индекс $\top$ означает транспонирование)

$$(C_s^k)^\top \cdot (Q_r^l) = \Delta_c \cdot I_3, \tag{5.3.11}$$

где Δ_c— определитель матрицы (C_s^k). Для группы преобразований $SL(3, C)$, согласно (5.3.4), матрица (Q) является обратной к матрице $(C)^\top$.

5. Аналогично изложенному в разделе 2.5 (см. (2.5.11)) можно определить *обобщенные спинтензоры* как величины, преобразующиеся согласно (2.5.12). Очевидно также обобщение на смешанные спинтензоры (с ковариантными и контравариантными индексами). Легко также ввести соответствующие инварианты из спинтензорных величин.

6. Преобразования (5.2.1) с коэффициентами, одновременно удовлетворяющими условиям (5.2.3) – (5.2.4) и (5.3.4), образуют группу *унитарных унимодулярных преобразований* $SU(3)$, характеризуемую 8 независимыми вещественными параметрами. (Заметим, что условие (5.3.4) при выполнении (5.2.3) – (5.2.4) означает только одно дополнительное условие).

Для группы преобразований $SU(3)$ формулы (5.2.6) означают

$$(C_r^s) = (Q_r^{*s}), \tag{5.3.12}$$

где (Q_r^s) — матрица преобразований ковариантных спиноров, определенная в (5.3.10). Здесь учтено, что $\Delta_c^* = 1$ согласно (5.3.4). Таким образом, при $SU(3)$ преобразованиях ковариантные компоненты 3-спинора преобразуются как компоненты сопряженного контравариантного 3-спинора.

Аналогично тому, как это было сделано в главе 2, можно ввести совокупность преобразований (обобщенные бусты), дополняющих преобразования $SU(3)$ до полной группы $SL(3, C)$. Более подробно это будет рассмотрено в главе 7.

5.4 Девятимерные векторы

1. Обсудим смешанные спинтензоры $B^{s\dot{r}}$, которые можно определить аналогично (2.6.2) для одной, двух или трех пар сшитых элементов. При выполнении условий сшивки (5.1.5) матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} & B^{1\dot{3}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{3}} \\ B^{3\dot{1}} & B^{3\dot{2}} & B^{3\dot{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0+B^3 & B^1-iB^2 & B^4-iB^5 \\ B^1+iB^2 & B^0-B^3 & B^6-iB^7 \\ B^4+iB^5 & B^6+iB^7 & B^8 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv B^0\lambda_0 + \sum_{l=1}^{8} B^l\lambda_l, \tag{5.4.1}$$

где B^0, B^1, $\cdots$, B^8 — девять вещественных чисел,

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.2}$$

а λ_l — восемь эрмитовых *матриц Гелл-Манна*, играющих в теории 3-компонентных спиноров такую же роль, что и матрицы Паули σ_l в теории 2-компонентных спиноров. Запишем матрицы Гелл-Манна в следующем представлении [1]

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5.4.3}$$

[1] Это представление отличается от обычно используемого видом матрицы λ_8.

Нетрудно записать ряд соотношений между матрицами λ_l, в некотором смысле аналогичные (2.5.16), однако теперь эти матрицы не являются образующими алгебры Клиффорда.

2. Из формулы (5.4.1) нетрудно выразить вещественные числа B^0 и B^l через компоненты спинтензора $B^{s\dot{r}}$. Выпишем их через параметры элементов сначала для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено парой сшитых элементов i и α

$$B^{s\dot{r}}_{(1)} = i^s \alpha^{\dot{r}}. \tag{5.4.4}$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned}
&B^0_{(1)} \equiv k^0 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2);\\
&B^1_{(1)} \equiv k^1 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1);\\
&B^2_{(1)} \equiv k^2 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}) = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1);\\
&B^3_{(1)} \equiv k^3 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2);\\
&B^4_{(1)} \equiv k^4 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{3}} + B^{3\dot{1}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1);\\
&B^5_{(1)} \equiv k^5 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{3}} - B^{3\dot{1}}) = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1);\\
&B^6_{(1)} \equiv k^6 = \tfrac{1}{2}(B^{2\dot{3}} + B^{3\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2);\\
&B^7_{(1)} \equiv k^7 = \tfrac{i}{2}(B^{2\dot{3}} - B^{3\dot{2}}) = \tfrac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2);\\
&B^8_{(1)} \equiv k^8 = B^{3\dot{3}} = i^3\alpha^3.
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Легко видеть, что первые 4 компоненты совпадают с компонентами 4-вектора k^μ, определенного в (2.6.1).

3. Аналогичным образом записываются компоненты 9-мерных векторов, задаваемых двумя парами сопряженных элементов:

$$B^{s\dot{r}}_{(+)} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}}; \quad B^{s\dot{r}}_{(-)} = i^s\alpha^{\dot{r}} - k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{5.4.6}$$

В этом случае по формулам, аналогичным (5.4.5), можно определить два вида 9-мерных векторов:

$$B^A_{(+)} \equiv p^A; \quad B^A_{(-)} \equiv s^A \tag{5.4.7}$$

соответственно из компонент спинтензоров $B^{s\dot{r}}_{(+)}$ и $B^{s\dot{r}}_{(-)}$. Очевидно, что первые четверки компонент совпадают с величинами, определенными в (2.6.6) и в (2.6.11). Здесь для них сохранены те же самые обозначения.

4. Наконец, выпишем компоненты B^A для случая трех сшитых пар элементов, когда

$$B^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}} + j^s\gamma^{\dot{r}}. \tag{5.4.8}$$

В этом случае, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
B^0_{(3)} &\equiv P^0 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2);\\
B^1_{(3)} &\equiv P^1 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1);\\
B^2_{(3)} &\equiv P^2 = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1);\\
B^3_{(3)} &\equiv P^3 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2);\\
B^4_{(3)} &\equiv P^4 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 + k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 + j^3\gamma^1);\\
B^5_{(3)} &\equiv P^5 = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 - k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 - j^3\gamma^1);\\
B^6_{(3)} &\equiv P^6 = \tfrac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 + k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 + j^3\gamma^2);\\
B^7_{(3)} &\equiv P^7 = \tfrac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 - k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 - j^3\gamma^2);\\
B^8_{(3)} &\equiv P^8 = i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3.
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

В принципе, можно определить величины B^A с разными знаками вкладов сопряженных пар, составляющих $B^{s\dot{r}}$.

5. Зная формулы преобразований параметров (5.2.1), легко найти векторный закон преобразований компонент B^A относительно грруппы $SL(3,C)$ в 9-мерном многообразии

$$B'^A = L^A_{.B}B^B, \tag{5.4.10}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^A_{.B}$ выражаются через квадратичные комбинации из коэффициентов C^r_s и C^{*r}_s аналогично (2.7.2). Формулы для 81 компоненты $L^A_{.B}$ довольно громоздки, они выписаны в Приложении 3.

Поскольку компоненты B^0 во всех формулах (5.4.5), (5.4.7) и (5.4.9) выражаются через парные отношения $u_{i\alpha}$, а они при преобразованиях из группы $SU(3)$ не изменяются, то при унитарных унимодулярных преобразованиях имеем

$$L^0_{.0} = 1; \quad L^0_{.l} = 0; \quad L^l_{.0} = 0. \tag{5.4.11}$$

Следовательно, такие 8-параметрические преобразования затрагивают лишь 8 компонент векторов. Они соответствуют 3- параметрическим пространственно-подобным поворотам в теории БСКО ранга (3,3).

5.5 Обобщение метрики Минковского

1. Введем спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}}B^{s\dot{r}}B^{l\dot{p}}B^{m\dot{n}} = \begin{vmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} & B^{1\dot{3}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{3}} \\ B^{3\dot{1}} & B^{3\dot{2}} & B^{3\dot{3}} \end{vmatrix}, \tag{5.5.1}$$

непосредственно обобщающий инвариант (2.6.4) в теории 2-компонентных спиноров. Подставляя сюда компоненты 9- мерного вектора B^A из (5.4.1), находим

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}}B^{s\dot{r}}B^{l\dot{p}}B^{m\dot{n}} = B^8\left((B^0)^2 - (B^1)^2 - (B^2)^2 - (B^3)^2\right) +$$

$$+2B^1\left(B^4B^6 + B^5B^7\right) - B^0\left((B^4)^2 + (B^5)^2 + (B^6)^2 + (B^7)^2\right) +$$

$$+2B^2\left(B^5B^6 - B^4B^7\right) + B^3\left((B^4)^2 + (B^5)^2 - (B^6)^2 - (B^7)^2\right) \equiv$$

$$\equiv G_{ABC}B^AB^BB^C. \tag{5.5.2}$$

Это кубичное по компонентам вектора выражение заменяет 4-мерную релятивистски инвариантную квадратичную форму (2.6.4). Это чрезвычайно важное обстоятельство в теории БСКО ранга (4,4). В такой теории происходит не просто увеличение размерности с четырех до девяти, но и изменение характера мероопределения. Напомним, что в известных работах по многомерным теориям Калуцы-Клейна обычно используется постулат квадратичного (риманова) мероопределения.

2. Следует особо подчеркнуть, что для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено через три пары сопряженных элементов, инвариант

(5.5.2) совпадает с фундаментальным 3x3-отношением для этих элементов, т.е.

$$G_{ABC}B^A_{(3)}B^B_{(3)}B^C_{(3)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \qquad (5.5.3)$$

Для трех пар элементов этот инвариант в общем случае отличен от нуля.

Когда $B^{s\dot{r}}$ определено на двух парах сопряженных элементов согласно (5.4.6), инвариант (5.5.2) тождественно обращается в нуль:

$$G_{ABC}B^A_{(2)}B^B_{(2)}B^C_{(2)} = 0, \qquad (5.5.4)$$

где под $B^A_{(2)}$ следует понимать векторы p^A или s^A из (5.4.7). На этом основании векторы p^A и s^A можно назвать *изотропными* в теории БСКО ранга (4,4). Они аналогичны общепринятому изотропному вектору $k^\mu(i\alpha)$, определенному в 4-мерной теории согласно (2.6.1).

Для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено на одной паре сопряженных элементов согласно (5.4.4), опять получаем равный нулю инвариант, однако теперь инвариант

$$G_{ABC}B^A_{(1)}B^B_{(1)}B^C_{(1)} \equiv 0 \qquad (5.5.5)$$

распадается на сумму двух величин, в отдельности равных нулю, т.к.

$$k^8\left((k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2\right) = k^8 g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0. \qquad (5.5.6)$$

По этой причине 9-мерный вектор, построенный на одной паре сопряженных элементов, можно назвать *дважды изотропным.*

3. Величины G_{ABC} в (5.5.2) и в последующих формулах естественно назвать *трехкомпонентным метрическим тензором.* При определении кубичного инварианта он обобщает известный 2-компонентный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ 4-мерного пространства Минковского (в декартовых координатах)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (5.5.7)$$

Метрика G_{ABC} имеет 729 компонент. Отличными от нуля являются только 60, из них 27 имеют знак плюс и 33 — знак

минус. Выпишем их в виде 9 квадратных матриц, представляющих собой 9 последовательных сечений 9x9x9-куба из компонент G_{ABC}:

$$G_{AB8} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$G_{AB7} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$G_{AB6} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$G_{AB5} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$G_{AB4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB0} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad (5.5.8)$$

5.6 Обобщенная теорема косинусов

1. Аналогично тому, как в разделе 2.8 был осуществлен переход от БСКО ранга (3,3) к унарной вещественной 4-мерной геометрии Минковского, обсудим переход от БСКО ранга (4,4) к

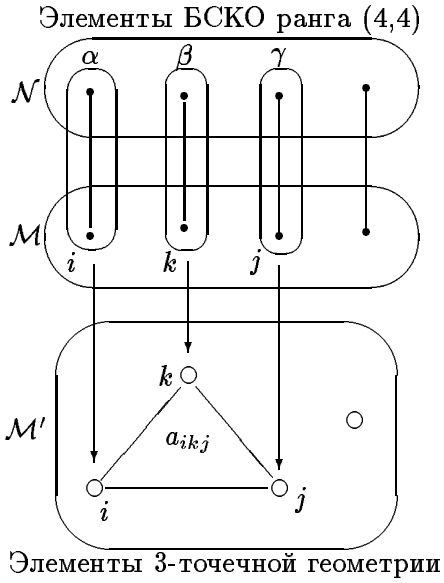


Рис. 5.1: Переход от БСКО ранга (4,4) к унарной трехточечной геометрии

своеобразной (унарной) геометрии, которую естественно назвать *трехточечной*. В ней, в отличие от общепринятых двухточечных геометрий, метрика задается для трех точек. Под “точками”

теперь будем понимать новые элементы, образованные сшивкой пар сопряженных элементов из двух множеств БСКО ранга (4,4). Пусть сшивка по-арежнему определена процедурой комплексного сопряжения параметров элементов (5.1.5). Сопоставим элементы БСКО ранга (4,4) с элементами унарной системы вещественных отношений, как показано на рисунке 5.1. Условимся обозначать элементы унарной геометрии латинскими индексами соответствующих элементов множества $\mathcal{M}$ БСКО ранга (4,4).

Вместо квадрата парных отношений, например, s^2_{ik} в (2.6.10) в пространстве Минковского, определим куб тройных отношений между тремя "точками" i, j, k через фундаментальное 3x3-отношение:

$$a^3_{(ikj)} = \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} = a^3_{(ikj)} = a^3_{(kij)} = a^3_{(kji)}. \tag{5.6.1}$$

2. Определим понятие *скалярного произведения трех 9-мерных векторов*, построенных на трех разных шестерках сопряженных элементов БСКО ранга (4,4), через введенные ранее инварианты:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(mnl), \vec{B}(rst)\right) \equiv \\ &\equiv G_{ABC} B^A_{(3)}(ikj) B^B_{(3)}(mnl) B^C_{(3)}(rst) \equiv \\ &\equiv \tfrac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}} B^{s\dot{r}}(ikj) B^{l\dot{p}}(mnl) B^{m\dot{n}}(rst). \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

В общем случае элементы из разных шестерок могут пересекаться.

Аналогично 4-мерной формуле (3.1.4) для скалярного произведения двух векторов, скалярное произведение трех векторов (5.6.2) можно переписать через отдельные инварианта вида (5.6.1), определенные для всех возможных троек "точек" из элементов, входящих в (5.6.2):

$$\begin{aligned} 6\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(mnl), \vec{B}(rst)\right) &= \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu\nu\lambda \\ mnl \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \rho\sigma\tau \\ rst \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \alpha\mu\rho \\ imr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\mu\sigma \\ ims \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \alpha\mu\tau \\ imt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\nu\rho \\ inr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\nu\sigma \\ ins \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \alpha\nu\tau \\ int \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\lambda\rho \\ ilr \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \alpha\lambda\sigma \\ ils \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\lambda\tau \\ ilt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\mu\rho \\ kmr \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \beta\mu\sigma \\ kms \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\mu\tau \\ kmt \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \beta\nu\rho \\ knr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\nu\sigma \\ kns \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\nu\tau \\ knt \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+\begin{bmatrix}\beta\lambda\rho\\ klr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\sigma\\ kls\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\lambda\tau\\ klt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\rho\\ jmr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\sigma\\ jms\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\gamma\mu\tau\\ jmt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\rho\\ jnr\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma\nu\sigma\\ jns\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\tau\\ jnt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\rho\\ jlr\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\sigma\\ jls\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\tau\\ jlt\end{bmatrix}. \qquad (5.6.3)$$

Легко видеть, что в случае $m = r = i$, $n = s = k$, $l = t = j$ эта формула переходит в (5.6.1), т.е.

$$\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(ikj), \vec{B}(ikj)\right) = \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ikj\end{bmatrix} = a^3_{(ikj)} \equiv B^3(ikj). \qquad (5.6.4)$$

3. Как можно было видеть из раздела 2.8, для вывода закона прообраза пространства Минковского ключевую роль играла теорема косинусов (2.8.2) (см. также (2.8.4)). Исходя из формулы (5.6.3) установим аналог теоремы косинусов в трехточечной геометрии. Для этого возьмем четыре пары сшитых элементов (i, α), (k, β), (j, γ) и (l, λ) (см. рис.5.2). Пусть точка i выделена. С

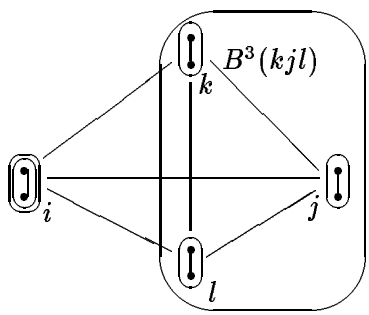


Рис. 5.2: Теорема косинусов в трехточечной геометрии устанавливается для четырех пар элементов

участием этой точки можно образовать три треугольника: (ikj), (ijl) и (ikl). Определим для этих треугольников три 9-мерных вектора и запишем согласно (5.6.3) их скалярное произведение. Учитывая, что отдельные инварианты справа в (5.6.3) обращаются в нуль, как только две пары элементов совпадают, будем иметь

$$\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(ijl), \vec{B}(ilk)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\alpha\gamma\beta\\ ijk\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\gamma\lambda\\ ijl\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix}\right)+$$

$$+ \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\beta\gamma\lambda\\ kjl\end{bmatrix}. \tag{5.6.5}$$

Это выражение можно переписать в другом виде

$$\begin{aligned} B^3(kjl) &= -\frac{3}{2}\left(B^3(ijk)+B^3(ijl)+B^3(ikl)\right)+\\ &+ \ 3\left(\vec{B}(ikj),\vec{B}(ijl),\vec{B}(ilk)\right), \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

обобщающем формулы (2.8.2) или (2.8.4) для теоремы косинусов в 4-мерной геометрии с парными отношениями.

Отметим, что 9-мерные векторы $B^{\mu}_{(3)}$ можно определить с другими знаками вкладов от составляющих его пар элементов, нежели $(+\ +\ +)$ в (4.4.9). При знаках $(+\ -\ -)$, $(-\ +\ +)$ и т.д. получаются другие виды трехточечных обобщений теоремы косинусов. Эта ситуация аналогична появлению разновидностей теоремы косинусов (2.8.2) и (2.8.4) в теории БСКО ранга (3,3).

5.7 Кубичные детерминанты

1. Опираясь на установленную обобщенную теорему косинусов, построим *кубичную ("пространственную") матрицу* с элементами M_{jkl}. Пусть ее элементы характеризуются соответствующими тремя точками j, k, l при одной общей для всех элементов точке i. Пусть далее точка i сохраняет свой индивидуальный характер, а точки j, k, l имеют собирательный смысл, т.е. пробегают значения: 1, 2, $\cdots$, n, где n *порядок* кубичной матрицы. Таким образом, элементы матрицы пусть задаются в согласии с (5.6.5)

$$M_{jkl} = \left(\vec{B}(ikj),\vec{B}(ijl),\vec{B}(ilk)\right). \tag{5.7.1}$$

2. Из кубичной матрицы (M_{jkl}) построим *кубичный детерминант.* Поскольку теория кубичных (пространственных) детерминантов известна недостаточно широко, приведем из нее самые необходимые сведения [57, 58]. Из элементов кубичной матрицы (M_{jkl}) можно построить четыре вида детерминантов:

$$\left|M_{\substack{+\\ j}\,\substack{\pm\\ k}\,\substack{\pm\\ l}}\right|, \left|M_{\substack{\pm\\ j}\,\substack{+\\ k}\,\substack{\pm\\ l}}\right|, \left|M_{\substack{\pm\\ j}\,\substack{\pm\\ k}\,\substack{+\\ l}}\right|, \left|M_{\substack{+\\ j}\,\substack{+\\ k}\,\substack{+\\ l}}\right|, \tag{5.7.2}$$

где использованы обозначения через так называемые *символы Райса.* Три значка над индексами определяют *сигнатуру детерминанта.* Это непривычное понятие для большинства имеющих

дело лишь с квадратичными детерминантами (определителями). Общепринятые квадратичные определители записываются через символы Райса в виде $\left|M_{\substack{\pm\ \pm\\ j\ k}}\right|$. Известно, что слагаемые в определителе характеризуются знаками $+$ или $-$, которые зависят от индексов сомножителей. В квадратичных определителях оба индекса эквивалентны. Однако в кубичных (и вообще в нечетных) детерминантах эквивалентность относительно выбора знака может быть лишь для пар индексов. Третий индекс оказывается выделенным,— он не влияет на выбор знака. В связи с этим индексы делятся на *альтернативные*, влияющие на знак, и *неальтернативные*, не влияющие на выбор знака. Так, первый из детерминантов в (5.7.1) определяется выражением

$$\left|M_{\substack{+\ \pm\ \pm\\ j\ k\ l}}\right| = \sum_j \sum_k \sum_l (-1)^{I_k+I_l} M_{j_1k_1l_1} M_{j_2k_2l_2} \cdots M_{j_nk_nl_n}, \quad (5.7.3)$$

где суммирование производится по всем возможным *трансверсалям*, т.е. по всем $n!$ комбинациям из n элементов матрицы, из которых никакая пара не принадлежит одному и тому же *сечению какой-либо ориентации*. Под сечением ориентации, например j, понимается совокупность из n^2 элементов матрицы с фиксированным индексом j. Очевидно, в кубичных матрицах имеются сечения трех возможных ориентаций. В формуле (5.7.2) индексы k и l альтернативные, тогда как индекс j — неальтернативный. Знак слагаемых детерминанта определяется степенью $(I_k + I_l)$ при -1. Здесь I_k определяет, четной или нечетной перестановкой индексы $k_1, k_2, \cdots, k_n$ могут быть переведены в совокупность чисел: $1, 2, \cdots, n$. Аналогичный смысл имеет величина I_l.

3. Еще раз подчеркнем, что *число альтернативных индексов всегда является четным*, так как тогда и только тогда сохраняется коммутативность умножения слагаемых в определениях детерминантов типа (4.7.2). Число альтернативных индексов определяет *род* p-мерного детерминанта. У p-мерной матрицы при p четном имеется только один детерминант наивысшего рода p, когда все индексы альтернативные. Следуя Кэли такие детерминанты называются *гипердетерминантами*. Так, привычные квадратичные детерминанты являются гипердетерминантами. Детерминанты наинизшего рода 0, когда все индексы неальтернативные, называются *перманентом*. Таковым является последний из детерминантов в (5.7.1). Детерминанты, род которых лежит между 0 и p согласно терминологии Вайдьянатхасвами называются смешанными. В этом разделе ограничимся смешанным детерминантом рода 2 вида (5.7.2), т.е. с сигнатурой $(+\pm\pm)$.

4. Покажем, что для порядков $n = 9$ и выше детерминант

(5.7.2) при выполнении некоторого условия на "точки" тождественно равен нулю. Для доказательства воспользуемся следующим свойством многомерных детерминантов (теоремой): "Если одно из сечений какой-либо ориентаций в многомерном детерминанте есть линейная комбинация его других сечений той же ориентации, то детерминант будет равен нулю, если ориентация — альтернативная, и не будет необходимо равным нулю, если ориентация — неальтернативная" [57, с.30]. Возьмем сечения с альтернативной ориентацией l. Из правой части (5.6.5) видно, что первое слагаемое во всех соответствующих элементах в параллельных сечениях ориентации l одинаково, тогда как последние три различаются. Распишем, например, третье слагаемое. Его можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikl \end{bmatrix} = G_{abc}(k_i^A + k_k^A + k_l^A)(k_i^B + k_k^B + k_l^B)(k_i^C + k_k^C + k_l^C), \quad (5.7.4)$$

где k_i^A, k_k^A, k_l^A — дважды изотропные 9-мерные векторы, образованные соответствующими парами сопряженных элементов. Учитывая, что эти векторы дважды изотропные, с помощью формул для кубичной метрики из раздела 5.5 легко показать, что все комбинации из кубичных и квадратичных векторов одной и той же пары сопряженных элементов тождественно обращаются в нуль, т.е. это слагаемое можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikl \end{bmatrix} = 6G_{ABC}k_i^A k_k^B k_l^C. \quad (5.7.5)$$

Учтем, что векторы k^A являются 9-мерными. Это значит, что при $n = 10$ любой из них (пусть это будет k_l^A) можно представить в виде линейной комбинации из девяти других:

$$k_{l_r}^A = \sum_{s \neq r}^{10} C_s k_{l_s}^A. \quad (5.7.6)$$

Это означает, что выражения из трех последних слагаемых справа в (5.6.5) одного сечения альтернативной ориентации l является линейной комбинацией выражений из других параллельных сечений.

Для того чтобы это утверждение распространялось на все выражение (5.6.5), необходимо, чтобы коэффициенты C_s в разложении (5.7.4) удовлетворяли условию

$$\sum_{s \neq r}^{10} C_s = 1.$$

Это будет выполняться, в частности, в том случае, если все дважды изотропные векторы k_l^A обладают одинаковой компонентой k_l^0:

$$k_{l_1}^0 = k_{l_2}^0 = \cdots = k_{l_{10}}^0.$$

Однако в этом случае можно говорить не о 9-мерных, а о 8-мерных векторах, т.е. во всех предыдущих рассуждениях можно ограничиться случаем порядка $n = 9$. Другими словами, должно выполняться условие

$$\sum_{s \neq r}^{9} C_s = 1 \qquad k_{l_1}^0 = k_{l_2}^0 = \cdots = k_{l_9}^0. \tag{5.7.7}$$

Следовательно, определитель 9-го порядка (5.7.2) при выполнении условия (5.7.5) обращается в нуль и в дальнейших рассуждениях играет роль определителя Грама в разделе 2.8.

5.8 Закон трехточечной геометрии

1. Аналогично разделу 2.8 произведем окаймление кубичного детерминанта (5.7.2), в котором все элементы умножены на 3. Будем опираться на теорему из теории пространственных матриц, аналогичную случаю квадратичных матриц: "Любой из детерминантов кубической матрицы равен сумме произведений всех элементов какого-нибудь его сечения на их алгебраические дополнения" [57, с.41]. Это означает, что от нулевого детерминанта (5.7.2) 9-го порядка можно перейти к нулевому детерминанту 10-го порядка, добавив к (5.7.2) сечение, например, ориентации j лишь с одним единичным элементом

$$\tilde{M}_{1,10,10} = 1; \quad \tilde{M}_{1,k,l} = 0; \quad \tilde{M}_{1,10,l} = 0; \quad \tilde{M}_{1,k,10} = 0 \tag{5.8.1}$$

при $k, l = 1, 2, \cdots, 9$. Элементы двух новых сечений ориентаций k и l, не входящие в названное сечение ориентации j, могут быть произвольными. Поставим эти сечения десятыми и зададим элементы сечений ориентации k и l соответственно формулами:

$$\tilde{M}_{j,10,l} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha\lambda \\ jil \end{bmatrix}; \quad \tilde{M}_{j,k,10} = \begin{bmatrix} \gamma\beta\alpha \\ jki \end{bmatrix}, \tag{5.8.2}$$

(см. рис. 5.3). В пересечениях дополнительных сечений друг с другом стоят нули, кроме углового элемента $\tilde{M}_{1,10,10} = 1$.

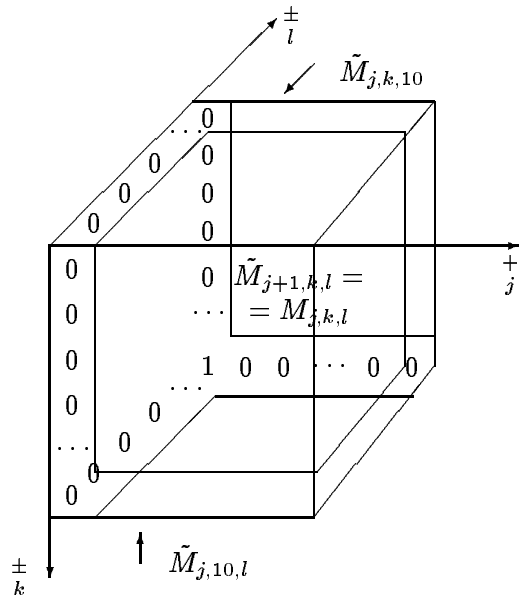


Рис. 5.3: Первое окаймление детерминанта $|M_{jkl}|$

2. Вычтем из всех сечений ориентации l (при $l = 1, 2, \cdots, 9$) последнее сечение этой же ориентации, умноженное на $3/2$. Это можно сделать вследствие свойства Гегенбауэра, обобщающего теорему Якоби для квадратичных детерминантов: "Если в многомерном детерминанте к некоторому сечению какой-нибудь ориентации прибавляется другое сечение той же ориентации, умноженное на какое-либо число, то детерминант не меняется, если ориентация — альтернативная, и, вообще говоря, меняется, если ориентация — неальтернативная" [57, с.31]. В итоге такой процедуры во всех элементах получившейся матрицы $\tilde{M}'_{jkl}$ (кроме дополнительных сечений) исчезнет слагаемое $(3/2)\begin{bmatrix}\alpha\gamma\beta\\ ijk\end{bmatrix}$, а в левом нижнем ребре возникнут числа $-3/2$.

Далее, опираясь на ту же теорему, вычтем из всех сечений альтернативной ориентации k (при $k = 1, 2, \cdots, 9$) нижнее сечение этой же ориентации с коэффициентом $3/2$. В итоге из сла-

гаемых в новой матрице $\tilde{M}''_{jkl}$ выпадут слагаемые $(3/2)\begin{bmatrix}\gamma\alpha\lambda\\ jil\end{bmatrix}$, т.е.

$$\tilde{M}''_{j+1,k,l} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma\beta\lambda\\ jkl\end{bmatrix} \tag{5.8.3}$$

при $k \neq 10$; $l \neq 10$. Элементы первого сечения ориентации j будут иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2 \\ 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -3/2 & -3/2 & \cdots & 1. \end{vmatrix}$$

3. Произведем второе окаймление детерминанта. Добавим на первые места новые сечения ориентаций k, l и на одиннадцатое место новое сечение ориентации j. Пусть (для симметрии) в двух новых первых сечениях отличен от нуля и равен единице элемент $\tilde{M}''_{1,1,11} = 1$, а все остальные их элементы равны нулю. Из изложенного следует, что одиннадцатое сечение ориентации j можно задать произвольно, не затрагивая ребер в пересечении с уже заданными новыми сечениями двух других ориентаций. Зададим элементы этого сечения в виде

$$M'_{11,k+1,l+1} = \begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix} \tag{5.8.4}$$

при $k, l = 1, 2, \cdots, 10$.

4. Для получения непосредственного аналога (прообраза) 4-мерной геометрии Минковского необходимо произвести вычитания из сечений ориентации j одиннадцатого сечения той же ориентации, умноженного на $1/2$. Однако для неальтернативных направлений в общем случае такая процедура неправомерна. В результате ее проведения значение детерминанта в общем случае изменится. Чтобы все-таки можно было ее произвести *необходимо наложить дополнительные условия на "точки", для которых намечается ввести унарную кубичную геометрию.* Эти условия состоят в обращении в нуль детерминанта, получающегося таким вычитанием. В итоговой матрице $M''_{j+1,k+1,l+1}$ первые сечения ориентаций j, k, l соответственно имеют вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2 \\ 0 & 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1; \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{|ccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1; \\
\hline
0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0,
\end{array}$$

а элементы оставшейся подматрицы определяются формулой

$$M''_{j+1,k+1,l+1} = \begin{bmatrix} \gamma\beta\lambda \\ jkl \end{bmatrix}, \tag{5.8.5}$$

где на десятом месте стоит элемент i, т.е. $j_{10} = i$; $k_{10} = i$; $l_{10} = i$. Такая матрица обобщает квадратичный определитель Кэли-Менгера (2.8.7). Эта матрица обладает тем свойством, что на ее диагональных сечениях, когда $j = k$ или $j = l$ или $k = l$ (кроме элементов в пересечении с первым сечением ориентации j и на ребре $M''_{j,1,1}$), все элементы обращаются в нуль. Очевидно, что в выписанных выше особенных (первых) сечениях значения элементов можно изменить, умножив сечения на постоянные числа.

5. Как уже отмечалось, геометрия такого рода возможна не для любого множества пар сопряженных элементов, как это имеет место для 4-мерных геометрий с парными отношениями, а лишь для случая, когда для всех возможных комбинаций из 10 элементов кубический определитель Кэли-Менгера 11-го порядка обращается в нуль. Это приводит к ограничению множеств элементов, для которых можно ввести такую геометрию. Учитывая, что каждая пара состояний элементов характеризуется тремя комплексными или 6 вещественными числами, можно записать формулу для грубой оценки числа n таких элементов

$$C_n^{10} \leq 6n \to \frac{n!}{(n-10)!10!} \leq 6n. \tag{5.8.6}$$

Максимальное число, при котором выполняется это неравенство: $n = 12$. [2]

[2]Выскажем гипотезу, что такая геометрия имеет место для сильновзаимодействующих частиц, т.е. в атомных ядрах. Зная, что сильновзаимодействующие частицы — барионы состоят из трех кварков, приходим к выводу, что насыщение ($n = 12$) имеет место для 4 барионов, т.е. для ядер гелия (для α-частиц).

Глава 6

Обобщенные импульсы и частицы

По аналогии с главой 3, где из БСКО ранга (3,3) была выведена геометрия Лобачевского, интерпретируемая как импульсное пространство для идеализированных лептонов, в этой главе на базе БСКО ранга (4,4) построено трехточечное обобщение геометрии Лобачевского. Так же, как определялись лептоны, введены обобщенные частицы, описываемые тройками элементов БСКО ранга (4,4). В такой теории ключевую роль играют группы $SL(3,C)$ и $SU(3)$. Есть основания интерпретировать обобщенные частицы как идеализированные барионы, имеющие трехкварковую структуру, а обобщенное пространство Лобачевского предложено трактовать как импульсное пространство таких частиц.

6.1 Трехточечное обобщение геометрии Лобачевского

1. Придерживаясь методики перехода от БСКО ранга (3,3) к импульсному пространству (к пространству Лобачевского), в рамках теории БСКО ранга (4,4) естественно определить *обобщенное импульсное пространство* для специальных образований, составленных из шестерок (из трех пар) сопряженных элементов. Такие образования – элементы новой УСВО – строятся из бинарных элементов согласно рисунку 6.1. На этом рисунке новые элементы обозначены одним латинским индексом.

В новом множестве $\mathcal{M}'$ определим как *внутренние отношения* для каждого из новых элементов

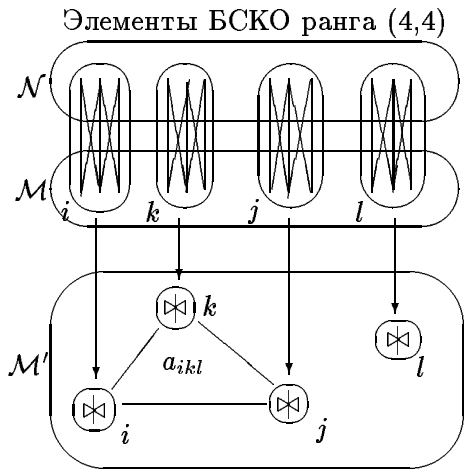


Рис. 6.1: Переход от БСКО ранга (4,4) к обобщенному импульсному пространству

$$a_{iii} = \begin{bmatrix} \alpha\mu\nu \\ imn \end{bmatrix}, \tag{6.1.1}$$

где i, m, n, α, μ, ν — первичные элементы, образующие новый элемент i, так и *перекрестные тройные отношения* с помощью общей формулы (5.6.3)

$$a_{ikl} = \left(\vec{B}(imn), \vec{B}(kps), \vec{B}(ltb)\right). \tag{6.1.2}$$

Здесь, как и в главе 3 при определении импульсов, будем полагать, что векторы $\vec{B}(imn)$ построены симметрично из трех сопряженных пар элементов, т.е. все три дважды изотропные составляющие k^A входят с одинаковыми знаками плюс согласно (5.4.9).

2. Чтобы записать закон для трехточечной УСВО выделим 10 произвольных элементов в определенном выше множестве $\mathcal{M}'$ и из всевозможных скалярных произведений вида (6.1.2), соответствующих им 9-мерных векторов (т.е. из тройных отношений a_{ikl}) построим кубичный определитель. Пусть направления k и l будут альтернативными, а i — неальтернативным. Легко показать, что

$$\left| B_{\substack{+ \\ i}\,\substack{\pm \\ k}\,\substack{\pm \\ l}} \right| \equiv \left| a_{\substack{+ \\ i}\,\substack{\pm \\ k}\,\substack{\pm \\ l}} \right| = 0. \tag{6.1.3}$$

Для этого нужно опять воспользоваться теоремой об обращении в нуль кубичного детерминанта, если одно из его сечений является линейной комбинацией других его сечений той же альтернативной ориентации. Поскольку элементы данного кубичного детерминанта записываются линейно через составляющие три вектора согласно (5.6.2), а десять 9-мерных векторов, на которых построен кубичный детерминант, линейно зависимы, то условия теоремы выполняются.

Заметим, что доказательство обращения в нуль детерминанта (6.1.3) значительно проще, нежели детерминанта из раздела 5.7, поскольку вид элементов кубичного детерминанта (5.6.5), диктуемый обобщенной теоремой косинусов, сложнее. Из него, в частности, следуют условия (5.7.6) на вид 9-мерных векторов, тогда как в данном случае ограничений на векторы нет.

3. Ограничимся частным случаем, когда внутренние отношения одинаковы. Нормируем их на некоторую (положительную вещественную) величину M^3c^3 так, что

$$a_{iii} = a_{jjj} = a_{kkk} = \cdots = M^3c^3. \tag{6.1.4}$$

Это выражение соответствует (3.1.12) в теории БСКО ранга (3,3) и означает, что 9-мерные компоненты обобщенного импульса удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} G_{ABC}P^AP^BP^C &= P^8\left((P^0)^2-(P^1)^2-(P^2)^2-(P^3)^2\right)+ \\ +2P^1\left(p^4P^6+P^5P^7\right) &- P^0\left((P^4)^2+(P^5)^2+(P^6)^2+(P^7)^2\right)+ \\ +2P^2\left(P^5P^6-P^4P^7\right) &+ P^3\left((P^4)^2+(P^5)^2-(P^6)^2-(P^7)^2\right)= \\ &= M^3c^3. \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Обозначения уже подсказывают, что константа M имеет физический смысл некой *массы* обобщенной частицы.

Очевидно, что обращающийся в нуль кубичный детерминант (6.1.3) с условиями (6.1.4) на элементы главной диагонали можно трактовать как закон

$$\Phi = \left| B_{\substack{+\\ i}\,\substack{\pm\\ k}\,\substack{\pm\\ l}} \right| = 0 \tag{6.1.6}$$

трехточечной УСВО, обобщающей закон двухточечной геометрии Лобачевского (3.1.6). По этой причине такую геометрию можно назвать *трехточечной или обобщенной геометрией Лобачевского.*

4. Как и в разделе 3.1, можно сопоставить два варианта унарных конструкций (двух трехточечных геометрий), выводимых из одной и той же БСКО ранга (4,4). Задание в одной из них (в обобщенном импульсном пространстве) нормировки длин векторов (6.1.3) опять можно трактовать как введение характерной *минимальной длины* (обобщенного интервала) в прообразе обобщенного (трехточечного) координатного пространства.

6.2 Обобщенные биспиноры и 9-мерные векторы

1. Для описания обобщенных частиц введем многокомпонентные столбцы Ψ и строки $\Psi^\dagger$, аналогичные 4-компонентным величинам, определенным в (3.2.1). В разделе 3.2

был перечислен ряд условий, исходя из которых конструировались 4-компонентные величины. Теперь выражения, построенные по прежним рецептам, составляют три 6-компонентных столбца:

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ (\beta\gamma)_{\dot{1}} \\ (\beta\gamma)_{\dot{2}} \\ (\beta\gamma)_{\dot{3}} \end{pmatrix}; \quad \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ k^3 \\ (\gamma\alpha)_{\dot{1}} \\ (\gamma\alpha)_{\dot{2}} \\ (\gamma\alpha)_{\dot{3}} \end{pmatrix}; \quad \Psi(3) = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \\ (\alpha\beta)_{\dot{1}} \\ (\alpha\beta)_{\dot{2}} \\ (\alpha\beta)_{\dot{3}} \end{pmatrix} \tag{6.2.1}$$

и три 6-компонентные строки:

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger(1) &= \left\{\alpha^{\dot{1}}, \alpha^{\dot{2}}, \alpha^{\dot{3}}; (kj)_1, (kj)_2, (kj)_3\right\}; \\ \Psi^\dagger(2) &= \left\{\beta^{\dot{1}}, \beta^{\dot{2}}, \beta^{\dot{3}}; (ji)_1, (ji)_2, (ji)_3\right\}; \\ \Psi^\dagger(3) &= \left\{\gamma^{\dot{1}}, \gamma^{\dot{2}}, \gamma^{\dot{3}}; (ik)_1, (ik)_2, (ik)_3\right\}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Эти величины соответствуют (3.2.1), во-первых, в том смысле, что тройки компонент в $\Psi(s)$ и $\Psi^\dagger(s)$ преобразуются комплексно сопряженным образом и могут быть поставлены в соответствие друг другу в прежнем смысле. Во-вторых, две тройки компонент в каждой из этих величин соответствуют “начальным” и “конечным” состояниям элементов, не находящимся друг с другом в парах. В-третьих, как и в (3.2.1), одна половина компонент является контравариантной, а вторая половина — ковариантной,

но преобразующейся через комплексно сопряженные коэффициенты, например

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ i'^3 \\ (\beta\gamma)'_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)'_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)'_{\dot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_1^{*1} & Q_1^{*2} & Q_1^{*3} \\ 0 & 0 & 0 & Q_2^{*1} & Q_2^{*2} & Q_2^{*3} \\ 0 & 0 & 0 & Q_3^{*1} & Q_3^{*2} & Q_3^{*3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix}, \tag{6.2.3}$$

т.е.

$$\Psi'(1) = S\Psi(1).$$

В том же смысле, что и в (3.2.2), величину $\Psi(s)$ можно назвать биспинором.

Существенное отличие (6.2.1) и (6.2.2) от (3.2.1) состоит в том, что вторые тройки компонент образованы парными комбинациями компонент элементов, а не одинарными, как в (3.2.1).

2. Как уже отмечалось, при $SL(3,C)$ преобразованиях остаются инвариантными две кубичные комбинации: $\varepsilon_{srp} i^s k^r j^p$ и $\varepsilon_{\dot s\dot r\dot p}\alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p}$. Для определенных в (6.2.1) и (6.2.2) величин можно подобрать такую 6x6-матрицу $\tilde\Lambda_0$, чтобы при любом s выполнялось соотношение

$$\Psi^\dagger(s)\tilde\Lambda_0\Psi(s) = \varepsilon_{srp} i^s k^r j^p + \varepsilon_{\dot s\dot r\dot p}\alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p} \equiv \overline{\Psi}(s)\Psi(s). \tag{6.2.4}$$

Легко видеть, что матрица $\tilde\Lambda_0$ должна иметь вид

$$\tilde\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.5}$$

где I_3 — единичная 3x3-матрица. С помощью этой матрицы в (6.2.3) введен аналог общепринятого выражения, например

$$\overline{\Psi}(1) \equiv \Psi^\dagger(1)\tilde\Lambda_0 = \left\{(kj)_1, (kj)_2, (kj)_3; \alpha^{\dot 1}, \alpha^{\dot 2}, \alpha^{\dot 3}\right\}. \tag{6.2.6}$$

Из (6.2.3) следует, что строка $\overline{\Psi}(s)$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}'(s) = \overline{\Psi}(s)S^{-1}, \tag{6.2.7}$$

где S^{-1} — матрица, обратная S в (6.2.3); она имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*1} & C_2^{*1} & C_3^{*1} \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*2} & C_2^{*2} & C_3^{*2} \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*3} & C_2^{*3} & C_3^{*3} \end{pmatrix}. \tag{6.2.8}$$

3. Аналогично формуле (3.2.8) для определения импульса p^μ в теории БСКО ранга (3,3) можно выразить компоненты P^A из (5.4.9) в виде квадратичных комбинаций из $\overline{\Psi}$ и Ψ:

$$2(P^A + \tilde{P}^A) = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}(s)\Lambda^A\Psi(s), \tag{6.2.9}$$

где Λ^A — девять 6-рядных матриц, которые выражаются через λ_0 и матрицы Гелл-Манна (5.4.2), (5.4.3) согласно

$$\Lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda^l = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_l \\ \lambda_l & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.10}$$

Они соответствуют известным матрицам Дирака γ^μ. Выражение $\tilde{P}^A$ в (6.2.8) записывается точно так же, как и P^A в (5.4.9), но с заменой

$$i^s \to (\beta\gamma)_{\dot{s}}; \quad k^s \to (\gamma\alpha)_{\dot{s}}; \quad j^s \to (\alpha\beta)_{\dot{s}};$$

$$\alpha^{\dot{s}} \to (kj)_s; \quad \beta^{\dot{s}} \to (ji)_s; \quad \gamma^{\dot{s}} \to (ik)_s.$$

Дополнительное слагаемое $\tilde{P}^A$ и суммирование по s отличают (6.2.8) от аналогичной формулы (3.2.8). В связи с этим следует заметить, что в теории БСКО ранга (3,3) в определении Ψ и $\overline{\Psi}$ элементы i и k (а также α и β) формально выступали неравноправно. Естественно было бы и там ввести пары величин:

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^s \\ \beta_{\dot{s}} \end{pmatrix}; \quad \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^s \\ \alpha_{\dot{s}} \end{pmatrix}$$

и определить векторы формулой

$$2(p_\mu + \tilde{p}_\mu) = \sum_{s=1}^{2} \tilde{\Psi}(s)\gamma_\mu\Psi(s).$$

Однако там оказывается $\tilde{p}_\mu = p_\mu$. Вследствие того, что ковариантные величины записываются линейно через контравариантные, оказалось возможным ограничиться одним 4- компонентным столбцом (и одной строкой).

4. Определим матрицу Λ^{10} в виде, аналогичном матрице γ_5 в (3.2.12):

$$\Lambda^{10} = -i \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \tag{6.2.11}$$

тогда вторую линейную комбинацию инвариантов можно представить в виде

$$2P^{10} = \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = -i(\varepsilon_{srp} i^s k^r j^p - \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{p}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} \gamma^{\dot{p}}) \tag{6.2.12}$$

для каждого $s = 1, 2, 3$.

С помощью матрицы Λ^{10} можно расщепить определения P^A и $\tilde{P}^A$ в (6.2.8), для этого введем "левые" (L) и "правые" (R) компоненты Ψ и $\overline{\Psi}$ по образу и подобию введения левых и правых компонент лептонов в (3.2.15):

$$\begin{aligned}
\Psi_L(s) &= \tfrac{1}{2}(I_6 + i\Lambda^{10})\Psi(s) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi(s); \\
\Psi_R(s) &= \tfrac{1}{2}(I_6 - i\Lambda^{10})\Psi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \Psi(s); \\
\overline{\Psi}_L(s) &= \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(I_6 - i\Lambda^{10}) = \overline{\Psi}(s) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}; \\
\overline{\Psi}_R(s) &= \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(I_6 + i\Lambda^{10}) = \overline{\Psi}(s) \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Легко видеть, что левые компоненты определяются параметрами элементов в первой степени (например, $\Psi_L(1)$ определяется i^s, а $\overline{\Psi}_L(1)$ — параметром α^s), тогда как правые компоненты выражаются лишь через квадратичные комбинации параметров. Это позволяет раздельно записать

$$2P^A = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}_L(s)\Lambda^A\Psi_L(s); \quad 2\tilde{P}^A = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}_R(s)\Lambda^A\Psi_R(s). \tag{6.2.14}$$

5. Используя формулы преобразований параметров элементов (5.2.1) и (5.3.9), находим *векторные законы преобразований компонент P^A и $\tilde{P}^A$ относительно группы $SL(3, C)$* в 9-мерном многообразии:

$$P'^A = L^A_{\cdot B} P^B; \quad \tilde{P}'^A = \tilde{L}^A_{\cdot B} \tilde{P}^B, \tag{6.2.15}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^A_{.B}$ обсуждены в разделе 5.4 и выписаны в Приложении 3, а коэффициенты $\tilde{L}^A_{.B}$ записываются аналогичным образом через Q^k_s из (5.3.10).

6.3 Собственная система отношений обобщенной частицы

1. Аналогично тому, как это делалось в разделе 3.3, обсудим собственную систему отношений обобщенной частицы. Попрежнему будем полагать, что три пары сопряженных элементов: (i,α), (k,β), (j,γ), составляющих частицу, не произвольны, а удовлетворяют некоторой системе условий. Прежде всего, в согласии с нормировкой (6.1.3) следует обобщить условия (3.3.4), т.е. переписать условия (5.1.8) и (5.1.9) с заменой произвольной константы u_0 на Mc:

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = u_{j\gamma} = Mc; \tag{6.3.1}$$

$$u_{i\beta} = u_{k\alpha} = u_{i\gamma} = u_{j\alpha} = u_{k\gamma} = u_{j\beta} = 0. \tag{6.3.2}$$

Они означают, во-первых, что внутренние отношения между сопряженными парами одинаковы, и, во-вторых, что перекрестные отношения между элементами различных пар равны нулю. Другими словами, простейшая унарная вещественная геометрия, описанная в разделе 5.1, внутри обобщенной частицы вырождается.

2. Термин "собственная система отношений" по-прежнему оправдывает себя. Действительно, подставляя (6.3.1), (6.3.2) в определения компонент 9-мерных импульсов (5.4.9), можно показать, что

$$P^0_{(c)} = Mc; \tag{6.3.3}$$

$$P^1_{(c)} = P^2_{(c)} = P^3_{(c)} = P^4_{(c)} = P^5_{(c)} = P^6_{(c)} = P^7_{(c)} = 0; \tag{6.3.4}$$

$$P^8_{(c)} = Mc. \tag{6.3.5}$$

Здесь индекс c снизу, как и в разделе 3.3, означает, что компоненты записаны в собственной системе отношений. Отсюда видно, что 7 компонент 9-мерного импульса, которые естественно назвать пространственно-подобными, в собственной системе отношений тождественно обращаются в нуль.

3. Рассмотрим значения инвариантов. Для этого сопоставим две формы записи фундаментального 3x3-отношения:

$$\begin{vmatrix} Mc & 0 & 0 \\ 0 & Mc & 0 \\ 0 & 0 & Mc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i^{*1} & k^{*1} & j^{*1} \\ i^{*2} & k^{*2} & j^{*2} \\ i^{*3} & k^{*3} & j^{*3} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta\Delta^* = M^3c^3. \tag{6.3.6}$$

Отсюда находим, если инвариант вещественный, то

$$\Delta = \pm(Mc)^{3/2}, \tag{6.3.7}$$

а если мнимый, то

$$\Delta = \pm i(Mc)^{3/2}. \tag{6.3.8}$$

Используя найденные формулы, запишем инварианты (6.2.3) и (6.2.11). Для вещественного Δ имеем

$$\overline{\Psi}(s)\Psi(s) = \pm 2(Mc)^{3/2}; \quad \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = 0. \tag{6.3.9}$$

Для мнимого Δ находим

$$\overline{\Psi}(s)\Psi(s) = 0; \quad \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = 2i(Mc)^{3/2} \tag{6.3.10}$$

для любого $s = 1, 2, 3$. Ограничимся случаем, когда Δ – вещественная величина.

4. Аналогично тому, как это делалось в теории БСКО ранга (3,3), естественно положить, что две возможности выбора знака в (6.3.9) соответствуют двум видам обобщенных частиц. *Назовем случай с верхним знаком соответствующим обобщенной частице, а с нижним знаком – обобщенной античастице.* Таким образом, определения частицы и античастицы имеют инвариантный характер, – связаны со значением знака инварианта.

С учетом данного определения и ранее приведенной формулы (5.2.9) запишем в матричном виде соотношения между параметрами элементов, составляющими частицу и античастицу, в собственной системе отношений:

$$\begin{pmatrix} i_c^1 & k_c^1 & j_c^1 \\ i_c^2 & k_c^2 & j_c^2 \\ i_c^3 & k_c^3 & j_c^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{Mc}} \begin{pmatrix} k_c^{*2}j_c^{*3} - k_c^{*3}j_c^{*2} & j_c^{*2}i_c^{*3} - j_c^{*3}i_c^{*2} & i_c^{*2}k_c^{*3} - i_c^{*3}k_c^{*2} \\ k_c^{*3}j_c^{*1} - k_c^{*1}j_c^{*3} & j_c^{*3}i_c^{*1} - j_c^{*1}i_c^{*3} & i_c^{*3}k_c^{*1} - i_c^{*1}k_c^{*3} \\ k_c^{*1}j_c^{*2} - k_c^{*2}j_c^{*1} & j_c^{*1}i_c^{*2} - j_c^{*2}i_c^{*1} & i_c^{*1}k_c^{*2} - i_c^{*2}k_c^{*1} \end{pmatrix}, \tag{6.3.11}$$

где знак плюс соответствует обобщенной частице, а минус — античастице. Эти формулы обобщают соотношения (3.3.8) и (3.3.9) для электрона и позитрона.

5. С помощью (6.3.11) легко переписать 6-компонентные столбцы (6.2.1) в собственной системе отношений. Для обобщенной частицы имеем

$$\Psi_c(1) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^3 \\ \sqrt{Mc}i_c^1 \\ \sqrt{Mc}i_c^2 \\ \sqrt{Mc}i_c^3 \end{pmatrix}; \quad \Psi_c(2) = \begin{pmatrix} k_c^1 \\ k_c^2 \\ k_c^3 \\ \sqrt{Mc}k_c^1 \\ \sqrt{Mc}k_c^2 \\ \sqrt{Mc}k_c^3 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_c(3) = \begin{pmatrix} j_c^1 \\ j_c^2 \\ j_c^3 \\ \sqrt{Mc}j_c^1 \\ \sqrt{Mc}j_c^2 \\ \sqrt{Mc}j_c^3 \end{pmatrix}. \tag{6.3.12}$$

Для обобщенной античастицы аналогично имеем

$$\Psi_c(1) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^3 \\ -\sqrt{Mc}i_c^1 \\ -\sqrt{Mc}i_c^2 \\ -\sqrt{Mc}i_c^3 \end{pmatrix}; \quad \Psi_c(2) = \begin{pmatrix} k_c^1 \\ k_c^2 \\ k_c^3 \\ -\sqrt{Mc}k_c^1 \\ -\sqrt{Mc}k_c^2 \\ -\sqrt{Mc}k_c^3 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_c(3) = \begin{pmatrix} j_c^1 \\ j_c^2 \\ j_c^3 \\ -\sqrt{Mc}j_c^1 \\ -\sqrt{Mc}j_c^2 \\ -\sqrt{Mc}j_c^3 \end{pmatrix}. \tag{6.3.13}$$

Согласно изложенному в разделе 5.2 в качестве ключевых можно выбрать пять параметров, например: i^1, i^2, i^3, k^1, k^2, на которые наложены два условия нормировки:

$$\begin{gathered} i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} + i_c^3 i_c^{*3} = Mc; \\ k_c^1 k_c^{*1} + k_c^2 k_c^{*2} + k_c^3 k_c^{*3} = Mc, \end{gathered} \tag{6.3.14}$$

т.е. независимыми являются только три параметра. Напомним, состояния лептонов в главе 3 характеризовались двумя параметрами.

6. При преобразованиях параметров из группы $SU(3)$, не выводящей за пределы одной и той же обобщенной системы отношений, верхние и нижние тройки параметров в (6.3.12) и (6.3.13) преобразуются одинаковым образом, т.е. 6-компонентные столбцы и в этом смысле представляют собой биспиноры. Опираясь на это свойство группы $SU(3)$, можно определить тензоры более высокого ранга.

6.4 Девятимерные бусты

1. Произвольное преобразование из группы $SL(3,C)$ можно представить в виде произведения двух преобразований: одного из 8-параметрической группы $SU(3)$, характеризуемого унитарной матрицей, и некоторого второго преобразования, характеризуемого эрмитовой матрицей. Такие эрмитовы преобразования можно понимать как совокупность преобразований, дополняющих группу $SU(3)$ до группы $SL(3,C)$. Они не образуют группу и являются аналогами бустов в теории БСКО ранга (3,3). Такие 9-мерные обобщенные бусты можно записать через матрицы Гелл-Манна

$$(C_r^s) = \sum_{A=0}^{8} b_A \lambda^A = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & b_4 - ib_5 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & b_6 - ib_7 \\ b_4 + ib_5 & b_6 + ib_7 & b_8 \end{pmatrix}, \qquad (6.4.1)$$

где на 9 вещественных параметров b_A наложено условие (5.3.4):

$$b_8(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) + 2b_1(b_4b_6 + b_5b_7) + 2b_2(b_5b_6 - b_4b_7) -$$
$$-b_3(b_4^2 + b_5^2 - b_6^2 - b_7^2) - b_0(b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2) = 1. \qquad (6.4.2)$$

Таким образом, независимых вещественных параметров только восемь. Выражения (6.4.1) и (6.4.2) соответствуют 4-мерным формулам (2.4.9) и (2.4.10).

2. При бустах 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$ преобразуются

согласно (6.2.3), где подматрица Q_r^{*s} имеет компоненты:

$$
\begin{aligned}
Q_1^{*1} &= b_8(b_0 - b_3) - b_6^2 - b_7^2;\\
Q_1^{*2} &= -b_8(b_1 - ib_2) + b_4b_6 + b_5b_7 - i(b_5b_6 - b_4b_7);\\
Q_1^{*3} &= -(b_0 - b_3)(b_4 - ib_5) + b_1b_6 - b_2b_7 - i(b_2b_6 + b_1b_7);\\
Q_2^{*1} &= -b_8(b_1 + ib_2) + b_4b_6 + b_5b_7 + i(b_5b_6 - b_4b_7);\\
Q_2^{*2} &= b_8(b_0 + b_3) - b_4^2 - b_5^2;\\
Q_2^{*3} &= -(b_0 + b_3)(b_6 - ib_7) + b_1b_4 + b_2b_5 - i(b_1b_5 - b_2b_4);\\
Q_3^{*1} &= -(b_0 - b_3)(b_4 + ib_5) + b_1b_6 - b_2b_7 + i(b_2b_6 + b_1b_7);\\
Q_3^{*2} &= -(b_0 + b_3)(b_6 + ib_7) + b_1b_4 + b_2b_5 + i(b_1b_5 - b_2b_4);\\
Q_3^{*3} &= b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2.
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

Эти компоненты соответствуют правой нижней части в формуле (3.2.2), характеризующей 4-мерные преобразования.

3. Выделим частные случаи таких преобразований, соответствующие трем видам 4-мерных бустов (преобразований Лоренца):

а) Пусть выделенными являются параметры элементов с индексами 1 и 2, тогда, полагая

$$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0; \quad b_8 = 1, \tag{6.4.4}$$

получаем матрицу преобразований

$$
S_{12} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & b_0 - b_3 & -(b_1 - ib_2) & 0\\
0 & 0 & 0 & -(b_1 + ib_2) & b_0 + b_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right), \tag{6.4.5}
$$

где учтено, что при условиях (6.4.4) на 4 оставшихся коэффициента наложено условие (6.4.2), означающее

$$b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \tag{6.4.6}$$

т.е. фактически получаем матрицу преобразований вида (3.4.1).

б) Пусть выделенными являются параметры элементов с индексами 1 и 3, тогда, полагая

$$b_1 = b_2 = b_6 = b_7 = 0; \quad b_0 - b_3 = 1, \tag{6.4.7}$$

получаем матрицу преобразований

$$S_{31} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_0+b_3 & 0 & b_4-ib_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4+ib_5 & 0 & b_8 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_8 & 0 & -(b_4-ib_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(b_4+ib_5) & 0 & b_0+b_3 \end{array}\right), \tag{6.4.8}$$

где учтено, что из-за (6.4.7) условия (6.4.2) принимают вид

$$b_8(b_0+b_3) - b_4^2 - b_5^2 = 1. \tag{6.4.9}$$

Очевидно, параметры b_8 и (b_0+b_3) можно так переопределить, чтобы это выражение записывалось в привычном псевдоевклидовом виде.

в) Пусть выделенными будут параметры элементов с индексами 2 и 3, тогда, полагая

$$b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0; \quad b_0 + b_3 = 1, \tag{6.4.10}$$

приходим к матрице преобразований

$$S_{23} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0-b_3 & b_6-ib_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_6+ib_7 & b_8 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_8 & -(b_6-ib_7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(b_6+ib_7) & b_0-b_3 \end{array}\right). \tag{6.4.11}$$

Из (6.4.2) и (6.4.8) следует условие на коэффициенты

$$b_8(b_0-b_3) - b_6^2 - b_7^2 = 1. \tag{6.4.12}$$

Рассмотренные здесь три частных вида 3-параметрических преобразований генерируют преобразования Лоренца (4-мерные бусты) в трех 4-мерных псевдоевклидовых (импульсных) пространствах, выделяемых в 9-мерном многообразии импульсов P^A.

6.5 Прообраз уравнения Дирака в 9-мерном импульсном пространстве

1. В теории БСКО ранга (4,4) можно ввести соотношения, имеющие такой же смысл, что и известные уравнения Дирака

в 4-мерном импульсном пространстве [16, 60]. Эти соотношения связывают параметры элементов i^s, k^s, j^s со значениями соответствующих величин $(\beta\gamma)_{\dot r}$, $(\gamma\alpha)_{\dot r}$, $(\alpha\beta)_{\dot r}$. Они записываются аналогично (3.5.1) и для i^s и $(\beta\gamma)_{\dot r}$ имеют вид

$$(\beta\gamma)_{\dot r} = K_{\dot r s} i^s \to \begin{pmatrix} (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot 1 1} & K_{\dot 1 2} & K_{\dot 1 3} \\ K_{\dot 2 1} & K_{\dot 2 2} & K_{\dot 2 3} \\ K_{\dot 3 1} & K_{\dot 3 2} & K_{\dot 3 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}, \tag{6.5.1}$$

где $K_{\dot r s}$ – комплексные компоненты смешанного спинтензора.

Компоненты $K_{\dot r s}$, будем искать так же, как это делалось в разделе 3.5, т.е. будем исходить из выражений i^s и $(\beta\gamma)_{\dot s}$ в собственной системе отношений, где они для обобщенной частицы (античастицы) связаны соотношениями (6.3.11). Затем перейдем в произвольную систему отношений с помощью преобразований (6.4.1) и в каждом из трех соотношений (6.5.1) приравняем коэффициенты слева и справа при компонентах i^s_c. В итоге получится 9 линейных уравнений для 9 компонент $K_{\dot r s}$. Детерминант этой системы равен единице. Решение системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
K_{\dot 1 1} &= \sqrt{Mc}\{-(b_0 - b_3) - b_8 + [b_8(b_0 - b_3) - (b_6^2 + b_7^2)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 1 2} &= \sqrt{Mc}\{(b_1 - ib_2) + [-b_8(b_1 - ib_2) + \\
&\quad +(b_4 - ib_5)(b_6 + ib_7)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 1 3} &= \sqrt{Mc}\{(b_4 - ib_5) + [-(b_0 - b_3)(b_4 - ib_5) + \\
&\quad +(b_1 - ib_2)(b_6 - ib_7)] \sum b^2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\dot 2 1} &= \sqrt{Mc}\{(b_1 + ib_2) + [-b_8(b_1 + ib_2) + \\
&\quad +(b_4 + ib_5)(b_6 - ib_7)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 2 2} &= \sqrt{Mc}\{-(b_0 - b_3) - b_8 + [b_8(b_0 - b_3) - (b_4^2 + b_5^2)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 2 3} &= \sqrt{Mc}\{(b_6 - ib_7) + [-(b_0 + b_3)(b_6 - ib_7) + \\
&\quad +(b_1 + ib_2)(b_4 - ib_5)] \sum b^2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\dot 3 1} &= \sqrt{Mc}\{(b_4 + ib_5) + [-(b_0 - b_3)(b_4 + ib_5) + \\
&\quad +(b_1 + ib_2)(b_6 + ib_7)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 3 2} &= \sqrt{Mc}\{(b_6 + ib_7) + [-(b_0 + b_3)(b_6 + ib_7) + \\
&\quad +(b_1 - ib_2)(b_4 + ib_5)] \sum b^2\}; \\
K_{\dot 3 3} &= \sqrt{Mc}\{-2b_0 + [b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2] \sum b^2\},
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

где использовано обозначение

$$\sum b^2 = 2b_0 b_8 + b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2 - b_6^2 - b_7^2.$$

2. Вторая часть обобщенного уравнения Дирака имеет смысл обратного соотношения между i^s и $(\beta\gamma)_{\dot r}$ (аналогично тому, как для лептонов было записано (3.5.11)):

$$i^s = K^{s\dot r}(\beta\gamma)_{\dot r} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1\dot 1} & K^{1\dot 2} & K^{1\dot 3} \\ K^{2\dot 1} & K^{2\dot 2} & K^{2\dot 3} \\ K^{3\dot 1} & K^{3\dot 2} & K^{3\dot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix}. \tag{6.5.3}$$

Опять, используя те же соображения, находим 9 уравнений для компонент контравариантного спинтензора $K^{s\dot r}$. Детерминант этой системы равен единице. Решением системы являются

$$\begin{aligned}
K^{1\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_0+b_3) - (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2)]; \\
K^{1\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_1 - ib_2) + (b_4 - ib_5)(b_6 + ib_7)]; \\
K^{1\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_4 - ib_5)(b_0 + b_3 + b_8) + (b_1 - ib_2)(b_6 - ib_7)]; \\
\\
K^{2\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_1 + ib_2) + (b_4 + ib_5)(b_6 - ib_7)]; \\
K^{2\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_0 - b_3) - (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_6^2 - b_7^2)]; \\
K^{2\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_6 - ib_7)(b_0 - b_3 + b_8) + (b_1 + ib_2)(b_4 - ib_5)]; \\
\\
K^{3\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_4 + ib_5)(b_0 + b_3 + b_8) + (b_1 + ib_2)(b_6 + ib_7)]; \\
K^{3\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_6 + ib_7)(b_0 - b_3 + b_8) + (b_1 - ib_2)(b_4 + ib_5)]; \\
K^{3\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 + b_8^2].
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

3. Собирая два 3-компонентных выражения (6.5.1) и (6.5.3) в одно 6-компонентное соотношение, получаем первую часть из комплекта, составляющего прообраз уравнения Дирака в теории БСКО ранга (4,4):

$$\begin{aligned}
K^{s\dot r}(\beta\gamma)_{\dot r} &= i^s; \\
K_{\dot r s} i^s &= (\beta\gamma)_{\dot r}.
\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Для более симметричной записи этих уравнений следует переопределить 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$, например,

$$\Psi(1) \to \hat\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^s \\ \frac{1}{\sqrt{Mc}}(\beta\gamma)_{\dot r} \end{pmatrix}, \tag{6.5.6}$$

тогда коэффициент $\sqrt{Mc}$, содержащийся в компонентах спинтензоров можно опустить. Тогда (6.5.5) можно переписать в 6-компонентном виде

$$(\hat{K} + I_6)\hat{\Psi}(1) = 0, \tag{6.5.7}$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{K}^{s\dot{r}} \\ \hat{K}_{\dot{r}s} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5.8}$$

определяется выражениями (6.5.2) и (6.5.4) без $\sqrt{Mc}$.

4. Аналогичным образом можно записать еще два комплекта 6- компонентных уравнений для выражений $\hat{\Psi}(2)$ и $\hat{\Psi}(3)$. Однако здесь нужно учесть, что во втором комплекте независимых уравнений будет только 4, т.к., напомним, в собственной системе отношений можно опираться на 5 величин: i_c^1, i_c^2, i_c^3, k_c^1, k_c^2, на которые наложены два условия. Компонента k_c^3 уже выражается через названные компоненты, т.е. записанное для нее уравнение является следствием всех предыдущих уравнений. Третий комплект уравнений для $\hat{\Psi}(3)$ не содержит ничего нового, т.к. все j_c^s выражаются через названные выше компоненты. Итого, обобщенные уравнения Дирака имеют всего 10 независимых компонент.

6.6 БСКО ранга (4,4) и хромодинамика

1. Сопоставим изложенное в этой главе с известными сведениями о частицах, участвующих в сильных взаимодействиях. В основе современной теории сильных взаимодействий (хромодинамики) лежат представления о кварковой структуре адронов, т.е. барионов и мезонов (см., например, [45, 64]). Как известно, кварки обладают тремя цветами (цветовыми зарядами), т.е. образуют цветовой триплет q^s (где $s = 1, 2, 3$). Сопоставим этому тот факт, что элементы БСКО ранга (4,4) также характеризуются тремя параметрами. Это позволяет *интерпретировать элементы БСКО ранга (4,4) как кварки*:

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \overline{q}^1 \\ \overline{q}^2 \\ \overline{q}^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \tag{6.6.1}$$

а параметры i^s элементов как цветовые заряды q^s кварков (в начальном состоянии). Аналогично тому, как это делалось в главе 3, параметры α^s элементов второго множества, преобразующиеся комплексно сопряженным образом, следует трактовать как цветовые заряды кварков $\overline{q}^s$ в конечных состояниях.

2. Напомним также, что в хромодинамике барионы (B) представляются в виде "бесцветной" кубичной комбинации из компонент трех кварков

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{srp}q^s q^r q^p, \tag{6.6.2}$$

где ε_{srp} полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты.

Обращаясь к фундаментальному 3x3-отношению (5.3.1), легко увидеть, что определитель справа в (5.3.1) с точностью до коэффициента совпадает с (6.6.2), т.е.

$$B(i,k,j) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{srp}i^s k^r j^p = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}. \tag{6.6.3}$$

Второй определитель справа в (5.3.1) записывается аналогично через кварки в конечном состоянии. Следовательно, фундаментальное 3x3-отношение БСКО ранга (4,4) описывает идеализированные барионы в начальном и в конечном состояниях.

3. Преобразования (5.3.9) с коэффициентами (5.3.10) следует рассматривать как иное представление группы линейных преобразований $SL(3,C)$. Своеобразием теории БСКО ранга (4,4) является то, что в ней преобразования с коэффициентами Q^r_s из (5.3.10) образуют такую же группу, что и (5.3.3). Это позволяет допустить возможность существования элементов БСКО ранга (4,4), преобразующихся по закону

$$x'_s = Q^r_s x_r; \quad \chi'_{\dot{s}} = Q^{*\dot{r}}_{\dot{s}}\chi_{\dot{r}}. \tag{6.6.4}$$

Будем интерпретировать элементы типа x, преобразующиеся согласно (6.6.4), как описывающие начальные состояния антикварков $\tilde{q}_s$, а элементы $\chi_{\dot{s}}$ – как описывающие конечные состояния антикварков $\overline{\tilde{q}}_{\dot{s}}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \overline{\tilde{q}}_1 \\ \overline{\tilde{q}}_2 \\ \overline{\tilde{q}}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_{\dot{1}} \\ \chi_{\dot{2}} \\ \chi_{\dot{3}} \end{pmatrix}. \tag{6.6.5}$$

В соответствии с (6.6.3) определим антибарион $\tilde{B}$ как "бесцветную" кубичную комбинацию из антикварков

$$\tilde{B}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon^{srp}x_s y_r z_p. \tag{6.6.6}$$

Тогда очевидно, что фундаментальное 3x3-отношение, построенное из трех пар элементов, преобразующихся согласно (6.6.4), описывает антибарион в начальном и в конечном состояниях.

4. Особый интерес представляют комбинации, составленные из элементов, преобразующихся различным образом. Легко видеть, что имеется квадратичная "бесцветная" комбинация, инвариантная относительно группы преобразований $SL(3,C)$, составленная из кварка и антикварка

$$M(i,x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i^1x_1 + i^2x_2 + i^3x_3) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}q^s\tilde{q}_s. \tag{6.6.7}$$

Эта комбинация совпадает с определением мезона (M) в стандартной хромодинамике. Комбинация (6.6.7) соответствует определителю в (6.6.3), характеризующему барион. Так, раскладывая определитель в (6.6.3) по первому столбцу и учитывая (5.3.7), имеем соответствие

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} = i^1(kj)_1 + i^2(jk)_2 + i^3(kj)_3 \leftrightarrow i^1x_1 + i^2x_2 + i^3x_3, \tag{6.6.8}$$

т.е.

$$B(i,k,j) \leftrightarrow M(i,x).$$

5. Допущение о существовании элементов, преобразующихся по разным прредставлениям группы, усложняет математическую конструкцию БСКО ранга (4,4). В частности, это, во-первых, приводит к расщеплению каждого из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ на пары подмножеств

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2; \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \tag{6.6.9}$$

и, во-вторых, к выделению группы преобразований $SU(3)$, относительно которых элементы в парах подмножеств преобразуются одинаково. Эта конструкция пояснена на рисунке 6.2.

При преобразованиях из группы $SU(3)$ согласно (5.3.12) имеем $Q^r_s = C^{*s}_r$ и $Q^{*r}_s = C^s_r$. Это означает, что элементы типа x в (6.6.4) – (6.6.7) следует отнести к тому же множеству $\mathcal{N}$

($x \in \mathcal{N}_2$), что и элементы типа α, описывающие конечные состояния кварков. Следовательно, множеству $\mathcal{N}$ принадлежат конечные состояния кварков ($\mathcal{N}_1$) и начальные состояния антикварков ($\mathcal{N}_2$). Аналогично, множеством $\mathcal{M}$ описываются начальные состояния кварков ($\mathcal{M}_1$) и конечные состояния антикварков ($\mathcal{M}_2$). Это находится в соответствии с общепринятыми представлениями о природе частиц и античастиц.

Поскольку теперь имеются четыре подмножества, то на них можно построить шесть специальных видов БСКО ранга (4,4):

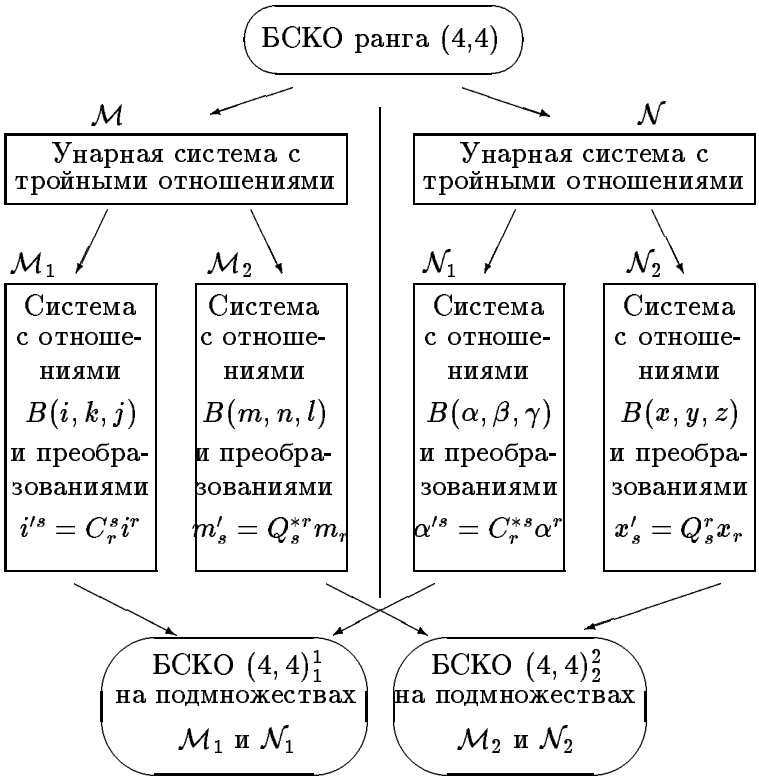


Рис. 6.2: Блок-схема содержания теории БСКО ранга (4,4)

$(4,4)^1_1$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$;
$(4,4)^2_2$ на подмножествах $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{N}_2$;

$(4,4)_1^2$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_2$;
$(4,4)_2^1$ на подмножествах $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{N}_1$;
$(4,4)_{12}$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$;
$(4,4)^{12}$ на подмножествах $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$.

Определения кварков и барионов согласно (6.6.1) – (6.6.3) сделаны в рамках БСКО ранга $(4,4)_1^1$, тогда как определения антикварков и антибарионов в (6.6.4) – (6.6.6) — в рамках БСКО ранга $(4,4)_2^2$. Легко видеть, что определение мезонов (6.6.7) означает не что иное как парное отношение $u_{i\xi}$, где $\xi = x$ в рамках БСКО ранга $(4,4)_1^2$.

Следует особо подчеркнуть, что во всех ключевых комбинациях (6.6.3), (6.6.6) и (6.6.7) группа $SU(3)$ может быть обобщена до более широкой группы $SL(3,C)$. На основании материала предыдущих глав и выше приведенных соображений можно сформулировать постулат, что *в бинарной геометрофизике частицы (и вообще связанные состояния из частиц) описываются комбинациями элементов, обладающими $SL(2,C)$–, $SL(3,C)$– и т.д. инвариантностью.*

6. К понятию мезона можно подойти еще с одной стороны. Давайте образуем фундаментальное 2x2-отношение БСКО ранга (4,4) из двух пар элементов i, l, α, ξ, находящихся в парах (т.е. $i^s = \alpha^{*s}$, $l^s = \xi^{*s}$), причем пусть элементы i и l множества $\mathcal{M}$ принадлежат разным его подмножествам, тогда имеем

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\xi} \\ u_{l\alpha} & u_{l\xi} \end{vmatrix} = (i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3)(x_1\chi_1 + x_2\chi_2 + x_3\chi_3) -$$

$$-(i^1x_1 + i^2x_2 + i^3x_3)(\alpha^1\chi_1 + \alpha^2\chi_2 + \alpha^3\chi_3), \qquad (6.6.10)$$

где сделан переход к ранее введенным обозначениям: $\xi^s \to x_s$; $l^s \to \chi_s$. Легко видеть, что последнее слагаемое справа является $SL(2,C)$-инвариантным и соответствует как бы 2x2-объему, описывающему согласно (6.6.7) матричный элемент перехода мезона из начального состояния в конечное.

6.7 К физической интерпретации БСКО ранга (4,4)

1. В бинарной геометрофизике можно определить два принципиально различных канала развития (интерпретации) БСКО ранга (4,4) с целью описания *хромодинамики.*

Первый канал основан на понимании БСКО ранга (4,4) как описывающей лишь так называемые *внутренние симметрии*

сильно взаимодействующих элементарных частиц (адронов). Тогда для описания (внешних) классических пространственно-временных отношений следует опять использовать БСКО ранга (3,3) с ее подсистемой в виде БСКО ранга (2,2), т.е. все то, что было изложено в главах 2-4. В итоге должна получаться своеобразная композиция БСКО рангов (4,4) и (3,3), причем БСКО ранга (4,4) должна использоваться в усеченном виде, включающем лишь преобразования из группы $SU(3)$. Видимо, этот канал довольно хорошо соответствует общепринятой формулировке теории сильных взаимодействий, где классическое 4-мерное пространство-время рассматривается само по себе, а $SU(3)$ и другие симметрии относят к вспомогательным внутренним пространствам.

Второй канал соответствует пониманию БСКО ранга (4,4) (и последующих рангов) как *универсальной системы отношений*, содержащей в себе все отношения и свойства, которые ранее были рассмотрены в рамках БСКО ранга (3,3). Нам представляется этот канал более естественным и в логическом плане более экономным. Он в наибольшей мере соответствует духу многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна, где также вводится одно универсальное многомерное многообразие, и уже из него выделяется классическое 4-мерное пространство-время, а дополнительные компоненты метрики предлагается трактовать как описывающие электромагнитное и другие физические взаимодействия. Есть все основания полагать, что этот канал является жизнеспособным. Возникающие в рамках БСКО ранга (4,4) векторы имеют временно- подобные компоненты, а преобразования из группы $SL(3,C)$ содержат в себе обобщенные преобразования Лоренца. БСКО ранга (3,3) можно понимать как своеобразную подсистему БСКО ранга (4,4). Можно надеяться, что в рамках второго канала можно вскрыть более тесно связанные закономерности электрослабых и сильных взаимодействий.

2. В бинарной геометрофизике БСКО ранга (4,4) используется также для описания *электрослабых взаимодействий* лептонов. Это чрезвычайно важное для данной программы направление развития теории. Именно на этом пути предлагается построение теории классического пространства-времени и электромагнитных (электрослабых) взаимодействий. Здесь важными являются методы редукции БСКО ранга (4,4) на БСКО ранга (3,3), аналогичные методам редукции многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна на классические 4-мерные пространственно-временные сечения. Как уже отмечалось, теория классического пространства-времени может быть построена только вместе с теорией физических взаимодействий. Методы редукции БСКО ранга (4,4) на 4-мерие рассмотрены в следую-

щей главе, а сама теория будет изложена во второй части книги.

3. При реализации программы бинарной геометрофизики естественно встает вопрос: почему в физическом мире не реализовалось пространство-время девяти измерений, присущих БСКО ранга (4,4)? Видимо, ответ на этот вопрос должен быть многоплановым. Во- первых, классическое 4-мерие соответствует БСКО минимального ранга (3,3), в котором оказывается содержательная модель. Можно понимать так, что мир в результате эволюции скатился в некоторое свое минимальное состояние. Во-вторых, 9-мерная пространственно-временная конструкция оказывается ущербной в своей основе. Из БСКО ранга (4,4) с группой преобразований $SL(3,C)$ не получается многообразия с полной группой, например, O(1,8), которую можно было бы ожидать в классическом 9-мерном многообразии. Напомним, что группа $SL(2,C)$ из теории БСКО ранга (3,3) генерирует полную ортогональную группу O(1,3) (преобразований Лоренца). В-третьих, существенную роль играет БСКО ранга (2,2), как подсистема БСКО ранга (r,r). Напомним, что в рамках БСКО ранга (3,3) массивные лептоны описывались двумя элементами в каждом состоянии. При композиции с БСКО ранга (2,2) эта пара элементов в каждом состоянии принадлежала двум разным множествам БСКО ранга (2,2). В случае БСКО ранга (4,4) обобщенная частица описывается тремя элементами в каждом состоянии, а, как уже неоднократно отмечалось, нет нетривиальных систем отношений, построенных на трех множествах. Таким образом, в случае рангов (r,r) при $r > 3$ уже нет разделения элементов по двум множествам БСКО ранга (2,2), как в случае ранга (3,3). Можно назвать и другие доводы против существования аналогов классического пространства-времени более высоких размерностей.

4. Можно высказать гипотезу о проявлении неклассического 9-мерия из теории БСКО ранга (4,4) в виде трех поколений элементарных частиц. Как будет показано в следующей главе, имеются три характерные возможности выделения из 9-мерного многообразия 4-мерных сечений с сигнатурой $(+---)$.

Глава 7

Редукция бинарного многомерия ранга (4,4) к 4-мерной теории

Если иметь ввиду, что БСКО ранга (3,3) ответственна за классическое 4-мерие, то теорию БСКО следующего ранга (4,4) можно назвать бинарным многомерием. Как в многомерной (унарной) теории Калуцы-Клейна важное место занимают вопросы редукции (отображения) многомерия на 4-мерное пространство-время, так и в бинарной геометрофизике существенную роль играет выделение из БСКО ранга (4,4) понятий, присущих БСКО ранга (3,3) и их физическая интерпретация.

7.1 Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна

1. При построении бинарной геометрофизики существенную роль сыграли идеи многомерной геометрической теории Калуцы-Клейна. Последняя основана на увеличении размерности физического пространства-времени. Если классическое (непосредственно наблюдаемое) пространство-время описывается четырьмя измерениями, то дополнительные размерности и связанные с ними величины в теории Калуцы-Клейна ответственны за проявления электромагнитного и других взаимодействий. В бинарной геометрофизике дело обстоит аналогичным образом. Если БСКО ранга (3,3), как было показано в главах 2 и 3, ответственна за классическое 4-мерие, то БСКО ранга (4,4) должна восприниматься как *бинарное многомерие*, родственное теории

Калуцы-Клейна как по физической интерпретации, так и по характеру математического описания. В отличие от классических геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна, допускающих рассмотрение многообразий пяти, шести и любого другого числа измерений, бинарное многомерие ранга (4,4) приводит к аналогам унарных многообразий сразу девяти измерений.

2. Для построения и осмысления многомерных теорий Калуцы-Клейна в привычных терминах 4-мерия необходимо использовать методы 1+4-, 1+1+4-, $\cdots$ -расщеплений исходного n -мерного многообразия на 4-мерное пространство-время и дополнительные размерности. Это достигается с помощью монадного, диадного и т.д. методов, позволяющих решать достаточно широкий круг проблем — от описания систем отсчета в общей теории относительности до построения теорий Калуцы-Клейна. Эти методы достаточно подробно изложены в наших книгах [10, 13]. Там же показано, что эти методы включают в себя четыре составные части: алгебру, задание физико-геометрических тензоров, определение монадных (диадных и т.д.) операторов дифференцирования (анализ) и запись всех ковариантных соотношений в монадном (диадном) виде. В данной книге речь идет об алгебраических аспектах бинарной геометрофизики, т.е. остановимся на сопоставлении первой и четвертой составных частей в двух теориях.

3. Монадный (диадный и т.д.) метод допускает как общековариантную формулировку, так и представление в нескольких характерных калибровках. Наиболее общей является калибровка, соответствующая хронометрической в общей теории относительности [10], когда вектор монады выбирается вдоль направления дополнительной пятой координаты в 5-мерной теории Калуцы-Клейна. В этом случае из группы допустимых координатных преобразований

$$x'^A = x'^A(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5), \tag{7.1.1}$$

где $A = 0, 1, 2, 3, 5$, естественным образом выделяются подгруппа преобразований четырех (классических) координат

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{7.1.2}$$

где $\mu = 0, 1, 2, 3$, имеющая место в эйнштейновской общей теории относительности (ОТО), и произвольные преобразования 5-ой координаты

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5). \tag{7.1.3}$$

Эти преобразования не меняют конгруэнцию линий пятой координаты, т.е. оставляют в рамках одной и той же *обобщенной*

системы отсчета. В такой теории физическим смыслом наделяются лишь калибровочно инвариантные тензоры, т.е. величины, ковариантные относительно преобразований (7.1.2) и инвариантные при преобразованиях (7.1.3).

Заметим, что в 5-мерной теории с условием цилиндричности (т.е. независимости) по 5-ой координате следует ограничиться более узкими преобразованиями, нежели (7.1.3),

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{7.1.4}$$

Именно такие преобразования генерируют известные калибровочные преобразования электромагнитного векторного потенциала A_μ. (Напомним, что в теории Калуцы-Клейна $A_\mu \sim G_{5\mu}$, где G_{AB} – 5-мерный метрический тензор.)

4. Преобразования, дополняющие (7.1.2) и (7.1.3) до полной группы (7.1.1), имеют вид

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5), \tag{7.1.5}$$

где обязательно справа должна присутствовать зависимость от координаты x^5. По аналогии с методом хронометрических инвариантов в ОТО, такие преобразования связываются с *переходом к новой обобщенной системе отсчета.* С позиций 4-мерной теории такие преобразования меняют физическую ситуацию, в частности, генерируют или изменяют электромагнитное поле.

5. В бинарной геометрофизике в рамках БСКО ранга (4,4) имеет место аналогичный метод (1+3,1+3)-расщепления бинарного многомерия на БСКО ранга (3,3) и нечто дополнительное, т.е. метод редукции БСКО ранга (4,4) к понятиям БСКО ранга (3,3) [17, 18]. В рамках получающихся из БСКО ранга (4,4) унарных геометрий это будет означать своеобразный метод 4+5-расщепления 9-мерного многообразия. При этом просматриваются далеко идущие аналогии и в имеющихся группах преобразований в двух теориях. Так, 5-мерную группу допустимых координатных преобразований (7.1.1) следует сопоставить с группой унимодулярных преобразований $SL(3, C)$ в теории БСКО ранга (4,4). Как уже отмечалось, эта группа характеризуется 16 параметрами. Подгруппе 4-мерных преобразований ОТО (7.1.2) следует сопоставить группу $SL(2, C)$ – ключевую группу в теории БСКО ранга (3,3). Как уже отмечалось, это 6-параметрическая группа.

6. Забегая вперед, отметим, что в теории БСКО ранга (4,4) можно выделить другую подгруппу преобразований, которая соответствует преобразованиям 5-ой (и других дополнительных)

координаты (7.1.3). Назовем такие преобразования также калибровочными. Как будет показано в разделе 7.5, они характеризуются 4 параметрами. Кроме того, оказывается, можно выделить преобразования, дополняющие названные до группы $SL(3,C)$ и в этом смысле аналогичные (7.1.5). В разделе 7.6 показано, что среди них выделяется некая 4-параметрическая подгруппа, соответствующая так называемым суперсимметричным преобразованиям в современных суперсимметричных теориях, и, наконец, своеобразная совокупность преобразований типа конформных (см. раздел 7.7). В итоге имеем

$$\Big(SL(3,C) \Big) = \Big(SL(2,C) \Big) + \Big(\quad \Big) + \\ + \Big(\quad \Big) + \Big(\quad \Big). \tag{7.1.6}$$

Поскольку все названные преобразованиями характеризуются своими числами параметров, то (7.1.6) соответствует баланс параметров

$$16 = 6 + 4 + 4 + 2. \tag{7.1.7}$$

В разделе 9.3 отмечена аналогия этих преобразований с близкими как по духу, так и по числу параметров, конформными преобразованиями в 6-мерной теории.

7. Аналогично тому, как в теории Калуцы-Клейна 5-мерная (многомерная) метрика G_{AB} расщепляется

$$G_{AB} \to \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & \frac{2\sqrt{k}}{c^2} G_{5\nu} \\ \hline \frac{2\sqrt{k}}{c^2} G_{\mu 5} & G_{55} = -\varphi^2 \end{array} \right), \tag{7.1.8}$$

где $g_{\mu\nu}$ – 4-мерный метрический тензор, A_μ – компоненты электромагнитного векторного потенциала, k – ньютоновская гравитационная постоянная, φ – некое скалярное поле, так и в теории БСКО ранга (4,4) из ключевых 9-мерных векторов можно выделить компоненты 4-мерных векторов и некоторые дополнительные величины, которые должны иметь некую физическую интерпретацию.

Наконец, заметим, что соотношения теории БСКО ранга (4,4) могут быть записаны в редуцированном к БСКО ранга (3,3) виде. В частности, это относится и к прообразу уравнений Дирака.

В последующих разделах этой главы все названные подгруппы и связанные с их выделенем понятия охарактеризованы более подробно.

7.2 Подгруппа 4-мерных преобразований $SL(2,C)$

1. Выделим из группы преобразований $SL(3,C)$ подгруппу $SL(2,C)$. Она описывается следующим частным случаем преобразований (5.2.1)

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.2.1)$$

Легко видеть, что в этом случае общее условие на коэффициенты преобразований (5.3.4) переходит в стандартное условие (2.4.4) для группы $SL(2,C)$.

Отметим, что из группы $SL(3,C)$ эквивалентным образом можно выделить три подгруппы $SL(2,C)$. Они различаются номерами выделяемых параметров. В подгруппе $SL(2,C)$, записанной в (7.2.1), симметричным образом преобразуются параметры с номерами 1 и 2, тогда как параметры с номером 3 остаются инвариантными. Назовем этот случай (1,2)-подгруппой $SL(2,C)$. Очевидным образом определяются (1,3)- и (2,3)- подгруппы $SL(2,C)$, т.е. преобразования $SL(2,C)$ в соответствующих 4- мерных сечениях (1,3) и (2,3). Произвольное преобразование из группы $SL(3,C)$ можно представить в виде произведения трех типов преобразований из (1,2)-, (1,3)- и (2,3)- подгрупп $SL(2,C)$ так, что

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1(12) & C_2^1(12) & 0 \\ C_1^2(12) & C_2^2(12) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_1^1(13) & 0 & C_3^1(13) \\ 0 & 1 & 0 \\ C_1^3(13) & 0 & C_3^3(13) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2(23) & C_3^2(23) \\ 0 & C_2^3(23) & C_3^3(23) \end{pmatrix}. \qquad (7.2.2)$$

В этом разделе ограничимся рассмотрением одной подгруппы (1,2). Для упрощения записи значок (12) при параметрах преобразований писать не будем.

2. Рассмотрим, как изменяются при преобразованиях (7.2.1) компоненты 9-мерных векторов, пусть это будут векторы P^A. Подставляя коэффициенты C_r^s из (7.2.1) в общую формулу (A.2.1), находим $P'^A = L^A_{\cdot B} P^B$, где

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^\mu_{\cdot\nu} & 0 & 0 \\ \hline 0 & L^\xi_{\cdot\eta} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \qquad (7.2.3)$$

Компоненты 4x4-блока $L^{\mu}_{\cdot\nu}$ совпадают с (2.7.1) и выписаны в (2.7.2). Они характеризуют преобразования 4-мерного вектора $p'^{\mu} = L^{\mu}_{\cdot\nu} p^{\nu}$ в теории БСКО ранга (3,3). Другой 4x4-блок характеризует преобразование четверки компонент

$$P'^{\xi} = L^{\xi}_{\cdot\eta} P^{\eta}, \tag{7.2.4}$$

где $\xi, \eta = 4, 5, 6, 7$. Подматрица $(L^{\xi}_{\cdot\eta})$ имеет следующий вид

$$2(L^{\xi}_{\cdot\eta}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C^1_1 + C^{*1}_1 & -i(C^1_1 - C^{*1}_1) & C^1_2 + C^{*1}_2 & -i(C^1_2 - C^{*1}_2) \\ i(C^1_1 - C^{*1}_1) & C^1_1 + C^{*1}_1 & i(C^1_2 - C^{*1}_2) & C^1_2 + C^{*1}_2 \\ C^2_1 + C^{*2}_1 & -i(C^2_1 - C^{*2}_1) & C^2_2 + C^{*2}_2 & -i(C^2_2 - C^{*2}_2) \\ i(C^2_1 - C^{*2}_1) & C^2_1 + C^{*2}_1 & i(C^2_2 - C^{*2}_2) & C^2_2 + C^{*2}_2 \end{pmatrix}. \tag{7.2.5}$$

Компонента P^8 является инвариантной относительно таких преобразований.

3. Образуем из дополнительных компонент P^{ξ} 9-мерного вектора следующие комбинации:

$$\begin{aligned} &\pi^1 \equiv P^4 - iP^5; \quad \pi^2 \equiv P^6 - iP^7; \\ &\pi^{\dot{1}} \equiv P^4 + iP^5; \quad \pi^{\dot{2}} \equiv P^6 + iP^7. \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Используя (7.2.4) и (7.2.5) легко показать, что эти комбинации преобразуются при (7.2.1) следующим образом

$$\begin{pmatrix} \pi'^1 \\ \pi'^2 \\ \pi'^{\dot{1}} \\ \pi'^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & 0 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{*1}_1 & C^{*1}_2 \\ 0 & 0 & C^{*2}_1 & C^{*2}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^{\dot{1}} \\ \pi^{\dot{2}} \end{pmatrix}. \tag{7.2.7}$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} \pi'^1 \\ \pi'^2 \\ \pi'_{\dot{1}} \\ \pi'_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & 0 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{*2}_2 & -C^{*2}_1 \\ 0 & 0 & -C^{*1}_2 & C^{*1}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi_{\dot{1}} \\ \pi_{\dot{2}} \end{pmatrix},$$

т.е. комбинации π^s, $\pi^{\dot{s}}$ образуют 4- компонентный биспинор, что отражено в их обозначениях. В новых терминах матрица $L'^{\xi}_{\cdot\eta}$

принимает блочный вид, где каждый блок определяется коэффициентами преобразований 2-компонентных спиноров i^s и $\alpha^{\dot{s}}$, где $s = 1, 2$.

4. Выразим обратно из (7.2.6) компоненты P^ξ через π^s и $\pi^{\dot{s}}$

$$\begin{aligned} P^4 &= \tfrac{1}{2}(\pi^1 + \pi^{\dot{1}}); \quad P^5 = \tfrac{i}{2}(\pi^1 - \pi^{\dot{1}}); \\ P^6 &= \tfrac{1}{2}(\pi^2 + \pi^{\dot{2}}); \quad P^7 = \tfrac{i}{2}(\pi^2 - \pi^{\dot{2}}). \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Подставим эти выражения в характерные комбинации из дополнительных компонент импульсов, содержащихся в кубичной форме (5.5.2):

$$\begin{aligned} 2\mathcal{P}^0 &\equiv (P^4)^2 + (P^5)^2 + (P^6)^2 + (P^7)^2 = \pi^1\pi^{\dot{1}} + \pi^2\pi^{\dot{2}}; \\ 2\mathcal{P}^1 &\equiv 2(P^4P^6 + P^5P^7) = \pi^1\pi^{\dot{2}} + \pi^2\pi^{\dot{1}}; \\ 2\mathcal{P}^2 &\equiv 2(P^5P^6 - P^4P^7) = i(\pi^1\pi^{\dot{2}} - \pi^2\pi^{\dot{1}}); \\ 2\mathcal{P}^3 &\equiv (P^4)^2 + (P^5)^2 - (P^6)^2 - (P^7)^2 = \pi^1\pi^{\dot{1}} - \pi^2\pi^{\dot{2}}. \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

Сравнивая с определением 4-мерного вектора в (2.6.1), приходим к выводу, что эти характерные комбинации являются компонентами 4-мерного вектора. Следовательно, кубичную форму (5.5.2) можно записать в лоренц-ковариантном виде

$$\begin{aligned} G_{ABC}P^AP^BP^C &= P^8 g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu - 2g_{\mu\nu}P^\mu\mathcal{P}^\nu = \\ &= P^8 g_{\mu\nu}(P^\mu - \frac{1}{P^8}\mathcal{P}^\mu)(P^\nu - \frac{1}{P^8}\mathcal{P}^\nu), \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

где учтено, что вектор $\mathcal{P}^\mu$ является изотропным, т.е.

$$g_{\mu\nu}\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}^\nu = 0. \tag{7.2.11}$$

Легко видеть, что аналогичные рассуждения можно провести и для других (1,3)- и (2,3)- подгрупп $SL(2,C)$-преобразований. Такие подгруппы выделяют в 9-мерном многообразии другие 4-мерные пространственно-временные (1,3)- и (2,3)-сечения.

7.3 Внутреннее пространство обобщенной частицы

1. Более подробно рассмотрим изотропный вектор $\mathcal{P}^\mu$, определенный в (7.2.9). Для этого выразим его компоненты через

параметры трех пар сопряженных элементов, воспользовавшись формулами (5.4.9). В итоге находим

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\mu}_{(3)} &= i^3\alpha^3 k^{\mu}(i\alpha) + i^3\beta^3 k^{\mu}(k\alpha) + i^3\gamma^3 k^{\mu}(j\alpha) + \\ &+ k^3\alpha^3 k^{\mu}(i\beta) + k^3\beta^3 k^{\mu}(k\beta) + k^3\gamma^3 k^{\mu}(j\beta) + \\ &+ j^3\alpha^3 k^{\mu}(i\gamma) + j^3\beta^3 k^{\mu}(k\gamma) + j^3\gamma^3 k^{\mu}(j\gamma), \qquad (7.3.1)\end{aligned}$$

где изотропные 4-мерные векторы типа $k^{\mu}(i\alpha)$ определены в (2.6.1). Таким образом, компоненты $\mathcal{P}^{\mu}$ слагаются из суммы соответствующих компонент 9 вещественных изотропных векторов с коэффициентами, образованными из третьих параметров элементов. При преобразованиях из выделенной подгруппы $SL(2,C)$ эти коэффициенты будут оставаться инвариантными.

Для случая (единожды) изотропной частицы, т.е. характеризуемой лишь двумя парами сопряженных элементов (i,α) и (k,β), вид вектора $\mathcal{P}^{\mu}_{(2)}$ упрощается

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\mu}_{(2)} &= i^3\alpha^3 k^{\mu}(i\alpha) + i^3\beta^3 k^{\mu}(k\alpha) \\ &+ k^3\alpha^3 k^{\mu}(i\beta) + k^3\beta^3 k^{\mu}(k\beta). \qquad (7.3.2)\end{aligned}$$

2. При выделенной подгруппе преобразований (7.2.1) определим 3-мерное комплексное *внутреннее пространство обобщенной частицы.* Состояние обобщенной частицы во внутреннем пространстве можно охарактеризовать 3-компонентным спинором z^s (и сопряженным спинором ζ^s):

$$z^s = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i^3 \\ k^3 \\ j^3 \end{pmatrix}; \quad \zeta^s = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \beta^3 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}, \qquad (7.3.3)$$

где $s = 1,2,3$. Из этого спинора по изложенным в разделе 5.4 правилам можно образовать компоненты 9-мерного "вектора" во внутреннем пространстве:

$$Z(0) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^1 + z^2\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 + k^3\beta^3);$$

$$Z(1) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^2 + z^2\zeta^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\beta^3 + k^3\alpha^3);$$

$$Z(2) = \tfrac{i}{2}(z^1\zeta^2 - z^2\zeta^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\beta^3 - k^3\alpha^3);$$

$$Z(3) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^1 - z^2\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 - k^3\beta^3);$$

$$Z(4) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^3 + z^3\zeta^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\gamma^3 + j^3\alpha^3);$$

$$Z(5) = \tfrac{i}{2}(z^1\zeta^3 - z^3\zeta^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\gamma^3 - j^3\alpha^3);$$

$$Z(6) = \tfrac{1}{2}(z^2\zeta^3 + z^3\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(k^3\gamma^3 + j^3\beta^3);$$

$$Z(7) = \tfrac{i}{2}(z^2\zeta^3 - z^3\zeta^2) = \tfrac{i}{2}(k^3\gamma^3 - j^3\beta^3);$$

$$Z(8) = z^3\zeta^3 = j^3\gamma^3. \tag{7.3.4}$$

Согласно изложенному в разделе 5.4, этот "вектор" дважды изотропен во внутреннем 9-мерном пространстве, т.е. обращаются в нуль как кубичный, так и квадратичный инварианты:

$$G(ABC)Z(A)Z(B)Z(C) = 0; \quad g(\alpha\beta)Z(\alpha)Z(\beta) = 0. \tag{7.3.5}$$

Здесь и в дальнейшем компоненты вектора во внутреннем пространстве помещаются в круглые скобки.

3. Для изотропной частицы, характеризуемой двумя парами сопряженных элементов, также можно ввести внутреннее комплексное пространство, однако оно будет двумерным. Определим 2-компонентные внутренние "спиноры":

$$x^s = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i^3 \\ k^3 \end{pmatrix}; \quad \chi^s = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \beta^3 \end{pmatrix}. \tag{7.3.6}$$

Из компонент этого "спинора" по известным правилам построим компоненты 4-мерного вектора в 4-мерном внутреннем пространстве:

$$\begin{aligned} X(0) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^1 + x^2\chi^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 + k^3\beta^3); \\ X(1) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^2 + x^2\chi^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\beta^3 + k^3\alpha^3); \\ X(2) &= \tfrac{i}{2}(x^1\chi^2 - x^2\chi^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\beta^3 - k^3\alpha^3); \\ X(3) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^1 - x^2\chi^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 - k^3\beta^3). \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Очевидно, что компоненты этого "вектора" совпадают с 4-мерной частью $Z(\alpha)$, определенной в (7.3.4). Этот вектор изотропен во внутреннем пространстве, т.е.

$$g_{\alpha\beta}X(\alpha)X(\beta) = 0. \tag{7.3.8}$$

4. Воспользовавшись тождеством

$$aA + bB \equiv \frac{a+b}{2}(A+B) + \frac{a-b}{2}(A-B), \tag{7.3.9}$$

можно представить компоненты вектора $\mathcal{P}^{\mu}_{(3)}$ из (7.3.1) в виде

$$\mathcal{P}^{\mu}_{(3)} = Z(A)p^{\mu}(A), \tag{7.3.10}$$

где по A производится суммирование от 0 до 8; величинами $p^{\mu}(A)$ обозначены компоненты девяти 4-мерных (неизотропных) векторов, строящихся из параметров двух пар элементов. Выпишем временно-подобные компоненты этих векторов:

$$\begin{aligned}
p^0(0) &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2);\\
p^0(1) &= \tfrac{1}{2}(k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2 + i^1\beta^1 + i^2\beta^2);\\
p^0(2) &= -\tfrac{i}{2}(k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2 - i^1\beta^1 - i^2\beta^2);\\
p^0(3) &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2);\\
p^0(4) &= \tfrac{1}{2}(j^1\alpha^1 + j^2\alpha^2 + i^1\gamma^1 + i^2\gamma^2);\\
p^0(5) &= -\tfrac{i}{2}(j^1\alpha^1 + j^2\alpha^2 - i^1\gamma^1 - i^2\gamma^2);\\
p^0(6) &= \tfrac{1}{2}(j^1\beta^1 + j^2\beta^2 + k^1\gamma^1 + k^2\gamma^2);\\
p^0(7) &= -\tfrac{i}{2}(j^1\beta^1 + j^2\beta^2 - k^1\gamma^1 - k^2\gamma^2);\\
p^0(8) &= \tfrac{1}{2}(j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2).
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Вид оставшихся (пространственно-подобных) компонент этих векторов очевиден. Легко видеть, что $p^{\mu}(0)$ является ранее определенным вектором, тогда как $p^{\mu}(3)$ совпадает с рассмотренным ранее псевдовектором относительно выделенных преобразований $SL(2,C)$.

5. Аналогичная ситуация имеет место для изотропной частицы. Для нее вектор (7.3.5) представляется в виде

$$\mathcal{P}^{\mu}_{(2)} = X(\alpha)p^{\mu}(\alpha), \tag{7.3.12}$$

где подразумевается суммирование по α от 0 до 3 с сигнатурой $(+\,+\,+\,+)$. Очевидно, что четыре вектора $p^\mu(\alpha)$ в (7.3.12) совпадают с первыми четырьмя векторами в (7.3.11).

6. Выше при определении спиноров и векторов во внутренних пространствах подразумевалось наличие групп линейных преобразований для неизотропных обобщенных частиц:

$$z'^s = \tilde{C}^s_r z^r; \quad \zeta'^{\dot{s}} = \tilde{C}^{\dot{s}}_{\dot{r}} \zeta^{\dot{r}}, \tag{7.3.13}$$

при $s, r = 1, 2, 3$, и для изотропных обобщенных частиц:

$$x'^s = \tilde{C}^s_r x^r; \quad \chi'^{\dot{s}} = \tilde{C}^{\dot{s}}_{\dot{r}} \chi^{\dot{r}}, \tag{7.3.14}$$

при $s, r = 1, 2$.

Естественно потребовать, чтобы для неизотропных частиц оставалась инвариантной квадратичная форма

$$i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3 = P^8. \tag{7.3.15}$$

это выделяет 9-параметрическую группу $U(3)$. Такими преобразованиями можно описывать переходы обобщенной неизотропной частицы из одного внутреннего состояния в другое. Для изотропных обобщенных частиц естественно ограничиться группой преобразований $U(2)$ во внутреннем пространстве.

7.4 Редукция уравнений Дирака

1. При преобразованиях (7.2.1) 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$, определенные в (6.2.1), сводятся к 4-компонентным, т.к. компоненты типа i^3 и $(\beta\gamma)_3 = \beta^1\gamma^2 - \beta^2\gamma^1$ при этих преобразованиях являются инвариантными, т.е.

$$\Psi(1) \to \Psi_0(1) = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2\gamma^3 - \beta^3\gamma^2 \\ \beta^3\gamma^1 - \beta^1\gamma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ (\beta\gamma)_{\dot{1}} \\ (\beta\gamma)_{\dot{2}} \end{pmatrix};$$

$$\Psi(2) \to \Psi_0(2) = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \gamma^2\alpha^3 - \gamma^3\alpha^2 \\ \gamma^3\alpha^1 - \gamma^1\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ (\gamma\alpha)_{\dot{1}} \\ (\gamma\alpha)_{\dot{2}} \end{pmatrix};$$

$$\Psi(3) \to \Psi_0(3) = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2 \\ \alpha^3\beta^1 - \alpha^1\beta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ (\alpha\beta)_{\dot{1}} \\ (\alpha\beta)_{\dot{2}} \end{pmatrix}. \qquad (7.4.1)$$

Здесь ковариантные компоненты ранее определенных 3-компонентных спиноров являются ковариантными и в рамках теории 2-компонентных спиноров.

Заметим, что в частном случае, когда

$$\alpha^3 = \beta^3 = 0; \quad j^1 = j^2 = 0, \qquad (7.4.2)$$

третий столбец из (7.4.1) тождественно равен нулю, а информация, заключенная в первых двух столбцах, дублируется, – так что можно ограничиться лишь одним первым 4-компонентным столбцом, как в теории БСКО ранга (3,3).

2. В связи с выделением внутренних степеней свободы еще раз обсудим обобщенную частицу в собственной системе отношений. Оказывается, состояние этой частицы можно охарактеризовать двумя внешними параметрами (с номерами 1 и 2) одного из элементов (пусть это будут параметры i_c^1 и i_c^2) и тремя внутренними комплексными параметрами: i_c^3, k_c^3, j_c^3. (Конечно, на них наложены еще два условия, так что число независимых вещественных параметров по-прежнему равно восьми.) Чтобы показать это, обратимся к общим условиям (6.3.11) на параметры элементов обобщенной частицы в ее собственной системе отношений. Выделим из них следующие 3 условия:

$$\begin{aligned} \sqrt{Mc}k_c^{*3} &= j_c^1 i_c^2 - j_c^2 i_c^1; \\ \sqrt{Mc}j_c^{*3} &= i_c^1 k_c^2 - i_c^2 k_c^1; \\ \sqrt{Mc}i_c^{*1} &= k_c^2 j_c^3 - k_c^3 j_c^2. \end{aligned} \qquad (7.4.3)$$

Их можно понимать как систему из 3 линейных уравнений относительно k_c^2, j_c^1, j_c^2. Решая ее и подставляя найденные выражения в еще одно условие из (6.3.11)

$$\sqrt{Mc}i_c^{*3} = k_c^1 j_c^2 - k_c^2 j_c^1,$$

получаем уравнение для одной неизвестной k_c^1. Решая его и подставляя в ранее найденные выражения, находим решение поставленной задачи в виде

$$k_c^1 = -\frac{\sqrt{Mc}i_c^{*2}j_c^{*3} + i_c^1 k_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}; \quad k_c^2 = \frac{\sqrt{Mc}i_c^{*1}j_c^{*3} - i_c^2 k_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}};$$

$$j_c^1 = \frac{\sqrt{Mc}i_c^{*2}k_c^{*3} - i_c^1 j_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}; \quad j_c^2 = -\frac{\sqrt{Mc}i_c^{*1}k_c^{*3} + i_c^2 j_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}, \quad (7.4.4)$$

т.е. четыре "внешних" параметра в собственной системе отношений выражаются через два оставшихся "внешних" параметра i_c^1, i_c^2 и через три "внутренних" параметра. При этом на эти параметры наложены условия:

$$i_c^3 i_c^{*3} + k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3} = i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} + i_c^3 i_c^{*3} = Mc. \quad (7.4.5)$$

3. Рассмотрим обобщенные уравнения Дирака в данном частном случае. Теперь необходимо из общей совокупности 8- параметрических бустов выделить бусты с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (6.4.4). Легко видеть, что матрицы из компонент (6.5.4) и (6.5.2) соответственно принимают вид

$$\sqrt{Mc}(K^{s\dot{r}}) = \begin{pmatrix} 2b_0(b_0+b_3)-1 & 2b_0(b_1-ib_2) & 0 \\ 2b_0(b_1+ib_2) & 2b_0(b_0-b_3)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.4.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{Mc}}(K_{\dot{r}s}) = \begin{pmatrix} 2(b_0-b_3)-1 & -2b_0(b_1-ib_2) & 0 \\ -2b_0(b_1+ib_2) & 2b_0(b_0+b_3)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4.7)$$

Очевидно, 2x2-подматрицы в левых верхних углах (7.4.3) и (7.4.4) с точностью до коэффициента совпадают с аналогичными выражениями (с обратными знаками) в (3.5.12) и (3.5.3) в теории БСКО ранга (3,3). Следовательно, можно утверждать, что 6-компонентный комплект (для $\Psi(1)$) обобщенных уравнений Дирака переходит в стандартные 4-компонентные уравнения Дирака.

7.5 Подгруппа калибровочных преобразований

1. Отдельно рассмотрим 4-параметрические преобразования, характеризуемые матрицей вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_1^3 & C_2^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.5.1)$$

где C_1^3 и C_2^3 – два комплексных параметра. Подставляя эти коэффициенты в условие (5.3.4) для преобразований $SL(3,C)$, убеждаемся, что на эти коэффициенты не наложено дополнительных ограничений, т.е. эти преобразования характеризуются 4 вещественными параметрами. Легко убедиться, что преобразования с матрицами вида (7.5.1) образуют абелеву группу [1]. В частности, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.5.2}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные комплексные числа.

2. Рассмотрим, как ведут себя компоненты 9-мерного вектора P^A при этих преобразованиях. Подставляя коэффициенты (7.5.1) в матрицу $L^A_{\cdot B}$ в (A.2.1), находим ее вид

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & 0 & 0 \\ \hline L^\xi_{\cdot\mu} & I_4 & 0 \\ \hline L^8_{\cdot\mu} & L^8_{\cdot\xi} & 1 \end{array}\right), \tag{7.5.3}$$

где I_4 – 4-рядные единичные матрицы,

$$2(L^\xi_{\cdot\mu}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1^3 + C_1^{*3} & C_2^3 + C_2^{*3} & i(C_2^3 - C_2^{*3}) & C_1^3 + C_1^{*3} \\ -i(C_1^3 - C_1^{*3}) & -i(C_2^3 - C_2^{*3}) & C_2^3 + C_2^{*3} & -i(C_1^3 - C_1^{*3}) \\ C_2^3 + C_2^{*3} & C_1^3 + C_1^{*3} & -i(C_1^3 - C_1^{*3}) & -(C_2^3 + C_2^{*3}) \\ -i(C_2^3 - C_2^{*3}) & -i(C_1^3 - C_1^{*3}) & -(C_1^3 + C_1^{*3}) & i(C_2^3 - C_2^{*3}) \end{pmatrix}; \tag{7.5.4}$$

$$\begin{array}{ll} L^8_{\cdot 0} = C_1^3 C_1^{*3} + C_2^3 C_2^{*3}; & L^8_{\cdot 1} = C_1^3 C_2^{*3} + C_2^3 C_1^{*3}; \\ L^8_{\cdot 2} = i(C_2^3 C_1^{*3} - C_1^3 C_2^{*3}); & L^8_{\cdot 3} = C_1^3 C_1^{*3} - C_2^3 C_2^{*3}; \end{array} \tag{7.5.5}$$

$$\begin{array}{lll} L^8_{\cdot 4} = C_1^3 + C_1^{*3}; & L^8_{\cdot 5} = -i(C_1^3 - C_1^{*3}) & \\ L^8_{\cdot 6} = C_2^3 + C_2^{*3}; & L^8_{\cdot 7} = -i(C_2^3 - C_2^{*3}) & L^8_{\cdot 8} = 1. \end{array} \tag{7.5.6}$$

[1] В общем случае можно говорить о 6-параметрической группе преобразований, описываемых треугольными матрицами вида

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_1^2 & 1 & 0 \\ C_1^3 & C_2^3 & 1 \end{pmatrix},$$

однако эта группа уже не является абелевой.

Из этих формул видно, что 4-мерные компоненты импульса P^μ при таких преобразованиях не меняются, тогда как дополнительные компоненты P^ξ и P^8 преобразуются с участием 4-мерных компонент, т.е.

$$P'^\mu = P^\mu; \tag{7.5.7}$$

$$P'^\xi = P^\xi + L^\xi_{\cdot\mu} P^\mu; \tag{7.5.8}$$

$$P'^8 = P^8 + L^8_{\cdot\xi} P^\xi + L^8_{\cdot\mu} P^\mu. \tag{7.5.9}$$

3. Перепишем (7.5.8) в спинорной форме, используя формулы (7.2.6), выражающие компоненты P^ξ через π^s и $\pi^{\dot s}$. Для этого возьмем 4 комбинации из соотношений (7.5.8):

$$\begin{aligned}
\pi'^1 = (P^4 - iP^5)' &= C_1^{*3}(P^0 + P^3) + C_2^{*3}(P^1 - iP^2); \\
\pi'^{\dot 1} = (P^4 + iP^5)' &= C_1^3(P^0 + P^3) + C_2^3(P^1 + iP^2); \\
\pi'^2 = (P^6 - iP^7)' &= C_2^{*3}(P^0 - P^3) + C_1^{*3}(P^1 + iP^2); \\
\pi'^{\dot 2} = (P^6 + iP^7)' &= C_2^3(P^0 - P^3) + C_1^3(P^1 - iP^2).
\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

Очевидно, что из этих комплексных соотношений независимыми являются только два, например, для π'^1 и π'^2.

Введем спинорные обозначения для двух комплексных параметров:

$$C_1^3 = \rho_1; \quad C_2^3 = \rho_2; \quad C_1^{*3} = \rho_{\dot 1}; \quad C_2^{*3} = \rho_{\dot 2}. \tag{7.5.11}$$

Переходя от комбинаций 4-мерных компонент вектора P^μ к спинтензорным выражениям, соотношения (7.5.8) можно переписать в виде

$$\pi'^s = \pi^s + B^{s\dot r}\rho_{\dot r}, \tag{7.5.12}$$

где, напомним, $B^{s\dot r}$ задано в (4.4.8).

4. Перепишем в новых обозначениях выражение (7.5.9). Легко убедиться, что комбинация $L^8_{\cdot\xi} P^\xi$ записывается в следующих $SL(2,C)$-инвариантных формах:

$$L^8_{\cdot\xi} = \rho_s \pi^s + \rho_{\dot s}\pi^{\dot s} = (\pi^1\rho^2 - \pi^2\rho^1) + (\pi^{\dot 1}\rho^{\dot 2} - \pi^{\dot 2}\rho^{\dot 1}). \tag{7.5.13}$$

Здесь использованы формулы (2.5.10) для подъема индексов 2-компонентных спиноров.

Смешанные компоненты $L^8_{\cdot\mu}$ из (7.5.5) можно переписать в виде

$$L^8_{\cdot 0} = \rho^1\rho^{\dot 1} + \rho^2\rho^{\dot 2} \equiv R^0; \qquad L^8_{\cdot 1} = -(\rho^1\rho^{\dot 2} + \rho^2\rho^{\dot 1}) \equiv -R^1;$$

$$L^8_{\cdot 2} = -i(\rho^1\rho^{\dot 2} - \rho^2\rho^{\dot 1}) \equiv -R^2; \quad L^8_{\cdot 3} = -(\rho^1\rho\dot{1} - \rho^2\rho^{\dot 2}) \equiv -R^3. \tag{7.5.14}$$

В итоге (7.5.9) представляется в виде

$$P'^8 = P^8 + \rho_s\pi^s + \rho_{\dot s}\pi^{\dot s} + g_{\mu\nu}P^\mu R^\nu. \tag{7.5.15}$$

5. Очевидно, преобразования (7.5.1) можно разбить на два последовательные 2-параметрические преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C^3_1 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C^3_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.5.16}$$

каждое из которых, в свою очередь, можно представить в виде произведения двух преобразований: из группы 3-мерных поворотов $SU(2)$ и бустов в соответствующем 4-мерном сечении 9-мерного многообразия. Первое из преобразований справа в (7.5.16) осуществляется в 4-мерном сечении (1,3), а второе – в 4-мерном сечении (2,3).

Продемонстрируем это на примере последнего слагаемого справа в (7.5.16), которое можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ 0 & b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ 0 & -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \tag{7.5.17}$$

Далее можно ограничиться 2x2-матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C^3_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix},$$

где стоящие справа матрицы соответствуют рассмотренным во 2-ой главе $SU(2)$-преобразованиям (2.4.6) и бустам (2.4.9) (в 4-мерном сечении (1,2)) с условиями на параметры (2.4.7) и (2.4.10).

Перемножая матрицы справа в (7.5.17) и приравнивая соответствующие матричные элементы слева и справа, получаем 8 вещественных уравнений на 8 коэффициентов: a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3. Решая эту систему уравнений, находим все 8 коэффициентов через вещественную и мнимую части комплексного параметра C_3^2:

$$a_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}; \qquad a_1 = b_2 = \pm\frac{\Im(C_2^3)}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}};$$

$$a_3 = 0; \qquad a_2 = -b_1 = \pm\frac{\Re(C_2^3)}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}; \tag{7.5.18}$$

$$b_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}; \qquad b_3 = \pm\frac{4 - C_2^3 C_2^{*3}}{2\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}.$$

Для первого слагаемого справа в (7.5.16) можно получить аналогичный результат с той лишь разницей, что преобразования должны осуществляться в сечении (1,3) и коэффициент C_2^3 нужно заменить на C_1^3.

7.6 Подгруппа суперсимметричных преобразований

1. Рассмотрим еще одну 4-параметрическую подгруппу преобразований, характиризуемую матрицей

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.6.1}$$

где C_3^1 и C_3^2 – два комплексных параметра, не связанные какими-либо дополнительными условиями. Легко убедиться, что такие преобразования составляют абелеву группу [2], в частности

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.6.2}$$

[2] Заметим, что в общем случае можно говорить о 6-параметрической группе преобразований, описываемых треугольными матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & C_2^1 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

однако такая группа уже не является абелевой.

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные комплексные числа.

2. Рассмотрим, как изменяются при этих преобразованиях компоненты 9-мерного вектора P^A. Подставляя коэффициенты (7.6.1) в компоненты матрицы $L^A_{\cdot B}$ в (A.2.1), находим

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^\mu_{\cdot\xi} & L^\mu_{\cdot 8} \\ \hline 0 & I_4 & L^\xi_{\cdot 8} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{7.6.3}$$

где опять I_4 – единичные 4-рядные матрицы,

$$2(L^\mu_{\cdot\xi}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^2_3 - C^{*2}_3) \\ C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^2_3 - C^{*2}_3) & C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) \\ -i(C^2_3 - C^{*2}_3) & C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & -(C^1_3 + C^{*1}_3) \\ C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & -(C^2_3 + C^{*2}_3 & -i(C^2_3 - C^{*2}_3) \end{pmatrix}; \tag{7.6.4}$$

$$\begin{array}{ll} L^0_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3); & L^1_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_3); \\ L^2_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*1}_3); & L^3_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3); \end{array} \tag{7.6.5}$$

$$\begin{array}{lll} L^4_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 + C^{*1}_3); & L^5_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^1_3 - C^{*1}_3); & \\ L^6_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^2_3 + C^{*2}_3); & L^7_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^2_3 - C^{*2}_3); & L^8_{\cdot 8} = 1. \end{array} \tag{7.6.6}$$

Из (7.6.3) видно, что компоненты 9-мерного вектора изменяются следующим образом

$$P'^\mu = P^\mu + L^\mu_{\cdot\xi} P^\xi + L^\mu_{\cdot 8} P^8; \tag{7.6.7}$$

$$P'^\xi = P^\xi + L^\xi_{\cdot 8} P^8; \tag{7.6.8}$$

$$P'^8 = P^8. \tag{7.6.9}$$

3. Вспомним 4-компонентный биспинор из компонент P^ξ, определенный в (7.2.6). Введем для него обозначение

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi_{\dot 1} \\ \pi_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^{\dot 2} \\ -\pi^{\dot 1} \end{pmatrix}. \tag{7.6.10}$$

Кроме того, введем спинорные обозначения для параметров преобразований C^1_3 и C^2_3:

$$C^1_3 = \theta^1; \quad C^2_3 = \theta^2; \quad C^{*1}_3 = \theta^{\dot 1}; \quad C^{*2}_3 = \theta^{\dot 2}. \tag{7.6.11}$$

Введем также 4-рядные обозначения для нового биспинора:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta_{\dot{1}} \\ \theta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^{\dot{2}} \\ -\theta^{\dot{1}} \end{pmatrix}; \qquad (7.6.12)$$

$$\theta^\dagger = (\theta^{\dot{1}}, \theta^{\dot{2}}, \theta^2, -\theta^1); \quad \overline{\theta} = \theta^\dagger \gamma_0 = (-\theta^2, \theta^1, -\theta^{\dot{1}}, -\theta^{\dot{2}}).$$

4. Легко убедиться, что в новых обозначениях

$$L^\mu_{\cdot\xi} P^\xi = \frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\pi, \qquad (7.6.13)$$

а компоненты $L^\mu_{\cdot 8}$ также принимают 4-мерный векторный вид

$$L^\mu_{\cdot 8} = \frac{1}{4}\overline{\theta}\gamma^\mu\theta. \qquad (7.6.14)$$

Легко также видеть,что компоненты $L^\xi_{\cdot 8}$ имеют вид

$$\begin{aligned} L^4_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(\theta^1 + \theta^{\dot{1}}); \quad L^5_{\cdot 8} = \tfrac{i}{2}(\theta^1 - \theta^{\dot{1}}); \\ L^6_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(\theta^2 + \theta^{\dot{2}}); \quad L^7_{\cdot 8} = \tfrac{i}{2}(\theta^2 + \theta^{\dot{2}}), \end{aligned} \qquad (7.6.15)$$

схожий с выражениями (7.2.8). На этом основании эти величины можно переобозначить

$$L^\xi_{\cdot 8} \equiv \theta^\xi. \qquad (7.6.16)$$

Используя (7.6.13) - (7.6.15), преобразования (7.6.7) - (7.6.8) можно переписать в виде

$$P'^\mu = P^\mu + \frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu\pi + \frac{1}{4}\overline{\theta}\gamma^\mu\theta P^8; \qquad (7.6.17)$$

$$P'^\xi = P^\xi + \theta^\xi P^8 \to \pi' = \pi + \theta P^8. \qquad (7.6.18)$$

Последнее выражение означает некую трансляцию в спинорном пространстве, определяемую биспинором θ и скаляром P^8. Аналогичные формулы имеют место в теориях с суперсимметриями (см., например, [8]). Они описывают преобразования, перемешивающие бозонные и фермионные компоненты супермультиплета. По этой причине здесь эти преобразования названы *суперсимметричными.*

5. Аналогично случаю калибровочных преобразований суперсимметричные преобразования (7.6.1) расщепляются на два:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (7.6.19)$$

каждое из которых опять можно представить как последовательные $SU(2)$ -преобразования и бусты в соответствующем 4-мерном сечении 9-мерного многообразия. В частности, последнее из преобразований справа в (7.6.18) можно записать через преобразования в (2,3)-сечении:

$$\begin{pmatrix} 1 & C_3^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 + \tilde{b}_3 & \tilde{b}_1 - i\tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_1 + i\tilde{b}_2 & \tilde{b}_0 - \tilde{b}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 + i\tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 + i\tilde{a}_1 \\ -\tilde{a}_2 + i\tilde{a}_1 & \tilde{a}_0 - i\tilde{a}_3 \end{pmatrix}, \qquad (7.6.20)$$

где вещественные параметры $\tilde{b}_\mu$ и $\tilde{a}_\mu$ удовлетворяют условиям типа (2.4.10) и (2.4.7). Из (7.6.19) легко получить 8 уравнений на эти параметры. Решение этой системы находится в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_0 = \pm\tfrac{2}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; \qquad \tilde{a}_1 = -\tilde{b}_2 = \pm\tfrac{\Im(C_3^2)}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; \\ &\tilde{a}_3 = 0; \qquad \tilde{a}_2 = \tilde{b}_1 = \pm\tfrac{\Re(C_3^2)}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; \\ &\tilde{b}_0 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}; \qquad \tilde{b}_3 = \pm\tfrac{C_3^2C_3^{*2}}{2\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}. \end{aligned} \qquad (7.6.21)$$

В аналогичном виде находятся параметры преобразований в 4-мерном сечении (1,3) для первого слагаемого справа в (7.6.18).

7.7 Подгруппа квазиконформных преобразований

1. Рассмотрим подгруппу 2-параметрических преобразований, определяемых матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} \pm(C_3^3)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm(C_3^3)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & C_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (7.7.1)$$

где C_3^3 – произвольное комплексное число. Очевидно, что такие преобразования составляют 2-параметрическую абелеву группу.

2. Подставим параметры $C_1^1 = \phi$, $C_2^2 = \phi$, $C_3^3 = \phi^{-2}$ в выражения для $L^A_{.B}$, выписанные в Приложении 3. В итоге находим

$$(L^A_{.B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \varphi_1 I_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_2 I_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varphi_3 \end{array}\right), \tag{7.7.2}$$

где

$$\varphi_1 = \phi\phi^*; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}[\phi^{-2}\phi^* + (\phi^*)^{-2}\phi]; \quad \varphi_3(\phi\phi^*)^{-2} \tag{7.7.3}$$

– три вещественных числа. Из (7.7.3) следует, что компоненты 9-мерного вектора изменяются следующим образом:

$$P'^{\mu} = \varphi_1 P^{\mu}; \tag{7.7.4}$$

$$P'^{\xi} = \varphi_2 P^{\xi}; \to \pi'^{s} = \varphi_2 \pi^{s}; \tag{7.7.5}$$

$$P'^{8} = \varphi_3 P^{8}. \tag{7.7.6}$$

Такие преобразования 4-мерных векторов и спиноров принято называть конформными преобразованиями или дилатациями (см. раздел 9.3). В данном случае назовем их *квазиконформными.* Напомним, что при конформных преобразованиях изменяются длины векторов, но остаются неизменными углы. Очевидно, что при этих преобразованиях кубичная форма (5.5.2) остается инвариантной.

3. Выделяя из ϕ модуль ρ и фазу α

$$\phi = \rho e^{i\alpha}, \tag{7.7.7}$$

приходим к выводу, что преобразование (7.7.1) можно представить в виде произведения

а) однопараметрического вещественного преобразования (дилатации), когда

$$\phi = \rho; \quad \varphi_1 = \rho^2; \quad \varphi_2 = \rho^{-1}; \quad \varphi_3 = \rho^{-4}, \tag{7.7.8}$$

б) однопараметрического унитарного преобразования, когда

$$\phi = e^{i\alpha}; \quad \varphi_1 = 1; \quad \varphi_2 = \cos 3\alpha; \quad \varphi_3 = 1. \tag{7.7.9}$$

Очевидно, при таких преобразованиях 4-мерные компоненты P^{μ}, а также P^8, остаются инвариантными. Преобразуются лишь спинорные компоненты π^s.

Глава 8

Алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия и БСКО ранга (4,4;a)

В главах 5 и 6 рассматривалась такие аспекты теории БСКО ранга (4,4), в которых все три параметра элементов выступали симметричным образом. В предыдущей главе сделан важный шаг по выделению одного из параметров, что соответствует редукции бинарного многомерия на БСКО ранга (3,3). Как известно из теории Калуцы-Клейна, аналогичная редукция понятий многомерной геометрии на 4-мерные пространственно-временные сечения приводит к появлению выражений, описывающих электромагнитные (и слабые) взаимодействия. В бинарной геометрофизике предлагается таким же образом вводить взаимодействия между элементарными частицами. В частности, в рамках теории БСКО ранга (4,4) можно описать электрослабые взаимодействия лептонов. Подробно этот вопрос намечено обсудить в другой части книги. Для его решения необходимо использовать специальные приемы и новые понятия. В этой главе изложены самые элементарные алгебраические аспекты введения взаимодействий: указан алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия пары массивных лептонов и обсуждены некоторые свойства вырожденной БСКО ранга (4,4;a), связанной с описанием взаимодействий.

8.1 Базовое 4x4-отношение

1. В теории БСКО ранга (4,4) имеется характерное выражение, соответствующее общепринятому определению действия для двух взаимодействующих частиц. Это так называемое *базовое* 4×4*-отношение*, симметричным образом содержащее две четверки элементов двух частиц в начальных и конечных состояниях [20, 32]. Пусть состояния двух частиц описываются двумя четверками элементов (i, k, j, s) и $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, тогда базовое 4x4-отношение имеет вид

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{matrix}\right\} \equiv -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta}\\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta}\\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta}\\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ i^1 & k^1 & j^1 & s^1\\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2\\ i^3 & k^3 & j^3 & s^3\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3\end{vmatrix}. \qquad (8.1.1)$$

Это выражение играет ключевую роль при описании взаимодействующих частиц, аналогичную лагранжиану или гамильтониану в стандартной теории поля. В каком-то смысле базовое 4x4-отношение аналогично фундаментальным 2x2-отношениям в главе 2 или фундаментальным 3x3-отношениям в главе 5. Для него принято обозначение, близкое к ранее использованным. Так же, как и фундаментальные отношения, оно записывается через произведение двух определителей, составленных из параметров однотипных элементов. Каждый из этих определителей записывается как выражение для объема в унарных геометриях (см. (1.5.10)).

2. Расписывая окаймленный определитель из парных отношений в (8.1.1) по первой строке или первому столбцу, легко убедиться, что базовое 4x4-отношение представляется через совокупность из 16 фундаментальныз 3x3-отношений, введенных в главе 5:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{matrix}\right\} &= \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ kjs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ kjs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ kjs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ kjs\end{bmatrix} -\\ &- \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ ijs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ ijs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ ijs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ijs\end{bmatrix} +\\ &+ \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ iks\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ iks\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ iks\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ iks\end{bmatrix} -\end{aligned}$$

$$- \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ iks \end{bmatrix}. \quad (8.1.2)$$

Они образованы из всевозможных выборок 3 элементов из 4 в каждом из двух множеств. Очевидно, базовое 4x4-отношение, как и все его отдельные части в (8.1.2) инвариантны относительно преобразований из группы $SL(3, C)$.

3. В рассматриваемой в этой главе теории БСКО ранга (4,4) осуществляется *редукция* на теорию БСКО ранга (3,3). В данном случае она означает ограничение преобразованиями из группы $SL(2, C)$, которые осуществляются над параметрами с номерами 1 и 2, тогда как параметры с индексом 3 остаются инвариантными. Запишем базовое 4x4-отношение (8.1.1) через 4-мерные ("внешние") комбинации (из параметров с индексами 1 и 2) и через инвариантные ("внутренние") параметры (с индексом 3). Для этого достаточно расписать определители справа в (8.1.1) по последним строкам [32]. В итоге находим комбинацию из 36 слагаемых вида

$$\begin{Bmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\delta \\ js \end{pmatrix}, \quad (8.1.3)$$

где суммирование производится по всем возможным перестановкам из двух четверок индексов: α, β, γ, δ и i, k, j, s. В этом выражении использованы обозначения:

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 & k^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} = (i^3 - k^3)(\beta^3 - \alpha^3). \quad (8.1.4)$$

В квадратных скобках в (8.1.3) стоят фундаментальные 2x2- отношения вида (2.4.1), построенные из невырожденных параметров с индексами 1 и 2.

4. Проиллюстрируем физический смысл базового 4x4-отношения. Вспоминая выражение для скалярного произведения двух векторов (3.1.4), выражающегося через комбинацию из четырех фундаментальных 2x2-отношений, легко убедиться, что из 36 выражений в (8.1.3), в частности, можно построить скалярное произведение импульсов двух частиц. Поскольку в него входят 4 элемента в начальном состоянии и 4 элемента в конечном состояни, то 4x4-отношение будем графически изображать 8-хвосткой (см. рис. 8.1а). Объединяя их парами, соответствующими двум частицам в начальных и в конечных состояниях, приходим еще к двум диаграммам, иллюстрирующим взаимодействие двух массивных лептонов (см. рис 8.1б и 8.1в). На рисунке 8.1а элементы i и k описывают первый лептон (e_1) в начальном состоянии, а

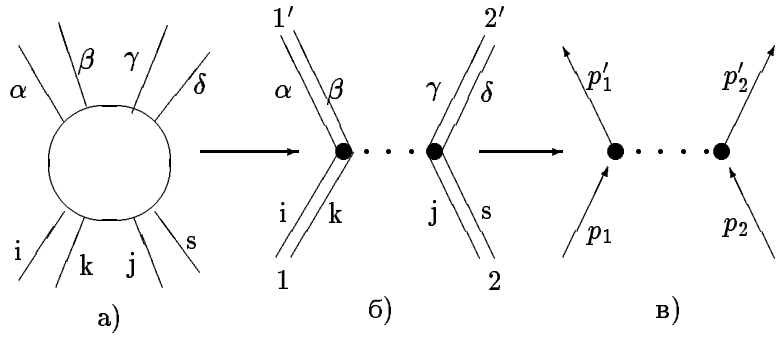


Рис. 8.1: Физическая иллюстрация базового 4x4-отношения

элементы j и s – второй лептон (e_2) в начальном состоянии. Аналогично, α и β описывают первый лептон в конечном состоянии, а элементы γ и β – второй лептон в конечном состоянии (см. рис 8.1б). На рисунке 8.1в изображена стандартная диаграмма фейнмановского типа, описывающая рассеяние двух массивных лептонов из-за взаимодействия через промежуточные электромагнитное поле A_μ или поле Z- бозонов. Во второй части книги базовое 4x4-отношение будет составлять основу как для описания электрослабого взаимодействия двух массивных лептонов, так и для перехода к макропонятиям.

8.2 Переход от невырожденной БСКО ранга (4,4) к вырожденной

1. В связи с записанным выше базовым 4x4-отношением с нарушенной симметрией между параметрами рассмотрим переход от произвольной БСКО ранга (4,4) к вырожденной БСКО ранга (4,4;a), где также один из параметров выделен. Как уже отмечалось в 1-ой главе, бинарные системы отношений типа a можно рассматривать как вырожденные бинарные системы соответствующего ранга. Такой же случай можно рассмотреть и в рамках комплексифицированных бинарных систем. Переход от БСКО ранга (4,4) к БСКО ранга (4,4;a) можно формально осуществить следующим образом. Выделим в парном отношении (5.1.2) третьи параметры, положив, что они представляются в виде

$$i^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon i_0}; \qquad \alpha^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon \alpha_0}, \tag{8.2.1}$$

где $\varepsilon \ll 1$ – некий универсальный малый параметр, i_0 и α_0 – новые параметры, соответствующие исходным i^3 и α^3. Представим парное отношение (5.1.2) в следующей форме

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} \equiv$$

$$\equiv i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} - 1\right) + \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (8.2.2)$$

Закон невырожденной БСКО ранга (4,4) перепишем в окаймленном виде, т.е.

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\varepsilon & u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} & u_{i\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{l\alpha} & u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.2.3)$$

Добавляя первый столбец ко всем остальным, добьемся исключения слагаемого $1/\varepsilon$ во всех парных отношениях в (8.2.2) и появления единиц в первой строке определителя. Умножив первый столбец справа в (8.2.3) на $-\varepsilon$, приходим к выражению

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'_{i\alpha} & a'_{i\mu} & a'_{i\nu} & a'_{i\lambda} \\ 1 & a'_{m\alpha} & a'_{m\mu} & a'_{m\nu} & a'_{m\lambda} \\ 1 & a'_{n\alpha} & a'_{n\mu} & a'_{n\nu} & a'_{n\lambda} \\ 1 & a'_{l\alpha} & a'_{l\mu} & a'_{l\nu} & a'_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.2.4)$$

где

$$a'_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} - 1\right). \qquad (8.2.5)$$

2. При устремлении ε к нулю выражение (8.2.5) переходит в парное отношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a'_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i_0 + \alpha_0 \equiv a_{i\alpha}, \qquad (8.2.6)$$

а (8.2.4) переходит в закон вырожденной БСКО ранга (4,4;а)

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\mu} & a_{m\nu} & a_{m\lambda} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\mu} & a_{n\nu} & a_{n\lambda} \\ 1 & a_{l\alpha} & a_{l\mu} & a_{l\nu} & a_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.2.7)$$

8.3 Фундаментальные отношения в теории БСКО ранга (4,4;a)

1. Выразим парное отношение между двумя произвольными элементами вырожденной БСКО ранга (4,4;a) через их отношения к трем парам других, в общем случае также произвольных, элементов этой же БСКО. Поскольку эти элементы будем считать базисными, обозначим отношения между ними тильдой сверху. Из закона (8.2.7) находим

$$
\begin{aligned}
a_{i\alpha}\Delta' = \Delta +\\
+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_{m\alpha} & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ a_{n\alpha} & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ a_{l\alpha} & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} +\\
+a_{i\mu}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\mu}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} +\\
+a_{i\mu}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\nu}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} +\\
+a_{i\nu}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\nu}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\lambda} \end{vmatrix} + \qquad (8.3.1)\\
+a_{i\lambda}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} \end{vmatrix} - a_{i\lambda}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} \end{vmatrix} +\\
+a_{i\lambda}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

где использованы обозначения для определителей:

$$
\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (8.3.2)
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix}.
$$

2. Выражение (8.3.1) можно привести к виду (8.2.6). Из последних в (8.3.1) девяти слагаемых, квадратичных по отношениям небазисных элементов к базисным, можно получить две комбинации из невырожденных параметров в (8.2.6). Чтобы убедиться в этом, выпишем их отдельно в виде 3x3-матрицы. Перенеся коэффициент Δ' из левой части (8.3.1) в знаменатель правой, это выражение представим в виде

$$\begin{array}{lll} a_{i\mu}a_{m\alpha}A_{11} & +a_{i\mu}a_{n\alpha}A_{12} & +a_{i\mu}a_{l\alpha}A_{13}+ \\ +a_{i\nu}a_{m\alpha}A_{21} & +a_{i\nu}a_{n\alpha}A_{22} & +a_{i\nu}a_{l\alpha}A_{23}+ \\ a_{i\lambda}a_{m\alpha}A_{31} & +a_{i\lambda}a_{n\alpha}A_{32} & +a_{i\lambda}a_{l\alpha}A_{33}, \end{array} \tag{8.3.3}$$

где коэффициенты A_{sr} не являются независимыми, а связаны между собой условиями:

$$\begin{array}{c} A_{13} = -A_{11} - A_{12}; \quad A_{31} = -A_{11} - A_{21}; \\ A_{23} = -A_{21} - A_{22}; \quad A_{32} = -A_{12} - A_{22}; \\ A_{33} = -A_{13} - A_{23} = A_{11} + A_{22} + A_{12} + A_{21}. \end{array} \tag{8.3.4}$$

Из этих свойств коэффициентов квадратичной формы (относительно отношений небазисных элементов к базисным) следует, что ее можно привести к некой квадратичной форме из двух (диагональных) квадратичных слагаемых вида $i^1\alpha^1+i^2\alpha^2$ в (8.2.6).

Для вырожденных параметров из (8.3.1) получаем выражения:

$$i_0 = \frac{1}{\Delta'}\left(\frac{1}{2}\Delta + \begin{vmatrix} 0 & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix}\right);$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\Delta'}\left(\frac{1}{2}\Delta + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_{m\alpha} & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ a_{n\alpha} & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ a_{l\alpha} & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix}\right). \tag{8.3.5}$$

По аналогии с изложенным в предыдущих главах можно ввести понятие собственного базиса БСКО ранга (4,4;a).

3. В рассмотренных выше БСКО рангов (3,3) и (4,4) ключевую роль играли детерминанты, характеризующие частицы и наборы базисных элементов. Они представляли собой отличные от нуля миноры максимального ранга в определителе, через который записывался закон соответствующей БСКО. Они возникали в знаменателях выражений для отношений между парами произвольных элементов в формулах (2.2.3) и (5.1.3) и были названы фундаментальными $n\times n$-отношениями. Исходя из свойств этих детерминантов строилась теория соответствующей БСКО.

В данном случае вырожденной БСКО ранга (4,4;a) роль фундаментального 3x3-отношения призван играть определитель Δ' в (8.3.2).

Легко показать, что этот определитель представляется в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}. \qquad (8.3.6)$$

Здесь отсутствуют параметры с индексом 3. Раскрывая определители справа и перемножая их, приходим к комбинации из фундаментальных 2x2-отношений из теории БСКО ранга (3,3), каждое из которых инвариантно относительно преобразований пары парметров с индексами 1 и 2 из группы $SL(2,C)$. Таким образом, *в теории вырожденной БСКО ранга (4,4;a) естественным образом выделяется группа преобразований* $SL(2,C)$.

4. Для БСКО ранга (4,4;a) формально можно назвать фундаментальным 4x4-отношением еще один тип минора максимального ранга в определителе (8.2.7) – неокаймленный минор четвертого ранга

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{Bmatrix}_0 . \qquad (8.3.7)$$

Расписывая этот определитель, легко показать, что он представляется в виде 6x6-таблицы, приведенной в (8.1.3), где по-прежднему комбинации в квадратных скобках строятся из невырожденных параметров (с индексами 1 и 2), а комбинации в круглых скобках строятся из вырожденных параметров аналогично (8.1.4):

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}_0 = (i_0 - k_0)(\beta_0 - \alpha_0). \qquad (8.3.8)$$

В этой и в предыдущуй формулах приняты обозначения раздела 8.1 с индексом "0" внизу, означающем, что параметры с индексом "3" заменены на параметры с индексом "0". Выражение (8.4.2) естественно по-прежнему называть базовым 4x4-отношением.

5. Обратим внимание на характерный вид коэффициентов A_{sr} в 3x3-матрице (8.3.3). Из (8.3.1) видно, что все они представляются в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} + a_{k\alpha} - a_{i\alpha} - a_{k\beta} =$$

$$= -(i^1 - k^1)(\alpha^1 - \beta^1) - (i^2 - k^2)(\alpha^2 - \beta^2), \qquad (8.3.9)$$

т.е. не зависят от параметров с индексом 3. Все они остаются инвариантными при преобразованиях параметров с индексами 1 и 2 из группы $SU(2)$.

6. В рамках теории БСКО ранга (4,4;a) формально можно построить фундаментальное 3x3-отношение для трех пар сопряженных элементов. В общем случае оно отлично от нуля и представляется в виде

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \qquad (8.3.10)$$

Вводя обозначения для комбинаций из параметров:

$$\tilde{u}_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2; \quad v_{i\alpha} = i^3 + \alpha^3;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix} = (i^3 - k^3)(\beta^3 - \alpha^3); \qquad (8.3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix},$$

выражения справа в (8.3.10) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \quad & \tilde{u}_{i\alpha}\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ kj \end{pmatrix} - \tilde{u}_{k\alpha}\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ ij \end{pmatrix} + \tilde{u}_{j\alpha}\begin{pmatrix} \beta\gamma \\ ik \end{pmatrix} - \\ & -\tilde{u}_{i\beta}\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ kj \end{pmatrix} + \tilde{u}_{k\beta}\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{pmatrix} - \tilde{u}_{j\beta}\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ ik \end{pmatrix} + \\ & +\tilde{u}_{i\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ kj \end{pmatrix} - \tilde{u}_{k\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ij \end{pmatrix} + \tilde{u}_{j\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}; \end{aligned} \qquad (8.3.12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \quad & v_{i\alpha}\begin{bmatrix} \beta\gamma \\ kj \end{bmatrix} - v_{k\alpha}\begin{bmatrix} \beta\gamma \\ ij \end{bmatrix} + v_{j\alpha}\begin{bmatrix} \beta\gamma \\ ik \end{bmatrix} - \\ & -v_{i\beta}\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ kj \end{bmatrix} + v_{k\beta}\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} - v_{j\beta}\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ik \end{bmatrix} + \\ & +v_{i\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ kj \end{bmatrix} - v_{k\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ij \end{bmatrix} + v_{j\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (8.3.13)$$

Если положить, что параметры с индексом 3 не изменяются, то легко видеть, что Σ_1 инвариантно относительно преобразований параметров с индексами 1 и 2 из группы $SU(2)$, а выражение Σ_2 инвариантно относительно преобразований $SL(2,C)$.

8.4 Промежуточный вариант БСКО ранга (4,4)

1. Можно рассмотреть промежуточный вариант между общим случаем БСКО ранга (4,4) и БСКО ранга (4,4;a), когда фактор ε, рассмотренный в разделе 8.2, не стремится к нулю, а лишь мал по сравнению с единицей. В этом случае базовое 4x4-отношение БСКО ранга (4,4) представляется в виде

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{matrix} \right\} = -\varepsilon \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} + 0(\varepsilon^2). \qquad (8.4.1)$$

В это выражение явно входит фактор ε. Если данное выражение описывает некую реальность (взаимодействия массивных лептонов), то естественно поставить вопрос о физическом смысле этого фактора.

2. Опираясь на ряд естественных предположений, произведем оценку фактора ε. Прежде всего отметим, что согласно (8.2.1) этот фактор вместе с параметром вида i_0 входит в показатель экспоненты $\exp \varepsilon i_0$, следовательно, комбинация εi_0 должна быть безразмерной. Параметр i_0 можно оценить, опираясь на идеологию многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Как уже отмечалось, в бинарной геометрофизике БСКО ранга(4,4) рассматривается как бинарное многомерие, где дополнительные параметры (с индексами 3 или 0) имеют смысл характеристик, описывающих взаимодействие, т.е. зарядов. В 5-мерной теории Калуцы-Клейна имеет место аналогичная ситуация, – электрический заряд e связан с 5-ой компонентой 5-мерной скорости u^5 следующим образом [13]

$$u^5 = \frac{e}{2m\sqrt{k}}, \qquad (8.4.2)$$

где k – ньютоновская гравитационная постоянная, m – масса частицы.

3. Далее следует более точно указать, с какой физической величиной следует сопоставить дополнительные параметры с индексом 0. Учтем, что согласно (8.2.6) парное отношение БСКО

ранга (4,4;a) представляется в виде

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i_0 + \alpha_0 + 0(\varepsilon), \tag{8.4.3}$$

следовательно, i_0 имеет размерность первых двух слагаемых справа. В главах 3 и 6 слагаемые такого типа определяли импульсы (точнее, временно-подобную компоненту импульса). Однако, строго говоря, такая интерпретация определялась нормировокой, т.е. умножением этих выражений на множитель mc. Ничто не мешало трактовать такие комбинации как безразмерные компоненты 4-мерных скоростей. В этом случае параметры с индексом 0 также должны быть безразмерными. Естественно их напрямую связать с также безразмерной пятой компонентой 5- мерной скорости (8.4.2), т.е. положить [1]

$$i_0 \sim u^5 = \frac{e}{2m\sqrt{k}}. \tag{8.4.4}$$

4. При такой интерпретации i_0 фактор ε также должен быть безразмерным. Поскольку этот фактор имеет универсальное значение, т.е. одинаков для всех элементов БСКО, то он должен выражаться через фундаментальные физические константы. Наиболее подходящим выражением является отношение массы частицы к планковской массе

$$\varepsilon = \frac{m}{m_{Pl}} = \frac{l_{Pl}mc}{\hbar} = m\sqrt{\frac{k}{\hbar c}}, \tag{8.4.5}$$

где планковская масса следующим образом выражается через фундаментальные константы

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \sim 10^{-5},$$

а для планковской длины имеем

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar k}{c^3}} \sim 1,6 \cdot 10^{-33} cm.$$

[1] В следующей части книги будет показано, электрический заряд частицы и заряд, характеризующий слабое взаимодействие, определяются суммой или разностью дополнительных параметров $i_0 \pm k_0$, однако это не сказывается на проводимой здесь оценке величин.

Подставляя в (8.4.5) значение массы электрона, получаем оценку

$$\varepsilon \sim 10^{-23}, \tag{8.4.6}$$

т.е. действительно этот фактор чрезвычайно мал.

5. Собирая вместе выражения (8.4.4) и (8.4.5), находим оценку для показателя экспоненты

$$\varepsilon i_0 = \frac{e}{2\sqrt{\hbar c}}, \tag{8.4.7}$$

т.е. он порядка корня квадратного из постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c \sim 1/137$. Отсюда находим, что согласно (8.2.1) вырожденные параметры стремятся к следующему значению

$$i^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon i_0} \sim 10^{12}. \tag{8.4.8}$$

6. Рассмотрим другую нормировку невырожденных параметров, когда их квадратичная комбинация определяет компоненты 4-мерного импульса. В этом случае, согласно (8.2.6), параметры с индексом 0 должны иметь размерность импульса, т.е. следует положить

$$i_0 \sim u^5 mc = \frac{ec}{2\sqrt{k}}. \tag{8.4.9}$$

Теперь малый фактор оказывается размерным, и его следует взять в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{mc} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{k}{\hbar c}} = \frac{1}{m_{Pl}c}. \tag{8.4.10}$$

Безразмерный показатель экспоненты имеет прежнее значение, а в парном отношении $u_{i\alpha}$ (размерности импульса), согласно (8.2.2), возникает некое затравочное значение

$$1/\tilde{\varepsilon} = m_{Pl}c \sim 10^5../. \tag{8.4.11}$$

æ

Глава 9

Бинарная система комплексных отношений ранга (5,5)

Обсудим основные черты БСКО ранга (5,5), с одной стороны, распространяя (обобщая) на ранг (5,5) общие свойства БСКО, уже изложенные на примерах рангов (3,3) и (4,4), и, с другой стороны, обращая внимание на черты теории отношений, присущие именно рангу (5,5), или проявляющиеся, начиная с ранга (5,5).

9.1 Закон и ключевые группы преобразований БСКО ранга (5,5)

1. Законы и парные отношения для невырожденных БСКО произвольного ранга (r, r) записаны в (1.2.1) и (1.2.2). В частности, для ранга (5,5) закон записывается для пяти пар элементов и имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \qquad (9.1.1)$$

где парные отношения записываются через четверки параметров элементов следующим образом

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i^4\alpha^4. \qquad (9.1.2)$$

Параметры опять можно трактовать через отношения к соответствующим элементам базиса. Последний определяется четверкой пар сопряженных элементов и характеризуется фундаментальным 4x4-отношением.

2. В теории БСКО произвольного ранга (r, r) фундаментальное $(r-1)\times(r-1)$-отношение записывается в форме

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \cdots & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \cdots & u_{k\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & \cdots & u_{l\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & \cdots & l^1 \\ i^2 & k^2 & \cdots & l^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i^{r-1} & k^{r-1} & \cdots & l^{r-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \cdots & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \cdots & \lambda^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{r-1} & \beta^{r-1} & \cdots & \lambda^{r-1} \end{vmatrix}, \quad (9.1.3)$$

т.е. как и в (2.4.1), (5.3.1) правая часть распадается на произведение определителей, каждый из которых строится из параметров одного сорта. В частности, для БСКО ранга (5,5) фундаментальное 4x4-отношение имеет вид

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \lambda^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \lambda^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \lambda^4 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\;\;k\;\;j\;\;s \end{bmatrix}. \quad (9.1.4)$$

3. В теории БСКО ранга (5,5) из группы линейных преобразований параметров

$$i'^s = C^s_{\cdot r} i^r; \quad \alpha'^s = C^{*s}_{\cdot r} \alpha^r, \quad (9.1.5)$$

где $s, r = 1, 2, 3, 4$, и коэффициенты преобразований в двух пространствах по-прежнему комплексно сопряжены, можно выделить несколько ключевых видов преобразований. Назовем их:

а) Преобразования, не выводящие за пределы собственной системы отношений (сохраняющие парные отношения (9.1.2)). Они характеризуются 16 условиями на параметры типа (2.3.5) или (5.2.3) - (5.2.4) и составляют *16-параметрическую унитарную группу* $U(4)$.

б) *Группа унимодулярных преобразований* $SL(4,C)$, оставляющая инвариантным каждый из определителей справа в (9.1.3). Она характеризуется условием на коэффициенты

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & C_4^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & C_4^3 \\ C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 \end{vmatrix} = 1, \qquad (9.1.6)$$

соответствующим (2.4.4) и (5.3.4) в теориях БСКО меньших рангов. Такие преобразования определяются 30 вещественными параметрами.

в) *Группа унитарных унимодулярных преобразований* $SU(4)$ характеризуется 15 параметрами. Коэффициенты ее преобразований удовлетворяют как условию (9.1.6), так и упомянутым выше условиям для группы $U(4)$.

г) Важное место в теории БСКО ранга (5,5) занимают *обобщенные бусты*, т.е. семейство преобразований, дополняющих группу $SU(4)$ до группы $SL(4,C)$. Это 15-параметрическое семейство не составляет группу; оно описывает переходы между обобщенными системами отношений.

В рамках теории БСКО ранга (5,5) имеются и другие важные подгруппы преобразований, которые будут рассмотрены ниже.

4. В каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ по ранее установленным правилам можно ввести 4-компонентные спиноры [59, 60]. Они определяются как векторы в 4-мерных комплексных пространствах, для которых заданы антисимметричные инвариантные относительно группы $SL(4,C)$ (четверные) скалярные произведения:

$$(\vec{i},\vec{k},\vec{j},\vec{l}) = \varepsilon_{srpq} i^s k^r j^p l^q; \quad (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\lambda}) = \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{p}\dot{q}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} \gamma^{\dot{p}} \lambda^{\dot{q}}. \qquad (9.1.7)$$

Еще раз подчеркнем, что это определение спиноров дано в рамках использованного в этой книге канала и отличается от традиционного определения 4-компонентных спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел.

9.2 6-Мерные пространства состояний

1. В теории БСКО ранга (5,5) имеется новый принципиально важный момент в описании состояний (частиц) отдельно в каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Он связан со значением ранга 4 (с четным характером) каждого из определителей справа в (9.1.4).

Это позволяет расписать эти определители по парам столбцов. Выберем определитель в множестве $\mathcal{M}$ и распишем его по первым двум столбцам

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} = \varepsilon_{srpq} i^s k^r j^p l^q =$$

$$= A^{12}(i,k)A^{34}(j,l) + A^{14}(i,k)A^{23}(j,l) + A^{13}(i,k)A^{42}(j,l) +$$
$$+ A^{23}(i,k)A^{14}(j,l) + A^{42}(i,k)A^{13}(j,l) + A^{34}(i,k)A^{12}(j,l), \quad (9.2.1)$$

где использованы обозначения:

$$A^{rs}(i,k) = \begin{vmatrix} i^r & k^r \\ i^s & k^s \end{vmatrix}; \quad A^{rs}(j,l) = \begin{vmatrix} j^r & l^r \\ j^s & l^s \end{vmatrix}. \quad (9.2.2)$$

Величины A^{rs} являются компонентами антисимметричных спинтензоров, построенных на парах элементов одного множества $\mathcal{M}$, т.е. при преобразованиях (9.1.5) изменяются по закону

$$A'^{sr} = C^s_p C^r_q A^{pq}. \quad (9.2.3)$$

Их можно также понимать как компоненты двух бивекторов в 6-мерном комплексном пространстве.

2. В самом общем случае 6 комплексных компонент бивектора $A^{rs}(i,k)$ можно переобозначить через 6 комплексных величин V^1, V^2, $\cdots$, V^6 посредством формул:

$$\begin{aligned} A^{12}(i,k) &= V^1 + iV^2; & A^{34}(i,k) &= V^1 - iV^2; \\ A^{23}(i,k) &= V^3 + iV^4; & A^{14}(i,k) &= V^3 - iV^4; \\ A^{13}(i,k) &= V^5 + iV^6; & A^{42}(i,k) &= V^5 - iV^6, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

тогда матрица из компонент спинтензора A^{sr} имеет вид

$$(A^{rs}) = \begin{pmatrix} 0 & V^1 + iV^2 & V^5 + iV^6 & V^3 - iV^4 \\ -V^1 - iV^2 & 0 & V^3 + iV^4 & -V^5 + iV^6 \\ -V^5 - iV^6 & -V^3 - iV^4 & 0 & V^1 - iV^2 \\ -V^3 + iV^4 & V^5 - iV^6 & -V^1 + iV^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{a=1}^{6} \Gamma_a V^a, \quad (9.2.5)$$

где Γ_a – шесть 4-рядных матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{9.2.6}$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что из матриц Γ_a можно построить 8-рядные матрицы $\tilde{\gamma}_a$, которые составляют набор образующих алгебры Клиффорда $C(6)$:

$$\tilde{\gamma}_1 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_2 \\ -\Gamma_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\gamma}_3 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_3 \\ \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_4 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_4 \\ -\Gamma_4 & 0 \end{pmatrix}; \tag{9.2.7}$$

$$\tilde{\gamma}_5 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_5 \\ \Gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_6 = i \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_6 \\ -\Gamma_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\tilde{\gamma}_a \tilde{\gamma}_b + \tilde{\gamma}_b \tilde{\gamma}_a = 2G_{ab}, \tag{9.2.8}$$

где G_{ab} метрический тензор 6-мерного многообразия с сигнатурой $(+\,+\,+\,+\,+\,+)$.

3. Выражения, аналогичные (9.2.4), можно записать для компонент $A^{rs}(j,l)$, только через другой набор из 6 комплексных величин: $W^1, W^2, \cdots, W^6$. Легко видеть, что в новых обозначениях квадратичная по A^{rs} форма (9.2.1) принимает диагональный вид

$$\varepsilon_{rspq} i^r k^s j^p l^q = 2 \sum_{a=1}^{6} V^a W^a. \tag{9.2.9}$$

Очевидно, величины V^a и W^a можно выразить обратно через компоненты спинтензора, например:

$$\begin{aligned} V^1 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{12}(i,k) + A^{34}(i,k)\right); \quad V^2 = -\tfrac{i}{2}\left(A^{12}(i,k) - A^{34}(i,k)\right); \\ V^3 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{23}(i,k) + A^{14}(i,k)\right); \quad V^4 = -\tfrac{i}{2}\left(A^{23}(i,k) - A^{14}(i,k)\right); \\ V^5 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{13}(i,k) + A^{42}(i,k)\right); \quad V^6 = -\tfrac{i}{2}\left(A^{13}(i,k) - A^{42}(i,k)\right). \end{aligned} \tag{9.2.10}$$

Из (9.2.3) легко получить векторный закон преобразования

$$V'^a = \Lambda^a_{\cdot b} V^b, \tag{9.2.11}$$

где в общем случае коэффициенты преобразований $\Lambda^a_{\cdot b}$ комплексные.

При преобразованиях параметров из группы $SL(4,C)$ квадратичная форма (9.2.9) остается инвариантной, следовательно, преобразования (9.2.11) образуют группу $O(6,C)$.

4. Легко убедиться, что при более узких преобразованиях параметров из группы $SU(4)$ коэффициенты $\Lambda^a_{\cdot b}$ в (9.2.11) становятся вещественными и образуют группу $SO(6)$, характеризующуяся, как и группа $SU(4)$, 15 параметрами. Таким образом, унитарные преобразования из группы $SU(4)$ индуцируют вещественные ортогональные повороты в 6-мерном евклидовом пространстве. Это утверждение соответствует хорошо известному в теории представлений групп факту двулистного накрытия $SU(4) \to SO(6)$.

Возвращаясь к выражениям (9.2.4) и (9.2.10), видим, что в общем случае величины V^a и W^a не обязаны быть вещественными. Тем не менее, если они в какой-то системе отношений оказались вещественными, то $SU(4)$-преобразования, не выводящие за пределы используемой системы отношений, оставляют их компоненты вещественными.

Поскольку компоненты 6-мерного вектора V^a в (9.2.10) строятся из параметров элементов квадратично, а из двух четверок параметров элементов i и k можно образовать 8- компонентные столбцы, то легко понять, что данные рассуждения приводят к общепринятому каналу введения 8-компонентных спиноров в рамках алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел (см. [26, 54]).

5. Еще раз подчеркнем, что 6-мерное евклидово пространство было введено в рамках одного множества элементов $\mathcal{M}$, т.е. в рамках унарной системы отношений. То же самое можно сделать в рамках второго множества $\mathcal{N}$. Если параметры элементов в двух множествах комплексно сопряжены, то с учетом (9.2.9)

фундаментальное 4x4-отношение (9.1.4) может быть представлено в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\;\;k\;\;j\;\;l \end{bmatrix} = 4G_{ab}G_{cd}(V^aV^c)(W^bW^d). \tag{9.2.12}$$

9.3 Группа преобразований $SO(2,4)$

1. Согласно принятой в книге методике далее следовало бы расмотреть преобразования, дополняющие группу $SU(4)$ до полной группы $SL(4,C)$. Это семейство 15-параметрических преобразований не образует группу и представляет собой дальнейшее обобщение бустов. Такие преобразования описывают переходы между различными обобщенными системами отношений в рамках теории БСКО ранга (5,5). Однако мы поступим иначе: рассмотрим (также 15-параметрическую) подгруппу группы $SL(4,C)$, включающую в себя как часть преобразований из $SU(4)$, так и часть из семейства обобщенных бустов.

Чтобы это сделать, формально переопределим в (9.2.4) выражения комплексных компонент $A^{sr}(i,k)$ через комплексные же величины $\tilde{V}^l$, изменив знак в $A^{42}(i,k)$. В итоге вместо (9.2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} A^{12}(i,k) &= \tilde{V}^1 + i\tilde{V}^2; \qquad & A^{34}(i,k) &= \tilde{V}^1 - i\tilde{V}^2; \\ A^{23}(i,k) &= \tilde{V}^3 + i\tilde{V}^4; \qquad & A^{14}(i,k) &= \tilde{V}^3 - i\tilde{V}^4; \\ A^{13}(i,k) &= \tilde{V}^5 + i\tilde{V}^6; \qquad & A^{42}(i,k) &= -\tilde{V}^5 + i\tilde{V}^6. \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Тогда вместо комплексной квадратичной формы (9.2.8) с сигнатурой $(+\;+\;+\;+\;+\;+)$ будем иметь квадратичную форму с сигнатурой $(+\;+\;+\;+\;-\;-)$. Теперь компоненты комплексных векторов $\tilde{V}^l$ записываются через $A^{sr}(i,k)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}^1 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{12}(i,k) + A^{34}(i,k)\right); \quad & \tilde{V}^2 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{12}(i,k) - A^{34}(i,k)\right); \\ \tilde{V}^3 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{23}(i,k) + A^{14}(i,k)\right); \quad & \tilde{V}^4 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{23}(i,k) - A^{14}(i,k)\right); \\ \tilde{V}^5 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{13}(i,k) - A^{42}(i,k)\right); \quad & \tilde{V}^6 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{13}(i,k) + A^{42}(i,k)\right). \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

2. Зная закон преобразований (9.2.3), из (9.3.3) легко найти коэффициенты $\tilde{\Lambda}^l_{\cdot q}$ в векторном законе

$$\tilde{V}^l = \tilde{\Lambda}^l_{\cdot q}\tilde{V}^q. \tag{9.3.3}$$

Ограничимся такими преобразованиями из группы $SL(4,C)$, которые характеризуются вещественными коэффициентами $\tilde{\Lambda}^l_{\cdot q}$. Они образуют *15-параметрическую группу* $SU(2,2)$. Можно сказать, что эти преобразования представляют собой другое, по сравнению с подгруппой $SU(4)$, сечение группы $SL(4,C)$.

Подчеркнем, что компоненты $\tilde{V}^l$, так же, как и $\tilde{W}^l$, в общем случае являются комплексными. Наложим на элементы, определяющие эти векторы, условия, потребовав, чтобы компоненты $\tilde{V}^l$ в (9.3.3) были вещественными. В этом случае комплексная квадратичная форма вида (9.2.8) превращается в вещественную квадратичную форму

$$\varepsilon_{rspq} i^r k^s j^p l^q = 2 \sum_{a=1}^{6} \tilde{V}^a \tilde{W}^a, \tag{9.3.4}$$

с сигнатурой $(+++--)$. При этом имеет место закон инерции (сохранения сигнатуры) этой формы. Таким образом, преобразования $SU(2,2)$ генерируют 15-параметрическую группу преобразований $SO(2,4)$ в вещественном 6-мерном многообразии [22]. Очевидно, что описанным способом можно образовать три таких сечения группы $SL(4,C)$.

3. Введем собирательные обозначения B^M для векторов типа $\tilde{V}^M$, $\tilde{W}^M$ и рассмотрим ортогональные преобразования в таком 6-мерном (плоском) многообразии:

$$B'^M = L^M_{\cdot N} B^N, \tag{9.3.5}$$

где $M, N = 0,1,2,3,4,5$. Здесь и в дальнейшем индексами 0 и 4 будем обозначать временно-подобные компоненты, а остальными - - пространственно-подобные. Вещественные коэффициенты $L^M_{\cdot N}$ соответствуют комплексным коэффициентам $\tilde{\Lambda}^l_{\cdot q}$ в (9.3.3). Очевидно, они образуют 6x6-матрицу. Группу таких преобразований можно разложить на 4 подгруппы [22].

а) Подгруппа 4-мерных преобразований характеризуется матрицей $L^M_{\cdot N}$ вида

$$(L^M_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^\mu_{\cdot\nu} & L^\mu_{\cdot 4} & L^\mu_{\cdot 5} \\ \hline L^4_{\cdot\nu} & L^4_{\cdot 4} & L^4_{\cdot 5} \\ \hline L^5_{\cdot\nu} & L^5_{\cdot 4} & L^5_{\cdot 5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^\mu_{\cdot\nu} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{9.3.6}$$

где подматрица 4-мерных преобразований $L^{\mu}_{.\nu}$ определяется 6 параметрами. Очевидно, что при этих преобразованиях [1]

$$B'^{\mu} = L^{\mu}_{.\nu} B^{\nu}; \tag{9.3.7}$$

$$B'^{4} = B^{4}; \tag{9.3.8}$$

$$B'^{5} = B^{5}. \tag{9.3.9}$$

б) 4-Параметрическая подгруппа преобразований вида

$$(L^{M}_{.N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^{\mu}_{.4} & L^{\mu}_{.5} \\ \hline L^{4}_{.\nu} & L^{4}_{.4} & L^{4}_{.5} \\ \hline L^{5}_{.\nu} & L^{5}_{.4} & L^{5}_{.5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & a^{\mu} & a^{\mu} \\ \hline -a_{\nu} & 1 - a^2/2 & -a^2/2 \\ \hline a_{\nu} & a^2/2 & 1 + a^2/2 \end{array}\right) \tag{9.3.10}$$

характеризуется 4 вещественными параметрами a_{μ}. Здесь использовано обозначение

$$a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2.$$

Легко видеть, что определитель подматрицы

$$\begin{vmatrix} L^{4}_{.4} & L^{4}_{.5} \\ L^{5}_{.4} & L^{5}_{.5} \end{vmatrix} = 1. \tag{9.3.11}$$

При таких преобразованиях имеем

$$B'^{\mu} = B^{\mu} + a^{\mu} B^{4} + a^{\mu} B^{5}; \tag{9.3.12}$$

$$B'^{4} = -a_{\nu} B^{\nu} + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) B^{4} - \frac{a^2}{2} B^{5}; \tag{9.3.13}$$

$$B'^{5} = a_{\nu} B^{\nu} + \frac{a^2}{2} B^{4} + \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) B^{5}. \tag{9.3.14}$$

Для 4-мерных компонент B^{μ} это означает трансляцию, зависящую от дополнительных компонент B^4 и B^5. [2]

[1] Эти преобразования можно сопоставить с преобразованиями (7.2.3) – (7.2.4) 4-мерных компонент P^{μ} и P^{8}, порождаемых группой $SL(2,C)$ в рамках теории БСКО ранга(4,4).

[2] Эти преобразования можно уподобить суперсимметричным преобразованиям (7.6.7) и (7.6.8) в рамках теории БСКО ранга (4,4).

в) 4-Параметрическая подгруппа преобразований вида

$$(L^M_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^\mu_{\cdot 4} & L^\mu_{\cdot 5} \\ \hline L^4_{\cdot\nu} & L^4_{\cdot 4} & L^4_{\cdot 5} \\ \hline L^5_{\cdot\nu} & L^5_{\cdot 4} & L^5_{\cdot 5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & c^\mu & -c^\mu \\ \hline -c^\nu & 1-c^2/2 & c^2/2 \\ \hline -c^\nu & -c^2/2 & 1+c^2/2 \end{array}\right) \tag{9.3.15}$$

характеризуется 4 вещественными параметрами c^μ. Здесь использовано обозначение

$$c^2 = (c^0)^2 - (c^1)^2 - (c^2)^2 - (c^3)^2.$$

При этих преобразованиях компоненты 6-мерного вектора изменяются следующим образом

$$B'^\mu = B^\mu + c^\mu B^4 + -c^\mu B^5; \tag{9.3.16}$$

$$B'^4 = -c_\nu B^\nu + \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) B^4 + \frac{c^2}{2} B^5; \tag{9.3.17}$$

$$B'^5 = -c_\nu B^\nu - \frac{c^2}{2} B^4 + \left(1 + \frac{c^2}{2}\right) B^5, \tag{9.3.18}$$

аналогичным (9.3.12) – (9.3.14). Разница состоит в знаках при векторных параметрах.

г) 1-Параметрическая подгруппа, характеризуемая матрицей

$$(L^M_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \hline 0 & \varphi_2 & \varphi_1 \end{array}\right), \tag{9.3.19}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1+\rho^2}{2\rho}; \quad \varphi_2 = \frac{1-\rho^2}{2\rho},$$

так что $\varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 1$. В качестве независимого параметра выступает величина ρ. При этих преобразованиях имеем

$$B'^\mu = B^\mu; \tag{9.3.20}$$

$$B'^4 = \frac{1+\rho^2}{2\rho} B^4 + \frac{1-\rho^2}{2\rho} B^5; \tag{9.3.21}$$

$$B'^5 = \frac{1-\rho^2}{2\rho} B^4 + \frac{1+\rho^2}{2\rho} B^5. \tag{9.3.22}$$

4. Эти четыре типа преобразований интересны тем, что от них можно перейти к 4 видам известных в 4-мерной теории преобразованиям, на первый взгляд, имеющих совершенно различную природу. Чтобы это показать, перейдем к новой системе компонент 6-мерного вектора. Пусть

$$\tilde{B}^{\mu} = \frac{1}{B^4 + B^5} B^{\mu}; \tag{9.3.23}$$

$$\tilde{B}^{4} = -B^4 + B^5; \tag{9.3.24}$$

$$\tilde{B}^{5} = B^4 + B^5. \tag{9.3.25}$$

Отдельно рассмотрим преобразования новых компонент $\tilde{B}^M$ при охарактеризованных выше подгруппах преобразований.

а) При преобразованиях (9.3.6) – (9.3.7) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = L^{\mu}_{\cdot\nu} \tilde{B}^{\nu}; \tag{9.3.26}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4}; \tag{9.3.27}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5}. \tag{9.3.28}$$

Это обычный закон для 4-мерных преобразований Лоренца.

б) При преобразованиях (9.3.10) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \tilde{B}^{\mu} + a^{\mu}; \tag{9.3.29}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4} + 2a_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + a^2\tilde{B}^{5}; \tag{9.3.30}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5}. \tag{9.3.31}$$

Для 4-мерных компонент $\tilde{B}^{\mu}$ это группа трансляций с параметрами a^{μ}. Компонента $\tilde{B}^5$ остается инвариантной.

в) При преобразованиях (9.3.15) – (9.3.18) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \frac{\tilde{B}^{\mu} - c^{\mu}\tilde{B}^4/\tilde{B}^5}{1 - 2c_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + c^2\tilde{B}^4/\tilde{B}^5}; \tag{9.3.32}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4}; \tag{9.3.33}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5} - 2c_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + c^2\tilde{B}^{4}. \tag{9.3.34}$$

Ограничимся случаем 6-мерного изотропного вектора B^M, такого что

$$G_{MN}B^M B^N = g_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu} + (B^4)^2 - (B^5)^2 = 0. \tag{9.3.35}$$

Переходя к новым компонентам (9.3.23) – (9.3.25), отсюда имеем

$$g_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu}\tilde{B}^{\nu} = \frac{\tilde{B}^4}{\tilde{B}^5}. \tag{9.3.36}$$

Подставляя это соотношение в (9.3.32), имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \frac{\tilde{B}^{\mu} - c^{\mu}(g_{\alpha\beta}\tilde{B}^{\alpha}\tilde{B}^{\beta})}{1 - 2c_{\lambda}\tilde{B}^{\lambda} + c^2(g_{\lambda\sigma}\tilde{B}^{\lambda}\tilde{B}^{\sigma})}. \tag{9.3.37}$$

Такие преобразования называются *специальными конформными преобразованиями (СКП)*. Они характеризуются четырьмя параметрами c^{μ}.

г) При преобразованиях (9.3.19) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \rho\tilde{B}^{\mu}; \tag{9.3.38}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \rho\tilde{B}^{4}; \tag{9.3.39}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \frac{1}{\rho}\tilde{B}^{5}. \tag{9.3.40}$$

Для 4-мерных компонент $\tilde{B}^{\mu}$ эти преобразования называются *дилатацией* или конформными преобразованиями (в узком смысле понимания этого термина).

Таким образом, четыре типа преобразований (9.3.26), (9.3.29), (9.3.32), (9.3.37) 4-мерных компонент вектора $\tilde{B}^{\mu}$ можно описать 15-параметрическими преобразованиями (9.3.5) типа Лоренца в 6-мерном многообразии с сигнатурой $(+ - - - + -)$. [3]

9.4 16-Мерные векторы и обобщенная метрика

1.Вернемся к ранее изложенной методике развития теории БСКО. Из 4-компонентных спиноров и коспиноров формальным

[3]Охарактеризованные здесь четыре типа преобразований в 6-мерном многообразии в некотором смысле можно уподобить преобразованиям, индуцированным четырьмя подгруппами группы $SL(3, C)$ в 9-мерном многообразии. При этом 4-мерные преобразования напрямую соответствуют друг другу в этих двух случаях, преобразования трансляций и СКП (в совокупности 8-параметрические) соответствуют преобразованиям (7.5.1) и (7.6.1) в теории БСКО ранга (4,4), а дилатации в 6-мерии (9.3.19) можно поставить в соответствие вещественной части конформных преобразований (7.7.2) в теории БСКО ранга (4,4).

образом можно задать спинтензоры произвольного ранга. Опять рассмотрим смешанные спинтензоры 2-го ранга

$$B^{s\dot{r}} = c_1 i^s \alpha^{\dot{r}} + c_3 k^s \beta^{\dot{r}} + c_3 j^s \gamma^{\dot{r}} + c_4 l^s \lambda^{\dot{r}}, \qquad (9.4.1)$$

которые играли ключевую роль в теории БСКО рангов (3,3) и (4,4). Выделим случаи, когда коэффициенты c_μ принимают значения: $+1$, -1, 0. Из компонент $B^{s\dot{r}}$ построим матрицу. Когда в (9.4.1) пары элементов характеризуются комплексно сопряженными параметрами, эта матрица представляется в виде

$$(B^{s\dot{r}}) = \sum_{l=1}^{16} \kappa_l B^l, \qquad (9.4.2)$$

где B^0, B^1, $\cdots$, B^{15} – 16 вещественных чисел, κ_l – шестнадцать 4-рядных матриц, обобщающих матрицы Паули и матрицы Гелл-Манна (5.4.3). Запишем их в следующем представлении

$$\kappa_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\kappa_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.4.3}$$

Эти матрицы не образуют алгебру Клиффорда.

2. Из матричного соотношения (9.4.2) легко выразить компоненты B^a через матричные элементы $B^{s\dot{r}}$:

$$\begin{array}{ll} B^0 = \frac{1}{2}(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}); & B^1 = \frac{1}{2}(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}); \\ B^2 = \frac{i}{2}(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}); & B^3 = \frac{1}{2}(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}); \\ B^4 = \frac{1}{2}(B^{1\dot{3}} + B^{3\dot{1}}); & B^5 = \frac{i}{2}(B^{1\dot{3}} - B^{3\dot{1}}); \\ B^6 = \frac{1}{2}(B^{2\dot{3}} + B^{3\dot{2}}); & B^7 = \frac{i}{2}(B^{2\dot{3}} - B^{3\dot{2}}); \\ B^8 = B^{3\dot{3}}; & B^9 = \frac{1}{2}(B^{1\dot{4}} + B^{4\dot{1}}); \\ B^{10} = \frac{i}{2}(B^{1\dot{4}} - B^{4\dot{1}}); & B^{11} = \frac{1}{2}(B^{2\dot{4}} + B^{4\dot{2}}); \\ B^{12} = \frac{i}{2}(B^{2\dot{4}} - B^{4\dot{2}}); & B^{13} = \frac{1}{2}(B^{3\dot{4}} + B^{4\dot{3}}); \\ B^{14} = \frac{i}{2}(B^{3\dot{4}} - B^{4\dot{3}}); & B^{15} = B^{4\dot{4}}. \end{array} \tag{9.4.4}$$

Можно показать, что при $SL(4, C)$-преобразованиях (9.1.5) величины (9.3.4) преобразуются как компоненты вектора.

3. Записав определитель из элементов матрицы (9.4.2) через компоненты вектора, получаем форму четвертой степени [60]

$$\begin{aligned} ||B^{s\dot{r}}|| = {} & B_{15}[B_8(B_0^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2) + \\ & +2B_1(B_4B_6 + B_5B_7) - B_0(B_4^2 + B_5^2 + B_6^2 + B_7^2) + \\ & 2B_2(B_5B_6 - B_4B_7) + B_3(B_4^2 + B_5^2 - B_6^2 - B_7^2)] + \\ & +B_0[2B_4(B_9B_{13} + B_{10}B_{14}) - 2B_5(B_9B_{14} - B_{10}B_{13}) + \\ & +2B_6(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14}) - 2B_7(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13}) - \\ & -B_8(B_9^2 + B_{10}^2 + B_{11}^2 + B_{12}^2)] - \\ & -B_1[2B_4(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14}) - 2B_5(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13}) + \\ & +2B_6(B_9B_{13} + B_{10}B_{14}) - 2B_7(B_9B_{14} - B_{10}B_{13}) + \\ & -B_8(B_9B_{11} + B_{10}B_{12})] - \\ & -B_2[2B_4(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13}) + 2B_5(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14}) - \\ & -2B_6(B_9B_{14} - B_{10}B_{13}) - 2B_7(B_9B_{13} + B_{10}B_{14}) - \\ & -B_8(B_{10}B_{11} - B_9B_{12})] - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-B_3[2B_4(B_9B_{13}+B_{10}B_{14})-2B_5(B_9B_{14}-B_{10}B_{13})-\\
&-2B_6(B_{11}B_{13}+B_{12}B_{14})-2B_7(B_{11}B_{14}-B_{12}B_{13})-\\
&-B_8(B_9^2+B_{10}^2-B_{11}^2-B_{12}^2)]-\\
&\qquad -(B_4B_6+B_5B_7)(B_9B_{11}+B_{10}B_{12})-\\
&\qquad -(B_4B_7-B_5B_6)(B_9B_{12}-B_{10}B_{11})-\\
&-\frac{1}{2}(B_4^2+B_5^2-B_6^2-B_7^2)(B_9^2+B_{10}^2-B_{11}^2-B_{12}^2)+\\
&+\frac{1}{2}(B_4^2+B_5^2+B_6^2+B_7^2)(B_9^2+B_{10}^2+B_{11}^2+B_{12}^2)-\\
&\qquad -(B_0^2-B_1^2-B_2^2-B_3^2)(B_{13}^2+B_{14}^2)=\\
&\qquad\qquad = G^{(16)}_{ABCD}B^AB^BB^CB^D. \qquad (9.4.5)
\end{aligned}
$$

(Здесь для удобства все индексы вектора записаны снизу.) Эта формула обобщает квадратичную форму (2.6.4) в теории БСКО ранга (3,3) или кубичную форму (5.5.2) в теории БСКО ранга (4,4).

Аналогично случаю БСКО ранга (4,4) можно говорить о неизотропных (в общем случае) векторах, построенных на четырех парах сопряженных элементов (в формуле (9.4.1) все c_μ отличны от нуля), об единожды изотропных векторах, построенных на трех парах элементов, о дважды изотропных векторах, построенных на двух парах элементов, и о трижды изотропных векторах. Для всех изотропных векторов

$$G^{(16)}_{ABCD}B^AB^BB^CB^D=0, \qquad (9.4.6)$$

но для дважды и трижды изотропных векторов равны нулю и другие инварианты. Заметим, что произведенные в предыдущих разделах расщепления четырех пар элементов на две части могут оказаться полезными при рассмотрении дважды изотропных частиц. Согласно такому подходу фундаментальное 4x4-отношение в форме (9.2.11) можно понимать как парное отношение между двумя дважды изотропными частицами.

9.5 К теории четырехточечной геометрии

1. Назовем *гиперпространством-временем* четырехточечную унарную конструкцию, выводимую из БСКО ранга (5,5) по

такому же рецепту, как в разделе 2.8 определялся двухточечный прообраз 4-мерного пространства-времени из БСКО ранга (3,3), или как строилась трехточечная геометрия из БСКО ранга (4,4) в разделах 5.6 - 5.8. Под "точками" по-прежнему будем понимать новые элементы, образованные сшивкой пар сопряженных элементов из двух множеств. Поставим в соответствие элементам БСКО ранга (5,5) элементы унарной четырехточечной геометрии согласно рисунку 9.1. Вместо квадрата парных отношений

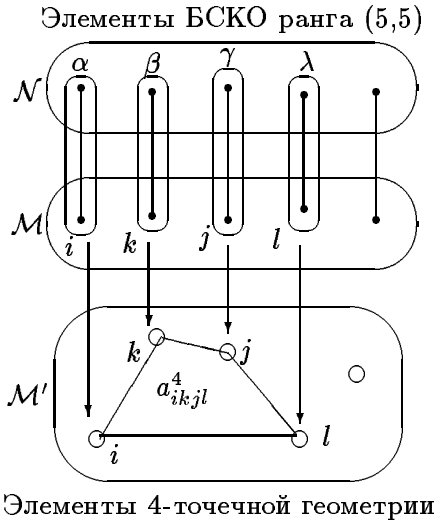


Рис. 9.1: Переход от БСКО ранга (5,5) к унарной четырехточечной геометрии

(2.6.10) в пространстве Минковского или куба отношений (5.6.1) в трехточечной геометрии определим четверные отношения через фундаментальное 4x4- отношение:

$$a^4_{(ikjl)} = \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\;k\;j\;l \end{bmatrix} \equiv B^4(ikjl). \qquad (9.5.1)$$

2. Определим *скалярное произведение четырех 16-мерных векторов*, построенных на четырех (в общем случае различных) восьмерках сопряженных элементов БСКО ранга (5,5), через введенные выше инварианты. Это скалярное произведение можно записать в следующих формах:

$$\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(mnrs), \vec{B}(qtvw), \vec{B}(fhdg)\right) \equiv$$

$$\equiv G_{ABCD} B^A_{(4)}(ikjl) B^B_{(4)}(mnrs) B^C_{(4)}(qtvw) B^D_{(4)}(fhdg) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{24} \varepsilon_{abce} \varepsilon_{\dot{x}\dot{y}\dot{z}\dot{u}} B^{a\dot{x}}(ikjl) B^{b\dot{y}}(mnrs) B^{c\dot{z}}(qtvw) B^{e\dot{u}}(fhdg) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{24} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma\lambda \\ ikjl \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu\nu\rho\sigma \\ mnrs \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \kappa\tau\upsilon\omega \\ qtvw \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \phi\chi\delta\eta \\ fhdg \end{bmatrix} \right\}. \qquad (9.5.2)$$

Эти формулы справедливы для векторов B^A с любой внутренней сигнатурой, т.е. для любых знаков комбинаций элементов в определении $B^{s\dot{r}}$ в (8.4.1). Выражение (9.5.2) расписывается через $4^4 = 256$ комбинаций типа (9.5.1). Когда все четыре восьмерки элементов совпадают, формула (9.5.2) переходит в (9.5.1).

3. Построение четырехточечной геометрии, как и в двух предыдущих случаях, следует начать с обобщения на БСКО ранга (5,5) теоремы косинусов. Теперь эта обобщенная теорема косинусов записывается для пяти пар элементов, изображенных на рисунке 9.2. Выделим "точку" i. С ее участием можно образовать

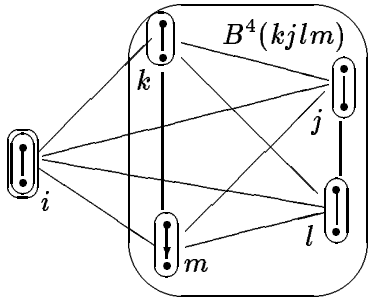


Рис. 9.2: Обобщенная теорема косинусов в четырехточечной геометрии записывается для пяти пар элементов

четыре четырехугольника: $(ikjl)$, $(ikjm)$, $(ijlm)$, $(iklm)$. Сопоставим этим четырехугольникам четыре 16-мерных вектора и запишем согласно (9.5.2) их скалярное произведение. Учитывая, что отдельные инварианты из 256 слагаемых справа в (9.5.2) обращаются в нуль как только две пары элементов совпадают, получим более компактные выражение, представляющее обобщенную теорему косинусов.

Как и в двух предыдущих случаях вид обобщенной теоремы косинусов существенно зависит от внутренней сигнатуры векторов B^A. Запишем вид этих теорем отдельно для всех возможных

внутренних сигнатур: для сигнатур $(+\,+\,+\,+)$ и $(-\,-\,-\,-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\frac{11}{9}\Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ +\frac{8}{3}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big); \qquad (9.5.3)$$

для сигнатур $(-\,+\,+\,+)$ и $(+\,-\,-\,-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \frac{11}{9}\Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ +\frac{8}{9}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big); \qquad (9.5.4)$$

для сигнатур $(+\,-\,+\,-)$ и $(-\,+\,-\,+)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \frac{1}{9}\Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ +\frac{8}{3}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big); \qquad (9.5.5)$$

для сигнатур $(-\,-\,+\,-)$ и $(+\,+\,-\,+)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\frac{1}{9}\Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ +\frac{8}{9}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big); \qquad (9.5.6)$$

для сигнатур $(-\,+\,-\,-)$, $(-\,-\,-\,+)$, $(+\,-\,+\,+)$ и $(+\,+\,+\,-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ +\frac{1}{8}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big); \qquad (9.5.7)$$

для сигнатур $(+\,+\,-\,-)$, $(+\,-\,-\,+)$, $(-\,-\,+\,+)$ и $(-\,+\,+\,-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \Big(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\Big) + \\ -\frac{1}{8}\Big(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\Big). \qquad (9.5.8)$$

Такое разнообразие возможностей можно трактовать как наличие нескольких типов четырехточечных геометрий, обобщающих общепринятую двухточечную геометрию Минковского.

4. Опираясь на обобщенные теоремы косинусов можно построить *пространственную матрицу* с элементами M_{jklm}. Ее элементы характеризуются соответствующими четырьмя "точками" j, k, l, m при одной общей для всех элементов "точке" i. Далее следует оставить за "точкой" i индивидуальный характер, а остальным четырем придать собирательный смысл. Они могут принимать некоторое число разных значений. Элементы такой матрицы будут иметь вид

$$M_{jklm} = \left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right). \qquad (9.5.9)$$

5. От матрицы (9.5.9) можно перейти к пространственному (четверному) определителю, обобщающему известный определитель Грама. Далее, используя методику и теоремы, изложенные в разделах 5.7 и 5.8, можно найти закон четырехточечной геометрии. Не производя выкладки, отметим лишь несколько характерных черт этой процедуры. Во-первых, пространственный определитель должен строиться на 17 векторах, т.е. он обладает $N = 17^4$ элементами. Во-вторых, наибольший интерес представляет случай выбора *гипердетерминанта*, т.е., напомним, когда все четыре ориентации являются альтернативными. В третьих, в этом случае отсутствуют ограничения, указанные в разделе 5.8.

9.6 Гиперчастицы

1. Выберем вектор B^A с внутренней сигнатурой $(+++\,+)$. Для таких векторов по аналогии с БСКО рангов (3,3) и (4,4) можно построить обобщение импульсного пространства Лобачевского. Назовем такое пространство *гиперпространством Лобачевского*. Его закон записывается для 17 новых элементов в виде равенства нулю пространственного (четверичного) определителя

$$\Phi = \left| B_{\substack{\pm \\ i}\,\substack{\pm \\ k}\,\substack{\pm \\ j}\,\substack{\pm \\ l}} \right| = 0, \qquad (9.6.1)$$

где стоящие на главной диагонали элементы обладают свойством

$$a_{iiii} = a_{kkkk} = a_{jjjj} = \cdots = \tilde{M}^4 c^4. \qquad (9.6.2)$$

Это выражение соответствует (3.1.12) в теории БСКО ранга (3,3) и (6.1.4) в теории БСКО ранга (4,4). Оно означает, что

16-мерные компоненты гиперимпульсов удовлетворяют соотношениям:

$$G^{(16)}_{ABCD}P^A_{(4)}P^B_{(4)}P^C_{(4)}P^D_{(4)} = \tilde{M}^4c^4, \tag{9.6.3}$$

где $\tilde{M}$ играет роль массы гиперчастицы. Левая часть этой формулы расписывается через компоненты гиперимпульса с помощью выражения вида (9.3.12).

2. Очертим основные положения теории неизотропных *гиперчастиц*, т.е. частиц, описываемых четверками элементов в каждом их множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ БСКО ранга (5,5). Действуя по правилам, примененным в главах 3 и 6, их следует описывать четырьмя комплектами 8-компонентных столбцов вида

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= \begin{pmatrix} i^s \\ (\beta\gamma\lambda)_{\dot r} \end{pmatrix}; \quad \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^s \\ (\gamma\lambda\alpha)_{\dot r} \end{pmatrix}; \\ \Psi(3) &= \begin{pmatrix} j^s \\ (\lambda\alpha\beta)_{\dot r} \end{pmatrix}; \quad \Psi(4) = \begin{pmatrix} l^s \\ (\alpha\beta\gamma)_{\dot r} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.6.4}$$

Очевидным образом через сопряженные элементы записывается комплект из четырех 8-компонентных строк: $\Psi^\dagger(1)$, $\Psi^\dagger(2)$, $\Psi^\dagger(3)$, $\Psi^\dagger(4)$.

Выражения в (9.6.4) следует назвать 8-компонентными биспинорами. При преобразованиях параметров (9.1.5) они преобразуются по закону

$$\Psi'(s) = S\Psi(s), \tag{9.6.5}$$

где $s = 1, 2, 3, 4$, а матрица S приводима к двум блокам из 4x4-матриц, определяемых коэффициентами из (9.1.5),

$$S = \begin{pmatrix} C^s_q & 0 \\ 0 & Q^{*\dot p}_{\dot r} \end{pmatrix}. \tag{9.6.6}$$

3. Подберем матрицу $\tilde{\Upsilon}_0$ такую, чтобы для любого s выполнялось соотношение

$$\Psi^\dagger(s)\tilde{\Upsilon}_0\Psi = \varepsilon_{srpq}i^sk^rj^pl^q + \varepsilon_{\dot s\dot r\dot p\dot q}\alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p}\lambda^{\dot q} \equiv \overline{\Psi}(s)\Psi(s). \tag{9.6.7}$$

Далее из 4-рядных матриц из (9.4.3) можно построить такие 8-рядные матрицы Υ^A, чтобы выполнялись соотношения:

$$2(P^A + \tilde{P}^A) = \sum_{s=1}^{4}\tilde{\Psi}(s)\Upsilon^A\Psi(s), \tag{9.6.8}$$

где компоненты 16-мерного вектора P^A определены формулами (9.4.4), а компоненты $\tilde{\Psi}(s)$ строятся из компонент ковариантного 4-спинора так же, как компоненты P^A образуются из контравариантного 4-спинора. Такие 8-рядные матрицы имеют вид

$$\Upsilon^0 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0 \\ \kappa_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Upsilon^l = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_l \\ \kappa_l & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.6.9}$$

Расщепить векторы слева в (9.6.8) можно с помощью формул, аналогичных (6.2.11) – (6.2.14).

4. Для определения гиперчастицы опять следует ввести понятие ее "собственной системы отношений" и в ней определить условия на отношения между элементами гиперчастицы. Они обобщают соотношения, введенные в главах 3 и 6, и имеют вид

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = u_{j\gamma} = u_{l\lambda} = \tilde{M}c; \tag{9.6.10}$$

$$u_{i\beta} = u_{k\alpha} = \cdots = u_{j\lambda} = u_{l\gamma} = 0, \tag{9.6.11}$$

где в последнем соотношении имеются ввиду все парные отношения между несопряженными элементами.

Далее аналогично разделам 3.3 и 6.3 приходим к двум возможным знакам определителей для составляющих гиперчастицу элементов из одного множества:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} = \pm(\tilde{M}c)^2. \tag{9.6.12}$$

Сопоставим *гиперчастице* знак плюс, а *гиперантичастице* – знак минус. Отсюда можно прийти к формулам, аналогичным (6.3.11) – (6.3.14), записанным для обобщенных частиц в рамках БСКО(4,4). Вид этих соотношений не меняется при преобразованиях из группы $SU(4)$.

5. Гипербусты, дополняющие $SU(4)$ до группы $SL(4,C)$, характеризуются 16 вещественными параметрами

$$(\tilde{C}^s_r) = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & b_4 - ib_5 & b_9 - ib_{10} \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & b_6 - ib_7 & b_{11} - ib_{12} \\ b_4 + ib_5 & b_6 + ib_7 & b_8 & b_{13} - ib_{14} \\ b_9 + ib_{10} & b_{11} + ib_{12} & b_{13} + ib_{14} & b_{16} \end{pmatrix}, \tag{9.6.13}$$

на которые наложено условие

$$\left|\tilde{C}^s_r\right| = 1. \tag{9.6.14}$$

Таким образом, независимыми являются только 15 параметров. Эти условия обобщают (2.4.10) в теории БСКО(3,3) или (6.4.2) в теории БСКО(4,4).

6. Используя преобразования гипербустов, можно записать в произвольной системе отношений четыре комплекта соотношений между контра- и ковариантными компонентами составляющих биспиноров (9.6.4) типа

$$i^s = K^{s\dot{r}}(\beta\gamma\lambda)_{\dot{r}}; \quad (\beta\gamma\lambda)_{\dot{r}} = \tilde{K}_{\dot{r}s} i^s. \qquad (9.6.15)$$

От них несложно перейти к аналогам уравнений Дирака в импульсном гиперпространстве. Напомним, что они представляют собой четыре комплекта из 8-компонентных матричных выражений.

9.7 Редукция БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4)

1. Для физических приложений теории БСКО ранга (5,5) важно ее записать в терминах БСКО ранга (3,3), из которой уже выводятся понятия наблюдаемого 4-мерного классического пространства-времени. Чтобы это сделать следует дважды применить метод редукции БСКО к понятиям БСКО на единицу меньшего ранга.

Заметим, что в современной теоретической физике широко используется аналогичная процедура редукции (унарных) многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна к понятиям 4-мерного классического пространства-времени. Эта процедура известна как метод последовательного $1+1+\cdots+n$-расщепления многомерного многообразия. Для случая двукратного расщепления эта процедура называется диадным методом. Этот метод был применен в нашей книге [13] для записи 6-мерной геометрической модели грави- электро-слабых взаимодействий в терминах 4-мерной теории. Он также полезен при записи 5-мерной теории Калуцы-Клейна в терминах наблюдателя, т.е. через спроектированные величины на направление времени и на 3-мерные пространственные сечения используемой системы отсчета.

В случае теории БСКО ранга (5,5) фактически речь идет о разработке аналогичного *бинарного диадного метода.* В этом разделе ограничимся обсуждением первого шага такого метода — переходом от БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4), помня, что второй шаг, т.е. переход от БСКО ранга (4,4) к понятиям БСКО ранга (3,3), уже был обсужден в предыдущей главе.

2. Легко видеть, что из группы преобразований параметров $SL(4,C)$ можно выделить подгруппу $SL(3,C)$ четырьмя способами. Учитывая, что в рамках каждой из таких подгрупп имеются по три вида выделения подгруппы $SL(2,C)$, формально получаем 12 вариантов редукции БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (3,3). Остановимся на выделении одной из подгрупп $SL(4,C)$ и рассмотрим вопрос о дополнении ее до полной группы $SL(4,C)$. Это производится аналогично изложенному в главе 7. Группа $SL(4,C)$ расщепляется на 4 подгруппы:

$$\Big(\ SL(4,C)\ \Big) = \Big(\ SL(3,C)\ \Big) + \Big(\ ^{-}\ \Big) +$$

$$+ \Big(\ ^{-}\ \Big) + \Big(\ ^{-}\ \Big). \qquad (9.7.1)$$

Кроме подгруппы $SL(3,C)$ справа указаны гиперкалибровочные преобразования, гиперсуперсимметричные преобразования, гиперконформные преобразования. Каждая из этих подгрупп характеризуется своим числом параметров. Выпишем баланс этих параметров:

$$30 = 16 + 6 + 6 + 2. \qquad (9.7.2)$$

Кратко охарактеризуем каждую из этих подгрупп.

3. Выберем вариант подгруппы $SL(3,C)$, преобразования которой задаются матрицами:

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 & 0 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9.7.3)$$

Условия на коэффициенты такого преобразования выписаны в (9.1.6), т.е., напомним, они характеризуются 16 независимыми вещественными параметрами.

Из комбинаций с участием параметров с номером 4 можно образовать дополнительные унарные 9-мерные величины. Аналогично изложенному в разделе 7.3 из комбинаций исключительно из параметров с номером 4 строится внутреннее пространство обобщенной частицы.

4. Подгруппа гиперкалибровочных преобразований характеризуется матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.7.4}$$

где C_1^4, C_2^4, C_3^4 – три комплексных параметра, на котороые не наложено никаких дополнительных условий, т.е. эта группа определяется шестью вещественными параметрами. Очевидно, как и в случае (8.5.1), эта подгруппа является абелевой.

Аналогично изложенному в разделе 8.5 легко показать, что при этих преобразованиях 9-мерные компоненты вектора не меняются, тогда как все дополнительные компоненты изменяются. Эти изменения можно трактовать как обобщенные калибровочные преобразования.

5. Подгруппа гиперсуперсимметричных преобразований определяется матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & C_4^1 \\ 0 & 1 & 0 & C_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & C_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.7.5}$$

где опять на три комплексных параметра не наложено каких-либо условий, т.е. эта также абелева подгруппа характеризуется шестью вещественными параметрами.

При таких преобразованиях компоненты 9-мерных векторов перемешиваются с дополнительными компонентами аналогично тому, как это происходит при суперсимметричных преобразованиях. Заметим, что эти преобразования вместе с суперсимметричными преобразованиями, описанными в разделе 7.6, могут трактоваться в духе 4-мерной суперсимметричной теории с $N = 2$.

6. Наконец, двухпараметрическая подгруппа гиперконформных преобразований задается матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} C_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4^4 \end{pmatrix}, \tag{9.7.6}$$

где четыре комплексных параметра связаны следующими условиями:

$$C_1^1 = C_2^2 = C_3^3; \quad C_4^4 = (C_1^1)^{-2}. \tag{9.7.7}$$

Как и в разделе 7.7, из этих преобразований можно выделить фазовые преобразования и изменения модуля.

9.8 К физической интерпретации БСКО более высоких рангов

В бинарной геометрофизике БСКО более высоких рангов могут применяться для описания различных аспектов физической реальности. Назовем некоторые из них.

1. Прежде всего, с помощью БСКО ранга (4,4) и более высоких рангов можно описывать внутренние симметрии элементарных частиц, которые в современных теориях описываются группами SU(4), SU(5) и т.д. О характере такого использования БСКО уже сделано замечание в разделе 6.7.

2. Другое, более естественное применение БСКО более высоких рангов, состоит в описании как внешних, так и внутренних симметрий неких обобщенных частиц. Не исключено, что среди уже наблюдаемых резонансов или тяжелых элементарных частиц имеются такие, которые должны описываться комплексными отношениями более высоких рангов.

3. Наконец, с помощью БСКО, например, ранга (5,5) можно описывать взаимодействия между уже рассмотренными выше элементарными частицами (лептонами и барионами). Для этого можно использовать базовое 5x5-отношение, построенное по рецепту базового 4x4-отношения в (8.1.1). Оно записывается через 5 элементов в начальном и 5 элементов в конечном состояниях. Полагая, что по три элемента в каждом состоянии описывают барион, а оставшиеся две пары соответствуют лептону, приходим к некому алгебраическому выражению, соответствующему лагранжиану взаимодействия лептона и бариона. Аналогичным образом можно построить выражение, которое могло бы описывать взаимодействие двух барионов. Для этого следовало бы записать базовое 6x6-отношение, взятое из теории БСКО ранга (6,6).æ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

I. Завершая книгу, еще раз подчеркнем, что в ней рассматривались только алгебраические аспекты бинарной геометрофизики, составляющие лишь прообраз (первооснову для построения) классического пространства-времени. Исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы:

1. В рамках БСКО низших рангов (2,2), (3,3) и (4,4) описывается ряд ключевых свойств элементарных частиц. Понятиями БСКО ранга (3,3) описываются свойства идеализированных лептонов, а с помощью БСКО ранга (4,4) удается ввести ряд понятий из хромодинамики. Примечательно, что это делается без использования уравнений поля или каких-либо сведений из теории классического пространства-времени.

2. Для описания прообраза классического пространства-времени достаточно ограничиться БСКО ранга (4,4). Из нее можно выделить как подсистему БСКО ранга (3,3), а из последней БСКО ранга (2,2). Каждая из них ответственна за свой блок свойств пространства-времени и элементарных частиц.

3. Из изложенного в главах 2 и 3 можно сделать вывод, что 4- мерность и сигнатура $(+---)$ классического пространства-времени обусловлены БСКО ранга (3,3). Таким образом, данный подход претендует на решение проблемы обоснования наблюдаемой размерности пространства (-времени). Другими словами, предложен ответ на вопрос, волновавший еще Э,Маха: "Почему пространство трехмерно?" Напомним, что данная проблема с разных сторон обсуждалась в работах А.Эддингтона, П.Эренфеста, А.Эйнштейна и других авторов.

4. Из теории БСКО ранга (3,3) следует, что параметры элементов являются компонентами спиноров, т.е. описываемые ими частицы (лептоны) автоматически оказываются фермионами. Таким образом, в бинарной геометрофизике 2-компонентные спиноры не постулируются, как это имеет место, например, в твисторной программе Р.Пенроуза, а естественным образом возникают в теории БСКО первого невырожденного ранга (3,3).

5. Векторные и тензорные характеристики частиц (импульсы, моменты) получаются из спиноров в виде известных квадратичных комбинаций. Они вводятся в результате перехода от БСКО к унарной системе вещественных отношений. Можно утверждать, что импульсное пространство возникает из первичных понятий (параметров элементов) ранее классических (координатных) пространственно-временных отношений. В этом смысле импульсное пространство первичнее координатного.

6. В рамках теории БСКО ранга (3,3) предложен новый взгляд на суть уравнений Дирака для массивных лептонов в импульсном пространстве. Показано, что они имеют смысл алгебраического соотношения между значениями двух компонент лептона в начальном и конечном состояниях.

7. БСКО минимального ранга (2,2), являющаяся вырожденной, ответственна за возникновение таких важных понятий классической физики, как действие, расстояние и вообще за идею эволюции.

8. Особо следует подчеркнуть, что в микромире параметры элементов БСКО ранга (2,2) имеют модуль, равный единице, т.е. характеризуются циклической зависимостью от вещественной фазы. В этом смысле параметры являются компактифицированными. Переход к классическому параметру эволюции, удовлетворяющему аксиоме Архимеда, будет рассмотрен в следующей части.

9. БСКО ранга (4,4) выступает в двух ролях. Во-первых, она, редуцированная к БСКО ранга (3,3), описывает взаимодействия между лептонами. Как показано в главе 8, 4-мерные импульсы частиц определяются параметрами, общими с БСКО ранга (3,3), а дополнительные (третьи) параметры описывают характеристики взаимодействия (заряды). Аналогичная ситуация имеет место в многомерных теориях Калуцы-Клейна, где дополнительные импульсы соответствуют зарядам частиц.

10. В другой роли БСКО ранга (4,4) описывает цветовые характеристики частиц, участвующих в сильных взаимодействиях, - - адронов. Такая теория строится по образу и подобию теории идеализированных лептонов, развитой в главе на основе БСКО ранга (3,3). Введены так называемые “обобщенные частицы”, имеющие составной характер наподобие трехкварковой структуры барионов в хромодинамике.

11. Показано, что при переходе к БСКО более высоких рангов естественно возникает еще один канал обобщения теории спиноров, отличный от общепринятого в рамках алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел. В рамках БСКО ранга (4,4) возникают 3-компонентные спиноры, комплекты из 6-компонентных биспиноров и ряд других понятий.

12. Аналогично теориям БСКО ранга (3,3) и БСКО ранга (4,4) можно построить теории БСКО еще более высоких рангов, начало которым положено в главе 9. Показано, что наряду с общими свойствами, присущими всем таким теориям, каждый новый ранг приводит к неким принципиально новым свойствам теории. Это продемонстрировано на примере БСКО ранга (5,5).

Таким образом, можно утверждать, что уже в рамках алгебры бинарной геометрофизики реализуется значительная часть свойств реляционной теории классического пространства-времени, перечисленных во введении.

II. В рамках развитого в книге математического аппарата теории систем отношений различного ранга высказан ряд гипотез по физической интерпретации введенных понятий:

1. Высказана идея, что (идеализированные) адроны – частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, должны описываться БСКО ранга (4,4). Это навеяно далеко идущей аналогией между теорией БСКО ранга (4,4) и известными свойствами хромодинамики, в частности, тройственным характером обобщенных частиц и трехкварковой структурой барионов, ключевой ролью группы $SU(3)$ в двух теориях и т.д.

2. Поскольку в бинарной геометрофизике теории лептонов и обобщенных частиц (адронов) строятся единообразно, то можно высказать гипотезу, что левая и правая компоненты массивных лептонов (в теории БСКО ранга (3,3)) имеют тот же характер, что и кварки, образующие адроны (в теории БСКО ранга (4,4)). Те и другие являются самыми элементарными понятиями, отличающимися лишь рангами.

3. Предсказан новый вид 6-компонентных уравнений Дирака, которые должны иметь место в теории сильно взаимодействующих частиц и от которых должен осуществляться переход к общепринятым 4-компонентным уравнениям Дирака для взаимодействующих частиц.

4. В рамках БСКО ранга (4,4) можно поставить вопрос о введении аналога (прообраза) классических пространственно-временных отношений. Возникает своеобразное 9-мерное унарное многообразие с кубичными метрическими отношениями. Высказана гипотеза, что такая унарная геометрия может иметь непосредственное отношение к теории атомного ядра.

5. Невольно напрашивается гипотеза, что три вида возможных 4-мерных пространственно-временных сечений, которые можно выделить в 9-мерном многообразии, можно связать с наличием трех поколений элементарных частиц.

6. В связи со вскрытыми теориями БСКО более высоких рангов можно высказать предположение, что возможны элементарные частицы, которые должны описываться БСКО рангов, более

высоких, нежели (4,4). Не исключено, что среди множества уже известных элементарных частиц и резонансов имеются частицы такого рода.

7. В изложенной части пока не рассматривались непосредственно фундаментальные взаимодействия элементарных частиц. Тем не менее, уже подчеркивалось, что БСКО ранга (4,4) описывает ряд свойств известных видов взаимодействий. Наличие БСКО более высоких рангов наводит на мысль о возможности существования за сильными взаимодействиями последующих "сверхсильных".

8. Поскольку из теории БСКО более высоких рангов, нежели (4,4), можно строить более сложные аналоги унарных пространственно-временных отношений, то возникает естественный вопрос о возможных их проявлениях в природе. Выскажем гипотезу, что в основу теории нейтронных звезд (пульсаров) следует положить одну из таких обобщенных унарных геометрий (может быть, следующую из БСКО ранга (5,5)).

III. Дальнейшее развитие бинарной геометрофизики будет изложено во второй части книги с тем же названием, но с подзаголовком "Теория физических взаимодействий". Как отсюда видно, вторая часть будет посвящена обсуждению перехода от алгебраических аспектов бинарной геометрофизики к теориям известных видов физических взаимодействий. Кратко очертим круг вопросов, решаемых во второй части:

1. Прежде всего, охарактеризуем основную идею перехода к макропонятиям. На протяжении всей этой части подчеркивалось, что частицы описываются параметрами элементов, которые определяются отношениями к некоторому набору эталонных (базисных) элементов. В качестве эталонных элементов выступают такие же элементарные частицы. При переходе к макрофизике необходимо заменить эталоны – отдельные частицы на базисный макроприбор, который содержит в себе огромное количество элементарных частиц – возможных базисов. Следовательно, макроотношения должны представлять собой некие понятия, полученные в результате усреднения (суммирования) по всем эталонным микроэлементам. В итоге возникают интегрирования по импульсам, соответствующие в обычной теории переходам к координатному представлению при помощи интегралов Фурье.

2. В определении интегралов Фурье ключевую роль играют параметры элементов БСКО ранга (2,2), имеющие экспоненциальный характер с мнимым показателем. Переход от эталонных микроэлементов к макроприбору фактически решает задачу перехода от компактифицированных параметров БСКО ранга (2,2) к некомпактифицированному параметру эволюции s (к понятию

времени и расстояния), а следовательно, и к понятиям классического пространства-времени (к многообразию, в котором имеет место аксиома Архимеда).

3. В алгебраической основе бинарной геометрофизики нет места для понятия поля, так же как не было места для самостоятельной категории непрерывного пространства-времени, по которому поля могут распространяться. При переходе к макроприбору пространственно-временные отношения возникают из первичных отношений БСКО, – таким же образом возникают и понятия, описывающие взаимодействия, т.е. из характеристик самих частиц. Это свидетельствует о том, что возникающая теория должна иметь дальнодействующий характер. Известно, что концепция дальнодействия реализуется в теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Следовательно, переход от алгебраических основ бинарной геометрофизики к известной теории должен осуществляться в духе теории прямого межчастичного взаимодействия. Во введении уже отмечалось, что идеи дальнодействия явились одной из составных частей бинарной геометрофизики.

4. Существенно отметить, что при переходе к макропонятиям из базового 4x4-отношения (см. главу 8) возникает выражение для интервала в многомерном многообразии. Для получения общепринятой теории необходимо осуществить редукцию к 4-мерному многообразию в духе аналогичной редукции многомерной теории Калуцы-Клейна к 4-мерному пространственно-временному сечению. В итоге получается метрика 4-мерного искривленного пространства- времени, описывающая гравитационное взаимодействие. Дополнительные понятия характеризуют электромагнитное и другие взаимодействия, опять-таки, в духе стандартной теории Калуцы- Клейна. Во введении уже отмечалось, что идеи многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна составляют третью составную часть бинарной геометрофизики.

Поднятые вопросы не исчерпывают проблем, решаемых бинарной геометрофизикой. Переосмысление квантовой теории с позиций бинарной геометрофизики предполагается изложить в другой части книги.

Приложения А

А.1 Вывод закона бинарной системы вещественных отношений ранга (2,2)

В работах группы Ю.И.Кулакова использовалось несколько методов для нахождения законов систем отношений [27, 40]. Продемонстрируем характер решения этой задачи с помощью одного из них — метода параметризации на простейшем примере БСВО ранга (2,2). В этом случае закон записывается для двух произвольных элементов i и k из множества $\mathcal{M}$ и двух элементов α и β из множества $\mathcal{N}$. Согласно изложенному, каждый из элементов должен характеризоваться лишь одним параметром. Обозначим их через x и y:

$$i^1 \equiv x_1; \quad k^1 \equiv x_2; \quad \alpha^1 \equiv y_1; \quad \beta^1 \equiv y_2,$$

тогда закон записывается в виде

$$\Phi\left(u(x_1, y_1), u(x_1, y_2), u(x_2, y_1), u(x_2, y_2)\right) = 0, \tag{А.1.1}$$

где

$$u(x_1, y_1) = u_{i\alpha}; \quad u(x_1, y_2) = u_{i\beta}; \quad u(x_2, y_1) = u_{k\alpha}; \quad u(x_2, y_2) = u_{k\beta}.$$

Предположим, что функция Φ дифференцируема по всем аргументам. Продифференцируем (А.1.1) последовательно по x_1, x_2, y_1, y_2:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\alpha}}\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1} & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\beta}}\frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial x_1} & +0 & +0 & = 0; \\
0 & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\alpha}}\frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial x_2} & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\beta}}\frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial x_2} & = 0; \\
\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\alpha}}\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1} & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\alpha}}\frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial y_1} & +0 & = 0; \\
0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\beta}}\frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial y_2} & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\beta}}\frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial y_2} & = 0.
\end{array} \tag{А.1.2}$$

Рассматривая эти выражения как алгебраическую систему линейных однородных уравнений относительно четырех неизвестных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\alpha}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\beta}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\alpha}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\beta}},$$

получаем условие существования нетривиальных решений этой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1} & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) \\ F(x_1,y_1) & 0 & F(x_2,y_1) & 0 \\ 0 & F(x_1,y_2) & 0 & F(x_2,y_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (\text{A.1.3})$$

Использованные здесь переобозначения очевидны. Деля столбцы соответственно на $F(x_1,y_1)$, $F(x_1,y_2)$, $F(x_2,y_1)$, $F(x_2,y_2)$ и вводя обозначение $w(x_s,y_r) \equiv f(x_s,y_r)/F(x_s,y_r)$, находим

$$\begin{vmatrix} w(x_1,y_1) & w(x_1,y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w(x_2,y_1) & w(x_2,y_2) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} w(x_1,y_1) & w(x_1,y_2) \\ w(x_2,y_1) & w(x_2,y_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (\text{A.1.4})$$

Отсюда имеем

$$w(x_1,y_1) = \frac{\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1}} = \frac{w(x_2,y_1)w(x_1,y_2)}{w(x_2,y_2)} \equiv A(x_1)B(y_1). \quad (\text{A.1.5})$$

Выражение (А.1.5) представляет собой функционально- дифференциальное уравнение для функции u:

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - B(y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \qquad (\text{A.1.6})$$

Общее решение этого уравнения находится в виде

$$u(x,y) = \chi\left[\int A(x)dx + \int \frac{dy}{B(y)}\right] \equiv \chi\left(\tilde{A}(x)\tilde{B}(y)\right), \qquad (A.1.7)$$

где $\chi()$ – произвольная функция одной переменной. Следовательно, парное отношение БСВО ранга (2,2) должно представляться в виде

$$u_{i\alpha}(x_1,y_1) = \chi\left(\tilde{A}(x_1)\cdot\tilde{B}(y_1)\right) \equiv \chi(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1), \qquad (A.1.8)$$

где χ, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ три произвольные функции, каждая от одного аргумента. Все остальные парные отношения имеют такой же вид с теми же самыми произвольными функциями. Без ущерба для общности можно перейти к новым параметрам $\tilde{x} \equiv \tilde{A}(x)$ и $\tilde{y} \equiv \tilde{B}(y)$. Кроме того, в качестве парного отношения вместо $u_{i\alpha}$ можно рассматривать

$$\tilde{u}_{i\alpha} \equiv \chi^{-1}(u_{i\alpha}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1. \qquad (A.1.9)$$

Чтобы найти закон БСВО ранга (2,2) продифференцируем закон (А.1.1) по любому из новых параметров. Пусть таковым является $\tilde{x}_1$, тогда имеем

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{y}_1 + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{y}_2 = 0. \qquad (A.1.10)$$

Умножим это выражение отдельно на $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$. В итоге будем иметь два соотношения:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{u}_{i\alpha} + \tfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{u}_{i\beta} = 0; \\ &\tfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{u}_{k\alpha} + \tfrac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{u}_{k\beta} = 0, \end{aligned} \qquad (A.1.11)$$

которые можно рассматривать как алгебраическую систему из двух линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных: $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}$ и $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}$. Как известно, эта система имеет нетривиальное решение при условии обращения в нуль ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (A.1.12)$$

Однако это выражение представляет собой алгебраическое соотношение между всеми четырьмя парными отношениями для двух пар элементов из двух множеств. Его можно понимать как искомый закон БСВО ранга (2,2). Отбрасывая тильды, видим, что этот закон совпадает с приведенным в (1.2.1).

А.2 Определение спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел

Общепринятое понятие спинора в наиболее общем виде определяется через алгебры Клиффорда $C(p,q)$ над полем вещественных чисел [26, 54]. Такое определение имеет ряд преимуществ перед другими, менее общими. В частности, в таком подходе проявляется однозначная связь между числом компонент и видом спиноров, с одной стороны, и размерностью $p+q$ и сигнатурой $p-q$ многообразия, в котором они задаются, с другой стороны. В литературе приводится ряд эквивалентных определений алгебр Клиффорда; выберем опирающееся на определение общей алгебры.

1. *Общая алгебра* определена, если:

во-первых, заданы два множества элементов:

а) α_1, α_2, $\cdots$, принадлежащих некоторому полю ;

б) b_1, b_2, $\cdots$, принадлежащих некоторому множеству B;

во-вторых, для этих множеств определены три операции:

1) умножения элементов $b_i \in B$ на элементы $\alpha_k \in A$ $(\alpha_k b_i)$;

2) сложения, т.е. образования векторов линейного пространства:

$$y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n + \cdots; \qquad (\text{A.2.1})$$

3)умножения элементов $b_i \in B$ друг на друга, не выводящее за пределы линейного пространства:

$$b_i b_j = \sum_k C_{ij}^k b_k, \qquad (\text{A.2.2})$$

где C_{ij}^k принадлежат полю .

Конкретизируя свойства множеств B, A и вид коэффициентов C_{ij}^k, можно получить частные случаи общей алгебры: алгебры Клиффорда, Грассмана, Ли, Фробениуса и др.

2. Так *алгебры Клиффорда* $C(p,q)$ получаются тогда, когда множество B определяется n элементами (*образующими* алгебры Клиффорда) e_i, произведения которых (третья операция) обладают свойствами:

$$\begin{array}{ll} e_i^2 = +1, & i = 1,2,3,\cdots,p; \\ e_i^2 = -1, & i = p+1, p+2, \cdots, p+q; \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i \neq j. \end{array} \qquad (\text{A.2.3})$$

Легко понять, что (А.2.3) полностью определяет как само множество B (вид и число его элементов), так и операцию умножения (А.2.2). Множество B состоит из 2^n элементов:

$$1,\ e_i,\ e_ie_j,\ e_ie_je_k,\ \cdots,\ e_1e_2\cdots e_n, \tag{А.2.4}$$

где везде $i < j < k, \cdots \leq n$. В качестве поля используется поле действительных чисел R. Вместо него можно было бы взять поле комплексных чисел C, тогда это будет алгебра Клиффорда над полем комплексных чисел $C^c(n)$. Таким образом, алгебра Клиффорда $C(p,q)$ образует 2^n-мерное векторное пространство с базисом (А.2.4). Произвольный элемент алгебры может быть записан в виде

$$y = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i e_i + \sum_i \sum_{j>i} \alpha_{ij} e_i e_j + \cdots + \alpha_\omega e_1 e_2 \cdots e_n. \tag{А.2.5}$$

Произведение всех n образующих играет особую роль в теории алгебр Клиффорда; для него используется специальное обозначение: $e_1e_2\cdots e_n \equiv \omega$.

3. Алгебры Клиффорда тесно связаны с *действительными векторными пространствами* $V^{p,q}$ (размерности $n = p + q$ и сигнатуры $p - q$), которые используются в физике для описания n- мерных пространственно-временных многообразий. Очевидно, что $V^{p,q}$ можно рассматривать как подпространство алгебры Клиффорда, натянутое на образующие алгебры $\{e_i\}$.

Линейное пространство алгебры Клиффорда разлагается на прямую сумму линейных подпространств, каждое из которых натянуто на базисные элементы, образованные из произведения k образующих $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$; k фиксировано для каждого подпространства):

$$C(p,q) = \sum_{k=0}^{n} \oplus C^k. \tag{А.2.6}$$

Элементы C^0 образуют скаляры, C^1 – векторы, C^2 – антисимметричные тензоры второго ранга, $\cdots$, C^n – псевдоскаляры в пространственно-временном многообразии размерности n.

4. Алгебры Клиффорда можно реализовать в виде *алгебры квадратных матриц*. Эта реализация связана с понятием представления алгебры (любой, не обязательно алгебры Клиффорда), формулируемым следующим образом. Пусть K^s – векторное пространство конечной размерности s, где K – поле действительных чисел R, поле комплексных чисел C или тело кватернионов H. Соответственно R^s, C^s и H^s являются вещественным,

комплексным и кватернионным пространствами размерности s. Множество всех эндоморфизмов $EndK^s$ пространства K^s отождествляется с алгеброй $\mathcal{M}(s,K)$ квадратных матриц порядка s над полем (или телом) K. Линейное представление алгебры C в K^s является гомоморфизмом C в $\mathcal{M}(s,K)$ $(= End\ K^s)$ и, обратно, всякий гомоморфизм алгебры C в $\mathcal{M}(s,K)$ является линейным представлением C в K^s (теорема Бернсайда). Размерность s пространства K^s (называемого пространством представления) называется *размерностью представления.*

Следует подчеркнуть, что матричное представление $\mathcal{M}(s,K)$ алгебры Клиффорда $C(p,q)$ полностью определяется размерностью $n-p+q$ пространства $V^{p,q}$ и его сигнатурой $p-q$.

5. В соответствии с общим определением пространства представления алгебры, *спинорами*, соответствующими $V^{p,q}$, будут векторы (вектор-столбцы), принимающие значения в поле (теле) K, т.е. в поле R, поле C или теле кватернионов H. Число компонент спинора равно порядку s матричного представления. Введем обозначения: $\Psi(R^s)$, $\Psi(C^s)$ и $\Psi(H^s)$ – соответственно для s-компонентных столбцов пространтв R^s, C^s, H^s. (Заметим, что спиноры $\Psi(H^s)$ в физике практически не рассматриваются.)

Как уже отмечалось, характер $\Psi(K^s)$ существенно зависит от размерности $p+q$ и сигнатуры $p-q$ многообразия $V^{p,q}$. Алгебры Клиффорда (и соответствующие им спиноры) можно разделить на четыре типа, характеризующиеся соотношением между алгеброй $C(p,q)$ и ее четной подалгеброй C^+.

6. Конкретный вид спиноров, соответствующих $V^{p,q}$, можно установить с помощью ряда полезных теорем из теории алгебр Клиффорда: теорем редукции, периодичности по модулю 8, законов композиции и других. В частности, эти теоремы изложены в работах [26, 54]. В нашей работе [13, с.200] приведена таблица спиноров для алгебр Клиффорда, начиная с $C(0,0)$, до $C(8,8)$. С помощью теоремы периодичности по модулю 8 из этой таблицы можно получить вид спиноров для всех других алгебр Клиффорда $C(p,q)$ над полем вещественных чисел.

А.3 Коэффициенты 9-мерных преобразований

В главе 5 показано, что при преобразованиях 3-компонентного спинора

$$i'^s = C^s_r i^r$$

компоненты 9-мерного вектора P^A изменяются по закону

$$P'^A = L^A_{\cdot B} P^B.$$

Коэффициенты этого преобразования вещественны и имеют вид:

$$\begin{aligned}
L^0_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_2 C^{*2}_1);\\
L^0_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_2 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_1 + C^2_3 C^{*2}_1);\\
L^0_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_1 + C^2_3 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_3 - C^2_1 C^{*2}_3);\\
L^0_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_2 + C^2_3 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_2 + C^2_3 C^{*2}_2 - C^1_2 C^{*1}_3 - C^2_2 C^{*2}_3);\\
L^0_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^1_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 + C^1_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1);\\
L^1_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 + C^2_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_1 + C^2_3 C^{*1}_1);\\
L^1_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_1 + C^2_3 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*2}_3 - C^2_1 C^{*1}_3);\\
L^1_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 + C^2_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_2 + C^2_3 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_2 + C^2_3 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*2}_3 - C^2_2 C^{*1}_3);\\
L^1_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^2_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*1}_1);\\
L^2_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*2}_1);\\
L^2_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 4} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 - C^2_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_1 - C^2_3 C^{*1}_1);\\
L^2_{\cdot 5} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*2}_1);\\
L^2_{\cdot 6} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 - C^2_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_2 - C^2_3 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 7} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*2}_2);\\
L^2_{\cdot 8} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L^3_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*2}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^3_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^2_2 C^{*2}_1);\\
L^3_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_1);\\
L^3_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*2}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^3_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_3 - C^2_1 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_1 - C^2_3 C^{*2}_1);\\
L^3_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_1 - C^2_3 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3);\\
L^3_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*1}_3 - C^2_2 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_2 - C^2_3 C^{*2}_2);\\
L^3_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_2 - C^2_3 C^{*2}_2 - C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3);\\
L^3_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 - C^2_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^4_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*1}_2);\\
L^4_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 + C^3_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1);\\
L^4_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2);\\
L^4_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*1}_2);\\
L^4_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 + C^3_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1);\\
L^4_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3);\\
L^4_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 + C^3_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2);\\
L^4_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3);\\
L^4_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^5_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*1}_2);\\
L^5_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*1}_1);\\
L^5_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1);\\
L^5_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*1}_2);\\
L^5_{\cdot 4} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_1 - C^3_3 C^{*1}_1);\\
L^5_{\cdot 5} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1);\\
L^5_{\cdot 6} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_2 - C^3_3 C^{*1}_2);\\
L^5_{\cdot 7} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2);\\
L^5_{\cdot 8} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_3 - C^3_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^6_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^6_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 + C^3_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1);\\
L^6_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2);\\
L^6_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^6_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 + C^3_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1);\\
L^6_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3);\\
L^6_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 + C^3_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2);\\
L^6_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3);\\
L^6_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^2_3 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^7_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^7_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*2}_1);\\
L^7_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1);\\
L^7_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^7_{\cdot 4} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_1 - C^3_3 C^{*2}_1);\\
L^7_{\cdot 5} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1);\\
L^7_{\cdot 6} &= \tfrac{i}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_2 - C^3_3 C^{*2}_2);\\
L^7_{\cdot 7} &= \tfrac{1}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2);\\
L^7_{\cdot 8} &= \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_3 - C^3_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^8_{\cdot 0} &= C^3_1 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*3}_2;\\
L^8_{\cdot 1} &= C^3_1 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*3}_1;\\
L^8_{\cdot 2} &= i(C^3_2 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*3}_2);\\
L^8_{\cdot 3} &= C^3_1 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*3}_2;\\
L^8_{\cdot 4} &= C^3_1 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*3}_1;\\
L^8_{\cdot 5} &= i(C^3_3 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*3}_3);\\
L^8_{\cdot 6} &= C^3_2 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*3}_2;\\
L^8_{\cdot 7} &= i(C^3_3 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*3}_3);\\
L^8_{\cdot 8} &= C^3_3 C^{*3}_3.
\end{aligned}
\tag{A.3.1}
$$

Библиография

[1] *Александров А.Д., Овчинникова В.В.* Замечания к основам теории относительности //Вестник ЛГУ. 1953. N 11, с.95-100.

[2] *Арифов Л.Я.* Общая теория относительности и тяготение. Ташкент. Изд-во ФАН, 1983.

[3] *Блохинцев Д.И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.

[4] *Блюменталь Л.М.* (Blumental L.M.). Theory and application of distance geometry. Oxford, 1953.

[5] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.

[6] *Бройль Л.де* (De Broglie L.). Революция в физике. М.: Госатомиздат, 1963.

[7] *Васильев С.А., Владимиров Ю.С.* Кубичный аналог 9-мерного пространства Минковского //Тезисы докл. Междунар. школы-семинара "Многомерная гравитация и космология". М.: 1994, с.7.

[8] *Весс Ю., Беггер Дж.* (Wess J., Bagger J.). Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.

[9] *Владимиров Ю.С.* Аксиоматизация свойств пространства-времени общей теории относительности //Сб. Современные проблемы гравитации. Тбилиси. Изд-во Тб.ГУ, 1967, с.407-412.

[10] *Владимиров Ю.С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.

[11] *Владимиров Ю.С., Гаврилов В.Р.* Некоторые приложения теории физических структур //Сб. Исследования по классической и квантовой теории гравитации. Днепропетровск. Изд-во ДГУ, 1985, с. 18-26.

[12] *Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.

[13] *Владимиров Ю.С.* Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[14] *Владимиров Ю.С.* Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.42-60.

[15] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.

[16] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Физическая структура ранга (4,4;б) и трехкомпонентные спиноры //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.44-66.

[17] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна //Сб. Тезисов докладов 8-й Рос. грав. конф. "Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации". М.: 1993, с.25.

[18] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Группа $SL(3,C)$ и преобразования 9-мерных векторов //Тезисы докладов Междунар. школы-семинара "Многомерная гравитация и космология". М.: 1994, с.9.

[19] *Владимиров Ю.С.* Спиноры в бинарной геометрофизике //Сб. Проблемы современной физики. Вып.1. М.: Изд-во "Белка", 1994, с.48-53.

[20] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время и электрослабые взаимодействия в бинарной геометрофизике //Gravitation and Cosmology. Vol.1 (1995). No.2, p.1-7.

[21] *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика, философия и религия. Кострома. Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.

[22] *Ингрэхем Р.Л.* (Ingraham R.L.). Conformal relativity //Nuovo Cim., 1978. Vol.46B. N 1, p.1-32; N 2, p.217-286; Vol.47B. N 2, p.151-191.

[23] *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.40-43.

[24] *Калуца Т.* (Kaluza T.). К проблеме единства физики //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с.529-534.

[25] *Кассандров В.В.* Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1992.

[26] *Кокуре Р.* (Coquereaux R.). Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics //Phys. Rev. Vol.115B. N 5, p.389.

[27] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск. Изд-во Новосиб. ГУ, 1968.

[28] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, 1971. Том 201. N 3, с.570-572.

[29] *Кулаков Ю.И.* О теории физических структур //Записки научных семинаров ЛОМИ. 1983. Том 127. Ленинград, с.103-151.

[30] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. Ч.1 //Вычислительные системы. N 110. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1985, с.52-88.

[31] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. Ч.2 //Вычислительные системы. N 118. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1986, с.5-27.

[32] *Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Изд-во Архимед, 1991.

[33] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3) //Вычислительные системы. N 101. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1984, с.91-113.

[34] *Лев В.Х.* Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур //Вычислительные системы. N 118. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1986, с.28-36.

[35] *Лев В.Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.90-103.

[36] *Лев В.Х.* Трехмерные и четырехмерные пространства в теории физических структур. Канд. дис. Новосибирск, 1990.

[37] *Лейбниц Г.В.* Переписка с Кларком. Сочинения. Том 1. М.: Мысль, 1982, с.430-528.

[38] *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: Изд-во С.Скирмунта, 1909.

[39] *Мах Э.* Механика //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир. 1979, с.73-84.

[40] *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур //Доклады АН СССР, 1972. Том 206. N 5, с.1056-1058.

[41] *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии //Доклады АН СССР, 1981. Том 260. N 4, с.803-805.

[42] *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства физических структур. Докторск. дис. Новосибирск, 1991.

[43] *Моулд Р.А.* (Mould R.A.). An axiomatization of General Relativity //Proc. Amer. Philos. Soc., 1959. Vol.103. N 3, p.485-529.

[44] *Нарликар Дж.В.* (Narlikar J.V.). Инерция и космология в теории относительности Эйнштейна //Сб. "Астрофизика, кванты и теория относительности". М.: Мир, 1982, с.498-534.

[45] *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990.

[46] *Пенроуз Р.* (Penrose R.). Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

[47] *Пенроуз Р., Риндлер В.* (Penrose R., Rindler V.) Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987.

[48] *Пименов Р.И.* Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л.: Наука, 1968.

[49] *Пименов Р.И.* Основы теории темпорального универсума. Сыктывкар, 1991.

[50] *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с.18-33.

[51] *Румер Ю.Б.* Спинорный анализ. М-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

[52] *Румер Ю.Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.

[53] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970.

[54] *Салингарес Н.* (Salingaros N.). On the classification of Clifford algebras and their relation to spinor in n dimensions //Journ.Math.Phys., 1982. Vol.23, N 1, p.1-7.

[55] *Самохвалов К.Ф.* К обоснованию теории физических структур //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.33-41.

[56] *Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А.* N-Точечная геометрия типа Евклида //Сб. Математические методы и физико-механические поля. Киев. Наукова думка, 1975. Вып.1, с.5-10.

[57] *Соколов Н.П.* Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматгиз, 1960.

[58] *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова думка, 1972.

[59] *Соловьев А.В.* К теории бинарных физических структур ранга (5,5;б) и выше //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.67-77.

[60] *Соловьев А.В.* N-Спинорное исчисление в реляционной теории пространства-времени. Канд. дис. М., 1996.

[61] Твисторы и калибровочные поля. М.: Мир, 1983.

[62] *Фейнман Р.* (Feynman R.) Нобелевская лекция "Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте" //Сб. Характер физических законов. М.: Мир. 1968, с.193-231.

[63] *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F, Narlikar J.V.). Action at a distance in physics and cosmology. San Francisco: W.N.Freeman and Comp., 1974.

[64] *Хуанг К.* (Huang K.). Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.

[65] *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.

Научное издание

Владимиров Юрий Сергеевич

Реляционная теория
пространства-времени и взаимодействий

Часть 1
Теория систем отношений

Н/К

ЛР N 040414 от 27.03.92.

Подписано в печать 13.05.96. Формат 60×90/16. Бумага офсет. N 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 16,1. Тираж 500 экз. Заказ N .

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Типография

Ю.С.Владимиров

РЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Часть 2

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Москва
1998

Ю.С.Владимиров

РЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Часть 2

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Издательство Московского
университета
1998

УДК 530.12; 539.12
ББЛ 22.31
В 57

Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во МГУ, 1998.– 448 с.

Vladimirov Yu.S. Relational theory of space-time and interactions. Volume 2. Theory of physical interactions. – Moscow State Univ. Press, 1998, 448 p.

Изложена объединенная теория пространства-времени и известных видов фундаментальных физических взаимодействий, опирающаяся на понятие отношений между событиями. Математическую основу этого подхода составляет теория бинарных систем комплексных отношений. Физический фундамент данного направления составляют три сорта идей: 1) о макроскопической природе классического пространства-времени, 2) о прямом межчастичном взаимодействии частиц (концепция дальнодействия Фоккера-Фейнмана, альтернативная теории поля) и 3) принципы многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Из алгебраических понятий теории систем отношений выведены известные виды взаимодействий: электромагнитные, гравитационные, слабые (электрослабые), сильные. Дан сравнительный анализ физических взаимодействий с четырех точек зрения: развиваемой в книге реляционной теории, теории прямого межчастичного взаимодействия (в рамках концепции дальнодействия), стандартной (калибровочной) теории поля и с позиций многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна.

Книга предназначена для специалистов в области теоретической физики, студентов физико-математических факультетов университетов и достаточно подготовленных лиц, интересующихся принципами построения физики.

A new conception for building a theory of space-time and physical interactions, called binary geometrophysics, is suggested. It rests on the ideas of (i) macroscopic (statistical) approach to the classical space-time, (ii) the Fokker-Feynman direct particle interaction theory, (iii) Kaluza-Klein type multidimensional geometrical models of physical interactions and (iv) Kulakov's theory of binary physical structures.

Издание осуществлено в авторской редакции.

ISBN 5-211-03977-7 (Ч.2)
ISBN 5-211-03639-5

©Ю.С.Владимиров, 1998

©Издательство Московского университета, 1998

Памяти Эрнста Маха
посвящается

Оглавление

Предисловие 9

РАЗДЕЛ 1. ПРЕДПОСЫЛКИ НОВОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЫ 15

Глава 1. Введение 16
1.1. Макроскопическая природа пространства-времени 16
1.2. Реляционный характер физических теорий 19
1.3. Ключевые понятия реляционной теории 22
1.4. Соотношение первичных и общепринятых понятий 25
1.5. Парадигма бинарной геометрофизики 30
1.6. Описание взаимодействий в разных парадигмах 36
1.7. Блок-схема содержания книги 39

Глава 2. Уроки теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана 43
2.1. Истоки концепции дальнодействия 44
2.2. Анализ концепции дальнодействия в XX веке 48
2.3. Принцип действия Фоккера 51
2.4. Прямое межчастичное гравитационное взаимодействие 55
2.5. Анализ фоккеровского действия 60
2.6. Фейнмановская теория поглотителя 63
2.7. Принцип Маха и концепция дальнодействия 67
2.8. Реляционная концепция пространства-времени 71

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ 75

Глава 3. Взаимодействие двух изолированных частиц 77
3.1. Базовое 4×4-отношение 78
3.2. Физическая интерпретация “внешних” параметров 81
3.3. Экспоненциальные факторы и устранение “лишних” слагаемых 85
3.4. Физическая интерпретация “внутренних” параметров 89
3.5. БСКО ранга (2,2) как первообраз эволюции 94
3.6. Элементарные изменения параметров 100
3.7. Базовое 4×4-отношение как прообраз действия и многомерной метрики 103

3.8. Замечания и выводы 105

Глава 4. Принцип Маха 107
4.1. Основания принципа Маха 107
4.2. Базовое 4×4-отношение из комбинаций вида 4+2+2 110
4.3. Базовые 4×4-отношения из комбинаций видов 4+3+1 и 4+1+3 113
4.4. Прообраз 6-мерной метрики 116
4.5. Последовательность процедур перехода к классическим понятиям 119
4.6. Алгебра методов 1+5- и 1+1+4-расщеплений 122
4.7. Прообразы 4-мерной метрики и электромагнитного потенциала 127
4.8. Основные выводы 131

Глава 5. Макроприбор и макроскопическая природа пространства-времени 133
5.1. Принцип усреднения по ансамблю элементарных базисов . 134
5.2. Суть перехода к координатному пространству 136
5.3. Новая интерпретаия квантовой механики 141
5.4. Родственные интерпретации квантовой механики 144
5.5. Переход к макрообъекту 147
5.6. Пропагаторы взаимодействий 149
5.7. Переход к классическому пространству-времени 152
5.8. Выводы и замечания 156

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ГРАВИТАЦИЯ 159

Глава 6. Прямое электромагнитное и гравитационное взаимодействия 161
6.1. Физически интерпретируемые величины 162
6.2. Прямое межчастичное электромагнитное взаимодействие 164
6.3. Основания теории прямого гравитационного взаимодействия 168
6.4. Общая теория относительности в рамках концепции дальнодействия 171
6.5. Принцип соответствия с теорией поля 175
6.6. О природе гравитации и классического пространства-времени 178

Глава 7. 5-Мерное обобщение теории гравитации 181
7.1. Сущность общей теории относительности 181
7.2. Математические основы общей теории относительности .. 183
7.3. Проблемы теории гравитации, связанные с размерностью 188
7.4. Общая теория относительности как 5-оптика 191
7.5. Монадный метод редукции (1+n-расщепления) 195
7.6. 5-Мерная геометрическая модель 198
7.7. Геометризация скалярного поля 201
7.8. Системы отсчета в теории гравитации 205
7.9. Анализ 5-мерного обобщения теории гравитации 208

Глава 8. Геометрические модели объединения гравитации и электромагнетизма (теории Калуцы-Клейна) ... 211
8.1. Три канала геометризации электромагнитного взаимодействия ... 212
8.2. Идеи и математический аппарат 5-мерной теории Калуцы ... 215
8.3. Анализ недостатков 5-мерной теории Калуцы в рамках ее парадигмы ... 219
8.4. 5-Мерная теория в канале Клейна-Румера ... 223
8.5. Диадный метод редукции (1+1+n-расщепления) ... 226
8.6. 6-Мерный вариант объединения гравитации и электромагнетизма ... 229
8.7. Геометризация заряженного скалярного поля в 6-оптике ... 232
8.8. 6-Мерная теория Калуцы-Клейна и бинарная геометрофизика ... 236

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОНЦЕПЦИИ БЛИЗКОДЕЙСТВИЯ ... 239

Глава 9. Калибровочная теория электрослабых взаимодействий ... 241
9.1. Калибровочный подход к описанию взаимодействий ... 241
9.2. Модель Вайнберга-Салама (фермионный сектор) ... 245
9.3. Промежуточные векторные бозоны ... 248
9.4. Дальнодействующая версия модели Вайнберга-Салама ... 251
9.5. Хиггсовские скалярные бозоны и массы элементарных частиц ... 253
9.6. Основные сведения об электрослабых взаимодействиях частиц трех поколений ... 256
9.7. Замечания по модели Вайнберга-Салама ... 259

Глава 10. 7-Мерная геометрическая модель грави-электрослабых взаимодействий (бозонный сектор) ... 261
10.1. Задачи и идеи 7-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий ... 262
10.2. Составляющие метрического тензора ... 265
10.3. Лагранжиан векторных бозонов ... 269
10.4. Следствия из условий сопоставления ... 272
10.5. Триадные операторы дифференцирования ... 277
10.6. Нейтральные векторные поля, заряды и угол Вайнберга 279
10.7. Геометрический аналог механизма Хиггса и массы бозонов ... 283

Глава 11. Фермионный сектор 7-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий ... 287
11.1. Фермионы в 7-мерной геометрической модели ... 287
11.2. Лагранжиан взаимодействия фермионов с векторными бозонами ... 292
11.3. Сопоставление с лагранжианом модели Вайнберга-Салама ... 295

11.4. Масса лептона 298
11.5. Описание трех поколений лептонов 301
11.5. Выводы и замечания по 7-мерной геометрической модели 305

РАЗДЕЛ 5. ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В БИНАРНОЙ ГЕОМЕТРОФИЗИКЕ 309

Глава 12. Модель электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4) 311
12.1. Характерные черты базовых 4×4-отношений 311
12.2. Прагеометрия "слабого мира" 314
12.3. Электрослабые взаимодействия массивных лептонов в бинарной геометрофизике 319
12.4. Электрослабые взаимодействия нейтрино (через "Z-бозоны") 324
12.5. Прообраз взаимодействия нейтрино через W-бозоны 327
12.6. Алгебраическая симметрия электрослабых взаимодействий 330
12.7. Выводы и замечания по модели на основе БСКО ранга (4,4) 333

Глава 13. Описание электрослабых взаимодействий лептонов на основе БСКО ранга (5,5) 335
13.1. БСКО ранга (5,5) и фундаментальное 4×4-отношение 336
13.2. Прообраз действия взаимодействия лептонов 338
13.3. Прообраз взаимодействия лептонов через промежуточные Z-бозоны 341
13.4. Описание прообраза электромагнитных взаимодействий 344
13.5. Прообраз взаимодействия через W-бозоны 348
13.6. Анализ модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5) 350
13.7. Сопоставление моделей электрослабых взаимодействий в разных парадигмах 353

Глава 14. Прообраз электрослабых взаимодействий кварков в рамках БСКО ранга (6,6) 357
14.1. Модель взаимодействия лептонов и кварков на основе БСКО ранга (5,5) 358
14.2. Модель взаимодействия лептонов и кварков на основе БСКО ранга (6,6) 361
14.3. Электрослабые взаимодействия двух кварков 365
14.4. Гипотеза о природе трех поколений частиц 369
14.5. Выводы и замечания по модели на основе БСКО ранга (6,6) 371

РАЗДЕЛ 6. СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ 373

Глава 15. Начала хромодинамики 375
15.1. Основные положения хромодинамики 375
15.2. Фермионный сектор хромодинамики 376

15.3. Бозонный сектор хромодинамики 379
15.4. Дальнодействующая версия хромодинамики 383
15.5. Некоторые замечания по калибровочной теории сильных взаимодействий 386

Глава 16. 8-Мерная геометрическая модель грави-сильных взаимодействий 387
16.1. Основные идеи 8-мерной геометрической модели грави-сильных взаимодействий 387
16.2. Метрика и тетрадные физико-геометрические тензоры .. 390
16.3. Условия на коэффициенты разложения 394
16.4. Решение уравнений и их анализ 398
16.5. Тетрадные операторы дифференцирования и нейтральные векторные поля 402
16.6. Фермионный сектор 8-мерной модели 404
16.7. Выводы и замечания по 8-мерной геометрической модели 406

Глава 17. Описание сильных взаимодействий в бинарной геометрофизике 407
17.1. Базовое 6×6-отношение 407
17.2. Внешние параметры и прообраз действия взаимодействия 411
17.3. Внутренние параметры 415
17.4. Модель обменного взаимодействия 418
17.5. Некоторые замечания 422

Заключение 425

Список ключевых терминов и обозначений 431

Библиография 435

Предметный указатель 443

Contents 447

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга посвящена развитию теории физического пространства-времени, то есть наиболее глубоких, по убеждению автора, основ фундаментальной теоретической физики. Эта книга необычна ни по выбору принципов, положенных в основание развиваемой теории, ни по используемому математическому аппарату, ни по форме изложения материала.

Развиваемая в книге **реляционная теория пространства-времени и физических взаимодействий** (бинарная геометрофизика), опирается на три блока физических идей:

1) на соображения о макроскопической (статистической) природе классического пространства-времени,

2) на теорию прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана,

3) на многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна.

Согласно первому из названных блоков идей, классические пространственно-временные представления справедливы лишь для достаточно массивных образований – макрообъектов – и теряют силу при рассмотрении объектов и явлений иных масштабов, в частности, в микромире. Более того, в таком подходе привычые пространственно-временные отношения должны выводиться из неких элементарных факторов, присущих явлениям микромира, при наложении их огромного числа. На эту проблему обращали внимание такие известные физики-теоретики и математики, как А.Эйнштейн, Л.де Бройль, А.Эддингтон, П.К.Рашевский и другие. В данной книге предлагается конкретное решение этой фундаментальной проблемы.

Второй из названных блоков идей соответствует концепции дальнодействия, альтернативной общепризнанной теории поля, то есть концепции близкодействия. Достаточно сказать, что большинство физиков-теоретиков мыслит дальнейшее развитие физики и построение теории великого объединения не иначе, как в рамках теории поля. В развиваемой же здесь теории понятие по-

ля исключено из числа первичных понятий, поскольку оно имеет смысл лишь при наличии готового пространства-времени. В такой ситуации можно опереться лишь на непосредственные отношения между взаимодействующими частицами.

Многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна в последние годы получили некоторое признание, однако далеко не всеми признается физическая реальность дополнительных размерностей. Многие относятся к высшим размерностям исключительно как к удобному математическому приему, упрощающему некоторые выкладки. Однако в многомерных геометрических теориях содержится чрезвычайно важная идея о единстве теории пространства-времени и физических взаимодействий. Негравитационные взаимодействия трактуются как проявления дополнительных размерностей обобщенного (искривленного) пространства-времени.

Развиваемая в книге теория, основанная на названных и некоторых других необычных идеях, нацелена на решение следующих трех блоков проблем:

1) получение (вывод) классического пространства-времени из неких более первичных понятий и тем самым обоснование известных его свойств, таких как размерность, сигнатура, метрика и т.д.;

2) объединение теорий фундаментальных физических взаимодействий: гравитационного, электромагнитного, электрослабого и сильного;

3) совмещение принципов двух основополагающих теорий современной физики – общей теории относительности и квантовой теории.

Физические основания и целевая направленность развиваемой теории пояснены на блок-схеме рисунка 0.1. На этом же рисунке в его средней части отмечены математические средства, которые привлекаются для развития теории. Подчеркнем, что в отличие от общепринятого подхода при построении данной теории не предполагается наличия пространства-времени. Но его что-то должно заменить. Предлагается исходить из неких элементарных *отношений* между взаимодействующими частицами.

Для их описания оказались плодотворными математические идеи так называемой теории физических структур, разработанной (совсем в ином контексте) Ю.И.Кулаковым и его учениками. (В настоящее время эта теория, в своей математической части представляющая собой алгебраическую теорию отношений, малоизвестна.) На блок-схеме она помещена в средней строке справа. Ключевая роль понятия отношений (relations) в построении теории отражена в ее названии. Напомним, что она названа **реляционной теорией пространства-времени и физических**

Рис. 0.1: Блок-схема физических оснований и целевой направленности реляционной теории пространства-времени и физических взаимодействий (бинарной геометрофизики).

взаимодействий. Этот же смысл, только в еще более конкретной форме отражен и во втором ее названии – **бинарная геометрофизика**.

Но теории физических структур Кулакова в ее первозданном виде оказалось недостаточно. Кулаков и его ученики развивали теорию *вещественных* отношений, для которых имеют место понятия больше-меньше, тогда как элементарные отношения, проявляющиеся в микромире (в квантовой теории), этим свойством не обладают, что отражено их комплексным харатером. Необходимы были, во-первых, комплексификация теории физических структур и, во-вторых, ее переработка в духе теории систем отсчета в эйнштейновской теории гравитации. Последнее отображено на блок-схеме в виде левого блока в средней строке.

Необычным является и изложение материала. В книге сопоставляются описания физических взаимодействий в четырех различных парадигмах, образующих как бы четыре уровня:

1) в рамках наиболее элементарной реляционной теории (бинарной геометрофизики);

2) в виде теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана (промежуточного уровня);

3) на основе многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна и

4) в традиционной (калибровочной) теории поля на фоне заданного пространства-времени (плоского или искривленного).

Показано, с одной стороны, как прийти к теориям последних трех типов (уровней) от наиболее элементарной бинарной геометрофизики и, с другой стороны, как используются идеи этих теорий при построении самой реляционной теории пространства-времени и взаимодействий.

Широко распространено мнение, что для построения теории микромира необходимо использовать понятия классического пространства-времени и макромира. В этой книге оспариваются подобные взгляды и показывается, каким образом можно построить содержательную теорию микромира на основе самосогласованного набора ее собственных понятий и закономерностей. На самом элементарном уровне указаны прообразы таких ключевых понятий современной физики, как действие (лагранжианы) взаимодействующих частиц, метрика, потенциалы полей. Оказывается, прообразами действия физических систем являются своеобразные объемы бинарной геометрии. Здесь показано, как из первичных (алгебраических) понятий и положений, справедливых для отдельных элементарных частиц (или, точнее, даже для их составных частей), возникают привычные классические пространственно-временные представления и понятия макрофизики.

Данная книга основана на нескольких монографиях автора, отдельно посвященных некоторым блокам, отмеченным на рисунке. Прежде всего, следует назвать уже изданную в 1996 году первую часть монографии "Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий (Теория систем отношений)". В ней подробно рассмотрен блок, изображенный на рисунке в правой части средней строки. Левый блок той же строки отображен в книге автора "Системы отсчета в теории гравитации" (1982 г.). Два нижних блока на рисунке обсуждены в книге автора "Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий" (1987 г.) и в совместной с А.Ю.Турыгиным монографии "Теория прямого межчастичного взаимодействия" (1986 г.). Можно сказать, что в этой книге содержание предыдущих монографий развито и объединено на единой основе бинарных систем комплексных отношений.

Следует отметить, что данная книга возникла из рукописи монографии под названием "Начала бинарной геометрофизики", рекомендованной к изданию ученым советом физического факультета МГУ и принятой в 1992 году к публикации издательством Московского университета, однако неопубликованной в то время из-за финансовых трудностей. С тех пор материал рукописи был существенно переработан и развит. Из него была выделена и издана первая часть монографии с подзаголовком "Теория систем отношений". В этой книге выделен и развит блок идей о природе физических взаимодействий.

Несмотря на то, что данная работа представляет собой вторую часть сочинения, сделана попытка изложить ее так, чтобы она имела практически независимый характер, чтобы читатель обращался к первой части лишь для углубления некоторых представлений о теории систем отношений или как к справочному материалу.

Наконец, отметим, что этой частью книги не исчерпывается весь накопленный или находящийся в работе материал. В дальнейшем предполагается издать третью часть с подзаголовком "Квантовая теория".

Для первого знакомства с книгой совершенно не обязательно читать весь текст подряд. Чтобы понять суть развиваемой здесь программы достаточно прочитать первые две главы (1-й раздел), преамбулы, первые и последние параграфы других глав и заключение. Интересующимся лишь многомерными геометрическими моделями типа теории Калуцы-Клейна рекомендуется обратить внимание на главу 8, где анализируются достоинства и недостатки 5-мерных вариантов теорий Калуцы и Клейна. Позиция автора по интерпретации квантовой механики изложена в главе 5, имеющей полукачественный характер.

Автор выражает признательность коллегам (Н.В.Мицкевичу, А.Л.Зельманову, Ю.И.Кулакову, Г.Г.Михайличенко, В.Я.Скоробогатько, Г.И.Рязанову) и своим ученикам (В.И.Антонову, В.Н. Ефремову, А.Ю.Турыгину, А.Д.Попову, А.О.Мирошнику, А.В. Мишакову, В.Р.Гаврилову, А.В.Соловьеву и другим) за плодотворное сотрудничество на разных этапах работы над затронутыми в книге проблемами, а также благодарит всех участников семинаров "Геометрия и физика" и Российского гравитационного общества (а ранее – секции гравитации научно-технического совета Минвуза СССР), действующих на физическом факультете МГУ с ноября 1972 года, за многократные обстоятельные дискуссии по затронутым в книге проблемам.

Автор также благодарен А.Г.Минькову и А.В.Соловьеву за помощь при подготовке рукописи к печати.

Раздел I

Предпосылки новой физической парадигмы

Глава 1

Введение

В этой главе, во-первых, обсуждены предпосылки и дана формулировка проблемы, решаемой в книге, во-вторых, кратко изложены самые необходимые сведения из первой части книги, в-третьих, указано место развиваемой здесь теории (парадигмы) среди других известных физических теорий и программ и, наконец, приведена и прокомментирована блок-схема содержания книги.

1.1 Макроскопическая природа пространства-времени

В связи со сформулированной выше задачей вывода классических пространственно-временных отношений из неких более первичных понятий напомним историю развития идеи о *макроскопической природе пространства и времени.* Соображения на этот счет высказывались и неоднократно обсуждались рядом известных математиков и физиков.

1. Пожалуй, следует начать с середины XIX века. Так, Б.Риман писал: "Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нуж-

но пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним – силами связи, действующими на это реальное." Свои соображения по этому вопросу Риман завершает словами: "Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке – физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день"[57, с.33].

2. Подобные идеи и соображения получили дальнейшее развитие в XX веке. Над этой проблемой задумывались А.Эйнштейн, А.Эддингтон [89] и другие известные авторы. Так, в 20-е годы А.Эйнштейн в ряде работ высказывался в пользу идей об отказе от непрерывного пространства-времени и даже от принципа причинности. В середине 30-х годов он писал: "Необходимо отметить, конечно, что введение пространственно-временного континуума может считаться противоестественным, если иметь в виду молекулярную структуру всего происходящего в микромире. Утверждают, что успех метода Гейзенберга может быть приведен к чисто алгебраическому методу описания природы, т.е. исключению из физики непрерывных функций. Но тогда нужно будет в принципе отказаться от пространственно-временного континуума. Можно думать, что человеческая изобретательность в конце концов найдет методы, которые позволят следовать этому пути. Но в настоящее время такая программа смахивает на попытку дышать в безвоздушном пространстве" [90, с.56].

3. В середине XX века физик-теоретик Д. ван Данциг высказывал следующие соображения: "С давних времен предполагалось, что понятия и теоремы геометрии являются предпосылкой для использования в математических моделях других частей физики. Однако, кажется, что причина такого приоритета имеет скорее историческую и традиционную, нежели логическую природу. Это справедливо как для евклидовой и римановой геометрии, введенной Эйнштейном в качестве модели гравитации, так и для последних пятимерных и проективных обобщений, а также для совсем недавних общих линейных связностей, используемых Эйнштейном и Шредингером. Не совсем ясно, какое логическое или эпистемологическое преимущество содержится в интерпретировании части геометрического объекта как электромагнитное поле, а не наоборот" [22].

"Можно быть склонным рассматривать метрику, как описывающую некое "нормальное"состояние материи (включая излучение), и дать ей *статистическую* интерпретацию как некоторый вид среднего физических характеристик окружающих событий, вместо того, чтобы класть ее в основу всей физики. На статистическую интерпретацию наводит мысль также тот факт, что, например, измерение длины требует твердых тел, т.е. большого числа частиц. Однако, еще не известно, как такая ста-

тистическая интерпретация метрики может быть получена"[22].

4. Еще более конкретно проступает постановка задачи в работе Е.Циммермана "Макроскопическая природа пространства-времени": "Пространство и время не являются такими понятиями, которые имеют смысл для отдельных микросистем. Эти микросистемы описываются абстрактными понятиями (заряд, спин, масса, странность, квантовые числа), не имеющими отношения к пространству и времени. Их взаимодействия также должны описываться абстрактно, т.е. безотносительно к пространству и времени. Наиболее фундаментальным следствием взаимодействия огромного числа таких микросистем является образование пространственно-временной решетки, которая приводит к справедливости классических понятий пространства и времени, но только в макроскопической области" [87].

5. Аналогичной точки зрения придерживался наш соотечественник геометр П.К.Рашевский. В своей монографии "Риманова геометрия и тензорный анализ" он писал: "Между тем трудно сомневаться в том, что макроскопические понятия, в том числе и наши пространственно-временные представления, на самом деле уходят своими корнями в микромир. Когда-нибудь они должны быть раскрыты как некоторый статистический итог, вытекающий из закономерностей этого мира – далеко еще не разгаданных – из суммарного наблюдения огромного числа микроявлений"[56, с.258]. В другом месте он высказывается еще более конкретно: "Возможно, что и сам четырехмерный пространственно-временной континуум с его геометрическими свойствами окажется в конечном счете образованием, имеющим статистический характер и возникающим на основе большого числа простейших физических взаимодействий элементарных частиц"[56, с.658].

6. В первой части этой книги уже упоминалась твисторная программа Р.Пенроуза [52,53], нацеленная на вывод модели классического пространства-времени, исходя из понятия твистора. В одной из статей Р.Пенроуза с сотрудниками писалось: "В предшествующих работах (Р.Пенроуза – Ю.С.В.) было показано, что можно ввести понятие евклидова пространства, исходя из предела вероятности взаимодействия большой сети частиц, квазистатически обменивающихся спинами. При таком подходе евклидова структура возникает из комбинаторных правил, которым удовлетворяет полный угловой момент в релятивистской квантовой механике... Мы надеемся, что развитие твисторной теории приведет в конечном счете к построению лоренцевых многообразий, которые будут служить моделями пространства-времени" [67, с.132].

7. Можно привести ряд высказываний в духе идеи о макроскопической природе пространства и времени других авторитет-

ных авторов, например, Л.Де Бройля, Ф.Хойла, Е.Траутмана. Однако, более или менее развитой теории такого рода не было построено. В наших работах [16, 17, 36] и в этой книге показан путь построения такой теории, более того, здесь предложена конкретная модель (теория), реализующая изложенные выше соображения.

1.2 Реляционный характер физических теорий

1. Разделы современной физики (теории) принято различать в зависимости от масштаба (сложности) рассматриваемых в них объектов: в классической физике (механике) рассматриваются *макрообъекты*, общая теория относительности имеет дело с очень массивными (мега-) объектами, в квантовой механике и физике микромира описывается поведение *микрочастиц*. Грубо все разделы можно разделить на два класса – на имеющие дело с макрообъектами (обозначим их буквой m) и на описывающие микрообъекты (обозначим их буквой μ). Физическим теориям присвоим символ R, тогда два названных класса теорий можно характеризовать символами $R(m)$ и $R(\mu)$.

Эти два класса теорий существенно отличаются друг от друга, но их роднит общее, – в них чрезвычайно важную роль играет понятие *системы отсчета*. В нерелятивистской механике имеет место принцип относительности Галилея, основу релятивистской механики составляет специальная теория относительности. В общей теории относительности оказалось необходимым развить специальные методы описания систем отсчета. Современная квантовая теория сформулирована в релятивистски инвариантном виде... Под системой отсчета понимается некий измерительный комплекс, а методы задания системы отсчета – это способ привязки понятий теории к возможностям измерительной аппаратуры наблюдателя. Обычно понятие системы отсчета связывают лишь с состоянием движения наблюдателя. Говорят о переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся с какой-то скоростью относительно первой.

2. Однако из анализа квантовой теории следует, что в понятие системы отсчета необходимо включить нечто большее. Можно усмотреть важную аналогию между системами отсчета в теории относительности и макроприбором в квантовой механике, на которую обращал внимание В.А.Фок: "Понятие относительности к средствам наблюдения (в квантовой механике – Ю.С.В.) есть в известном смысле обобщение понятия относительности к системе отсчета. Оба понятия играют в соответствующих теориях

аналогичную роль. Но в то время как теория относительности, которая опирается на понятие относительности к системе отсчета, учитывает лишь движение средств наблюдения как целого, в квантовой механике необходимо учитывать и более глубокие свойства средств наблюдения" [78, с.73].

Подчеркнем, что в современной квантовой механике и физике микромира всегда подразумевается, что описание микрообъектов производится относительно макроприбора. Даже тогда, когда в квантовой теории описывается взаимодействие микрочастиц друг с другом, всегда подразумевается существование макрообъектов, и микрообъекты описываются терминами отношений микрообъектов к макрообъектам. Давайте подчекнем это обстоятельство тем, что во введенном выше символическом обозначении теории явно отметим снизу символом макрообъектов m факт описания объектов относительно макроприборов. Тогда классическую физику (первый класс теорий) следует обозначать символом $R_m(m)$, а второй класс теорий, описывающих микрочастицы, – символом $R_m(\mu)$.

3. Макроскопический подход к природе пространства-времени означает, что искомая теория должна исходить из системы собственных понятий, не опирающихся ни на априорное классическое пространство-время, ни на макроприбор. В ней микрообъекты должны описываться относительно микрообъектов. Это значит, что теперь должно использоваться некое обобщение на микромир понятия системы отсчета. Во введенных выше обозначениях искомая теория должна характеризоваться символом $R_\mu(\mu)$. Основная задача сформулированной программы состоит, во-первых, в том, чтобы найти и развить систему понятий и закономерностей, независимую от макропонятий, и, во-вторых, указать переход от этой системы к классическим пространственно-временным представлениям.

Три введенных класса теорий изображены на блок-схеме рисунка 1.1. Стрелками обозначены переходы от самого элементарного уровня описания физики микромира в рамках $R_\mu(\mu)$ к существующим теориям $R_m(m)$ и $R_m(\mu)$. На блок-схеме показано, что ключевое место здесь занимает переход к макроприбору.

4. Для реализации намеченной программы следует обратиться к известным сведениям из физики микромира. Их анализ показывает, что свойства отношений частиц в микромире чрезвычайно бедны по сравнению с классическими, описываемыми общепринятой геометрией. Для отдельных частиц нет понятия классической эволюции, а есть только переходы из одного состояния в другое. Для отношений между ними нет даже понятия больше-меньше, так как частицы описываются не вещественными, а комплексными числами. Нет и многих других привычных

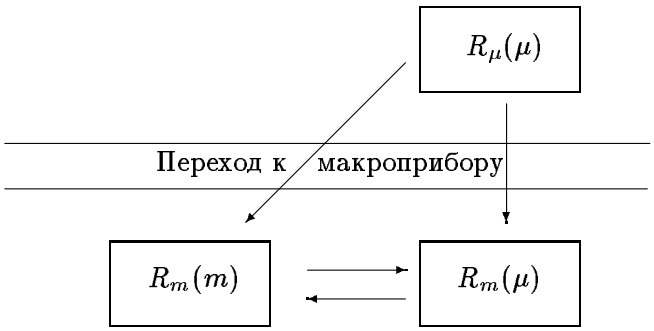


Рис. 1.1: Соотношение искомой и существующих теорий

понятий. Все это возникает лишь в макромире для достаточно сложных систем с памятью.

5. Возникает вопрос: на что же следует опереться? Анализ показывает, что, во-первых, *искомую теорию следует мыслить в рамках концепции дальнодействия*, когда нет надобности в непрерывном пространственно-временном фоне, по которому должны распространяться поля переносчиков взаимодействий. Частицы взаимодействуют друг с другом (находятся друг с другом в отношениях) непосредственно, без промежуточных полей. Элементы искомой теории можно усмотреть в теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана, основы которой изложены в главе 2 данной книги. Во вторых, *в качестве ключевого понятия*, которое заменяет расстояния, интервалы и другие классические понятия, *следует взять абстрактное понятие отношения*. Теория отношений подробно изложена в первой части книги и кратко пояснена в следующем параграфе этой главы. В-третьих, из свойств микрочастиц *следует опереться на понятия их начальных и конечных состояний*, между которыми осуществляются переходы, описываемыме отношениями между этими состояниями. В четвертых, важным наводящим соображением служит *факт спинорности* элементарных частиц. Имеется и ряд других соображений, которые можно усмотреть в ныне существующих теориях.

В связи с изложенным становится понятным термин *реляционная теория*. Во-первых, он обусловлен тем, что в качестве ключевого выбрано понятие отношения (relation) и, во-вторых, важным местом в этой теории понятия системы отсчета и ее обобщения в физике микромира (системы отношений).

1.3 Ключевые понятия реляционной теории

Основы математического аппарата для описания *элементарных отношений в микромире*, из которых затем строится (посредством ряда суммирований) теория пространства-времени и физических взаимодействий, позаимствованы из теории физических структур Ю.И.Кулакова [34, 35]. Заметим, что теория физических структур, представляющая собой алгебраическую теорию отношений, строилась ее автором из совсем иных соображений и для других целей. Для реализации изложенной здесь программы (построения бинарной геометрофизики) пришлось, во-первых, обобщить бинарные структуры Кулакова[1] на случай комплексных отношений, во-вторых, существенно развить их в духе теории систем отсчета из общей теории относительности, конечно, в рамках ее алгебраической части. В таком виде математический аппарат бинарных структур назван нами теорией *бинарных систем комплексных отношений* (БСКО).

1. Теория физических структур подробно обсуждена в первой главе первой части книги. Кратко напомним ее основные положения. Прежде всего нужно сказать, что в группе Ю.И.Кулакова эта теория по одним и тем же принципам параллельно развивалась как на одном множестве элементов (унарные структуры), так и на двух множествах элементов (бинарные структуры). Было показано, что унарные структуры с вещественными отношениями соответствуют известным видам геометрий с симметриями, т.е. представляют собой их переформулировку в реляционном духе, в терминах расстояний (отношений) между точками-элементами. Поскольку унарные и бинарные структуры строятся по одним правилам, то открытые Кулаковым бинарные структуры можно трактовать как своеобразные *бинарные геометрии.* Они оказались более элементарными; из них можно получать унарные структуры (геометрии) как вторичные системы.

2. Напомним, что собой представляет теория бинарных систем отношений. Постулируется, что имеются два множества элементов. Обозначим первое множество символом $\mathcal{M}$, а второе — $\mathcal{N}$. Элементы первого множества обозначаются прописными латинскими буквами $(i, j, k, \ldots)$, а элементы второго множества — греческими $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Между любой парой элементов из раз-

[1] В теории физических структур Ю.И.Кулакова используется несколько иная терминология. В частности, вместо терминов "унарные структуры" и "бинарные структуры" используются соответственно термины "структуры на одном множестве элементов" и "структуры на двух множествах элементов".

ных множеств задается парное отношение — некоторое комплексное (вещественное) число $u_{i\alpha}$ (см. рис. 1.2). Постулируется, что имеется некий алгебраический *закон*, связывающий все возможные отношения между любыми r элементами множества $\mathcal{M}$ и s элементами множества $\mathcal{N}$:

$$\Phi_{(r,s)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots, u_{k\gamma}) = 0. \tag{1.3.1}$$

Целые числа r и s характеризуют *ранг* (r, s) БСКО. Существенным положением теории является требование *фундаментальной симметрии*, состоящее в том, что закон (1.3.1) справедлив при замене взятого набора элементов на любые другие в соответствующих множествах. Фундаментальная симметрия позволяет записать функционально-дифференциальные уравнения из них найти вид как парных отношений $u_{i\alpha}$, так и саму функцию Φ (см. [43, 44]).

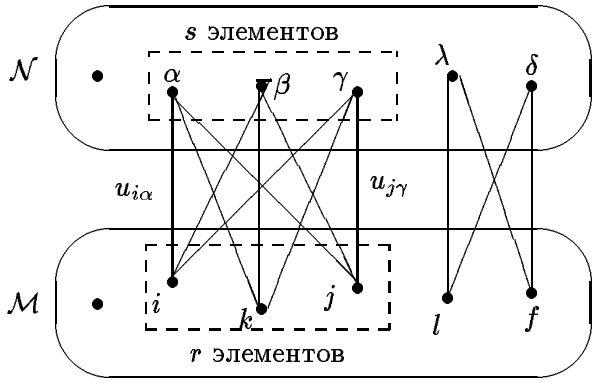


Рис. 1.2: Бинарная система отношений (структура) ранга (r, s).

3. В бинарной геометрофизике используются БСКО симметричных рангов (r, r), причем различаются невырожденные и вырожденные системы отношений. Для невырожденных БСКО закон имеет вид

$$\Phi_{(r,r)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \cdots & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \cdots & u_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & \cdots & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3.2}$$

где парные отношения представляются в форме

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \tag{1.3.3}$$

Здесь $i^1, i^2, \ldots, i^{r-1}$ – $r-1$ параметров элемента i, а $\alpha^1, \alpha^2, \ldots$, α^{r-1} – $r-1$ параметров элемента α.

4. Особо следует остановиться на происхождении параметров элементов. Они являются аналогами понятий координат в обычной геометрии. Чтобы к ним прийти, в законе (1.3.1) нужно положить $r-1$ элементов множества $\mathcal{M}$ и $s-1$ элементов множества $\mathcal{N}$ *эталонными.* Тогда на этот закон можно смотреть как на соотношение, определяющее парное отношение между двумя неэталонными элементами (пусть ими будут элементы i и α) через их отношения к эталонным элементам (см. рис. 1.3). Отношения же между самими эталонными элементами можно считать раз и навсегда заданными. Тогда оказывается, что парное отношение $u_{i\alpha}$ характеризуется $s-1$ параметрами элемента i (его отношениями к $s-1$ эталонным элементам множества $\mathcal{N}$) и аналогичными $r-1$ – параметрами элемента α. Система эталонных элементов

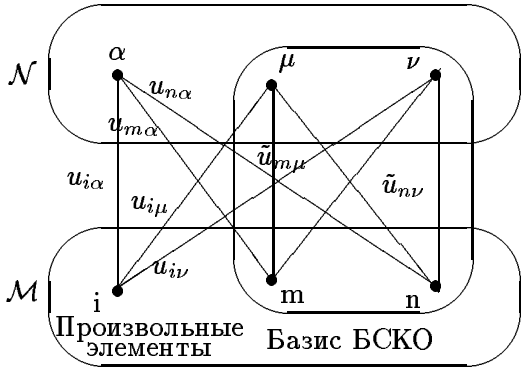


Рис. 1.3: Задание параметров пары элементов i и α через их отношения к эталонным элементам.

составляет *базис* БСКО.

5. Элементы двух множеств в бинарной геометрофизике имеют следующий физический смысл. Элементы первого множества $\mathcal{M}$ характеризуют *начальные состояния* частиц, а элементы второго множества $\mathcal{N}$ – *конечные сотояния.* Таким образом, в

самых основных понятиях БСКО оказывается заложенной идея эволюции (времени), перехода частиц из начального в конечное состояния. Бинарность отражает суть элементарной ячейки мироздания – начало, конец и сам факт перехода (отношения) между ними.

В бинарной геометрофизике с рангом БСКО связывается вид и способ описания элементарных частиц. С помощью БСКО ранга (3,3) описываются *свободные* (невзаимодействующие) простейшие частицы — лептоны. В рамках простейшей модели на основе БСКО ранга (4,4) описываются взаимодействующие лептоны, причем каждый из них характеризуется парами элементов. Чтобы описать взаимодействия кварков между собой и с лептонами необходимо перейти к БСКО более высокого ранга (6,6). В такой модели кварки характеризуются тройками элементов в каждом состоянии.

Таким образом, в БСКО базисы (системы эталонных элементов) представляют собой элементарные частицы, относительно которых описываются другие элементарные частицы того же сорта. Этот факт выражает требуемый характер искомой реляционной теории $R_\mu(\mu)$.

1.4 Соотношение первичных и общепринятых понятий

1. Понятия БСКО низших рангов фактически уже используются в современной теоретической физике. В частности, теория 2-компонентных спиноров естественно возникает [12] в рамках БСКО ранга (3,3). Действительно, в такой теории элементы характеризуются парами комплексных параметров

$$i \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}; \qquad \alpha \to (\alpha^1, \alpha^2), \tag{1.4.1}$$

т.е. являются векторами 2-мерных комплексных пространств. Парное отношение (1.3.3) в данном случае

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 \tag{1.4.2}$$

можно понимать как скалярное произведение вектора на ковектор в сопряженном пространстве.

В теории БСКО ранга (r, r) важную роль играют *фундаментальные* $(r-1) \times (r-1)$-*отношения*, представляющие собой

отличные от нуля миноры максимального ранга в определителе закона (1.3.2). В данном случае это фундаментальное 2×2-отношение, представляемое в видах:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}. \qquad (1.4.3)$$

Каждый из сомножителей справа записывается из параметров элементов одного сорта и представляет собой антисимметричную квадратичную форму. Введя линейные преобразования параметров в двух множествах элементов:

$$i'^s = C^s_r i^r; \quad \alpha'^s = C^{\star s}_r \alpha^r, \qquad (1.4.4)$$

где коэффициенты преобразований C^s_r и $C^{\star s}_r$ в двух множествах комплексно сопряжены друг другу, приходим к выделенной группе 6-параметрических преобразований $SL(2, C)$, относительно которых остаются инвариантными квадратичные формы из сомножителей справа в (1.4.3):

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = Inv; \quad \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1 = Inv. \qquad (1.4.5)$$

Коэффициенты преобразований из (1.4.4) удовлетворяют условию

$$C^1_1 C^2_2 - C^1_2 C^2_1 = 1. \qquad (1.4.6)$$

Напомним, что, по определению (см. [58, 60]), 2-компонентными спинорами являются векторы в 2-мерном комплексном пространстве, для которых при допустимых преобразованиях остаются инвариантными антисимметричные формы вида (1.4.3).

Линейные преобразования (1.4.4) не вводятся извне, а имеют смысл преобразований параметров элементов при переходе от одного набора эталонных элементов (базиса) к другому. Следует подчеркнуть, что *в развиваемой здесь теории вообще ничего не вносится извне, а используются лишь те понятия, которые естественным образом возникают в рамках БСКО различных рангов.*

В первой части книги ("Теории систем отношений" [17]) систематически изложены теории БСКО минимальных рангов (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) и указаны основные свойства БСКО более высоких рангов (см. также [14]). Показано, что в БСКО рангов, выше (3,3), имеет место обобщение понятия спиноров на произвольное число компонент. Для них предложен термин *финслеровы спиноры.* В такой теории при преобразованиях параметров остаются

инвариантными кубичные, четвертой степени и т.д. антисимметричные формы.

Можно утверждать, что *4-мерность классического пространства-времени и сигнатура* $(+\ -\ -\ -)$ *обусловлены рангом (3,3) первой невырожденной БСКО* (см. [17, с.81]).

2. В бинарной геометрофизике важное место занимает переход от БСКО к соответствующим им унарным системам вещественных отношений (УСВО). Это осуществляется путем своеобразной склейки некоторых совокупностей элементов из разных множеств в единые элементы одного нового множества (см. рисунок 1.4). При этом парные отношения между ними строятся

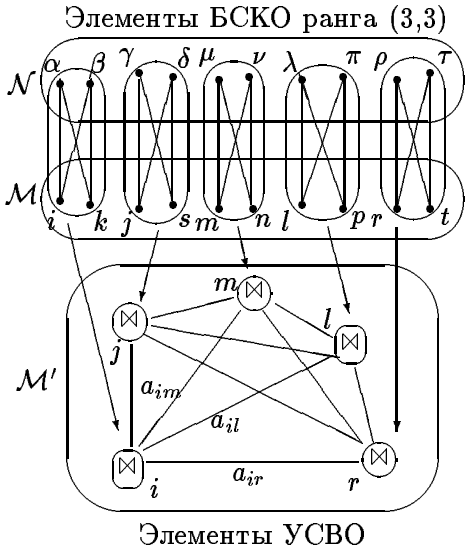


Рис. 1.4: Переход от БСКО к УСВО на примере образования из БСКО ранга (3,3) унарного вещественного пространства (Лобачевского).

из парных отношений первичной БСКО. На рисунке 1.4 изображен переход от БСКО ранга (3,3) к УСВО ранга 5 (к 3-мерному пространству Лобачевского), который осуществляется склейкой двух пар элементов в один новый элемент-точку унарной геометрии. Могут быть и другие виды склейки: пары точек, двух троек и т.д. В части 1 книги обсуждены возможные виды склеек и образующиеся при этом геометрии.

Как в квантовой механике из первичных комплексных волно-

вых функций строятся наблюдаемые вещественные величины – собственные значения эрмитовых операторов, – так в бинарной геометрофизике непосредственно интерпретируемыми являются понятия УСВО, получаемые из первичных понятий БСКО.

3. В бинарной геометрофизике унарные геометрии, получающиеся указанным способом, интерпретируются как *пространство скоростей* (импульсное пространство). Таким образом, импульсное пространство возникает из первичных понятий БСКО раньше координатного пространства-времени.

В рамках БСКО ранга (3,3) компоненты 4-мерных скоростей (импульсов) следующим образом строятся из параметров массивной частицы:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2); \\ u^1 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1); \\ u^2 &= \frac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1); \\ u^3 &= \frac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2). \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

В итоге имеет место соотношение

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix}. \tag{1.4.8}$$

Склейкой получается пространство Лобачевского, что соответствует известному условию на 4-мерные скорости

$$u^\mu u_\mu = Const = 1. \tag{1.4.9}$$

В так определенной УСВО парное отношение a_{ij} между двумя новыми элементами i и j строится из парных отношений исходной БСКО и имеет вид

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\delta \\ is \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\gamma \\ kj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\delta \\ ks \end{bmatrix}\right) = u^\mu_{(i)}u_{(j)\mu}, \tag{1.4.10}$$

где элементы i, k, α, β описывают состояния первой частицы, обозначенной символом i, а элементы j, s, γ, δ описывают состояния второй частицы, отмеченной символом j.

4. Формирование классического пространства-времени из понятий БСКО представляет собой основную задачу бинарной геометрофизики. При ее решении ключевую роль играют понятия

БСКО минимального ранга (2,2). В главе 4 первой части книги показано, что ее отношения описываются элементами циклической группы (комплексными числами по модулю единица).

5. Кратко изложенное выше содержание первой части книги пояснено в виде блок-схемы на рисунке 1.5. Стрелками отражен дедуктивный характер изложенного. За исходный следует брать ранг БСКО, больший или равный (4,4). БСКО меньших рангов можно понимать как бинарные подсистемы комплексных отношений БСКО больших рангов, то есть все введенные выше понятия БСКО рангов (3,3) и (2,2) содержатся в теории БСКО рангов (4,4) и выше. Это отображено стрелками в направлении справа налево во второй строке блоков. На блок-схеме двойной рамкой выделена БСКО ранга (4,4) как ключевая система, достаточная для построения простейшей модели прообраза классических пространственно-временных отношений и физических взаимодействий. БСКО этого ранга (4,4) также положена в основу этой, второй части книги. В ее последних главах обсуждена роль БСКО более высоких рангов.

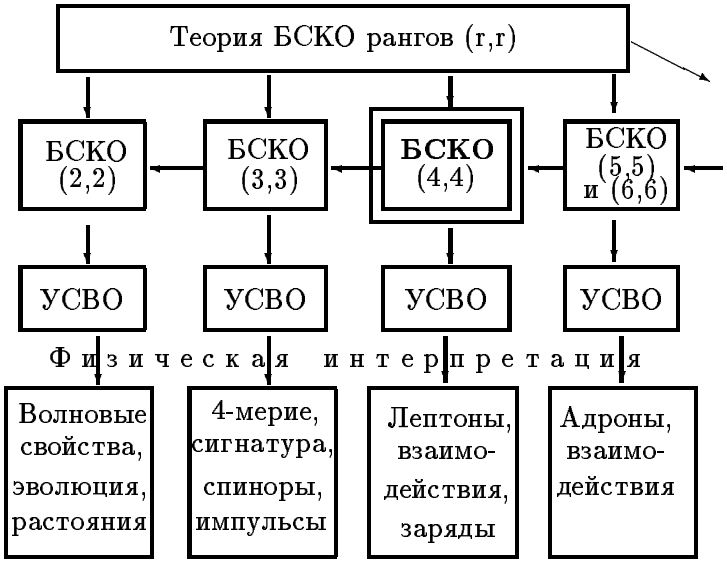


Рис. 1.5: Блок-схема содержания первой части книги

Напомним, при построении бинарной геометрофизики одной из исходных посылок являлась идея о макроскопической приро-

де пространства-времени. В нее, в частности, вкладывается тот смысл, что квантовая механика демонстрирует факт отсутствия у отношений, в которые вступают друг с другом микрочастицы, понятия больше - меньше.

Это отражено в комплексных числах, с помощью которых она формулируется. Это же послужило главным основанием перехода от теории физических структур Кулакова с вещественными отношениями к комплексифицированным системам отношений. В этой книге излагается методика перехода от первичных неархимедовых отношений к классическим геометрическим (архимедовым) понятиям.

1.5 Парадигма бинарной геометрофизики

Важнейшую часть развиваемой здесь программы составляет переход к общепринятым понятиям и к классическим пространственно-временным представлениям, то есть переход от правой верхней клеточки диаграммы рисунка 1.1 к расположенным ниже и левее разделам теоретической физики. Однако, оказывается, имеющиеся в современной физике теории, как и те, идеи которых положены в основания бинарной геометрофизики, имеют принципиально различный характер. Уже упоминалось, что теория прямого межчастичного взаимодействия альтернативна теории поля. Теории физических полей на фоне заданного пространства-времени принципиально отличаются от многомерных геометрических теорий Калуцы-Клейна. Имеются и другие виды теорий. Богатство содержащихся в них идей и принципов свидетельствует о том, что к настоящему времени сложились все необходимые предпосылки для перехода на новый уровень понимания сущности классического пространства-времени.

Названные теории представляют собой различные парадигмы. Под *парадигмой* мы понимаем *систему понятий, категорий и принципов, определяющих основу и характер теории*[2]. Излагаемая здесь теория (программа) в различной степени связана с большинством имеющихся парадигм. Все это побуждает начать изложение с указания места развиваемой здесь теории (программы) среди других физических парадигм, каждая из которых слагается из ряда однотипных теорий и программ.

[2]В Советском энциклопедическом словаре 1988 года дано следующее определение: "**Парадигма** (от греч. parádeigma – пример, образец) (филос., социол.), 1) строго науч. теория, воплощенная в системе понятий, выражающих существ. черты действительности. 2) Исходная концептуальная схема, модель постановки проблем и их решения, методов исследования, господствующих в течение определ. ист. периода в науч. сообществе".

Сделаем это с помощью разработанной нами классификации физических парадигм [18]. Предлагается различать представленные в литературе теории и программы в зависимости от того, какой характер в них имеют (насколько представляются первичными) три основные физические категории: 1) *пространство-время*, 2) *частицы* (на квантовом уровне фермионы) и 3) *поля переносчиков взаимодействий* (бозоны: фотоны, Z-бозоны, глюоны и т.д.). Сопоставление существующих теорий убеждает, что именно эти три категории являются ключевыми в современной физической картине мира. Действительно, в любой теории физических взаимодействий основными являются три вопроса: 1) Есть ли и, если есть, что собой представляет фон, на котором осуществляются взаимодействия? 2) Между чем и чем имеют место взаимодействия? 3) Каким образом передаются взаимодействия? Оказывается, ответы на эти, казалось бы, простые вопросы в разных парадигмах даются разные.

В общепринятой теории, как она излагается в учебниках, эти три физические категории в значительной степени имеют самостоятельный характер. Допускается изучение свойств пространства-времени без материи, можно также рассматривать свободные (без источников) электромагнитное и другие поля. Отнесем все теории с таким пониманием трех физических категорий к *первой физической парадигме.*

Все другие парадигмы содержат в себе теории и программы, опирающиеся на меньшее число названных или каким-то образом обобщенных физических категорий. Можно выделить три класса таких парадигм. К первому классу отнесены те парадигмы, в которых теории строятся на основе двух из трех названных категорий, а третья рассматривается как вторичная, производная от двух других. Такие парадигмы названы *генерирующими.* Для второго класса парадигм характерно, что две из физических категорий объединяются в некую одну обобщенную, тогда как третья категория остается независимой (самостоятельной). Эти парадигмы названы *объединительными.* Третий класс парадигм составляют теории, которые опираются лишь на одну обобщенную категорию, вводимую в соответствующих парадигмах второго класса. Такие парадигмы естественно назвать *одинарными.* Имея ввиду, что эти три класса имеют дело с тремя физическими категориями, перебирая возможные комбинации, приходим к девяти "экономным" физическим парадигмам. Добавляя сюда названную выше первую парадигму, в итоге имеем десять физических парадигм, которые изображены на рисунке 1.6.

Для изображения 10 парадигм, перенумерованных в порядке снизу вверх и слева направо, использованы кружки и овалы, со-

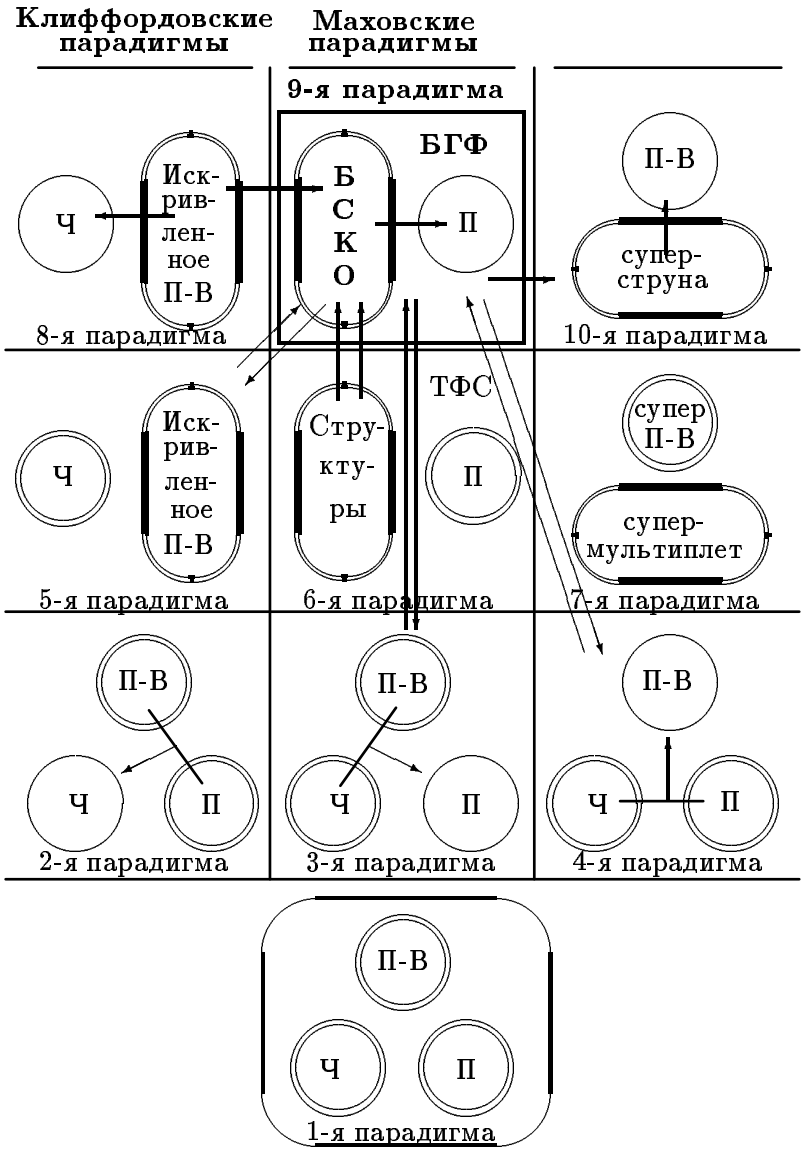


Рис. 1.6: Классификация физических парадигм.

ответствующие трем физическим категориям в отдельности или обобщенным категориям, объединяющим в себе пары категорий. Внутри кружков проставлены символы: П-В – пространство-время, Ч – частицы, П – поля. Двойные кружки и овалы означают, что соответствующие категории используются в качестве базисных (первичных), тогда как одинарные кружки означают вторичные (производные) категории. Девять "экономных" парадигм разделены по горизонтали на перечисленные выше классы, а по вертикали составляют три группы: вторая, пятая и восьмая парадигмы названы *клиффордовскими*, поскольку в них целиком или частично предполагается осуществление программы, провозглашенной в XIX веке В.Клиффордом. Три парадигмы второго столбца (третью, шестую и девятую) предлагается назвать *маховскими*, поскольку во всех них пространство-время имеет реляционный характер, на котором настаивал Э.Мах. Именно этот столбец парадигм представляет совокупность *реляционных физических теорий*. Развиваемая в этой книге реляционная теория пространства-времени и взаимодействий (бинарная геометрофизика) образует верхнюю (девятую) парадигму. Расположенные под ней шестую и третью физические парадигмы составляют теории, являющиеся предшественниками (главными истоками) бинарной геометрофизики.

Поясним суть физических программ, соответствующих изображенным на рисунке 1.6 парадигмам[3]. Первая парадигма наиболее широко распространена и не нуждается в особых разъяснениях. Ко *второй парадигме* отнесены теории, опирающиеся на готовое (обычно плоское) пространство-время и на поля переносчиков взаимодействий. Частицы представляются вторичными понятиями, проявляющимися в виде сгустков полей или каких-то их особенностей. В качестве примера можно назвать попытки поиска частицеподобных (солитонных) решений систем полевых уравнений. Эта парадигма несовместима с нашим подходом.

К *третьей парадигме* относятся теории прямого межчастичного взаимодействия (action-at-a-distance) Фоккера-Фейнмана, основанные на концепции дальнодействия, альтернативной полевому подходу. В этих теориях исключаются из числа первичных

[3]В наших предыдущих работах схема возможных физических парадигм рисовалась иным образом. Первая парадигма изображалась сверху, и весь рисунок был перевернут сверху вниз. Обсуждение парадигм имело плюралистический характер. Главное внимание обращалось на наличие множества возможностей. На этой схеме девятая физическая парадигма, соответствующая бинарной геометрофизике, помещена в центральное место. Главная задача книги – показать определяющую роль в физическом мироздании именно этой физической парадигмы.

понятий поля переносчиков взаимодействий. Принципы построения таких теорий составляют один из блоков основополагающих идей развиваемой здесь бинарной геометрофизики. Эти теории использованы в качестве строительных лесов для возведения здания бинарной геометрофизики. Их подробному обсуждению посвящена следующая глава.

В рамках *четвертой парадигмы* предполагается вывести саму категорию пространства-времени с известными ее классическими свойствами из двух других должным образом определенных физических категорий (частиц и носителей взаимодействий). Можно считать, что бинарная геометрофизика возникла на базе попыток построения теории именно в рамках этой парадигмы. Вводимые в ней отношения можно трактовать в русле определения носителей взаимодействий в отсутствие готового пространства-времени.

Наиболее известным примером теорий *пятой парадигмы* является эйнштейновская общая теория относительности. В этой теории нет отдельных категорий пространства-времени и гравитационного поля, а есть единая новая категория искривленного (риманова) пространства-времени. Здесь гравитационное взаимодействие описывается характеристиками пространства-времени – его метрикой. Напомним, что в общей теории относительности геометризуется лишь гравитация, тогда как другие бозонные и фермионные поля (частицы) добавляются в правую часть уравнений Эйнштейна. К этой же парадигме относятся многомерные единые геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. В них геометризуются (описываются компонентами многомерной метрики) другие бозонные поля, однако фермионы (частицы) вносятся в теорию отдельно, т.е. теория опирается на две физические категории: многомерное искривленное (закрученное) пространство-время и частицы. Некоторые принципы построения таких теорий составили третий блок идей, положенных в основу реляционной теории пространства-времени и взаимодействий. Существенной чертой теорий этой парадигмы является описание физических взаимодействий через характеристики пространства-времени. Аналогичный принцип вывода и пространства-времени, и характеристик взаимодействий из одних и тех же понятий использован в бинарной геометрофизике.

К *седьмой парадигме* следует отнести модные ныне суперсимметричные теории. Их основная идея состоит в том, что фермионы и бозоны объединяются в единый супермультиплет, т.е. категории частиц (фермионов) и полей (бозонов) сливаются в единую обобщенную категорию. Этот супермультиплет вводится в суперпространство, т.е. в 4-мерное пространство-время, обо-

гащенное грассмановыми антикоммутирующими переменными. По своей сути суперсимметричные теории относятся к типичным теориям поля.

Восьмая парадигма содержит в себе теории, стремящиеся реализовать экстремальную программу В.Клиффорда [29], т.е. представить всю физику как некое проявление искривленного пространства (пространства-времени), вывести ее из одной обобщенной парадигмы. В своей книге "Здравый смысл точных наук" он задается вопросом: "Не можем ли мы рассматривать как изменения физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства. Не окажется ли, что все или некоторые из тех причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?"[30, с.46]. В настоящее время эта программа подхвачена школой Дж.Уилера, провозгласившей:"В мире нет ничего, кроме пустого искривленного пространства. Материя, заряд, электромагнетизм и другие поля являются лишь проявлениями искривления пространства. Физика есть геометрия"[74, с.218]. Эта программа альтернативна нашей, но близка ей по духу всеобщего объединения. Перефразируя Дж.Уилера можно сказать, *в мире нет ничего, кроме частиц, находящихся в отношениях, которые описываются БСКО соответствующих рангов.*

Физические программы из восьмой парадигмы встретились с трудностями описания спинорных частиц. В настоящее время эта трудность может считаться преодоленной в рамках *десятой парадигмы* в лице теории супергравитации. Последняя представляет собой теорию искривленного суперпространства, т.е. искривленного многообразия, описываемого как классическими 4-мерными величиными, так и дополнительными грассмановскими переменными. Эта теория строится аналогично калибровочной версии эйнштейновской теории гравитации с той лишь разницей, что вместо локализации группы Лоренца (Пуанкаре) локализуется группа суперсимметричных (обобщенных) преобразований Лоренца.

К *шестой физической парадигме* следует отнести программу, развиваемую Ю.И.Кулаковым. В его теории физических структур могут появиться только многообразия с симметриями, тогда как взаимодействия обычно связываются с нарушениями симметрий. Для их описания в рамках теории физических структур необходимо им сопоставлять некие дополнительные структуры или инородные понятия,фактически соответствующие второй физической категории.

На рисунке 1.6 стрелками помечены связи бинарной геометрофизики с теми парадигмами, идеи которых самым существен-

ным образом использованы при ее построении. Идеи прямого взаимодействия (концепция дальнодействия) взяты из третьей парадигмы (второй, маховский столбец), представления о многомерных многообразиях позаимствованы из пятой парадигмы (первый, клиффордовский столбец), а идея о макроскопической (статистической) природе пространства-времени родилась в рамках четвертой парадигмы (третий столбец). Идея геометризации всей физики, можно сказать, позаимствована из восьмой, клиффордовской парадигмы, однако на новой основе – бинарной геометрии. На рисунке стрелки имеют двусторонний характер. Это означает отмеченные выше два понимания соотношения парадигм: с одной стороны, использование идей соответствующей парадигмы для построения бинарной геометрофизики, а с другой стороны, как обоснование содержательности уже известных теорий с точки зрения принципов бинарной геометрофизики.

1.6 Описание взаимодействий в разных парадигмах

В каждой из охарактеризованных парадигм имеется свой подход к обоснованию и описанию известных видов физических взаимодействий, причем эти подходы качественно различаются. На блок-схеме рисунка 1.7 сопоставлены описания взаимодействий в рамках четырех наиболее развитых и интересных, с точки зрения автора, физических парадигм: 1) развиваемой в этой книге 9-й парадигмы (бинарной геометрофизики), 2) 3-й парадигмы (теории прямого межчастичного взаимодействия), 3) 5-й парадигмы (многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна) и 4) 1-й физической парадигмы (калибровочной теории поля). На блок-схеме 1-я парадигма представлена двумя последними строками. Кратко прокомментируем обозначенные на блок-схеме способы описания взаимодействий в порядке снизу вверх.

1. **В традиционной теории поля** каждому феноменологически открытому виду физических взаимодействий сопоставляется некое переносящее его поле подходящей тензорной размерности. Так, электромагнитное взаимодействие переносится векторным полем (или антисимметричным тензором напряженности электромагнитного поля) и описывается уравнениями Максвелла. Для описания гравитационного взаимодействия оказалось необходимым использовать тензорное поле второго ранга. Типичной теорией такого рода является релятивистская теория гравитации А.А.Логунова [39]. Два-три десятилетия тому назад по-

Взаимодействия / Парадигмы	Свободные частицы	Гравитационное взаимодействие	Электромагнитное взаимодействие	Электрослабое взаимодействие	Сильное взаимодействие
Бинарная геометрофизика (БГФ)	БСКО ранга (3,3) + (2,2)	←	БСКО ранга (4,4)	БСКО ранга (5,5),(6,6)	БСКО ранга (6,6)
	Переход к макроприбору				
Теория прямого взаимодействия (ТПМЧВ)		Тензор-тензорное взаимодействие	Вектор-векторное взаимодействие (безмасс.)	Вектор-векторное взаимодействие (массивн.)	Вектор-векторное взаимодействие
Многомерные геометрические модели	Плоское пространство-время n=1+3	Размерность n=4+(1) (ОТО)	Размерность n=5+(1) (Теория Калуцы)	Размерность n=6+(1)	Размерность n=8
Калибровочная теория взаимодействий	Глобальная группа Лоренца	Локализация группы Лоренца	Локализация группы $U(1)$	Локализация группы $SU(2)\times\times U(1)$	Локализация группы $SU(3)$
Традиционная теория поля		Релятивистская теория гравитац. (РТГ)	Теория Максвелла		

Рис. 1.7: Описание физических взаимодействий в разных парадигмах

лагалось, что сильные взаимодействия переносятся юкавским скалярным полем.

2. **Калибровочный подход к описанию взаимодействий** развился в рамках первой парадигмы (см. [95]). Во главу угла ставятся физические симметрии, в том числе симметрии пространства-времени. Согласно этому подходу физические взаимодействии обусловлены нарушением глобальных симметрий, имеющих место при описании свободных (невзаимодействующих) частиц. Так, в плоском пространстве-времени имеет место 6-параметрическая группа преобразований Лоренца (вместе с 4-параметрической группой трансляций составляющая группу Пуанкаре). Гравитационные взаимодействия предлагается трактовать как нарушение (локализацию) группы Лоренца. Электромагнитное взаимодействие предлагается вводить при помощи локализации внутренней группы $U(1)$. Указанные способы описания двух взаимодействий получили широкое распространение после того, как удалось описать электрослабые взаимодействия (см. [6]) при помощи локализации группы $SU(2) \times U(1)$, а затем после успехов в описании сильных взаимодействий (хромодинамики) локализацией группы $SU(3)$.

3. **В рамках многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна** физические взаимодействия предлагается трактовать принципиально иначе — как проявления искривленности пространства-времени. Гравитационное взаимодействие обусловлено искривлением 4-мерного пространства-времени, а иные виды взаимодействий объясняются проявлением дополнительных размерностей многомерного также искривленного пространства-времени. Для описания электромагнитного взаимодействия достаточно использовать 5-мерное многообразие, а для описания других видов взаимодействий нужно опереться на геометрические модели более высоких размерностей.

4. **В теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана** в принципе нет полей переносчиков взаимодействий. Предлагается описывать взаимодействия непосредственно через тензорные характеристики частиц. Электромагнитное взаимодействие определяется произведением векторов токов двух частиц (вектор-векторное взаимодействие). Гравитационное взаимодействие имеет тензорный характер. Оно определяется произведением тензоров энергии-импульса пар частиц. В таком подходе главное различие взаимодействий определяется их тензорным характером. Кроме вектор-векторных и тензор-тензорных взаимодействий рассматривались также скалярные взаимодействия (для реализации принципа Маха). Прямые вектор-векторные взаимодействия можно также различать видом

пропагатора. Он может быть массивным и безмассовым. Электромагнитное взаимодействие описывается безмассовым пропагатором, тогда как для описания слабых взаимодействий он должен выбираться массивным.

5. **В бинарной геометрофизике**, можно сказать, производится своеобразный синтез идей теории прямого межчастичного взаимодействия (концепция дальнодействия) и многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна (концепция близкодействия). Вместо размерности непрерывного многообразия выступает ранг бинарной системы комплексных отношений (в общем случае дискретного множества). Невзаимодействующим частицам в 4-мерном плоском пространстве-времени можно сопоставить композицию БСКО рангов (3,3) и (2,2). Взаимодействия возникают при переходе к БСКО более высокого ранга. Первый же шаг – переход к БСКО ранга (4,4) – позволяет описать прообраз электромагнитных взаимодействий, а также существенные свойства слабых и даже гравитационных взаимодействий. На блок-схеме рисунка 1.7 это отражено стрелками влево и вправо. В книге показано, что достаточно полное описание электрослабых взаимодействий лептонов одного поколения описывается в рамках БСКО ранга (5,5). Важнейшие свойства сильных взаимодействий удается описать в рамках БСКО ранга (6,6).

Переход от описываемых в бинарной геометрофизике прообразов фундаментальных физических взаимодействий к известным теориям в других парадигмах осуществляется посредством процедур усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор.

1.7 Блок-схема содержания книги

1. Весь материал книги по характеру содержания разбит на 6 разделов. Первый раздел вводный. В нем, во-первых, охарактеризован новый подход к описанию пространства-времени и физических взаимодействий (глава 1) и, во-вторых, в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана произведен анализ концепции дальнодействия (глава 2), положенной в основу новой физической парадигмы.

Содержание следующих разделов (глав) пояснено на блок-схеме рисунка 1.8. Эта блок-схема соответствует приведенной выше на рисунке 1.7 схеме взаимодействий в разных физических парадигмах, однако весь обозначенный на блок-схеме материал пришлось распределить по разделам особым образом.

2. Реляционная теория пространства-времени и физических

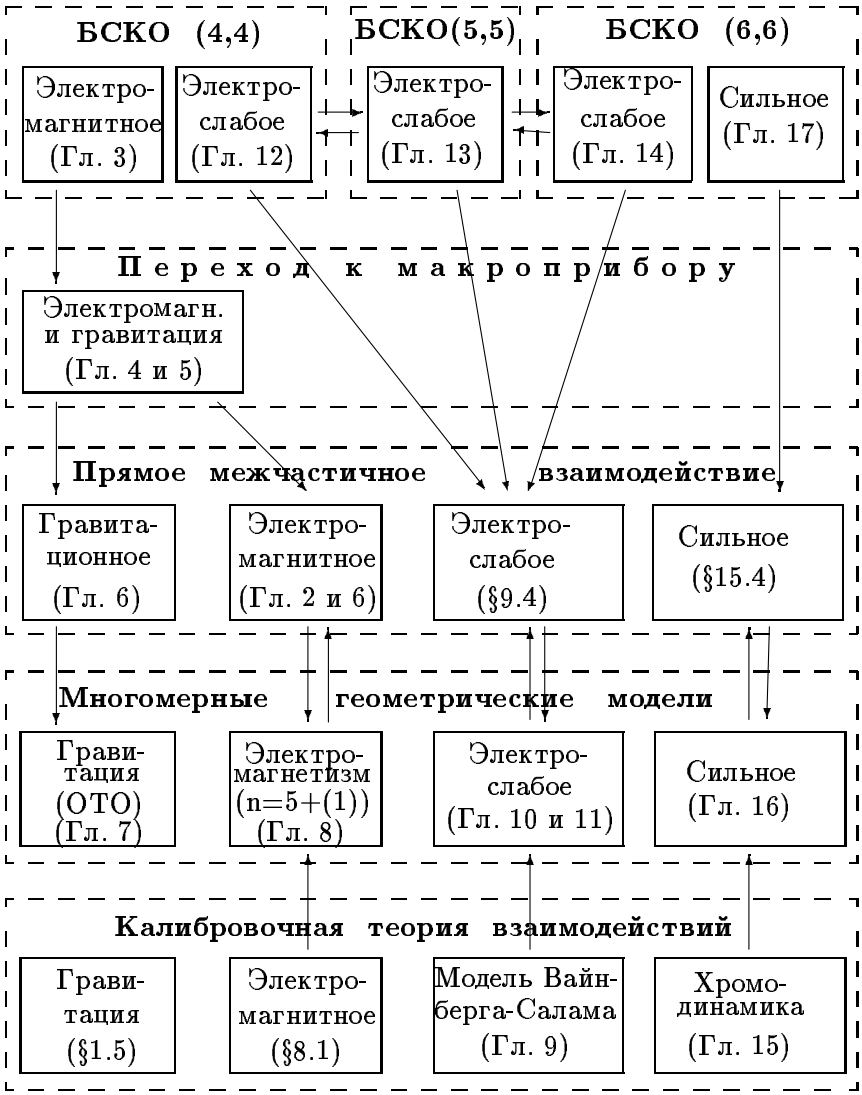


Рис. 1.8: Блок-схема содержания книги

взаимодействий (бинарная геометрофизика) непосредственно изложена в разделах 2 (главы 3 – 5), 5 (главы 12 – 15) и в главе 17 раздела 6. Поскольку в рамках бинарной геометрофизики описываются все виды физических взаимодействий, для сопоставления оказалось необходимым вставить соответствующий материал из общепринятой калибровочной теории физических взаимодействий (из 1-й физической парадигмы. Так, обсуждению электрослабых взаимодействий в бинарной геометрофизике (главы раздела 5) предшествует глава 9, в которой изложен самый необходимый материал общепринятой калибровочной модели Вайнберга-Салама. Аналогично, обсуждению сильных взаимодействий в бинарной геометрофизике (в главе 17) предшествует краткое изложение в главе 15 основ стандартной хромодинамики, формулируемой на основе калибровочного подхода. Для сопоставления выводов оказалось необходимым в соответствующих местах также вставить материал из стандартной электродинамики и общей теории относительности (глава 7). Таким образом, содержание верхнего подблока на блок-схеме рисунка 1.8 и нижнего подблока, также обведенного пунктирной рамкой, оказалось перемешанным.

3. Важное место в разрабатываемой программе занимает переход от первичной теории (от прообраза физических взаимодействий, описываемого верхним подблоком блок-схемы) к общепринятым полевым теориям физических взаимодействий (к нижним двум подблокам). Этот вопрос подробно обсужден в главах 4 и 5 раздела 2 на основе БСКО минимального ранга (4,4), пригодного для этой цели. Как будет показано ниже, именно начиная с этого ранга (4,4), удается построить объединенную модель (прообраза) электромагнитных, гравитационных и важных положений теории электрослабых взаимодействий. Поэтому оказалось целесообразным сосредоточиться на такой упрощенной модели. Выявленные таким образом черты перехода к стандартным полевым теориям имеют место и для более полных моделей на основе БСКО рангов (5,5) и (6,6).

4. Как уже отмечалось, для сопоставления бинарной геометрофизики, развиваемой в рамках концепции дальнодействия, с общепринятыми теориями, построенными на основе концепции близкодействия, последние необходимо поставить на одну основу, то есть переформулировать в терминах теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Для электромагнитных и гравитационных взаимодействий этот вопрос обсужден в главах 2 и 5. Дальнодействующая версия модели Вайнберга-Салама в основных чертах обсуждена в §9.4 раздела 4, а дальнодействующая версия хромодинамики — в §15.4 раздела 6.

5. Еще раз подчеркнем, что важное место в развиваемой про-

грамме бинарной геометрофизики занимают идеи и методы многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна (второй снизу подблок на рисунке 1.8). В разделе 2 с позиций бинарной геометрофизики фактически вскрыты корни многомерных геометрических моделей физических взаимодействий. В работах автора эти два направления развивались параллельно, взаимно обогощая друг друга. По этой причине автору представилось целесообразным подробно изложить состояние исследований в области многомерных геометрических моделей и сопоставить их с более глубокой парадигмой бинарной геометрофизики. Рассмотрению геометрических моделей посвящены глава 8 раздела 3 (объединенные 5- и 6-мерные модели гравитационного и электромагнитного взаимодействий), главы 10 и 11 раздела 4 (объединенная 7-мерная модель гравитационных и электрослабых взаимодействий) и глава 16 последнего раздела 6 (объединенная 8-мерная геометрическая модель гравитационных и сильных взаимодействий). Названным главам также предшествуют главы с изложением калибровочных теорий соответствующих взаимодействий. Поскольку и калибровочные, и многомерные геометрические модели имеют один и тот же близкодействующих характер, оказалось целесообразным расположить их рядом. Читатели, интересующиеся лишь многомерными геометрическими моделями, могут читать названные главы независимо от остального материала.

Глава 2

Уроки теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана

В развиваемой здесь бинарной геометрофизике среди первичных понятий в принципе нет места для полей переносчиков взаимодействий. В нашем подходе имеются лишь элементы (частицы) и отношения между ними. Это соответствует концепции дальнодействия, альтернативной теории поля. В современной теоретической физике концепция дальнодействия[1] представлена теорией прямого межчастичного взаимодействия (action-at-a-distance) Фоккера-Фейнмана. Сейчас эта теория составляет, можно сказать, боковую ветвь теоретической физики. Она не входит в вузовские программы, поэтому основные идеи этой теории, используемые и в бинарной геометрофизике, нуждаются в подроб-

[1]В термин *дальнодействие* иногда вкладывают совершенно различный смысл. Во-первых, он может означать, что взаимодействие между двумя объектами передается на расстоянии непосредственно, т.е. без посредников. В этом смысле термин *дальнодействие*противоположен понятию *близкодействие*, когда взаимодействие передается с помощью некой среды или посредника. Во-вторых, этот термин можно трактовать так, что взаимодействие передается от одного объекта к другому с бесконечной скоростью безотносительно к тому, есть посредник или его нет. В-третьих, данный термин иногда связывают с тем, как быстро убывают с расстоянием соответствующие силы или потенциалы. Например, гравитационное и электромагнитное взаимодействия в такой трактовке относят к дальнодействующим, тогда как слабое или сильное (ядерное) — к близкодействующим. Поэтому подчеркнем, что в этой книге в термин дальнодействие вкладывается именно первый смысл — *передачу воздействий без посредника.*

ном разъяснении. Более того, в какой-то мере эту теорию можно рассматривать как строительные леса, помогающие возведению здания новой теории. По этим причинам анализу теории прямого межчастичного взаимодействия посвящена отдельная глава.

В центре внимания этой главы находятся следующие вопросы:

1) обоснование правомерности и даже, более того, — логической предпочтительности концепции дальнодействия по сравнению с общепринятой ныне концепцией близкодействия в виде теории поля (см. §2.1 и §2.2.);

2) обсуждение конкретной реализации концепции дальнодействия в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана с целью выделения понятий и выражений, которые должны иметь место в развиваемой здесь реляционной теории пространства-времени и физических взаимодействий (см. §§2.3 – 2.5); в книге большое внимание будет уделяться принципу соответствия бинарной геометрофизики с теорией Фоккера-Фейнмана;

3) обоснование перехода от парных (двухточечных) отношений, принятых в физических теориях и в геометрии, к многоточечным отношениям, фактически соответствующим принципу Маха (см. §2.6 и §2.7.);

4) обсуждение взгляда на сущность пространства и времени с точки зрения теории прямого межчастичного взаимодействия. Именно здесь кроется предел теорий третьей физической парадигмы и обосновывается выход за границы этой парадигмы (§2.8).

2.1 Истоки концепции дальнодействия

Считается, что концепция дальнодействия вошла в естествознание начиная от работ Ньютона. Следует признать, что сам Ньютон не был последовательным сторонником дальнодействия. Так, в письме к Бентли он писал:“Нельзя представить себе, каким образом неодушевленное грубое вещество могло бы без посредства чего-либо постороннего, которое нематериально, действовать на другое вещество иначе, как при взаимном прикосновении. А так должно было быть, если бы тяготение было, в смысле Эпикура, присуще материи. Вот почему я желал бы, чтобы Вы не приписывали мне учения о тяжести, прирожденной материи. Допустить, что тяготение врожденно материи, присуще ей, так что одно тело должно действовать на расстоянии через пустоту на другое без посредства чего-либо постороннего, помощью которого действие и сила от одного тела проводится к другому,

есть для меня такая нелепость, что, полагаю, в нее не впадает ни один человек, способный к мышлению о философских вещах. Тяготение должно вызываться некоторым фактором, действующим согласно определенным законам"(цитируется по [33,с.155]).

Сторонники концепции близкодействия часто приводят эту цитату для подтверждения того, что Ньютон отвергал концепцию дальнодействия. Однако при этом опускается продолжение этой цитаты:"Какой это фактор, материальный и нематериальный, — я представляю размышлению моих читателей."В своих работах Ньютон то вводил эфир, то исключал его. Это говорит о том, что он чувствовал всю глубину этой проблемы, много о ней размышлял, но не смог сделать окончательного выбора[2].

Так, начиная с работ Ньютона в физике возникла дилемма: какая концепция должна лежать в основе физической картины мира — дальнодействие или близкодействие? В дальнейшем было много сторонников как той, так и другой точек зрения. Доминировала, то одна из них, то другая. Так, в начале и в середине XIX века доминировала концепция дальнодействия. Главными сторонниками этой концепции выступали ведущие представители немецкой физической школы: В.Вебер, Л.Лоренц, Франц и Карл Нейманы, Г.Т.Фехнер, К.Ф.Целльнер и некоторые другие (см. [5]). К ним примыкали такие известные математики как Б.Риман и К.Гаусс. Напомним, их имена связаны с открытием неевклидовых геометрий, приведших к созданию общей теории относительности.

Известно, что в 1845 г. В.Вебер отправил на отзыв Гауссу свою работу "О всеобщем законе электрического действия", в которой излагались его взгляды в русле концепции запаздывающего дальнодействия, т.е. передающегося от одного заряда к другому с конечной скоростью. В ответном письме Гаусс с одобрением отозвался о его работе и упомянул о своих размышлениях над этой проблемой, добавив: "Я бы, без сомнения, давно опубликовал результаты моих исследований, если бы в то время не забросил их, поскольку мне не удалось найти то, что я считал краеугольным камнем: Nil actum reputans si quid superesset

[2]Судя по другим его высказываниям, письмам и свидетельствам его современников, Ньютон склонялся к мистико-религиозному решению этого вопроса. Так, в записках его современника Грегори говорится:"У него были сомнения, может ли он выразить последний вопрос так: чем наполнено пространство, свободное от тел? Полная истина в том, что он верит в вездесущее Божество в буквальном смысле. Так, как мы чувствуем предметы, когда изображения их доходят до мозга, так и Бог должен чувствовать всякую вещь, всегда присутствуя при ней. Он полагает, что Бог присутствует в пространстве как в свободном от тел, так и там, где тела присутствуют"[33,с.152]. В "Оптике" Ньютон называет пространство "чувствилищем (Sensorium) Бога".

agendum [Пока не все сделано, считай, что ничего не сделано (лат.)], а именно вывод добавочных сил, дополняющих взаимодействие покоящихся электрических зарядов, когда они оба находятся в движении, — из действия, которое распространяется не мгновенно, но с течением времени, как в случае света"[47, с.506]. Известно, что добавочные силы (силы Лоренца) затем были обоснованы в рамках максвелловской теории электромагнитного поля, которая надолго затмила это направление исследований.

Представителями немецкой физической школы было высказано много соображений, значительно опередивших их время и предвосхитивших многое из того, что либо было получено значительно позднее, либо проявилось в рамках реляционной теории пространства-времени и взаимодействий, развиваемой в этой книге. Следуя исследованиям по истории физики [5], перечислим некоторые из них.

1. В работах В.Вебера, К.Ф.Целльнера и других дальнодействие понималось как передающееся с некоторой конечной скоростью, т.е. было оторвано от традиционного в начале XIX века представления о бесконечной скорости распространения дальнодействующего взаимодействия.

2. В работах К.Неймана и других отвергалось распространение электрического взаимодействия вне зависимости от существования "излучателя" и "приемника". Предполагалось обязательное наличие как источника, так и поглотителя.

3. В ряде работ В.Вебера делался вывод, что "непосредственное взаимодействие двух электрических масс зависит не только от этих масс, но также от присутствия третьего тела" (см. [5, с.225]). В его работах проводилась аналогия с введенным Берцелиусом понятием "каталитической силы". Тем самым делался еще один шаг от традиционного дальнодействия, где полагалось, что сила зависит только от расстояния между двумя телами.

Это чрезвычайно важное предвидение, имеющее глубокое философское содержание. Здесь устанавливались связи с теми философскими направлениями, в рамках которых утверждалось, что поведение отдельных элементов системы не может быть описано без учета свойств системы в целом. Близкие идеи можно найти в философии Г.Лотце, во взглядах виталистов и других. В дальнейшем в физике эти идеи нашли свое выражение в виде принципа Маха.

4. Особо следует выделить работы К.Ф.Целльнера, в которых выдвигалась гипотеза, что "многие явления, для которых физика еще не нашла адекватного объяснения, на самом деле происходят в четырехмерном мире. При этом наши органы чувств фиксируют своего рода проекцию "четырехмерных процессов на трехмерный мир"" [5, 244]. Примечательно, что к 4-мерным про-

цессам Цельнер относил не только гравитационное, но и электрическое взаимодействие. Конечно, здесь четвертое измерение подразумевалось пространственным, а не временно-подобным, как в специальной теории относительности. В какой-то степени здесь предвосхищались идеи 5-мерных теорий Калуцы и Клейна.

5. Целльнер пошел дальше теории взаимодействий. В орбиту его размышлений попали и вопросы о сущности самого пространства. Целльнер отвергал ньютоновское абсолютное пространство и связывал понятие пространства с взаимодействиями объектов: "пространство трех измерений определяется законом, по которому взаимодействие тел может меняться без изменения самих тел"[5, с.79].

6. Высказывались и другие идеи, в частности, уже в 70-е годы прошлого столетия Целльнер проявлял интерес к работам Н.И.Лобачевского, Я.Бояи, Б.Римана по неевклидовым геометриям.

В последней четверти XIX века немецкая физическая школа, опирающаяся на концепцию дальнодействия, уступила первенство английской физической школе в лице работ М.Фарадея, Д.К.Максвелла и других по теории электромагнитного поля. В то время концепция близкодействия виделась обладающей рядом неоспоримых преимуществ. В рамках концепции дальнодействия накопилось слишком много проблем, на которые физика того времени не могла дать ответ. Назовем некоторые из них:

1) Концепция дальнодействия опиралась на атомарную структуру материи, которая в тот период не представлялась очевидной.

2) В рамках концепции дальнодействия естественными были представления об элементарных носителях электрического заряда. Электроны и другие элементарные частицы еще не были открыты.

3) Говоря о запаздывающем дальнодействиии, его сторонники еще не могли опереться на универсальную роль скорости света, которая прочно заняла свое место лишь после создания специальной теории относительности.

4) Были некоторые различия между формулами, описывающими электромагнитные взаимодействия частиц в рамках двух концепций. В теории поля они оказались более совершенными.

5) Решение дифференциальных уравнений в рамках теории поля давало ряд технических преимуществ по сравнению с более громоздкими рассуждениями в рамках концепции дальнодействия.

Были и другие факторы, как объективного, так и субъективного (психологического) характера. Все это привело к тому, что многие идеи и результаты немецкой физической школы середи-

ны прошлого века оказались почти забытыми.

Таким образом, можно сдалать следующие выводы:

1. Уже сам И.Ньютон, с именем которого связывается возникновение альтернативы дальнодействие или близкодействие, осознавал глубину кроящейся здесь проблемы.

2. Концепция запаздывающего дальнодействия, доминировавшая в трудах немецкой физической школы середины XIX века, оказалась преждевременной. В тот момент еще не сложились необходимые для ее развития предпосылки.

2.2 Анализ концепции дальнодействия в XX веке

Однако идеи концепции дальнодействия не были окончательно утеряны. Их носителем и сторонником оказался Э.Мах, которому физика многим обязана, главным образом, проведенным им глубоким критическим анализом оснований ньютоновских представлений об абсолютных пространстве, времени и всей механики. Он оказался у истоков содания как общей теории относительности, так и, можно сказать, квантовой механики. Так, обсуждая соотношение концепций дальнодействия и близкодействия, в своей книге "Познание и заблуждение" он писал:"Мысль Ньютона о силах, действующих на расстоянии, была великим умственным событием, которое позволило в течение одного столетия построить однородную математическую физику. В этой мысли выразилась некоторая духовная дальнозоркость. Он видел факт ускорений на расстоянии и признал его важное значение; посредники, передающие эти ускорения, казались ему неясными, и он до времени оставлял их без внимания"[40 ,с.441].

Соотношение двух концепций обсуждалось также А.Пуанкаре в "Последних мыслях". Он писал:"Нам представляется, что мы лучше понимаем передачу действия путем соприкосновения, нежели действие на расстоянии. Это последнее содержит в себе нечто таинственное, естественно наводящее на мысль о некотором вмешательстве в наш мир извне и именно поэтому я говорю сейчас, что механицизм пронизан материализмом. Призвание ученых состоит в том, чтобы устранять все таинственное и тем самым всегда продвигаться хотя бы немного вперед. ... И когда где-нибудь обнаруживают действие на расстоянии, стремятся представить себе и промежуточную среду, которая обладает свойством передавать это действие от точки к ближайшей точке. Однако на этом пути продвинулись не слишком-то далеко, ибо если эта среда непрерывна, то это не дает никакого удовлетворения нашей привязанности к простоте, т.е. нашей потреб-

ности все понимать. Если же она состоит из атомов, то атомы не могут находиться в постоянном соприкосновении, хотя они и расположены на очень малых расстояниях друг от друга, равных, по всей видимости, одной миллиардной милиметра. Но это все-таки конечное расстояние и его значение такого же характера, как и километра, — для философа это в принципе одно и то же. Ведь необходимо, чтобы действие передавалось от одного атома к другому — только так оно становится действием на расстоянии"[55 ,с.490].

Идеи дальнодействия были возрождены в 20-х годах XX века в работах К.Шварцшильда, Г.Тетроде [69] и А.Д.Фоккера [80]. В них концепция прямого межчастичного взаимодействия получила четкую математическую формулировку. Было показано, что теория электромагнетизма, построенная на ее основе, согласуется с теорией Максвелла для статических и стационарных электромагнитных явлений. Тогда же были выявлены и основные трудности развития теории, о которых будет сказано позже.

В нашей стране концепция дальнодействия активно отстаивалась Я.И.Френкелем [81, 82]. В 30-х годах он утверждал:"Я думаю, однако, что мы должны считать фундаментальной реальностью не поле, но материю, т.е. движение и взаимодействие материальных частиц, а электромагнитное поле рассматривать как вспомогательную конструкцию, служащую для более удобного описания этого взаимодействия. Наконец, я полагаю, что оно представляет собой дальнодействие, которое мы никоим образом не должны сводить к какому-то действию и близкодействию, осуществляющемуся через какую-либо промежуточную материальную среду или при помощи материализованных силовых линий... Позвольте прежде всего доказать вам, что физическим абсурдом является именно представление о близкодействии, а физической реальностью, физически обоснованным является представление о дальнодействии. Как нам ни трудно представить себе это дальнодействие, да еще запаздывающее, все же нам необходимо сделать соответствующее усилие для того, чтобы освободиться от тех привычек, которые сложились у нас в эпоху, когда наши познания были недостаточны" [81 ,с.25]."Разрешите мне сейчас проанализировать понятие близкодействия так, как оно фигурирует в теории Фарадея, так, как его представляли себе Максвелл, и показать вам, что это близкодействие, действующее через промежуточную среду, представляет собой только иллюзию, только замаскированное дальнодействие. Не дальнодействие оказывается необходимым сводить к близкодействию, а, наоборот, близкодействие к дальнодействию"[81 , с.73].

В защиту своей позиции Френкель приводил три основных довода. Первый, как он называл, "антропоморфный" довод со-

стоит в том, что у нас укоренились представления о воздействии на предметы через непосредственное соприкосновение с ними. Второй довод состоит в привычке оперировать дифференциальными уравнениями, обычно ассоциируемыми со сплошной средой. Третий довод близок к только что упомянутой точке зрения А.Пуанкаре. Френкель говорил:"Если частицы, из которых состоит рассматриваемое тело, отделены друг от друга пустыми промежутками, то каким образом они действуют друг на друга? Вы можете сказать, что когда одно тело толкает другое, то одни частицы нажимают на соседние и таким образом осуществляется непосредственное соприкосновение. Ну а если вы тело растягиваете, как тогда действуют соседние частицы его друг на друга?" [81 ,с.76] Он утверждал, что введение новой межмолекулярной среды "нисколько не решает вопроса о сведении дальнодействия к близкодействию, а лишь сводит дальнодействие на очень малых расстояниях к дальнодействию на еще меньших расстояниях."

Добавим к этому четвертый довод фактически сводящийся к следующему. Концепция близкодействия опирается, по-существу, на нерелятивистское понятие контакта, означающее, что взаимодействие осуществляется, когда расстояние между частицами i и j равно нулю ($r_{ij} = 0$). Частица взаимодействует с полем, находящимся в этой же точке, затем поле последовательно передает воздействие от одной точки пространства к другой, бесконечно близкой, по цепочке пока не достигнет положения второй частицы. В релятивистской теории, как известно, время и пространство объединяются в одно 4-мерное многообразие. Релятивистски неинвариантное понятие расстояния r_{ij} следует заменить на релятивистски инвариантное понятие интервала $s_{ij} = \sqrt{c^2 t_{ij}^2 - r_{ij}^2}$. Тогда релятивистское понятие контакта означает $s_{ij} = 0$, что соответствует взаимодействию (контакту) частиц на изотропных конусах с вершинами в местах расположения частиц. В этом смысле можно считать теорию запаздывающего дальнодействия более соответствующей релятивистской идеологии, нежели общепринятую теорию поля.

В дальнейшем, уже в 40-х годах, важный вклад в развитие теории прямого межчастичного взаимодействия был сделан Р.Фейнманом и Дж.Уилером, о чем было подробно сказано в Нобелевской лекции Р.Фейнмана [76]. Затем в рамках концепции дальнодействия были выполнены серии работ Ф.Хойла и Дж.Нарликара [84, 85], П.Дэвиса [23], Г.В.Рязанова [63,с. 132-161] и ряда других авторов. В итоге было показано, что *в рамках концепции дальнодействия можно построить теории электромагнитных и других взаимодействий, объясняющие наблюдае-*

мые явления не хуже, чем это делается в рамках общепринятой теории поля.

2.3 Принцип действия Фоккера

1. Изложим суть теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Следует сразу же подчеркнуть, что в отличие от бинарной геометрофизики, в этой теории постулируется классическое 4-мерное пространство-время и в него помещаются заряженные частицы. Поля переносчиков взаимодействий отсутствуют. Постулируется принцип действия Фоккера, согласно которому электромагнитные (а также иные) взаимодействия между заряженными частицами описываются непосредственно через их характеристики. Выделим две произвольные заряженные частицы, присвоив им номера 1 и 2. Согласно принципу действия Фоккера их электромагнитное взаимодействие описывается следующим вкладом в классическое действие

$$\begin{aligned} S_{int}^{(e)}(1,2) &= -e_1 e_2 \int\int \delta(s^2(1,2))\eta_{\mu\nu} dx_1^\mu dx_2^\nu = \\ &= -\int\int j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu} \delta(s^2(1,2)) ds_1 ds_2, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где e_1 и e_2 – электрические заряды двух частиц, $j_{(1)}^\mu = e_1 dx_1^\mu / ds_1$ – вектор 4-тока частицы с номером 1; dx_1^μ, dx_2^ν - изменения координат; ds_1, ds_2 – смещения вдоль мировых линий частиц; $\eta_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени Минковского; $s^2(1,2)$ – квадрат интервала между точками на мировых линиях двух частиц;

$$\delta(s^2(1,2)) = \delta(c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2) \tag{2.3.2}$$

– δ-функция. Здесь t_{12} и r_{12} - промежуток времени и расстояние между положениями взаимодействующих частиц.

Выражение (2.3.1) можно понимать как парное отношение между двумя элементами некого одного множества. Точнее будет сказать, что в (2.3.1) содержатся даже два парных отношения: одно ток-токовое $j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu}$ – парное отношение унарной системы вещественных отношений ранга 5, а второе $s^2(1,2)$ – парное отношение унарной системы вещественных отношений ранга 6а (см. [17]).

2. Представляя δ-функцию (2.3.2) в виде

$$\delta(s^2(1,2)) = \frac{1}{2|r_{12}|}\left[\delta(ct_{12} - r_{12}) + \delta(ct_{12} + r_{12})\right], \qquad (2.3.3)$$

приходим к выводу, что при фиксированном положении частицы с номером 1 в некоторый момент времени t_0 (на ее мировой линии) взаимодействие между частицами происходит при двух положениях второй частицы: в предшествующий момент t' и в будущий момент t'', соответствующих двум пересечениям конусов прошлого и будущего (с вершиной на мировой линии первой частицы в момент t_0) с мировой линией второй частицы (см. рис.2.1). С точки зрения первой частицы взаимодействие, опре-

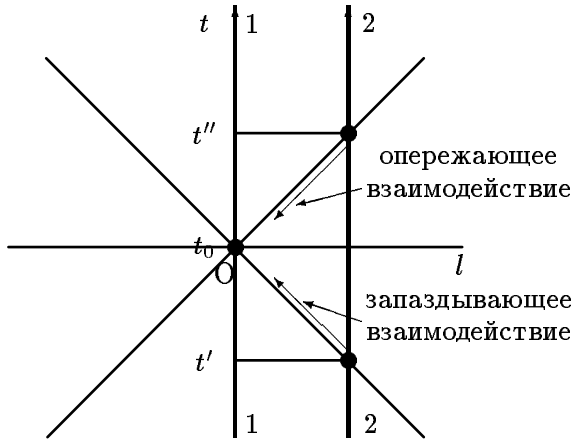


Рис. 2.1: Опережающее и запаздывающее взаимодействия двух частиц

деляемое положением второй частицы в момент t', называется *запаздывающим*, а положением в момент t'' – *опережающим*. Таким образом, согласно принципу Фоккера запаздывающее и опережающее взаимодействия присутствуют симметричным образом. В 20-х - 30-х годах это представляло основную трудность теории прямого межчастичного взаимодействия. Можно было говорить о совпадении этой теории с общепринятой теорией поля лишь для статических и стационарных электромагнитных явлений.

Как видно из формулы (2.3.1), в нее не входят поля переносчиков взаимодействий. Взаимодействие определяется лишь характеристиками частиц, т.е. этой формулой описывается запаздывающее (и опережающее) дальнодействие.

3. Полное действие для системы взаимодействующих электрических зарядов в классической теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия записывается в виде

$$S^{(e)} = -\sum_i m_i c \int ds_i - \frac{1}{2c}\sum_i \sum_k \int\int j^{\mu}_{(i)} j_{(k)\mu} \delta(s^2(i,k)) ds_i ds_k, \tag{2.3.4}$$

где m_i - масса покоя частицы i. Первое слагаемое справа соответствует действию для свободных (невзаимодействующих) частиц. Оно представляет собой отношение между двумя точками-событиями на мировой линии одной частицы. Во втором слагаемом справа суммирование производится по всем парам заряженных частиц, причем $i \neq k$.

4. Поясним, как в теории прямого межчастичного взаимодействия можно ввести вторичные (вспомогательные) понятия, соответствующие потенциалам и напряженностям электромагнитного поля. Для этого выделим из (2.3.4) одну частицу, например, с номером $i = 1$ и запишем для нее действие в более привычной форме

$$S_1^{(e)} = -m_1 c \int ds_1 - \frac{1}{c}\sum_{k\neq 1} \int j^{\mu}_{(1)} A_{\mu}(1,k) ds_1, \tag{2.3.5}$$

где введено обозначение для отдельных вкладов

$$A_{\mu}(1,k) = \int j_{(k)\mu} \delta(s^2(1,k)) ds_k, \tag{2.3.6}$$

которые интерпретируются как векторный электромагнитный потенциал, создаваемый зарядом e_k в том месте, где находится заряд e_1.

Объединяя вклады всех заряженных частиц, получаем суммарный электромагнитный потенциал $A_{\mu}(1)$ в месте нахождения заряда с номером 1.

$$A_{\mu}(1) = \sum_{k\neq 1} A_{\mu}(1,k) \tag{2.3.7}$$

и действие для выделенной частицы:

$$S_1^{(e)} = -m_1 c \int ds_1 - \frac{1}{c}\int j^{\mu}_{(1)} A_{\mu}(1) ds_1, \tag{2.3.8}$$

формально совпадающее с общепринятым выражением в электродинамике Максвелла-Лоренца. Однако следует подчеркнуть, что *в теории прямого межчастичного взаимодействия бессмысленно говорить о потенциале в точках пространства-времени, где отсутствуют электрические заряды.*

5. Из действия (2.3.8) легко получить уравнение движения выделенной заряженной частицы. Согласно принципу наименьшего действия эта частица движется по экстремальной кривой

$$\delta S_1^{(e)} = 0 \tag{2.3.9}$$

в предположении, что на концах траектории вариации координат равны нулю. После стандартных выкладок получается уравнение знакомого вида

$$m_1 \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x_1^\nu}{ds_1^2} = \frac{e_1}{c^2} F_{\mu\nu}(1) \frac{dx_1^\nu}{ds_1}, \tag{2.3.10}$$

где введен тензор электромагнитного взаимодействия в точке нахождения заряда с номером 1:

$$F_{\mu\nu}(1) = \frac{\partial A_\nu(1)}{\partial x_1^\mu} - \frac{\partial A_\mu(1)}{\partial x_1^\nu}. \tag{2.3.11}$$

Если опустить индекс, обозначающий номер частицы, получим стандартное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном "поле".

6. Введенный в (2.3.11) тензор электромагнитного взаимодействия $F_{\mu\nu}$ тождественно удовлетворяет соотношениям, аналогичным уравнениям Максвелла. Чтобы это показать следует воспользоваться соотношением Дирака для δ-функции:

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_i^\mu \partial x^\nu}{}_i \, \delta(s^2(i,k)) = 4\pi \delta^4(x_i - x_k). \tag{2.3.12}$$

Подействуем оператором $\eta^{\mu\nu} \partial^2 / \partial x_1^\mu \partial x_1^\nu$ слева на вклад в векторный потенциал от одной частицы, определенный в (2.3.6). Используя (2.3.12), находим, что векторный потенциал удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 A_\alpha(1,k)}{\partial x_1^\mu \partial x_1^\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{(k)\alpha}, \tag{2.3.13}$$

где

$$j_{(k)\alpha} = e_k \eta_{\alpha\beta} \int_k \delta^4(x_1 - x_k) \frac{dx_k^\beta}{ds_k} ds_k$$

– ток заряда k.

Легко убедиться, что определенный согласно (2.3.6) векторный потенциал автоматически удовлетворяет условию калибровки Лоренца

$$\frac{\partial A^\alpha(i,k)}{\partial x_i^\alpha} = 0. \tag{2.3.14}$$

Расписывая $\partial F^\alpha_{\beta\cdot}(i,k)/\partial x_i^\alpha$ с учетом (2.3.11) и (2.3.14), находим

$$\frac{\partial F^\alpha_{\beta\cdot}(i,k)}{\partial x_i^\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j_{(k)\beta}. \tag{2.3.15}$$

7. Таким образом, приходим к выводу, что в теории прямого электромагнитного взаимодействия типа Фоккера-Фейнмана

1) нет потенциалов поля в точках пространства-времени, где отсутствуют частицы, а, следовательно, и нет полевых уравнений Максвелла;

2) потенциалы электромагнитного взаимодействия можно ввести в местах расположения заряженных частиц, и для них выполняются тождества, соответствующие уравнениям Максвелла[3].

2.4 Прямое межчастичное гравитационное взаимодействие

1. Как уже отмечалось, теория прямого межчастичного взаимодействия может быть построена не только для электромагнитных, но и для других взаимодействий. При этом должен быть

[3]Если допустить существование векторных потенциалов во всех точках непрерывного пространства-времени, то в математическом плане две теории: поля и прямого межчастичного взаимодействия, – окажутся эквивалентными. Они отличаются исходными положениями. В теории поля исходят из дифференциальных уравнений, из которых можно найти функцию Грина и записать решение в интегральном виде. В теории прямого межчастичного взаимодействия исходным является задание функции Грина. Ее роль играет дельта-функция в (2.3.1). Зная функцию Грина, можно восстановить соответствующее ей дифференциальное уравнение. Однако для физики допущение о распространении значений потенциалов на все точки пространства-времени имеет существенное значение.

соответствующим образом видоизменен принцип действия Фоккера. Рассмотрим случай прямого межчастичного *гравитационного* взаимодействия. Сразу же следует подчеркнуть, что прямое обобщение принципа Фоккера на случай гравитации приводит к линеаризованной теории гравитации, т.е. к приближенной теории первого порядка по гравитационной константе k_g. Вследствие нелинейности гравитационных взаимодействий и ряда других особенностей теория прямого межчастичного гравитационного взаимодействия строится итерационным способом — в виде своеобразного разложения в ряд по гравитационной константе.

2. Проанализируем первый порядок теории прямого гравитационного взаимодействия[4]. В этом случае принцип Фоккера (2.3.1) также записывается для парных взаимодействий с той разницей, что вместо токов взаимодействующих частиц следует писать их тензоры энергии-импульса

$$S_{int}^{(g)}(1,2) = \frac{k_g}{c}\int\int T_{(1)}^{\mu\nu}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\times$$
$$\times T_{(2)}^{\alpha\beta}\delta(s^2(1,2))ds_1 ds_2, \qquad (2.4.1)$$

где $T^{\mu\nu}$ – тензоры энергии-импульса взаимодействующих частиц с номерами 1 и 2, k_g – ньютоновская гравитационная постоянная. Остальные обозначения те же, что и в §2.3. Раскрывая $T^{\mu\nu}$ для точечных частиц, имеем

$$\begin{aligned} S_{int}^{(g)}(1,2) &= k_g\frac{m_1 m_2}{c}\int\int u_{(1)}^{\mu}u_{(1)}^{\nu}\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)\times \\ &\times\ u_{(2)}^{\alpha}u_{(2)}^{\beta}\delta(s^2(1,2))ds_1 ds_2, \qquad (2.4.2) \end{aligned}$$

где u^μ – компоненты 4-скоростей, а m – массы соответствующих частиц.

[4]Обобщение принципа Фоккера на случай гравитационного взаимодействия был исследован в работах Я.И.Грановского и А.А.Пантюшина (1965-1969 г.г.)[21, 50], Е.Б.Парушина (1974 г.), К.А.Пирагаса и В.И.Жданова (1972-1995 г.г.) [24, 54] и рядом других авторов. В этих работах была развита теория в первом приближении по гравитационной константе k и рассмотрен ряд приложений этой теории для анализа приближенных уравнений движения системы гравитирующих частиц. Кроме того, следует указать большую серию работ Ф.Хойла и Дж.Нарликара (1964-1979 г.г.) [46, 47, 84, 85] по своеобразному варианту теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, который правильнее было бы назвать теорией прямого скалярного взаимодействия на фоне искривленного пространства-времени общей теории относительности. Построение теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия в любом порядке по k_g, совпадающей с эйнштейновской теорией гравитации, было осуществлено в наших работах с А.Ю.Турыгиным (1986 г.) [10, 71].

Действие для системы гравитационно взаимодействующих частиц на фоне плоского пространства-времени имеет вид

$$\begin{aligned} S^{(g)} &= -c\sum_i m_i \int ds_i + \\ &+ \frac{k_g}{2c}\sum_i\sum_{j\neq i} m_i m_j \int\int u^\mu_{(i)} u^\nu_{(i)} \left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right) \times \\ &\times u^\alpha_{(j)} u^\beta_{(j)} \delta(s^2(i,j)) ds_i ds_j, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

где, подчеркнем, суммирование производится по несовпадающим номерам частиц.

3. Выделяя одну частицу с номером i, представим ее действие в форме

$$S_i^{(g)} = -cm_i \int \left(1 - k_g \sum_{j\neq i} \overset{0}{h}_{\mu\nu}(i,j) u^\mu_{(i)} u^\nu_{(i)}\right) ds_i, \tag{2.4.4}$$

где использовано обозначение для потенциалов гравитационного воздействия на частицу i со стороны частицы j

$$\overset{0}{h}_{\mu\nu}(i,j) = \frac{m_j}{2c^2}\int \delta(s^2(i,j))(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) u^\alpha_{(j)} u^\beta_{(j)} ds_j. \tag{2.4.5}$$

Объединяя вклады от всех частиц, имеем суммарный гравитационный потенциал в месте нахождения частицы i:

$$\overset{0}{h}_{\mu\nu}(i) = \sum_{j\neq i} \overset{0}{h}_{\mu\nu}(i,j) \tag{2.4.6}$$

и действие для частицы i в виде

$$\overset{1}{S}{}_i^{(g)} = -cm_i \int \left(1 - k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu}(i) u^\mu_{(i)} u^\nu_{(i)}\right) ds_i. \tag{2.4.7}$$

4. Выведем из действия (2.4.7) уравнения движения частицы i. Для этого распишем вариацию действия при обычных предположениях о равенстве нулю вариаций координат на концах траектории. После стандартных выкладок находим уравнение движения в виде (номер частицы i опускаем)

$$\eta_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} - k_g\left(\frac{\partial \overset{0}{h}_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \overset{0}{h}_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \overset{0}{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) u^\mu u^\nu -$$

$$-2k_g \overset{0}{h}_{\mu\sigma} \frac{du^\mu}{ds} + k_g \frac{\partial \overset{0}{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} u^\mu u^\nu u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\sigma} +$$

$$+2k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} \frac{u^\mu}{ds} u^\nu u^\alpha \eta_{\alpha\sigma} + k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \frac{du^\alpha}{ds} \eta_{\alpha\sigma} = 0. \qquad (2.4.8)$$

5. Это уравнение можно упростить, представив в *форме уравнения геодезической линии в специально подобранной метрике риманова пространства-времени* (в первом порядке по k_g):

$$\overset{1}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} . \qquad (2.4.9)$$

Здесь второй член справа представляет собой малую добавку к метрике плоского пространства-времени Минковского. Чтобы не возникало путаницы будем помечать все величины, вычисленные с помощью метрики $\overset{0}{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$, значком (0) сверху, а величины, вычисленные с помощью метрики $\overset{1}{g}_{\mu\nu}$, – значком (1). Так, имеем

$$d\overset{(0)}{s}{}^2 = \overset{0}{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu; \qquad \overset{(0)}{u}{}^\mu = dx^\mu / d\overset{(0)}{s};$$

$$d\overset{(1)}{s}{}^2 = \left(1 - 2k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} \overset{(0)}{u}{}^\mu \overset{(0)}{u}{}^\nu\right) d\overset{(0)}{s}{}^2; \qquad \frac{d}{d\overset{(0)}{s}} = \frac{d}{d\overset{(1)}{s}} + O(k_g^2); \qquad (2.4.10)$$

$$\overset{(0)}{u}{}^\mu = \left(1 - k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} \overset{(0)}{u}{}^\mu \overset{(0)}{u}{}^\nu\right) \overset{(1)}{u}{}^\mu + O(k_g^2).$$

Используя эти формулы, уравнение (2.4.8) можно представить в виде уравнения геодезической линии в метрике (2.4.9):

$$\overset{(1)}{g}_{\sigma\nu} \frac{d\overset{(1)}{u}{}^\nu}{d\overset{(1)}{s}} + \overset{(1)}{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} \overset{(1)}{u}{}^\mu \overset{(1)}{u}{}^\nu = 0, \qquad (2.4.11)$$

где

$$\overset{(1)}{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{(1)}{g}_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \overset{(1)}{g}_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \overset{(1)}{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \qquad (2.4.12)$$

– символы Кристоффеля (первого порядка малости по k_g). Заметим, что основные понятия и соотношения общей теории относительности кратко обсуждены в §7.1 и §7.2.

6. Далее покажем, что в первом порядке по k_g *тождественно выполняются уравнения Эйнштейна.* Для этого подсчитаем ряд промежуточных величин. Из (2.4.9) находим контравариантный метрический тензор

$$\overset{1}{g}{}^{\mu\nu} \approx \overset{0}{g}{}^{\mu\nu} + 2k_g \overset{0}{h}{}^{\mu\nu}, \tag{2.4.13}$$

где $\overset{0}{h}{}^{\mu\nu} = \overset{0}{h}_{\alpha\beta}\ \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}$. Из (2.4.10) и (2.4.12) последовательно находятся компоненты символов Кристоффеля $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}$, тензора Риччи $\overset{(1)}{R}_{\mu\nu}$ и скалярной кривизны $\overset{(1)}{R}$ в эффективной метрике (2.4.9). В итоге для тензора Эйнштейна получаем выражение

$$\overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{1}{g}_{\mu\nu}\overset{(1)}{R} = k_g \Box \left(\overset{0}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}_{\mu\nu}\overset{0}{h}\right) - k_g \left(\overset{0}{h}{}^{\alpha}{}_{\mu,\alpha} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\alpha}{}_{\mu}\overset{0}{h}_{,\alpha}\right)_{,\nu} -$$

$$-k_g \left(\overset{0}{h}{}^{\alpha}{}_{\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\alpha}{}_{\nu}\overset{0}{h}_{,\alpha}\right)_{,\mu} + k_g \overset{0}{g}_{\mu\nu}\left(\overset{0}{h}{}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{h}_{,\alpha}\right)_{,\beta}, \tag{2.4.14}$$

где запятая означает частное дифференцирование; $\overset{0}{h} = \overset{0}{h}_{\mu\nu}\ \eta^{\mu\nu}$.

7. В первом порядке по k_g тождественно выполняются дополнительные условия гармоничности (условия де-Дондера, Фока), соответствующие условиям Лоренца в электродинамике. Чтобы это показать, нужно, во-первых использовать выражение для квадрата конечного интервала

$$s^2(x, x') = \overset{0}{g}_{\mu\nu}\ (x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu),$$

во-вторых, использовать определение гравитационных потенциалов (2.4.5). В итоге имеем

$$\left(\overset{0}{h}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{h}\right)_{,\alpha} = 0. \tag{2.4.15}$$

С учетом этих условий тензор Эйнштейна приводится к виду

$$\overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{1}{g}_{\mu\nu}\overset{(1)}{R} = k_g \Box \left(\overset{0}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{0}{g}_{\mu\nu}\overset{0}{h}\right). \tag{2.4.16}$$

8. С другой стороны, вследствие тождеств Дирака (2.3.12) и определения (2.4.5) имеем

$$k_g \Box \left(\overset{0}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{0}{g}_{\mu\nu} \overset{0}{h} \right) = \frac{8\pi k_g}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{2.4.17}$$

т.е. приходим к тождеству, соответствующему уравнению Эйнштейна в первом порядке по k_g:

$$\overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_{\mu\nu} \overset{(1)}{R} = \frac{8\pi k_g}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{2.4.18}$$

9. Для получения теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, соответствующей эйнштейновской общей теории относительности, необходимо ввести в принцип действия Фоккера слагаемые более высоких порядков по k_g. В наших с А.Ю.Турыгиным работах показано [10, 71], что это делается с помощью перехода от двухточечных отношений к многоточечным. Этот вопрос более подробно рассмотрен в главе 6.

10. Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1) по образу и подобию электромагнитного взаимодействия строится (в первом порядке по k_g) теория прямого гравитационного взаимодействия типа Фоккера-Фейнмана;

2) тензорный (2-го ранга) характер прямого гравитационного взаимодействия позволяет ввести эффективную риманову метрику (в месте нахождения частиц);

3) для эффективной римановой метрики имеют место тождества, соответствующие линеаризованным уравнениям Эйнштейна;

4) обобщив принцип Фоккера для гравитационного взаимодействия, в более высоких порядках по k_g можно прийти к нелинейной теории прямого гравитационного взаимодействия, соответствующей общей теории относительности.

2.5 Анализ фоккеровского действия

В следующих главах вводимые в бинарной геометрофизике ключевые выражения будут сопоставляться с фоккеровским действием. При этом особо важную роль будет играть фоккеровское действие для *электромагнитного взаимодействия* двух зарядов, поэтому сосредоточим внимание именно на принципе действия (2.3.1). В нем под знаком интеграла стоит выражение

$$j^{\mu}_{(1)} j_{(2)\mu} \delta(s^2(1,2)) = u^{\mu}_{(1)} u_{(2)\mu} e_1 e_2 \delta(s^2(1,2)), \tag{2.5.1}$$

содержащее три существенных фактора, которые должны быть объяснены в развиваемой здесь теории:

1) *скалярное произведение 4-скоростей* (4-импульсов) двух частиц $u^{\mu}_{(1)}u_{(2)\mu}$,

2) *электрические заряды* e_1 и e_2 двух частиц, точнее, отношения этих зарядов к их массам,

3) *δ-функция или функция Грина*, связывающая положения двух частиц.

Для гравитационного действия (2.4.1) первые два фактора очевидным образом изменяются соответственно на скалярное произведение квадратичных комбинаций из скоростей двух частиц и замену электрических зарядов на массы частиц. Третий фактор остается тем же самым.

1. Как уже отмечалось (см. (1.4.10)), скалярное произведение можно построить из параметров элементов, описывающих два лептона в рамках БСКО ранга (3,3). Оно расписывается через четыре фундаментальные 2×2-отношения в виде

$$u^{\mu}_{(1)}u_{(2)\mu} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\delta\\ is\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\delta\\ ks\end{bmatrix}\right\}, \qquad (2.5.2)$$

где, напомним, элементы i, k и α, β описывают начальное и конечное состояния первого лептона, помечаемого индексом (1), элементы j, s и γ, δ описывают начальное и конечное состояния второго лептона (с индексом (2)). Выражения в квадратных скобках обозначают фундаментальные 2×2-отношения БСКО ранга (3,3), вида (1.4.3).

Выражение (2.5.2) проиллюстрировано с помощью диаграмм на рисунке 2.2, где каждый из лептонов обозначается парой прямых линий, как бы соединяющих начальные и конечные элементы.

Забегая вперед, отметим, что в бинарной геометрофизике произведение квадратичных комбинаций из скоростей двух частиц в прямом *гравитационном взаимодействии* оказывается производной конструкцией из первичных выражений для электромагнитного взаимодействия.

2. В рамках БСКО ранга (3,3) в принципе не может быть электрических зарядов частиц (второго фактора в подинтегральном выражении (2.3.1)), но их можно ввести в рамках бинарного многомерия, т.е. в рамках теории БСКО, начиная с ранга (4,4). Заряды предлагается описывать через дополнительные, третьи параметры элементов, обозначаемых индексами $s = 3$. Это осуществляется в духе 5-мерной теории Калуцы, где также появляются дополнительные (пятые) координаты. Напомним, что в

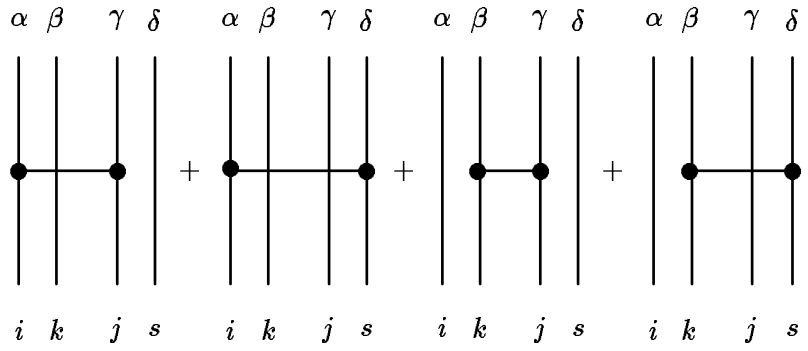


Рис. 2.2: Графическая иллюстрация скалярного произведения импульсов двух массивных лептонов

теории Калуцы пятые компоненты импульсов с точностью до коэффициента имеют физический смысл электрических зарядов частиц:

$$p_5 = \frac{ec}{2\sqrt{k_g}}, \tag{2.5.3}$$

где k_g- ньютоновская гравитационная постоянная. В теориях еще более высоких размерностей можно ввести несколько видов зарядов.

3. Третий фактор в (2.5.1) — функция Грина, пропагатор или δ-функция от квадрата интервала играет чрезвычайно важную роль в теории, — именно благодаря ему представляется возможным говорить о пространственно-временной разнесенности частиц и вообще определять понятие классического пространства-времени.

Следует заметить, что причинная функция Грина отличается от δ-функции, фигурирующей в фоккеровском принципе действия. Забегая вперед, отметим, что в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия это отличие состоит в учете вкладов в парное взаимодействие со стороны всех других частиц окружающего мира. Выпишем результирующее выражение для функции Грина

$$\delta(s^2(1,2)) \to D_0^c(x_1 - x_2) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\exp[\frac{i}{\hbar}k_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)]}{k^2 + i\epsilon} d^4k, \tag{2.5.4}$$

где k_μ – изотропный вектор передачи импульса. На языке теории поля это импульс электромагнитного излучения. Выражение $i\epsilon$ фактически описывает влияние других частиц мира. Математически оно определяет контур интегрирования в комплексной плоскости. Очевидно, что $(x_1^\mu - x_2^\mu)$ – разность координат двух взаимодействующих частиц.

Для получения пропагатора (2.5.4) в рамках бинарной геометрофизики следует обосновать появление следующих четырех составляющих третьего фактора:

а) вектора передачи импульса k_μ;

б) экспоненциального слагаемого в числителе подинтегрального выражения в (2.5.4);

в) знаменателя в подинтегральном выражении;

г) причину процедуры интегрирования по k.

Обоснованию появления всех названных факторов и их составляющих посвящены следующие три главы.

К названным факторам еще следует добавить пятый, позволяющий исключить опережающие взаимодействия. Таким фактором является учет взаимодействия с частицами окружающей Вселенной.

2.6 Фейнмановская теория поглотителя

В теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа, по определению, взаимодействие между любыми двумя электрическими зарядами (или массами) является наполовину запаздывающим и наполовину опережающим, причем исключить не наблюдаемые на опыте опережающие взаимодействия волевым образом не представлялось возможным. В итоге получилось так, что фоккеровская теория была эквивалентной теории поля Максвелла-Лоренца лишь при описании статических и стационарных электромагнитных явлений.

И только в 1945 году эту трудность удалось устранить Р.Фейнману и Дж.Уилеру [72]. Они показали, что эта трудность в теории электромагнитного взаимодействия может быть преодолена, если учесть вклады во взаимодействия между любыми двумя зарядами со стороны всех других зарядов Вселенной. Этот вклад является своеобразным "откликом Вселенной" на процесс излучения, т.е. на акт взаимодействия. Методика корректного учета отклика Вселенной составила важную часть всей теории прямого межчастичного взаимодействия, названной Фейнманом и Уи-

лером *теорией поглотителя*. Она основана на трех постулатах[5]: 1) ускоренный заряд в пустом пространстве не излучает; 2) силы, действующие на любую частицу, слагаются из вкладов взаимодействий со всеми другими частицами Вселенной; 3) эти взаимодействия выражаются половиной опережающего и половиной запаздывающего взаимодействий, что эквивалентно соответствующим половинам решений Лиенара-Вихерта уравнений Максвелла.

В упомянутой работе 1945 года было показано, что если во Вселенной имеется достаточно большое число заряженных частиц, то суммарное воздействие их на частицу-приемник излучения полностью компенсирует опережающее взаимодействие от источника. Кроме того, опережающая часть того же суммарного воздействия, суммируясь с запаздывающим воздействием источника с приемником, приводит к наблюдаемому на опыте запаздывающему взаимодействию.

Поясним это с помощью рисунка 2.3. Пусть на мировой линии заряженной частицы (назовем ее просто зарядом) i в некоторый момент времени $t = 0$ произошло событие (акт взаимодействия, т.е. излучение сигнала). Выберем начало координат в точке, где произошло событие. Окружающий эту частицу мир смоделируем достаточно толстым шаровым слоем зарядов с внутренним радиусом R. На рисунке 2.3 внутренняя поверхность этого слоя в сечении обозначена мировыми линиями частиц k и s.

Рассмотрим влияние происшедшего в точке O в момент $t = 0$ события на второй пробный заряд j, расположенный на расстоянии l_{ij} от мировой линии заряда i. В момент времени R/c из точек C и D (а еще позже и от всех других зарядов поглотителя на конусе будущего) назад во времени начнут распространяться в точку O опережающие сигналы, чтобы сойтись в O в момент $t = 0$. К пробному заряду j в момент $t = l_{ij}/c$ (т.е. в точку B^-) придут опережающие сигналы из точки D^+ слоя (и от всех других точек в слое на конусе) и из точки O. Проделанные вычисления с суммированием по всем частицам слоя показывают, что в точке B^- строго выполняется соотношение

$$E^{adv}_{B^-}(j, \sum k) + E^{adv}_{B^-}(j, i) = 0, \qquad (2.6.1)$$

где $E^{adv}_{B^-}(j, i)$ – опережающее воздействие на заряд j со стороны излучателя-заряда i; $E^{adv}_{B^-}(j, \sum k)$ – опережающее воздействие на заряд j со стороны всех зарядов $(\sum k)$ из поглотителя – окружающего слоя.

[5]Формально они относятся и к гравитационному взаимодействию.

Аналогично, в точку B^+ на мировой линии пробного заряда j в момент времени $t = l_{ij}/c$ придут опережающие сигналы $E^{adv}_{B^+}(j, \sum s)$ от зарядов s в шаровом слое поглотителя и запаздывающий сигнал $E^{ret}_{B^+}(j, i)$ от заряда i. Вычисления показывают, что эти вклады имеют одинаковый знак и равны по величине

$$E^{adv}_{B^+}(j, \sum s) + E^{ret}_{B^+}(j, i) = 2E^{ret}_{B^+}(j, i), \qquad (2.6.2)$$

т.е. происходит удвоение исходного запаздывающего парного взаимодействия.

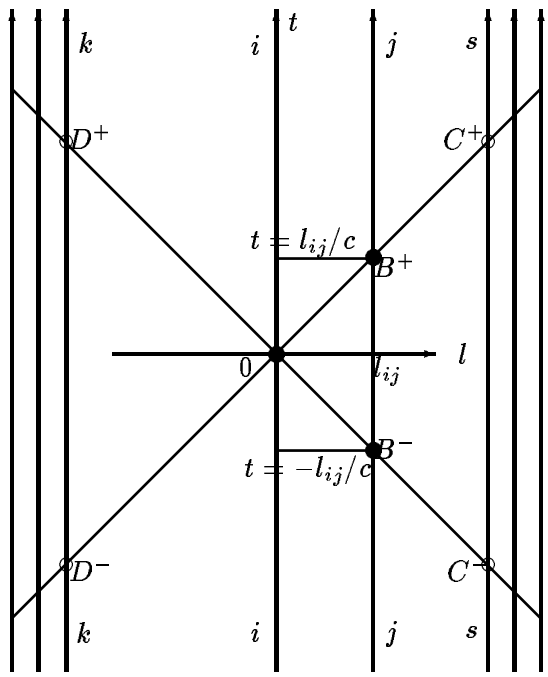


Рис. 2.3: Влияние фейнмановского поглотителя на взаимодействие двух зарядов.

На этот результат можно взглянуть иначе. На источник i падает совокупность практически плоских опережающих “волн” (в

терминах теории поля) от всех зарядов поглотителя (опережающее воздействие). В момент ускорения частицы-источника сходящаяся "волна" коллапсирует, и в следующий момент времени она расходится от источника вместе с его собственным излучением (их амплитуды одинаковы). Произвольный заряд-приемник j не может различить эти две "волны" (воздействия) разного происхождения и реагирует на них как на единое целое, т.е. как на удвоенное запаздывающее воздействие.

Особо следует подчеркнуть, что при получении данных результатов был сделан ряд упрощающих допущений, как-то: предположение о малой плотности зарядов в поглотителе, допущение о равномерности их распределения, считалось, что эти заряды свободные и т.д. Возникает естественный вопрос: а не изменятся ли результаты в более общих случаях? Фейнман, подробно проанализировал этот вопрос и показал, что полученные результаты не зависят от подобных обобщений свойств поглотителя; существенно лишь предположение о достаточно большом количестве зарядов в поглотителе, т.е. "абсолютность" поглотителя.

Другой принципиально важный результат, получающийся из учета поглотителя состоит в том, что, оказывается, сам "излучающий" источник i получает при этом дополнительное воздействие в виде силы

$$F = \frac{2e_i^2}{3c^3}\frac{da_i}{dt}. \tag{2.6.3}$$

В итоге уравнение движения "излучающей" частицы i имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}, \tag{2.6.4}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – внешние напряженности электрического и магнитного воздействий. Таким образом, *в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия автоматически возникает сила радиационного трения, которая оказывается обусловленной воздействием на излучающую частицу со стороны всех частиц окружающей Вселенной.*

Следует вспомнить, сколько усилий было затрачено на объяснение силы радиационного трения в рамках традиционной теории поля, причем до сих пор здесь не устранены все трудности.

Заметим, приведенные рассуждения не единственны. Неявно был использован существенный постулат, что любое воздействие (излучение) от источника будет поглощено окружающей материей Вселенной, а воздействие на заряд j со стороны источников из прошлого практически равно нулю. Всю изложенную схему рассуждений можно перевернуть. Для этого достаточно

постулировать, что в будущем отсутствуют возможные поглотители, тогда как в прошлом имеется достаточно много источников (постулат абсолютного излучателя). В этом случае суммарное запаздывающее воздействие от i на j (с учетом отклика Вселенной) обращается в нуль, а опережающее воздействие удваивается. Следовательно, для выбора одной из указанных схем рассуждений необходимы дополнительные соображения. Фактически здесь встает *проблема обоснования направления стрелы времени* (по образному выражению А.Эддингтона), т.е. направленности всей эволюции физического мира в будущее. В работах Фейнмана и Уилера [72, 73] были использованы термодинамические соображения, однако в последнее время для этой цели стали привлекаться свойства космологических моделей.

В следующих главах будет показано, что *в бинарной геометрофизике учет фейнмановского поглотителя означает переход от двухточечных взаимодействий к специфическому виду трехточечных взаимодействий, когда осуществляется суммирование по всем третьим частицам окружающего мира.*

2.7 Принцип Маха и концепция дальнодействия

1. Фейнмановская теория поглотителя, то есть учет взаимодействия с частицами всей окружающей Вселенной, соответствует принципу Маха. Напомним, согласно взглядам Э.Маха физический мир представляет собой неразрывное целое, так что свойства его отдельных частей, обычно понимаемые как локальные (присущие отдельно взятым системам), на самом деле обусловлены распределением всей материи мира, или глобальными свойствами Вселенной. Он писал: "Природа не начинается с элементов, как мы обязаны начинать с них. Конечно, нам слишком повезло, что мы можем зачастую отворачивать наш взор от неотделимого единства Всеобщего и позволять себе останавливаться на отдельных деталях. Но в конечном счете мы не должны пренебрегать мыслью сделать наши знания более полными и точными с помощью рассмотрения факторов, которые на время мы не принимали во внимание" [41, с.58]. Эта позиция распространялась Махом буквально на все обсуждаемые в его время физические понятия и явления. Видимо, отсюда и возникло множество пониманий принципа Маха.

2. Идеи Маха были возведены в ранг принципа А.Эйнштейном. Так, в статье 1918 года "Принципиальное содержание общей теории относительности" Эйнштейн писал: "Теория, как мне кажется сегодня, покоится на трех основных положениях, кото-

рые ни в коей степени не зависят друг от друга. Ниже они будут коротко сформулированы, а в дальнейшем освещены с некоторых сторон:

а) Принцип относительности ...

б) Принцип эквивалентности ...

в) Принцип Маха: G-поле (метрическое поле - Ю.С.В.) полностью определено массами тел. Масса и энергия, согласно следствиям специальной теории относительности, представляют собой одно и то же; формально энергия описывается симметричным тензором энергии: это означает, что G-поле обуславливается и определяется тензором энергии материи"[91, с.613]. В примечании к пункту (в) Эйнштейн разъясняет:"До сих пор я не разделял принцип (а) и (в), но это приводило к путанице. Название "принцип Маха" выбрано потому, что этот принцип является обобщением требования Маха, что инерция должна сводиться к взаимодействию тел".

Известно, что Эйнштейн мало кого цитировал, но если полистать его работы периода создания общей теории относительности, то многие из них содержат либо ссылки на работы Маха, либо упоминания его идей. Создавая общую теорию относительности, Эйнштейн был уверен, что реализует идеи Маха. Это проявилось, например в письме Эйнштейна к Маху от 25 июня 1913 года:"В будущем году во время солнечного затмения будет проверено, изгибаются ли световые лучи Солнцем или, другими словами, верно ли основное фундаментальное предположение об эквивалентности ускоренной системы и гравитационного поля. Если это так, то Ваши вдохновляющие исследования об основах механики — вопреки несправедливой критике Планка — получат блестящее подтверждение. Тогда неизбежным будет то, что инерция проявляется как своего рода взаимодействие тел, вполне в духе Вашей критики ньютоновского эксперимента с вращающимся сосудом"[83, с.262].

3. Однако вскоре после создания общей теории относительности стало ясно, что в ней принцип Маха выполняется в значительно более узком смысле. Его выполнимость можно усмотреть в том, что метрика становится функцией координат и зависит от распределения окружающей материи. Она находится из уравнений Эйнштейна, содержащих справа тензор энергии-импульса материи. Однако уравнения Эйнштейна допускают и вакуумные, т.е. в отсутствие материи, решения.

Эйнштейн ожидал большего. То ли из-за осознания всего этого, то ли под влиянием фальсифицированного, якобы отрицательного отношения (уже престарелого) Маха к общей теории относительности, но спустя некоторое время Эйнштейн изменил свое отношение к идеям Маха. Он писал:"По мнению Ма-

ха в действительно рациональной теории инертность должна, подобно другим ньютоновским силам, происходить от взаимодействия масс. Это мнение я в принципе считал правильным. Оно неявным образом предполагает, однако, что теория, на которой все основано, должна принадлежать тому же общему типу, как и ньютонова механика: основными понятиями в ней должны служить массы и взаимодействия между ними. Между тем не трудно видеть, что такая попытка не вяжется с духом теории поля"[92, с.268]. Скорее всего именно в этом состояло главное: эйнштейновская общая теория относительности оказалась построенной в духе традиционной теории поля (концепции близкодействия), тогда как Э.Мах мыслил в духе концепции дальнодействия!

4. Наиболее часто принцип Маха понимается как обусловленность *инертных масс* распределением всей материи Вселенной. Так, сторонник принципа Маха и создатель одного из вариантов теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия Дж.Нарликар писал:"Ньютоновская концепция инерции и ее измерение в единицах массы были для него неудовлетворительными. Если масса — количество материи в теле, то как понимать ее измерение? Для Маха масса и инерция были не внутренними свойствами тела, а следствиями существования во Вселенной, содержащей другую материю. Для того, чтобы измерить массу, необходимо использовать соотношение $\vec{F} = m\vec{a}$, т.е. измерить силу и поделить ее на производимое ею ускорение. Но 2-ой закон Ньютона сам зависит от использования абсолютного пространства, которое теперь идентифицируется с фоновым пространством далекой материи. Таким образом, согласно идее Маха масса как-то определяется далекой материей" [47, с.500].

5. Для реализации принципа Маха в такой его формулировке Ф.Хойл и Дж.Нарликар развили специальную теорию [84, 85], названную ими теорией прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, однако ее правильнее было бы назвать специальным вариантом теории прямого межчастичного *скалярного* взаимодействия на фоне искривленного пространства-времени общей теории относительности. Чтобы пояснить суть этой теории изложим теорию прямого скалярного взаимодействия на фоне плоского пространства-времени Минковского в максимально общем виде.

6. Действие фоккеровского типа для системы скалярно взаимодействующих частиц записывается в виде

$$S^{(\varphi)} = -c\sum_i m_i \int ds_i + \frac{2\pi}{c}\sum_i \sum_{k\neq i} \int\int g_i G(x_i, x_k) g_k ds_i ds_k, \tag{2.7.1}$$

где g_i и g_k – некоторые скалярные характеристики взаимодействующих частиц, которые могут совпадать с константами связи;

$$G(x_i, x_k) = \frac{1}{2\pi}\delta(s^2(x_i, x_k)) - \theta(s^2)\frac{m}{2\sqrt{s^2}}J_1(m\sqrt{s^2}) \qquad (2.7.2)$$

– симметричная во времени функция Грина, удовлетворяющая неоднородному уравнению Клейна-Фока

$$\left(\eta^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)G(x_i x_k) = -\delta^{(4)}(x_i, x_k); \qquad (2.7.3)$$

m – масса покоя скалярного поля. Здесь рассматривается общий случай, пригодный для описания, например, быстро убывающего скалярного взаимодействия юкавского типа, переносимого массивными промежуточными бозонами. В случае $m = 0$ функция Грина совпадает с δ-функцией, ранее писавшейся в фоккеровском принципе действия.

7. Опять выделим частицу с номером $i = 1$. Для нее действие представляется в виде

$$S_1^{(\varphi)} = -m_1 c\int ds_1 + \frac{g_1}{c}\int \varphi(x_1)ds_1, \qquad (2.7.4)$$

где введен эффективный потенциал суммарного скалярного воздействия всех частиц на выделенную частицу:

$$\varphi(x_1) = \sum_k \varphi(x_1, x_k) = 2\pi\sum_k \int G(x_1, x_k)g_k ds_k. \qquad (2.7.5)$$

Проварируем действие (2.7.4) по координатам выделенной частицы. В итоге получается уравнение движения частицы в виде

$$(m_i - g_i\varphi)\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{g_i}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}(u^\nu u^\mu - \eta^{\nu\mu}). \qquad (2.7.6)$$

Это уравнение показывает, что скалярное взаимодействие приводит к появлению обобщенной массы[6] или обобщенного импульса частицы, зависящих от эффективного скалярного потенциала φ.

[6]Заметим, что аналогичные вклады в массу частиц можно получить и в рамках стандартной теории поля, например, в скалярно-тензорных теориях гравитации и в многомерных моделях физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна, когда не используются условия постоянства дополнительных компонент метрики $G_{55}, G_{66}, \cdots$.

8. Вторая составная часть теории прямого скалярного взаимодействия — получение соотношений, соответствующих уравнениям поля, — в данном случае тривиальна. Очевидно, что в формуле (2.7.6) величина $\partial\varphi/\partial x^\mu$ играет роль напряженности скалярного поля, аналогичной тензору электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Учитывая определение φ согласно (2.7.5) и уравнение для функции Грина (2.7.3), получаем аналог уравнения движения скалярного поля

$$\eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - (m^2c^2/\hbar^2)\varphi = -4\pi\rho, \tag{2.7.7}$$

где плотность скалярного тока

$$\rho(x) = \sum_k g_k \int \delta^{(4)}(x, x_k)dx_k.$$

9. Из изложенного можно сделать вывод, что *принцип Маха следует понимать в более широком смысле, как идею об обусловленности локальных свойств материальных образований закономерностями и распределением всей материи мира*, т.е. глобальными свойствами Вселенной. В таком широком понимании проявление принципа Маха можно усмотреть в ряде мест теории прямого межчастичного взаимодействия. Во-первых, в духе принципа Маха устраняются опережающие взаимодействия между парой частиц учетом воздействий со стороны окружающих частиц мира (с помощью фейнмановской теории поглотителя), во-вторых, в духе принципа Маха объясняется появление сил радиационного трения в уравнениях движения излучающих частиц. Имеются и другие проявления принципа Маха[7] в рамках концепции дальнодействия.

2.8 Реляционная концепция пространства-времени

Перейдем к наиболее существенному для нашей программы вопросу – о сути физического пространства-времени в рамках

[7] С принципом Маха также можно связать гипотезу Дирака о связи фундаментальных физических констант и о совместном их изменении. Здесь имеется ввиду замеченная Дираком связь между фундаментальными константами, характеризующими, с одной стороны, элементарные частицы, и, сдругой стороны, глобальные свойства Вселенной (ее размер, скорость расширения). Ряд таких любопытных соотношений указывался и анализировался в работах А.Эддингтона, Г.А.Гамова, К.П.Станюковича, В.Н.Мельникова и других авторов.

концепции дальнодействия. Несомненно, теория прямого межчастичного взаимодействия диктует реляционный подход к пониманию пространства-времени, и он самым тесным образом связан с принципом Маха. Можно сказать, что это кардинальный вопрос в теоретической физике. Он занимал центральное место в мировоззрении Э.Маха. В книге "Познание и заблуждение" он писал:"Кто хочет получить представление о том, с каким трудом развилась абстракция "пространство", лучше всего сделает, обратившись к изучению четвертой книги Физики Аристотеля. Вопрос о том, *существует* ли пространство (место) или *не существует, как* оно существует и *что* оно такое, причиняют ему много затруднений. Он не может смотреть на пространство, как на тело, ибо тогда одно тело находилось бы в другом. Но, с другой стороны, он и не может отделить пространство от мира тел, ибо место тела есть для него то, что это тело окружает, обнимает. Аристотель выдвигает мысль, что мы не спрашивали бы о пространстве, если бы не существовало никакого движения. *Связь* представления пространства с представлением тела естественно приводит к идее *немыслимости пустоты*, — идее, защищаемой Аристотелем и многими другими мыслителями древности. Мыслители, допускавшие пустоту, как Левкип, Демокрит, Эпикур и др., имели, следовательно, представление о пространстве, более близкое к нашему. Пространство было для них чем-то в роде сосуда, который может и не быть наполнен. И к такому представлению действительно должна была вести геометрия, которая устраняет все телесные свойства, кроме определенных границ"[40, с.438].

Далее Мах отмечает:"Можно, пожалуй, сказать, что главным образом именно со времени Ньютона время и пространство стали теми *самостоятельными* и однако *бестелесными* сущностями, которыми они считаются по настоящее время... Для Ньютона время и пространство представляют нечто *сверхфизическое*; они суть *первичные*, независимые *переменные*, непосредственно недоступные, по крайней мере, точно не определимые, направляющие и регулирующие все в мире. Как пространство определяет движение отдаленнейших планет вокруг Солнца, так время делает *согласными* отдаленнейшие небесные движения с незначительнейшими процессами здесь на земле. При таком взгляде мир становится *организмом*, или — если предпочитают это выражение — *машиной*, все части которой согласно применяются к движению *одной* части, руководствуются до известной степени *одной* единой волей, и нам остается только неизвестной *цель* этого движения. Этот взгляд лежит, как наследие Ньютона, в основе и современной физики, хотя, может быть, чувствуется некоторое нежелание открыто это признать"[40, с.442].

Добавим к этому, что со времени Э.Маха в этом плане в физике мало что изменилось. По-прежнему физики пользуются наследием Ньютона.

И вот при таком понимании пространства-времени в физике представлены две концепции взаимодействий: близкодействие и дальнодействие. Концепция близкодействия согласована с моделью пространства-времени как сосуда, вместилища всего сущего. С эфиром или без него она отвечает на вопрос, как акт взаимодействия преодолевает пространственно-временную разнесенность объектов и событий. Концепция же дальнодействия идет вразрез с бытующими представлениями о пространстве-времени. Ее сторонники чувствовали это и пытались как-то преодолеть имеющийся диссонанс.

Выше уже отмечалось религиозно-мистическое решение этой пароблемы Ньютоном. В первом письме Г.Лейбница к С.Кларку мы находим слова:"Г-н Ньютон говорит, что пространство — это орган, которым Бог пользуется, чтобы воспринимать вещи"[38, с.431]. В третьем письме к Кларку он писал:"Эти господа, таким образом, утверждают, что пространство — реальное абсолютное существо, но это приводит их к большим трудностям. Ибо, кажется, что это существо должно быть вечным и бесконечным. Поэтому некоторые считают, что оно является самим Богом или, по крайней мере, его атрибутом, его неизмеримостью"[38, с.441]. Лейбниц выступал против идеи об абсолютных пространстве и времени. Э.Мах также критиковал ньютоновские представления об абсолютности пространства и времени, считал их "бессмысленными". Лейбниц и Мах полагали, что в отсутствии тел не существует и категорий пространства и времени. Уже в наше время некоторые теоретики критиковали общую теорию относительности за то, что имеются вакуумные (в отсутствие материи) решения уравнений Эйнштейна, что противоречит принципу Маха.

Однако, что предлагалось взамен идеи об абсолютном пространстве-времени? Точка зрения Г.Лейбница:"Я неоднократно подчеркивал, что считаю *пространство*, так же как и время, чем-то чисто относительным: пространство — *порядком существования*, а время *порядком последовательностей*... Для опровержения мнения тех, которые считают пространство субстанцией или, по крайней мере, какой-то абсолютной сущностью, у меня имеется несколько доказательств"[38, с.441]. Аналогичным образом понимал сущность пространство и времени Э.Мах. Он писал:"Время и пространство существуют в определенных отношениях физических объектов, и эти отношения не только вносятся нами, а существуют в связи и во взаимной зависимости явлений"[41, с.71]. "Мы можем сказать, что *во временной зави-*

симости выражаются простейшие непосредственные физические отношения"[40, с.437]. "*В пространственных отношениях находит свое выражение посредственная физическая зависимость*"[40, с.438].

Отношения — вот то ключевое понятие, которое и у Лейбница, и у Маха заменяет идею абсолютного пространства и времени. Как было показано выше, именно понятие отношения в виде вкладов в действие парных взаимодействий частиц позволило построить теорию прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Согласно этой теории различные физические взаимодействия отличаются только видом этих отношений. Но теория прямого межчастичного взаимодействия остановилась на этом применении идеи отношений в физике.

Пространство-время полагалось априорно заданным, а надо было *распространить идею отношений и на пространство-время*. Но как это сделать? Нужен был математический аппарат, позволяющий работать с некоторым спектром возможных отношений, с одной стороны, более общих, чем используемые в физике классические пространственно-временные отношения, и, с другой стороны, более простых, отражающих примитивные свойства элементарных частиц. Используя этот математический аппарат необходимо построить теорию отношений, из которых бы следовали как понятия, описывающие физические взаимодействия, так и классические пространственно-временные отношения[8].

Нам представляется, что такая возможность появилась после создания теории физических структур. Именно там во главу угла поставлены *отношения* между элементами произвольной природы, причем как парные, так и между большим числом элементов, как между элементами одного, так и между элементами двух разных множеств (бинарные структуры). Эта ключевая идея реализована в развиваемой здесь *бинарной геометрофизике*. В этом смысле бинарную геометрофизику можно считать развитием идей о реляционной природе пространства-времени и теории прямого межчастичного взаимодействия.

[8]Заметим, что единство в описании физических взаимодействий и пространственно-временных отношений, однако на иной основе, уже воплощено в физике в рамках многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна.

Раздел II

Основания теории физических взаимодействий

В бинарной геометрофизике на самом элементарном уровне физический мир представляется в виде двух достаточно больших множеств из элементов, между которыми имеют место отношения, описываемые БСКО некоторого ранга. В этом разделе ограничимся простейшей моделью на основе БСКО ранга (4,4).

В каждом из двух множеств элементов будем различать следующие 4 характерные подмножества элементов, образующих

1) некоторый выделенный объект;
2) некоторый второй объект, взаимодействующий с первым;
3) базис из эталонных элементов;
4) частицы (материю) всего окружающего мира.

Они изображены на рисунке 3.0.

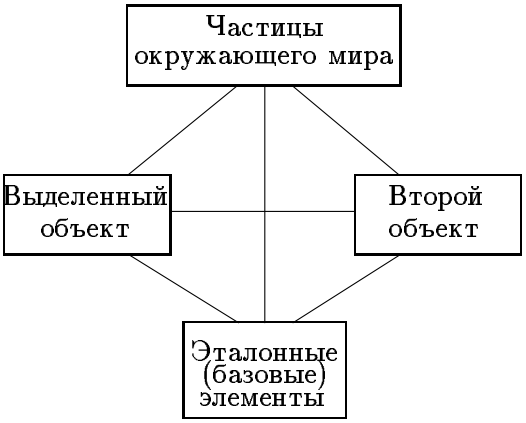


Рис. 2.4: Четыре характерных подмножества элементов теории

Первые три из характерных подмножеств могут быть как элементарными, образующими простейшую частицу или элементарную базу, так и более сложными вплоть до макрообъектов.

В трех главах раздела обсуждены прообразы ключевых физических понятий (действия, метрики и других) в нескольких упрощенных теоретических конструкциях в порядке возрастания в них числа или сложности характерных подмножеств.

В главе 3 рассмотрена конструкция из самых элементарных первых трех подмножеств (отдельных частиц), не учитывающая четвертое подмножество (частицы окружающего мира).

В главе 4 учтено четвертое характерное подмножество, то есть на самом элементарном уровне использован принцип Маха.

В главе 5 обсужден наиболее важный этап на пути к общепринятым теориям, состоящий в переходе от элементарной базы к классическому макроприбору.

Глава 3

Взаимодействие двух изолированных частиц

В этой главе в рамках БСКО ранга (4,4) рассмотрено ключевое, так называемое базовое 4×4-отношение. Оно записывается для простейшей конструкции из трех характерных подмножеств элементов: двух взаимодействующих частиц относительно элементарной базы (см. рисунок 3.1).

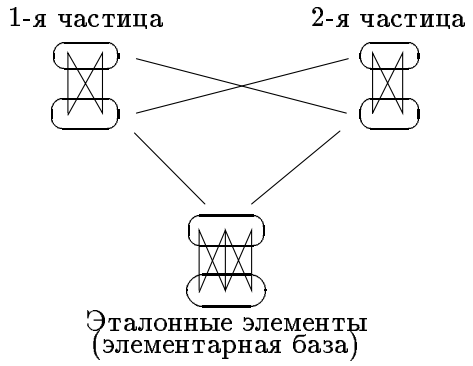


Рис. 3.1: Характерные подмножества элементов, рассматриваемые в этой главе

Показано, что без учета четвертого характерного множества (частиц окружающего мира) невозможно ввести прообраз ряда ключевых физических понятий.

3.1 Базовое 4×4-отношение

1. В теории БСКО ранга (4,4) имеется характерное выражение, как оказывается, соответствующее фоккеровскому определению действия для двух взаимодействующих частиц. Оно уже было определено в главе 8 первой части книги. Это так называемое *базовое* 4×4-*отношение*, симметричным образом содержащее две четверки элементов двух частиц в начальных и конечных состояниях. Напомним его. Пусть состояния двух частиц описываются двумя четверками элементов (i, k, j, s) и $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, тогда базовое 4×4-отношение имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{matrix} \right\} \equiv - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} \\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} \\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i^1 & k^1 & j^1 & s^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & s^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix}. \qquad (3.1.1)$$

В каком-то смысле базовое 4×4-отношение аналогично фундаментальным 2×2-отношениям, приведенным в главе 1 (или фундаментальным 3×3-отношениям в главе 4 первой части книги). Для него принято обозначение, близкое к ранее использованным. Так же, как и фундаментальные отношения, оно записывается через произведение двух определителей, составленных из параметров однотипных элементов.

2. Раскладывая окаймленный определитель из парных отношений в (3.1.1) по первой строке или первому столбцу, легко убедиться, что базовое 4×4-отношение представляется через совокупность из 16 фундаментальных 3×3-отношений:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{matrix} \right\} &= \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ kjs \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ kjs \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ kjs \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ kjs \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ ijs \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ ijs \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ ijs \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ijs \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ iks \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ iks \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ iks \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ iks \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

Они образованы из всевозможных выборок 3 элементов из 4 в каждом из двух множеств. Напомним, что фундаментальные 3×3-отношения записываются в виде

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ikj\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma}\\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma}\\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma}\end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1\\ i^2 & k^2 & j^2\\ i^3 & k^3 & j^3\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\end{vmatrix}. \qquad (3.1.3)$$

Базовое 4×4-отношение, как и все его отдельные части в (3.1.2), инвариантно относительно преобразований из группы $SL(3,C)$.

3. В рассматриваемой здесь модели на основе БСКО ранга (4,4) производится *редукция на понятия БСКО ранга* (3,3), которая по своему смыслу и назначению аналогична редукции 5-мерного многообразия теории Калуцы на 4-мерное классическое пространство-время. В данном случае редукция означает ограничение преобразованиями из группы $SL(2,C)$, которые осуществляются над параметрами с номерами 1 и 2, тогда как параметры с индексом 3 остаются инвариантными. Для дальнейшего целесообразно явно записать базовое 4×4-отношение (3.1.1) через 4-мерные ("внешние") комбинации (из параметров с индексами 1 и 2) и через инвариантные ("внутренние") параметры (с индексом 3). Для этого достаточно разложить определители справа в (3.1.1) по последним строкам. В итоге находим

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{Bmatrix} = \qquad (3.1.4)$$

$$\begin{array}{c|c|c}
= \begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ js\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ ks\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ kj\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ is\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ ij\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{pmatrix}\\
\hline
-\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ js\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ ks\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ kj\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ is\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ ij\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ ik\end{pmatrix}\\
+\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ js\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ ks\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ is\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ ij\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ ik\end{pmatrix}\\
+\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ js\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ ks\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ kj\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ is\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ ij\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ ik\end{pmatrix}\\
-\begin{bmatrix}\beta\delta\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ js\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\beta\delta\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ ks\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\beta\delta\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ kj\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\beta\delta\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ is\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\delta\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\beta\delta\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ ik\end{pmatrix}\\
\hline
+\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ js\end{pmatrix} & -\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ks\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ is\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ kj\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ is\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ ks\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ij\end{pmatrix} & +\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{pmatrix}.
\end{array}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 & k^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} = (i^3 - k^3)(\beta^3 - \alpha^3). \qquad (3.1.5)$$

В (3.1.4) 36 слагаемых специально записаны в виде 6×6-таблицы так, что строки различаются перестановками четырех индексов: α, β, γ, δ, а столбцы – перестановками индексов i, k, j, s. Такая запись удобна для анализа этого выражения и физической интерпретации отдельных частей.

4. В главе 8 первой части показано, что базовое 4×4-отношение (3.1.1) можно записать через парные отношения вырожденной БСКО ранга (4,4;a)[1]:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{Bmatrix} = -\varepsilon \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} + 0(\varepsilon^2). \qquad (3.1.6)$$

Расписывая этот определитель и выделяя дополнительные параметры (с индексом 0), опять приходим к выражению вида (3.1.4), где (3.1.5) представляется в виде

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{pmatrix} \simeq \varepsilon \begin{pmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{pmatrix}_0 = \varepsilon(i_0 - k_o)(\beta_0 - \alpha_0). \qquad (3.1.7)$$

Таким образом, имеются две возможности описания дополнительных параметров. В дальнейшем везде, где не будет возникать особой необходимости, будем полагать, что дополнительные параметры имеют индекс 3.

5. Проиллюстрируем физический смысл базового 4×4-отношения. Поскольку в него входят 4 элемента в начальном состоянии и 4 элемента в конечном состояни, то будем графически изображать это отношение 8-хвосткой (см. рис. 3.2а). Объединяя

[1]Напомним, вырожденным БСКО рангов $(r, r; a)$ соответствует закон вида

$$\Phi'_{(r,r;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0 + \alpha_0.$$

Здесь i^l, i_0 – набор из $r-1$ параметров, сопоставленных элементу i, а α^l, α_0 – параметры, характеризующие элемент α.

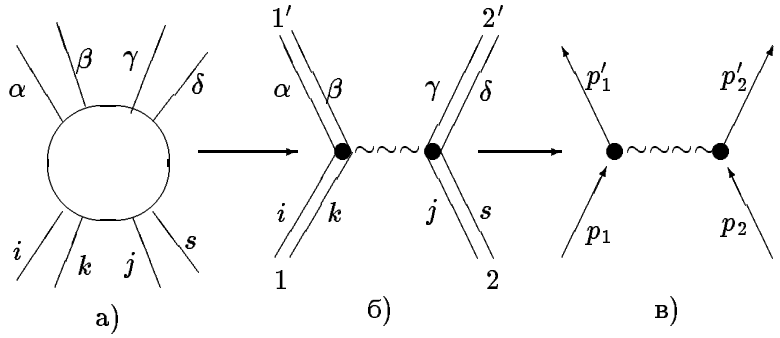


Рис. 3.2: Физическая иллюстрация базового 4×4-отношения

их парами, соответствующими двум частицам в начальных и в конечных состояниях, приходим еще к двум диаграммам, поразному иллюстрирующим взаимодействие двух массивных лептонов (см. рис 3.2б и 3.2в). На рисунке 3.2а элементы i и k описывают первый лептон (e_1) в начальном состоянии, а элементы j и s – второй лептон (e_2) в начальном состоянии. Аналогично, α и β описывают первый лептон в конечном состоянии, а элементы γ и β – второй лептон в конечном состоянии (см. рис 3.2б). На рисунке 3.2в изображена стандартная диаграмма фейнмановского типа, описывающая рассеяние двух массивных лептонов из-за взаимодействия через промежуточные электромагнитное поле A_μ или поле Z-бозонов.

3.2 Физическая интерпретация "внешних" параметров

1. Проанализируем более подробно составные части базового 4×4-отношения (3.1.4). Начнем с выражений, обозначенных квадратными скобками. Согласно (1.4.3) они представляются только через "внешние" параметры, то есть через параметры с индексами 1 и 2. Перейдем к более привычным обозначениям "внешних" параметров. Для этого напомним самый необходимый материал из первой части книги. Там массивным лептонам были сопоставлены 4-компонентные величины, являющиеся прообразами общеизвестных биспинорных волновых функций.

Пусть массивный лептон описывается двумя элементами i и k в начальном состоянии и двумя элементами α и β в конечном состоянии, тогда из параметров с индексами 1 и 2 этих элементов

можно построить 4-компонентные столбец и строку:

$$\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2 \\ -\beta^1 \end{pmatrix}; \tag{3.2.1}$$

$$\Psi^\dagger = (\alpha^1, \alpha^2, k_1, k_2) = (\alpha^1, \alpha^2, k^2, -k^1).$$

Легко видеть, что для свободной частицы, когда начальные и конечные параметры комплексно сопряжены, то есть

$$i^s = (\alpha^s)^*; \quad k^s = (\beta^s)^*, \tag{3.2.2}$$

4-компонентная строка $\Psi^\dagger$ представляет собой комплексно сопряженный и транспонированный столбец Ψ, как это и имеет место в квантовой механике.

Столбец Ψ составлен по следующим принципам. Во-первых, он содержит параметры из двух пар сопряженных в (3.2.2) элементов, во-вторых, он симметрично содержит пары параметров из начального и из конечного состояний, в-третьих, пара элементов имеет контравариантные, а пара – ковариантные спинорные индексы.

2. Составленный по перечисленным правилам 4-компонентный столбец (3.2.1) является *биспинором.* Действительно, при линейных преобразованиях (1.4.4), образующих группу $SL(2, C)$, он преобразуется по закону

$$\Psi' = \begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & 0 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2^{*2} & -C_1^{*2} \\ 0 & 0 & -C_2^{*1} & C_1^{*1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \equiv S\Psi. \tag{3.2.3}$$

При более узких преобразованиях из группы $SU(2)$ верхняя и нижняя пары параметров преобразуются одинаково, то есть столбец Ψ состоит из двух 2-компонентных спиноров.

3. Массивному лептону, описываемому названной выше четверкой элементов, можно сопоставить компоненты спинтензора

$$B^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} + k^s \beta^{\dot{r}}, \tag{3.2.4}$$

где индексы s и r пробегают значения 1 и 2; точкой сверху помечены индексы параметров в конечных состояниях. Тогда матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ для элементов, удовлетворяющих условиям

(3.2.2), можно представить в следующих видах:

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0+u^3 & u^1-iu^2 \\ u^1+iu^2 & u^0-u^3 \end{pmatrix} = u^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} u^l \sigma_l, \tag{3.2.5}$$

где u^μ –компоненты 4-мерного вектора, приведенные в (1.4.7), а σ_l – три матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

4. Из единичной матрицы I_2 и матриц Паули построим 4-рядные матрицы Дирака:

$$\gamma^0 = -\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.7}$$

удовлетворяющие известным соотношениям:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2I_4 g_{\mu\nu}. \tag{3.2.8}$$

С помощью матрицы γ^0 из (3.2.1) образуем новую строку

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0 = -(k_1, k_2, \alpha^1, \alpha^2). \tag{3.2.9}$$

Легко показать, что определенные в (1.4.7) компоненты 4-мерного вектора представляются в виде

$$u^\mu = \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \tag{3.2.10}$$

5. Обычным образом введем пятую матрицу

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.11}$$

С ее помощью можно образовать “пятую компоненту” вектора

$$u^5 = \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = \frac{i}{2}[(i^1k^2 - i^2k^1) - (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)], \tag{3.2.12}$$

определяемую разностью спинорных инвариантов (1.4.5). В первой части книги показано, что лептоны образованы не произвольными элементами, а удовлетворяющими некоторым условиям, при выполнении которых $u^5 = 0$.

6. Введем новые обозначения, близкие к принятым в модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама. На примере рассмотренного выше лептона определим левые (e_L) и правые (e_R) компоненты массивных частиц:

$$e_L = \tfrac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_R = \tfrac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.13}$$

Аналогично, из 4-компонентной строки $\overline{\Psi}$ получаем сопряженные компоненты:

$$\begin{aligned} \overline{e}_L &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 - i\gamma_5) = -(0, 0, \alpha^1, \alpha^2); \\ \overline{e}_R &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 + i\gamma_5) = -(k_1, k_2, 0, 0). \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Таким образом, две пары сопряженных элементов i, α и k, β, описывающих одну массивную частицу, можно трактовать соответственно как левую и правую компоненты лептона. Очевидно, аналогичные формулы можно записать и для любого другого лептона.

Заметим, что используя (3.2.13) и (3.2.14), компоненты вектора (1.4.7) можно представить еще в одном виде

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi = (\overline{e}_L + \overline{e}_R)\gamma^\mu(e_L + e_R) = (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R). \tag{3.2.15}$$

7. Вернемся к базовому 4×4-отношению (3.1.4). В нем, как правило, комбинации в квадратных скобках записаны для элементов, описывающих два разных лептона, причем эти комбинации содержат разные наборы из левых и правых компонент двух лептонов. Из 36 слагаемых в (3.1.4) выделяются 8, для которых комбинации в квадратных скобках представляются в видах, встречающихся в общепринятой теории.

Выделим четыре слагаемые, расположенные в средней части главной диагонали формулы (3.1.4). Используя введенные выше формулы для двух лептонов, легко показать, что содержащиеся в них комбинации в квадратных скобках имеют вид

$$\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L});$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\alpha\delta\\ is\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R});\\
\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L});\\
\begin{bmatrix}\beta\delta\\ ks\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R}). \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

8. Кроме этих четырех слагаемых рассмотрим четыре угловые. В двух таких угловых слагаемых на главной диагонали в квадратных скобках содержатся элементы только одной из частиц. Легко показать, что в новых обозначениях такие комбинации представляются в виде

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{1R}\gamma_{\mu}e_{1R});\\
\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ js\end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_{2L}\gamma^{\mu}e_{2L})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R}). \qquad (3.2.17)
\end{aligned}$$

В оставшихся двух угловых слагаемых в квадратных скобках содержатся пары однотипных эелементов двух разных частиц. Их можно записать через произведения скаляров соответствующих лептонов:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ js\end{bmatrix} &= (\overline{e}_{1L}e_{1R})(\overline{e}_{2R}e_{2L});\\
\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{bmatrix} &= (\overline{e}_{1R}e_{1L})(\overline{e}_{2L}e_{2R}), \qquad (3.2.18)
\end{aligned}$$

где учтено, что инварианты (например, для первой частицы) представляются в виде

$$\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1 = -(\overline{e}_{1L}e_{1R}); \quad i^1k^2 - i^2k^1 = -(\overline{e}_{1R}e_{1L}). \qquad (3.2.19)$$

В остальных 28 слагаемых базового 4×4-отношения комбинации в квадратных скобках имеют иной характер. Все такие слагаемые оказываются “лишними”.

3.3 Экспоненциальные факторы и устранение “лишних” слагаемых

1. В базовом 4×4-отношении (3.1.4) легко усмотреть те слагаемые, которые присутствуют в фоккеровском принципе действия для случая электромагнитных взаимодействий. Они содержат в себе четверку фундаментальных 2×2-отношений, записанных в (2.5.2). В выражении (3.1.4) они находятся в середине

главной диагонали. Однако в (3.1.4) кроме этих слагаемых имеется много других, "лишних". Необходимо объяснить, почему они не дают вклады в наблюдаемые физические взаимодействия. Это можно сделать, опираясь на ряд соображений[2]. Однако, основная причина ненаблюдаемости недиагональных слагаемых связана с видом экспоненциальных слагаемых, входящих во "внешние" параметры.

2. В главе 4 части 1 было показано, что параметры БСКО ранга (3,3) определены неоднозначно, с точностью до экспоненциальных факторов, по модулю равных единице. Их следует понимать как параметры БСКО ранга (2,2), являющейся подсистемой БСКО ранга (3,3). Это в полной мере относится и к "внешним" параметрам (с индексами 1 и 2) БСКО ранга (4,4), для которой выше писалось базовое 4×4-отношение. Для одной выделенной частицы, описываемой элементами i, k, α, β, это будут факторы:

$$i \to e^{i\varphi_i}; \qquad k \to e^{i\varphi_k};$$

$$\alpha \to e^{i\varphi_\alpha}; \qquad \beta \to e^{i\varphi_\beta}, \tag{3.3.1}$$

где величины φ, стоящие в экспонентах, являются вещественными.

Было также показано, что для одной и той же частицы показатели экспонент должны быть связаны следующими условиями:

$$\varphi_i = -\varphi_k; \qquad \varphi_\alpha = -\varphi_\beta. \tag{3.3.2}$$

Именно в таком случае при выполнении условий (3.2.2) все величины в 4-компонентном столбце (3.2.1) будут характеризоваться одинаковым экспоненциальным фактором.

3. Величины φ в бинарной геометрофизике интерпретируются как прообраз классического действия S и представляются в виде

$$\varphi = \frac{1}{\hbar} p_\mu x^\mu, \tag{3.3.3}$$

[2]Например, можно исходить из соображений симметрии и возможных перестановок элементов по двум частицам. Легко показать, что все слагаемые, находящиеся во внутреннем прямоугольнике формулы (3.1.4), можно перестановками свести к четырем диагональным.

Другой подход основан на основан на процедуре усреднения по поляризациям частиц. Оставляются лишь такие слагаемые, которые оказываются отличными от нуля после проведения процедуры усреднения по поляризациям отдельных частиц. Можно показать, что в итоге такого усреднения также выживают только диагональные и угловые слагаемые из (3.1.4).

где p_μ – импульс соответствующей частицы, а x^μ – прообраз классических координат. В знаменателе стоит константа размерности действия, которую естественно отождествить с постоянной Планка.

Напомним, что в бинарной геометрофизике из параметров БСКО непосредственно строятся величины, интерпретируемые как скорости (импульсы) и действие (из параметров БСКО ранга (2,2)). Понятие координаты имеет вторичный характер. Введение координатного пространства-времени составляет основную задачу в данном подходе. В выражении (3.3.3) введен прообраз 4-мерных координат фактически по известным компонентам импульса и действия.

4. В той же главе 4 части 1 было отмечено, что для взаимодействующих частиц параметры начальных и конечных элементов уже не связаны процедурой комплексного сопряжения. Тогда естественно определить отдельно импульсы начальных и конечных состояний через параметры соответствующих элементов. Это означает, что компоненты начального импульса $p_{(1)\mu}$ (начальной скорости $u_{(1)\mu}$) выделенной частицы (с индексом 1) строятся из параметров i^s, k^s и их комплексно сопряженных выражений (вместо α^s и β^s) стандартным образом, а компоненты конечного импульса $p'_{(1)\mu}$ (конечной скорости $u'_{(1)\mu}$) строятся из параметров α^s, β^s и их комплексно сопряженных выражений (вместо i^s и k^s) также стандартным образом.

Импульс передачи k_μ, о необходимости обоснования которого говорилось в разделе 1, вводится как разность импульсов частицы в конечном и начальном состояниях:

$$k_{(1)\mu} = p'_{(1)\mu} - p_{(1)\mu}. \tag{3.3.4}$$

5. С учетом сделанных замечаний коэффициенты в экспоненциальных факторах принимают вид

$$\varphi_i = \frac{1}{\hbar} p_{(1)\mu} x_1^\mu; \quad \varphi_\alpha = -\frac{1}{\hbar}(S_1 + \Delta S_1 + k_{(1)\mu} x_1^\mu);$$

$$\varphi_k = -\frac{1}{\hbar} p_{(1)\mu} x_1^\mu; \quad \varphi_\beta = \frac{1}{\hbar}(S_1 + \Delta S_1 + k_{(1)\mu} x_1^\mu), \tag{3.3.5}$$

где положено

$$S_1 = p_{(1)\mu} x_1^\mu; \quad \Delta S_1 = p'_{(1)\mu} \Delta x_1^\mu; \quad \Delta x_1^\mu = x_1'^\mu - x_1^\mu. \tag{3.3.6}$$

Аналогичные формулы имеют место для второй частицы, помечаемой индексом 2. В дальнейшем будем полагать, что Δx^μ очень малая величина, так что можно заменить Δx^μ на dx^μ.

В итоге в базовом 4×4-отношении при параметрах с индексами 1 и 2 нужно подразумевать следующие экспоненциальные слагаемые:

$$\begin{array}{l|l} i^s \text{ (или } e_{1L}) \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_1\right]; & j^s \text{ (или } e_{2L}) \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_2\right]; \\ k^s \text{ (или } \overline{e}_{1R}) \to \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S_1\right]; & s^s \text{ (или } \overline{e}_{2R}) \to \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S_2\right]; \end{array} \tag{3.3.7}$$

$$\alpha^s \text{ (или } \overline{e}_{1L}) \to \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(S_1 + dS_1 + k_\mu x_1^\mu)\right];$$

$$\gamma^s \text{ (или } \overline{e}_{2L}) \to \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(S_2 + dS_2 + k_\mu x_2^\mu)\right];$$

$$\beta^s \text{ (или } e_{1R}) \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_1 + dS_1 + k_\mu x_1^\mu)\right];$$

$$\delta^s \text{ (или } e_{2R}) \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_2 + dS_2 + k_\mu x_2^\mu)\right].$$

Здесь и в дальнейшем будем полагать, что для двух взаимодействующих частиц $k^\mu_{(1)} = -k^\mu_{(2)} = k^\mu$. Из вида экспоненциальных факторов уже можно догадаться о причине возникновения в числителе подинтегрального выражения пропагатора (2.5.6) экспоненциального слагаемого.

6. Для эволюционирующей частицы S следует трактовать как быстро осциллирующую величину. Если ввести некую процедуру усреднения по историям частиц, то экспоненты, содержащие S, дадут нулевой вклад. Исходя из этого, видно, что в базовом 4×4-отношении должны остаться только такие слагаемые, в которых не содержится прообраз действия. Легко видеть, что сразу для двух частиц такая ситуация имеет место либо для диагональных элементов, либо для угловых в матрице (3.1.4). В угловых элементах экспоненциальные слагаемые от двух элементов каждой частицы в одном и том же состоянии вообще взаимно уничтожаются, а в диагональных слагаемых остаются экспоненциальные слагаемые вида

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\pm dS_1 \pm dS_2 \pm k_\mu x_1^\mu \pm k_\mu x_2^\mu)\right].$$

Таким образом, из 36 слагаемых в (3.1.4) выживают всего восемь.

7. Исходя из изложенного, получаем выражение, которое назовем *прообразом действия двух взаимодействующих массивных лептонов*,

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{matrix} \right\} \to \tilde{S}_{free}(e_1, e_2) + \tilde{S}_{int}(e_1, e_2), \tag{3.3.8}$$

где

$$\tilde{S}_{free}(e_1, e_2) =$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ i\;k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\,\delta \\ j\;s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ j\;s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\,\delta \\ i\;k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\,\delta \\ j\;s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ i\;k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\,\delta \\ i\;k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ j\;s \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

соответствует действию "свободных" частиц, а

$$\tilde{S}_{int}(e_1, e_2) =$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;j \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;j \end{pmatrix}, \tag{3.3.10}$$

описывает *взаимодействие двух выбранных лептонов*. Заметим, что последнее выражение отличается от определенного ранее в (1.4.10) парного отношения между двумя массивными частицами (скалярного произведения их 4-скоростей) коэффициентами из дополнительных (третьих) параметров частиц.

3.4 Физическая интерпретация "внутренних" параметров

1. Изменим обозначения дополнительных ("внутренних", т.е. с индексом 3) параметров лептонов, введя для них единую коренную букву c для обозначения через c_1 параметров первого лептона, а через c_2 – параметров второго лептона:

$$\begin{aligned} &i^3 \equiv c_{1L}; \quad k^3 \equiv c_{1R}; \quad \alpha^3 \equiv \tilde{c}_{1L}; \quad \beta^3 \equiv \tilde{c}_{1R}; \\ &j^3 \equiv c_{2L}; \quad s^3 \equiv c_{2R}; \quad \gamma^3 \equiv \tilde{c}_{2L}; \quad \delta^3 \equiv \tilde{c}_{2R}. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

В новых обозначениях прообраз действия взаимодействия (прообраз плотности лагранжиана взаимодействия) (3.3.10) записывается в виде

$$\tilde{S}_{int}(e_1, e_2) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})(c_{1R}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1R})+\\
&+ \frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})(c_{1L}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1L})+ \qquad (3.4.2)\\
&+ \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})(c_{1R}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1R})+\\
&+ \frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})(c_{1L}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1L}).
\end{aligned}
$$

2. Произведем в (3.4.2) симметризацию и антисимметризацию по характеристикам отдельных частиц. Для этого воспользуемся тождеством

$$
aA+bB \equiv \frac{1}{2}(a+b)(A+B)+\frac{1}{2}(a-b)(A-B). \qquad (3.4.3)
$$

Под a и b будем подразумевать вектор-векторные слагаемые в отдельных членах из (3.4.2), а под A и B будем подразумевать оставшиеся слагаемые из дополнительных параметров. После несложных преобразований имеем

$$
\tilde{S}_{int}(e_1,e_2) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})+(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]\times[(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})+(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]C(++)+\\
&+\frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})-(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]\times[(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})-(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]C(--)+\\
&+\frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})-(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]\times[(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})+(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]C(-+)+\\
&+\frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})+(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]\times[(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})-(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]C(+-),
\end{aligned}
\qquad (3.4.4)
$$

где коэффициенты $C(\pm\pm)$ имеют вид

$$
C(++) =
$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_{1R}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1R})+(c_{1L}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1L})+\\
&+(c_{1R}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1R})+(c_{1L}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1L}); \qquad (3.4.5)
\end{aligned}
$$

$$
C(--) =
$$

$$
= (c_{1R}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1R})+(c_{1L}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1L})-
$$

$$-(c_{1R}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1R})-(c_{1L}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1L}); \qquad (3.4.6)$$

$$C(-+)=$$

$$=(c_{1R}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1R})-(c_{1L}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1L})+$$

$$+(c_{1R}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1R})-(c_{1L}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1L}); \qquad (3.4.7)$$

$$C(+-)=$$

$$=(c_{1R}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1R})-(c_{1L}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1L})-$$

$$-(c_{1R}-c_{2L})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{1R})+(c_{1L}-c_{2R})(\tilde{c}_{2R}-\tilde{c}_{1L}). \qquad (3.4.8)$$

3. Выражения в квадратных скобках из сумм комбинаций "внешних" параметров типа

$$[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})+(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]$$

согласно (3.2.15) являются векторами. Легко видеть, что разности аналогичных комбинаций типа

$$[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})-(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]=\overline{\Psi}_1\gamma_5\gamma^{\mu}\Psi_1$$

являются псевдовекторами.

Первое слагаемое в (3.4.4) справа описывает вектор-векторное взаимодействие двух массивных лептонов. Его естественно истолковать как описывающее *электромагнитное взаимодействие* двух лептонов. Остальные слагаемые содержат псевдовекторы. Известно, что согласно модели Вайнберга-Салама слагаемые такого типа описывают *слабые (точнее, электрослабые) взаимодействия* элементарных частиц. Это дает основания именно так физически интерпретировать оставшиеся три слагаемые справа в (3.4.4).

При такой интерпретации естественно полагать, что коэффициенты (3.4.5) – (3.4.8) из дополнительных параметров при вектор-векторных, псевдовектор-псевдовекторных, $\cdots$ комбинациях соответствуют известным в современной теории *зарядам частиц*.

4. Проанализируем вид коэффициентов (3.4.5) – (3.4.8). Заметим, что для каждого лептона из дополнительных параметров можно образовать симметричные (вида c_L+c_R) и антисимметричные (вида c_L-c_R) комбинации. Перепишем коэффициенты (3.4.5) – (3.4.8) через такие комбинации:

$$C(++)=-2(c_{1L}\tilde{c}_{1R}+c_{1R}\tilde{c}_{1R}+c_{2L}\tilde{c}_{2R}+c_{2R}\tilde{c}_{2R})+$$

$$+[(c_{1L}+c_{1R})(\tilde{c}_{2L}+\tilde{c}_{2R})+(\tilde{c}_{1L}+\tilde{c}_{1R})(c_{2L}+c_{2R})]; \qquad (3.4.9)$$

$$C(--) =$$

$$= [(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} - c_{2R})]; \qquad (3.4.10)$$

$$C(-+) = 2(c_{1L}\tilde{c}_{1R} - c_{1R}\tilde{c}_{1R}) -$$

$$-[(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R})]; \qquad (3.4.11)$$

$$C(+-) = 2(c_{2L}\tilde{c}_{2R} - c_{2R}\tilde{c}_{2R}) -$$

$$-[(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} - c_{2R})]. \qquad (3.4.12)$$

Следует различать однородные слагаемые, состоящие из дополнительных параметров только одной частицы и смешанные слагаемые, представляющие произведения параметров разных частиц. В (3.4.9) – (3.4.12) представления через симметричные и антисимметричные комбинации записаны только для смешанных слагаемых.

В выражении (3.4.10) не содержатся однородные слагаемые. Из него видно, что псевдовектор-псевдовекторные (слабые) взаимодействия характеризуются антисимметричными комбинациями дополнительных ("внутренних") параметров. Тогда согласно (3.4.9) следует положить, что вектор-векторные (электромагнитные) взаимодействия характеризуются симметричными комбинациями дополнительных параметров.

5. Особо проанализируем коэффициент $C(++)$, характеризующий электромагнитное взаимодействие. Для этого запишем в нем через симметричные и антисимметричные комбинации также и однородные слагаемые и представим его в следующем виде

$$C(++) = -\{[(\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R}) - (\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})] \cdot [(c_{1L} + c_{1R}) - (c_{2L} + c_{2R})] +$$

$$+(\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{1L} - c_{1R}) + (\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R})(c_{2L} - c_{2R})\}. \qquad (3.4.13)$$

Из первой строки этого выражения видно, что две взаимодействующие частицы не могут иметь одинаковые симметричные комбинации из дополнительных параметров.

Исходя из этого и ряда других соображений, следует положить, что для взаимодействующих частиц выполняется одно из двух условий:
либо

$$\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R} = c_{2L} + c_{2R} = \tilde{e} \neq 0; \quad \tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R} = c_{1L} + c_{1R} = 0, \quad (3.4.14)$$

либо

$$\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R} = c_{2L} + c_{2R} = 0; \quad \tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R} = c_{1L} + c_{1R} = \tilde{e} \neq 0, \quad (3.4.15)$$

где $\tilde{e}$ - некоторая константа, пропорциональная электрическому заряду.

После сделанных предположений прообраз действия электромагнитного взаимодействия двух частиц принимает вид

$$\tilde{S}^{(e)}_{int}(e_1, e_2) =$$

$$= \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \cdot [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]\times$$

$$\times[(\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R}) + (\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})(c_{1L} + c_{1R})]. \qquad (3.4.16)$$

6. Для антисимметричной комбинации положим аналогично: либо

$$\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R} = c_{2L} - c_{2R} = \tilde{g} \neq 0; \;\; \tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R} = c_{1L} - c_{1R} = 0, \;\; (3.4.17)$$

либо

$$\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R} = c_{2L} - c_{2R} = 0; \;\; \tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R} = c_{1L} - c_{1R} = \tilde{g} \neq 0, \;\; (3.4.18)$$

где $\tilde{g}$ - некоторая вторая константа, характеризующая слабые взаимодействия.

При сделанных предположениях все однородные слагаемые в коэффициентах (3.4.9) – (3.4.12) исчезают. Оставшиеся два коэффициента, характеризующие смешанные вектор-псевдовекторные взаимодействия двух лептонов, принимают вид

$$C'(-+) = -[(\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R}) + (\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})(c_{1L} - c_{1R})]; \;\; (3.4.19)$$

$$C'(+-) = -[(\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} - c_{2R}) + (\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R})(c_{1L} + c_{1R})]. \;\; (3.4.20)$$

7. Следует обратить внимание на смысл сформулированных выше условий (3.4.14), (3.4.15) и (3.4.17), (3.4.18). Прежде всего, они означают, что относительно каждой из комбинаций (симметричной или антисимметричной) лептон фактически может находиться в двух состояниях, когда соответствующая комбинация равна или не равна нулю. Назовем случай нулевых значений комбинаций *невозбужденным состоянием*, а отличных от нуля значений – *возбужденным состоянием*. Это принципиально новая ситуация по сравнению со сложившимися представлениями в физике элементарных частиц. Принято считать, что частица обладает, например, электрическим зарядом всегда. Согласно же развиваемой здесь модели частица в невозбужденном состоянии зарядами не обладает, а приобретает его только в результате происшедшего взаимодействия с другой частицей. При этом одна

частица теряет соответствующую комбинацию из дополнительных параметров (соответствующий заряд), а другая частица его приобретает. Взаимодействие сводится, в частности, к "передаче заряда" от одной частицы к другой.

С позиций развиваемой здесь модели на базе БСКО ранга (4,4) частица в невозбужденном состоянии фактически описывается БСКО ранга (3,3). Она характеризуется только двумя "внешними" параметрами, то есть находится в отношениях с двумя эталонными элементами. Перейдя же в результате взаимодействия в возбужденное состояние, частица начинает описываться в рамках БСКО большего ранга (4,4), то есть характеризуется отношением еще к одному эталонному элементу. Другими словами, *заряды представляют собой дополнительные отношения возбужденной частицы к более богатому набору эталонных элементов.*

3.5 БСКО ранга (2,2) как первообраз эволюции

1. До сих пор в этой главе обсуждался элементарный акт взаимодействия частиц, то есть переход из одного состояния в другое. Перейдем к вопросу о связи элементарных актов как отдельных звеньев в цепочку эволюции частиц и всей физической системы. Этот вопрос частично уже затрагивался в §3.3 при объяснении причины исключения "лишних" слагаемых в базовом 4×4-отношении в рамках БСКО ранга (4,4). Понятие эволюции основано на БСКО минимального ранга (2,2), которую можно рассматривать как подсистему БСКО ранга (3,3). Последняя же, как показано в предыдущем параграфе, описывает невозбужденные состояния частиц и может рассматриваться как своеобразная подсистема БСКО ранга (4,4).

Поясним появление БСКО ранга (2,2) из БСКО ранга (3,3). Чтобы это сделать, нужно, во-первых, показать появление дополнительных параметров, соответствующих элементам БСКО ранга (2,2), во-вторых, из прежней совокупности элементов сформировать два новых множества БСКО ранга (2,2) и, в-третьих, определить между разноименными элементами соответствующие парные отношения. Решим эти три задачи в указанной последовательности.

2. Легко видеть, что закон БСКО (1.3.2) для ранга (3,3) будет по-прежнему выполняться, если произвести следующее преобра-

зование параметров элементов:

$$\begin{array}{lll} i^s \to \tilde{i}^s = C_i i^s; & k^s \to \tilde{k}^s = C_k k^s; & j^s \to \tilde{j}^s = C_j j^s; \\ \alpha^s \to \tilde{\alpha}^s = C_\alpha \alpha^s; & \beta^s \to \tilde{\beta}^s = C_\beta \beta^s; & \gamma^s \to \tilde{\gamma}^s = C_\gamma \gamma^s, \end{array} \tag{3.5.1}$$

где $C_i, \cdots, C_\gamma$ – некоторые комплексные числа, сопоставляемые соответствующим элементам. Именно они представляют собой параметры элементов новой БСКО ранга (2,2).

Ранее было показано, что 4-компонентный столбец из параметров элементов i^s и β_s, описывающих одну частицу, представляет собой прообраз биспинорной волновой функции. Преобразование (3.5.1) можно интерпретировать как разбиение фермионных волновых функций на частотную и спинорные части, используемые в стандартной квантовой теории поля (см., например, [3]).

Естественно положить, что для идеализированных частиц с некоторой степенью точности выполняются условия комплексного сопряжения параметров в начальных и конечных состояниях (3.2.2). Это соответствует одинаковости экспоненциальных факторов (частотных частей) у всех 4 компонент волновой функции Ψ в квантовой теории поля. (Подчеркнем, что в стандартной теории поля все компоненты определены в одной точке.) Требуя для этого случая инвариантность парного отношения между сопряженными элементами одной частицы

$$\tilde{u}_{i\alpha} = \tilde{i}^1 \tilde{\alpha}^1 + \tilde{i}^2 \tilde{\alpha}^2 = C_i C_\alpha u_{i\alpha}, \tag{3.5.2}$$

приходим к выводу, что все комплексные числа $C_{\ldots}$ по модулю равны единице.

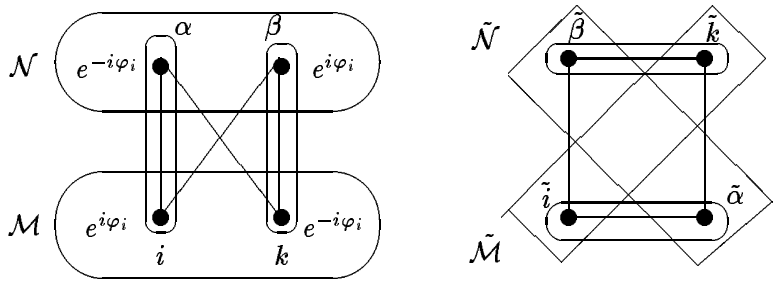
3. Перейдем к решению второй задачи. Естественно постулировать, что при преобразованиях (3.5.1) должны оставаться инвариантными фундаментальные 2×2-отношения (1.4.3). Наложим даже более жесткое требование, чтобы инвариантными оставались каждое из множителей слева в (1.4.3). (Именно такому условию отвечает определение частицы.) Это означает

$$\tilde{i}^1 \tilde{k}^2 - \tilde{i}^2 \tilde{k}^1 = i^1 k^2 - i^2 k^1 = Inv \to C_i C_k = 1; \tag{3.5.3}$$

$$\tilde{\alpha}^1 \tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}^2 \tilde{\beta}^1 = \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1 = Inv \to C_\alpha C_\beta = 1, \tag{3.5.4}$$

то есть должны иметь место соотношения

$$C_i = C_k^* = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = C_\beta^* = e^{i\varphi_\alpha}. \tag{3.5.5}$$



а) БСКО ранга (3,3) б) БСКО ранга (2,2)

Рис. 3.3: Четверка элементов, описывающая состояния идеализированного массивного лептона, с позиций двух БСКО

Именно такие выражения использовались в §3.3. На рисунке 3.3а изображены четыре элемента, описывающие идеализированную свободную частицу в начальном и конечном состояниях. Показано, что допустимые единичные по модулю коэффициенты совпадают у перекрестных элементов.

Соотношения (3.5.4) следует понимать как условия нахождения элементов противоположных множеств данной БСКО в парах, родственное условиям комплексного сопряжения (3.2.2) для элементов БСКО ранга (3,3). Это означает, что одноименные элементы i и k в БСКО ранга (3,3) (так же как α и β) следует отнести к разным множествам $\tilde{\mathcal{M}}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ БСКО ранга (2,2).

Кроме того, положим, что находящиеся в парах разноименные элементы двух множеств БСКО ранга (3,3) относятся к противоположным множествам БСКО ранга (2,2). В частности, для элементов, изображенных на рисунке 3.3, элемент α отнесем к множеству $\tilde{\mathcal{N}}$, а элемент β – к множеству $\tilde{\mathcal{M}}$ БСКО ранга (2,2). Присвоим всем элементам второй символ (с тильдой), характеризующий их принадлежность к одному из двух множеств БСКО ранга (2,2). Для изображенных на рисунке 3.3 элементов это означает

$$i \to \tilde{i}; \quad k \to \tilde{\alpha}; \quad \alpha \to \tilde{\beta}; \quad \beta \to \tilde{k}. \tag{3.5.6}$$

Согласно (3.5.5) элементы $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{\beta}$ следует считать "сшитыми" друг с другом. Другими словами можно сказать, элементы БСКО ранга (3,3), находящиеся в парах с точки зрения этой

же БСКО, являются элементами разных множеств с точки зрения БСКО ранга (2,2), и, наоборот, элементы БСКО ранга (2,2), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами одного и того же множества с точки зрения БСКО ранга (3,3) (см. рис. 3.3б).

4. Определим парные отношения между элементами двух множеств $\tilde{\mathcal{M}}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ через коэффициенты $C_{\dots}$ в (3.5.1) как через соответствующие параметры, то есть пусть

$$u_{\tilde{i}\tilde{\alpha}} = C_i C_k; \quad u_{\tilde{i}\tilde{\beta}} = C_i C_\alpha;$$

$$u_{\tilde{k}\tilde{\alpha}} = C_\beta C_k; \quad u_{\tilde{k}\tilde{\beta}} = C_\beta C_\alpha. \tag{3.5.7}$$

Тогда легко убедиться, что выполняется закон БСКО ранга (2,2)

$$\Phi_{(2,2)} = \begin{vmatrix} u_{\tilde{i}\tilde{\alpha}} & u_{\tilde{i}\tilde{\beta}} \\ u_{\tilde{k}\tilde{\alpha}} & u_{\tilde{k}\tilde{\beta}} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5.8}$$

5. Следует особо подчеркнуть, что для *взаимодействующих* частиц условия комплексного сопряжения (3.2.2) параметров элементов в начальных и в конечные состояниях БСКО ранга (3,3) в общем случае должны быть обобщены в согласии с изложенным в §3.3, тогда как условия комплексного сопряжения параметров "сшитых" элементов БСКО ранга (2,2) (3.5.5) имеют абсолютный характер.

Из изложенного следует, что четверка разноименных элементов, описывающих начальное и конечное состояние одной и той же частицы, оказывается как бы зашнурованной как по горизонтали, так и по вертикали двумя БСКО рангов (3,3) и (2,2). Естественно предположить, что разделение двух элементов массивного лептона на левые и правые компоненты и наличие БСКО ранга (2,2) тесно связаны друг с другом, то есть левые и правые компоненты описываются элементами разных множеств БСКО ранга (2,2).

6. Изложенное выше можно, с одной стороны, понимать как выделение из БСКО ранга (3,3) бинарной подсистемы ранга (2,2), а с другой стороны, — как своеобразную композицию двух БСКО рангов (2,2) и (3,3). Эти две БСКО имеют принципиально различную физическую интерпретацию и играют качественно различную роль в построении фундамента физического мироздания. БСКО ранга (3,3), как уже указывалось, описывает элементарный акт перехода физической системы (совокупности различных частиц) из одного состояния в другое. Можно считать, что она

характеризует мир "по горизонтали" для двух соседних моментов времени. А БСКО ранга (2,2) определяется для каждой частицы своя. Она характеризует эволюцию соответствующей частицы, то есть описывает развертку физической системы "по вертикали". Это обстоятельство пояснено на рисунке 3.3а. Теперь элементы двух множеств соответствуют различным состояниям в процессе эволюции отдельно левых и отдельно правых компонент частицы.

7. Физическая интерпретация действительных фаз комплексных параметров через *физическое действие* дана в §3.3 и более подробно обсуждена в главе 4 первой части этой книги. Поскольку действие частицы с точностью до коэффициента равно длине интервала между двумя точками, то эту величину можно также геометрически интерпретировать пропорциональной интервалу собственного времени между двумя событиями. Между любыми двумя разноименными элементами $\tilde{i}$ и $\tilde{\beta}$ определено парное отношение в виде (3.5.7). Подставляя в него экспоненты с показателями в виде действия, находим, что парное отношение характеризуется разностью значений действия между двумя событиями

$$u_{\tilde{i}\tilde{\beta}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_{\tilde{i}} - S_{\tilde{k}})\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right], \qquad (3.5.9)$$

где вместо фазы (действия) элемента $\tilde{\beta}$ записана фаза (действие) сопряженного ему элемента $\tilde{k}$, для которого согласно (3.5.5)

$$S_{\tilde{k}} = -S_{\tilde{\beta}}; \quad S_{\tilde{i}\tilde{k}} = S_{\tilde{i}} - S_{\tilde{k}}. \qquad (3.5.10)$$

Поскольку в экспоненте записана размерная величина – действие S, в знаменатель введена некая константа такой же размерности. Помня неоднократно проводившиеся аналогии с квантовой механикой, естественно считать, что такая константа имеет смысл постоянной Планка.

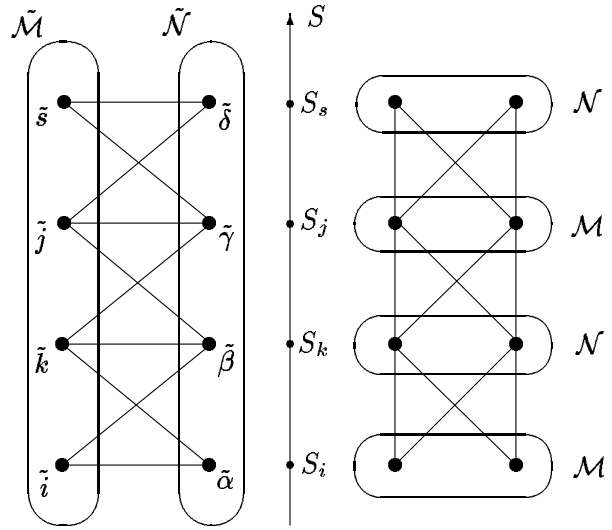
Из-за того, что в каждый момент рассматриваются пары сопряженных элементов, можно забыть о бинарном характере БСКО ранга (2,2) и перейти к унарным отношениям между парами сопряженных элементов, причем их помечать элементами одного из множеств. Пусть это будут элементы множества $\tilde{\mathcal{M}}$, причем их будем писать без тильд. Если взять три пары таких элементов, то легко видеть, что для унарных отношений между ними имеет место мультипликативное свойство экспоненциальных факторов

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ij}\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right] \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{kj}\right], \qquad (3.5.11)$$

соответствующее аддитивности действия

$$S_{ij} = S_{ik} + S_{kj}. \tag{3.5.12}$$

Это закон унарной системы вещественных отношений (УСВО) ранга 3.



а) БСКО ранга (2,2) б) БСКО ранга (3,3)

Рис. 3.4: Развертка в мировую историю процессов, описываемая БСКО ранга (2,2)

На рисунке 3.4 проиллюстрирована эволюция частицы, с одной стороны, через БСКО ранга (2,2) (рис. 3.4а), а с другой стороны, через последовательность элементарных актов, описываемых БСКО ранга (3,3) (рис. 3.4б). Однотипные элементы двух множеств БСКО ранга (2,2) на правом рисунке чередуются, занимая последовательно левое и правое положение, то есть как бы обвивая вертикаль двумя противоположно закручивающимися лентами.

3.6 Элементарные изменения параметров

В предыдущих параграфах этой главы было показано, что элементарный акт перехода частицы (лептона) из одного состояния в другое характеризуется тремя типами параметров:

1) "внешними" параметрами, то есть параметрами БСКО ранга (4,4) (или БСКО ранга (3,3)) с индексами 1 и 2, из которых строятся компоненты 4-скорости u^μ;

2) параметрами БСКО ранга (2,2), физически интерпретируемыми как прообраз действия или смещения;

3) "внутренними" параметрами, то есть параметрами БСКО ранга (4,4) с индексом 3 (или 0), из комбинаций которых строятся заряды.

Все эти параметры претерпевают изменения в результате взаимодействия с другой (другими) частицами. Дополним и обобщим изложенный выше материал о характере этих изменений для всех трех типов параметров.

1. **"Внешние" параметры**. Как уже отмечалось, для взаимодействующих частиц "внешние" параметры конечных состояний уже не являются комплексно сопряженными параметрам начальных состояний. Тем не менее, следует ожидать существование неких обобщенных условий, связывающих параметры в двух состояниях. Исходя из соображений соответствия развиваемой здесь теории со стандартной, выскажем гипотезу, что это условие связи имеет вид

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi = (\overline{e}'_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R\gamma^\mu e'_R) =$$

$$= (u^\mu + c_1\kappa^\mu)\exp(\cdots) = [u'^\mu - (1-c_1)\kappa^\mu]\exp(\cdots), \qquad (3.6.1)$$

где некоторые величины помечены штрихами, подчеркивающими, что они соответствуют конечным состояниям; c_1- некоторая константа порядка единицы. (Здесь пока не конкретизировались экспоненциальные факторы.)

Подчеркнем, что справа в скобках записаны компоненты векторов u^μ и u'^μ, построенные соответственно из параметров i^s, k^s и им комплексно сопряженных, и из параметров α^s, β^s и им комплексно сопряженных. Вещественный вектор[3] κ^μ определен в (3.3.4). Условие связи параметров (3.6.1) записано сразу для четырех компонент вектора.

[3]Следует заметить, что в стандартной электродинамике этот вектор обозначается через k^μ и является изотропным, т.е. полагается $k^\mu k_\mu = 0$. Кроме того, обычно используется условие Лоренца, которое в данном случае должно было бы соответствовать дополнительному соотношению между u^μ и k^μ. Однако не будем здесь волевым образом вводить подобные условия.

В дальнейшем будем записывать все формулы через значения величин в начальных состояниях. Используя (3.6.1), выпишем вектор-векторные слагаемые из (3.2.16). Так, для квадратичных векторов каждой частицы (из прообраза действия для свободных частиц) имеем

$$(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi) = u^\mu u_\mu + 2c_1 u_\mu \kappa^\mu + c_1^2 \kappa^\mu \kappa_\mu. \qquad (3.6.2)$$

Для перекрестных (между двумя частицами) вектор-векторных слагаемых (в прообразе действия взаимодействия) имеем аналогичное выражение (без экспоненциальных слагаемых)

$$(\overline{\Psi}_1\gamma^\mu\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\gamma_\mu\Psi_2) = u_1^\mu u_{2\mu} - c_1 u_1^\mu \kappa_\mu + c_1 u_2^\mu \kappa_\mu - c_1^2 \kappa^\mu \kappa_\mu. \quad (3.6.3)$$

Для скалярных (массовых слагаемых) в прообразе действия для "свободных" частиц также возникает дополнительное выражение, содержащее κ^μ.

2. **Параметры БСКО ранга (2,2)** уже рассматривались в §3.3 в связи с устранением "лишних" слагаемых в базовом 4×4-отношении. С учетом приведенных там формул вектор-векторные (изотропные) выражения приобретают следующие экспоненциальные слагаемые:

$$(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) \to (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right];$$

$$(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R) \to (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right]. \qquad (3.6.4)$$

Производя в выражении

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi =$$

$$= (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right] + (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right]$$

симметризацию и антисимметризацию с помощью приведенного выше тождества (3.4.3), где под A и B понимаются соответствующие экспоненциальные слагаемые, находим

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \frac{1}{2}[(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)]\times$$

$$\times\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right]\right) -$$

$$-\frac{1}{2}[(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) - (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)]\times$$

$$\times\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right] - \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\Delta S + k_\nu x^\nu)\right]\right). \qquad (3.6.5)$$

Стандартной теории соответствует слагаемое лишь с симметричной экспоненциальной комбинацией, то есть первый член справа. В нем можно выделить слагаемые с ΔS и $k_\nu x^\nu$ и вторично произвести симметризацию и антисимметризацию. Опять оставляя лишь симметричные комбинации, будем иметь

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi \sim \left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta S\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\Delta S\right]\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\nu x^\nu\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}k_\nu x^\nu\right]\right). \qquad (3.6.6)$$

Первая комбинация экспонент описывает частотные части лептонной "волновой функции", а вторая комбинация экспонент соответствует вкладам от взаимодействия со второй частицей (полям переносчиков взаимодействий). Забегая вперед, отметим, что именно эта комбинация обеспечивает экспоненты в числителе подинтегрального выражения для пропагатора электромагнитного (и гравитационного) взаимодействий в (2.5.4).

3. **"Внутренние параметры"**, то есть параметры с индексом 3, изменяются согласно формулам (3.4.14) – (3.4.15) и (3.4.17) – (3.4.18), то есть изменяются от нулевых значений в невозбужденных состояниях до возбужденных или наоборот:

$$(c_L + c_R) - (\tilde{c}_L + \tilde{c}_R) = \pm\tilde{e}; \quad (c_L - c_R) - (\tilde{c}_L - \tilde{c}_R) = \pm\tilde{g}. \quad (3.6.7)$$

Свяжем между собой введенные величины. Для этого напомним, что согласно (3.3.6)

$$\Delta S = p'_\mu \Delta x^\mu,$$

где в данном подходе 4-мерные координаты x^μ имеют вторичный характер. Они вводятся из более первичных понятий 4-скорости u^μ (4-импульса) и смещения ds (действия). Полагая, что изменения действия и 4-мерные смещения координат малы, то есть

$$\Delta S \to dS \sim ds; \quad \Delta x^\mu \to dx^\mu,$$

введем естественное соотношение

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \qquad (3.6.8)$$

Имея ввиду известные закономерности многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теорий Калуцы и Клейна, ведем аналогичные определения для комбинаций "внутренних" параметров

$$c_L + c_R = \frac{dx^5}{ds}; \quad c_L - c_R = \frac{dx^6}{ds}. \tag{3.6.9}$$

Здесь, конечно, слева подразумеваются значения для возбужденных значений параметров. В противном случае следует писать комбинации в конечных состояниях.

3.7 Базовое 4×4-отношение как прообраз действия и многомерной метрики

1. Из изложенного в этой главе видно, что из базового 4×4-отношения можно получить выражения, соответствующие слагаемым общепринятого *действия для взаимодействующих частиц*. В частности, из базового 4×4-отношения получаются комбинации, соответствующие слагаемым в фоккеровском принципе для *электромагнитного* взаимодействия. Однако, кроме произведения 4-скоростей (4-токов) двух взаимодействующих частиц в прообразе действия имеются также произведения псевдовекторов двух частиц, а также вектора (4-скорости) на псевдовектор и наоборот. В главе 12 будет показано, что эти дополнительные слагаемые описывают *электрослабые* взаимодействия, в настоящее время рассматриваемые в рамках модели Вайнберга-Салама.

Как уже отмечалось в §3.3, из базового 4×4- отношения получается также прообраз действия рассматриваемых "свободных" частиц (3.3.9). С учетом введенных в §3.2 обозначений это выражение записывается в виде

$$\tilde{S}_{free}(e_1, e_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\overline{e}_{1R}\gamma_\mu e_{1R})(c_{2L} - c_{2R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{2L}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\overline{e}_{2L}\gamma^\mu e_{2L})(\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{1R} - \tilde{c}_{1L}) +$$

$$+ (\overline{e}_{1L}e_{1R})(\overline{e}_{2R}e_{2L})(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{2L}) +$$

$$+ (\overline{e}_{1R}e_{1L})(\overline{e}_{2L}e_{2R})(c_{2L} - c_{2R})(\tilde{c}_{1R} - \tilde{c}_{1L}). \tag{3.7.1}$$

Отметим, что во всех этих выражениях отсутствуют экспоненциальные факторы.

2. От базового 4×4-отношения можно перейти *к прообразу многомерной метрики теории Калуцы-Клейна*, которая, подчеркнем, записывается, исходя из классических понятий. Чтобы это сделать, прежде всего, в прообразе действия (3.3.10) следует исключить псевдовекторные слагаемые, не имеющие классического аналога. В итоге в прообразе действия остаются слагаемые, соответствующие электромагнитному взаимодействию, и, в общем случае, часть, описывающая "свободные" частицы. Подставляя в него обозначения, введенные в (3.6.1) – (3.6.3), имеем

$$\tilde{S}'(e_1, e_2) =$$

$$= \eta_{\mu\nu}\left(\frac{dx_1^\mu}{ds_1} + c_1\kappa_1^\mu\right)\left(\frac{dx_1^\nu}{ds_1} + c_1\kappa_1^\nu\right) f_1(0) + F(inv_1, inv_2)\frac{dx_1^6}{ds_1}\frac{dx_2^6}{ds_2} +$$

$$+\eta_{\mu\nu} f_2(0)\left(\frac{dx_2^\mu}{ds_2} + c_1\kappa_2^\mu\right)\left(\frac{dx_2^\nu}{ds_2} + c_1\kappa_2^\nu\right) +$$

$$+\frac{\eta_{\mu\nu}}{32}\exp(e_1, e_2)\left(\frac{dx_1^\mu}{ds_1} + c_1\kappa^\mu\right)\left(\frac{dx_2^\nu}{ds_2} - c_1\kappa^\nu\right)\frac{dx_1^5}{ds_1}\frac{dx_2^5}{ds_2}, \qquad (3.7.2)$$

где символом $F(\cdots)$ обозначены инварианты, соответствующие последним двум строкам в (3.7.1), а символы $f_1(0)$ и $f_2(0)$ означают коэффициенты из дополнительных параметров в первых двух строках (3.7.1). В этом выражении явно не выписаны экспоненциальные слагаемые; $\eta_{\mu\nu}$ – компоненты метрики пространства Минковского.

3. Выделим одну из частиц. Пусть это будет частица с номером 1. Умножив (3.7.2) на ds_1^2, получаем квадратичную 7-мерную форму для выделенной частицы

$$\tilde{S}'(e_1, e_2)ds_1^2 \equiv d\Sigma^2 =$$

$$= \eta_{\mu\nu} f_1(0)(dx_1^\mu + c_1\kappa^\mu ds_1)(dx_1^\nu + c_1\kappa^\nu ds_1) +$$

$$+\frac{\eta_{\mu\nu}}{32}(dx_1^\mu dx_1^5 + c_1\kappa^\mu ds_1 dx_1^5)\left(\frac{dx_2^\nu}{ds_2} - c_1\kappa^\nu\right)\frac{dx_2^5}{ds_2} +$$

$$+F(inv_1, inv_2)\frac{dx_2^6}{ds_2}ds_1 dx_1^6 + \eta_{\mu\nu}\frac{dx_2^\mu}{ds_2}\frac{dx_2^\nu}{ds_2} f_2(0)ds_1^2. \qquad (3.7.3)$$

В этом выражении величину ds_1 можно трактовать как дифференциал седьмой координаты, которую обозначим индексом 4:

$$ds_1 \equiv dx_1^4. \qquad (3.7.4)$$

Первая строка справа в (3.7.3) формально приводит к квадратичным выражениям по 4-мерным смещениям, к квадратичному слагаемому по dx^4 и к смешанному слагаемому, пропорциональному $dx^\mu dx^4$. Это выражение представляет собой прообраз метрики в многомерных геометрических моделях физических взаимодействий, обсужденной в последующих главах.

3.8 Замечания и выводы

1. Следует еще раз подчеркнуть, что в этой главе обсуждена максимально упрощенная модель физики микромира, опирающаяся на собственную систему понятий. **Основные упрощения** состояли в следующем:

а) модель строилась на базе БСКО минимального ранга (4,4), позволяющего только в общих чертах вскрыть прообразы ключевых понятий современной физики;

б) в этой модели рассматривались только две выделенные частицы, то есть игнорировалось существование других частиц окружающего мира;

в) выделенные частицы представляли собой модели простейших элементарных частиц (лептонов);

г) рассмотрение велось с точки зрения одной элементарной базы — простейшего набора эталонных элементов.

2. Тем не менее, удалось указать **прообразы следующих ключевых понятий** современной физики:

1) *компонент 4-мерных скоростей* частиц, выражаемых через "внешние" параметры (с индексами 1 и 2) элементов;

2) *зарядов элементарных частиц*, выражаемых через дополнительные, третьи параметры элементов;

3) *классического действия*, соответствующего вещественному показателю экспоненциальных факторов, обусловленных подсистемой БСКО минимального ранга (2,2);

4) *импульса передачи*, обусловленного обобщением правила комплексного сопряжения параметров элементов начальных и конечных состояний;

5) *действия (плотности лагранжиана)* системы из двух взаимодействующих частиц, в качестве которого выступает базовое 4×4-отношение, построенное на элементах, описывающих эти частицы;

6) *многомерной метрики*, выводимой из базового 4×4-отношения.

3. Указанные выше упрощения обусловили **ряд недостатков** рассмотренной алгебраической модели физических взаимодействий пары частиц. Перечислим основные из них.

1) В прообразе многомерной метрики (3.7.3) коэффициент перед 4-мерной квадратичной формой $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ обращается в нуль вследствие условий на дополнительные ("внутренние") параметры (3.4.14) или (3.4.15). (Однако одно из слагаемых с инвариантами в общем случае может оказаться отличным от нуля.)

2) Величины ds пока играют формальную роль. Они используются как общепринятые дифференциалы и соответствуют понятиям из неархимедовой геометрии (коэффициентам в экспоненциальных факторах, описывающих циклическую зависимость).

3) В прообразе многомерной метрики и действия уже различаются слагаемые, которые соответствуют общепринятому векторному потенциалу, однако для его окончательного определения не хватает пропагатора (функции Грина). Пока не указано, как получается пропагатор из уже использованных понятий.

4) Остается открытым вопрос о значении квадрата прообраза многомерного интервала $d\Sigma^2$.

Можно указать ряд других недостатков (задач) изложенной модели.

4. Для решения перечисленных и ряда других проблем необходимо, как минимум, учесть следующие три фактора:

а) привлечь к рассмотрению все другие частицы окружающего мира (использовать принцип Маха);

б) перейти от отдельных частиц к макрообъектам и сделать соответствующий переход к макропонятиям,

в) перейти от элементарного набора базисных элементов к классическому наблюдателю (макроприбору).

Более совершенные модели, учитывающие эти и некоторые другие факторы, обсуждены в следующих двух главах.

Глава 4

Принцип Маха

Как уже отмечалось, в современной теоретической физике не реализуется принцип Маха. В предлагаемой здесь реляционной теории пространства-времени и взаимодействий (в бинарной геометрофизике) принцип Маха играет ключевую роль. Оказывается, без учета окружающей частицу материи невозможно даже записать вклад в свободное действие этой частицы, не говоря уже о полном описании ее взаимодействий с другими частицами. В этой главе внимание сосредоточено на двух характерных подмножествах из четырех, указанных в преамбуле этого раздела: на выделенном объекте и на частицах окружающего мира (см. рис. 4.1), причем это делается относительно элементарного набора эталонных элементов. Обсуждается влияние частиц (событий) окружающего мира на смещение выделенной частицы.

4.1 Основания принципа Маха

1. Уже фундаментальное 2×2-отношение БСКО ранга (3,3), имеет, можно сказать, "*4-точечный характер*", поскольку записывается для четырех элементов из двух разных множеств. По-разному комбинируя их, можно описывать этим отношением различные физические понятия и ситуации. Так, полагая, что они описывают одну и ту же частицу и сшивая их воедино, получаем компоненты 4-скорости этой частицы согласно (1.4.7). Полагая, что две пары разноименных элементов принадлежат разным частицам (разделяя их по горизонтали), данное фундаментальное 2×2-отношение можно понимать как часть отношения (1.4.10) между двумя частицами. В данной главе будем понимать четверку элементов описывающей одну и ту же частицу, но сосредоточим внимание на разделении элементов по вертика-

ли, соответствующем двум моментам времени. Это отображено на рисунке 4.1, где показано смещение dx^M выделенной частицы.

2. В предыдущей главе рассматривалось базовое 4×4-отношение в рамках теории БСКО ранга (4,4), имеющее, можно сказать, "8-точечный характер". В этой главе наша цель состоит в переходе от базовых 4×4-отношений к *парным отношениям между двумя близкими точками, соответствующим квадрату интервала в римановой геометрии.* В рамках бинарной геометрофизики это означает, что из 8 элементов базового 4×4-отношения должны быть выделены элементы-точки, характеризующие одну и ту же частицу в двух разных множествах (в два момента времени). Но для одной частицы таких элементов будет четыре. Оставшиеся элементы характеризуют другую (другие) частицу (частицы), то есть отношение неизбежно имеет "многоточечный" характер[1]. Как от него перейти к парному отношению для выделенной частицы? Взять какую-то другую частицу? Но тогда какую?

Предлагается единственно возможное решение, составляющее **основание (или прообраз) принципа Маха**: *В рамках БСКО ранга (4,4) инфинитезимальное парное отношение для двух положений выделенной частицы получается посредством специальной процедуры суммирования вкладов базовых* 4×4-*отношений (с участием разноименных элементов выделенной частицы) по всем элементам других частиц окружающего мира.*

Подчеркнем, что участие частиц окружающего мира в определении парного отношения для отдельной частицы соответствует принципу Маха в самом широком его понимании, сформулированном в главе 2.

3. Данная формулировка прообраза принципа Маха вызывает ряд вопросов: Что конкретно означает участие разноименных элементов выделенной частицы? Что входит в определение специальной процедуры суммирования? О каких вкладах базовых 4×4-отношений идет речь? Имеются и некоторые другие вопросы. В этой и в следующей главах даются ответы на них.

Начнем с первого из обозначенных вопросов. Постулируем, что *для получения прообраза смещения (действия) нужно суммировать вклады только таких базовых* 4×4-*отношений, которые записываются для всех четырех элементов выделенной частицы.* Заметим, что каждое слагаемое базового 4×4-отношения (3.1.4) содержит произведения из 6 параметров составляющих его элементов, так что в этом отношении будут слагаемые,

[1] В связи с этим следует упомянуть работы В.Я.Скоробогатько [67], развивавшего многоточечную геометрию и искавшего ее проявления в физике.

содержащие четыре, три или только два элемента (из четырех) выделенной частицы, входящей в определение этого отношения.

Пусть выделенная частица (присвоим ей номер 1) характеризуется элементами i, k в начальном состоянии и элементами α, β в конечном состоянии. Обозначим парное отношение для этой частицы, образованное согласно сформулированному принципу, символом $a^{(2)}(1,1')$. Оно имеет вид

$$a^{(2)}(1,1') \Leftrightarrow \bigcup_{j,s,\gamma,\delta}^{World} \left\{ \begin{matrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \\ i\;\;k\;\;j\;\;s \end{matrix} \right\}. \tag{4.1.1}$$

Все составные части этого выражения проиллюстрированы на рисунке 4.1. Обратим внимание, что в (4.1.1) поставлен не знак равенства, а значок $\Leftrightarrow$, означающий вместе с $\bigcup$ пока не разъясненную специальную процедуру суммирования вкладов.

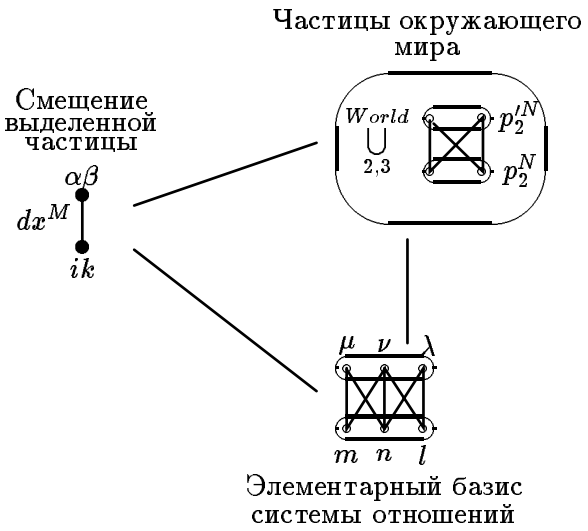


Рис. 4.1: Парное отношение между двумя положениями выделенной частицы (ее смещение) определяется элементами всего окружающего мира.

4. Окружающие частицы могут входить в базовые 4×4-отношения, просуммированные в (4.1.1) через 1, 2, 3 или 4 своих элемента. Для того, чтобы представить себе, какие слагаемые содержатся в парном отношении (4.1.1), достаточно рассмотреть сумму возможных базовых 4×4-отношений для *трех частиц*.

В этой сумме будут присутствовать следующие комбинации из элементов трех выбранных частиц:

$$4+4+0; \quad 4+0+4; \quad 4+2+2; \quad 4+3+1; \quad 4+1+3.$$

Вид первых двух комбинаций уже изучен в предыдущей главе. В §3.7 было показано, что эти комбинации не дают вкладов в прообраз действия для свободных частиц. Вклады остальных комбинаций рассмотрены в следующих двух параграфах.

4.2 Базовые 4×4-отношения из комбинаций вида 4+2+2

1. Пусть три выделенные частицы характеризуются следующими тремя четверками параметров: $(i, k; \alpha, \beta)$, $(j, s; \gamma, \delta)$, $(l, r; \lambda, \rho)$. Начнем с рассмотрения случая, когда вторая и третья частицы представлены элементами одновременно из двух разных множеств. Эти возможности проиллюстрированы четырьмя диаграммами на рисунке 4.2. Выделим из всех таких $4 \times$

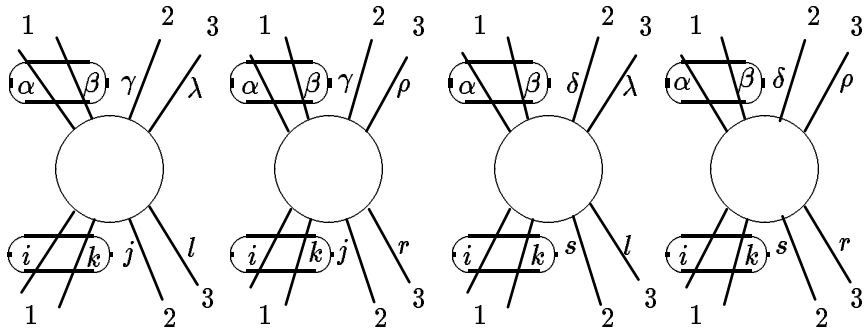


Рис. 4.2: Базовые 4×4-отношения из комбинаций вида 4+2+2

4-отношений слагаемые, соответствующие прообразу действия для *свободной* первой частицы. Напомним, что они описываются слагаемым в левом верхнем углу формулы (3.1.4). Используя ранее введенные обозначения, сумму из четырех таких слагаемых находим в виде

$$\tilde{S}^{[4+2+2]}_{free}(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \gamma & \lambda \\ j & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \rho \\ j & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \lambda \\ s & l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \rho \\ s & r \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{1L}\gamma_{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma_{\mu}e_{1R})]\times$$

$$\times[-2(c_{2L}\tilde{c}_{2L} + c_{2R}\tilde{c}_{2R} + c_{3L}\tilde{c}_{3L} + c_{3R}\tilde{c}_{3R})+$$

$$+(c_{2L} + c_{2R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) + (\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})(c_{3L} + c_{3R})]. \qquad (4.2.1)$$

В этом выражении предпоследняя строка (из однородных слагаемых) обращается в нуль по тем же причинам, что и в предыдущей главе. Отличный от нуля результат дает последняя строка. Таким образом, *возникает вклад в прообраз свободного смещения избранной (первой) частицы из произведения симметричных комбинаций дополнительных параметров двух других частиц.*

Заметим, что при написании (4.2.1) существенным является порядок элементов, присваиваемых частицам. Будем полагать, что элементы начальных и конечных состояний одной и той же частицы имеют одинаковый порядок. Тогда перестановка частиц не меняет знака результирующего выражения.

2. Следует отметить, что имеются другие комбинации вида 4+2+2, когда пары элементов второй и третьей частиц принадлежат одному множеству. Обозначим такие комбинации символом 4+(2)+(2). Они изображены на диаграммах рисунка 4.3. Легко видеть, что для таких комбинаций обращаются в нуль все

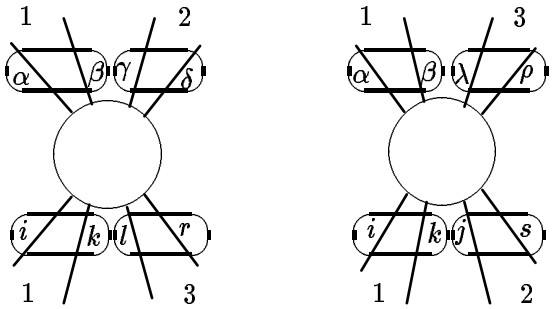


Рис. 4.3: Базовые 4×4-отношения из комбинаций вида 4+(2)+(2)

слагаемые, соответствующие вектор (псевдовектор)-векторным (-псевдовекторным) взаимодействиям частиц. Отличными от нуля могут остаться лишь вклады в свободную часть прообраза действия выделенной частицы. Легко показать, что они имеют вид

$$\tilde{S}^{[4+(2)+(2)]}_{free}(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \lambda & \rho \\ j & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ l & r \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{1L}\gamma_{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma_{\mu}e_{1R})] \times$$

$$\times[(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R})(c_{3L} - c_{3R}) + (c_{2L} - c_{2R})(\tilde{c}_{3L} - \tilde{c}_{3R})]. \qquad (4.2.2)$$

Здесь последняя строка характеризует возможные *вклады в прообраз действия избранной частицы от квадратичных антисимметричных (слабых) зарядов второй и третьей частиц.*

3. В рассматриваемых комбинациях типа 4+2+2 отличными от нуля будут вклады от четверок (средних) диагональных слагаемых базовых 4×4-отношений, записанных в (3.1.4). Производя все процедуры, описанные в главе 3, выпишем отдельно члены, характеризующие вектор-векторные взаимодействия выделенной частицы с двумя другими частицами. Они имеют вид

$$\tilde{S}^{[4+2+2]}_{(e)int}(1;2,3) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})] \times$$

$$\times[-2(c_{1L}\tilde{c}_{1L} + c_{1R}\tilde{c}_{1R} + c_{3L}\tilde{c}_{3L} + c_{3R}\tilde{c}_{3R}) +$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{3L} + c_{3R})] +$$

$$+\frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{3L}\gamma_{\mu}e_{3L}) + (\overline{e}_{3R}\gamma_{\mu}e_{3R})] \times$$

$$\times[-2(c_{1L}\tilde{c}_{1L} + c_{1R}\tilde{c}_{1R} + c_{2L}\tilde{c}_{2L} + c_{2R}\tilde{c}_{2R}) +$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R})]. \qquad (4.2.3)$$

Из этой формулы видно, что в вектор-векторное взаимодействие первой частицы со второй дает вклад затравочный электрический заряд третьей частицы, а в вектор-векторное взаимодействие первой частицы с третьей вносит вклад затравочный электрический заряд второй частицы. Однородные слагаемые в третьей и в шестой строках обращаются в нуль.

4. После соответствующих выкладок легко убедиться, что комбинации вида 4+2+2 не дают вкладов в псевдовектор-псевдовекторное взаимодействие первой частицы со второй и третьей, а также отсутствуют вклады в вектор-псевдовекторные взаимодействия первой частицы с двумя другими. Остаются лишь псевдовектор-векторные взаимодействия. Они описываются формулой

$$\tilde{S}^{[4+2+2]}_{(w)int}(1;2,3) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]\times$$

$$\times[2(c_{1L}\tilde{c}_{1L} - c_{1R}\tilde{c}_{1R})-$$

$$-(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) - (\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{3L} + c_{3R})]+$$

$$+\frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{3L}\gamma_{\mu}e_{3L}) + (\overline{e}_{3R}\gamma_{\mu}e_{3R})]\times$$

$$\times[2(c_{1L}\tilde{c}_{1L} - c_{1R}\tilde{c}_{1R})-$$

$$-(c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) - (\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R})]. \qquad (4.2.4)$$

По упомянутым выше причинам это выражение не дает вклада в прообраз смещения классической частицы.

4.3 Базовые 4×4-отношения из комбинаций видов 4+3+1 и 4+1+3

1. Рассмотрим вклад этих комбинаций на примере одной из них, а именно 4+3+1. При записи таких комбинаций существенен порядок элементов в соответствующих базовых 4×4-отношениях. Будем полагать, что элементы третьей частицы должны помещаться на место исключенного элемента второй частицы. (При этом также будем полагать, что элементы первой частицы раз навсегда фиксированы в ранее использованном порядке.) Четыре пары таких комбинаций изображены на диаграммах рисунка 4.4.

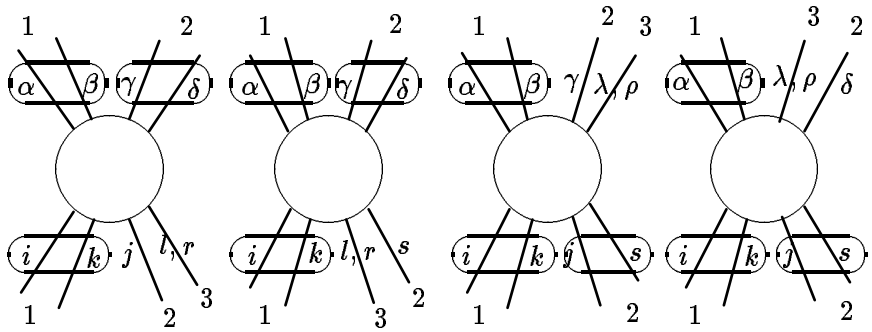


Рис. 4.4: Базовые 4×4-отношения из комбинаций вида 4+3+1.

2. Опять начнем с вкладов в прообраз смещения "свободной" (первой) частицы. Собирая вклады от 8 базовых 4×4-отношений, приходим к выражению

$$\tilde{S}^{[4+3+1]}_{free}(1) = -4 \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ i & k \end{bmatrix} \times (c_{2L} - c_{2R})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R}). \qquad (4.3.1)$$

Вклады от третьей частицы при данном порядке элементов взаимно сократились. Это выражение дает нулевой вклад в прообраз смещения свободной частицы, как и в случае базового 4×4-отношения, разобранного в главе 3.

3. Четверки (внутренних) диагональных комбинаций вида, записанного в базовом 4×4-отношении (3.1.4), после ряда симметризаций и антисимметризаций можно представить в следующем виде

$$\tilde{S}^{[4+3+1]}_{int}(1;2,3) =$$

$$= \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})] \times$$

$$\times (A + B + C + D) +$$

$$+ \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})] \times$$

$$\times (A - B + C - D) +$$

$$+ \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})] \times$$

$$\times (A + B - C - D) +$$

$$+ \frac{1}{8}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})] \times$$

$$\times (A - B - C + D), \qquad (4.3.2)$$

где присутствующие в слагаемых коэффициенты записываются через дополнительные параметры следующим образом

$$A = (c_{1R} - c_{3L})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1R}) + (c_{1R} - c_{2R})(\tilde{c}_{3L} - \tilde{c}_{1R}); \qquad (4.3.3)$$

$$B = (c_{1R} - c_{3L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1R}) + (c_{1R} - c_{2L})(\tilde{c}_{3L} - \tilde{c}_{1R}); \qquad (4.3.4)$$

$$C = (c_{1L} - c_{3L})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1L}) + (c_{1L} - c_{2R})(\tilde{c}_{3L} - \tilde{c}_{1L}); \qquad (4.3.5)$$

$$D = (c_{1L} - c_{3L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1L}) + (c_{1L} - c_{2L})(\tilde{c}_{3L} - \tilde{c}_{1L}). \qquad (4.3.6)$$

4. Распишем отдельно выражение для вектор-векторного взаимодействия. Используя формулы (4.3.3) – (4.3.6), находим

$$\tilde{S}^{[4+3+1]}_{(e)int}(1;2,3) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]\times$$

$$\times[-4(c_{1L}\tilde{c}_{1L} + c_{1R}\tilde{c}_{1R})+$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R})+$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{3L} + c_{3R})-$$

$$-(c_{2L} + c_{2R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) - (\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})(c_{3L} + c_{3R})]. \qquad (4.3.7)$$

Обращает на себя внимание разный характер входящих сюда выражений. Третья строка сверху содержит однородные комбинации из дополнительных параметров. Эти слагаемые дают нулевой вклад. Четвертая строка сверху соответствует ранее полученному электромагнитному взаимодействию двух заряженных частиц. Пятая строка дает вклад, аналогичный полученному в предыдущем параграфе, т.е. формуле (4.2.3), когда вектор-векторное взаимодействие с одной частицей, записывается через заряд другой частицы. Наконец, выражение в последней (шестой) строке вообще не содержит заряда первой частицы и представляет собой квадратичную комбинацию из зарядов второй и третьей частиц.

5. Выражения для комбинаций 4+1+3 имеют совершенно аналогичный вид. В них нужно только переставить местами номера второй и третьей частиц. Сделаем это для последней формулы (4.3.7), т.к. такие слагаемые в дальнейшем будут играть важную роль.

$$\tilde{S}^{[4+1+3]}_{(e)int}(1;3,2) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{3L}\gamma_{\mu}e_{3L}) + (\overline{e}_{3R}\gamma_{\mu}e_{3R})]\times$$

$$\times[-4(c_{1L}\tilde{c}_{1L} + c_{1R}\tilde{c}_{1R})+$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{3L} + c_{3R})+$$

$$+(c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) + (\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R})-$$

$$-(c_{3L} + c_{3R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R}) - (\tilde{c}_{3L} + \tilde{c}_{3R})(c_{2L} + c_{2R})]. \qquad (4.3.8)$$

6. Следует отметить, что кроме рассмотренных в §§4.2 – 4.3 вариантов имеются еще комбинации видов:

$$4+2+1+1, \quad 4+1+1+1+1,$$

включающие в себя элементы *четырех и пяти разных частиц*, которые формально также подпадают под критерий вкладов в смещение выделенной частицы с номером 1. Очевидно, что последние комбинации могут дать вклад только в "свободное" действие, а комбинации вида 4+2+1+1 могут дать вклады в действие взаимодействия. В рассматриваемой здесь модели ограничимся случаем трех частиц, входящих в базовое 4×4-отношение.

4.4 Прообраз 6-мерной метрики

1. Соберем из предыдущих разделов все слагаемые, составляющие (4.1.1), и умножим их на ds_1^2, как в §3.7. Для результирующего выражения введем обозначение

$$a^{(2)}(1,1')ds_1^2 \equiv d\tilde{I}^2 \Leftrightarrow ds_1^2 \bigcup_2 \bigcup_3 \left[\tilde{S}_{free}^{[4+2+2]}(1) + \tilde{S}_{free}^{[4+(2)+(2)]}(1)\right] +$$

$$+ds_1^2 \bigcup_2 \tilde{S}_{int}^{[4+4+0]}(1;2)+$$

$$+ds_1^2 \bigcup_2 \bigcup_3 \left[\tilde{S}_{int}^{[4+2+2]}(1;2,3) + \tilde{S}_{int}^{[4+3+1]}(1;2,3) + \tilde{S}_{int}^{[4+1+3]}(1;2,3)\right]. \tag{4.4.1}$$

Используя формулы §3.6, отдельно обсудим вклады в $d\tilde{I}^2$, даваемые а) квадратичными слагаемыми по 4-мерным скоростям выделенной частицы, б) линейными слагаемыми по 4-мерным скоростям и в) членами, не содержащими 4-мерных скоростей 1-й частицы:

$$d\tilde{I}^2 = d\tilde{I}^2(2) + d\tilde{I}^2(1) + d\tilde{I}^2(0). \tag{4.4.2}$$

а) **Квадратичные по 4-мерным скоростям слагаемые** согласно формулам (3.6.1) – (3.6.3) можно представить в виде

$$d\tilde{I}^2(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\bigcup_2 \bigcup_3 (u_{(2)}^5 u_{(3)}^5 - u_{(2)}^6 u_{(3)}^6)\right) \eta_{\mu\nu}\times$$

$$\times\left(dx^\mu dx^\nu + c_1 dx^\mu dx^4 \kappa^\nu + c_1 dx^\nu dx^4 \kappa^\mu + c_1^2 (dx^4)^2 \kappa^\mu \kappa^\nu\right), \tag{4.4.3}$$

где суммирование производится по всем возбужденным по пятой и шестой координатам частицам окружающего мира. Здесь и в дальнейшем дифференциалы первой частицы будем писать без индекса 1 снизу.

б) **Линейные по 4-мерным скоростям слагаемые** согласно формулам (3.6.2) – (3.6.3) записываются в виде

$$d\tilde{I}^2(1) \Leftrightarrow \frac{1}{16}\exp(1)\eta_{\mu\nu}\times$$

$$\times\left[\bigcup_2 \exp(2)\left(dx^\mu u'^\nu_{(2)} + c_1 dx^4 u'^\mu_{(2)}\kappa^\nu\right)\bigcup_3 f_2(u^5_{(2)}, u^5_{(3)}, dx^5, dx^4)+\right.$$

$$\left.+\bigcup_2\bigcup_3 \exp(3)(dx^\mu u'^\nu_{(3)} + c_1 dx^4 u'^\mu_{(3)}\kappa^\nu) f_3(u^5_{(2)}, u^5_{(3)}, dx^5, dx^4)\right], \tag{4.4.4}$$

где f_2 и f_3 некоторые функции от дополнительных координат трех частиц.

В этом выражении использованы обозначения

$$\exp(s) \equiv \exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\beta x^\beta_{(s)}\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}k_\beta x^\beta_{(s)}\right]. \tag{4.4.5}$$

для соответствующих частиц s=1, 2, 3.

в) **Слагаемые, не содержащие 4-скоростей выделенной частицы**, при сделанных предположениях отсутствуют

$$d\tilde{I}^2(0) = 0. \tag{4.4.6}$$

Действительно, согласно определению (4.1.1), в тех выражениях базовых 4×4-отношений, где не содержатся 4-скорости выделенной частицы, должны квадратично входить дополнительные компоненты скоростей этой частицы, обязательно одна в начальном состоянии, а другая – в конечном. Но при сделанном допущении, что возбужденная частица обязательно испускает излучение, следует положить, что такая квадратичная комбинация из дополнительных компонент равна нулю.

2. Игнорируя вклады от псевдоскоростей окружающих частиц мира, приходим к 6-мерной квадратичной форме для выделенной частицы

$$d\tilde{I}^2 = \tilde{G}_{MN}dx^M dx^N, \tag{4.4.7}$$

где компоненты 6-мерной метрики

$$\tilde{G}_{MN} = \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{G}_{\mu\nu} & \tilde{G}_{\mu 4} & \tilde{G}_{\mu 5} \\ \hline \tilde{G}_{4\nu} & \tilde{G}_{44} & \tilde{G}_{45} \\ \tilde{G}_{5\nu} & \tilde{G}_{54} & 0 \end{array} \right) \tag{4.4.8}$$

определяются вкладами:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu}\frac{1}{4}\bigcup_2 (u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6); \tag{4.4.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu 4} \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}c_1\kappa_\mu \bigcup_2 (u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6) - \\ -\ & \frac{b_5}{16}\exp(1)\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\mu}u^5_{(2)} - \\ -\ & \frac{1}{16}\exp(1)\bigcup_2 u^5_{(2)}\bigcup_3 \exp(3)u'_{(3)\mu}u^5_{(3)}; \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu 5} \Leftrightarrow\ & \frac{1}{32}\exp(1)\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\mu}u^5_{(2)} + \\ +\ & \frac{1}{16}\exp(1)\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\mu}\bigcup_3 (2u^5_{(3)} + u^5_{(2)}) + \\ +\ & \frac{1}{16}\exp(1)\bigcup_2\bigcup_3 \exp(3)u'_{(3)\mu}(2u^5_{(2)} + u^5_{(3)}); \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{44} \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}c_1^2\kappa_\beta\kappa^\beta \bigcup_2 (u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6) - \\ -\ & \frac{c_1}{8}\kappa^\beta\exp(1)\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\beta}u^5_{(2)}b_5 - \\ -\ & \frac{c_1}{8}\kappa^\beta\exp(1)\bigcup_2 u^5_{(2)}\bigcup_3 \exp(3)u'_{(3)\beta}u^5_{(3)}; \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{45} \Leftrightarrow\ & \frac{c_1}{32}\exp(1)\kappa^\beta\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\beta}u^5_{(2)} + \\ +\ & \frac{c_1}{16}\exp(1)\kappa^\beta\bigcup_2 \exp(2)u'_{(2)\beta}\bigcup_3 (2u^5_{(3)} + u^5_{(2)}) + \\ +\ & \frac{c_1}{16}\exp(1)\kappa^\beta\bigcup_2\bigcup_3 \exp(3)u'_{(3)\beta}(2u^5_{(2)} + u^5_{(3)}); \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

$$\tilde{G}_{55} = 0. \tag{4.4.14}$$

Здесь использованы обозначения:

$$b_5 = \cup_3 u^5_{(3)}; \qquad b_6 = \cup_3 u^6_{(3)}. \tag{4.4.15}$$

Следует особо подчеркнуть обращение в нуль диагональной дополнительной компоненты метрики $\tilde{G}_{55}$.

3. Сделаем несколько замечаний по выписанным компонентам прообраза метрики:

1) Как правило, везде писались не знаки равенства, а символы $\Leftrightarrow$, и вместо обычных сумм — знаки $\bigcup$, что подчеркивает пока еще не раскрытый характер специального суммирования вкладов элементов окружающего мира.

2) В приведенных формулах явно обозначены лишь экспоненциальные члены, содержащие импульсы передачи k^ν и не отмечены экспоненциальные слагаемые, содержащие импульсы самих частиц (слагаемые с dS в экспоненте). Подразумевается, что они содержатся в соответствующих спинорных (векторных) компонентах.

3) В формулах (4.4.9) – (4.4.14) не учитывались слагаемые с псевдотоком рассматриваемой частицы, которые, как известно, пропадают в случае макрообъектов. В главе 12 будет показано, что такие слагаемые описывают электрослабые взаимодействия микрообъектов.

4) В приведенных формулах также не учитывались слагаемые с псевдотоками окружающих частиц. Фактически полагалось, что весь окружающий мир можно понимать как единый глобальный макрообъект.

5) Следует также заметить, что наблюдаемые макрообъекты состоят не только из лептонов, но и из барионов, которые, как будет показано в разделе 6, описываются БСКО более высоких рангов. Здесь же рассматривается упрощенная модель на базе БСКО ранга (4,4).

4.5 Последовательность процедур перехода к классическим понятиям

1. Вернемся к обсуждению процедуры суммирования вкладов окружающих частиц. Для этого заметим, что эту процедуру следует рассматривать в комплексе с несколькими другими операциями: редукцией на 4-мерие (процедурой 1+1+4-расщепления), суммированием по элементарным базам (наборам эталонных элементов) и с некоторыми другими. Всего можно выделить пять таких процедур. Причем, оказывается, результат

существенно зависит от порядка их проведения. В этих обстоятельствах следует руководствоваться наводящими соображениями из теории прямого межчастичного взаимодействия, теории Калуцы-Клейна и требованием выполнимости принципа соответствия с известной теорией. Анализ показывает, что следует остановиться на следующем порядке пяти процедур:

1) Сначала необходимо выделить из всех окружающих частиц некоторую вторую частицу (впоследствии по вторым частицам будет проводиться суммирование) и самым непосредственным образом просуммировать по вкладам всех третьих частиц. Такое разделение навеяно теорией прямого межчастичного взаимодействия, из которой следует, что взаимодействие между любыми двумя частицами зависит от всех других частиц. Это описывается теорией поглотителя Фейнмана. В итоге из (4.4.9) – (4.4.14) получаются компоненты прооообраза 6-мерной метрики $\check{G}_{MN}$.

2) Проведение процедуры 1+1+4-расщепления в рамках 6-мерной метрики, полученной на первом этапе. Из опыта построения многомерных геометрических моделей физических взаимодействий следует, что физически интерпретируемыми являются лишь величины, спроектированные на понятия 4-мерного мира. Для этой цели развиты специальные методы редукции. Их важная составная часть имеет алгебраический характер и применима к прообразу 6-мерной метрики $\check{G}_{MN}$. Эта процедура изложена в следующем параграфе. В итоге находятся компоненты прообраза 4-мерной метрики $\check{g}_{\mu\nu}$ и 4-мерных векторов диады.

3) Усреднение по макрообъекту, содержащему первую частицу, и по макрообъектам, содержащим вторые частицы.

4) Суммирование по наборам эталонных элементов, составляющих макроприбор. Обсуждению этой принципиально важной процедуры посвящена вся следующая глава.

5) Суммирование по всем возможным вторым объектам (частицам) окружающего мира.

Только после проведения всех этих процедур получаются компоненты метрического тензора классического пространства-времени и электромагнитного векторного потенциала. Совокупность перечисленных процедур можно изобразить в следующем символическом виде

$$B_{\mu\ldots}(x_1) = b_2 \sum_{(2)}^{World} \left\{ \sum^{basis} \left[\sum_{(1)}^{object} \sum_{(2)}^{object} \check{B}_{\mu\ldots} \right] \right\}, \qquad (4.5.1)$$

где b_2 – некая нормирующая константа, возникающая при процедуре усреднения, $B_{\mu\ldots}(x_1)$ –собирательное обозначение вели-

чин с 4-мерными индексами. В качестве последних выступают компоненты 4-мерного метрического тензора $g_{\mu\nu}$ или векторного электромагнитного потенциала A_μ. Символом $\check{B}\mu\cdots$ обозначены компоненты прообраза соответствующих величин, получающихся в результате проведения второй процедуры (1+1+4-расщепления).

2. Прежде, чем переходить ко второй процедуре, выпишем исходные для ее проведения компоненты прообраза многомерной метрики, получаемые из (4.4.9) – (4.4.14) в результате проведения первой процедуры:

$$\check{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}(u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6); \tag{4.5.2}$$

$$\begin{aligned}\check{G}_{\mu 4} &= \frac{c_1}{4}\kappa_\mu(u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6) - \frac{1}{16}\exp(1)\exp(2)u'_{(2)\mu}u^5_{(2)}b_5 - \\ &- \frac{1}{16}\exp(1)u^5_{(2)}\sum_3 \exp(3)u'_{(3)\mu}u^5_{(3)};\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

$$\begin{aligned}\check{G}_{\mu 5} &= \frac{1}{32}\exp(1)\exp(2)u'_{(2)\mu}u^5_{(2)} + \\ &+ \frac{1}{16}\exp(1)\exp(2)u'_{(2)\mu}(2b_5 + b^0_3 u^5_{(2)}) + \\ &+ \frac{1}{16}\exp(1)\sum_3 \exp(3)u'_{(3)\mu}(2u^5_{(2)} + u^5_{(3)});\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

$$\begin{aligned}\check{G}_{44} &= \frac{c_1^2}{4}\kappa^\beta\kappa_\beta(u^5_{(2)}b_5 - u^6_{(2)}b_6) - \frac{c_1 b_5}{8}\exp(1)\exp(2)\kappa^\beta u'_{(2)\beta}u^5_{(2)} - \\ &- \frac{c_1}{8}\kappa^\beta\exp(1)u^5_{(2)}\sum_3 \exp(3)u'_{(3)\beta}u^5_{(3)};\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

$$\begin{aligned}\check{G}_{45} &= \frac{c_1}{32}\exp(1)\exp(2)\kappa^\beta u'_{(2)\beta}u^5_{(2)} + \\ &+ \frac{c_1}{16}\exp(1)\exp(2)\kappa^\beta u'_{(2)\beta}(2b_5 + b^0_3 u^5_{(2)}) + \\ &+ \frac{c_1}{16}\exp(1)\sum_3 \exp(3)\kappa^\beta u'_{(3)\beta}(2u^5_{(2)} + u^5_{(3)});\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

$$\check{G}_{55} = 0, \tag{4.5.7}$$

где константы b_5, b_6 соответствуют выражениям (4.4.15) и теперь имеют вид

$$b_5 = \tilde{b}\sum_3 u^5_{(3)}; \quad b_6 = \tilde{b}\sum_3 u^6_{(3)}. \tag{4.5.8}$$

Здесь $\tilde{b}$ – некоторый множитель. Суммирование производится по всем третьим частицам окружающего мира. С точностью до введенного множителя эти константы определяются числом фотонов (промежуточных бозонов) в мире. В приведенных формулах появилась новая константа b_3^0, с точностью до множителя равная числу частиц типа (3), по которым производится суммирование.

4.6 Алгебра методов 1+5- и 1+1+4-расщеплений

Исходя из изложенных соображений получена 6-мерная квадратичная форма вида

$$dI^2 = G_{MN} dx^M dx^N, \tag{4.6.1}$$

где G_{MN} – коэффициенты (компоненты прообраза 6-мерного метрического тензора), выписанные в (4.5.2) – (4.5.7). Здесь прописные латинские индексы пробегают значения: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Поскольку рассмотренная в этом параграфе методика имеет общий характер, здесь не будем писать значки над обозначением G. Не будем также конкретизировать значение dI^2.

Будем решать задачу отделения дополнительных дифференциалов dx^4 и dx^5 от остальных четырех с классическими индексами dx^μ. Сделаем это в два этапа, сначала отделив dx^4, а затем аналогичным образом выделим вторую размерность x^5.

I. **Алгебра метода 1+5-расщепления**.

1. Положим, что для выделяемой на первом этапе величины отличен от нуля соответствующий ей диагональный коэффициент. Согласно (4.5.5) это имеет место для $G_{44} \neq 0$. Явно выделим из (4.6.1) слагаемые с dx^4

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B + G_{44}(dx^4)^2 + 2G_{4A} dx^4 dx^A, \tag{4.6.2}$$

где индексы A и B пробегают значения: $0, 1, 2, 3, 5$. Добавим в правую часть (4.6.2) и вычтем слагаемые

$$\frac{G_{4A}G_{4B}}{G_{44}} dx^A dx^B,$$

чтобы выражения с dx^4 образовывали полный квадрат, то есть

$$G_{44}(dx^4)^2 + 2G_{4A} dx^4 dx^A + \frac{G_{4A}G_{4B}}{G_{44}} dx^A dx^B = \pm(\xi_M dx^M)^2 \equiv \pm d\xi^2, \tag{4.6.3}$$

где

$$\xi_M = \{\xi_A, \xi_4\} = \left\{\frac{G_{4A}}{\sqrt{\pm G_{44}}}, \sqrt{\pm G_{44}}\right\}. \tag{4.6.4}$$

Знаки $\pm$ выбираются в зависимости от знака коэффициента G_{44}. Тогда квадратичная форма (4.6.1) принимает 1+5-расщепленный вид

$$dI^2 = {}^5G_{MN}dx^M dx^N \pm d\xi^2, \tag{4.6.5}$$

где

$${}^5G_{MN} = G_{MN} - \frac{G_{4M}G_{4N}}{G_{44}} \tag{4.6.6}$$

– можно считать *компонентами прообраза 5-мерной метрики* после отделения дополнительной координаты x^4. Легко видеть, что несмотря на то, что формально индексы в ${}^5G_{MN}$ пробегают 6 значений, отличными от нуля будут только компоненты с индексами $0, 1, 2, 3, 5$.

2. Изложенное 1+5-расщепление 6-мерной квадратичной формы составляет основу алгебраической части так называемого *монадного метода*, используемого (в рамках иной размерности) в 4-мерной общей теории относительности для описания систем отсчета и в многомерных теориях Калуцы-Клейна для отделения дополнительных размерностей. Напомним некоторые сведения из алгебры монадного метода.

Из коэффициентов G_{MN}, рассматриваемых как ковариантные компоненты 6-мерного метрического тензора, по известному правилу можно образовать компоненты контравариантного "тензора"

$$G^{MN} = \frac{\text{алгебраическое дополнение} G_{MN}}{||G_{MN}||}, \tag{4.6.7}$$

где $||G_{MN}||$ – определитель матрицы из коэффициентов G_{MN}. Аналогичным образом можно образовать компоненты 5-мерного контравариантного "тензора" из ковариантных компонент ${}^5G_{AB}$, определенных в (4.6.6). Легко показать, что

$${}^5G^{AB} = G^{AB}. \tag{4.6.8}$$

Этими компонентами метрики можно поднимать индексы у соответствующих 6-мерных и 5-мерных величин. В частности, можно сопоставить контравариантные компоненты 6-мерному "вектору" ξ_M

$$\xi^N = G^{MN}\xi_M = \frac{G_4^N}{\sqrt{\pm G_{44}}}. \tag{4.6.9}$$

Легко видеть, что компоненты 6-мерных величин ξ^M и ${}^5G_{MN}$ удовлетворяют условиям ортонормированности, то есть

$$\xi_M\xi^M = \pm 1; \quad \xi^M{}^5G_{NM} = 0; \quad {}^5G_{MN}{}^5G^{MN} = 5. \qquad (4.6.10)$$

Эти условия и (4.6.5) составляют основу для интерпретации ξ^M как единичного "вектора" вдоль координатных линий x^4, а ${}^5G_{AB}$ – как компонент метрического "тензора" 5-мерного сечения, ортогонального "вектору" ξ^M (линиям x^5).

3. Можно формально определить группу допустимых координатных преобразований 6 координат

$$x'^M = x'^M(x^N). \qquad (4.6.11)$$

Строго говоря, только относительно таких координатных преобразований ранее определенные величины ξ_M, G_{MN} и ${}^5G_{MN}$ могут называться тензорами соответствующего ранга. Подчеркнем, что *в излагаемой здесь бинарной геометрофизике такие преобразования не определены*, и поэтому этот материал следует рассматривать лишь как расширение введенных здесь понятий до используемых в современных геометрических моделях типа теории Калуцы-Клейна.

Легко показать, что компоненты 5-мерных величин (4.6.6) и (4.6.8) являются 5-мерными тензорами относительно более узкой группы 5-мерных преобразований

$$x'^A = x'^A(x^B) \qquad (4.6.12)$$

и остаются инвариантами относительно произвольных допустимых преобразований координаты

$$x'^4 = x'^4(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5). \qquad (4.6.13)$$

Это соответствует свойствам метода хронометрических инвариантов в общей теории относительности (см. §7.7, а также более подробно в [9, 25]) и позволяет говорить о калибровке вектора ξ^M типа хронометрической в ОТО.

II. **Алгебра метода 1+1+4-расщепления**.

1. Аналогичным образом можно произвести повторную процедуру выделения второй координаты x^5. Для этого нужно точно также выделить в ${}^5G_{AB}dx^Adx^B$ слагаемые, содержащие dx^5, а затем добавить и вычесть комбинацию

$$\frac{{}^5G_{5A}{}^5G_{5B}}{{}^5G_{55}}.$$

В итоге получается новый 6-мерный вектор с ковариантными компонентами:

$$\lambda_M = \left\{ \frac{\pm(-G_{45}G_{\mu 4} + G_{44}G_{\mu 5})}{\sqrt{\pm G_{44}(G_{45}^2 - G_{44}G_{55})}}; \quad 0; \quad -\frac{\sqrt{G_{45}^2 - G_{55}G_{44}}}{\sqrt{\pm G_{44}}} \right\}. \tag{4.6.14}$$

Коэффициенты 6-мерной квадратичной формы (компоненты прообраза 6-мерной метрики) тогда представляются в виде

$$G_{MN} = g_{MN} - \xi_M \xi_N - \lambda_M \lambda_N, \tag{4.6.15}$$

где

$$g_{\mu\nu} = {}^5G_{\mu\nu} - \frac{{}^5G_{5\mu}{}^5G_{5\nu}}{{}^5G_{55}} =$$

$$= G_{\mu\nu} - \left[\frac{G_{\mu 4}G_{\nu 4}}{G_{44}} + \frac{(G_{\mu 4}G_{45} - G_{\mu 5}G_{44})(G_{\nu 4}G_{45} - G_{\nu 5}G_{44})}{G_{44}(G_{45}^2 - G_{44}G_{55})} \right] \tag{4.6.16}$$

имеет смысл прообраза компонент 4-мерного метрического тензора. Легко видеть, что отличными от нуля будут только компоненты с 4-мерными индексами. Здесь и в дальнейшем будем полагать, что квадратичная форма имеет сигнатуру $(+-----)$.

Изложенное составляет основу алгебры так называемого *диадного метода*, используемого в общей теории относительности и в многомерных теориях Калуцы-Клейна.

2. Опять по стандартным правилам можно формально определить компоненты контравариантных метрических "тензоров" G^{MN} и $g^{\mu\nu}$. Легко показать, что

$$g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}. \tag{4.6.17}$$

С их помощью можно определить контравариантные компоненты введенных векторов, которые имеют вид

$$\xi^M = \left\{ 0^\mu; \quad \frac{1}{\sqrt{-G_{44}}}; \quad 0 \right\};$$

$$\lambda^M = \left\{ 0^\mu; \quad \frac{G_{45}}{\sqrt{-G_{44}(G_{45}^2 - G_{44}G_{55})}}; \quad \frac{\sqrt{-G_{44}}}{\sqrt{(G_{45}^2 - G_{55}G_{44})}} \right\}. \tag{4.6.18}$$

Для введенных величин имеют место условия ортонормированности:

$$\begin{aligned} &\lambda_M\lambda^M = -1; \quad \xi_M\xi^M = -1; \quad g_{MN}g^{MN} = 4; \\ &\lambda_M\xi^M = 0; \quad \lambda_M g^{MN} = 0; \quad \xi_M g^{MN} = 0. \end{aligned} \tag{4.6.19}$$

3. Следует заметить, что введенные выше величины имеют тензорный характер только после введения группы допустимых координатных преобразований (4.6.11). После двух процедур расщепления из преобразований (4.6.11) естественным образом выделяется класс координатных преобразований

$$x'^4 = x'^4(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5); \tag{4.6.20}$$

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5); \tag{4.6.21}$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{4.6.22}$$

В частности, $g_{\mu\nu}$, определенное в (4.6.16), является тензором относительно последних преобразований (4.6.22) и инвариантно при преобразованиях (4.6.20) и (4.6.21).

Изложенные свойства процедуры 1+1+4-расщепления позволяют говорить о ее соответствии диадному методу в калибровке типа дважды хронометрической в общей теории относительности.

4. Заметим, что в 6-мерной геометрической модели типа теории Калуцы-Клейна, рассматриваемой в главе 8, оказывается необходимым использовать *условия цилиндричности по дополнительным координатам* x^4 и x^5. Они сужают класс допустимых координатных преобразований (4.6.20) – (4.6.21) до

$$x'^4 = x^4 + f_4(x^0, x^1, x^2, x^3); \tag{4.6.23}$$

$$x'^5 = x^5 + f_5(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{4.6.24}$$

В теориях такого типа, где исходят из многомерного координатного многообразия с заранее определенными координатными преобразованиями вида (4.6.12), остро встает проблема обоснования условий цилиндричности. В рамках же рассматриваемой здесь теории вообще не определены преобразования, перемешивающие 4-мерные и дополнительные координаты, так что проблем такого рода не возникает.

5. Применим изложенный выше метод 1+1+4-расщепления для случая 6-мерной квадратичной формы с коэффициентами

(4.5.2) – (4.5.7). Учтем тот факт, что компонента $\check{G}_{55}$ обращается в нуль. Это упрощает записанные выше формулы:

$$\check{g}_{\mu\nu} = \check{G}_{\mu\nu} - 2\frac{\check{G}_{4\mu}\check{G}_{4\nu}}{\check{G}_{44}} - \frac{\check{G}_{44}}{\check{G}_{45}^2}\check{G}_{\mu 5}\check{G}_{\nu 5} +$$

$$+\frac{1}{\check{G}_{45}}(\check{G}_{\mu 4}\check{G}_{\nu 5} + \check{G}_{\mu 5}\check{G}_{\nu 4}); \qquad (4.6.25)$$

$$\check{\xi}_{\mu} = \frac{\check{G}_{\mu 4}}{\sqrt{-\check{G}_{44}}}; \qquad (4.6.26)$$

$$\check{\lambda}_{\mu} = \frac{\check{G}_{\mu 4}}{\sqrt{-\check{G}_{44}}} + \sqrt{-\check{G}_{44}}\frac{\check{G}_{\mu 5}}{\check{G}_{45}}. \qquad (4.6.27)$$

4.7 Прообразы 4-мерной метрики и электромагнитного потенциала

1. В результате процедуры 1+1+4-расщепления и подстановки компонент 6-мерной метрики (4.5.2) – (4.5.7) в (4.6.25) получаем элементарную 4-мерную метрику, которую можно представить в виде двух частей:

$$\check{g}_{\mu\nu} = \check{g}_{\mu\nu}(0) + \check{g}_{\mu\nu}(x). \qquad (4.7.1)$$

Здесь $\check{g}_{\mu\nu}(0)$ та часть метрики, которая не содержит exp(1). Как будет показано ниже, она представляет собой некий вклад в 4-метрику, не зависящий от положения рассматриваемой частицы. Не выписывая его явно, можно, исходя из симметрии окружающего мира, положить, что он вместе с вкладом $G_{\mu\nu}$ представляется в виде

$$\check{g}_{\mu\nu}(0) = \left[\frac{1}{4}u_2^5 b_5 + \check{b}_1\right]\eta_{\mu\nu} \equiv C_0\eta_{\mu\nu}, \qquad (4.7.2)$$

где $\check{b}_1$ и C_0- некоторые постоянные. Коэффициент C_0 при $\eta_{\mu\nu}$ можно понимать как некий конформный фактор при 4-мерной метрике $\check{g}_{\mu\nu}$.

2. Выражение $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ в (4.7.1), содержащее экспоненты, определяет зависимость 4-мерной метрики от координат, т.е. именно *это слагаемое описывает гравитационное взаимодействие.*

Легко показать, что подстановка выражений (4.5.2) – (4.5.7) в комбинацию

$$\frac{\check{G}_{44}}{\check{G}_{45}^2}\check{G}_{5\mu}\check{G}_{5\nu} - \frac{1}{\check{G}_{45}}(\check{G}_{4\mu}\check{G}_{5\nu} + \check{G}_{5\mu}\check{G}_{4\nu})$$

не дает вкладов, содержащих $\exp(1)$, т.е. эти слагаемые не входят в $\check{g}_{\mu\nu}(x)$. Следовательно, вклады в $\check{g}_{\mu\nu}(x)$ обусловлены лишь вторым слагаемым в (4.6.25) справа:

$$-2\frac{\check{G}_{4\mu}\check{G}_{4\nu}}{\check{G}_{44}} \to \check{g}_{\mu\nu}(x). \tag{4.7.3}$$

3. Произведем конформное преобразование элементарной 4-мерной метрики

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{C_0}\check{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{C_0}\check{g}_{\mu\nu}(x). \tag{4.7.4}$$

Подставляя сюда соответствующие выражения, находим

$$\begin{gathered}\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \\ +\frac{1}{4}\left[4c_1\kappa_\mu - \exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\mu} + \sum_3 \exp(3)u'_{(3)\mu}\frac{u^5_{(3)}}{b_5}\right)\right] \times \\ \times\left[4c_1\kappa_\nu - \exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\nu} + \sum_3 \exp(3)u'_{(3)\nu}\frac{u^5_{(3)}}{b_5}\right)\right] \times \\ \times\left[2c_1^2\kappa^\beta\kappa_\beta - c_1\exp(1)\kappa^\beta\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \exp(3)u'_{(3)\beta}\frac{u^5_{(3)}}{b_5}\right)\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{4.7.5}$$

4. Исходя из изложенного, делаем вывод, что в образовании 4-мерной метрики ключевую роль играют компоненты прообраза 6-мерной метрики $\check{G}_{44}$ и $\check{G}_{4\mu}$. Представляет интерес проследить происхождение этих компонент. Сделаем это в виде таблицы.

$\check{G}_{MN}$	4+4+0	4+3+1	4+2+2	4+1+3
$\check{G}_{\mu\nu}$	0	0	$\sim u^5_{(2)}b_5$	0
$\check{G}_{4\mu}$	0	$\sim u'_{(2)\mu}u^5_{(2)}b_5$	не сущ.	$\sim\sum_3 u'_{(3)\mu}u^5_{(2)}u^5_{(3)}$
$\check{G}_{5\mu}$	не сущ.	не сущ.	не сущ.	не сущ.
$\check{G}_{44}$	0	не сущ.	$\sim\kappa^\beta\kappa_\beta u^5_{(2)}b_5$	не сущ.
$\check{G}_{45}$	не сущ.	не сущ.	не сущ.	не сущ.

Здесь символом "не сущ." (не существенно) обозначены компоненты, отличные от нуля, но не существенные для образования 4-мерной метрики (при $\tilde{b} = 1$ в (4.5.8)). Из таблицы следует, что метрика $\hat{g}_{\mu\nu}$ возникает, главным образом, из вкладов базовых 4×4-отношений видов 4+2+2, 4+3+1, 4+1+3. При этом отношение 4+2+2 ответственно за образование "фоновой" плоской метрики и за возникновение в знаменателе слагаемого $\kappa^\beta\kappa_\beta$). Отношение 4+3+1 ответственно за основное приближение гравитационного взаимодействия. И, наконец, отношение 4+1+3 приводит к появлению слагаемых, описывающих мировой "поглотитель" (см. главу 6).

Таким образом, *возникновение прообраза 4-мерной (римановой) метрики обусловлено вкладами вторых и третьих частиц в парное отношение-смещение избранной (первой) частицы*, имеющее *многоточечный характер*.

5. Перейдем к рассмотрению 4-мерных компонент двух векторов диады $\check{\xi}_\mu$ и $\check{\lambda}_\mu$. Забегая вперед, отметим, что при их физической интерпретации возникает неопределенность в выборе конформного фактора при этих величинах. Опираясь на опыт исследований многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна постулируем, что *в качестве физически интерпретируемых величин будем выбирать комбинации*: $\xi_\mu/\sqrt{\pm\check{G}_{44}}$ и $\lambda_\mu/\sqrt{-\check{G}_{44}}$. Подставляя в них выражения (4.5.2) – (4.5.7), находим

$$\frac{\xi_\mu}{\sqrt{-\check{G}_{44}}} =$$

$$= -\frac{4c_1\kappa_\mu - \exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\mu} + \sum \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\mu}\right)}{2\left[2c_1^2\kappa^\beta\kappa_\beta - \exp(1)\kappa_\beta\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right)\right]}; \tag{4.7.6}$$

$$\frac{\lambda_\mu}{\sqrt{-\check{G}_{44}}} =$$

$$= -\frac{4c_1\kappa_\mu - \exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\mu} + \sum_3 \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\mu}\right)}{2\left[2c_1^2\kappa^\beta\kappa_\beta - \exp(1)\kappa^\beta\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right)\right]} +$$

$$+\frac{\exp(2)u'_{(2)\mu}f(u^5_{(2)})+2\sum_3\exp(3)u'_{(3)\mu}(2u^5_{(2)}+u^5_{(3)})}{c_1\kappa^\beta\left[\exp(2)u'_{(2)\beta}f(u^5_{(2)})+2\sum_3\exp(3)u'_{(3)\beta}(2u^5_{(2)}+u^5_{(3)})\right]},\tag{4.7.7}$$

где

$$f(u^5_{(2)})=u^5_{(2)}(1+2b^0_3)+4b_5.$$

6. Представим введенные величины, как и в случае (4.7.1), в виде двух составных частей

$$\frac{\xi_\mu}{\sqrt{-\check{G}_{44}}}=\check{\xi}_\mu(0)+\check{\xi}_\mu(x);\tag{4.7.8}$$

$$\frac{\lambda_\mu}{\sqrt{-\check{G}_{44}}}=\check{\lambda}_\mu(0)+\check{\lambda}_\mu(x),\tag{4.7.9}$$

где выражения справа с аргументом (x) содержат (в числителе) $\exp(1)\exp(2)$ и, следовательно, приводят к зависящим от координат величинам, а выражения с аргументом (0) – не содержат экспонент, т.е. не зависят от положения частицы. Поскольку физически наблюдаемыми являются не сами векторные потенциалы, а электромагнитные напряженности, то выражения с аргументом (0) можно исключить из рассмотрения. Но тогда оказывается, что обе введенные в (4.7.8) и (4.7.9) комбинации имеют одинаковые составляющие с аргументом (x). Это позволяет интерпретировать как *прообраз электромагнитного векторного потенциала* величину

$$\begin{pmatrix}\check{\xi}_\mu(x)\\ \check{\lambda}_\mu(x)\end{pmatrix}\to\check{A}_\mu=$$

$$=b_3\frac{\exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\mu}+\sum_3\frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\mu}\right)}{2\left[2c_1^2\kappa^\beta\kappa_\beta-c_1\exp(1)\kappa^\beta\left(\exp(2)u'_{(2)\beta}+\sum_3\frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right)\right]},\tag{4.7.10}$$

где b_3 - некий размерный коэффициент.

Легко видеть, что две векторные величины (4.7.8) и (4.7.9), полученные из понятий бинарной геометрофизики, можно *физически интерпретировать как две линейные комбинации из 4-мерного тока 2-й частицы (прообраза электромагнитного потенциала, создаваемого второй частицей в месте нахождения первой) и 4-мерного импульса передачи от одной частицы к другой.*

4.8 Основные выводы

Подчеркнем основные принципиальные моменты изложенного в этой главе материала.

1. В этой главе сделан важный шаг на пути к получению характеристик гравитационного и электромагнитного взаимодействий (метрики $g_{\mu\nu}$ искривленного 4-мерного пространства-времени и электромагнитного потенциала A_μ). Принципиально важно, что эти характеристики получаются из 6-мерной квадратичной формы – прообраза метрики 6-мерного многообразия – *в духе многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна.*

2. Пока получены не сами компоненты 4-мерной метрики и векторного потенциала, а лишь их прообразы. Пока еще не было введено координатное пространство, и эти величины не являются функциями координат в привычном виде. Вместо этого в величины входят характерные комбинации вида

$$\frac{\exp(1)\exp(2)}{\kappa_\nu\kappa^\nu+\epsilon}=\frac{\exp\left[\pm\frac{i}{\hbar}k_\mu(x^\mu_{(1)}\pm x^\mu_{(2)})\right]}{\kappa_\nu\kappa^\nu+\epsilon}, \tag{4.8.1}$$

где символом ϵ обозначена сумма из вкладов третьих частиц, содержащаяся в знаменателях (4.7.5) и (4.7.10). Легко видеть, что такие комбинации представляют собой подинтегральные выражения пропагаторов (2.5.4) для электромагнитного и гравитационного взаимодействий *в духе теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана.* Переход от таких выражений к общепринятым потенциалам рассмотрен в следующей главе, посвященной описанию процедуры суммирования по элементарным базам, составляющим макроприбор.

3. Следует обратить внимание на первопричину возникновения искривленности пространства-времени в модели, основанной на теории систем отношений. Как уже неоднократно подчеркивалось здесь и в первой части книги [17], этот подход соответствует теории линейных пространств. Непосредственно в ней возникают аналоги (унарных) геометрий (пространств) с симметриями. Из изложенного видно, что причина искривленности состоит в выделении отдельного объекта и в суммировании базовых 4×4-отношений с участием выделенного объекта. *Искривленность проявляется как неодинаковость сумм вкладов окружающих частиц в смещения различных объектов.*

4. Принципиально важным является вывод о вторичном характере прообраза 4-мерной метрики, возникающей из добавления к метрике Минковского квадратичных векторных вкладов,

строго говоря, соответствующих электромагнитным взаимодействиям. Другими словами можно сказать: *гравитационное взаимодействие имеет не самостоятельный, а производный от электромагнетизма характер.*

5. В прообразе 4-мерной метрики (4.7.5) дополнительное к метрике Минковского слагаемое пропорционально квадрату 4-скорости второй частицы и в основном приближении *не зависит от значений вкладов из сумм дополнительных параметров третьих частиц.* После конформного преобразования прообраза метрики эти вклады в числителе и в знаменателе сокращаются. Для получения прообраза метрики достаточно лишь самого факта существования (возбужденных) окружающих частиц.

6. Своеобразным моментом развиваемой здесь теории является *возникновение двух векторных величин* ξ_μ и λ_μ, определяемых 4-мерными скоростями других частиц. Эти прообразы векторных полей имеют общий источник. В концепции близкодействия векторное поле, возникающее из λ_μ, интерпретируется как электромагнитное поле. Аналогичным образом следует интерпретировать и ξ_μ. Однако взаимодействие с ним осуществляется через иной "заряд". Это означает существование дополнительного канала взаимодействия частиц с электромагнитным полем.

7. На возникновение многомерной метрики и физических взаимодействий можно взглянуть под углом зрения *многоточечной геометрии.* Действительно, оказывается, что отношение между двумя положениями (событиями) одной частицы зависит от положений других частиц (событий с другими частицами).

8. Еще раз следует подчеркнуть определяющую роль учета окружающих частиц. Изложенное здесь соответствует интуиции Эйнштейна, возведшего идеи своего великого предшественника об обусловленности локальных понятий всей материей окружающего мира в ранг *принципа Маха*, именно в связи с обсуждением метрики искривленного 4-мерного пространства-времени.

Глава 5

Макроприбор и макроскопическая природа пространства-времени

В этой главе сделаны два следующих шага от понятий элементарной бинарной геометрофизики к макрофизике.

Первый из них имеет важное принципиальное значение для всей развиваемой здесь программы. Он состоит в переходе от элементарного набора эталонных элементов к достаточно сложному ансамблю из таких базисов, образующих макроприбор. Показано, что только относительно обобщенного базиса – макроприбора возможно введение таких классических понятий как расстояние, интервал, промежуток времени и другие. Этот шаг закладывает основы новой интерпретации квантовой механики. В этой книге на полукачественном уровне изложены самые необходимые для дальнейшего сведения о ее сути с точки зрения данной (девятой) парадигмы[1].

Второй шаг состоит в переходе от отдельной элементарной частицы к макрообъекту. Этот вопрос кратко рассмотрен в последних трех параграфах этой главы.

[1]В Предисловии было отмечено, что первая и данная вторая части книги явились развитием содержания рукописи, намеченной к изданию в 1992 году. Из первоначальной рукописи изъят практически весь материал по квантовой теории для отдельного издания.

5.1 Принцип усреднения по ансамблю элементарных базисов

1. В §1.2 было обращено внимание на реляционный характер теорий. Фактически они определяются двумя факторами, что отражено во введенном там для них обозначении $R_a(b)$. Напомним, параметр a характеризует вид базовой системы (системы отсчета или системы отношений), относительно которой описывается система b. В главах 3 и 4 рассматривались простейшие системы b типа μ (элементарные частицы – лептоны) относительно простейших элементарных базисов типа μ, фактически представляющих собой такие же элементарные частицы. Это означало, что обсуждение проводилось в рамках теории вида $R_\mu(\mu)$, изображенной в верхней части блок-схемы рисунка 1.1. Общепринятые физические теории $R_m(b)$ расположены в нижней части блок-схемы. Напомним, что символ m означает классический макроприбор, грубо говоря, состоящий из огромного количества элементарных частиц. Между этими двумя видами теорий имеется глубокая пропасть, которую следует преодолеть. Необходимо описать переход от понятий элементарной бинарной геометрофизики (в рамках БСКО ранга (4,4)) к общепринятым теориям. В бинарной геометрофизике это осуществляется на основе *принципа усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор.*

Рассматриваемые в этой главе характерные подмножества элементов и суть процедуры усреднения пояснены с помощью рисунка 5.1, обобщающего рисунки 3.1 и 4.1.

2. Следует подчеркнуть, что рассмотренные выше элементарные понятия (параметры элементов) в рамках БСКО ранга (4,4) ни в коей мере не могут претендовать на статус наблюдамых понятий в обычном их понимании. Из них строились некие комбинации, представляющие собой лишь прообразы ряда классических величин. Невозможно поставить эксперимент с целью определения отношений какой-либо элементарной частицы относительно конкретной элементарной базы, то есть относительно выделенного электрона.

В связи с этим следует сравнить взгляды Э.Маха с развиваемыми здесь положениями. Они совпадают в главном — в использовании реляционного подхода к физике, в выборе отношения как ключевого понятия теории, но различаются в понимании характера наблюдаемости первичных отношений. По Маху теория должна опираться только на непосредственно наблюдаемые понятия, тогда как в бинарной геометрофизике первичные отношения таковыми не являются. Наблюдаемыми становятся лишь

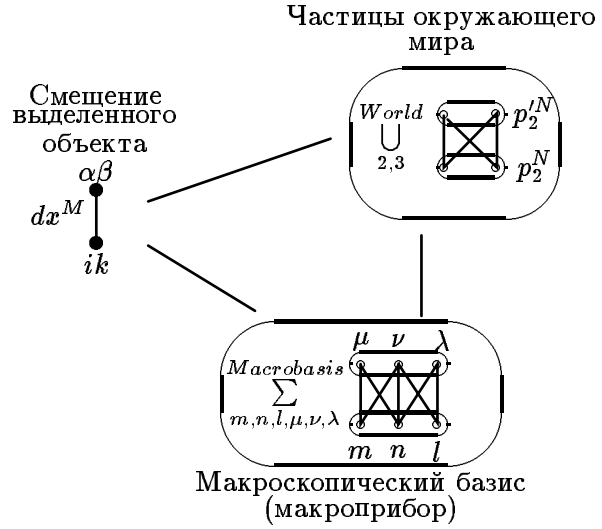


Рис. 5.1: Усреднение парного отношения выделенного объекта по ансамблю базисных элементов, составляющих макроприбор

производные от них понятия после перехода к макрофизике[2].

3. Еще более бессмысленно полагать, что можно знать параметры элементов (элементарной частицы) относительно всех элементарных частиц (элементарных базисов), составляющих макроприбор. Данную ситуацию можно сопоставить с имеющей место в термодинамике, когда рассматривается термодинамическая система из огромного числа молекул. Каждая молекула обладает своими компонентами импульса и внутренними степенями свободы, однако безнадежно пытаться описать всю систему через значения импульсов и моментов всех отдельных моле-

[2] Здесь уместно привести высказывание Р.Фейнмана по близкому вопросу: "Хочу остановиться теперь коротко на идее Гейзенберга, согласно которой не нужно говорить о том, чего все равно нельзя измерить. Дело в том, что об этом толкуют многие, по-настоящему не понимая смысла этого утверждения. Его можно интерпретировать следующим образом: ваши теоретические построения или открытия должны быть такими, чтобы выводы из них можно было сравнивать с результатами эксперимента, то есть чтобы из них не получалось, что «один тук равняется трем нукам», причем никто не знает, что такое эти самые тук и нук. Ясно, что так дело не пойдет. Но если теоретические результаты можно сравнить с экспериментом, то это все, что нам требовалось. Это вовсе не значит, что ваши туки и нуки не могут появляться в первоначальной гипотезе. Вы можете впихнуть в вашу гипотезу сколько угодно хлама при условии, что ее следствия можно будет сравнить с результатами экспериментов. А это не всем до конца понятно"[76, с.180]

кул. Вместо этого термодинамическая система характеризуется специальными понятиями, такими как давление, объем, температура. Точно так же в общепринятых теориях на самом деле объекты характеризуются некими интегральными понятиями, полученными своеобразным усреднением их прообразов по всем элементарным базисам, составляющим огромный ансамбль – классический макроприбор. В таком подходе импульсы и координаты объектов имеют характер термодинамических понятий типа давления и температуры[3].

4. Нам представляется, что в данном подходе необходимо развить особый вид *бинарной геометрофизической статистики*, обобщающей известные ныне классическую и квантовую статистики, но имеющей дело непосредственно с понятиями бинарной геометрофизики. В задачу этой части книги это не входит. Здесь преследуется более скромная цель – показать как конкретно в результате процедуры усреднения по ансамблю элементарных базисов из понятий БСКО ранга (4,4) появляются понятия классического пространства-времени и характеристики физических взаимодействий.

5.2 Суть перехода к координатному пространству

1. Напомним, что массивная частица характеризуется 4-компонентным столбцом Ψ, который (для свободной частицы) согласно (3.2.1), (3.5.1) и (3.5.5) можно представить в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tilde{i}^1 \\ \tilde{i}^2 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \qquad (5.2.1)$$

Здесь компоненты последнего столбца характеризуют 4-скорость частицы u^μ и ее спиновые свойства, а экспоненциальный множитель перед столбцом, как уже отмечалось, можно трактовать

[3]В нашей работе [8] была предпринята попытка с помощью статистики из фазовых вкладов вывести понятие классического расстояния. Фактически делалась попытка прийти к понятиям расстояния, опираясь лишь на понятия теории БСКО ранга (2,2). При этом возникали трудности в выборе представления циклической группы. Подобные трудности устраняются при рассмотрении композиции БСКО рангов (2,2) и (3,3), когда БСКО ранга (3,3) задает представление, в котором строится статистика.

как проявление БСКО ранга (2,2), которая декларировалась ответственной за координатное представление. В этой главе сосредоточим внимание именно на экспоненциальном слагаемом и перейдем от деклараций к показу того, как конкретно получается классическое понятие координаты. Основная задача состоит в том, чтобы из неархимедовых (компактифицированных) величин (из фаз экспоненты) получить некомпактифицированные координаты, для которых имеет место аксиома Архимеда с сопутствующим свойством больше-меньше.

Там, где не возникает особой надобности, будем абстрагироваться от компонент столбца и будем писать

$$\Psi = \exp(i\varphi). \tag{5.2.2}$$

2. Показатель экспоненциального фактора было предложено трактовать как прообраз физического действия, и согласно (3.3.3) и (3.3.6) он представлялся в виде

$$\varphi = \frac{S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} p_\mu x^\mu, \tag{5.2.3}$$

где компоненты p_μ (с точностью до коэффициента) строились из параметров правого столбца в (5.2.1), а x^μ имело смысл лишь *некоторого коэффициента* при таком представлении показателя экспоненты.

Заметим, что в предыдущих формулах (1.4.7), (3.2.10) и в других из "внешних" параметров строились компоненты 4-скорости u_μ, однако ничего не изменится, если 4-скорость умножить на некоторый постоянный множитель mc, соответствующий знакомым понятиям, и далее везде говорить о компонентах прообраза 4-мерного импульса[4] $p_\mu \equiv mcu_\mu$. Тогда в (5.2.3) действие S, p_μ и x^μ имеют привычные размерности, а размерную константу $\hbar$ можно считать постоянной Планка.

3. Очевидно, что в (5.2.3) коэффициенты x^μ определены из более первичных величин S и p_μ неоднозначно по нескольким причинам. Одной из них является 4-мерность этого выражения. Для упрощения рассуждений о характере решения основной задачи на время отвлечемся от 4-мерности прообразов импульса и координат и положим

$$S = px. \tag{5.2.4}$$

4. Другой причиной неоднозначности x является то, что показатель экспоненты определен с точностью до аддитивного слагаемого $2\pi n$, где n произвольное целое число, то есть прообраз

[4] Заметим, что в данной модели пока речь идет только об одном сорте массивных частиц.

действия S может принимать значения:

$$S = S_0 + nh, \tag{5.2.5}$$

где $S_0 < 2\pi$ – главное значение прообраза действия. Следовательно, коэффициент x в (5.2.4) может иметь значения:

$$x = \frac{S_0}{p} + \frac{h}{p}n. \tag{5.2.6}$$

Это общее свойство для координат компактифицированных размерностей, широко известное в теориях Калуцы и Клейна.

Дальнейшие рассуждения будем пояснять с помощью графиков, изображенных на рисунке 5.2. На первом таком графике (а) на горизонтальной оси, во-первых, обозначены периоды $(h/p)n$ при разных n и, во-вторых, указаны точки, соответствующие значениям x согласно формуле (5.2.6).

5. Пока речь шла о понятиях относительно одного элементарного базиса. Перейдем к *ансамблю элементарных базисов, составляющих макроприбор.* Выделим из этого ансамбля подмножество элементарных базисов, относительно которых рассматриваемая частица харктеризуется одним и тем же значением p. Согласно данной выше классификации элементарных базисов это подмножество образует одну и ту же систему отношений. Однако в общем случае в таких базисах данная частица может характеризоваться разными значениями фаз φ, то есть разными значениями прообраза действия S. Можно говорить о некотором распределении главных значений S_0 на интервале от нуля до 2π. Поскольку подмножество элементарных базисов, принадлежащих данной системе отношений велико, естественно ввести плотность распределения $\tilde{\rho}(S_0)$. Очевидно, что это распределение будет повторяться на каждом другом таком интервале.

В самом общем случае такое распределение может быть каким угодно, однако есть основания выделить случай, когда имеет место однородное распределение. На графике (б) рисунка 5.2 введена еще вертикальная ось, характеризующая плотность распределения, и в виде линии, параллельной оси $\vec{x}$ (лентой шириной $\tilde{\rho}(S_0)$), изображено такое однородное распределение.

6. На графике (в) рисунка 5.2 введено *объемное изображение ленты, учитывающее фазы* в соответствующих точках x. Значение фазы определяется углом проекции перпендикулярного к линии x отрезка на плоскость, ортогональную этой линии. Получилась винтовая лента шириной $\tilde{\rho}(S_0) \equiv \tilde{\rho}(p)$, обвивающая ось $\vec{x}$ с периодом h/p.

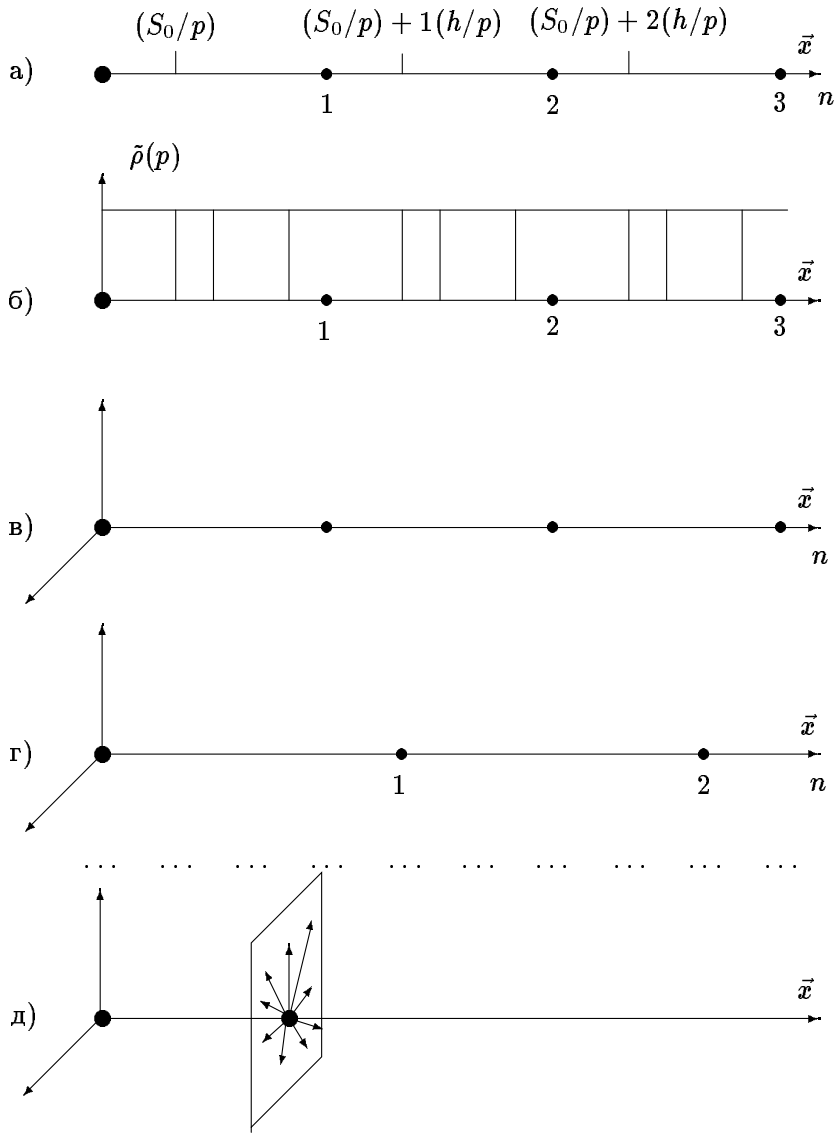


Рис. 5.2: Переход от компактифицированных фаз к некомпактифицированным классическим координатам

7. Точно такие же рассуждения можно провести для подмножества элементарных базисов с любым другим значением прообраза импульса $p_{(2)}$. В итоге получится другая винтовая лента какой-то иной ширины $\tilde{\rho}(p_{(2)})$ и обвивающая ось $\vec{x}$ с иным периодом $h/p_{(2)}$. Одна из таких винтовых лент изображена на графике (г) рисунка 5.2. Многоточием отмечены все другие винтовые ленты, соответствующие импульсам $p_{(3)}$, $p_{(4)}$, $\cdots$.

8. Далее нужно просуммировать вклады всех таких винтовых лент во всех возможных точках оси $\vec{x}$. Это делается по правилам сложения комплексных чисел с длинами $\tilde{\rho}(p)$ и фазами $\varphi(p,x)$. На графике (д) рисунка 5.2 в символическом виде изображено наложение винтовых лент и показано сечение, соответствующее произвольной точке x на оси. В итоге каждой точке x оказывается сопоставленным некоторое комплексное число

$$\Psi(x) = \sum_{p}^{Macrobasis} \tilde{\rho}(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p x\right]. \tag{5.2.7}$$

Учитывая, что значения p заполняют некоторую непрерывную область, естественно вести некоторую плотность распределения "плотностей" $\rho(p)$ и вместо суммирования в (5.2.7) произвести интегрирование по p. В итоге будем иметь

$$\Psi(x) = \int \rho(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p x\right] dp, \tag{5.2.8}$$

что соответствует известному преобразованию Фурье величины $\rho(p) \equiv \Psi(p)$ из импульсного в координатное пространство. Оно широко применяется в общепринятой формулировке квантовой теории, излагаемой в рамках заранее заданного пространства-времени. В данном случае эта процедура проведена в обратном направлении и продемонстрирован ее физический смысл.

9. Следует заметить, что в общем случае функция $\rho(p)$ в (5.2.8) существенно зависит от определения макроприбора, от того, какие элементарные базисы (частицы) в него входят. Из самых общих соображений ясно, что результаты могут быть различны для случая макроприбора – плазмы или макроприбора – твердого тела. Имеется глубокая внутренняя связь между образованными таким образом классическими пространственно-временными представлениями и структурой находящихся в нем твердых тел (связанных объектов). В этой части книги данный вопрос не рассматривается. Для дальнейшего достаточно лишь понимание смысла используемых в теории понятий.

10. Полученную комплексную величину $\Psi(x)$ следует интерпретировать как *амплитуду вероятности пребывания частицы в соответствующей точке классического пространства.* В соответствии с общепринятыми правилами в квантовой механике плотность вероятности пребывания частицы в окрестности точки x определяется следующим образом

$$W(x) = \frac{1}{C_N}\Psi^*(x)\Psi(x), \tag{5.2.9}$$

где C_N – нормирующий множитель. В этом определении фазы сокращаются, и плотность вероятности оказывается пропорциональной квадрату модуля результирующего комплексного числа.

11. В определении (5.2.9) обычно подразумевается, что

$$C_N = \int \Psi^*(x)\Psi(x)dx < \infty, \tag{5.2.10}$$

то есть интеграл сходится. Это отражает общепринятое представление, согласно которому рассматриваемая частица где-то находится в априорном пространстве-времени. Однако в данном подходе сходимость подобного интеграла ниоткуда не следует. Более того, для урезанного значения, например, для конечного числа импульсов оно расходится. Это обстоятельство вызывает ряд трудностей в квантовой механике. Здесь же по своему определению так введенная плотность вероятности имеет смысл только для сравнения вероятностей пребывания частиц в эффективно введенном координатном пространстве-времени.

5.3 Новая интерпретация квантовой механики

Изложенное выше по-существу представляет собой новую интепретацию квантовой механики (теории), существенно отличающуюся от общепринятой копенгагенской. Перечислим основные характерные черты и отличия данной интерпретации.

1. Общепринятая квантовая механика строится в рамках заранее заданного классического пространства-времени, тогда как в нашем подходе его существование не предполагается, – классические пространственно-временные отношения строятся параллельно с формированием квантовомеханических закономерностей. Отсюда и существенное различие интерпретаций. В стандартном изложении квантовая механика практически не связана с геометрией (теорией пространства-времени). Поля микрочастиц вкладываются в пространство-время и констатируется

факт, что классические геометрические представления неприменимы к отдельным микрочастицам. В интерпретации Н.Бора геометрические и динамические свойства материи имеют дополнительный друг к другу характер, что, в частности, отражено в квантовомеханическом принципе неопределенностей.

В современной трактовке квантовой теории фактически предлагается смириться с этим фактом и довольствоваться специфическими "правилами игры". В ней основным понятием (примитивом теории) предлагается считать состояние (микросистемы), которое по-существу является неким "черным ящиком", из которого по установленным правилам можно извлекать необходимую информацию. Такой подход неизбежен, если исходить из *априорного* классического пространства-времени. В нашем же подходе квантовая механика одновременно становится теорией более элементарных отношений в микромире, являющихся прообразом классических геометрических отношений. Другими словами, предлагаемая здесь интерпретация квантовой теории тесно связана с теорией пространства-времени (геометрией).

Следует заметить, что классики квантовой теории предчувствовали связь квантовой теории с обобщением геометрии в микромире. Так, Л.де Бройль писал о том, что понятия пространства-времени "нужно было бы заменить другими понятиями, играющими фундаментальную роль в микропроцессах". При этом он замечал: "Однако пока мы не добились успеха в распространении наших представлений в указанном направлении, мы должны стараться с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас все время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит" [4, с.187].

2. Одним из основных свойств квантовой теории является вероятностный характер описания поведения микрочастиц. Классические понятия, приписываемые микрообъектам, оказываются расплывчатыми, с некой вероятностью принимающими значения в некоторой области. С точки зрения предложенного подхода *одной из основных причин вероятностного характера квантовой теории является цикличность (компактифицированность) первичных отношений*, описываемая БСКО ранга (2,2). Такие отношения невозможно вложить в классическое пространство-время иначе, как размазав их по нему вероятностным образом.

Для первичных отношений нет классического понятия больше-меньше. В современной квантовой теории этот факт отражен широким использованием комплексных чисел, у которых нет свойства линейной упорядоченности, как это имеет место для вещественных чисел, которыми описывается классическое

пространство-время. Волновой характер частиц – это следствие вложения неархимедовых отношений в классическую геометрию, удовлетворяющую аксиоме Архимеда. В предложенной формулировке теории микромира (в новой интерпретации квантовой механики) вскрывается подоплека волновых свойств частиц. Более того, предложен путь перехода от первичных циклических понятий к классическим (некомпактифицированным) представлениям.

3. С точки зрения бинарной геометрофизики *другой причиной вероятностного характера является суммирование по ансамблю элементарных базисов, составляющих макроприбор.* Классические понятия, такие как промежутки времени, расстояния и некоторые другие возникают только в результате перехода к макроприбору. При этом любая выделенная частица обладает разными отношениями к другим частицам в различных элементарных базисах. После перехода к результирующим (суммарным) понятиям встает проблема их физической интерпретации. Например, как понимать размазанность значений импульсов частицы, имеющую место в данном подходе? С точки зрения классических представлений не остается ничего другого, как трактовать ее вероятностным образом.

В концептуальном плане в новой интерпретации квантовой механики роль макроприбора даже еще большая, нежели в общепринятой копенгагенской формулировке. Теперь оказывается, *макроприбор не только влияет на состояния частицы и результаты эксперимента, но и становится ответственным за сами классические пространственно-временные представления, можно сказать, за всю идею классического пространства-времени.*

Благодаря существованию макроприбора (макросистем) квантовая теория принимает статистический характер. Одновременно с этим появляется возможность построить статистическую интерпретацию самого классического пространства-времени.

4. В рамках предложенного здесь подхода *дается теоретическое обоснование феноменологически установленных понятий и процедур общепринятой квантовой механики* (теории). К ним следует отнести понятие комплексной амплитуды вероятности, построение плотности вероятности через квадратичную комбинацию из амплитуды вероятности и комплексно сопряженной ей величины, использование спиноров для описания основных видов элементарных частиц и некоторые другие.

Действительно, у всех, приступающих к изучению квантовой механики, возникает вопрос, почему в этой теории вместо первичного понятия вероятности (или плотности вероятности) нужно вводить комплексную амплитуду вероятности? В современ-

ной квантовой теории это постулат. Именно с него начинается изложение фейнмановской формулировки квантовой механики. Некоторые не могут смириться с таким постулатом и пытаются сформулировать теорию непосредственно на основе понятия плотности вероятности. В развиваемой здесь теории на подобные вопросы даются достаточно полные ответы.

5. Другой вопрос связан со спинорностью частиц. Справедливо считается, что спин является сугубо квантовым понятием. Почему основные виды элементарных частиц описываются спинорными волновыми функциями? В рамках стандартных представлений, казалось бы, ничто не мешает частицам быть скалярными или векторными ... В общепринятом подходе наиболее убедительный ответ состоит в том, что из спинорных величин можно построить скалярные и векторные величины, а наоборот нельзя. Спинор представляется самым простым объектом. В бинарной геометрофизике *спинорность частиц получает строгое логическое обоснование*, о чем говорилось в главах 1 и 3. Оказывается, спинорная частица несет в себе прообраз основных свойств классического пространства-времени, таких как размерность, сигнатура, метрические свойства и т.д.

6. Принципиально новым моментом предложенного подхода является необходимость совместного рассмотрения структуры макроприбора и рассматриваемых относительно него других объектов. В частности, это должно сказываться на определении связанных состояний частиц (атомов и молекул и т.д.).

5.4 Родственные интерпретации квантовой механики

В связи с новой интерпретацией квантовой механики напомним, что в настоящее время, кроме общепринятой копенгагенской, в литературе обсуждается ряд иных интерпретаций. Назовем несколько из них: неоклассические, статистическая, фейнмановская, многомировая, брюссельская, 5-оптика Румера и ряд других. Данная здесь интерпретация не совпадает ни с одной из названных, однако имеет сходные черты с несколькими из них, главным образом, со статистической, 5-оптикой Румера и фейнмановской. Обсудим этот вопрос более подробно.

1. **Статистическая интерпретация Д.И.Блохинцева.**

К излагаемому здесь подходу наиболее близкой является статистическая интерпретация квантовой механики, сформулированная в работах Д.И.Блохинцева. Он писал: “Объектом применения квантовой механики является квантовый ансамбль. По-

добно ансамблю Гиббса, квантовый ансамбль образован неограниченным повторением ситуаций, состоящих из определенной макроскопической обстановки M и погруженной в эту обстановку микроскопической системы μ"[2, с.16]. "Оказывается, что существует целая симфония новых статистических закономерностей, управляющих движением микрочастиц и в том случае, когда макроскопические тела, диктующие условия движения микрочастицам, находятся при температуре абсолютного нуля. Эта симфония и есть квантовая механика. Квантовая механика изучает законы движения микрочастиц в квантовом ансамбле"[2, с.28].

Д.И.Блохинцев писал о неком ансамбле, создаваемом макроскопическим объектом, однако в его подходе этот ансамбль имел скрытую, загадочную природу. В нашем подходе с позиции бинарной геометрофизики раскрывается смысл этого ансамбля – его составляет совокупность элементарных базисов (частиц), из которых образован макрообъект. Именно множество отношений в различных элементарных базисах образует то, что Блохинцев называл "неограниченным повторением ситуаций".

2. **5-Оптика Ю.Б.Румера**

Этот подход зародился в рамках 5-мерной теории Калуцы и Клейна в конце 20-х – начале 30-х годов. Особое значение имела известная работа А.Эйнштейна и П.Бергмана [93], в которой обсуждался вопрос о возможной причине ненаблюдаемости 5-й координаты. Была высказана мысль, что пятое измерение замкнуто с некоторым элементарным периодом b (компактифицировано). Это соответствует тому, что в развернутом пятом измерении все расстояния, отличающиеся на величину nb, являются склеенными друг с другом, т.е. неразличимыми. В этой работе не было указано конкретной связи компактификации с теми или другими физическими обстоятельствами.

Впоследствии эта идея была использована в многомерных геометрических теориях. Замкнутость дополнительных измерений была связана с квантованностью электрического заряда. В ряде работ был поставлен вопрос о причинах такой компактификации многомерного пространства-времени по дополнительным (к классическим) измерениям. Задача ставилась так: полагалось, что нормальным для всех размерностей является некомпактифицированный (классический) характер, а компактифицированность должна находить свое объяснение. В данном подходе, в рамках бинарной геометрофизики, задача должна ставиться наоборот: нормальным состоянием является циклический характер отношений (компактифицированность), а классический характер четырех измерений должен быть выведен из более эле-

ментарных циклических отношений.

На упомянутую работу А.Эйнштейна и П.Бергмана обратил внимание Ю.Б.Румер, который предложил связать высказанную ими идею о цикличности (замкнутости) дополнительного измерения с волновым характером квантовой механики. Он писал: "Можно, однако, прийти к представлению о топологически замкнутом 5-мерном пространстве совершенно с "другого конца", независимо от попыток построения единой теории тяготения и электричества. Этот путь ведет к обнаружению возможности приписать пятой координате S физический смысл действия, ее периоду b численную величину постоянной Планка $\hbar$ и приводит к глубокому синтезу геометрических идей, заложенных в общей теории относительности, с идеями квантовой теории. Привычное в современной физике разделение на "макроскопику" и "микроскопику", связанное с величиной постоянной Планка $\hbar$, находит свое геометрическое отображение в понятиях "четырехмерия" и "пятимерия"" [59, с.8].

Однако в своих исследованиях Ю.Б.Румер столкнулся с рядом трудностей, о которых будет идти речь в главах 7 и 8.

3. Фейнмановская формулировка квантовой механики

Далее следует назвать фейнмановскую формулировку квантовой механики [75, 76, 62]. Известно, что эта формулировка, ныне называемая методом квантования путем континуального интегрирования, была предложена как обобщение на квантовый случай теории прямого межчастичного взаимодействия. Так, сам Р.Фейнман в своей основополагающей работе на эту тему писал:"Теорию электромагнетизма, развитую Уилером и Фейнманом, ... можно сформулировать в виде принципа наименьшего действия, содержащего только координаты частиц. Именно попытка проквантовать эту теорию, не обращаясь к представлению о поле, и привела автора к изложенной здесь формулировке квантовой механики"[75, с.202]. В этой формулировке для нас самое важное состоит в том, что в основу положены вклады вдоль траекторий, одинаковые по модулю единица и отличающиеся лишь значениями фаз: "Все траектории вносят вклад, одинаковый по абсолютной величине; фаза каждого вклада представляет собой (выраженное в единицах $\hbar$) классическое действие, то есть взятый вдоль данной траектории интеграл от функции Лагранжа по времени"[75, с.175].

Недостатком фейнмановского подхода явилось то, что в его подходе заранее постулировалось готовое классическое пространство-время, на фоне которого определялись и суммировались траектории.

Таким образом, можно утверждать, что предложенная здесь

интерпретация квантовой механики объединяет в себе и обобщает ряд черт, содержащихся в ряде предыдущих подходов к осмыслению сути квантовой теории.

5.5 Переход к макрообъекту

1. На полукачественном уровне обсудим принципиальную сторону перехода к макрообъекту

$$R_m(\mu) \Rightarrow R_m(m).$$

Для этого вернемся к выражениям вида (3.6.5) и к ряду последующих, входящих в базовое 4×4-отношение. В них содержатся экспоненциальные слагаемые вида (3.6.6), состоящие из произведений двух величин:

$$\exp\left[\pm\frac{i}{\hbar}\Delta S\right] \quad \text{и} \quad \exp\left[\pm\frac{i}{\hbar}k_\nu x^\nu\right].$$

В формулах главы 4 они обозначены символами exp(1), exp(2) или exp(3), в зависимости от номера частицы. В §4.8 основной упор сделан на экспоненты с импульсами обмена k_ν. Их роль отдельно рассмотрим в следующем параграфе. Здесь же обсудим экспоненты с изменением действия $\Delta S = p_\nu \Delta x^\nu$.

2. Прежде всего отметим, что смещение $\Delta x^\nu = x'^\nu - x^\nu$ следует понимать именно в том смысле, в каком в §5.2 была введена квазиклассическая координата x. В итоге проведения описанных процедур к каждой из компонент осуществляется переход от импульсного представления к координатному вида (5.2.3), только теперь вместо x будет стоять Δx^ν

$$\Psi(x'^\nu - x^\nu) \sim \int \Psi(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_\nu(x'^\nu - x^\nu)\right] \delta(p^\mu p_\mu - m^2c^2) d^4p, \tag{5.5.1}$$

где введена δ-функция, показывающая, что компоненты 4-мерного импульса связаны соотношением $p^\mu p_\mu = m^2c^2$.

3. В §3.6 уже отмечалось, что имеются экспоненциальные слагаемые с показателями двух знаков $\pm\Delta S$. Из них можно построить как симметричную, так и антисимметричную комбинации экспонент. Из соображений симметрии и ряда других следует оставить симметричную комбинацию

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta S\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\Delta S\right]. \tag{5.5.2}$$

Это позволяет расставить пределы интегрирования в (5.5.1) и записать

$$\Psi(x'^{\nu} - x^{\nu}) \sim \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_{\nu}(x'^{\nu} - x^{\nu})\right] \delta(p^{\mu}p_{\mu} - m^2c^2) d^4p, \tag{5.5.3}$$

где функция $\Psi(\Delta x^{\nu})$ является амплитудой вероятности распределения различных значений Δx^{ν}.

Согласно изложенному в §5.2, амплитуда вероятности отдельной частицы в общем случае отлична от нуля в широкой области значений x^{μ}, то есть она как бы размазана по введенному классическому пространству-времени.

4. Для получения классических геометрических отношений между физическими объектами (точнее, между событиями с ними) необходимо сделать следующий шаг – перейти от одной частицы к макрообъекту как некой системе из простейших частиц. Такой переход связан с усреднением (суммированием) большого числа отношений между частицами, составляющими макрообъект, и ансамблем элементарных базисов, составляющих макроприбор. Таким образом приходим к *третьему принципу суммирования* (после прообраза принципа Маха и принципа усреднения по элементарным базисам). Как и ранее проиллюстрируем содержание очередного этапа с помощью рисунка 5.3, обобщающего ранее приведенные рисунки 4.1 и 5.1.

5. Для такой ситуации, можно сказать, имеет место своеобразная статистика, приводящая для обобщенного $\Psi(x)$ в (5.5.3) к существенно отличным от нуля значениям в малой окрестности некоторого x_0^{μ}, соответствующего классическим координатам (малым смещениям) пробного макрообъекта. В терминах квантовой теории это означает квазиклассический переход, когда

$$W(x) \to \delta^4(x^{\mu} - x_0^{\mu}), \tag{5.5.4}$$

где x_0^{ν} – классическое значение координаты макрообъекта и

$$\delta^4(x^{\mu} - x_0^{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_{\mu}(x^{\mu} - x_0^{\mu})\right) d^4p \tag{5.5.5}$$

– 4-мерная δ-функция. Классическая геометрия описывает отношения именно между такими точками-событиями.

Таким образом, в результате данного перехода компоненты x^{μ} в показателях экспонент (3.3.3) или (5.2.3) существенно изме-

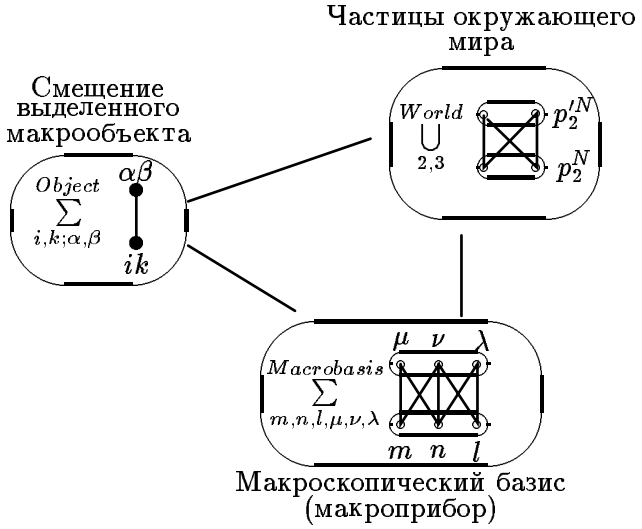


Рис. 5.3: Парное отношение выделенного макрообъекта относительно ансамбля базисных элементов, составляющих макроприбор

няют свой характер. Из неких неоднозначно определенных коэффициентов x^μ превращаются в практически фиксированные значения координат объектов (точек) в классическом пространстве-времени.

5.6 Пропагаторы взаимодействий

1. Все изложенное выше позволяет завершить обоснование в рамках бинарной геометрофизики ключевых положений реляционной макроскопической теории пространства-времени и взаимодействий. Напомним, что эти положения сформулированы на основе анализа фоккеровского принципа действия и были перечислены в §2.5. Часть из них уже была обоснована. Теперь очередь дошла до обоснования δ-функции, присутствующей в подинтегральном выражении принципа Фоккера. В том же §2.5 были перечислены факторы, составляющие понятие функции $\delta(s^2)$. Первый из названных там факторов – это импульс (или скорость) передачи k_μ ранее уже обоснован. Скорость и импульс передачи связаны друг с другом соотношением

$$k_\mu = mc\kappa_\mu. \tag{5.6.1}$$

(Значение массы пока не обосновано.)

2. В качестве следующего фактора было названо экспоненциальное слагаемое $\exp[(i/\hbar)k_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)]$. Его происхождение и входящие в него величины также были обоснованы. В формулах предыдущей главы такие экспоненциальные факторы возникали в комбинациях:

$$\exp(1)\exp(2) = \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}k_\mu x_1^\mu\right) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}k_\mu x_1^\mu\right)\right] \times$$
$$\times \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}k_\mu x_2^\mu\right) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}k_\mu x_2^\mu\right)\right]. \qquad (5.6.2)$$

После перемножения слагаемых возникнут выражения двух видов:

$$\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}k_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)\right); \quad \text{и} \quad \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}k_\mu(x_1^\mu + x_2^\mu)\right). \qquad (5.6.3)$$

В пропагаторе присутствуют слагаемые первого вида и отсутствуют второго типа. Исходя из принципа соответствия оставим в (5.6.2) только слагаемые первого вида.

3. Третьим фактором назывался знаменатель в подинтегральном выражении (2.5.6). Как было показано в главе 4, его возникновение обусловлено компонентой эффективной многомерной метрики $\check{G}_{44}$, записанной в (4.5.5). После процедуры 1+1+4-расщепления эта компонента появляется в знаменателях как 4-мерной метрики (4.7.5), так и 4-мерных составляющих двух векторов диады, записанных в формулах (4.7.6) – (4.7.10). Обратим внимание на то обстоятельство, что эта компонента метрики может быть представлена в виде

$$\check{G}_{44} \sim k_\beta k^\beta + i\epsilon, \qquad (5.6.4)$$

где символом $i\epsilon$ обозначено сложное второе слагаемое справа в последней строке (4.7.5). Не зная пока конкретных значений констант, исходя лишь из принципа соответствия развиваемой здесь программы с общепринятой теорией поля, следует положить эту величину малой.

4. Как отмечалось в предыдущих параграфах, для перехода к общепринятой теории необходимо произвести суммирование по всем элементарным базисам, составляющим макроприбор. Такое суммирование огромного числа слагаемых экстраполируется переходом к плотности распределения по импульсам передачи и интегрированием по d^4k. Именно это и обосновывает последний

фактор в определении сингулярной функции. В итоге получаем выражение [3]

$$\delta(s^2(1,2)) \to -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[\frac{i}{\hbar}k_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)]}{k_\beta k^\beta + i\varepsilon}d^4k = D_{ret}(x_1^\mu - x_2^\mu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\delta[s^2(x_1 - x_2)]\theta(x_1^0 - x_2^0) = \frac{1}{4\pi|r_{12}|}\delta[(x_1^0 - x_2^0) - r_{12}], \quad (5.6.5)$$

где r_{12} – некая величина, для двух макрообъектов имеющая смысл расстояния между ними. Индексами (1) и (2) обозначены эти макрообъекты (частицы). Напомним, что выражение для $\delta[s^2(x_1 - x_2)]$ записано в (2.3.3), $\theta(x)$ - функция, равная единице при $x > 0$, и равная нулю при $x < 0$.

5. Следует подчеркнуть, что на самом деле выражения для 4-мерной метрики (4.7.5) и векторов (4.7.6) – (4.7.7), описывающих электромагнитное взаимодействие, являются довольно сложными. Они содержат как вклады третьих частиц, так и импульсы передачи. На этом этапе развития теории возникают два пути.

1) Первый, наиболее последовательный, путь состоит в учете вкладов третьих частиц в духе теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Забегая вперед, укажем, что третьи частицы играют роль фейнмановского поглотителя, охарактеризованного в §2.6. Этот путь обсужден в следующей главе.

2) Второй путь, более поверхностный, состоит в наведении временных мостов между понятиями существующей теории поля и выражениями, полученными в бинарной геометрофизике. Строго говоря, то, что сделано в предыдущем пункте с представлением $\check{G}_{44}$ в форме (5.6.4) (выбором контура интегрирования) для получения запаздывающей функции Грина (5.6.5), относится ко второму пути. Фактор ϵ в знаменателе подинтегрального выражения (5.6.5) соответствует учету фейнмановского поглотителя.

6. В произведенном здесь обосновании пропагатора выделим два основных аспекта. Один из них имеет технический характер, – получение пропагатора завершает введение в рамках бинарной геометрофизики всех составных элементов теории физических взаимодействий. Другой аспект имеет принципиальный характер, – вместе с пропагатором в (5.6.5) возникает ключевая характеристика взаимодействующих макрообъектов – расстояние r_{ik} между ними. Только после его появления можно начать говорить о понятиях классического (координатного) пространства-времени, о его сущности, об истоках его основных свойств и о

пределах применимости классических пространственно-временных понятий.

5.7 Переход к классическому пространству-времени

1. В основу бинарной геометрофизики положены отношения между некими первичными элементами, составляющими частицы (объекты). До сих пор это были абстрактные понятия – параметры элементов, характеризуемые комплексными числами, из которых строились прообразы ряда общепринятых понятий. Сами по себе отношения и параметры не претендовали на роль наблюдаемых понятий. Подчеркивалось, что наблюдаемые (в классическом смысле) величины должны возникать из прообразов стандартных понятий. Следовательно, в какой-то момент развития теории необходимо перебросить мостик между величинами, вводимыми в бинарной геометрофизике, и классическими измеряемыми понятиями.

Но прежде, чем это сделать, уточним, что собой представляют классические измеряемые понятия, каким образом осуществляется их измерение. Можно утверждать, что *все классические измерения состоят в счете каких-то событий и в сопоставлении чисел происшедших событий.* Какие события следует иметь ввиду и как их считать, – зависит от конкретных ситуаций. Очевидно, для осуществления счета и, тем более, для сопоставления чисел различных событий необходимы достаточно сложные системы с памятью, каковыми являются макроприборы. Только на макроуровне можно осуществить измерительные процедуры. Уже отсюда ясно, что в теориях вида $R_\mu(\mu)$, опирающихся лишь на свойства отдельных микрочастиц, в принципе невозможно говорить о наблюдаемых величинах и понятиях.

Нас здесь не будут интересовать вопросы конкретной реализации измерительных процедур. Достаточно будет принципиальной возможности счета событий и сравнения их с некоторыми эталонными повторяющимися событиями, что фактически означает определение часов.

2. В качестве мостика между введенными в бинарной геометрофизике величинами и классическими понятиями можно использовать величину r_{12}, возникшую вместе с пропагатором электромагнитного взаимодействия. Будем полагать, что *каждому взаимодействию (паре событий) между двумя произвольными объектами соответствует некоторое вещественное число* s_{12} *– интервал данного взаимодействия (между двумя событиями)*, которое определяет отношение числа последовательных од-

нотипных событий данного вида к числу каких-то эталонных событий. Постулируем, что такое вещественное число отождествляется с r_{12} через некоторую константу, зависящую от выбора эталонных событий.

Данная здесь физическая интерпретация r_{12}, как измеримой в классическом смысле величины, позволяет, идя в обратном порядке, раскрыть физическую интерпретацию других величин, встречавшихся в процессе построения теории. В частности, так можно прийти к измеримости действия S_{ik} для одного и того же макрообъекта между двумя событиями i и k. В качестве эталонных событий, числу которых должно соответствовать S_{ik} могут выступать либо все события, которые произошли с этим макрообъектом между двумя избранными событиями, либо только некоторые избранные. В качестве таких избранных событий (в классической теории) обычно выбираются показания часов. Общеизвестна формула, связывающая классические понятия с интервалом действия

$$S_{ik} = mcs_{ik} = mc(\tau_k - \tau_i), \tag{5.7.1}$$

где mc – коэффициент между значением действия и длиной собственного интервала на мировой линии макрообъекта; τ_k τ_i – два показания часов, соответствующих избранным событиям. Очевидно, как для действия, так и для показаний часов (например, чисел колебаний маятника) имеет место свойство аддитивности. Подчеркнем, все это справедливо для отношений (событий) на мировой линии лишь одного макрообъекта.

3. Вернемся к обсуждению отношений между различными объектами (частицами). Как уже отмечалось, они описываются величиной r_{ik}, характеризующей отношение между двумя событиями ("излучением" и "поглощением") с участием двух различных объектов (частиц). Эта величина имеет инвариантный характер, несмотря на кажущийся 3-мерный вид, как бы зависящий от выбора системы отсчета. Укажем конкретную процедуру ее определения.

Для этого достаточно использовать счет событий, происшедших на мировой линии классического объекта, о чем было сказано выше. Заметим, что этим классическим объектом может быть сам макроприбор или, на другом языке, наблюдатель. Таким образом, полагается, что на мировой линии наблюдателя имеется монотонный параметр τ – показания часов (собственное время наблюдателя). Квадрат интервала s_{12}^2 между двумя событиями на этой мировой линии задаются часами

$$s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2. \tag{5.7.2}$$

4. В главе 4 первой части книги в предварительном порядке излагались идеи такого сорта, названные там *хронгеометрией* [1, 66]. Они обсуждались в связи с теорией БСКО ранга (2,2). Напомним самое необходимое. В окрестности (не обязательно малой) своей мировой линии наблюдатель может ввести самым непосредственным образом две координаты окружающих точек-событий. Поясним это с помощью рисунка 5.4. Пусть наблюда-

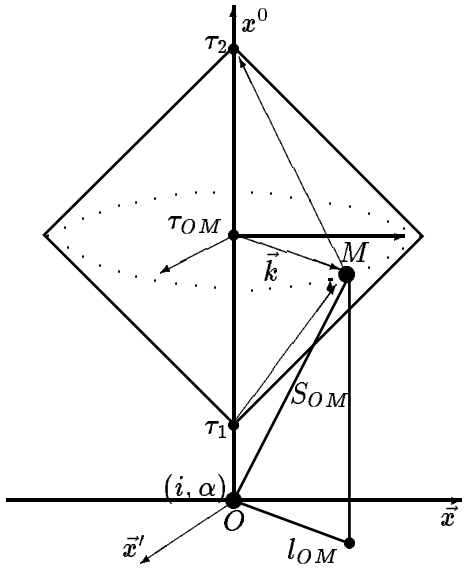


Рис. 5.4: Метод хронгеометрии.

тель провзаимодействовал со второй частицей, находящейся в точке М. На классическом языке теории поля это означает посылку сигнала с мировой линии наблюдателя в некоторый момент τ_1, отсчитываемого от некоторой точки О, в точку-событие M. Пусть произошло повторное взаимодействие двух частиц, уже в обратном порядке. На классическом языке это означает получение наблюдателем отраженного сигнала в некоторый момент τ_2. Интервалы τ_1 τ_2 положительны, если точка О предшествует τ_1, но могут быть и отрицательными, если О выбрано позже τ_1 или даже позже τ_2. Время события M относительно O

можно определить величиной

$$\tau_{OM} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1), \tag{5.7.3}$$

расстояние между событиями (точками) O и M можно задать формулой

$$l_{OM} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1), \tag{5.7.4}$$

а квадрат пространственно-временного интервала между событиями – выражением

$$s^2_{OM} = \tau_1\tau_2. \tag{5.7.5}$$

Легко видеть, что выполняется обычное соотношение

$$s^2_{OM} = \tau^2_{OM} - l^2_{OM}. \tag{5.7.6}$$

Если точка O лежит между моментами испускания и приема сигналов, то квадрат интервала отрицателен, т.е. точки-события O и M пространственно-подобны.

Понятие r_{12} в (5.6.5) получает статус наблюдаемой физической величины через отождествление

$$2|r_{12}| \equiv 2l_{OM} = \tau_2 - \tau_1. \tag{5.7.7}$$

Очевидно, что с точки зрения теории относительности эта величина является инвариантом.

5. Следует особо подчеркнуть, что хроногеометрическим методом задаются лишь две координаты. Оставшиеся две (угловые координаты) должны задаваться иным образом. Они соответствуют различным ориентациям вектора изменения 4-скорости (4-импульса) k^μ. Об этом уже писалось в главе 4 первой части книги. Из вектора k^μ выделялась пространственная часть, квадрат длины которой имеет вид

$$(\vec{k}^i)^2 = h_{ij}k^ik^j. \tag{5.7.8}$$

Здесь h_{ij} – 3-мерный метрический тензор. Опираясь на это выражение, можно построить единичный пространственный вектор

$$l^i = \frac{k^i}{\sqrt{(\vec{k})^2}}. \tag{5.7.9}$$

Очевидно, все возможные значения этого вектора формируют ежик из векторов, исходящих из одной точки O и своими концами заполняющих единичную 2-мерную сферу (окружность на рисунке 5.4). Углы, характеризующие ориентацию выбранного вектора k^i, соответствуют двум недостающим координатам хроногеометрии. Координаты точки-события M относительно точки-события O в хроногеометрии можно задать следующим образом

$$M^\mu = \{x^0, x^i\} = \{\tau_{OM}, l^i l_{OM}\}. \qquad (5.7.10)$$

Заметим, что метод хроногеометрии применим и в случае общей теории относительности.

5.8 Выводы и замечания

В этом разделе обсуждены лишь принципиальные моменты перехода от первичных понятий и закономерностей бинарной геометрофизики к ключевым положениям классического пространства-времени. Преследовалась цель лишь охарактеризовать в рамках развиваемой здесь парадигмы смысл понятий, используемых при описании физических взаимодействий. Для детального описания перехода к общепринятым понятиям следует осветить еще ряд нетривиальных вопросов. Некоторые из них рассмотрены в следующих главах.

Завершая этот раздел, обратим внимание на следующие моменты:

1. *В бинарной геометрофизике предлагается иной, по сравнению с традиционной физикой, порядок введения ключевых понятий.* Напомним, что в современной физике, включая общую теорию относительности и теории Калуцы-Клейна, исходным моментом является координатное пространство-время. Для внесенных в него частиц (объектов) определяются импульсы, которые формируют импульсное пространство (или пространство скоростей). Из импульсов и смещений в координатном пространстве-времени определяется понятие действие.

В бинарной геометрофизике исходными являются отношения между элементами. Из этих отношений (параметров элементов) в виде неких комбинаций строятся компоненты импульсов (вводится импульсное пространство) и одновременно с этим определяется прообраз классического действия. И только затем из этих понятий, как бы на третьем этапе, формируется координатное пространство-время.

2. В этой главе для получения координатного пространства-времени были использованы (введены) два принципа усреднения (суммирования):

1) *принцип усреднения по элементарным базам*, составляющим макроприбор, позволивший в принципиальном плане определить идею (прообраз) координатного пространства-времени;

2) *принцип усреднения по элементам*, составляющим макрообъект, позволивший перейти от размазанной по координатному пространству-времени амплитуды вероятности к локализованным в нем положениям (координатам) макрообъектов.

Первый из этих принципов соответствует общеизвестной процедуре преобразования Фурье от импульсного представления к координатному с той разницей, что в стандартной теории эта процедура осуществляется для функций в априорно заданном пространстве-времени, а в бинарной геометрофизике предложен обратный порядок — аналог этой процедуры предназначен для определения координатного пространства.

Второй принцип соответствует квазиклассическому переходу в стандартной квантовой механике.

3. В рамках развиваемой здесь программы возникает новая интерпретация квантовой механики, отличная от общепринятой копенгагенской. Она имеет ряд схожих черт с тремя альтернативными интерпретациями: статистической (Блохинцева), в рамках 5-оптики (Румера) и фейнмановской.

Следует отметить, что *к известному свойству аддитивности физически наблюдаемого действия можно прийти, исходя из БСКО ранга (2,2)*, откуда и возник прообраз этого понятия. В первой части книги [17] отмечалось, что эта БСКО ранга (2,2) является вырожденной в том смысле, что имеет два представления: общее (или мультипликативное), закон которого записан в (3.5.8) и соответствует общему виду (1.3.2), и вырожденное (или аддитивное), соответствующее закону, приведенному в сноске §3.1. После перехода к классическим ΔS можно утверждать, что невырожденное представление БСКО ранга (2,2) соответствует квантовой теории, а вырожденное (или БСКО ранга (2,2;a)) соответствует классической теории.

4. В связи со сделанным утверждением напомним переход от невырожденного представления БСКО ранга (2,2) к вырожденному. Для этого перепишем закон (3.5.8) в форме

$$\Phi_{(2,2)} = 0 \to u_{i\alpha} u_{k\beta} = u_{k\alpha} u_{i\beta} \tag{5.8.1}$$

и прологарифмируем его. В итоге будем иметь

$$\ln u_{i\alpha} + \ln u_{k\beta} - \ln u_{k\alpha} - \ln u_{k\beta} = 0 \to$$

$$\to a_{i\alpha} + a_{k\beta} - a_{k\alpha} - a_{i\beta} = 0, \tag{5.8.2}$$

где введены обозначения:

$$Ca_{i\alpha} = \ln u_{i\alpha}; \quad Ca_{k\beta} = \ln u_{k\beta}; \quad \cdots. \tag{5.8.3}$$

Здесь C – некоторая константа. Вспоминая вид $u_{i\alpha}$ из (3.5.7), приходим к выражению $a_{i\alpha}$ через новые параметры

$$a_{i\alpha} = \frac{1}{C}(\ln C_i + \ln C_\alpha) \equiv i_0 + \alpha_0. \tag{5.8.4}$$

Очевидно, (5.8.2) можно понимать как закон вырожденной БСКО ранга (2,2;а), который можно переписать в форме

$$\Phi'_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \tag{5.8.5}$$

соответствующий общему виду, приведенному в сноске §3.1.

5. Вспоминая переход от парных отношений БСКО ранга (2,2) к парным отношениям (действию S_{ik}) унарной системы отношений согласно (3.5.9) и (3.5.10) закон (5.8.5) можно переписать в новых обозначениях. Сделаем это для частного набора элементов i, j, α, β в законе (5.8.5). Пусть элементы i и α будут склеены согласно (3.5.1), а элементы j β – нет, и пусть k парный элемент к β, а γ – парный элемент к j, тогда закон (5.8.5) запишется в виде

$$\Phi'_{(2,2;a)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} \end{vmatrix} = S_{ik} + S_{kj} + S_{ji} = 0. \tag{5.8.6}$$

Это соотношение выражает известное свойство расстояний между тремя точками на ориентированной прямой. Оно же соответствует известному свойству аддитивности классического действия (3.5.12).

Раздел III

Электромагнетизм и гравитация

В этом разделе рассмотрены те виды физических взаимодействий, которые обусловлены *симметричными комбинациями дополнительных параметров* (с индексом "3") в модели бинарной геометрофизики, основанной на БСКО ранга (4,4), то есть *электромагнитное и гравитационное взаимодействия.*

В главах этого раздела полагается, что уже осуществлен переход от реляционной теории $R_\mu(\mu)$ (от верхней части блок-схемы рисунка 1.1) к теориям типа $R_m(b)$, то есть рубеж перехода к макроприбору осуществлен и рассматриваются теории нижней части блок-схемы рисунка 1.1.

Здесь, как и в последующих разделах, названные взаимодействия рассматриваются и сравниваются с позиций разных физических парадигм. Из названных в главе 1 десяти парадигм использованы 4 наиболее существенные, на наш взгляд, парадигмы: 9-я парадигма (бинарная геометрофизика), 3-я парадигма (теория прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана), 5-я парадигма (многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна), 1-я парадигма (калибровочная теория физических взаимодействий). Поскольку бинарная геометрофизика является реляционной теорией, а последние две представляют собой теории близкодействия (теории поля), то для их сопоставления необходимо промежуточное звено, которым является теория прямого межчастичного взаимодействия.

В начальной главе 6 этого раздела показано, как получаются теории электромагнетизма и гравитации в рамках бинарной геометрофизики и произведено сравнение с их описанием в теории прямого межчастичного взаимодействия. В следующей главе 7 отдельно рассмотрено гравитационное взаимодействие. Проанализирован ряд аспектов общей теории относительности с точки зрения парадигмы бинарной геометрофизики. В последней главе 8 данного раздела проанализированы 5- и 6-мерные геометрические модели, объединяющие гравитацию и электромагнетизм.

Глава 6

Прямое электромагнитное и гравитационное взаимодействия

Назначение этой главы двояко. Во-первых, эта глава замыкает цикл обсуждений прямого межчастичного (электромагнитного и гравитационного) взаимодействия. Напомним, одна из двух начальных глав книги называлась "Уроки теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана". В ней изложены важнейшие мотивы для развития данной парадигмы. Весь второй раздел книги посвящен изложению оснований теории физических взаимодействий в духе концепции прямого взаимодействия (на основе прямых отношений между частицами). И, наконец, в данной главе на основе изложенных выше идей и введенных понятий бинарной геометрофизики, на новой основе, опять рассмотрена теория прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана, то есть фактически дано ее обоснование.

Во-вторых, эта глава имеет характер промежуточного звена при переходе от бинарной геометрофизики к общепринятым полевым теориям как в рамках 1-й, так и 5-й (геометрической) физических парадигм. В такой цепи из трех звеньев для нас основной интерес представляет переход от первого звена (бинарной геометрофизики) ко второму (к теории прямого межчастичного взаимодействия), так как переход от второго звена (теории прямого взаимодействия) к третьему (к теории поля) многократно рассматривался в работах других авторов.

6.1 Физически интерпретируемые величины

1. Основными понятиями теорий гравитации и электромагнетизма можно считать компоненты 4-мерной метрики $g_{\mu\nu}$ и электромагнитного векторного потенциала A_μ. Напомним основные необходимые процедуры для их вывода из понятий бинарной геометрофизики:

1) Получение компонент прообраза 6-мерной метрики $\tilde{G}_{MN}$ при выделенных первой и второй частицах суммированием по всем третьим частицам окружающего мира. Соответствующие формулы (4.5.2) – (4.5.7) записаны в §4.5.

2) Процедура 1+1+4-расщепления в рамках прообраза 6-мерной метрики, полученной на первом этапе, обсуждена в §4.6 и §4.7. В итоге получены прообраз 4-мерной метрики (4.7.5) и диада векторов ξ_μ и λ_μ (см. (4.7.6) – (4.7.7)).

3) Суммирование по ансамблю элементарных базисов, составляющих макроприбор. В итоге получается понятие пропагатора взаимодействия разнесенных частиц, а совместно с последующей процедурой и понятие расстояний между взаимодействующими объектами.

4) Усреднение по макрообъекту, содержащему первую частицу, и по макрообъектам, содержащим вторые частицы. Согласно изложенному в предыдущей главе 5, эта процедура позволяет ввести понятие положения объектов.

5) Суммирование по всем возможным вторым объектам (частицам) окружающего мира.

Только после всего этого получаются компоненты 4-мерной метрики и электромагнитного векторного потенциала.

2. После операции 1+1+4-расщепления прообраза многомерной метрики, то есть при проведении третьей и четвертой процедур с целью получения электромагнитного векторного потенциала, остро встает принципиальный вопрос, требующий особого обсуждения: какие комбинации из векторов и "скалярных" компонент прообраза 6-мерной метрики должны сопоставляться с известными физически интерпретируемыми величинами. (Заметим, что при определении 4-мерной метрики такой проблемы нет.) В §4.7 этот вопрос в предварительном порядке решался делением векторов диады ξ_μ и λ_μ на $\sqrt{-\check{G}_{44}}$.

Забегая вперед, отметим, что подобная проблема возникает и в рамках 5- и 6-мерных геометрических моделей гравитации и электромагнетизма типа теорий Калуцы и Клейна. Напомним, в теориях Калуцы и Клейна постулируется, что физическим смыс-

лом наделяются калибровочно инвариантные величины, т.е. такие, которые остаются инвариантными при преобразованиях дополнительной (пятой) координаты вида (4.6.13) и являются ковариатными относительно 4-мерных преобразований (4.6.22). Однако при сужениях преобразований из-за условия цилиндричности (независимости) компонент метрики по дополнительной координате калибровочно инвариантной становится компонента G_{55} (или G_{44}) и, следовательно, существенно расширяется класс калибровочно инвариантных величин. Таковыми становятся прежние калибровочно инвариантные величины, умноженные на произвольную функцию (конформный фактор) от компоненты G_{55} (или G_{44}).

В этих условиях для определения электромагнитных величин приходится искать дополнительные условия. В качестве таковых выбирались два условия [9, с.219]: 1) чтобы преобразования векторного электромагнитного потенциала при (4.6.13) (с заменой x^4 на x^5) совпадали с обычными калибровочными преобразованиями и 2) чтобы в получающихся из 5-мерной теории Калуцы 4-мерных уравнениях Эйнштейна справа перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля стоял стандартный (постоянный) размерный коэффициент. Это приводило к отождествлению

$$A_\mu = \frac{c^2}{2\sqrt{k_g}} \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{-G_{55}}} = -\frac{c^2}{2\sqrt{k_g}} \frac{G_{5\mu}}{G_{55}}, \qquad (6.1.1)$$

где k_g - ньютоновская гравитационная постоянная, c - скорость света.

3. Аналогичным образом (в смысле выбора фактора из дополнительных компонент метрики) решался вопрос и в §4.7, только там вместо компоненты 5-мерной метрики G_{55} была выбрана компонента $\check{G}_{44}$. Однако в развиваемой здесь теории имеется существенная разница, – в ней нет исходного многомерного координатного пространства-времени и, следовательно, не определены координатные преобразования, перемешивающие 4-мерные и дополнительные координаты. Ситуация упрощается: не нужны дополнительные постулаты цилиндричности по дополнительным координатам и нет надобности в специальном постулате, ограничивающем координатные преобразования. Имеют место только 4-мерные преобразования. Относительно них дополнительные компоненты прообраза метрики $\check{G}_{44}$ и $\check{G}_{45}$ являются инвариантами. Тем не менее, остается задача выделения из полученных величин таких, которые должны сопоставляться с физически интерпретируемыми выражениями.

Решим эту задачу с помощью **постулата**: *Физическим смыслом должны обладать все возможные 4-мерные тензорные комбинации, построенные из компонент прообраза многомерной метрики, которые после проведения упомянутых выше процедур приводят к координатно зависимым выражениям, похожим на общепринятые.*

4. В частности, таковыми автоматически являются компоненты 4-мерной метрики $g_{\mu\nu}$, полученной из (4.7.5), а также векторы, полученные из записанных в (4.7.6) и (4.7.7) векторов диады. Как уже отмечалось, эти векторы практически коллинеарны, поэтому можно ограничиться одним вектором

$$\frac{\xi_\mu}{\sqrt{-\check{G}_{44}}} = -\frac{\check{G}_{4\mu}}{\check{G}_{44}} \to$$

$$\to \frac{\exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\mu} + \sum \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\mu}\right)}{2\left[2c_1^2\kappa^\beta\kappa_\beta - \exp(1)c_1\kappa^\beta\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \frac{u^5_{(3)}}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right)\right]}. \tag{6.1.2}$$

5. Заметим, имеется еще один вектор, который можно получить описанным выше способом из следующей комбинации компонент прообраза многомерной метрики

$$\frac{\check{G}_{5\mu}}{\check{G}_{44}} \sim (\lambda_\mu - \xi_\mu)\frac{\check{G}_{45}}{(-\check{G}_{44})^{3/2}}. \tag{6.1.3}$$

Однако, как легко видеть из (4.5.4) и (4.5.5), это выражение отличается от (6.1.2) лишь общим коэффициентом из дополнительных параметров и коэффициентами перед вкладами от третьих частиц. По этой причине ограничимся рассмотрением лишь комбинации (6.1.2).

6.2 Прямое межчастичное электромагнитное взаимодействие

От выражения (6.1.2) можно непосредственно перейти к рассмотренной в главе 2 теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия типа Фоккера-Фейнмана. Для этого необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1) В числителе (6.1.2) стоят произведения двух комбинаций из экспонент. Подобные произведения уже обсуждались в §5.6

(см. формулы (5.6.2) – (5.6.3)). Вследствие усреднения по ансамблю элементарных базисов, остаются фазовые вклады экспонент с разностями координат, а слагаемые, содержащие экспоненты с суммой координат двух макрообъектов, ведут себя как быстро осциллирующие выражения и сокращаются. Таким образом, будем сохранять только слагаемые с экспонентами вида

$$\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}k_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)\right).$$

Значок $\pm$ в дальнейшем приводит к интегрированию по d^4k от минус до плюс бесконечности.

2) В числителе дроби (6.1.2) наряду с экспоненциальными слагаемыми от второй частицы имеются слагаемые с экспонентами $\exp(3)$. Они входят с малыми коэффициентами вида $u^5_{(3)}/b_5$.

3) В знаменателе дроби (6.1.2) имеются дополнительные к $k^\beta k_\beta$ слагаемые.

Обсудим переход к теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия, последовательно вводя в рассмотрение перечисленные выше факторы.

А. Основное приближение. Пренебрежем двумя указанными в пунктах (2) – (3) факторами. Тогда парное отношение (6.1.2) описывает прообраз векторного электромагнитного потенциала, создаваемого второй частицей как бы в отсутствие всех остальных частиц. (На самом деле другие частицы уже дали вклад в виде слагаемого $k^\beta k_\beta$ в знаменателе.)

Далее необходимо произвести остальные упомянутые выше процедуры. Если рассматривается взаимодействие микрочастиц, то эти процедуры сводятся к усреднению по ансамблю элементарных базисов. Как было отмечено в главе 5, оно экстраполируется (имитируется) интегрированием, во-первых, по импульсам рассматриваемых частиц (в итоге получаются размазанные по координатам амплитуды вероятности нахождения частиц), во-вторых, по импульсам передачи (d^4k) (в итоге получается релятивистская сингулярная функция, соответствующая δ-функции), в-третьих, интегрированием по координатам частиц.

Если рассматриваются макрочастицы, то процедура суммирования по всем составляющим их частицам существенно упрощает операции интегрирования. Частицы становятся локализованными в координатном пространстве-времени, интегрирование по импульсам передачи приводит к появлению в знаменателе модуля расстояния $|r_{12}|$ между макрочастицами и δ-функции от квадрата интервала, а интегрирование по координатам можно заменить интегралом по смещению второй частицы вдоль ее

мировой линии. В итоге получается выражение для векторного потенциала создаваемого второй частицей (2) в месте нахождения первой частицы

$$A_\mu(1,2;0) = C'_A \int\int \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\beta(x_1^\beta - x_2^\beta)\right]}{k^\alpha k_\alpha} u'_{(2)\mu} d^4k ds_{(2)} =$$

$$= C_A \int j_\mu(2)\delta(s^2(1,2)) ds_{(2)} \equiv$$

$$\equiv A_\mu^{adv}(1,2;0) + A_\mu^{ret}(1,2;0), \qquad (6.2.1)$$

где, во-первых, использованы определение и свойства $\delta(s^2(1,2))$-функции (5.6.5) и (2.3.3) и, во-вторых, введены размерные константы $C'_A = C_A q_{(2)}$. Здесь $q_{(2)}$ – электрический заряд второй частицы.

Легко видеть, что основное приближение соответствует теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия, сформулированной лишь на основе принципа Фоккера, то есть до введения поглотителя в работе Дж.Уилера и Р.Фейнмана [00] 1945 года. Здесь запаздывающее и опережающее взаимодействия (потенциалы) возникают с равными долями.

Б. Теория с грубым учетом фейнмановского поглотителя получается, если учесть слагаемые с экспонентами exp(3) в числителе (6.1.2). К каждому из таких слагаемых можно применить рассуждения предыдущего пункта. В итоге вместо (6.2.1) будем иметь

$$A_\mu(1,2) = A_\mu(1,2;0) + A_\mu(1,2;\sum_3) =$$

$$= C'_A \int\int \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\beta(x_1^\beta - x_2^\beta)\right]}{k^\alpha k_\alpha} u'_{(2)\mu} d^4k ds_{(2)} +$$

$$+ C'_A \sum_3 \left(\frac{u_3^5}{b_5}\right) \int\int \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\beta(x_1^\beta - x_3^\beta)\right]}{k^\alpha k_\alpha} u'_{(3)\mu} d^4k ds_{(3)} =$$

$$= A_\mu^{adv}(1,2;0) + A_\mu^{ret}(1,2;0) + \sum_3 \left(A_\mu^{ret}(1,2;3) + A_\mu^{adv}(1,2;3)\right). \qquad (6.2.2)$$

Это можно интерпретировать так, что от всех третьих частиц в соответствующие моменты по конусам прошлого и будущего (избранной частицы) идут сигналы к первой частице, сходясь в момент ее взаимодействия со второй частицей.

В этом случае уже возникает возможность постановки задачи о суммарных значениях опережающих и запаздывающих потенциалов от частицы 2 с учетом вкладов от всех третьих частиц.

В. Полную теорию с фейнмановским поглотителем следует ожидать при учете всех слагаемые в знаменателе (6.1.2). Для этого знаменатель нужно представить в виде

$$k^\beta k_\beta - \frac{mck^\beta}{2c_1^2}\exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \frac{u_3^5}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right) =$$

$$= k^\beta k_\beta(1 + c_1'\Phi(1,2,3)), \tag{6.2.3}$$

где

$$\Phi(1,2,3) = \frac{k^\beta}{k^\alpha k_\alpha}\exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\beta} + \sum_3 \frac{u_3^5}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right). \tag{6.2.4}$$

Исходя из принципа соответствия с известной теорией, следует положить

$$c_1'\Phi(1,2,3) \ll 1. \tag{6.2.5}$$

Здесь c_1' – константа, кроме того, учтено соотношение (5.6.1).

Дальнейшие рассуждения можно проводить по двум каналам.

1) *Первый канал соответствует духу теории прямого межчастичного взаимодействия.* Он состоит в разложении получившегося из знаменателя выражения в ряд

$$\frac{1}{1 + c_1'\Phi(1,2,3)} = 1 - c_1'\Phi(1,2,3) + \cdots \tag{6.2.6}$$

и в последующем умножении на числитель. В результате получается бесконечный ряд с различными комбинациями экспоненциальных слагаемых. Их можно трактовать как вклады частиц окружающего мира, то есть как влияние на взаимодействие двух избранных частиц со стороны фейнмановского поглотителя.

2) *Второй канал соответствует духу общепринятой теории поля.* Он состоит в предположении, что дополнительное малое слагаемое в первой строке (6.2.3) представляет собой малую

по модулю постоянную добавку вида

$$\frac{mck^\beta}{2c_1^2}\exp(1)\left(\exp(2)u'_{(2)\beta}+\sum_3\frac{u_3^5}{b_5}\exp(3)u'_{(3)\beta}\right)=i\epsilon. \qquad (6.2.7)$$

Тогда знаменатели в (6.2.1) и в (6.2.2) принимают вид

$$k^\beta k_\beta + i\epsilon,$$

соответствующий знаменателю в подинтегральном выражении для причинной функции (5.6.5). Роль такой постоянной добавки состоит в формировании контура интегрирования (в задании обхода соответствующей особенности в комплексной плоскости). В итоге получается общепринятая запаздывающая причинная функция (Грина) (5.6.5).

Эти два канала оказываются эквивалентными. Они приводят к устранению опережающих взаимодействий.

6.3 Основания теории прямого гравитационного взаимодействия

От полученных в (4.7.4) и (4.7.5) выражений для прообраза 4-мерной метрики можно перейти к рассмотренной в главе 2 теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия фоккеровского типа. Пренебрегая вкладами импульсов передачи k_μ по сравнению с импульсами частиц $p_\mu = mcu_\mu$, за исходное возьмем выражение

$$\hat{g}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+(m_0c)^2\left[\exp(1)\left(\exp(2)u_{(2)\mu}+\sum_3\frac{u_{(3)}^5}{b_5}\exp(3)u_{(3)\mu}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\left[\exp(1)\left(\exp(2)u_{(2)\nu}+\sum\frac{u_{(3)}^5}{b_5}\exp(3)u_{(3)\nu}\right)\right]}{4c_1\left[2c_1k^\beta k_\beta-m_0c\exp(1)k^\beta\left(\exp(2)u_{(2)\beta}+\sum_3\frac{u_{(3)}^5}{b_5}\exp(3)u_{(3)\beta}\right)\right]}, \qquad (6.3.1)$$

полученное в результате первой процедуры 1+1+4-расщепления. Здесь второе слагаемое справа умножено и разделено на $(m_0c)^2$, где m_0 масса одной частицы, и учтено соотношение (5.6.1), связывающее импульс передачи k_μ с переданной 4-скоростью κ_μ. Дальнейшие процедуры перечислены в начале §6.1.

В (6.3.1) присутствуют все три фактора, оказавшиеся существенными при обсуждении вывода электромагнитного векторного потенциала. Однако теперь получаются более сложные комбинации из экспонент exp(1), exp(2) и exp(3), которые, напомним, определены в (4.4.5). После раскрытия произведений возникают экспоненты как с суммами координат частиц, так и с разностями. Согласно изложенному выше опять будем полагать, что фазовые вклады с суммами координат ведут себя как быстро осциллирующие выражения, взаимно погашая друг друга, тогда как слагаемые с разностями координат взаимно усиливают друг друга. Таким образом, следует оставлять только такие слагаемые с экспонентами, в которые входят разности координат:

$$\exp\left(\pm\frac{2i}{\hbar}k_\alpha(x_1^\alpha - x_2^\alpha)\right); \quad \exp\left(\pm\frac{2i}{\hbar}k_\alpha(x_1^\alpha - x_3^\alpha)\right);$$

$$\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}k_\alpha(2x_1^\alpha - x_2^\alpha - x_3^\alpha)\right); \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}k_\alpha(x_2^\alpha - x_3^\alpha)\right) \qquad (6.3.2)$$

и так далее.

Опять рассмотрим переход к теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия фоккеровского типа в виде ряда этапов, последовательно учитывающих перечисленные в §6.1 факторы.

А. Основное приближение получается, если, во-первых, пренебречь в числителе слагаемыми с exp(3), содержащими малые коэффициенты $u^5_{(3)}/b_5$, и, во-вторых, отбросить в знаменателе дополнительные к $k^\beta k_\beta$ члены. В итоге после проведения всех процедур получается выражение

$$\overset{1}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - C_g \sum_2 m_2 \int \delta(s^2(1,2))(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})u^\alpha_{(2)}u^\beta_{(2)}ds_2, \qquad (6.3.3)$$

где C_g – некоторая размерная константа, которую можно связать с гравитационной постоянной. Легко видеть, что именно такое выражение соответствует формулам (2.4.5) и (2.4.9) из первого раздела.

Сделаем несколько замечаний о смысле этого выражения:

1) В (6.3.3) выделен коэффициент

$$m_2 = N_2 m_0, \qquad (6.3.4)$$

соответствующий массе второй частицы. Здесь символом N_2 обозначено число простейших частиц, составляющих объект с но-

мером 2. Это число возникает в результате четвертой из перечисленных выше процедур – из-за суммирования по частицам второго объекта. Масса вместе с квадратичной комбинацией из компонент 4-скорости составляют тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} \sim m_2 u^\mu u^\nu$ второй частицы. Это находится в согласии с теорией прямого межчастичного гравитационного взаимодействия и с общей теорией относительности, в которых отклонения метрики от плоской определяются тензорами энергии-импульса других частиц (источников искривленности).

2) Как и в случае электромагнитного взаимодействия (6.2.1), в (6.3.3) в результате проведения второй процедуры (усреднения по элементарным базисам, составляющим макроприбор) возникает $\delta(s^2(1,2))$-функция, приводящая к симметричному появлению запаздывающего и опережающего взаимодействий.

3) Отличие (6.3.3) от (2.4.5) состоит, в частности, в отсутствии слагаемого в круглых скобках вида $\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}$. Появление этого слагаемого обусловлено определением интегрирования по d^4x в искривленном пространстве-времени, при котором возникает коэффициент – корень квадратный из определителя метрического тензора $\sqrt{-g}$. Указанное слагаемое соответствует первому порядку в разложении $\sqrt{-g}$ в ряд по ньютоновской гравитационной постоянной k_g.

4) При суммировании по элементарным базисам перед метрикой Минковского возникнет число элементарных базисов, составляющих макроприбор. Метрика $g_{\mu\nu}$ получается последующим делением на это число (конформным преобразованием), так что во введенном в (6.3.3) коэффициенте C_g учтен этот фактор. Кроме того, в него входит ряд других факторов из-за перехода к плотности вероятности и интегрирований по импульсам передачи.

От полученного выражения для метрики (6.3.3) можно перейти в обратном порядке к формуле (2.4.1) для фоккеровского действия двух гравитационно взаимодействующих тел. Таким образом, можно утверждать, что *основное приближение обосновывает обобщение фоккеровского принципа действия на случай линеаризованной гравитации без фейнмановской теории поглотителя.*

Б. Теория с грубым учетом фейнмановского поглотителя получается, если учесть совокупность малых слагаемых с коэффициентом $u^5_{(3)}/b_5$ в числителе (6.3.1). В первом приближении по этому коэффициенту появляются выражения, которые можно трактовать, с одной стороны, как проявление следующего, второго, приближения по k_g теории прямого межчастичного

гравитационного взаимодействия, а с другой стороны, (частично) – как вклад от фейнмановского поглотителя. Представим эти выражения как $\overset{1}{h}_{\mu\nu}$ в разложении метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu} - 2k_g^2 \overset{1}{h}_{\mu\nu} + O(k^3), \qquad (6.3.5)$$

где $\overset{0}{h}_{\mu\nu}$ уже записано в (6.3.3), а следующее приближение строится из выражений вида

$$\overset{1}{h}_{\mu\nu} \sim \sum_2 \sum_3 \frac{u^5_{(3)}}{b_5} \int \frac{\exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} k_\alpha (2x_1^\alpha - x_2^\alpha - x_3^\alpha)\right)}{k_\beta k^\beta} u_{(2)\mu} u_{(3)\nu} d^4k. \qquad (6.3.6)$$

Фактически это уже учет трехточечных отношений в классическом понимании этого термина.

Очевидно, что из этого выражения будут возникать вклады как в запаздывающее, так и в опережающее взаимодействия.

В. Полная теория с фейнмановским поглотителем возникает при учете дополнительных членов в знаменателе (6.3.1). Для этого знаменатель нужно представить в виде (6.2.6). Умножая его на числитель, получаем бесконечный ряд выражений с различными комбинациями экспоненциальных слагаемых. Они соответствуют многоточечному характеру гравитационного взаимодействия. Учитывая, что при этих слагаемых стоят коэффициенты $(u^5_{(3)}/b_5)^n$ в различных степенях n, получаем разложения в бесконечные ряды по этому коэффициенту, что соответствует учету различных порядков разложения по ньютоновской гравитационной константе k_g в теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия фоккеровского типа.

6.4 Общая теория относительности в рамках концепции дальнодействия

1. Изложенное выше соответствует характеру эйнштейновской общей теории относительности, переформулированной в версии прямого межчастичного взаимодействия. Известно, что Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, следовал идеям Маха, высказанным в рамках концепции дальнодействия. Но после того, как общая теория относительности была создана, Эйнштейн понял, что она имеет характер теории поля, то есть построена в рамках концепции близкодействия. Это побудило его

пересмотреть свое отношение к идеям Маха. Однако, впоследствии выяснилось, что эйнштейновскую теорию гравитации можно переформулировать в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия. Сначала это было сделано в ее линейном приближении [21, 52], когда принцип Фоккера был обобщен с векторного вида (2.3.1), соответствующего электродинамике, на тензорный вид (2.4.1), а затем в наших работах с А.Ю.Турыгиным [10, 71] была построена теория прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, соответствующая эйнштейновской общей теории относительности в любом порядке разложения ее в ряд по гравитационной постоянной. Таким образом круг замкнулся, – пройден полный цикл от первоначальных идей Маха в духе концепции дальнодействия к конкретной полевой теории гравитации и далее от полевой теории к ее дальнодействующей версии, отвечающей первоначальным идеям.

2. Отсылая читателя за деталями к нашей монографии [10], охарактеризуем основные черты теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, соответствующей эйнштейновской общей теории относительности. Чтобы это сделать, сначала перепишем принцип Фоккера (2.4.1) первого порядка по k_g (двухточечные отношения) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overset{1}{S}{}^{(g)} &= -c\sum_i m_i \int ds_i + \\ &+ \frac{4\pi k_g}{c}\int\int T^{\alpha\beta}(x)\,\bar{G}_{\alpha\beta\mu\nu}\,(x,x')T^{\mu\nu}(x')\times \\ &\times \sqrt{-\overset{0}{g}\,(x)}\sqrt{-\overset{0}{g}\,(x')}d^4x d^4x', \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

где

$$\bar{G}_{\alpha\beta\mu\nu}\,(x,x') = \frac{1}{4\pi}\left(\overset{0}{g}_{\mu\alpha}\overset{0}{g}_{\nu\beta} + \overset{0}{g}_{\mu\beta}\overset{0}{g}_{\nu\alpha} - \overset{0}{g}_{\mu\nu}\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\right)\delta(s^2(x,x')) \tag{6.4.2}$$

– битензорная функция Грина, $\overset{0}{g}_{\mu\alpha}=\eta_{\mu\alpha}$, а $T^{\alpha\beta}(x)$ – компоненты тензора энергии-импульса, получаемые варьированием свободного действия

$$\delta\,\overset{0}{S}{}^{(g)} = c\sum_j m_j\int\delta(ds_j) = \frac{1}{2}\int T^{\alpha\beta}(x)\delta\,\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\,(x)\sqrt{-\overset{0}{g}\,(x)}d^4x. \tag{6.4.3}$$

Из этого выражения находим

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_j \int \delta^4(x, x_j) m_j \frac{dx_j^\mu}{ds_j} \frac{dx_j^\nu}{ds_j} g_\mu^\alpha(x, x_j) g_\nu^\beta(x, x_j) \frac{ds_j}{\sqrt{-\overset{0}{g}(x)}}. \tag{6.4.4}$$

Здесь $g_{\mu\nu}(x, x_j)$ – двухточечный тензор параллельного переноса. Подчеркнем, что второе слагаемое справа в (6.4.1) специально записано в полевом виде.

3. *Во втором порядке по k_g действие фоккеровского типа должно постулироваться.* Анализ показывает, что это нужно сделать в следующем виде

$$\begin{aligned} \overset{2}{S}{}^{(g)} &= \overset{1}{S}{}^{(g)} + \\ &+ \frac{4\pi k_g^2}{c} \theta_2 \int\int \overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu}(x)\, \bar{G}_{\alpha\beta\mu\nu}(x, x') T^{\alpha\beta}(x') \times \\ &\times \sqrt{-\overset{0}{g}(x)} \sqrt{-\overset{0}{g}(x')} d^4x d^4x', \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

где $k_g \overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu}(x)$ – добавка первого порядка к тензору энергии-импульса (6.4.4), получаемому уже из $\overset{1}{S}_{(g)}$ по формуле типа (6.4.3). Важную роль в теории играет значение введенного в эту формулу коэффициента θ_2. В определении (6.4.5) этот коэффициент произволен.

Громоздкие вычисления, подробно приведенные в [10], показывают, что второе слагаемое справа в (6.4.5) имеет *трехточечный характер*, т.е.

$$\begin{aligned} \overset{2}{S}{}^{(g)} &= \overset{1}{S}{}^{(g)} + \\ &+ \theta_2 k_g^2 \sum_i \sum_j \sum_l m_i m_j m_l \int\int\int f_2(x_i, x_j, x_l; u_{(i)}^\alpha, u_{(j)}^\beta, u_{(l)}^\gamma) \times \\ &\times ds_i ds_j ds_l, \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

где $f_2(\cdots)$ – некоторая функция, зависящая от характеристик трех частиц.

4. Из действия (6.4.6) обычным способом можно получить уравнения движения любой частицы i. Анализ показывает, что

эти уравнения можно представить в виде *уравнений геодезической линии* (во втором порядке по k_g) *в эффективной римановой метрике*

$$\overset{2}{g}_{\mu\nu}(x) = \overset{0}{g}_{\mu\nu} - 2k_g \overset{0}{h}_{\mu\nu}(x) - 2\theta_2 k_g^2 \xi_{\mu\nu}(x), \tag{6.4.7}$$

где

$$\xi_{\mu\nu}(x_i) = (4\pi)^2 \sum_j \sum_l m_j m_l \int\int f_2'(x_i, x_j, x_l; u^\beta_{(j)}, u^\gamma_{(l)}) ds_j ds_l, \tag{6.4.8}$$

только в том случае, когда коэффициент перед вторым слагаемым в (6.4.5) принимает значение

$$\theta_2 = \frac{1}{2}. \tag{6.4.9}$$

5. В [10, 71] формулы (6.4.1), (6.4.5) обобщены на произвольный порядок n по гравитационной константе k_g. При этом показано, что *поправки в действие n-го порядка имеют $n+1$-точечный характер.* Кроме того, при постулировании действия фоккеровского типа в каждом новом порядке необходимо вводить некий коэффициент θ_n. Из требования, чтобы получающиеся в данном приближении уравнения движения частиц представлялись в виде уравнений геодезических в эффективной римановой метрике (в том же приближении), следует, что эти коэффициенты должны принимать значения:

$$\theta_n = \frac{1}{n}. \tag{6.4.10}$$

С учетом того, что в фоккеровском действии 1-го порядка (1.5.3) можно явно ввести коэффициент $\theta_1 = 1$, получаем единообразную формулу для коэффициентов во всех порядках разложения.

6. В нашей работе [10] показано, что в любом порядке по k_g *для эффективной римановой метрики можно добиться тождественного выполнения уравнений Эйнштейна (в соответствующем порядке по k_g).* Таким образом эйнштейновская теория относительности, имеющая традиционно полевой характер, переформулируется в рамках концепции дальнодействия. При этом, еще раз подчеркнем, гравитационное взаимодействие имеет традиционный двухточечный характер лишь в основном, первом приближении (для линеаризованной теории гравитации). С точки зрения теории прямого межчастичного гравитационного

взаимодействия (в концепции дальнодействия) *нелинейность эйнштейновской общей теории относительности обусловлена учетом трех-, четырех- и т.д. -точечных взаимодействий,* т.е. эта теория имеет *многоточечный характер.*

7. Прямое гравитационное взаимодействие в описанной здесь теории слагается, как и в случае электромагнетизма, равноправно из запаздывающих и опережающих взаимодействий (по крайней мере в первом приближении по k_g). Для устранения опережающих взаимодействий необходимо учесть соображения *фейнмановской теории поглотителя.* Однако в данном случае имеется существенная особенность, обусловленная тем, что как фейнмановская теория поглотителя, так и более высокие порядки разложения по гравитационной константе имеют один и тот же *многоточечный характер.*

Отдавая себе отчет в том, что на пути от бинарной геометрофизики (пока рассматриваемой в рамках простейшей модели, т.е. БСКО ранга (4,4)) к классической теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана имеется еще ряд задач, тем не менее можно утверждать, что на основе использованных здесь принципов и введенных понятий такой переход осуществляется.

6.5 Принцип соответствия с теорией поля

1. Соответствие понятий и наблюдаемых следствий из теории прямого межчастичного взаимодействия получаемым в рамках общепринятой ныне теории поля (в рамках первой физической парадигмы) обсуждалось в работах многих авторов (см., например, [46, 84]). Такое сопоставление сопряжено с принятием далеко идущей гипотезы о самостоятельной сущности категории (фантома) классического пространства-времени. Напомним, что понятие поля означает определение некой функции во всех точках всего или какой-то области непрерывного многообразия. В стандартной физике (в первой парадигме) полевые функции определяются в заранее заданном (априорном) 4-мерном классическом пространстве-времени. Еще раз подчеркнем, что в бинарной геометрофизике нет такой самостоятельной категории, следовательно, и понятие поля "повисает в воздухе".

2. Допустим, что гипотеза об априорном пространстве-времени принята. Тогда в математическом плане теория прямого межчастичного взаимодействия и теория поля различаются тем, какие положения выбираются в качестве аксиом, а какие имеют статус теорем. Таких примеров разных аксиоматик или фор-

мулировок теорий можно указать довольно много как в геометрии, так и в механике или в других разделах физики. В теории прямого межчастичного взаимодействия за исходные положения фактически выбираются функции Грина, и из них получаются уравнения поля, тогда как в теории поля за исходные выбираются уравнения поля (или эквивалентные им понятия), а функции Грина можно получить из них как вторичные понятия.

3. Поясним это более подробно. Напомним, что в бинарной геометрофизике или в теории прямого межчастичного взаимодействия компоненты электромагнитного векторного потенциала $A_\mu(1,2)$ или компоненты метрики, создаваемые макрообъектом (2) на макрообъекте (1), представляются в интегральных видах (6.2.1) или (6.3.6). В математике известно, что имеется однозначная связь между интегральными представлениями функций в таких видах и решениями соответствующих дифференциальных уравнений (см., например, [26, с. 34]).

Действительно, пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению с частными производными

$$L(x)\varphi(x) = \left(g + g^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + g^{\lambda\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \cdots\right)\varphi(x) = \rho(x), \tag{6.5.1}$$

где g, g^λ, $g^{\lambda\nu}$, ... – некоторые коэффициенты, $\rho(x)$ – плотность источника, которую можно представить в виде

$$\rho(x) = \int \rho(x')\delta^n(x - x')d^n x'. \tag{6.5.2}$$

Здесь $\delta^n(x)$ – n-мерная δ-функция. Тогда известно, что решение уравнения (6.5.1) можно представить в интегральном виде

$$\varphi(x) = \int \rho(x')D(x,x')d^n x' = -\int \rho(x')L^{-1}(x)\delta^n(x - x')d^n x'. \tag{6.5.3}$$

где

$$D(x,x') = -L^{-1}\delta^n(x - x') \tag{6.5.4}$$

– функция Грина, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L(x)D(x) = \left(g + g^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + g^{\lambda\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \cdots\right)D(x) = -\delta^n(x). \tag{6.5.5}$$

Выбирая представление δ-функции в виде

$$\delta^n(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)]d^nk \tag{6.5.6}$$

и используя формулу из операционного исчисления

$$L^{-1}(x)\exp[ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)] = \frac{\exp[ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)]}{g + ig^\lambda k_\lambda - g^{\lambda\nu}k_\lambda k_\nu + \cdots}, \tag{6.5.7}$$

приходим к выражению для функции Грина

$$D(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{\exp[ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)]d^nk}{g + ig^\lambda k_\lambda - g^{\lambda\nu}k_\lambda k_\nu + \cdots}. \tag{6.5.8}$$

Имеет место и обратное рассуждение – от представления $\varphi(x)$ через функцию Грина вида (6.5.3) можно перейти к соответствующему этой функции уравнению (6.5.1). В развиваемом здесь подходе также можно сделать обратный ход, как для электромагнетизма, так и для линеаризованной гравитации.

4. **Электромагнитное взаимодействие.** В выражении для электромагнитного потенциала (6.2.1) подинтегральная сингулярная функция может пониматься как функция Грина дифференциального уравнения

$$L(x)A_\mu = g^{\lambda\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}A_\mu(x) = 4\pi j_\mu(x), \tag{6.5.9}$$

которое соответствует 2-й паре уравнений Максвелла. Если помнить, что $A_\mu(x)$ представляется в виде (6.2.1), то это выражение является тождеством. Если же забыть об интегральном представлении и ввести классическое пространство-время, то имеем уравнения Максвелла в рамках стандартной теории поля.

Как уже отмечалось в §2.3, определенные согласно (6.2.1) компоненты электромагнитного векторного потенциала автоматически удовлетворяют условию Лоренца (2.3.14), которое соотвествует стремлению к нулю выражения

$$k_\mu u^\mu_{(2)} \to 0. \tag{6.5.10}$$

Формально определяя через электромагнитный векторный потенциал тензор электромагнитного взаимодействия $F_{\mu\nu}(x)$ согласно (2.3.11) и используя условие Лоренца (2.3.14), из (6.5.9)

приходим к тождественной выполнимости соотношения

$$\frac{\partial F^{\mu}_{\nu\cdot}}{\partial x^{\mu}} \equiv 4\pi j_{\nu}(x), \tag{6.5.11}$$

соответствующего 2-й паре уравнений Максвелла в общепринятой теории поля.

5. **Линеаризованное гравитационное взаимодействие.** Исходя из представления добавки к метрике Минковского (6.3.3), можно провести в точности такие же рассуждения. В итоге приходим к тождественной выполнимости соотношения

$$\Box \left(\overset{0}{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \overset{0}{g}_{\mu\nu} \overset{0}{h} \right) \equiv \frac{8\pi}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{6.5.12}$$

которое, как было показано в §2.4, соответствует линеаризованным уравнениям Эйнштейна.

6.6 О природе гравитации и классического пространства-времени

Завершая главу, подчеркнем следующие моменты:

1. Из изложенного выше следует, что в данном подходе гравитационное взаимодействие (гравитация), можно сказать, не имеет самостоятельного статуса, а является производным от электромагнитного взаимодействия. Действительно, из (6.2.1) и (6.3.1) следует, что как компоненты электромагнитного векторного потенциала A_{μ}, так и добавки к метрике Минковского в $g_{\mu\nu}$ выражаются через суммы одних и тех же вкладов от окружающих заряженных частиц. Разница состоит в том, что компоненты электромагнитного потенциала строятся из прямой суммы вкладов, а добавки к метрике Минковского образованы из суммы квадратов этих вкладов. В итоге оказывается, что в первом случае (для электромагнетизма) вклады от противоположно заряженных частиц могут взаимно компенсироваться, а во втором случае (для гравитации) квадратичные вклады не зависят от зарядов порождающих их частиц и могут только усиливать друг друга.

Забегая вперед, отметим, что намек на подобное обстоятельство содержится в 5-мерной теории Калуцы, где компоненты электромагнитного векторного потенциала A_{μ} пропорциональны смешанным компонентам 5-мерного метрического тензора $G_{5\mu}$ согласно (6.1.1), а компоненты 4-мерного метрического тензора $g_{\mu\nu}$ строятся из компонент 5-мерного метрического тензора

$G_{\mu\nu}$ и квадратичного добавка из смешанных компонент согласно (4.6.16). В теории Калуцы сделанное выше утверждение о производном характере гравитации не имеет места по двум причинам:

а) во-первых, там заранее не заданы значения компонент $G_{\mu\nu}$, как они заданы в нашем подходе (можно допустить, что такие же добавки электромагнетизма имеются и в $G_{\mu\nu}$, так что они компенсируются, и остается только независимый от них гравитационный вклад);

б) во-вторых, в случае 5-мерной теории Калуцы при образовании компонент 4-мерной метрики речь идет о квадрате сумм электромагнитных вкладов, а не о сумме квадратов, как это имеет место в развиваемом здесь подходе. Очевидно, квадрат суммы не равен сумме квадратов.

2. Не следует забывать, что пока рассмотрение велось в рамках простейшей модели, основанной на БСКО ранга (4,4), когда, строго говоря, имеются частицы лишь одного сорта (массивные лептоны). В такой модели возникает только одно значение элементарной массы. Обозначим ее символом m_0. Переход к макрообъекту может означать образование масс Nm_0 как прямой суммы из составляющих его элементарных частиц. В этой модели m_0 имеет смысл произвольной размерной константы. Ставить вопрос о получении конкретных значений можно лишь для безразмерных констант. Если бы в теории было несколько сортов частиц, то можно было бы построить безразмерную величину из отношений их масс. В бинарной геометрофизике другие сорта частиц (адроны) возникают при учете БСКО более высоких рангов. Только в таких обобщенных моделях можно ставить задачу о теоретическом обосновании наблюдаемых отношений масс элементарных частиц или связанных образований из таких частиц (атомов, молекул, твердых тел).

3. Переход от бинарной геометрофизики к физическим теориям других парадигм (как к теории прямого межчастичного взаимодействия, так и к теории поля) сопряжен с изменением сущности вводимых пространственно-временных отношений, с приданием им самостоятельного характера. Напомним, что с точки зрения нашего подхода пространство-время имеет сугубо вспомогательный, условный характер, как бы статус некого физического фантома. *По своей сути категория пространства-времени сродни таким ранее использовавшимся в физике понятиям как теплород или эфир.* Они были полезными на соответствующих этапах развития физики, но оказались не обязательными, а вспомогательными понятиями, уступившими свое место представлениям, более соответствующим действительности.

Напомним, что теория прямого межчастичного взаимодействия вплотную подвела к осознанию не абсолютного, а реляцион-

ного характера классических пространственно-временных понятий, однако использованных при ее построении принципов оказалось недостаточно для следующего шага – для получения этих понятий из неких более первичных отношений.

Глава 7

5-Мерное обобщение теории гравитации

Как было показано, общая теория относительности (ОТО) — современная теория гравитационных взаимодействий — может быть получена из бинарной геометрофизики, исходящей из более глубоких свойств физической реальности. Это принципиально отличается от исходных посылок эйнштейновской теории гравитации, где констатируется искривленность 4-мерного классического пространства-времени, постулируются уравнения Эйнштейна и развиваются следствия этих положений. С этой точки зрения ОТО теряет свой фундаментальный характер и становится промежуточной теорией между бинарной геометрофизикой и классической физикой. Такой подход позволяет взглянуть под новым углом зрения как на содержание ОТО, так и на суть ее принципиальных проблем. В этой главе рассмотрены некоторые из них, связанные с возможным ее обобщением на 5-мерие и с редукцией теории на меньшие размерности. Так же, как это принято в следующих главах, обсуждение начинается с напоминания принципиальных основ и ключевых положений математического аппарата общепринятой на сегодняшний день теории (ОТО).

7.1 Сущность общей теории относительности

Создание общей теории относительности в начале XX века открыло новую эру в истории учения о пространстве-времени и природе физических взаимодействий. Оно означало возникновение новой физической парадигмы, пятой по классификации,

приведенной в главе 1 (см. блок-схему физических парадигм, изображенную на рисунке 1.6). Как уже отмечалось, согласно этой парадигме физические взаимодействия (поля переносчиков взаимодействий) не являются самостоятельными понятиями (категориями), вносимыми извне в готовое пространство-время, а являются проявлениями свойств искривленного (закрученного, многомерного и т.д.) пространства-времени. Гравитационное взаимодействие оказалось первым, которое удалось связать с геометрией (с метрикой). Вслед за этим фундаментальная физика вплотную подошла к решению проблемы геометризации других взаимодействий в рамках той же, пятой физической парадигмы.

Напомним, что эйнштейновская теория гравитации явилась итогом развития цепочки идей, начиная от работ Н.И.Лобачевского, Я.Бояи и К.Гаусса, открывших первую неевклидову геометрию. Затем необходимы были работы Б.Римана, открывшего второй пример неевклидовой геометрии (геометрию Римана постоянной положительной кривизны) а также класс произвольно искривленных пространств. Важное значение имели труды В.Клиффорда, во-первых, поставившего вопрос о физических проявлениях искривленности пространства, и, во-вторых, сформулировавшего программу геометризации всей физики. Затем необходимы были усилия нескольких поколений геометров, развивших математический аппарат дифференциальной геометрии, вклад Э.Маха, по достоинству оценившего важность геометрического движения для физики и всего научного мировоззрения. И, наконец, важным звеном на пути к ОТО явилось создание специальной теории относительности, приведшей к объединению пространства и времени в единое 4-мерное многообразие. Только после всего этого и после того, как был поставлен вопрос об описании гравитационного взаимодействия в рамках 4-мерного пространства-времени, возникла общая теория относительности.

Как писал В.А.Фок: “Истинной логической основой теории тяготения Эйнштейна является не идея общей относительности и не принцип эквивалентности, а другие две идеи, именно: идея объединения пространства и времени в единое хроногеометрическое многообразие с индефинитной метрикой (эта идея была осуществлена Эйнштейном уже в его теории 1905 г. – в “частной” теории относительности) и отказ от “жесткости” метрики, позволивший связать ее с явлением тяготения, а тем самым и с весомой материей (уравнения тяготения Эйнштейна)” [79]. Таким образом был осуществлен переход сначала от априорных ньютоновских пространства и времени к 4-мерному (плоскому) пространству Минковского, а затем к искривленному 4-мерному пространству-времени ОТО.

В предыдущих главах показано, что от бинарной геометрофизики осуществляется переход в макрообласть, причем при этом возникают представления, соответствующие общей теории относительности. Однако из изложенного видно, что как эйнштейновская теория гравитации, так и все исследования в рамках пятой физической парадигмы, можно понимать лишь как промежуточное звено между, с одной стороны, физическими теориями и программами, задержавшимися на первой физической парадигме, и, с другой стороны, развиваемой в этой книге еще более глубокой бинарной геометрофизикой (девятой физической парадигмой).

Наиболее типичной теорией гравитации в рамках первой физической парадигмы является так называемая релятивистская теория гравитации А.А.Логунова [39]. В ней постулируется априорное плоское пространство-время и на его фоне задается тензорное поле второго ранга. С помощью ряда дополнительных соображений для него записывается лоренц-инвариантный лагранжиан, из которого вариационным методом выводятся уравнения гравитационного поля, соответствующие нелинейным уравнениям Эйнштейна. Показывается, что в такой теории из метрического тензора пространства Минковского и тензорного поля второго ранга можно определить эффективную риманову метрику, тогда в одном из вариантов теории Логунова уравнения гравитационного поля совпадают с уравнениями Эйнштейна.

Заметим, что идея получения эффективной метрики из метрики Минковского и тензорного воздействия второго ранга ранее была осуществлена в рамках теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия фоккеровского типа, что было показано в §2.4. Только там вместо тензорного поля второго ранга (как у Логунова) использовалось прямое воздействие на избранную частицу со стороны другой частицы, пропорциональное ее тензору энергии-импульса $T_{\mu\nu}$.

7.2 Математические основы общей теории относительности

Напомним самые необходимые положения общей теории относительности. Предполагается, что читатель владеет основами ОТО, поэтому излагаемый здесь материал предназначен, во-первых, для введения используемых ниже обозначений и, во-вторых, для выделения ключевых положений ОТО, о которых далее будет идти речь.

1. В самой основе эйнштейновской ОТО лежит представление об искривленном 4-мерном пространстве-времени, в котором

квадрат интервала (парное отношение) между двумя близкими событиями, различающимися координатами dx^μ, задается формулой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{7.2.1}$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ - компоненты 4-мерного метрического тензора, зависящие от координат. Ими описываются метрические свойства пространства-времени и одновременно гравитационное взаимодействие. В некотором смысле компоненты метрики являются тензорными потенциалами гравитационного "поля".

2. Движение пробных тел в искривленном пространстве-времени описывается *временно-подобными геодезическими*, которые получаются из вариационного принципа

$$\delta s = \delta \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0, \tag{7.2.2}$$

где варьируется длина s мировой линии частицы с закрепленными концами в точках $\underline{x}$ и $\overline{x}$. Используя выражение

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds), \tag{7.2.3}$$

находим

$$\delta s = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \delta(ds) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left[2g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right] ds\delta x^\sigma +$$

$$+ \left(g_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\sigma\right)_{\overline{x}} - \left(g_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\sigma\right)_{\underline{x}} = 0. \tag{7.2.4}$$

При закрепленных концах из второй строки следует уравнение геодезической линии

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}, \tag{7.2.5}$$

где

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{7.2.6}$$

– *символы Кристоффеля*. Напомним, что в уравнениях (7.2.5) отсутствует масса тела, что отражает проявление так называемого принципа эквивалентности (все тела движутся в искривленном пространстве-времени независимо от значений их масс).

3. В геометрической теории вместо частных производных от произвольных тензорных (физических или геометрических) величин $B^{\mu\cdots}_{\nu\ldots}$ необходимо использовать *ковариантные производные*

$$\nabla_\sigma B^{\mu\cdots}_{\nu\ldots} = \frac{\partial B^{\mu\cdots}_{\nu\ldots}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} B^{\lambda\cdots}_{\nu\ldots} + \cdots - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} B^{\mu\cdots}_{\lambda\ldots} - \cdots, \qquad (7.2.7)$$

где многоточия в основной строке означает, что аналогичные выражения с символами Кристоффеля пишутся для каждого ко- или контравариантного индекса тензорной величины $B^{\mu\cdots}_{\nu\ldots}$. Дополнительные к частным производным слагаемые справа в (7.2.7) описывают гравитационные взаимодействия соответствующих физических полей.

4. Специальные комбинации из вторых производных от метрического тензора образуют важную тензорную геометрическую характеристику искривленных многообразий

$$R^\lambda_{\cdot\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \qquad (7.2.8)$$

– *тензор кривизны* четвертого ранга (тензор Римана-Кристоффеля). Из него строятся тензоры кривизны меньших рангов:

$$R_{\beta\nu} \equiv R^\lambda_{\cdot\beta\lambda\nu}; \qquad R \equiv R_{\beta\nu} g^{\beta\nu} \qquad (7.2.9)$$

соответственно тензор Риччи и скалярная кривизна.

5. В ОТО из произвольных искривленных (римановых) пространственно-временных многообразий выделяются те, которые удовлетворяют *уравнениям Эйнштейна*[1]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = æ T_{\mu\nu}, \qquad (7.2.10)$$

где $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса негеометризованной (внешней к геометрии) материи,

$$æ = \frac{8\pi k_g}{c^4} \qquad (7.2.11)$$

[1] Заметим, что в общем случае в уравнения Эйнштейна можно ввести еще одно слагаемое с космологической постоянной Λ, тогда

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = æ T_{\mu\nu}.$$

В настоящее время не ясна роль этой постоянной. Известно только, что если она отлична от нуля, то должна быть чрезвычайно малой ($|\Lambda| < 10^{-56}$см$^{-2}$).

- эйнштейновская гравитационная постоянная. Здесь, напомним, k_g – ньютоновская гравитационная постоянная

Уравнения Эйнштейна трактуются как уравнения гравитационного поля. Они имеют смысл соотношений, связывающих, с одной стороны, геометрическую характеристику пространства-времени (левую часть уравнений Эйнштейна) и, с другой стороны, физическую характеристику помещенной в пространство-время материи (правую часть уравнений).

Уравнения Эйнштейна постулируются (как это сделал сам Эйнштейн), либо их можно получить из вариационного принципа, постулировав в качестве плотности лагранжиана плотность скалярной кривизны (как это сделал Д.Гильберт)

$$\mathcal{L}_g = -\frac{\sqrt{-g}}{2æc}R. \tag{7.2.12}$$

6. В общепринятой теории *электромагнитное поле* трактуется как негеометризованное физическое поле, которое должно вноситься в правую часть уравнений Эйнштейна (или как негеометрический добавок в плотность лагранжиана). Оно описывается векторным потенциалом A_μ или тензором электромагнитной напряженности $F_{\mu\nu}$, связанным с потенциалом согласно формуле вида (2.3.11). Его тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu}_{(A)} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu}_{\cdot\alpha}F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right). \tag{7.2.13}$$

Вторая пара уравнений Максвелла записывается в искривленном пространстве-времени следующим образом

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 4\pi j^\mu, \tag{7.2.14}$$

где j^μ - плотность тока заряженной материи.

Уравнения Эйнштейна в присутствии электромагнитного поля и уравнения Максвелла (7.2.14) можно получить из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}_{g,A} = -\frac{\sqrt{-g}}{2æc}\left(R + \frac{k}{c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right). \tag{7.2.15}$$

7. *Уравнения движения заряженной частицы* в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля записываются в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2}F^{\mu}_{\cdot\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}, \tag{7.2.16}$$

где q – электрический заряд частицы, m – ее масса. Это уравнение обобщает уравнение геодезической линии (7.2.5). Последний член справа в (7.2.16) описывает электромагнитную силу Лоренца.

8. Для *скалярного поля* φ, трактуемого в общепринятой ОТО также как внешнего к геометрии, плотность лагранжиана задается в виде

$$\mathcal{L}_{g,\varphi} = \sqrt{-g}\left[-\frac{R}{2æc} + \frac{\hbar^2}{2mc}\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{(mc)^2}{\hbar^2}\varphi^2\right)\right]. \quad (7.2.17)$$

Из этого выражения варьированием получается уравнение Клейна-Фока

$$[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + (mc/\hbar)^2]\varphi =$$
$$= g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0. \quad (7.2.18)$$

Тензор энергии-импульса скалярного нейтрального поля находится в виде

$$T^{(\varphi)}_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^2 - g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\right]. \quad (7.2.19)$$

Однако имеются и другие варианты выбора плотности лагранжа скалярного поля, приводящие к иным выражениям для тензора энергии-импульса и к дополнительным слагаемым в уравнении (7.2.18). В частности, в (7.2.18) может возникнуть слагаемое вида $aR\varphi$, где a некоторый числовой коэффициент.

9. Для описания *спинорного поля* ψ в искривленном пространстве-времени следует исходить из плотности лагранжиана для негеометрической материи вида

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i\hbar c}{2}\sqrt{-g}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi + \frac{imc}{\hbar}\overline{\psi}\psi\right), \quad (7.2.20)$$

где m - масса покоя спинорного поля, γ_μ - 4-рядные матрицы Дирака в искривленном пространстве-времени, связанные с метрическим тензором соотношением

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2I_4 g_{\mu\nu}. \quad (7.2.21)$$

Кроме того, в (7.2.20) содержится оператор ковариантного диффернцирования спинора, который имеет вид

$$\nabla_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - i\tilde{A}_\mu\psi - \frac{1}{4}\Delta_\mu(\alpha\beta)\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\psi, \quad (7.2.22)$$

где $\tilde{A}_\mu$ - некоторое векторное поле, которое через размерную константу может быть отождествлено с векторным потенциалом электромагнитного поля, $\Delta_\mu(\alpha\beta)$ - коэффициенты вращения Риччи, связанные с символами Кристоффеля соотношением

$$\Delta_\mu(\alpha\beta) = g^\nu(\beta)\frac{\partial g_\mu(\alpha)}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_\lambda(\alpha) g^\nu(\beta). \qquad (7.2.23)$$

Здесь $g_\mu(\alpha)$ - компоненты тетрады, составляющие метрический тензор согласно

$$g_\mu(\alpha) g_\nu(\alpha) = g_{\mu\nu}. \qquad (7.2.24)$$

Зависящие от координат векторные матрицы γ_μ связаны с общепринятыми матрицами Дирака (скалярами) $\gamma(\alpha)$ через компоненты тетрады следующим образом

$$\gamma_\mu = g_\mu(\alpha)\gamma(\alpha). \qquad (7.2.25)$$

Варьируя (7.2.20) по $\overline{\psi}$, можно получить уравнение Дирака в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c} A_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4}\Delta_{\mu\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0. \qquad (7.2.26)$$

7.3 Проблемы теории гравитации, связанные с размерностью

В современной теории гравитации, описываемой эйнштейновской ОТО, имеется ряд как внутренних, так и внешних проблем. Под посленими будем понимать вопросы, возникающие при распространении методов ОТО на другие понятия и взаимодействия. Выделим несколько фундаментальных проблем ОТО, связанных с ее размерностью и редукциями на меньшие размерности.

1. Общепринятое описание фермионов в искривленном пространстве-времени также наводит на мысль о переходе к многообразиям большей размерности. Известно, что характер общепринятых спиноров (число компонент, их вещественность или комплексность) существенно зависит от размерности и сигнатуры многообразия [65]. Это устанавливается с помощью алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел. Оказывается, принятое в теории поля описание фермионов посредством 4-компонентных комплексных спиноров соответствует не 4-мерному, а 5-мерному пространственно-временному многообразию.

2. Возникает вопрос, не противоречит ли ОТО допущение, следующее из бинарной геометрофизики и других соображений, о существовании дополнительной размерности, обозначенной в предыдущих главах символом x^4 и физически интерпретируемой как действие (или значение интервала s). В этой главе будем рассматривать нейтральную материю, то есть пока вопрос о дополнительной размерности не будем связывать с проблемой описания электромагнитного или какого-либо другого известного взаимодействия. Оказывается, противоречий нет. Эта проблема обсуждалась рядом авторов в связи с другими обстоятельствами. Она рассмотрена в следующем параграфе.

3. Следующая проблема имеет обратный характер, – если стандартная ОТО вложена в некую геометрическую модель большей размерности, то необходимо с самых общих позиций обсудить переход от нее к теории меньшей размерности, в частности, следует разработать методику проектирования (размерной редукции) теории большей размерности на многообразие меньшей размерности. Для этой цели были разработаны монадный, диадный и другие методы. Монадный метод обсужден в §7.5.

4. С переходом к теории меньшей размерности оказалась связанной другая классическая проблема, возникшая почти одновременно с созданием общей теории относительности. Имеется ввиду тот факт, что уравнения Эйнштейна состоят из двух качественно различных частей: геометрической левой и физической правой. Эйнштейн в некоторых своих работах говорил о том, что ОТО стоит "на двух ногах" – одной монолитной каменной (левой, геометрической) и второй глиняной (правой, физической). Если проследить его работы по ОТО, то можно заметить, что везде, где это было возможно, он избегал написания правой части в своих уравнениях. Он полагал, что в теории будущего удастся избежать такой двойственности.

На самом деле здесь имеется блок проблем, из которых следует выделить проблему геометризации весомой материи – частиц, по классификации физических категорий, данной в §1.5. Оказывается, имеется ее решение в рамках теории большей размерности. Обсуждению этого вопроса в рамках 5 измерений посвящен §7.6.

5. С работ В.Клиффорда, Г.Вейля и А.Эйнштейна начались исследования проблемы геометризации не только гравитационного, но и других видов физических взаимодействий. На попытки решения этой проблемы были затрачены огромные усилия. Следует напомнить варианты геометрического объединения гравитации и электромагнетизма, предложенные Г.Вейлем, А.Эддингтоном, самим А.Эйнштейном, Т.Калуцей и другими. В рамках этих исследований были открыты неримановы геометрии. Од-

нако, время показало, что наиболее перспективными оказались многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы.

Анализ показывает, что многомерные геометрические модели с неплохой степенью приближения отражают свойства реального мира. В их рамках можно описать известные виды физических взаимодействий, что, в частности, показано в этой книге. В следующих главах последовательно будет показано, как осуществляется

1) геометризация электромагнетизма (глава 8);

2) геометризация электрослабых взаимодействий, то есть описание в геометрических терминах всех промежуточных бозонных полей модели Вайнберга-Салама (главы 10 и 11);

3) геометризация сильных взаимодействий (глюонов – переносчиков сильных взаимодействий в хромодинамике). Это сделано в главе 16.

6. К внутренним проблемам ОТО рассматриваемого рода относится проблема описания наблюдаемых величин. Еще раз напомним, что ОТО сформулирована в терминах тензорных величин. Значения компонент тензоров зависят от выбора координатной системы. Однако основные соотношения ОТО ковариантны, то есть не зависят от выбора координатных систем. Декларируется, что, в общем случае, если это особо не оговорено, координаты не имеют непосредственного физического смысла, а являются лишь абстрактными номерками точек-событий. Тогда спрашивается, как привязать компоненты тензорных величин к тем понятиям, которые экспериментатор измеряет в своей лаборатории? Что является измеримым в общей теории относительности. Эта проблема беспокоила многих исследователей. Дело доходило до того, что, не найдя четкого ответа на этот вопрос, некоторые теоретики ставили под сомнение правомерность всей эйнштейновской теории гравитации.

Анализ проблемы показывает, что для подобных утверждений нет никаких оснований. Речь должна идти лишь о дополнении ОТО специальным математическим аппаратом (или методом) описания наблюдаемых величин. Этот аппарат принято называть методом задания (описания) систем отсчета в теории гравитации. Он состоит в редукции 4-мерной ОТО на 3-мерные пространственные сечения систем отсчета. Этот вопрос обсужден в §7.7.

Решения всех перечисленных выше проблем и ряда других тесно связаны с использованием одних и тех же методов 1+n-расщепления (а также 1+1+n- и т.д. -расщепления) пространственно-временного многообразия. Отметим, что алгебраическая часть этих (монадных и диадных) методов уже существенно ис-

пользовалась в предыдущих главах, а также в первой части книги при построении бинарной геометрофизики. Но эти методы имеют и другие составные части.

7.4 Общая теория относительности как 5-оптика

1. В обсужденном в предыдущей главе переходе к общей теории относительности от принципов бинарной геометрофизики можно усмотреть связь с рядом идей, высказывавшихся некоторыми авторами в ином контексте. Прежде всего, следует отметить созвучие с идеями Ю.Б.Румера о многомерной оптике. Они фактически реализуются в бинарной геометрофизике. В книге Ю.Б.Румера "Исследования по 5-оптике" [59] напоминаются забытые идеи Ф.Клейна, высказанные в самом конце прошлого века. Ф.Клейн писал, что "каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде" [59, с.11]. Как пишет Ю.Б.Румер: "В примечаниях Клейн указывает, что в лекциях, читанных в 1891 году в Геттингене, он вывел всю теорию Гамильтона-Якоби из системы квазиоптических представлений в пространстве высшего числа измерений. Десять лет спустя он с горечью отмечает, что эти идеи, изложенные на съезде естествоиспытателей в Галле "не встретили того общего признания, на которое я рассчитывал"." Эти идеи Ф.Клейна спустя пол столетия использовал Ю.Б.Румер.

2. Следующей идеей, общей с бинарной геометрофизикой, следует назвать идею Румера о геометризации квантовой теории посредством пятой координаты – действия, от которой постулируется циклическая зависимость физических величин. Он писал: "Было бы, однако, неверным рассматривать пятимерную оптику только как один из вариантов единой теории поля: ее основное содержание заключается скорее в геометризации основных понятий квантовой физики, поскольку в ней квантование обнаруживается как проявление периодической зависимости всех физических полей от пятой координаты действия. Поскольку само "пятимерие" оказывается квантовым эффектом, становятся понятными неудачи всех предшествующих попыток построения пятимерных единых теорий поля на базе одних лишь классических представлений без существенного привлечения квантовых понятий" [59, с.9].

3. Продемонстрируем отмеченную Румером симметрию названных им пяти координат (на пути синтеза идей ОТО и кван-

товой теории) в рамках классической общей теории относительности, очистив этот вопрос от наслоений электромагнетизма, присутствовавших в работах Румера. Для этого вернемся к выводу уравнений геодезических линий с помощью вариационного принципа (см. (7.2.2) – (7.2.4). Из последней строки (7.2.4) для движущейся по геодезической линии частицы при свободном верхнем конце линии имеем

$$\frac{\partial s}{\partial x^\sigma} = u_\sigma, \tag{7.4.1}$$

где u_σ – 4-скорость частицы. Используя свойство 4-скорости в 4-мерном пространстве-времени

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1, \tag{7.4.2}$$

приходим к общерелятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial s}{\partial x^\mu} \frac{\partial s}{\partial x^\nu} - 1 = 0. \tag{7.4.3}$$

4. Будем искать решение в неявном виде как уравнение некой 4-мерной гиперповерхности в 5-мерном многообразии

$$f(x^\mu, s) = f_0. \tag{7.4.4}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x^\mu} = 0. \tag{7.4.5}$$

Выражая отсюда $\partial s / \partial x^\mu$ и подставляя в (7.4.3), находим уравнение 5-эйконала

$$G^{AB} \frac{\partial f}{\partial x^A} \frac{\partial f}{\partial x^B} = 0, \tag{7.4.6}$$

где контравариантные компоненты 5-мерного метрического тензора имеют вид

$$G^{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right). \tag{7.4.7}$$

Отсюда легко находятся компоненты ковариантного метрического тензора

$$G_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right). \tag{7.4.8}$$

5-мерного пространства-времени с сигнатурой $(+----)$. Будем обозначать пятую координату s, пропорциональную действию частицы $S = mcs$, символом x^4, как это было сделано в предыдущих разделах.

5. С другой стороны, можно показать, что уравнения изотропных геодезических линий в 5-мерном многообразии

$$k^A \nabla_A k^B = 0, \tag{7.4.9}$$

где k^A -изотропный вектор $(G_{AB}k^A k^B = 0)$, с метрикой вида (7.4.8) сводятся к уравнениям неизотропных геодезических линий (7.2.5) в 4-мерном римановом пространстве-времени. Для этого нужно положить

$$k^A = \frac{dx^A}{ds}, \tag{7.4.10}$$

тогда из (7.4.9) при значении индекса $B = 0$ получаем уравнения 4-мерных геодезических линий.

6. Легко также показать, что из 5-мерных уравнений Эйнштейна

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}({}^5R) = æT_{AB} \tag{7.4.11}$$

при значениях индексов $A, B = 0, 1, 2, 3$ для метрики вида (7.4.8) получаются 4-мерные уравнения Эйнштейна (7.2.10).

7. Ю.Б.Румер, обсуждая *квантовые аспекты 5-оптики*, ссылался на сходные по содержанию работы О.Клейна [28] и В.А.Фока [77], в которых с помощью 5-мерных представлений впервые было записано релятивистское обобщение уравнения Шредингера. Ю.Б.Румер писал [59, с.21]: "Фактически эти авторы установили эквивалентность задачи классической механики и геометрической пятимерной оптики, т.е. независимо от Ф.Клейна обнаружили возможность сформулировать механику как квазиоптику в пространстве высшего числа измерений. Больше того, они обнаружили, что и соответствующая задача волновой механики о движении частицы со спином нуль может быть сформулирована как задача волновой оптики о распространении скалярных волн в пятимерном пространстве, если на зависимость скалярной волновой функции Φ от пятой координаты наложить *условие цикличности*:

$$\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) \exp\left(\frac{imcx^4}{\hbar}\right). \tag{7.4.12}$$

В самом деле, если в волновое уравнение для 5-пространства

$$\sum_{A=0}^{A=4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^A \partial x^A} = 0 \tag{7.4.13}$$

подставить выражение (7.4.12), то для функции $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ получается хорошо известное уравнение для волн материи

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0.'' \tag{7.4.14}$$

8. При рассмотрении полей в 5-мерном пространстве Румер предложил разлагать соответствующие им волновые функции в ряды Фурье

$$\Phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(\frac{inmcx^4}{\hbar}\right) \varphi(x^\mu|n), \tag{7.4.15}$$

где $\varphi(x^\mu|n)$ – коэффициенты разложения Фурье. Им была предложена процедура усреднения произвольных комбинаций из 5-мерных величин $\tilde{\mathcal{L}}$ по периоду пятой координаты:

$$\frac{mc}{h} \int\limits_0^{h/mc} \tilde{\mathcal{L}}(x^\mu, x^4) dx^4 = \mathcal{L}(x^\mu). \tag{7.4.16}$$

В частности, эта процедура должна применяться для определения 4-мерного действия волновых полей

$$\int \tilde{\mathcal{L}} \left(\Phi; \frac{\partial \Phi}{\partial x^A}\right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 =$$

$$= \int \mathcal{L} \left(\varphi(x^\mu|n); \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{7.4.17}$$

Ю.Б.Румер писал: “Последовательный переход от функций пяти координат $\Phi(x^\mu, x^4)$ к составляющим Фурье $\varphi(x^\mu|n)$, зависящим от четырех координат x^μ, есть переход от q- представления относительно x^i, x^4 к смешанному представлению: p-представлению относительно координаты x^4 и q-представлению относительно координат x^i. В таком представлении все формулы приобретают привычный четырехмерный вид” [59, с.65].

Однако при осуществлении своей программы Румер столкнулся с рядом трудностей как объективного, так и субъективного характера. На наш взгляд, главной из них явилась попытка Румера в рамках 5 измерений одновременно решить две задачи: геометризовать действия (квантовую теорию) и геометризовать электромагнетизм. Другие трудности будут обсуждены в следующей главе.

7.5 Монадный метод редукции (1+n-расщепления)

В предыдущем параграфе было доказано слабое утверждение, что 4-мерную ОТО можно считать вложенной в 5-мерное искривленное пространство-время с метрикой G_{AB} вида (7.4.8). Однако это не означает, что метрика не может иметь более общий вид. Об этом свидетельствует и обсуждение сути гравитации в предыдущих главах. Но тогда можно ожидать некоторые новые следствия. В связи с постановкой этой задачи, а также и в связи с проблемами построения многомерных геометрических моделей других взаимодействий обсудим обратную предыдущему параграфу задачу – переход от теории высшей размерности к меньшей.

Понижение размерности на единицу описывается монадным методом. Отметим, что он возник в рамках 5-мерных теорий Калуцы и Клейна в 30-х годах в связи с необходимостью проектирования (1+4-расщепления) теории на 4-мерное пространство-время ОТО. В дальнейшем он был усовершенствован в рамках 4-мерной теории при разработке методов описания систем отсчета (см. §7.7).

Как уже отмечалось ранее, монадный метод редукции можно представить состоящим из четырех частей:

1) алгебры монадного метода;

2) задания монадных физико-геометрических тензоров;

3) определения монадных операторов дифференцирования;

4) записи основных соотношений теории в монадном виде.

Подробно этот метод изложен в двух книгах автора [9, 11]. Здесь ограничимся напоминанием и кратким обсуждением самых необходимых формул. Сделаем это в самом общем виде, последовательно по пунктам.

1. **Алгебра монадного метода** уже рассматривалась в §4.6. К этому добавим следующее. В теориях, где применяется монадный метод, следует оперировать лишь с величинами, спроектированными либо на выделенное направление, либо на ортогональные ему направления. Это достигается внутренним умно-

жением тензорных величин $B^{A\cdots}_{C\cdots}$ либо на вектор монады, либо на компоненты $n-1$-мерного (в данном случае 4-мерного) метрического тензора:

$$B_{AC}\xi^A\xi^C = B; \qquad B^{AC\cdots}g^\mu_A g^\nu_C \cdots \equiv \tilde{B}^{\mu\nu\cdots}, \tag{7.5.1}$$

где, во-первых, использованы обозначения для монадных составляющих метрического тензора из (4.6.2)

$$G_{AB} = g_{AB} - \xi_A\xi_B,$$

во-вторых, формулы будут писаться для сигнатуры $(+----)$, когда имеют место условия ортонормированности (4.6.3) и, в-третьих, будет использоваться калибровка монады типа хронометрической

$$\xi^A = \frac{G^A_4}{\sqrt{-G_{44}}}; \quad \xi_A = \frac{G_{A4}}{\sqrt{-G_{44}}}. \tag{7.5.2}$$

В дальнейшем монадный метод будет применяться и для других задач, тогда индексы с номером 4 будут соответствовать индексам с номерами 0 (в §7.7)), 5 (в следующей главе) и некоторым другим. В частности, квадрат интервала (3.6.1) можно представить в виде

$$G_{AB}dx^A dx^B = ds^2 - d\xi^2, \tag{7.5.3}$$

где использованы спроектированные согласно (7.5.1) смещения

$$d\xi = dx^A\xi_A; \qquad ds^2 = g_{AB}d\tilde{x}^A d\tilde{x}^B \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{7.5.4}$$

Для изотропных частиц имеем

$$0 = ds^2 - d\xi^2 \to d\xi^2 = ds^2. \tag{7.5.5}$$

2. **Монадные физико-геометрические тензоры** – это тензоры, которые можно построить из монадных составляющих метрического тензора и их первых производных. Имеются три и только три таких тензора:

$$\Phi_A = \xi^B(\xi_{A,B} - \xi_{B,A}) \to \Phi_\mu = \frac{1}{\xi_4}\left(-\frac{\partial\xi_4}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^4}\right); \tag{7.5.6}$$

$$\tilde{F}_{AB} = -\frac{1}{2}g^C_A g^D_B(\xi_{C,D} - \xi_{D,C}) \to$$

$$\to \tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \Phi_\mu \xi_\nu - \Phi_\nu \xi_\mu\right); \tag{7.5.7}$$

$$Д_{AB} = \frac{1}{2}\left(\xi^C g_{AB,C} + \xi^C_{,B} g_{AC} + \xi^C_{,A} g_{BC}\right) \to$$

$$\to Д_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\xi_4}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4}. \tag{7.5.8}$$

Во всех этих формулах сначала записан вид соответствующего тензора в общековариантном виде, а затем тензоры переписаны в используемой калибровке типа хронометрической. Запятой, как обычно, обозначены частные производные.

3. **Монадные операторы дифференцирования** заменяют ковариантные производные и по определению таковы, что, действуя на спроектированные величины, приводят к спроектированным же выражениям. Таковых операторов два: монадный оператор вдоль выделенного направления и монадный оператор ковариантного дифференцирования в ортогональном ξ_A сечении. Для построения первого из них используется производная Ли. Как известно, если в некоторой области многообразия определено векторное поле (в данном случае поле монады ξ_A), то вдоль него можно задать производную Ли от произвольного тензора

$$\mathcal{L}_{(\xi)} B^{A\cdots}_{B\ldots} = \xi^C \nabla_C B^{A\cdots}_{B\ldots} - B^{C\cdots}_{B\ldots} \nabla_C \xi^A - \cdots + B^{A\cdots}_{C\ldots} \nabla_B \xi^C + \cdots, \tag{7.5.9}$$

где точками в основной строке обозначены аналогичные слагаемые, записываемые для каждого ковариантного или контравариантного индекса.

а) Монадный оператор по выделенному направлению записывается проектированием производной Ли по всем индексам на ортогональные ξ_A направления. Запишем этот оператор сразу в используемой калибровке

$$\partial_4^\dagger \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\nu\ldots} = \xi^B \frac{\partial \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\nu\ldots}}{\partial x^B} = \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\nu\ldots}}{\partial x^4}. \tag{7.5.10}$$

Этот оператор не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемой величины.

б) Оператор ковариантного дифференцирования по направлениям, ортогональным выделенному, имеет вид

$$\nabla_\sigma^\dagger \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\nu\ldots} = \partial_\sigma^\dagger \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\nu\ldots} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} \tilde{B}^{\lambda\cdots}_{\nu\ldots} + \cdots - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} \tilde{B}^{\mu\cdots}_{\lambda\ldots} + \cdots, \tag{7.5.11}$$

где использованы обозначения

$$\partial_\sigma^\dagger = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} - \frac{G_{4\sigma}}{G_{44}}\frac{\partial}{\partial x^4} \tag{7.5.12}$$

– калибровочно инвариантный оператор дифференцирования по направлениям сечения, ортогонального ξ_A;

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial^{\dagger}_{\lambda} g_{\sigma\nu} + \partial^{\dagger}_{\sigma} g_{\nu\lambda} - \partial^{\dagger}_{\nu} g_{\sigma\lambda}) \qquad (7.5.13)$$

– калибровочно инвариантная связность в сечении.

4. **Основные соотношения теории в монадном виде** записываются таким образом, что в них входят только спроектированные величины, монадные физико-геометрические тензоры и монадные операторы дифференцирования. В дальнейшем наибольший интерес будет представлять 5-мерная скалярная кривизна. В монадном виде она представляется следующим образом

$$^5R = {}^5R_{AB} G^{AB} = {}^4\tilde{R} + Д^2 + Д_{\mu\nu} Д^{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} -$$

$$-2 \left(-\partial^{\dagger}_4 Д + \Phi_\alpha \Phi^\alpha + \nabla^{\dagger}_\alpha \Phi^\alpha \right). \qquad (7.5.14)$$

Здесь 4-мерная скалярная кривизна записана со значком тильда, означающим, что в ней все производные имеют калибровочно инвариантный вид (7.5.11), а вместо обычных символов Кристоффеля стоят выражения (7.5.13).

Аналогичным образом записываются и другие общековариантные 5-мерные выражения, уравнения и тождества теории.

В геометрических моделях, как и в ОТО, скалярная кривизна играет роль лагранжиана теории. Из (7.5.14) видно, что в самом общем случае в такой 5-мерной теории можно было бы ожидать существование дополнительных полей, описываемых тремя физико-геометрическими тензорами (7.5.6) – (7.5.8). Очевидно, при 5-мерной метрике вида (7.4.8) эти тензоры обращаются в нуль. Возможен некий промежуточный вариант.

7.6 5-Мерная геометрическая модель

1. В рамках 5-й физической парадигмы, полагая, что физическое пространство-время 5-мерно, теорию следует строить, исходя из 5-мерной *гиперплотности лагранжиана*, состоящего из геометрической и физической частей

$$\tilde{\mathcal{L}}_{g,m} = \sqrt{G^{(5)}} \left(-\frac{1}{2\tilde{æ}c} {}^5R + \tilde{\mathcal{L}}'_m \right), \qquad (7.6.1)$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_m = \sqrt{G^{(5)}} \tilde{\mathcal{L}}'$ – гиперплотность лагранжиана негеометрической материи.

Если материю описывать *комплексным скалярным полем* Φ, то для физической части гиперплотности лагранжиана имеем

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\Phi} = \sqrt{G^{(5)}}\frac{\hbar^2}{2mc}G^{AB}\nabla_A\Phi^*\nabla_B\Phi. \tag{7.6.2}$$

Это выражение обобщает (7.2.17) на 5-мерный случай и отличается от него отсутствием слагаемого с массой покоя.

Если рассматривается *фермионная материя*, описываемая 4-компонентными комплексными спинорами Ψ, то плотность физического лагранжиана следует брать в виде

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\Psi} = \sqrt{G^{(5)}}\frac{\hbar c}{2}\left(i\overline{\Psi}\gamma^A\nabla_A\Psi + (h.c.)\right), \tag{7.6.3}$$

где используются все пять компонент 4-рядных матриц Дирака, а $\nabla_A\Psi$ – ковариантная производная спинора в 5-мерном пространстве-времени, записываемая аналогично (7.2.22). Напомним, что общепринятые (постоянные) 4-рядные матрицы Дирака $\gamma(C)$ связаны с зависящими от координат векторными матрицами γ^A соотношениями

$$\gamma^A = G^A(C)\gamma(C), \tag{7.6.4}$$

где $G_A(C)$ – компоненты пентады, определяющие 5-мерную метрику G_{AB} согласно

$$G_A(C)G_B(C) = G_{AB}. \tag{7.6.5}$$

2. Для перехода к 4-мерной теории необходимо произвести две процедуры, составляющие вместе размерную редукцию. Первая из них – процедура 1+4-расщепления, описанная выше. В результате 5-мерные плотности геометрического и физического лагранжианов записываются через 4-мерные физические и физико-геометрические тензоры. Вместо частных производных возникают калибровочно инвариантные производные вида (7.5.10) и (7.5.11).

Вторая процедура состоит в усреднении (интегрировании) по периоду зависимостей от дополнительной координаты x^4 согласно методике, применявшейся Румером, то есть следует использовать формулы (7.4.16) – (7.4.17).

3. Чтобы это сделать необходимо конкретизировать зависимость геометрических и физических величин от координаты x^4. Если не преследовать цель геометризации материи (см. §7.7), то

естественно наложить на 5-мерную метрику условие цилиндричности по дополнительной координате

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^4} = 0. \tag{7.6.6}$$

Кроме того, положим, что

$$G_{44} = -1. \tag{7.6.7}$$

Это означает, что два из монадных физико-геометрических тензоров обращаются в нуль

$$\Phi_\mu = 0; \quad Д_{\mu\nu} = 0. \tag{7.6.8}$$

Отличным от нуля в общем случае может быть только тензор $\tilde{F}_{\mu\nu}$, принимающий чисто роторный вид от векторного потенциала ξ_μ.

Для физических величин, как скалярных, так и спинорных, необходимо выбрать зависимость в виде (7.4.12), где m в показателе экспоненты определяет массу этого поля.

При проведении второй процедуры следует использовать формулу

$$\int\limits_0^{h/mc} \exp\left(\frac{inmcx^4}{\hbar}\right) dx^4 = 0 \tag{7.6.9}$$

при n - целом числе. После интегрирования останутся только такие члены, в которых отсутствуют экспоненциальные слагаемые, то есть в итоге проведения двух процедур получится 4-мерное выражение, не зависящее от дополнительной координаты.

4. Например, из 5-мерной плотности лагранжиана (7.6.1) со скалярной негеометрической материей получается 4-мерная плотность лагранжиана знакомого вида

$$\int\limits_0^{h/mc} \tilde{\mathcal{L}}_{g,\varphi} dx^4 = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2æc}({}^4R + \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\hbar^2}{2mc}\left(g^{\alpha\beta}\partial^+_\alpha\varphi^*\partial^+_\beta\varphi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^*\varphi\right)\right], \tag{7.6.10}$$

где

$$\partial^+_\beta \varphi^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{imc}{\hbar}\xi_\beta\right)\varphi^*; \quad \partial^+_\beta \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} - \frac{imc}{\hbar}\xi_\beta\right)\varphi. \quad (7.6.11)$$

Здесь ξ_β - 4-мерные компоненты монады. Кроме того, в (7.6.10) учтено соотношение констант $\tilde{æ} = æ\hbar/mc$.

Из этой плотности лагранжиана вариационным методом легко получить известные уравнения Эйнштейна (7.2.10) с тензором энергии-импульса скалярного поля (7.2.19) справа и уравнения Клейна-Фока (7.2.18).

5. Аналогичным образом из 5-мерной плотности можно получить 4-мерную плотность лагранжиана спинорной материи и соответствующее уравнение Дирака. Этот вопрос рассмотрен в книге автора [11, с.58] и подробно будет обсужден в следующих главах в рамках геометрических моделей большей размерности.

7.7 Геометризация скалярного поля

1. Из теорий прямого межчастичного взаимодействия, в частности, из бинарной геометрофизики, следует, что компоненты метрического тензора (как и потенциалы электромагнитного взаимодействия) имеют смысл лишь в тех местах, где имеются взаимодействующие частицы. Этот факт наводит на мысль моделировать частицы в многомерной теории посредством конформного фактора χ^2. Будем полагать, что исходный 5-мерный метрический тензор $\tilde{G}_{AB}$ содержит в себе характеристики как находящейся в соответствующей точке частицы (χ), так и потенциалы, создаваемые другими частицами в месте расположения первой. Это означает, что компоненты исходного метрического тензора представляются в виде

$$\tilde{G}_{AB} = \chi^2 G_{AB}, \quad (7.7.1)$$

где G_{AB} - компоненты физической метрики – потенциалы, создаваемые другими частицами.

Используя известные формулы для конформных преобразований (см., например, [9, с.33]), можно записать выражение для плотности исходной 5-мерной скалярной кривизны, играющей роль плотности лагранжиана,

$$-\frac{1}{2\tilde{æ}c}\sqrt{\tilde{G}^{(5)}}\,{}^5\tilde{R} = -\frac{\sqrt{G^{(5)}}}{2\tilde{æ}c}\chi^3\left[{}^5R - 4G^{AB}\left(2\frac{\nabla_A\nabla_B\chi}{\chi} + \frac{\chi_{,A}\chi_{,B}}{\chi^2}\right)\right], \quad (7.7.2)$$

где $\tilde{æ}$ - 5-мерное обобщение гравитационной постоянной.

2. Наложим на 5-мерную метрику два существенных ограничения.

1) Будем полагать, что компоненты новой метрики не зависят от дополнительной координаты x^4, то есть пусть условие (7.6.6) относится к метрике G_{AB}. При этом конформный фактор χ^2 в общем случае зависит от x^4, что согласно изложенному в §7.3 может означать массивность скалярного поля χ.

2) Второе условие касается компоненты метрики $\tilde{G}_{44}$. Постулируем, что

$$\tilde{G}_{44} \equiv -\chi^2, \tag{7.7.3}$$

тогда

$$\tilde{G}_{AB} = -\tilde{G}_{44} G_{AB}; \quad G_{44} = -1. \tag{7.7.4}$$

Основанием для такого постулата может служить материал, изложенный в предыдущей главе. Было показано, что компонента $\tilde{G}_{44}$ служит для обоснования пропагаторов, а, следовательно, и для определения самих полей. В данном же случае теория начинает строиться сразу же из полевых выражений. Оставляя в стороне все возможные вопросы о ее значении и считая, что данная геометрическая теория является лишь некой имитацией истинной теории, положим эту компоненту метрики постоянной. Для удобства выбрано значение, равное минус единице.

3. При наложенных условиях на 5-мерную метрику с помощью изложенного выше монадного метода произведем 1+4-расщепление плотности 5-мерной скалярной кривизны. Если бы это расщепление осуществлялось до конформного преобразования, то в общем случае были бы отличны от нуля все три физико-геометрических тензора. Однако после конформного преобразования из вида метрики G_{AB} следует, что опять, как и в (7.6.8),

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} \neq 0; \qquad \Phi_\alpha = 0; \qquad Д_{\alpha\beta} = 0, \tag{7.7.5}$$

то есть роль двух последних физико-геометрических тензоров взяло на себя скалярное поле. С учетом этих соотношений плотность 5-мерной скалярной кривизны (7.7.2) принимает вид

$$-\frac{1}{2\tilde{æ}c}\sqrt{\tilde{G}^{(5)}}\,{}^5\tilde{R} = -\frac{1}{2\tilde{æ}c}\chi^3\sqrt{-g}\,\Big[{}^4R + \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} -$$

$$-\frac{8g^{\alpha\beta}}{\chi}\nabla^\dagger_\alpha\nabla^\dagger_\beta\chi - \frac{4g^{\alpha\beta}}{\chi^2}\nabla^\dagger_\alpha\chi\nabla^\dagger_\beta\chi + \frac{8\chi_{,4,4}}{\chi} + \frac{4\chi^2_{,4}}{\chi^2}\Big]. \tag{7.7.6}$$

4. Используя идеи В.А.Фока и Ю.Б.Румера о характере зависимости величин от дополнительной координаты x^4, представим конформный фактор в следующем виде

$$\sqrt{-\tilde{G}_{44}} = \chi \equiv \tilde{\chi}^{2/3} =$$

$$= \left[1 + b\varphi \exp\left(\frac{-imcx^4}{\hbar}\right) - b\varphi^* \exp\left(\frac{imcx^4}{\hbar}\right)\right]^{2/3}, \qquad (7.7.7)$$

где b - некоторая константа, которая будет определена позже; φ - некоторая комплексная функция, характеризующая скалярное поле и зависящая лишь от четырех классических координат. В этом выражении существенен знак перед последним слагаемым справа. Именно им определяется положительная определенность тензора энергии-импульса скалярного поля φ.

5. Определим действие S геометрической системы обычным образом

$$S = -\frac{1}{2\tilde{æ}c}\int\int \sqrt{\tilde{G}^{(5)5}}R dx^4 d^4x \equiv \int \mathcal{L} d^4x, \qquad (7.7.8)$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\tilde{æ}c}\int \left[\tilde{\chi}^2({}^4R + \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}) - \frac{16}{3}(g^{\alpha\beta}\tilde{\chi}\nabla^\dagger_\alpha\nabla^\dagger_\beta\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\tilde{\chi}_{,4,4})\right] dx^4. \qquad (7.7.9)$$

Используя (7.6.9), находим, что члены, однородные по φ и φ^*, исчезают. В итоге имеем

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2æc}[1 - b^2\varphi^*\varphi]\times$$

$$\times\left[{}^4R + \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} - \frac{32}{3}b^2\left(g^{\alpha\beta}\partial^+_\alpha\varphi^*\partial^+_\beta\varphi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^*\varphi\right)\right], \qquad (7.7.10)$$

где производные от φ имеют вид (7.6.11).

Выражение (7.7.10) соответствует общепринятой плотности лагранжиана для скалярного и гравитационного полей (но с видоизмененной удлиненной производной), если положить

$$b^2 = \frac{3æ\hbar^2}{32m}. \qquad (7.7.11)$$

6. *Уравнения Эйнштейна* получаются варьированием (7.7.10) по $g^{\mu\nu}$. После стандартных вычислений находим

$$
{}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}({}^4R) = -2\left(\tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}^{\alpha}_{\nu\cdot} - \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}\right) +
$$

$$
+\left(1 - \frac{3æ\hbar^2}{16m}\varphi^*\varphi\right)^{-1}\frac{æ\hbar^2}{2m}\left[\partial^+_\mu\varphi^*\partial^+_\nu\varphi + \partial^+_\nu\varphi^*\partial^+_\mu\varphi -\right.
$$

$$
\left. -g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}\partial^+_\alpha\varphi^*\partial^+_\beta\varphi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi^*\varphi\right)\right] -
$$

$$
-\frac{3æ\hbar^2}{16m}[\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi^*\varphi) - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\varphi^*\varphi)]. \qquad (7.7.12)
$$

7. *Уравнение типа Клейна-Фока* получаются варьированием (7.7.10) по φ^* (и сопряженное – варьированием по φ):

$$
g^{\alpha\beta}\nabla^+_\alpha\nabla^+_\beta\varphi - \frac{3}{16}({}^4R + \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta})\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0. \qquad (7.7.13)
$$

В развитой здесь теории особый интерес представляет физическая интерпретация векторного поля ξ^μ, имеющего квазиэлектромагнитный характер, однако взаимодействующего с материей через иную константу (другой заряд – массу).

8. В рассмотренном в §7.4 частном случае Клейна-Румера смешанные компоненты 5-мерного метрического тензора обращаются в нуль

$$
G_{4\mu} \sim \xi_\mu = 0, \qquad (7.7.14)
$$

тогда уравнение (7.7.13) превращается в общеизвестное уравнение Клейна-Фока вида (7.2.18) для свободной массивной скалярной частицы с учетом скалярной кривизны

$$
g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi - \frac{3}{16}({}^4R)\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0. \qquad (7.7.15)
$$

Напомним, что пока нет единого мнения о значении коэффициента перед слагаемым со скалярной кривизной.

Уравнения (7.7.12) превращаются в стандартные уравнения Эйнштейна с правой частью, определяемой тензором энергии-импульса скалярного поля.

9. Легко видеть, что в классическом пределе, когда полагается

$$
\varphi = \sqrt{\rho}\exp(iS/\hbar), \qquad (7.7.16)
$$

где ρ - плотность вероятности нахождения частицы; S - классическое действие, правая часть уравнений Эйнштейна принимает вид тензора энергии-импульса пылевидной материи[2].

7.8 Системы отсчета в теории гравитации

Перейдем к рассмотрению внутренней проблемы ОТО, также связанной с редукцией теории на меньшую размерность. С помощью монадного метода в рамках 4-мерия, т.е. метода 1+3-расщепления пространства-времени на время и ортогональное ему пространственное сечение, решается проблема описания систем отсчета в ОТО. Полагается, что все пространство заполнено идеализированными приборами, образующими (молюскообразное) тело отсчета. Эти приборы никак не влияют на метрику пространства-времени и являются естественным обобщением (фактически твердотельного) понятия системы отсчета в классической механике.

Теорию систем отсчета в ОТО легко получить из развитого в §7.5 монадного метода. Для этого нужно произвести некоторые изменения, во-первых, связанные с другой сигнатурой (теперь выделяется не пространственно-подобная, а времено-подобная координата x^0), во-вторых, нужны переобозначения индексов из-за меньшей размерности, в-третьих, следует перейти к уже устоявшимся в ОТО обозначениям. Так, вместо заглавных латинских индексов будем писать греческие, которые будут пробегать значения: 0, 1, 2, 3, а вместо греческих – будем писать строчные латинские индексы, принимающие значения: 1, 2, 3. Другие переобозначения будут даны по мере их появления при последовательном изложении теории систем отсчета.

1. **Алгебра монадного метода** задания систем отсчета получается из формул §4.6 и §7.5 при следующих обозначениях составляющих метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \tag{7.8.1}$$

где τ_μ - временно-подобный вектор (монада), имеющий физичес-

[2]Следует отметить, что скалярное поле предлагалось использовать для геометризации массивной материи (частиц) в работах ряда других авторов, исходя из иных соображений с применением иной методики. В частности, в работах С.С.Кокарева [31] изучался вопрос о геометризации материи посредством компоненты G_{55} в 5-мерной теории типа Калуцы. Иной подход развивался в большой серии работ В.Вессона с сотрудниками (см. [7]).

кий смысл вектора 4-мерной скорости приборов системы отсчета

$$\tau^\mu = \frac{dx^\mu_{(c.o.)}}{ds_{(c.o.)}}. \tag{7.8.2}$$

Тогда условие нормировки монады (4.6.3) соответствует известному в теории относительности свойству 4-скорости тел

$$\tau^\mu \tau_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \tag{7.8.3}$$

Последнее слагаемое справа в (7.8.1) имеет смысл 3-мерного метрического тензора пространственного сечения, ортогонального времени системы отсчета.

В хронометрической калибровке [25], когда

$$\tau^\mu = \frac{g^\mu_o}{\sqrt{g_{oo}}}; \qquad \tau_\mu = \frac{g_{o\mu}}{\sqrt{g_{oo}}}, \tag{7.8.4}$$

3-мерный метрический тензор записывается через привычные 3-мерные индексы

$$h_{ik} = \frac{g_{oi} g_{ok}}{g_{oo}} - g_{ik}. \tag{7.8.5}$$

Хронометрическая калибровка соответствует специальному выбору координатных систем, когда координатные линии x^0 совпадают с конгруэнцией временно-подобных линий системы отсчета.

В записанной в монадном виде теории *наблюдаемым величинам соответствуют только скаляры*, т.е. выражения, либо спроектированные по всем индексам на направление τ_μ, либо пространственные скаляры. Очевидно, что все они не зависят от выбора координатной системы, однако изменяются при переходе к другой системе отсчета (зависят от состояния движения наблюдателя).

Для удобства физической интерпретации изменим порядок обсуждения составных частей монадного метода.

2. **Монадные операторы дифференцирования** записываются согласно формулам (7.5.9) - (7.5.11). Выпишем два ключевых оператора:

$$^*\partial_T = \tau^o \frac{\partial}{\partial x^o} = \frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{7.8.6}$$

– хронометрически-инвариантный оператор временного дифференцирования;

$$^*\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{oi}}{g_{oo}}\frac{\partial}{\partial x^o} \tag{7.8.7}$$

– хронометрически-инвариантный оператор пространственного дифференцирования. Напомним, что хронометрически-инвариантными называются величины, инвариантные относительно произвольных преобразований координаты x^o типа (4.6.7), и ковариаными относительно пространственных преобразований типа (4.6.6). Оба эти оператора не зависят ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемых величин.

3. **Монадные физико-геометрические тензоры** строятся согласно формулам (7.5.5) - (7.5.7):

$$^*F_i = \tau^o(\tau_{i,o} - \tau_{o,i}) \tag{7.8.8}$$

– вектор ускорения (с обратным знаком) системы отсчета (соответствует вектору Φ_μ в (7.5.6));

$$^*A_{ik} = \frac{1}{2}(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}) + \frac{1}{2}(^*F_k\tau_i - ^*F_i\tau_k) \tag{7.8.9}$$

– тензор угловой скорости вращения системы отсчета (соответствует антисимметричному тензору $\tilde{F}_{\mu\nu}$ в (7.5.7));

$$^*D_{ik} = \frac{1}{2}\tau^o h_{ik,o} = \frac{1}{2\sqrt{g_{oo}}}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^o} \tag{7.8.10}$$

– тензор скоростей-деформаций системы отсчета (соответствует симметричному тензору $Д_{\mu\nu}$ в (4.6.7)).

Данная здесь физическая интерпретация монадных физико-геометрических тензоров определяется рядом факторов, в частности, ее можно усмотреть из записи уравнений геодезических линий в монадном виде

$$(^*\partial_T + v^k\tilde{\nabla}_k)p^i = -m(^*F^i) - 2p^k(^*A^i_k - ^*D^i_k); \tag{7.8.11}$$

$$(^*\partial_T + v^k\tilde{\nabla}_k)m = ^*F_kp^k - ^*D_{ik}p^iv^k, \tag{7.8.12}$$

где

$$m = m_o\frac{\tau_\alpha dx^\alpha}{ds} = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2}} \tag{7.8.13}$$

– динамическая масса частицы (m_o - масса покоя);

$$v^i = \frac{-h^i_\nu dx^\nu}{\tau_\alpha dx^\alpha}; \quad p^i = mv^i \tag{7.8.14}$$

– соответственно 3-мерная скорость и 3-мерный импульс частицы; $\tilde{\nabla}_k$ - хронометрически-инвариантный оператор пространственного дифференцирования, соответствующий (7.5.11). Первое (пространственное) уравнение должно быть сопоставлено с уравнением движения частицы в неинерциальной системе отсчета в классической механике

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} - m\vec{a} - m\vec{a}, \tag{7.8.15}$$

где $\vec{a} = 2[\vec{\omega}\vec{v}]$ - кориолисово ускорение, $\vec{a}$ - переносное ускорение системы отсчета, $\vec{\mathcal{F}}$ - реальная сила, действующая на частицу.

Второе (скалярное) уравнение геодезической линии в форме (7.8.12) описывает изменение энергии частицы в неинерциальной системе отсчета.

4. **Основные соотношения ОТО в монадном виде** (уравнения Эйнштейна, тождества Бианки и т.д.) записаны в наших книгах [9, 11]. Уравнения геодезических линий уже были записаны выше.

Заметим, что для получения выражений, спроектированных на классического наблюдателя, можно было бы исходить из 5-мерного обобщения ОТО, тогда для этой цели следовало бы использовать диадный метод, обсужденный в следующей главе.

7.9 Анализ 5-мерного обобщения теории гравитации

Проанализируем изложенный в этой главе материал с позиций трех различных программ: 1) развиваемой в этой книге бинарной геометрофизики, 2) многомерных геометрических моделей, 3) программы 5-оптики Румера.

1. С точки зрения **бинарной геометрофизики** следует подчеркнуть следующие аспекты изложенной 5-мерной модели:

1) Введение дополнительной размерности, соответствующей действию, находится в согласии с характером прообраза многомерной метрики, выведенной в рамках БСКО ранга (4,4).

2) Описание массивного скалярного поля через конформный фактор соответствует духу концепции дальнодействия, положенной в основу бинарной геометрофизики. Согласно этой концепции понятие потенциала взаимодействия (метрики) имеет смысл лишь в месте нахождения какой-то частицы.

3) В бинарной геометрофизике компонента метрики $\tilde{G}_{44}$ играет принципиально важную роль в определении пропагаторов как электромагнитного, так и гравитационного взаимодействий. Построение многомерных геометрических моделей начинается с уже готовых полевых функций, что с точки зрения бинарной геометрофизики можно понимать как тот факт, что роль этой компоненты уже сыграна. Поэтому оказывается естественным считать компоненту G_{44} после конформного преобразования равной минус единице.

4) Введенную зависимость скалярного поля от x^4 можно считать соответствующей циклической зависимости от дополнительного параметра, обусловленного БСКО ранга (2,2).

5) Переход от первичной плотности скалярной кривизны ${}^5R$ к плотности геометрического лагранжиана посредством интегрирования по координате x^4 можно сопоставить в бинарной геометрофизике (в некотором смысле) процедуре выделения диагональных слагаемых из расписанного в (3.1.4) базового 4×4-отношения.

2. С точки зрения **ОТО и геометрического подхода к описанию взаимодействий** следует подчеркнуть следующие моменты изложенной модели:

1) Введение дополнительной (5-й) размерности, соответствующей действию, не противоречит общепринятой ОТО.

2) При 5-мерном обобщени ОТО в теории возникают дополнительные степени свободы (дополнительные компоненты метрики), которые нуждаются в должной физической интерпретации. В частности, было показано, что компонентой $\tilde{G}_{44}$, отождествленной с конформным фактором, можно геометризовать поле массивных частиц.

3) После отождествления $\tilde{G}_{44}$ с конформным фактором компонента метрики G_{44} становится равной минус единице, что позволяет обойти трудность с интерпретацией дополнительной диагональной компоненты метрики, что составляет проблему в многомерных геометрических моделях.

4) Особо следует подчеркнуть, что исходная 5-мерная метрика и гиперплотность скалярной кривизны, во-первых, зависят от дополнительной координаты и, во-вторых, являются комплексными. Однако после усреднения (интегрирования) по периоду дополнительной координаты получается вещественное выраже-

ние, соответствующее общепринятой физической плотности лагранжиана. Так будет обстоять дело и в других многомерных геометрических моделях физических взаимодействий.

5) В изложенном 5-мерном обобщении теории гравитации возникли два принципиально важных вопроса, на которые невозможно дать окончательный ответ в рамках обсуждения лишь гравитационного взаимодействия.

Первый вопрос состоит в физической интерпретации векторного поля ξ_μ. Нужно ли оставить это поле или нет? Если оставлять, то какова его физическая интерпретация? Этот вопрос постоянно будет возникать при обсуждении геометрических моделей других взаимодействий: электромагнитного (в главе 8), электрослабого (в главах 10 и 11), сильного (в главе 16). Ответ на него можно найти в рамках бинарной геометрофизики.

Второй вопрос связан с геометрической интерпретацией массивного скалярного поля φ. Следует подчеркнуть, что в этой главе речь шла о принципиальной возможности геометрического описания массивных полей. В данной 5-мерной модели предложена грубая имитация частиц посредством скалярного поля. Как известно, частицы описываются спинорными функциями, что в рамках 5-й физической парадигмы заставляет их вводить внешним к геометрии образом. В главе 11 при геометризации модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама будет введена спинорная материя. Забегая вперед, отметим, что геометризованное (массивное) скалярное поле будет интерпретироваться как нейтральное хиггсовское скалярное поле.

3. С точки зрения **программы 5-оптики Румера** следует отметить следующие обстоятельства:

1) Изложенная выше 5-мерная геометрическая модель представляет собой естественное обобщение 5-оптики Румера.

2) Данная модель очищает программу Румера от наслоений другой программы – геометризации электромагнитного поля.

3) В данной 5-мерной геометрической модели использована предложенная Ю.Б.Румером процедура усреднения плотности первичного лагранжиана по периоду дополнительной координаты. Однако это сделано не в физической (как у Румера), а в геометрической части гиперплотности лагранжиана.

Глава 8

Геометрические модели объединения гравитации и электромагнетизма (теории Калуцы и Клейна)

На содержание этой главы можно смотреть с двух позиций:

1) *С позиций бинарной геометрофизики*, где показано, что при оставлении лишь симметричных комбинаций из дополнительных параметров естественным образом получается прообраз 6-мерной метрики. После процедуры перехода к макроприбору возникают основания для 6-мерного геометрического подхода к описанию гравитационных и электромагнитных взаимодействий.

2) *С позиций 5-й физической парадигмы* независимо от других парадигм. После рассмотрения ОТО и ее 5-мерного обобщения естественно расширить модель на большую размерность с целью геометризации этим же способом еще и электромагнитного взаимодействия.

В этой главе проанализированы содержание, достоинства и недостатки 5-мерных и 6-мерных геометрических моделей гравитации и электромагнетизма типа теорий Калуцы и Клейна. Обсуждены суть недостатков и пути их устранения в рамках этих же (унарных) геометрических моделей (в рамках 5-й физической парадигмы). Показано какие из них могут быть преодолены только на основе более глубоких принципов бинарной геометрофизики.

8.1 Три канала геометризации электромагнитного взаимодействия

5-Мерная теория Калуцы [27], возникшая в самом начале 20-х годов[1], с одной стороны, привлекала физиков-теоретиков XX-го века своей простотой и единством основополагающих принципов, родственных эйнштейновской теории гравитации, и, с другой стороны, ставила перед ними ряд концептуальных проблем. (Они проанализированы в §8.3.) Чувствовалось, что этой теорией лишь приоткрыты новые свойства мироздания, и за ними кроется что-то более глубокое, еще не разгаданное. Долгое отсутствие прогресса в их решении склонило некоторых даже к выводу о ее несостоятельности.

В итоге получилось так, что большинство физиков XX века в своих работах пользовалось максвелловской теорией электромагнитного поля на фоне готового (плоского или искривленного) пространства-времени. Как известно, в этой теории постулируются уравнения Максвелла (7.2.13) или эквивалентное им действие заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\mathcal{L}_{e,A} = -\int mcds - \sum \int \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4x, \tag{8.1.1}$$

где последнее слагаемое описывает действие электромагнитного поля. Из него стандартным вариационным методом получаются уравнения Максвелла.

Однако, в последней трети XX века такой непосредственный способ введения электромагнитного поля (взаимодействия) выглядел недостаточным. Стали искать более глубокие принципы, лежащие за электрогмагнитным и другими взаимодействиями. На сегодняшний день таковыми представляются принципы калибровочного подхода. В его основе лежат, во-первых, соображения о фундаментальном характере групповых симметрий в физике, и, во-вторых, идея о взаимодействии как нарушении этих симметрий. Потенциалы полей, переносящих взаимодействия, вводятся как величины, компенсирующие нарушения соответствующих симметрий. (Более подробно калибровочный подход обсужден в следующей главе 9.) Для многих такое обоснование возникновения взаимодействий представляется достаточно убедительным. Именно таким способом в настоящее время принято вводить слабые (электрослабые) и сильные взаимодействия.

[1] Первая статья Т.Калуцы по 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма была написана в 1919 году и была опубликована в 1921 году. История возникновения многомерных теорий подробно изложена в [13].

Нам представляется калибровочный подход недостаточно фундаментальным. На наш взгляд, более удовлетворительный способ введения электромагнитного взаимодействия дается в рамках 5-мерной геометрической теории Калуцы, а еще более обоснованный – в рамках бинарной геометрофизики. В связи с этим напомним, что в главе 3 из понятий БСКО ранга (4,4) был получен прообраз многомерной метрики (квадратичной формы) в видах

$$\tilde{G}_{MN}dx^M dx^N = \tilde{G}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \tilde{G}_{44}(dx^4)^2 + 2\tilde{G}_{4\mu}dx^4 dx^\mu +$$

$$+2\tilde{G}_{5\mu}dx^5 dx^\mu + \cdots = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi^2 - d\lambda^2 - d\sigma^2, \qquad (8.1.2)$$

где в общем случае квадрат многомерного интервала может быть как равным нулю (вариант 7-оптики), так и отличной от нуля. Таким образом, в бинарной геометрофизике (при оставлении только симметризованных комбинаций из третьих параметров) обосновывается введения двух дополнительных размерностей с координатами x^4 и x^5, причем они оказываются выделенными по сравнению с четырьмя классическими координатами x^μ. Исходя из этого, можно усмотреть следующие три канала[2] построения многомерных теорий, объединяющих гравитацию и электромагнетизм:

1) Первый канал состоит в построении (не оптической) 5-мерной теории, когда основной упор делается на одну дополнительную координату x^5, т.е. метрика представляется в видах:

$$dI^2 = G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2G_{5\mu}dx^5 dx^\mu + G_{55}(dx^5)^2 =$$

$$= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\lambda^2. \qquad (8.1.3)$$

Назовем этот вариант *каналом Калуцы.*

Можно считать, что в этом подходе координата x^4 фактически уже учтена, во-первых, в отличном от нуля значении dI^2, во-вторых, в искривленном характере компоненты $G_{\mu\nu}$ и, в-третьих, в пропагаторе электромагнитного потенциала A_μ, т.е. компонент $G_{5\mu}$.

[2]Следует назвать еще проективный вариант 5-мерной теории. Он развивался в работах В.Паули [51] и многих других авторов. Большой цикл исследований в этом направлении был выполнен Э.Шмутцером [88]. В первом издании "Теории поля" Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица был подробно изложен именно этот вариант 5-мерной теории. Однако, было показано, что он изоморфен частному случаю одного из названных ниже вариантов. Заметим, что в последующих изданиях "Теории поля" (см., например, [37]) отсутствуют даже упоминания о многомерных теориях.

2) Второй канал состоит в построении 5-мерной оптики, когда все дополнительные к 4-мерным слагаемые в (8.1.2) имитируются одной координатой x^4, имеющей смысл классического действия. Здесь 5-мерная метрика представляется в виде

$$G_{AB}dx^A dx^B = G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2G_{4\mu}dx^4 dx^\mu + G_{44}(dx^4)^2 =$$

$$= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi^2, \qquad (8.1.4)$$

причем постулируется, что массивные частицы движутся по изотропным линиям в таком 5-мерном пространстве-времени, т.е. вдоль их траекторий

$$0 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi^2. \qquad (8.1.5)$$

Именно этот вариант предлагался в уже упомянутых работах О.Клейна, В.А.Фока, а затем развивался в работах Ю.Б.Румера. Назовем его *каналом Клейна-Румера.*

3) Третий канал состоит в построении 6-мерной геометрической модели, точнее, – 6-оптики, в которой вводятся две дополнительные координаты x^4 и x^5 так, что после процедуры 1+1+4-расщепления метрика принимает вид

$$G_{MN}dx^M dx^N = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi^2 - d\lambda^2. \qquad (8.1.6)$$

Полагается, что движение частиц происходит по изотропным мировым линиям, когда

$$0 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi^2 - d\lambda^2. \qquad (8.1.7)$$

Заметим, что первый из названных каналов можно понимать как частный случай третьего канала, когда произведено отождествление

$$dI^2 \equiv d\xi^2. \qquad (8.1.8)$$

Точно так же второй канал является частным случаем третьего, если исключить координаты x^5. Поскольку в третьем канале оказываются совмещенными идеи первых двух, то именно 6-мерную геометрическую модель правильнее всего называть *каналом (теорией) Калуцы-Клейна.* Заметим, что в современной литературе теориями Калуцы-Клейна принято называть все разновидности многомерных геометрических моделей объединения физических взаимодействий (см. [15,64]).

Все эти каналы кратко обсуждены в этой главе в том порядке, как здесь названы.

8.2 Идеи и математический аппарат 5-мерной теории Калуцы

Рассмотрим первый канал 5-мерной теории (теорию Калуцы). Поскольку 5-мерная геометрическая модель объединенной теории гравитации и электромагнетизма опирается на монадный метод 1+4-расщепления, обсудим ее содержание и основные идеи в соответствии с ранее перечисленными 4 составными частями этого метода.

1. *Алгебра теории Калуцы.* Исходным положением теории является задание 5-мерной метрики (4.6.1), где метрический тензор представляется в виде

$$G_{AB} = g_{AB} - \lambda_A \lambda_B. \tag{8.2.1}$$

Здесь индексы A и B пробегают значения: 0, 1, 2, 3, 5. Будем использовать монадный метод 1+4-расщепления в калибровке, типа хронометрической в ОТО. Тогда составляющие метрического тензора записываются с помощью формул (4.6.4), (4.6.5) с заменой индекса 4 на 5.

Полагается, что 15-я компонента 5-мерного метрического тензора

$$G_{55} = -\lambda_5^2 = -1. \tag{8.2.2}$$

Оставшиеся составляющие метрического тензора имеют следующую физическую интерпретацию:

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - G_{\alpha 5} G_{\beta 5} \tag{8.2.3}$$

– метрический тензор 4-мерного пространства-времени ОТО;

$$A_\alpha = \frac{c^2}{2\sqrt{k_g}} \lambda_\alpha = \frac{c^2}{2\sqrt{k_g}} G_{\alpha 5} \tag{8.2.4}$$

–векторный электромагнитный потенциал, который не является инвариантом относительно преобразований 5-й координаты (4.6.7) и (4.6.8). При последних преобразованиях он изменяется по закону

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \tag{8.2.5}$$

где f произвольная функция от четырех координат в законе преобразований (4.6.8). Это известные калибровочные преобразования электромагнитного веторного потенциала в стандартной электродинамике.

2. *Физико-геометрические тензоры.* Ими являются тензорные комбинации, которые можно построить из монадных составляющих метрического тензора (8.2.1). Как уже отмечалось, в общем случае таковых три. Они фактически записаны в (7.5.6) – (7.5.8), только теперь нужно заменить индексы 4 на 5. Сохраним для тензоров прежние обозначения.

В теории Калуцы используется условие цилиндричности по дополнительной координате, т.е. условие независимости компонент 5-мерного метрического тензора от x^5:

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^5} = 0. \tag{8.2.6}$$

При этом условии и (8.2.2) первый и третий физико-геометрические тензоры тождественно обращаются в нуль

$$\Phi_\mu = \frac{1}{\lambda_5}\left(-\frac{\partial \lambda_5}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^5}\right) = 0; \quad Д_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\lambda_5}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^5} = 0, \tag{8.2.7}$$

а оставшийся антисимметричный тензор отождествляется (через размерную константу) с тензором напряженности электромагнитного поля

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{k_g}}{c^2} F_{\mu\nu}. \tag{8.2.8}$$

3. *Монадные операторы дифференцирования* при сделанных предположениях о виде метрики и произведенных отождествлениях имеют вид:

$$\partial_5^\dagger = \frac{1}{\sqrt{-G_{55}}}\frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x^5}; \tag{8.2.9}$$

$$\partial_\alpha^\dagger = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{G_{\alpha 5}}{G_{55}}\frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{2\sqrt{k_g}}{c^2} A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^5}. \tag{8.2.10}$$

В определения этих операторов входит дифференцирование по дополнительной координате. В теории Калуцы зависимость от 5-й координаты означает наличие у соответствующих полей электрического заряда. Постулируется, что волновые функции заряженных полей следующим образом зависят от x^5

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp\left(\frac{iec\varepsilon_5}{2\sqrt{k_g}\hbar} x^5\right), \tag{8.2.11}$$

где $\psi(x^\mu)$ – часть волновой функции, зависящая только от четырех классических координат, ε_5 – целое число (гармоника), характеризующее заряд поля Q в единицах заряда электрона e

$$\varepsilon_5 = Q. \tag{8.2.12}$$

При этом условии первый монадный оператор дифференцирования (8.2.9) имеет тот физический смысл, что его собственные значения определяют заряд поля. Второй оператор (8.2.10) при учете условия (8.2.11) и отождествления (8.2.4) принимает вид

$$\partial_\alpha^\dagger \Psi = \partial_\alpha^+ \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{ie\varepsilon_5}{c\hbar} A_\alpha \right) \Psi, \tag{8.2.13}$$

т.е. совпадает с общепринятой "удлиненной производной" в стандартной электродинамике.

Легко убедиться, что при допустимых в теории преобразованиях 5-й координаты (4.6.8) 5-мерные волновые функции Ψ из (8.2.11) испытывают известные калибровочные изменения

$$\Psi \to \Psi \exp\left(\frac{ie}{c\hbar} f \right) \tag{8.2.14}$$

одновременно с преобразованием электромагнитного векторного потенциала (8.2.5), тогда как оператор (8.2.13) при этом остается инвариантным.

4. *Запись в монадном виде основных соотношений теории.* В теории Калуцы основными уравнениями являются 5-мерные уравнения Эйнштейна и уравнения геодезических линий.

5-Мерные уравнения Эйнштейна

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} {}^5R = \tilde{æ} \tilde{T}_{AB} \tag{8.2.15}$$

в монадном виде (при сделанных предположениях) распадаются на систему из десяти 4-мерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля справа

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{2k}{c^4} \left(F_{\alpha\mu} F^\mu_{\beta.} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + æ T_{\alpha\beta}, \tag{8.2.16}$$

на систему из четырех стандартных уравнений Максвелла

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{c^2}{\sqrt{k}} \tilde{æ} \tilde{T}^\beta_A \lambda^A \tag{8.2.17}$$

и еще одно (пятнадцатое) скалярное уравнение.

В (8.2.14) справа стоит 5-мерный тензор энергии-импульса негеометрической материи. Таким образом, в (8.2.16) справа возникает обычный 4-мерный тензор энергии-импульса материи как проекция $\tilde{T}_{AB}$ на 4-мерное пространство-время, а в (8.2.17) справа проекция $\tilde{T}_{AB}$ по одному индексу на 4-мерное пространство-время, а по второму – на направление 5-й координаты имеет смысл вектора электрического тока.

Заметим, что пространственно-подобный характер координаты x^5 диктуется нужным знаком перед геометризованным тензором энергии-импульса электромагнитного поля в уравнениях Эйнштейна (8.2.16).

5-Мерные уравнения геодезической линии

$$\frac{d^2x^A}{dI^2} = -\Gamma^A_{BC}\frac{dx^B}{dI}\frac{dx^C}{dI} \tag{8.2.18}$$

в монадном формализме распадаются на систему из четырех 4-мерных (векторных) уравнений и одно скалярное уравнение. Векторная система совпадает с уравнениями движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени при наличии электромагнитного поля

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2}F^\mu_{\cdot\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}, \tag{8.2.19}$$

если положить, что инвариантная 5-я компонента 5-мерной скорости имеет физический смысл отношения электрического заряда к массе частицы

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m\sqrt{k_g}}. \tag{8.2.20}$$

Здесь положено, что

$$d\lambda = dx^A\lambda_A. \tag{8.2.21}$$

При сделанных выше предположениях относительно значений компонент 5-мерного метрического тензора 5-е (скалярное) уравнение геодезической линии принимает физический смысл постоянства отношения электрического заряда к массе

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{q}{m}\right) = 0. \tag{8.2.22}$$

5. Резюмируя изложенное можно утверждать, что 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма Калуцы обладает рядом несомненных достоинств. В литературе их иногда называют

"чудесами" теории Калуцы (-Клейна). Можно выделить четыре основных "чуда":

1) Пятнадцать 5-мерных уравнений Эйнштейна автоматически расщепляются на систему из десяти обычных 4-мерных уравнений Эйнштейна, четырех уравнений Максвелла и еще одного скалярного уравнения.

2) В получаемой таким образом системе 4-мерных уравнений Эйнштейна в правой части автоматически возникает тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

3) Уравнения 5-мерной геодезической линии автоматически приводят к уравнениям движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени при наличии электромагнитного поля.

4) Известные в электродинамике калибровочные преобразования векторного электромагнитного потенциала следуют из допустимых преобразований 5-й координаты.

8.3 Анализ недостатков 5-мерной теории Калуцы в рамках ее парадигмы

Следует констатировать, что несмотря на свои достоинства 5-мерная теория не завоевала всеобщего признания и не стала рабочим инструментом физиков.

I. Недостатки 5-мерной теории Калуцы

Перечислим главные недостатки 5-мерной теории (в канале Калуцы), которые, по мнению Эйнштейна и других ведущих теоретиков, явились причиной этого.

1. Не был ясен физический смысл 5-й координаты. Многие теоретики, начиная с Э.Маха [40, 41], мыслили дополнительную размерность обладающей теми же свойствами, что и четыре классические, и пытались подобрать физическую интерпретацию именно под такие представления.

2. Сомнения вызывало условие цилиндричности компонент 5-мерной метрики по 5-й координате. Эйнштейн писал: "Условие цилиндричности не является естественным даже формально" [94, с. 367].

3. Как писал Эйнштейн: "Не удается физически истолковать компоненту G_{55}" [94, с. 367].

4. Пятнадцатое уравнение Эйнштейна налагало жесткое условие связи между 4-мерной скалярной кривизной и инвариантом электромагнитного поля. Чтобы от него избавиться, предлагалось получать уравнения вариационным способом из лагранжиана – 5-мерной скалярной кривизны, в котором налагалось усло-

вие $G_{55} = Const$ до проведения вариационной процедуры. В итоге теория строилась на основе лишь 14 уравнений из 15.

5. В 20-х годах Эйнштейн считал существенным недостатком теории Калуцы необходимость волевым образом введения в правую часть электромагнитных уравнений (8.2.17) плотности электрического тока внешней материи.

6. Констатировалось, что в теории получено лишь формальное единство общей теории относительности и электромагнетизма Максвелла. Эйнштейн писал: "Цель Калуцы, несомненно, заключалась в том, чтобы прийти к новому физическому взгляду на гравитацию и электричество путем введения единой структуры пространства. Однако эта цель не была достигнута" [93, с. 497]. В частности, неоднократно отмечалось, что 5-мерная теория не дала каких-либо новых экспериментальных предсказаний. Получалось только то, что было известно и без 5-мерной теории.

7. Одновременно с работами 20-х – 30-х годов по поиску геометрических единых теорий поля интенсивно развивалась квантовая теория. Ощущалась естественная потребность перебросить мостик между этими двумя направлениями исследований. Однако глубокой связи между ними в то время не было установлено.

8. Имелись альтернативные варианты единой теории поля, опирающиеся на обобщения римановой геометрии в рамках 4-мерного пространства-времени. Среди них наиболее видное место занимала теория Вейля. Эйнштейн писал: "До сих пор были сделаны две наиболее простые и естественные попытки связать гравитацию и электромагнетизм с помощью единой теории поля: одна – Вейлем, другая Калуцей" [93, с. 492]. Не было ясно, какой из этих путей предпочесть.

9. В последующие годы были развиты теории слабых и сильных взаимодействий. Стали говорить о четырех видах физических взаимодействий. 5-Мерная теория связывала только два из них. Это рассматривалось как существенный недостаток 5-мерной теории. Не видя путей преодоления этой трудности, в середине 70-х годов стал терять веру в многомерие даже такой его стойкий приверженец, как Ю.Б.Румер [61].

10. В более поздних вариантах 5-мерной теории Калуцы была введена циклическая зависимость заряженных полей от 5-й координаты. При этом использовались лишь низшие гармоники такой зависимости. Возникали вопросы, во-первых, обоснования такой зависимости и, во-вторых, интерпретации частиц с более высокими гармониками.

11. В теории Калуцы естественным образом возникают выделенные значения масс, порядка планковской массы. Строго говоря, такие массы ограничивают снизу предел применимости тео-

рии. При желании описывать реальные элементарные частицы возникает проблема перенормировки планковских масс до экспериментально известных значений.

Можно указать и некоторые другие претензии к 5-мерной теории.

На эти недостатки (особенности) 5-мерной теории можно смотреть (пытаться их устранить) с точки зрения разных физических парадигм. Конечно, большая часть из них высказывалась с позиций исследователей, мысливших в рамках первой физической парадигмы. Для принятия теории Калуцы необходимо было преодолеть довольно высокий психологический барьер, состоящий в изменении коренных представлений о размерности пространства и времени. Необходимы были очень веские основания для замены общепринятой парадигмы.

II. Анализ недостатков 5-мерной теории

Рассмотрим последовательно в указанном выше порядке, каким образом предлагается трактовать (или устранять) эти недостатки (особенности) в рамках теорий 5-й парадигмы.

1. Исследования показали, что дополнительная размерность должна быть компактифицирована, т.е. замкнута с очень малым периодом. Зависимость полей от 5-й координаты означает наличие у них электрического заряда. Пятая компонента импульса частиц в канале Калуцы имеет физический смысл электрического заряда, а 5-я компонента скорости характеризует отношение электрического заряда к массе (8.2.20).

2. В согласии с изложенным в первом пункте условие цилиндричности по 5-й координате означает отсутствие у рассматриваемых полей электрического заряда. Очевидно, что как гравитационное поле (метрика $g_{\mu\nu}$), так и электромагнитное поле (смешанные компоненты 5-мерной метрики) являются электрически нейтральными.

3. В 5-мерной теории Калуцы физическое истолкование компоненты метрики G_{55} представляет серьезную проблему. Предлагались следующие основные пути ее решения:

1) В ряде работ постулировалось, что $G_{55} = -1$, и предлагалось далее развивать теорию с помощью вариационного принципа так, как было указано в §8.2.

2) Многие авторы предлагали считать компоненту G_{55} зависящей от четырех классических координат и интерпретировать ее как пока не обнаруженное дополнительное (безмассовое) скалярное поле геометрического происхождения.

3) Предпринимались попытки с помощью компоненты G_{55} геометризовать (в духе изложенного в §7.6) электрически заряженную материю, которую в стандартной теории принято вно-

сить волевым образом в правую часть уравнений Эйнштейна.

4) При применении многомерной теории к описанию электрослабых взаимодействий предлагалось описывать через компоненту G_{55} хиггсовское скалярное поле, ответственное в модели Вайнберга-Салама за возникновение масс элементарных частиц.

4. Решение проблемы 15-го уравнения Эйнштейна зависит от выбора одного из перчисленных в предыдущем пункте вариантов интерпретации G_{55}, а именно:

1) При первой интерпретации 15-е уравнение Эйнштейна отсутствует.

2) При второй интерпретации 15-е уравнение Эйнштейна является уравнением для геометрического безмассового скалярного поля. В этом случае отсутствует жесткая связь между скалярной кривизной и инвариантом электромагнитного поля.

В вариантах 3) и 4) компонента G_{55} определяет конформный фактор. Вместо 15-го уравнения Эйнштейна вариационным принципом (как в §7.6) вводится уравнение для соответствующего массивного скалярного поля.

5. Претензии к наличию правой части у 5-мерных уравнений в равной степени относятся и к 4-мерным уравнениям Эйнштейна. Это общее свойство геометрических теорий, принадлежащих к пятой физической парадигме. Впрочем, как уже отмечалось, Эйнштейна не удовлетворял этот факт и в 4-мерной теории.

6. Вопрос о предсказании новых эффектов в рамках 5-мерной теории опять тесно связан с пониманием скалярного поля. В первом из приведенных выше подходов к компоненте G_{55} высказанное замечание остается в силе. В рамках второго варианта интерпретации предсказывается ряд возможных эффектов, например, сезонные вариации значений физических констант на Земле [11, с.80]. В третьем варианте во главу угла ставится принципиальный вопрос о геометризации всей материи, т.е. речь идет о переходе из пятой физической парадигмы в восьмую. Четвертый вариант оказывается тесно связанным с дальнейшим увеличении размерности и с геометризацией модели Вайнберга-Салама.

7. Следует заметить, что работы по 5-мерию В.А.Фока и О.Клейна были связаны с написанием волнового (первично квантованного) уравнения Клейна-Фока, т.е. какая-то связь с квантовой механикой была, однако ожидалось значительно большее.

8. Проблема выбора между 4-мерной теорией Вейля, основанной на неримановой геометрии, или 5-мерной (римановой) теорией Калуцы со временем была решена в пользу теории Калуцы. В теории Вейля встретился ряд трудностей, которые пришлось устранять исскусственными методами.

9. В 80-х годах было осознано, что многомерные модели типа теории Калуцы пригодны для описания не только электромаг-

нитного, но и других взаимодействий, например, электрослабого. Для этого необходимо увеличить размерность пространства-времени, как минимум, до шести (см. главы 10 и 11). Это стало ясно после того, как в рамках первой физической парадигмы было показано, что другие физические взаимодействия переносятся промежуточными векторными бозонами.

10. Десятое замечание о циклическом характере зависимости заряженных полей от дополнительных координат в многомерных теориях Калуцы и Клейна обычно связывается с топологией компактифицированных размерностей.

Очевидно, далеко не все проблемы теории удается разрешить, оставаясь в рамках ее понятий (5-й или 8-й парадигм). Некоторые из высказанных выше соображений представляют собой полуответы или заменяют одни проблемы на другие. В §8.8 они будут рассмотрены с позиций бинарной геометрофизики.

8.4 5-Мерная теория в канале Клейна-Румера

1. Обсудим вариант 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма в канале Клейна-Румера. В предыдущих главах неоднократно упоминалась программа 5-оптики Ю.Б.Румера, нацеленная на геометризацию квантовой теории с помощью пятого измерения. Сам Румер, говоря о 5-оптике, подчеркивал, что "ее основное содержание заключается скорее в геометризации основных понятий квантовой физики". Однако случилось так, что в программе Румера на 5-е измерение оказались наложенными две функции: описание квантовой физики и геометризация электромагнитного взаимодействия.

Как уже отмечалось, вслед за своими предшественниками В.А.Фоком [77] и О.Клейном [23] Ю.Б.Румер постулировал циклическую зависимость волновых функций от 5-й координаты в виде (7.4.12). Но эта формула отличается от зависимости в (8.2.11), благодаря которой в теории Калуцы вводятся электрические заряды частиц и описывается взаимодействие с электромагнитным полем.

2. Эту трудность указанные авторы предложили преодолевать введением электрического заряда в компоненты 5-мерной метрики в виде

$$\tilde{G}_{\mu 4} = \frac{e}{mc^2} A_\mu; \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{e^2}{m^2 c^4} A_\mu A_\nu. \tag{8.4.1}$$

Но такой прием означал отказ от использования универсального пространства-времени и переход к *конфигурационному про-*

странству, когда метрика начинает зависеть от характеристик рассматриваемой частицы. При одном сорте частиц это допустимо, но в общем случае нет.

3. Отметим, что вместо описанного в §7.4 перехода от общей теории относительности к эквивалентной ей 5-оптике с универсальным пространством-временем Румер решал другую задачу – он осуществлял переход к конфигурационному 5-пространству. Примечательно, что в книге Румера [59] этот переход рассматривался на примере плоского 4-мерного пространства-времени. Использовался вариационный принцип в виде

$$\delta S(\underline{x}, \overline{x}) = -mc\delta \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} (ds + g_\mu dx^\mu) = 0, \tag{8.4.2}$$

где введено обозначение

$$g_\mu = \frac{e}{mc^2} A_\mu. \tag{8.4.3}$$

В результате варьирования получались, во-первых, (при закрепленных концах траектории) уравнения движения заряда в электромагнитном поле

$$\frac{du_\mu}{ds} = \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_\mu}{\partial x^\nu}\right) \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{e}{mc^2} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \tag{8.4.4}$$

и, во-вторых, (при свободном конце) соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + g_\mu mc = -mcu_\mu. \tag{8.4.5}$$

После подстановки u_μ в известное соотношение для 4-скорости $\eta^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$, получается релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\eta^{\mu\nu}}{m^2c^2} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{2g^\mu}{mc} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + (\eta^{\mu\nu} g_\mu g_\nu - 1) = 0. \tag{8.4.6}$$

4. Ища решение в неявном виде

$$f(x^\mu, S) = f_0, \tag{8.4.7}$$

Румер пришел к выражению

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} - 2mcg^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial f}{\partial S} + m^2c^2(\eta^{\mu\nu} g_\mu g_\nu - 1) \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)^2 = 0, \tag{8.4.8}$$

соответствующему уравнению 5-эйконала

$$G^{AB}\frac{\partial f}{\partial x^A}\frac{\partial f}{\partial x^B}=0, \tag{8.4.9}$$

с 5-мерным метрическим тензором

$$G^{AB}=\left(\begin{array}{c|c}\eta^{\mu\nu} & -g^{\mu}\\ \hline -g^{\nu} & -1+\eta^{\mu\nu}g_{\mu}g_{\nu}\end{array}\right), \tag{8.4.10}$$

где в качестве 5-й координаты взята величина $x^4=S/mc$.

Легко показать, что уравнение движения (7.2.16) можно получить из уравнения изотропной геодезической в 5-мерном пространстве с метрикой (8.4.10).

5. Для программы Румера не обязательно полагать 4-мерную часть 5-мерной метрики плоской. В общем случае можно использовать искривленное 5-мерное пространство, в котором компоненты многомерной метрики $\tilde{G}_{MN}$ связаны с 4-мерной метрикой $g_{\mu\nu}$ и электромагнитным векторным потенциалом A_μ согласно формулам (8.4.1).

6. По поводу канала Клейна-Румера высказывалась большая часть претензий, перечисленных в §8.3, однако здесь имеются некоторые особенности. Назовем главные из них:

а) В канале Клейна-Румера устраняется первая из перечисленных выше претензий, – в теории дается интерпретация дополнительной координаты. Она имеет физический смысл действия.

б) Отпадает седьмое замечание об отсутствии связи с квантовой теорией. Работы Румера нацелены именно на геометризацию квантовой теории.

в) Отпадает восьмое замечание об альтернативных геометрических теориях типа теории Вейля, поскольку данное направление преследовало совершенно иные цели.

г) Как было показано в §7.6, в 5-мерной теории Румера не возникают планковские массы частиц, т.е. отпадает одиннадцатое из названных выше замечаний.

Тем не менее, оставшиеся замечания приобретали еще большую остроту[3].

[3]В начале 70-х годов у Ю.Б.Румера даже возникли сомнения в плодотворности развиваемой им программы. Он писал:"Однако такого рода попытки (построения 5-мерной теории. – *Примеч. Ю.С.В.*) не дали никаких существенно новых результатов. Этот путь объединения имел бы некоторый смысл в тот давно уже прошедший период физики, когда из семейства зарядов был известен лишь электрический заряд. Но в связи с открытием в последние го-

7. В варианте Клейна-Фока возникли дополнительные специфические трудности:

1) Главная трудность состояла в том, что вместо универсального пространства-времени вводилось многомерное конфигурационное пространство. В компоненты метрики $G_{4\mu}$ согласно (8.4.1) входило отношение электрического заряда к массе рассматриваемой частицы, таким образом пространство-время оказывалось предназначенным для описания лишь одного сорта частиц.

2) Программа геометризации квантовой теории не получила своего логического развития ввиду того, что она развивалась в рамках готового пространства-времени и с заданными на его фоне полями. В рамках парадигмы многомерия не видна основная роль дополнительного измерения x^4. Она состоит, в частности, в переходе к 4-мерной искривленной метрике и в определении пропагаторов, составляющих полевые функции. Напомним, что компонента G_{44} входит в знаменатель подинтегрального выражения пропагатора. Это можно усмотреть лишь с точки зрения парадигмы бинарной геометрофизики.

8.5 Диадный метод редукции (1+1+n-расщепления)

В связи с рассмотрением 6-мерного варианта теории Калуцы-Клейна, от которого необходим переход к 4-мерной теории, следует более подробно изложить диадный метод редукции; он понадобится и в следующих главах. Диадный метод, как и монадный, удобно представлять в виде четырех частей:

1) алгебры диадного метода;

2) задания диадных физико-геометрических тензоров;

3) определения диадных операторов дифференцирования;

4) записи основных соотношений теории в диадном виде.

Подробно этот метод изложен в книгах автора [9, 11]. Здесь кратко напомним самые основные положения диадного метода.

1. **Алгебра диадного метода** уже рассматривалась в §4.6. Здесь и в дальнейшем опять будем использовать калибровку типа дважды хронометрической в 4-мерной ОТО. К формулам

ды новых зарядовых величин и соответствующих этим величинам законов сохранения надежда на развитие 5-мерных теорий должна быть оставлена. На этом пути в лучшем случае можно прийти к чисто внешнему, механическому объединению электромагнетизма и тяготения, но нет надежды получить органическое объединение, дающее возможность предсказывать какие-либо новые наблюдаемые электрогравитационные эффекты." [61, с.118]

(4.6.14) – (4.6.19), характеризующим составляющие метрического тензора (двух векторов диады и 4-мерной метрики) в этой калибровке, добавим выражения для смешанных компонент 4-метрики:

$$\xi^\alpha = \lambda^\alpha = 0; \quad \xi^5 = 0;$$
$$g^{N\alpha} = G^{N\alpha}; \quad g_4^N = g_5^N = 0; \quad g_{4N} = g_{5N} = 0; \tag{8.5.1}$$
$$g_\nu^\mu = G_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu; \quad g_\alpha^4 = \xi^4\xi_\alpha + \lambda^4\lambda_\alpha; \quad g_\alpha^5 = \lambda^5\lambda_\alpha.$$

Напомним также, что в диадном методе имеют дело лишь со спроектированными величинами, либо на векторы диады, либо на направления n-мерного (4-мерного) сечения, ортогонального векторам диады. Последнее осуществляется сверткой с компонентами метрики g_N^μ:

$$B^{AC\cdots} g_A^\mu g_C^\nu \cdots \equiv \tilde{B}^{\mu\nu\cdots}. \tag{8.5.2}$$

В частности, квадрат 2+n-мерного интервала представляется через спроектированные величины следующим образом

$$G_{MN} dx^M dx^N = ds^2 - d\xi^2 - d\lambda^2, \tag{8.5.3}$$

где

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N; \quad d\xi = dx^N \xi_N; \quad d\lambda = dx^N \lambda_N. \tag{8.5.4}$$

2. **Диадные физико-геометрические тензоры** – это тензоры, которые можно построить из диадных составляющих метрического тензора и их первых производных. В самом общем случае имеются 11 независимых диадных физико-геометрических тензоров (вместо трех в монадном методе): пять векторов, четыре тензора второго ранга и два скаляра:

$$\Phi_\alpha^{(4)} = \xi^N g_\alpha^M (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \tag{8.5.5}$$
$$\Phi_\alpha^{(5)} = \lambda^N g_\alpha^M (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \tag{8.5.6}$$
$$Q_\alpha^{(4)} = \frac{1}{2}\lambda^N g_\alpha^M (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \tag{8.5.7}$$
$$Q_\alpha^{(5)} = \frac{1}{2}\xi^N g_\alpha^M (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \tag{8.5.8}$$
$$\Lambda_\alpha = \frac{1}{2} g_{M\alpha} (\lambda^N \xi_{,N}^M - \xi^N \lambda_{,N}^M); \tag{8.5.9}$$
$$F_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{2} g_\mu^M g_\nu^N (\xi_{N,M} - \xi_{M,N}); \tag{8.5.10}$$

$$F^{(5)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^M_\mu g^N_\nu (\lambda_{N,M} - \lambda_{M,N}); \tag{8.5.11}$$

$$Д^{(4)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^M_\mu g^N_\nu (\xi_{N;M} + \xi_{M;N}); \tag{8.5.12}$$

$$Д^{(5)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^M_\mu g^N_\nu (\lambda_{N;M} + \lambda_{M;N}); \tag{8.5.13}$$

$$q^{(4)} = \xi^M \lambda^N (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \tag{8.5.14}$$

$$q^{(5)} = \lambda^M \xi^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}). \tag{8.5.15}$$

Используя вид составляющих метрического тензора в данной калибровке, находим, что один из тензоров тождественно обращается в нуль

$$\Lambda_\alpha \equiv 0. \tag{8.5.16}$$

3. **Диадные операторы дифференцирования** находятся таким же образом, как и в монадном методе, однако теперь имеются три ключевых оператора:

$$\partial_4^{\dagger\dagger} = \xi^N \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^N} = \xi^4 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^4}; \tag{8.5.17}$$

$$\partial_5^{\dagger\dagger} = \lambda^N \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^N} = \lambda^4 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^4} + \lambda^5 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^5}; \tag{8.5.18}$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{\dagger\dagger} &= g^N_\alpha \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^N} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} + \xi_\alpha \partial_4^{\dagger\dagger} + \lambda_\alpha \partial_5^{\dagger\dagger} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} + (\xi^4 \xi_\alpha + \lambda^4 \lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^4} + \lambda^5 \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^5}. \end{aligned} \tag{8.5.19}$$

Все эти операторы не зависят ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемых (спроектированных) тензоров. Последний из этих операторов играет роль удлиненной производной в электродинамике.

Кроме того, имеется оператор n-мерной (4-мерной) ковариантной производной $\nabla_\alpha^{\dagger\dagger}$, соответствующий оператору (7.5.11) в монадном методе. Он записывается аналогичным образом через операторы (8.5.19).

4. **Запись всех общековариантных выражений в диадном виде** означает представление их только через спроектированные величины, через диадные физико-геометрические тензоры и введенные выше операторы дифференцирования. Запишем в диадном виде скалярную кривизну, которая в дальнейшем будет играть роль геометрического лагранжиана,

$$^6R = {}^4R + F^{(4)}_{\alpha\beta} F^{(4)\alpha\beta} + F^{(5)}_{\alpha\beta} F^{(5)\alpha\beta} - 2\nabla_\alpha^{\dagger\dagger} (\Phi^{(4)\alpha} + \Phi^{(5)\alpha}) -$$

$$-2[\Phi^{(4)}_{\alpha}\Phi^{(4)\alpha} + \Phi^{(5)}_{\alpha}\Phi^{(5)\alpha} - Q^{(4)}_{\alpha}Q^{(4)\alpha}]. \qquad (8.5.20)$$

Другие выражения будем выписывать по мере надобности.

8.6 6-Мерный вариант объединения гравитации и электромагнетизма

1. С помощью диадного метода построим 6-мерный вариант геометрической объединенной теории гравитации и электромагнетизма, причем в этом параграфе не будем затрагивать проблему геометризации частиц, то есть пока не будем делать конформное преобразование. Поскольку названные поля нейтральные и безмассовые, то естественно наложить на 6-мерную метрику условия цилиндричности по дополнительным координатам:

$$\frac{\partial G_{MN}}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial G_{MN}}{\partial x^5} = 0. \qquad (8.6.1)$$

Кроме этого положим, что компоненты метрики исключительно с дополнительными индексами являются постоянными величинами[4], то есть

$$G_{44} = -1; \quad G_{45} = Const; \quad G_{55} = Const \to$$

$$\to \xi^4 = Const; \quad \lambda^4 = Const; \quad \lambda^5 = Const. \qquad (8.6.2)$$

2. Условия (8.6.1) и (8.6.2) приводят к тому, что из 11 физико-геометрических тензоров (8.5.5) – (8.5.15) отличными от нуля остаются только два антисимметричных тензора:

$$F^{(4)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu}\right); \quad F^{(5)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^\nu}\right). \qquad (8.6.3)$$

Тогда скалярная кривизна (8.5.20), определяющая геометрический лагранжиан, принимает вид

$${}^6R = {}^4R + F^{(4)}_{\alpha\beta}F^{(4)\alpha\beta} + F^{(5)}_{\alpha\beta}F^{(5)\alpha\beta}. \qquad (8.6.4)$$

[4]Если допустить зависимость этих компонент от классических 4-мерных координат, то получается модель с дополнительными безмассовыми скалярными полями геометрического происхождения. Эта модель обобщает 5-мерную модель со скалярным полем, обусловленным компонентой G_{55}, упомянутой в §8.3. В наших работах [11, 13] обсуждались возможные следствия такой модели.

3. В рамках развиваемой модели два векторных поля ξ_α и λ_α можно связать лишь с электромагнитным векторным потенциалом A_α. Положим

$$\xi_\alpha = c_4 A_\alpha; \quad \lambda_\alpha = c_5 A_\alpha, \tag{8.6.5}$$

где c_4 и c_5 некоторые пока неизвестные коэффициенты. Напомним, что в предыдущей главе вопрос о физической интерпретации монады ξ_α оставался открытым. Стремясь к максимальной общности, попытаемся на него ответить в рамках 5-й физической парадигмы.

Подставим (8.6.5) в (8.6.3) а затем в (8.6.4) и отождествим плотности геометрического и физического (7.2.15) лагранжианов. В итоге получаем условие на введенные константы

$$c_5^2 + c_4^2 = \frac{4k_g}{c^4}, \tag{8.6.6}$$

то есть в бозонной (чисто геометрической) части теории имеется произвол в определении констант. В частности, можно положить $c_5 = 0$.

4. Оставляя вопрос о геометризации частиц до следующего параграфа, введем в данную модель материю в виде негеометрического добавка в плотность лагранжиана. Многомерную плотность лагранжиана будем в дальнейшем называть *гиперплотностью лагранжиана.* Зная, что элементарные частицы являются фермионами, будем описывать негеометрическую материю спинорами в 6-мерном многообразии, то есть пусть полная гиперплотность лагранжиана имеет вид

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-G^{(6)}}\left(-\frac{1}{2\tilde{æ}c}{}^6R + \tilde{\mathcal{L}}'_\Psi\right), \tag{8.6.7}$$

где $\sqrt{-G^{(6)}}\tilde{\mathcal{L}}'_\Psi$ – гиперплотность лагранжиана спинорной материи.

Напомним, что в общепринятой теории спиноры в многомерном многообразии вводятся на основе алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел [65]. Их характер зависит от размерности n и сигнатуры q используемого многообразия. В 6-мерном многообразии спиноры имеют $2^3 = 8$ компонент. В соответствии с общепринятой теорией 4 измерений возьмем 8-компонентные комплексные спиноры Ψ и гиперплотность лагранжиана в виде

$$\tilde{\mathcal{L}}'_\Psi = \frac{\hbar c}{2}\left(i\overline{\Psi}\Gamma^M\nabla_M\Psi - \frac{\tilde{m}c}{\hbar}\overline{\Psi}\Psi\right) + (h.c.), \tag{8.6.8}$$

где Γ^M - 8-рядные обобщения матриц Дирака, $\nabla_M \Psi$ - ковариантная производная спинора, символом $(h.c.)$ обозначено эрмитово сопряженное выражение, $\tilde{m}$ - затравочное значение массы спинорной частицы.

5. Более подробно вид матриц Γ^M и операторов ковариантного дифференцирования спиноров в многомерном искривленном пространстве-времени обсужден в главах 10 и 11, где рассмотрена более полная 7-мерная геометрическая модель гравиэлектрослабых взаимодействий. Здесь имеется ряд специфических вопросов, составляющих *фермионный сектор* многомерной геометрической модели, который будем отличать от сугубо геометрического *бозонного сектора*. В частности, в него входят вопросы описания гравитационного и электромагнитного взаимодействия фермионов.

В такой модели существенна зависимость спинорных функций от дополнительных координат. Определим эту зависимость в согласии с формулами (7.4.12) и (8.2.11) ранее рассмотренных 5-мерных геометрических моделей, то есть в виде

$$\Psi = \psi(x^\nu) e^{i(\beta\varepsilon_4 x^4 + \alpha\varepsilon_5 x^5)}, \tag{8.6.9}$$

где константы β и α определяют периоды компактификации по дополнительным координатам, $\psi(x^\nu)$ - часть спинорной функции, зависящая только от четырех классических координат.

6. Легко показать, что взаимодействие материи с электромагнитным полем описывается калибровочно инвариантным оператором 4-мерного дифференцирования (8.5.19). Подставляя в него (8.6.5) и (8.6.9), находим

$$\partial_\mu^{\dagger\dagger}\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i[\varepsilon_4\beta(\xi^4 c_4 + \lambda^4 c_5) + \varepsilon_5\alpha\lambda^5 c_5]A_\mu\right)\Psi. \tag{8.6.10}$$

Это выражение следует отождествить с удлиненной производной стандартной электродинамики (8.2.13), откуда получаем соотношение

$$Qe = \hbar c[\varepsilon_4\beta(\xi^4 c_4 + \lambda^4 c_5) + \varepsilon_5\alpha\lambda^5 c_5], \tag{8.6.11}$$

заменяющее (8.2.12).

Из формул (7.4.12) и (8.2.11) следует

$$\beta << \alpha, \tag{8.6.12}$$

так что первым слагаемым в (8.6.11) можно пренебречь, тогда имеем

$$Qe \simeq \hbar c\varepsilon_5\alpha\lambda^5 c_5, \tag{8.6.13}$$

то есть опять можно полагать, что значение электрического заряда в единицах e определяется гармоникой ε_5. В общем же случае из (8.6.11) следует, что "нейтральные" частицы обладают незначительным электрическим зарядом.

7. Из гиперплотности спинорного лагранжиана (8.6.8) находим, что "динамическая часть" дает вклады в массовые слагаемые так, что суммарное массовое слагаемое имеет вид

$$i\overline{\Psi}\left(\Gamma(4)\partial_4^{\dagger\dagger}+\Gamma(5)\partial_5^{\dagger\dagger}\right)\Psi-\frac{\tilde{m}c}{\hbar}\overline{\Psi}\Psi. \qquad (8.6.14)$$

Конкретная формула для значения результирующей массы фермиона зависит от представления 8-компонентной волновой функции Ψ через общепринятые 4-компонентные функции и от ряда других обстоятельств. Легко видеть, что из дифференцирования по x^5 возникает вклад порядка планковской массы $m_{Pl}\sim 10^{-5}$г., который при условии (8.6.12) много больше вклада от дифференцирования по координате x^4.

Для получения наблюдаемого значения массы электрона необходимо скомпенсировать планковскую массу затравочной массой $\tilde{m}$. Именно по этой причине в гиперплотности лагранжиана спинорного поля (8.6.8) волевым образом был введен последний член справа. Это следует рассматривать как недостаток 6-мерной геометрической модели. Из общих соображений следует, что масса должна возникать из динамической части лагранжиана. Именно так получаются массы в модели Вайнберга-Салама или в рассмотренном выше 5-мерном обобщении теории гравитации.

8. При описании спинорного поля в 5- и 6-мерных геометрических моделях возникает еще одна трудность, обусловленная появлением в уравнениях Дирака (в 4-мерной плотности фермионного лагранжиана) слагаемых, описывающих дополнительное взаимодействие с электромагнитным полем через значительные по величине аномальные магнитные моменты (более подробно см. в [11, с. 62]). Забегая вперед, отметим, что в 7-мерной геометрической модели эта трудность отпадает (см. [11, с. 120]).

8.7 Геометризация заряженного скалярного поля в 6-оптике

В §7.6 была произведена геометризация *нейтрального* скалярного поля при помощи компоненты $\tilde{G}_{44}$ 5-мерного метрического тензора и процедуры конформного преобразования. Обсу-

дим аналогичный способ геометризации заряженного скалярного поля в рамках 6-мерной теории Калуцы-Клейна.

1. Произведем конформное преобразование исходной 6-мерной метрики аналогично (7.6.1)

$$\tilde{G}_{MN} = \chi^2 G_{MN} \to \tilde{G}^{MN} = \chi^{-2} G^{MN};$$

$$\sqrt{-\tilde{G}^{(6)}} = \chi^6 \sqrt{-G^{(6)}}, \tag{8.7.1}$$

где χ – скаляр, в общем случае зависящий от всех шести координат. Используя тот факт, что в прообразе 6-мерной метрики, возникающем из бинарной геометрофизики, отлична от нуля именно компонента G_{44}, а также учитывая соображения §7.6, произведем следующее отождествление конформного фактора

$$\chi^2 = -\tilde{G}_{44}. \tag{8.7.2}$$

Используя общую формулу конформного преобразования скалярной кривизны для размерности $n = 6$, находим

$$-\frac{\sqrt{-\tilde{G}^{(6)}}}{2\tilde{æ}c}\,{}^6\tilde{R} =$$

$$= -\frac{\sqrt{-G^{(6)}}}{2\tilde{æ}c}\chi^4 \left({}^6R + -10G^{MN}\frac{\nabla_M\nabla_N\chi}{\chi} - 10G^{MN}\frac{\chi_{,M}\chi_{,N}}{\chi^2}\right), \tag{8.7.3}$$

где $\tilde{æ}$ обобщенная на случай 6-мерия гравитационная постоянная.

2. Произведем процедуру 1+1+4-расщепления конформно выделенной части, то есть последних двух слагаемых в (8.7.3). Кроме того, избавимся от вторых 4-мерных производных выделением дивергентных слагаемых. В итоге имеем вклад поля χ:

$$\frac{5\sqrt{-G^{(6)}}}{2\tilde{æ}c}\chi^2\{2g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\chi)\partial_\beta^{\dagger\dagger}\chi + \chi(\partial_4^{\dagger\dagger 2}\chi + \partial_5^{\dagger\dagger 2}\chi) +$$

$$+(\partial_4^{\dagger\dagger}\chi)^2 + (\partial_5^{\dagger\dagger}\chi)^2\} + (\text{дивергентный член}). \tag{8.7.4}$$

Здесь использованы обозначения §8.5. Здесь положено что компоненты диады λ_5 и ξ_4 являются постоянными.

3. Постулируем следующую зависимость конформного фактора от x^4 и x^5:

$$\chi = 1 + b[\varphi\exp(-i\beta x^4 - i\alpha x^5) - \varphi^*\exp(i\beta x^4 + i\alpha x^5)], \tag{8.7.5}$$

где α, β, b – вещественные константы; φ – комплексное скалярное поле, зависящее лишь от четырех пространственно-временных координат. Напомним, что знак минус перед комплексно сопряженным слагаемым существенен. Именно знак минус обеспечивает положительную определенность вклада скалярного поля в тензор энергии-импульса, т.е. геометризуемое поле обусловлено мнимой добавкой в конформном факторе.

Постулат (8.7.5) сопряжен с дальнейшим ограничением на допустимые преобразования координат x^4 и x^5. Исключаются преобразования, перемешивающие координаты x^4 и x^5, т.е. остаются

$$\begin{aligned} x'^4 &= x^4 + f_1(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x'^5 &= x^5 + f_2(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \tag{8.7.6}$$

4. Подставляя (8.7.5) в (8.7.4) и полагая, что b мало, во втором порядке по b имеем

$$\frac{10}{\tilde{æ}c}\sqrt{-G^{(6)}}\{b^2[g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\varphi^*)\partial_\beta^{\dagger\dagger}\varphi-$$

$$-\left((\beta\xi^4)^2 + (\alpha\lambda^5 + \beta\lambda^4)^2\right)\varphi^*\varphi] + (\text{дивергентные члены})+$$

$$+(\ldots)exp(-2i\beta x^4 - 2i\alpha x^5) + \ldots +$$

$$+(\ldots)exp(2i\beta x^4 + 2i\alpha x^5) + \ldots\}, \tag{8.7.7}$$

где введенные в (8.5.19) операторы дифференцирования с учетом формулы (8.7.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{\dagger\dagger}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} - i\alpha\lambda^5\lambda_\alpha\varphi - i\beta(\xi^4\xi_\alpha + \lambda^4\lambda_\alpha)\varphi; \\ \partial_\alpha^{\dagger\dagger}\varphi^* &= \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^\alpha} + i\alpha\lambda^5\lambda_\alpha\varphi^* + i\beta(\xi^4\xi_\alpha + \lambda^4\lambda_\alpha)\varphi^*. \end{aligned} \tag{8.7.8}$$

В формуле (8.7.7) не выписаны явно слагаемые с экспонентами по той причине, что окончательные формулы получаются усреднением по периодам четвертой и пятой координат, обращающим эти слагаемые в нуль согласно (7.6.9).

5. Варьируя результирующую плотность лагранжиана по φ^*, приходим к уравнению типа Клейна-Фока для заряженного скалярного поля (в нулевом порядке по b)

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\partial_\beta^{\dagger\dagger}\varphi + c_1[{}^4R + F^{(4)}_{\alpha\beta}F^{(4)\alpha\beta} + F^{(5)}_{\alpha\beta}F^{(5)\alpha\beta}]\varphi+$$

$$+[\beta^2(\xi^4)^2 + (\alpha\lambda^5 + \beta\lambda^4)^2]\varphi = 0, \qquad (8.7.9)$$

где c_1 - некоторый численный коэффициент.

6. Положим, как и в предыдущей главе, что координата x^4 соответствует действию, следовательно, константа β в экспонентах (8.7.5) характеризует наблюдаемую массу частицы, то есть пусть

$$\beta = \frac{mc}{\hbar}. \qquad (8.7.10)$$

Согласно принятой в этой главе идеологии вторая дополнительная размерность (координата x^5) описывает взаимодействие частицы с электромагнитным полем, поэтому свяжем константу α в экспонентах (8.7.5) с электрическим зарядом согласно формуле (8.2.11), то есть пусть

$$\alpha = \frac{ec}{2\sqrt{k_g}\hbar}. \qquad (8.7.11)$$

Легко видеть, что при сделанных предположениях первое слагаемое во вторых строках (8.7.7) и (8.7.9) описывает наблюдаемое значение массы, тогда как второе дает значение массы, порядка планковской

$$\tilde{m} = \frac{e}{2\sqrt{k_g}} \sim 10^{-5}\text{г}. \qquad (8.7.12)$$

Это значение массы на двадцать с лишним порядков больше массы электрона[5].

7. Опять положим, что векторы λ_μ и ξ_μ с точностью до коэффициента имеют физический смысл векторного потенциала электромагнитного поля. Это означает, что при выборе координат, когда $\lambda^4 = 0$, последние слагаемые в удлиненных производных (8.7.8) пренебрежимо малы по сравнению со вторыми слагаемыми справа, то есть удлиненные производные с высокой степенью точности совпадают с общепринятыми при $\beta \ll \alpha$.

8. Из изложенного в этом параграфе следует, что *в рамках 6-мерной модели гравитационных и электромагнитных взаимодействий не удается удовлетворительным образом геометризовать (имитировать) заряженную массивную материю (частицы) из-за возникновения планковских масс.* Данную задачу

[5]Для устранения вкладов планковских масс можно ввести в плотность геометрического лагранжиана (8.7.3) космологический член, однако при этом возникает другая трудность, связанная с недопустимо большим значением космологического члена.

можно решить лишь для случая нейтральной материи. Это заставляет пересмотреть физическую интерпретацию такого скалярного поля.

Забегая вперед, отметим, что в главах 10 и 11 в рамках 7-мерной геометрической модели описываются грави-электрослабые взаимодействия заряженной фермионной материи, вводимой в геометрию извне. При этом для описания масс этих частиц оказывается необходимым вводимое аналогичным образом нейтральное скалярное поле геометрического происхождения, интерпретируемое там как *хиггсовское скалярное поле.*

8.8 6-Мерная теория Калуцы-Клейна и бинарная геометрофизика

Можно утверждать, что в рамках каждой физической парадигмы имеется ряд проблем, которые невозможно решить, оставаясь в рамках этой же парадигмы. История науки дает тому множество примеров. В полной мере это относится и к парадигмам геометризации физики (5-й и 8-й парадигмам), которые обсуждались в этой и предыдущей главах. Приведенные в §8.3 решения проблем 5-мерных (многомерных) теорий в рамках их же парадигмы снимают лишь часть из них, для других же, по-существу, предлагается замена на другие проблемы, решение которых вряд ли возможно в рамках этой парадигмы. Обсудим их с позиций более глубокой парадигмы бинарной геометрофизики.

1. В рамках 5-й парадигмы ставился **вопрос о смысле дополнительных размерностей** (1-я трудность), исходя из естественной для этой парадигмы посылки о первичности многомерного координатного пространства. Отсюда были естественны ожидания понять дополнительные размерности в привычном классическом смысле. В бинарной же геометрофизике в основу теории кладутся отношения, из которых непосредственно строятся понятия импульсного пространства. Понятия координатного пространства в этом подходе имеют производный от них характер, причем в такой постановке проблемы *ниоткуда не следует, что всем компонентам импульса должны соответствовать координатные размерности.* В бинарной геометрофизике возникает лишь 4-мерное координатное пространство-время. Строго говоря, для дополнительных импульсов нет классических координатных размерностей.

2. На основе нового подхода можно ответить на **вопрос о причине компактификации дополнительных размерностей** – преодолеть 10-ю трудность в списке, приведенном в §8.3. В

рамках 6-мерной теории Калуцы-Клейна с двумя дополнительными размерностями эта проблема разбивается на две принципиально различные проблемы:

1) Одна из них связана с компактификацией зарядовой координаты x^5. Как следует из бинарной геометрофизики, для этой размерности нет классических координат. Использование циклической зависимости по x^5 с очень малым периодом, то есть компактификация пространства по этой координате (с топологией тора), фактически означает *математический прием исключения этой координаты из теории с лишними посылками.* Действительно, все классические выражения (лагранжиан и другие) получаются после интегрирования по периоду координаты x^5.

С нашей точки зрения, поиск причин компактификации многомерного пространства в рамках 5-й (или 8-й парадигм) бесперспективен. Об этом свидетельствуют неудачные попытки решить эту проблему в многочисленных работах на эту тему.

2) Компактификация координаты x^4 имеет другую природу. *Она связана с квантовомеханическими закономерностями.* Классический координатный аналог этой размерности имеется, – это классическое действие или интервал s. В бинарной геометрофизике эта величина соответствует вещественному коэффициенту в мнимом показателе экспоненты – параметру БСКО ранга (2,2).

Можно сказать, что в бинарной геометрофизике решается проблема, обратная обсуждаемой в многочисленных исследованиях в рамках теории Калуцы-Клейна. Не следует искать причины компактификации дополнительной размерности, исходя из посылки о "нормальных" некомпактифицированных координатах, а нужно решать задачу перехода от (первично) "компактифицированных" параметров к четырем некомпактифицированным классическим пространственно-временным координатам x^μ.

3. С позиций бинарной геометрофизики можно пролить свет на **вопрос о физической интерпретации дополнительных компонент метрики** G_{44} и G_{55}. Они имеют разный характер.

1) Прообраз компоненты метрики G_{44} в бинарной геометрофизике используется для построения пропагаторов, входящих в состав электромагнитного потенциала и компонент 4-мерной метрики. Только после выполнения этой роли теория может принять полевой характер.

2) Прообраз компоненты метрики G_{55} в бинарной геометрофизике зависит от используемой для ее построения модели. В простейшей модели на основе БСКО ранга (4,4) она обращается в нуль, однако, как будет показано в главах 13 и 14, имеются более полные модели на основе БСКО рангов (5,5) и (6,6).

4. **Вопрос о 15-м уравнении Эйнштейна** (4-й недостаток 5-мерной теории Калуцы в §8.3) связан не только с физической интерпретацией дополнительных диагональных компонент метрики. Он значительно глубже, — связан с вопросом о возможности применения вариационных принципов в (физических) многообразиях высших размерностей и, как следствие этого, — с физической обоснованностью многомерных уравнений Эйнштейна. Как было показано, построение многомерных моделей начинается с записи гиперплотности скалярной кривизны (и лагранжиана материи). Физически значимая 4-мерная плотность лагранжиана получается после интегрирования по дополнительным координатам. *Только после этого, то есть в 4-мерном пространстве-времени обоснованы применение вариационного принципа и запись уравнений Эйнштейна* и других полей геометрического происхождения.

5. В рамках программы бинарной геометрофизики снимается 7-я претензия к 5-мерным (многомерным) теориям, состоящая в отсутствии связи геометрического подхода с принципами квантовой теории. Попытки проявить эту связь предпринимались уже в 5-оптике Румера.

6. Наконец, вывод об отсутствии предсказаний новых экспериментов в многомерных моделях можно считать преждевременным. В частности, есть основания ожидать проявлений смешанных компонент метрики $G_{4\mu}$ уже в области явлений классической физики. В §4.8 отмечалось, что бинарная геометрофизика подсказывает отождествление компонент ξ_μ (то есть $G_{4\mu}$) с электромагнитными потенциалами A_μ, что означает дополнительный канал взаимодействия материи с электромагнитным полем через их массу. Намек на возможность такой связи можно усмотреть в канале 5-мерия Клейна-Румера.

Выскажем гипотезу о возможности объяснения с помощью компоненты метрики $G_{4\mu}$ магнитного поля Земли и других астрофизических объектов, таких как планеты, звезды или пульсары (нейтронные звезды).

Раздел IV

Электрослабые взаимодействия в концепции близкодействия

В этом разделе физические взаимодействия рассматрены в рамках концепции близкодействия с позиций двух физических парадигм:

1) общепринятой калибровочной теории физических взаимодействий (в рамках 1-й парадигмы – теории поля);

2) многомерной (7-мерной) геометрической модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна (5-й парадигмы).

Поскольку здесь преследуется цель — показать, что в рамках бинарной геометрофизики описываются основные свойства электрослабых взаимодействий, описываемые ныне моделью Вайнберга-Салама, то рассмотрение начинается с напоминания основных положений общепринятой калибровочной модели электрослабых взаимодействий. Этому посвящена практически вся начальная глава (9) этого раздела.

Между описанием физических взаимодействий в стандартной теории и в бинарной геометрофизике находятся, во-первых, многомерные геометрические модели и, во-вторых, принципы теории прямого межчастичного взаимодействия. В следующих двух главах (10 и 11) этого раздела обсуждена 7-мерная геометрическая модель грави-электро-слабых взаимодействий, обобщающая 6-мерную модель Калуцы-Клейна. В такой модели оказываются задействоваными все размерности, прообразы которых получаются из понятий БСКО ранга (4,4). В главе 10 обсужден бозонный сектор 7-мерной геометрической модели, то есть рассмотрены те аспекты теории, которые можно получить из гиперплотности 7-мерной скалярной кривизны.

Спинорное поле, описывающее элементарные частицы – фермионы, вносится в такую модель извне в виде плотности негеометрического лагранжиана. Фермионный сектор теории обсужден в главе 11. В этой же главе затронуты вопросы описания трех поколений электрослабо взаимодействующих частиц в рамках геометрических моделей большей размерности.

В §9.4 главы 9 кратко изложен переход от парадигмы теории поля к теории прямого межчастичного взаимодействия, то есть дана дальнодействующая версия модели Вайнберга-Салама. Она является мостиком к бинарной геометрофизике.

Глава 9

Калибровочная теория электрослабых взаимодействий

В этой главе изложены самые необходимые сведения из современной теории электрослабых взаимодействий, обычно называемой моделью Вайнберга-Салама (более подробно см. в [48, 49, 68, 85]). Приведенные здесь формулы сравниваются в следующих главах с результатами, получаемыми в рамках двух других физических парадигм.

9.1 Калибровочный подход к описанию взаимодействий

1. Калибровочный подход к описанию физических взаимодействий опирается на два ключевых положения: во-первых, на убеждение, что в основу физики должны быть положены симметрии, точнее, симметрии, описываемые группами Ли, и, во-вторых, на идею о локализации (зависимости от координат) параметров групп. Физические поля предлагается вводить как факторы, позволяющие компенсировать нарушение соответствующих симметрий при локализации групп. Продемонстрируем, как реализуются эти соображения в теории электромагнитных и электрослабых взаимодействий.

2. Начнем с простейшего случая $U(1)$-симметрии, используемой для описания электромагнитного взаимодействия (или как составной части при построении модели Вайнберга-Салама). Как известно, в квантовой теории поля наблюдаемые величины

– вероятность обнаружения частиц, значения импульса, момента импульса и т.д. – строятся из квадратичных комбинаций вида

$$\psi^* D\psi, \tag{9.1.1}$$

где ψ - комплексная волновая функция, D - соответствующий оператор наблюдаемой величины. Для всех таких квадратичных комбинаций имеет место симметрия относительно преобразований волновой функции

$$\psi \to \psi' = \psi e^{i\alpha g_1}; \quad \psi^* \to \psi^{*\prime} = \psi^* e^{-i\alpha g_1}, \tag{9.1.2}$$

где g_1 - следует понимать как некий заряд частицы. При построении электродинамики это электрический заряд ($g_1 \sim e$). Очевидно, что в квадратичных алгебраических комбинациях вида (9.1.1) экспоненты сокращаются. Поскольку можно определить результат от двух таких преобразованиях, ввести единичное и обратное преобразования, то можно утверждать, что эти преобразования образуют группу, характеризуемую одним параметром α. Эта группа является циклической группой или группой $U(1)$. При постоянных α говорят, что имеет место глобальная $U(1)$-симметрия.

3. Появление взаимодействия в данном подходе ассоциируется с нарушением глобальной групповой симметрии. Применяется прием, называемый *локализацией группы*. Он состоит в том, что параметр α полагается зависящим от координат 4-мерного пространства-времени. Это оказывается принципиально существенным, если оператор D в (9.1.1) содержит в себе дифференцирование по координатам.

Поясним это на примере оператора импульса, когда $D \sim \partial/\partial x^\mu$. Тогда при преобразованиях (9.1.2) имеем

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \to \psi^{*\prime} \frac{\partial \psi'}{\partial x^\mu} = \psi * \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + i g_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu} \psi^* \psi, \tag{9.1.3}$$

где дополнительное слагаемое возникло из дифференцирования экспоненты. Оно нарушает инвариантность (9.1.1) относительно преобразования (9.1.2).

Для восстановления инвариантности предлагается, во-первых, изменить оператор дифференцирования следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i g_1 B_\mu, \tag{9.1.4}$$

и, во-вторых, постулировать, что при преобразованиях (9.1.2) введенное здесь векторное поле B_μ изменяется по закону

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}. \tag{9.1.5}$$

Очевидно, что комбинация (9.1.1) с оператором D вида (9.1.4) остается инвариантной относительно преобразований (9.1.2).

Именно так принято вводить электромагнитное взаимодействие в современной калибровочной теории (в электродинамике). Только в этом случае следует положить

$$B_\mu = A_\mu \quad \text{и} \quad g_1 = e/\hbar c.$$

Тогда (9.1.5) становится известным в стандартной электродинамике калибровочным преобразованием векторного потенциала. Сохраняющейся величиной, соответствующей $U(1)$-симметрии, является электрический заряд системы.

4. В середине 50-х годов Янгом и Миллсом [95] было предложено обобщить изложенный прием на случаи других групп. Оказывается, этот прием имеет универсальный характер, его можно применить практически к любой из известных групп Ли. Каждой из них можно поставить в соответствие закон сохранения некоторого заряда и присущую ей совокупность возможных полей переносчиков взаимодействий. Сейчас принято называть такие поля *полями Янга-Миллса.* Но это, конечно, не означает, что все они реализуются в физике элементарных частиц. Кроме рассмотренной группы $U(1)$, в физике микромира оказались нужными группы $SU(2)$ и $SU(3)$: первая для описания электрослабых взаимодействий, а вторая – для построения хромодинамики.

5. Более подробно остановимся на группе $SU(2)$. В частности, как известно, она соответствует группе вращений 3-мерного (внешнего) евклидова пространства. В данном случае вводится некое внутреннее пространство частиц, именуемое *изотопическим пространством.* Использование этой группы обусловлено тем, что при описании слабых взаимодействий возникают квадратичные комбинации из волновых функций нейтрино ($\psi_1 \to \nu_L$) и массивного лептона ($\psi_2 \to e_L$). Имеет место некая симметрия между волновыми функциями нейтрино и левой компоненты массивного лептона (электрона). Предлагается ее понимать как инвариантность квадратичной комбинации из двух состояний (нейтринного и левого электронного) единого поля с разными проекциями спина 1/2 в изотопическом пространстве относительно преобразований группы $SU(2)$. Это означает, что в выражении (9.1.1) следует положить

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}; \qquad \psi^* \to \overline{\psi} = (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2). \tag{9.1.6}$$

Тогда преобразования (9.1.2) обобщаются до матричного ви-

да

$$\psi \to \psi' = e^{i(\vec{\alpha}\vec{T})g_2}\psi; \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = \overline{\psi}e^{-i(\vec{\alpha}\vec{T})g_2}, \tag{9.1.7}$$

где показатель экспоненты имеет матричный характер, то есть

$$(\vec{\alpha}\vec{T}) = \frac{1}{2}\left(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3\right). \tag{9.1.8}$$

Здесь использованы следующие обозначения: g_2 - константа, имеющая смысл заряда, α_s - три параметра ($s = 1, 2, 3$) группы $SU(2)$, а σ_s - три матрицы Паули. Если параметры α_s постоянные, то говорят о глобальной $SU(2)$-симметрии.

6. Введение взаимодействия осуществляется посредством локализации группы, т.е. заменой постоянных параметров на переменные $\alpha_s(x^\mu)$. Если оператор D содержит дифференцирование, то комбинация вида (9.1.1) становится неинвариантной при таком преобразовании. Для сохранения инвариантности опять вводятся два постулата.

Во-первых, оператор дифференцирования заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial^+}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ig_2\vec{A}_\mu \equiv I_2\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_2}{2}A(s)_\mu\sigma_s, \tag{9.1.9}$$

где по индексу s подразумевается суммирование от 1 до 3, а $A(s)_\mu$ - три калибровочных векторных поля ($s = 1, 2, 3$) - по числу параметров группы $SU(2)$; I_2 - единичная 2-рядная матрица.

Во-вторых, полагается, что при преобразованиях (9.1.7) калибровочные поля изменяются по закону

$$\vec{A}_\mu \to \vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial x^\mu} - \vec{\alpha}\times\vec{A}_\mu, \tag{9.1.10}$$

где $\vec{A}_\mu = (1/2)A(s)_\mu\sigma_s$ и $\vec{\alpha} = (1/2)\alpha_s\sigma_s$ - матричные величины. Это выражение отличается от (9.1.5) из-за матричного характера входящих в него величин. Оно не только "удлиняется" на предпоследнее слагаемое, но и изотопически поворачивается (последнее слагаемое). Этот поворот связан с матричным характером показателя экспоненты в (9.1.7) и величины $\vec{A}_\mu$, так как для сокращения экспоненциальных слагаемых в (9.1.1) экспоненту с матричным показателем следует перенести через матричный коэффициент в виде $\vec{A}_\mu$.

7. Таким образом, калибровочная $SU(2)$-симметричная теория диктует введение трех (триплета) векторных полей. Соответствующая этим полям напряженность имеет вид

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \vec{A}_\mu}{\partial x^\nu} - ig_2(\vec{A}_\mu \vec{A}_\nu - \vec{A}_\nu \vec{A}_\mu), \tag{9.1.11}$$

где в отличие от обычной напряженности электромагнитного поля появляется квадратичный добавок, связанный с тем, что матрицы σ_s, входящие в состав $\vec{A}_\mu$, не коммутируют друг с другом. Это отражает общее свойство группы $SU(2)$, состоящее в том, что два последовательно произведенные поворота, сделанные в разном порядке, приводят к несовпадающим результатам. Такое свойство группы называют неабелевостью, а саму группу *неабелевой*.

9.2 Модель Вайнберга-Салама (фермионный сектор)

1. Кратко изложим основные положения модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама [48, 85]. Эта модель строится в рамках калибровочного подхода локализацией двух групп $U(1)$ и $SU(2)$, т.е. для нее имеют место все формулы, изложенные в предыдущем разделе. В них нужно лишь произвести некоторые переобозначения и объединить друг с другом. Так, вводя в экспоненту размерные константы $\hbar$ и c, имеем переобозначения:

$$g_1 \to \frac{g_1}{\hbar c}; \qquad g_2 \to \frac{g_2}{\hbar c}. \tag{9.2.1}$$

Такая теория характеризуется двумя константами взаимодействия и четырьмя векторными калибровочными полями.

Выпишем и обсудим плотность лагранжиана модели Вайнберга-Салама. Ее удобно представить в виде четырех составных частей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{Bos} + \mathcal{L}_m, \tag{9.2.2}$$

где $\mathcal{L}_0$ – плотность лагранжиана свободного фермионного поля;

$\mathcal{L}_F$ – описывает взаимодействие фермионных полей с векторными калибровочными полями (фермионный сектор);

$\mathcal{L}_{Bos}$ – описывает плотность лагранжиана векторных калибровочных полей (бозонный сектор);

$\mathcal{L}_m$ – часть плотности лагранжиана, описывающая вклады в массы частиц (массовый сектор). Сюда входит плотность лагранжиана хиггсовского скалярных полей и члены, описывающие их взаимодействие с другими полями.

Все эти составные части тесно связаны друг с другом.

2. В этом параграфе сосредоточим внимание на фермионном секторе теории. Согласно модели Вайнберга-Салама свободное фермионное поле и взаимодействие лептонов с векторными калибровочными полями описываются следующими слагаемыми в плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_F = i\hbar c[(\overline{L}\gamma^\mu\partial_\mu^{++}L)+(\overline{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{++}e_R)+(\overline{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{++}\nu_R)], \quad (9.2.3)$$

где L и $\overline{L}$ – 2-компонентные столбец и строка, характеризующие левые компоненты нейтрино и электрона, e_R – правая компонента электрона, ν_R – правая компонента нейтрино (если она имеется), а оператор ∂_μ^{++} объединяет в себе два оператора (9.1.4) и (9.1.9) и имеет вид

$$\partial_\mu^{++} = I_2\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_1}{\hbar c}\frac{Y}{2}I_2B_\mu - \frac{ig_2}{\hbar c}T(k)A(k)_\mu. \quad (9.2.4)$$

Здесь Y – гиперзаряд, $T(s)$ – матричная величина, выражаемая через матрицы Паули, I_2 – единичные 2×2-матрицы.

3. Следует особо подчеркнуть, что в модели Вайнберга-Салама вводится ряд постулатов, уточняющих характер взаимодействия нейтрино и левых и правых компонент электрона с калибровочными векторными полями:

а) Взаимодействие с полем B_μ, обусловленным локализацией группы $U(1)$, характеризуется значением гиперзаряда Y. Постулируется, что для левых компонент нейтрино и электрона гиперзаряд $Y=-1$, а для правой компоненты электрона $Y=-2$.

б) Взаимодействие с полями $A(s)_\mu$, обусловленными локализацией группы $SU(2)$, характеризуется проекцией изотопического спина T. Постулируется, что левые компоненты нейтрино и массивного лептона (электрона) образуют изотопический дублет в изотопическом пространстве: для нейтрино $T_3=+1/2$, для левой компоненты электрона $T_3=-1/2$. Правая компонента электрона полагается изотопическим синглетом, для нее $T_3=0$.

Значение электрического заряда Q в единицах e выражается через гиперзаряд Y и проекцию изотопического спина T_3 следующей формулой

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3. \quad (9.2.5)$$

В виде таблицы выпишем значения Q, T_3 и Y всех рассматриваемых в простейшей модели Вайнберга-Салама частиц.

Табл. 9.1:

Квантовое число	ν_{eL}	e_L	ν_{eR}	e_R	$W^{\pm}$	φ_0	φ_+
Q	0	-1	0	-1	± 1	0	$+1$
T_3	$1/2$	$-1/2$	0	0	± 1	$-1/2$	$+1/2$
Y	-1	-1	0	-2	0	$+1$	$+1$

4. С учетом введенных постулатов, удлиненная производная (9.2.4) от изотопического дублета, содержащегося в первой части справа (9.2.3), записывается следующим образом

$$\partial_\mu^{++}\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} = \left[I_2\frac{\partial}{\partial x^\mu} + I_2\frac{ig_1}{2\hbar c}B_\mu - \frac{ig_2}{2\hbar c}A(s)_\mu\sigma_s\right]\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}. \tag{9.2.6}$$

Отсюда находим первое слагаемое справа в (9.2.3)

$$i\hbar c\overline{L}\gamma^\mu\partial_\mu^{++}L = i\hbar c\left[\overline{\nu}_L\gamma^\mu\frac{\partial\nu_L}{\partial x^\mu} + \overline{e}_L\gamma^\mu\frac{\partial e_L}{\partial x^\mu} + \right.$$

$$+\frac{ig_1}{2\hbar c}B_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L) + (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)] - \frac{ig_2}{2\hbar c}A(3)_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L) - (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)] +$$

$$+\frac{ig_2}{2\hbar c}A(2)_\mu[i(\overline{\nu}_L\gamma^\mu e_L) - i(\overline{e}_L\gamma^\mu\nu_L)] -$$

$$\left. -\frac{ig_2}{2\hbar c}A(1)_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_L\gamma^\mu\nu_L)]\right]. \tag{9.2.7}$$

5. Удлиненная производная (9.2.4) для правой компоненты электрона представляется в виде

$$\partial_\mu^{++}e_R = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ig_1}{\hbar c}B_\mu\right)e_R. \tag{9.2.8}$$

Отсюда находится второе слагаемое справа в (9.2.3)

$$i\hbar c\overline{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{++}e_R = i\hbar c\left(\overline{e}_R\gamma^\mu\frac{\partial e_R}{\partial x^\mu} + \frac{ig_1}{\hbar c}(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)B_\mu\right). \tag{9.2.9}$$

6. Наконец, удлиненная производная (9.2.4) для правого нейтрино ($Y = 0$, $T_3 = 0$), если оно существует, записывается в виде

$$\partial_\mu^{++}\nu_R = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\nu_R, \tag{9.2.10}$$

следовательно, последнее слагаемое справа в (9.2.3) имеет вид

$$i\hbar c\overline{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{++}\nu_R = i\hbar c\overline{\nu}_R\frac{\partial\nu_R}{\partial x^\mu}. \qquad (9.2.11)$$

7. Собирая вместе формулы (9.2.7), (9.2.9) и (9.2.11) и опуская в них слагаемые с частными производными от фермионных полей, плотность лагранжиана взаимодействия фермионных полей с векторными калибровочными полями можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= -\frac{g_1}{2}B_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L) + (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) + 2(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)] + \\ &+ \frac{g_2}{2}A(1)_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_L\gamma^\mu\nu_L)] - \\ &- \frac{ig_2}{2}A(2)_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu e_L) - (\overline{e}_L\gamma^\mu\nu_L)] + \\ &+ \frac{g_2}{2}A(3)_\mu[(\overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L) - (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)]. \qquad (9.2.12)\end{aligned}$$

9.3 Промежуточные векторные бозоны

1. Перейдем от первичных калибровочных полей B_μ и $A(s)_\mu$ к электромагнитному полю A_μ и полю Z_μ промежуточного Z-бозона, которые связаны с первичными полями соотношениями:

$$\begin{aligned}A_\mu &= B_\mu\cos\theta_W + A(3)_\mu\sin\theta_W; \\ Z_\mu &= -B_\mu\sin\theta_W + A(3)_\mu\cos\theta_W, \qquad (9.3.1)\end{aligned}$$

где θ_W—угол Вайнберга, выражаемый через константы g_1 и g_2 следующим образом

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}; \quad \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}; \quad \tan\theta_W = \frac{g_1}{g_2}. \qquad (9.3.2)$$

Отметим, что выделение двух комбинаций из нейтральных калибровочных полей обусловлено видом взаимодействия этих полей с хиггсовскими скалярными бозонами (см. §9.5), определяющими массовые вклады. Из плотности лагранжиана выделяется безмассовая часть, соответствующая электромагнитному полю A_μ, и массивная составляющая, соответствующая полю Z_μ.

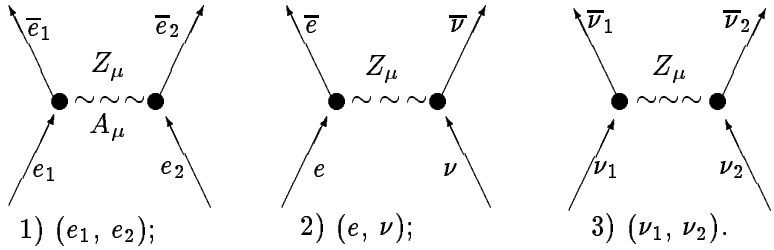
Экспериментальным образом найдено, что $\theta_W \simeq 28,4^o$. Обратное соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} B_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}(g_2 A_\mu - g_1 Z_\mu); \\ A(3)_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}(g_1 A_\mu + g_2 Z_\mu). \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

2. Отдельно запишем через введенные величины часть удлиненной производной (9.2.4), характеризующую взаимодействие фермионов с нейтральными векторными полями,

$$\partial_\mu^{++} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iQe}{\hbar c} A_\mu + \frac{ie}{\hbar c \sin\theta_W \cos\theta_W}(T_3 - Q\sin^2\theta_W) Z_\mu. \tag{9.3.4}$$

Взаимодействия фермионов через промежуточные нейтральные векторные бозоны A_μ и Z_μ проиллюстрированы диаграммами типа Фейнмана на рисунке 9.1.



1) $(e_1,\, e_2)$; 2) $(e,\, \nu)$; 3) $(\nu_1,\, \nu_2)$.

Рис. 9.1: Взаимодействия фермионов через промежуточные нейтральные векторные бозоны.

3. Вместо векторных потенциалов $A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$ введем потенциалы промежуточных заряженных W-бозонов:

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(1)_\mu + iA(2)_\mu]; \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(1)_\mu - iA(2)_\mu]. \tag{9.3.5}$$

Взаимодействие фермионов через промежуточные векторные бозоны проиллюстрированы на диаграмме рисунка 9.2.

4. Подставляя (9.3.3) и (9.3.5) в (9.2.12), находим

$$\mathcal{L}_F = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\left[(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)\right] A_\mu +$$

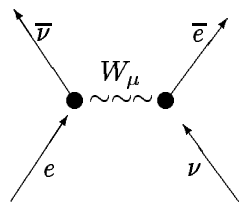


Рис. 9.2: Взаимодействие нейтрино и массивного лептона через промежуточные W-бозоны.

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \frac{3g_1^2 - g_2^2}{4\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left[(\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] Z_\mu - \\
- \quad & \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{4} \left[(\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) - (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R) - 2(\overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) \right] Z_\mu + \\
+ \quad & \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\overline{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^- + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\overline{e}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^+ . \qquad (9.3.6)
\end{aligned}
$$

Из первой строки видно, что электрический заряд e выражается через g_1 и g_2

$$
e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} . \qquad (9.3.7)
$$

5. Бозонная (третья) часть плотности лагранжиана в (9.2.2) записывается следующим образом

$$
\mathcal{L}_{Bos} = -\frac{1}{16\pi} F(B)_{\mu\nu} F(B)^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} Sp \vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu} , \qquad (9.3.8)
$$

где $\vec{F}_{\mu\nu}$ записано в (9.1.11), а $F(B)_{\mu\nu}$ имеет вид

$$
F(B)_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} . \qquad (9.3.9)
$$

Легко показать, что

$$
-\frac{1}{8\pi} Sp \vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \{ [F(1)_{\mu\nu} F(1)^{\mu\nu} + F(2)_{\mu\nu} F(2)^{\mu\nu} +
$$

$$+F(3)_{\mu\nu}F(3)^{\mu\nu}] + \frac{4g_2}{\hbar c}[F(1)_{\mu\nu}A(2)^{\mu}A(3)^{\nu} + F(2)_{\mu\nu}A(3)^{\mu}A(1)^{\nu} +$$

$$+F(3)_{\mu\nu}A(1)^{\mu}A(2)^{\nu}] + \frac{2g_2^2}{(\hbar c)^2}[A(1)_{\mu}A(1)^{\mu}A(2)_{\nu}A(2)^{\nu} +$$

$$+A(1)_{\mu}A(1)^{\mu}A(3)_{\nu}A(3)^{\nu} + A(2)_{\mu}A(2)^{\mu}A(3)_{\nu}A(3)^{\nu} -$$

$$-(A(1)_{\mu}A(2)^{\mu})^2 - (A(1)_{\mu}A(3)^{\mu})^2 - (A(2)_{\mu}A(3)^{\mu})^2]\Big\}. \quad (9.3.10)$$

Из плотности лагранжиана (9.3.8), учитывая (9.3.9) и (9.3.10), вариационным методом можно получить уравнения Янга-Миллса для "свободных" векторных бозонных полей.

9.4 Дальнодействующая версия модели Вайнберга-Салама

1. Модель Вайнберга-Салама является типичной теорией поля. В ней ключевую роль играют бозонные поля, которых нет среди первичных понятий бинарной геометрофизики. Поэтому для сопоставления двух моделей их нужно записать в однотипных терминах, т.е. в рамках одной концепции (парадигмы). Построим аналог модели Вайнберга-Салама в терминах концепции дальнодействия (теории прямого межчастичного взаимодействия). Ограничимся рассмотрением той части лагранжиана модели Вайнберга-Салама, которая описывает взаимодействие лептонов через промежуточные векторные бозоны.

2. Для того, чтобы это сделать, вспомним, как в теории Фоккера-Фейнмана определялся электромагнитный векторный потенциал $A_\mu(1,2)$, характеризовавший электромагнитное воздействие на первый заряд (e_1) со стороны второго заряда (e_2). Имея ввиду (9.3.6), можно записать

$$A_\mu(1,2) = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \int [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\, D_A(1,2) d\tilde{s}_2, \quad (9.4.1)$$

где $D_A(1,2)$ – пропагатор электромагнитного взаимодействия, соответствующий δ-функции в (2.5.6); $d\tilde{s}_2$ – символическая запись дифференциалов для второй частицы.

3. Совершенно аналогично можно записать выражения для потенциалов $Z_\mu(1,2)$ и $W_\mu^{\pm}(1,2)$ через характеристики вторых

частиц:

$$Z_\mu(1,2) = \frac{3g_1^2 - g_2^2}{4\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \int \left[(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\right] D_Z(1,2)d\tilde{s}_2 -$$

$$-\frac{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{4} \int \left[(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R}) - 2(\overline{\nu}_{2L}\gamma_\mu \nu_{2L})\right] D_Z(1,2)d\tilde{s}_2, \tag{9.4.2}$$

где $D_Z(1,2)$ – пропагатор массивного Z-бозона;

$$\begin{aligned} W_\mu^+(1,2) &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \int (\overline{\nu}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) D_{W^+}(1,2)d\tilde{s}_2; \\ W_\mu^-(1,2) &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \int (\overline{e}_{2L}\gamma_\mu \nu_{2L}) D_{W^-}(1,2)d\tilde{s}_2, \end{aligned} \tag{9.4.3}$$

где также $D_{W^\pm}(1,2)$ – пропагаторы W-бозонов.

Следует подчеркнуть, что Z- и W-бозоны в модели Вайнберга-Салама обладают отличной от нуля массой покоя, что, в частности, означает, что их пропагаторы отличаются от электромагнитного пропагатора.

4. Подставляя выражения (9.4.1)–(9.4.3) в (9.3.6), приходим к действию типа Фоккера для модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама

$$\begin{aligned} S_{int}(1,2) &= \int\int [\mathcal{L}_{int}(e_1,e_2) + \mathcal{L}_Z(e,\nu) + \\ &+ \mathcal{L}_Z(\nu_1,\nu_2) + \mathcal{L}_W(\nu,e)]d\tilde{s}_2 d\tilde{s}_1, \end{aligned} \tag{9.4.4}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(e_1,e_2) &= \frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}\left[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})\right] \times \\ &\times \left[(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\right] D_A(1,2) + \\ &+ \frac{(3g_1^2-g_2^2)^2}{16(g_1^2+g_2^2)}\left[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})\right] \times \\ &\times \left[(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\right] D_Z(1,2) + \\ &+ \frac{g_1^2+g_2^2}{16}\left[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})\right] \times \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \quad [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\, D_Z(1,2) - \\
&- \quad \frac{3g_1^2 - g_2^2}{16}\,[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \times \\
&\times \quad [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\, D_Z(1,2) - \\
&- \quad \frac{3g_1^2 - g_2^2}{16}\,[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \times \\
&\times \quad [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\, D_Z(1,2); \qquad (9.4.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_Z(e,\nu) &= \frac{3g_1^2 - g_2^2}{8}[(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) + (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)] \times \\
&\times \quad (\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L) D_Z(1,2) - \\
&- \quad \frac{g_1^2 + g_2^2}{8}[(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) - (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)] \times \\
&\times \quad (\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L) D_Z(1,2); \qquad (9.4.6)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}_Z(\nu_1,\nu_2) = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4}(\overline{\nu}_{1L}\gamma^\mu\nu_{1L})(\overline{\nu}_{2L}\gamma_\mu\nu_{2L}) D_Z(1,2); \qquad (9.4.7)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_W(\nu,e) &= \frac{g_2^2}{2}(\overline{\nu}_L\gamma^\mu e_L)(\overline{e}_L\gamma_\mu\nu_L) D_{W^+}(1,2) + \\
&+ \quad \frac{g_2^2}{2}(\overline{e}_L\gamma^\mu\nu_L)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu e_L) D_{W^-}(1,2). \qquad (9.4.8)
\end{aligned}
$$

9.5 Хиггсовские скалярные бозоны и массы элементарных частиц

1. Для получения масс покоя промежуточных векторных бозонов и фермионов в модели Вайнберга-Салама используется так называемый механизм Хиггса, оставляющий теорию локально калибровочно инвариантной. Постулируется существование скалярного поля, называемого хиггсовским полем, которое является дублетом в изотопическом $SU(2)$-пространстве и переносит ненулевой гиперзаряд

$$
\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}. \qquad (9.5.1)
$$

Квантовые числа и заряды отдельных компонент указаны в таблице §9.2. Массы частиц возникают в результате взаимодействия с хиггсовскими скалярными бозонами.

2. Четвертая (массовая) составная часть плотности лагранжиана модели Вайнберга-Салама (9.2.2) имеет вид

$$\mathcal{L}_m = |\partial_\mu^{++}\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\left(|\varphi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right)^2 -$$

$$- f_e(\overline{L}e_R\varphi + \overline{e}_R L\tilde{\varphi}) - f_{\nu_e}(\overline{L}\nu_R\varphi_c + \overline{\nu}_R L\overline{\varphi}_c), \qquad (9.5.2)$$

где $\lambda, \eta, f_e, f_{\nu_e}$ – некоторые константы, φ_c – 2-компонентный столбец, зарядово-сопряженный изоспинору φ. Первое слагаемое справа является изотопическим скаляром

$$|\partial_\mu^{++}\varphi|^2 = (\partial_\mu^{++}\varphi)_i^*(\partial^{++\mu}\varphi)^i. \qquad (9.5.3)$$

Оно описывает как плотность лагранжиана самого скалярного поля, так и его взаимодействия с промежуточными векторными бозонами через определенную в (9.2.4) удлиненную производную

$$\partial_\mu^{++}\varphi = \left(I_2\partial_\mu - I_2\frac{ig_1}{2\hbar c}B_\mu - \frac{ig_2}{2\hbar c}\sigma(s)A(s)_\mu\right)\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_0\end{pmatrix}. \qquad (9.5.4)$$

3. Второе (нелинейное) слагаемое в (9.5.2) справа позволяет описать механизм спонтанного нарушения симметрии и ввести постоянную константу (вакуумное среднее) скалярного поля для последующего определения через нее масс элементарных частиц. Третье слагаемое справа в (9.5.2) позволяет ввести через хиггсовское скалярное поле массу покоя электрона. Здесь содержится неопределяемая теорией константа f_e. Именно она в конечном счете характеризует массу покоя электрона. Последнее слагаемое справа в (9.5.2) позволяет ввести массу покоя нейтрино, если когда-либо понадобится это сделать. Его масса характеризуется произвольной постоянной f_{ν_e}, которую в настоящее время принято полагать равной нулю.

4. После спонтанного нарушения симметрии в так называемой унитарной калибровке хиггсовское скалярное поле представляется в виде

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \phi+\eta\end{pmatrix}, \qquad (9.5.5)$$

где η – постоянная, ϕ – вещественное скалярное поле.

Плотности лагранжиана хиггсовского скалярного поля (первая строка в (9.5.2)) в этой калибровке имеет вид

$$|\partial_\mu^{++}\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\left(|\varphi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right)^2 =$$

$$= g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x^\mu} + \frac{i\bar{g}}{2\hbar c}Z_\mu\varphi_0^*\right)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^\nu} - \frac{i\bar{g}}{2\hbar c}Z_\nu\varphi_0\right) +$$

$$+\frac{g_2^2}{4(\hbar c)^2}\varphi_0^*\varphi_0[A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu] -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}(\varphi_0^*\varphi_0)^2 + \frac{\lambda^2\eta^2}{2}(\varphi_0^*\varphi_0) - \frac{\lambda^2\eta^4}{8}, \qquad (9.5.6)$$

где использовано обозначение

$$\overline{g} \equiv \sqrt{g_1^2 + g_2^2}. \qquad (9.5.7)$$

5. Из второй строки этого выражения с учетом (9.5.5) появляются массовые члены для векторных полей:

$$\frac{\eta^2}{8(\hbar c)^2}\left[\bar{g}^2 Z_\mu Z^\mu + g_2^2\left(A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu\right)\right]. \qquad (9.5.8)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) массовые вклады для электромагнитного поля не возникают, как это указывалось в §9.3;

2) нейтральное векторное поле Z_μ приобретает массу покоя

$$m_Z c^2 = \frac{\bar{g}\eta\hbar c}{2}; \qquad (9.5.9)$$

3) заряженные векторные поля $A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$ (или W_μ^+ и W_μ^-) приобретают одинаковые массы покоя

$$m_W c^2 = \frac{g_2\eta\hbar c}{2}. \qquad (9.5.10)$$

6. Масса покоя хиггсовского скалярного бозона ϕ также может быть найдена из (9.5.6) с учетом (9.5.5)

$$m_H c^2 = \lambda\eta(\hbar c). \qquad (9.5.11)$$

Эта масса зависит от дополнительной константы λ, которая теорией не фиксируется.

7. Аналогичным образом появляются массы фермионов. Для этого в лагранжиан (9.5.2) введены, как уже упоминалось, слагаемые последней строки, описывающие взаимодействие фермионов со скалярными полями. В итоге находим

$$m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar c) f_e \eta; \quad m_{\nu_e} c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar c) f_{\nu_e} \eta. \tag{9.5.12}$$

Если, как ожидается, масса нейтрино равна нулю, нужно положить $f_{\nu_e} = 0$. (Экспериментальный предел: $m_{\nu_e} \leq 30$ эВ.)

9.6 Основные сведения об электрослабых взаимодействиях частиц трех поколений

Все предыдущее относилось к взаимодействию одного поколения частиц. Однако, следует различать три поколения электрослабо взаимодействующих частиц. Напомним самые необходимые сведения об электрослабых взаимодействиях элементарных частиц (лептонов и адронов) трех поколений в том виде, как они сложились в рамках первой физической парадигмы (в полевом калибровочном подходе).

I. **Электрослабые взаимодействия лептонов трех поколений.**

1. В настоящий момент известны шесть видов лептонов (иначе, имеются лептоны шести *ароматов*), образующих *три поколения*:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}.$$

Их называют соответственно первым (электронным), вторым (мюонным) и третьим (тау-лептонным) поколениями. Все лептоны обладают спином 1/2; верхние лептоны нейтральны (три вида нейтрино), нижние обладают единичным отрицательным электрическим зарядом. Нижние лептоны существенно различаются массами покоя. В настоящее время в рамках первой парадигмы нет общепризнанного теоретического обоснования существования именно трех поколений. Обычно отмечается неясность ролей этих поколений в общей структуре мира.

2. Взаимодействие лептонов с промежуточным *нейтральным векторным Z-бозоном* осуществляется через нейтральные токи.

Согласно современным данным имеются 6 лептонных нейтральных токов, образованных одинаковыми входящими и выходящими частицами (типа $(\overline{\nu}_e\gamma_\alpha\nu_e)$, $(\overline{e}\gamma_\alpha e$ и т.д.). Характерно, что в теории не должны возникать нейтральные токи, в которых перемешиваются частицы из разных поколений (т.е. типа $\overline{e}\gamma_\alpha\mu$, $\overline{\nu}_e\gamma_\alpha\nu_\mu$, и т.д.). Этот факт естественно называть правилом запрета для нейтральных токов.

В самом общем виде нейтральный лептонный ток может быть записан в виде суммы следующих 6 членов:

$$j^o_\alpha = \sum_{i=1}^{6}[g^i_L(\overline{\psi}_i O^L_\alpha \psi_i) + g^i_R(\overline{\psi}_i O^R_\alpha \psi_i)], \qquad (9.6.1)$$

где индекс i соответствует 6 ароматам лептонов; операторы O^L_α для левых компонент и O^R_α для правых компонент имеют ранее определенный вид:

$$O^L_\alpha = \gamma_\alpha(1 + i\gamma_5); \qquad O^R_\alpha = \gamma_\alpha(1 - i\gamma_5), \qquad (9.6.2)$$

а g^i_L и g^i_R – численные коэффициенты, принимающие для лептонов следующие значения:

$$\begin{array}{lll} g^i_L = 1/2; & g^i_R = 0 & \text{для } \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau; \\ g^i_L = -1/2 + \sin^2\theta_W; & g^i_R = \sin^2\theta_W & \text{для } e,\ \mu,\ \tau. \end{array} \qquad (9.6.3)$$

Здесь θ_W – по-прежнему обозначает угол Вайнберга.

3. Взаимодействие лептонов с промежуточными *заряженными векторными W-бозонами* описывается через заряженные токи, причем заряженные токи образуются только левыми компонентами частиц. Согласно экспериментальным данным для лептонов имеются лишь три заряженных тока, в которые входят пары лептонов только из одного поколения, причем эти три тока входят совершенно симметричным образом:

$$j^l_\alpha = \overline{e}O^L_\alpha\nu_e + \overline{\mu}O^L_\alpha\nu_\mu + \overline{\tau}O^L_\alpha\nu_\tau. \qquad (9.6.4)$$

Отсутствие токов, включающих частицы из разных поколений, означает правило запрета для заряженных лептонных токов.

II. **Электрослабые взаимодействия адронов.**

1. Согласно современным данным все сильно взаимодействующие частицы — *адроны (барионы и мезоны)* имеют кварковую структуру (см., например, [48, 85]). Представителями адронов в слабых взаимодействиях являются *кварки*.

Аналогично лептонам имеются кварки шести ароматов, также образующие три поколения:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Все они обладают спином 1/2.

2. Все кварки имеют отличную от нуля массу покоя, причем различаются два вклада в общую массу кварка: а) масса токового ("голого") кварка, обусловленная электрослабым взаимодействием (она различается от 5 и 7 МэВ для кварков 1-го поколения до 18 и 4,8 ГэВ для кварков 3-го поколения); б) масса блокового кварка (обусловленная сильным взаимодействием (она примерно на 300 МэВ превышает массу токового кварка) [48].

3. Известно, что все верхние кварки (u, c, t) обладают электрическим зарядом $Q = +2/3$, тогда как нижние кварки (d, s, b) имеют электрический заряд $Q = -1/3$. Примечателен факт дробности электрического заряда кварков, а также то, что заряды верхних и нижних кварков отличаются друг от друга на единицу. Последнее характерно также и для лептонов.

4. Взаимодействие с промежуточным *нейтральным векторным Z-бозоном* осуществляется через нейтральные токи. Согласно современным данным имеются 6 кварковых нейтральных токов (типа $\overline{u}\gamma_\alpha u$, $\overline{d}\gamma_\alpha d$, $\cdots$). Как и в случае лептонов, в теории не должны возникать нейтральные токи, в которых перемешиваются кварки из разных поколений (т.е. типа $\overline{u}\gamma_\alpha c$ и т.д.). Этот факт естественно назвать правилом запрета для нейтральных токов.

В самом общем виде нейтральный ток может быть записан в виде суммы следующих 6 членов:

$$j_\alpha^o = \sum_{i=1}^{6} (g_L^i \overline{\psi}_i O_\alpha^L \psi_i + g_R^i \overline{\psi}_i O_\alpha^R \psi_i), \tag{9.6.5}$$

где индекс i соответствует 6 ароматам кварков: операторы O_α^L для левых компонент и O_α^R для правых компонент имеют ранее определенный вид, а g_L^i и g_R^i – численные коэффициенты, принимающие для кварков следующие значения:

$$\begin{aligned} g_L^i &= +1/2 - (2/3)\sin^2\theta_W; \quad g_R^i = -(2/3)\sin^2\theta_W \quad \text{для } u,\ c,\ t; \\ g_L^i &= -1/2 + (1/3)\sin^2\theta_W; \quad g_R^i = +(1/3)\sin^2_W \quad \text{для } d,\ s,\ b. \end{aligned} \tag{9.6.6}$$

Здесь θ_W – по-прежнему обозначает угол Вайнберга.

5. В отличие от лептонов для кварков имеется 9 заряженных токов, так что каждый кварк может образовывать заряженный ток как с партнером из своего, так и из других поколений. Имеет место перемешивание кварков в заряженных токах:

$$j_\alpha^q = \overline{d}' O_\alpha^L u + \overline{s}' O_\alpha^L c + \overline{b}' O_\alpha^L t, \tag{9.6.7}$$

где d', s', b' – ортонормированные линейные комбинации d-, s- и b-кварков. Это перемешивание описывается с помощью трех углов Эйлера θ_1, θ_2, θ_3 и фазового множителя $e^{i\delta}$. Из экспериментальных данных известно, что все углы θ_i малы. Перемешивание кварков можно описать формулой

$$(\overline{u}, \overline{c}, \overline{t}) \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1 s_3 \\ -s_1 & 1 & s_3 + s_2 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -s_2 - s_3 e^{i\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \tag{9.6.8}$$

где $s_i = \sin\theta_i$. Для значений s_i известны оценки [48]:

$$\theta_1 \sim 13^o; \quad s_1 \sim 0,231 \pm 0,003;$$

$$0,02 < |s_2| < 0,09; \quad |s_3| < 0,04; \quad |\delta| < 0,4. \tag{9.6.9}$$

Если пренебречь значениями s_2 и s_3, то останется наиболее существенный угол θ_1, называемый *углом Каббибо*. Он описывает перемешивание кварков из первого и второго поколений, т.е.

$$d' = d\cos\theta_1 + s\sin\theta_1; \quad s' = -d\sin\theta_1 + s\cos\theta_1. \tag{9.6.10}$$

9.7 Замечания по модели Вайнберга-Салама

Сделаем ряд замечаний по общепринятой ныне модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама:

1. С точки зрения развиваемого в книге подхода главным недостатком модели Вайнберга-Салама является отсутствие связи с теорией пространства-времени. В этой модели используется уже заданное 4-мерное пространство-время и на его фоне вводятся физические понятия в рамках концепции близкодействия.

2. Вызывает ряд вопросов понятие внутренних симметрий (изотопического пространства). К ним можно относиться поразному: либо довольствоваться самим фактом их существования и ограничиваться их учетом при вычислениях, либо позволить себе пойти дальше и искать какие-то пока не выявленные факторы более фундаментального характера.

3. Калибровочный подход позволяет построить теоретические конструкции, используя практически все известные группы Ли. Спрашивается, почему в физике микромира оказываются плодотворными лишь группы $U(1)$ и $SU(2)$ (плюс еще $SU(3)$ для описания хромодинамики), причем в таком специфическом сочетании? Почему не нашли воплощения в физике другие группы? Каков критерий выбора "физических" групп Ли?

4. В модели Вайнберга-Салама используется ряд дополнительных постулатов, уточняющих характер взаимодействия частиц с калибровочными полями. К ним относится задание значений гиперзаряда Y и проекций изотопического спина T_3 для отдельных компонент элементарных частиц.

5. Множество нареканий у теоретиков вызывает механизм Хиггса введения масс элементарных частиц. Создается впечатление, что этот прием имеет временный характер из-за неимения ничего лучшего в рамках используемого калибровочного подхода. Этот путь означает попытку решить проблему масс частиц с помощью понятия вакуума. Напомним, в развиваемом в этой книге подходе выбран альтернативный путь, – предлагается ее решать в духе принципа Маха, т.е. посредством учета свойств окружающего мира.

6. Для решения проблемы масс фермионов необходимо волевым образом вводить дополнительные массовые слагаемые с новыми константами типа f_e и f_{ν_e} в (9.5.2). В частности, в модели Вайнберга-Салама нет ответа на вопрос о значении массы покоя нейтрино. Выбором константы f_{ν_e} ее можно сделать какой угодно.

7. В рамках модели Вайнберга-Салама не объясняется существование трех поколений элементарных частиц. Этот факт вносится в теорию извне.

Имеется ряд других претензий к модели Вайнберга-Салама.

Тем не менее, следует констатировать, что именно в рамках данного калибровочного подхода впервые удалось достичь существенных результатов в построении модели электрослабых взаимодействий. При развитии всех других вариантов теории электрослабых взаимодействий теперь необходимо сопоставлять их с уже известной моделью и заботиться о выполнимости принципа соответствия, что и будет делаться в последующих главах.

Глава 10

7-Мерная геометрическая модель грави-электрослабых взаимодействий (бозонный сектор)

Обсудим вопрос об объединении гравитационных и электрослабых взаимодействий в рамках (унарной) 7-мерной геометрической модели типа теории Калуцы-Клейна. В ней оказываются задействованными все 7 координат, прообраз которых возникает в бинарной геометрофизике (в рамках БСКО ранга (4,4)).

Ранее в наших работах [11, 13, 19] были предложены два варианта 6-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий, объединяющих закономерности ОТО и модели Вайнберга-Салама: торсионно-метрический и метрический. В этой главе с позиций бинарной геометрофизики проанализированы основания и содержание наиболее совершенного *метрического варианта* 7-мерной геометрической модели. Следует подчеркнуть, что эти модели строились не по принципу строгого следования известным методам общей теории относительности или 5-мерной теории Калуцы, а исходя из осознания факта, что осуществляется выход в новые, доселе неизвестные размерности, и стоит задача не навязывать миру сложившиеся представления, а выявлять их, опираясь на принцип соответствия с известными свойствами микромира, установленными в рамках модели Вайнберга-Салама.

Заметим, что после создания общей теории относительности

неизменно оказывалось, что подлежащая геометризации физическая теория, ранее уже была сформулирована в рамках первой парадигмы. Это относится как к электромагнитным, так и к электрослабым и к сильным взаимодействиям. По нашему убеждению, все попытки обосновать необходимые для описания известных физических взаимодействий свойства многомерных теорий (число размерностей, компактификацию дополнительных размерностей, выбор топологи дополнительных размерностей и другие) всецело в рамках классических геометрических представлений обречены на неудачу. Для их обоснования необходим выход за пределы данной парадигмы – переход на принципы бинарной геометрофизики.

Отметим, что в этой главе рассмотрение ведется в рамках пятой парадигмы, то есть *геометризуются лишь бозонные поля переносчиков взаимодействий.* Материальные объекты (фермионы), между которыми происходят взаимодействия, не геометризуются, а вводятся в теорию волевым образом. Этот вопрос подробно обсужден в следующей главе.

10.1 Задачи и идеи 7-мерной геометрической модели гравиэлектрослабых взаимодействий

При построении многомерной геометрической модели гравиэлектрослабых взаимодействий необходимо было решить следующие основные задачи:

1. Известно, что взаимодействующие электрослабым образом частицы характеризуются двумя квантованными зарядами: гиперзарядом Y и проекцией изоспина T_3. Им соответствуют две константы взаимодействий g_1 и g_2. Из этих величин получаются электрические заряды Q в единицах e, само значение e и константа взаимодействия частиц с Z-бозонами. Необходимо было дать адекватное геометрическое обоснование этих фактов.

2. В рамках классической модели Вайнберга-Салама электрослабые взаимодействия переносятся четырьмя промежуточными векторными полями: B_μ и триплетом $A(s)_\mu$, где s=1,2,3. Необходимо было указать геометрический образ этих четырех векторных полей.

3. Следовало показать, что в геометрической модели естественным образом возникают нелинейные выражения для тензоров напряженностей векторных полей, соответствующие неабелеву характеру группы $SU(2)$.

4. Важно было показать, что из многомерной скалярной кривизны можно получить все известные в модели Вайнберга-Сала-

ма слагаемые для плотности лагранжиана четырех векторных полей, обладающей свойством $U(1) \times SU(2)$-симметрии.

5. В рамках многомерной геометрической модели необходимо было описать дублет фермионных полей: нейтрино и электрон (для одного поколения лептонов).

6. Особо важно было показать, что стандартные методы описания спиноров в искривленном пространстве-времени приводят к известным выражениям, вытекающим (в специальной калибровке) из $U(1) \times SU(2)$-симметричной плотности лагранжиана взаимодействия дублета фермионных полей с промежуточными векторными бозонами.

7. Следовало указать геометрический аналог известного механизма Хиггса для введения масс покоя элементарных частиц.

Предстояло решить также ряд других задач, имеющих более специальный технический характер.

Для решения перечисленных задач использовались следующие геометрические идеи и методы:

1) Для построения объединенной геометрической теории грави- электрослабых взаимодействий оказалось необходимым увеличить размерность пространственно-временного многообразия на три единицы, т.е. *минимальная размерность*, где это возможно сделать, *семь*. В частности, это диктуется решением первой из сформулированных выше задач. Известно, что в многомерной теории заряды с точностью до коэффициента имеют смысл импульсов по дополнительным координатам. Масса выступает как еще один – гравитационный заряд. Итого, получаются 3 дополнительные размерности.

2) Дополнительные размерности необходимо положить существенно отличающимися от классических,— они должны быть *компактифицированными*, т.е. замкнутыми с очень малым периодом. На практике это означает использование циклической (экспоненциальной с мнимым показателем) зависимости величин от дополнительных координат вида

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp[i\beta x^4 + i\alpha(\varepsilon_5 x^5 + \varepsilon_6 x^6)], \qquad (10.1.1)$$

где $\psi(x^\mu)$- слагаемая как геометрических, так и вводимых в геометрию извне величин, зависящая лишь от классических координат, α и β - малые параметры размерности [см$^{-1}$], характеризующие периоды компактификации по дополнительным размерностям, ε_5, ε_6 - безразмерные параметры. В излагаемой ниже 7-мерной модели используется простейшая топология 3-тора.

3) Имеется связь между размерностью и сигнатурой (унарного) пространства, с одной стороны, и характером и числом компонент спиноров (в традиционном их понимании с позиций

алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел), определяемых в этом пространстве. В частности, в 7-мерном пространстве с рассматриваемой сигнатурой *спиноры должны иметь 8 комплексных компонент.* В обсуждаемой здесь теории этот 8-компонентный спинор интерпретируется через общепринятые 4-компонентные спиноры, описывающие электрон и нейтрино.

4) В согласии с духом ОТО и с рассмотренными выше моделями Калуцы и Клейна в качестве ключевого (базового) выражения выбирается *7-мерная гиперплотность лагранжиана*, слагающаяся из геометрической части и вклада спинорной материи:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{\sqrt{G^{(7)}}}{2\tilde{æ}c}{}^7R + \frac{1}{2}\sqrt{G^{(7)}}\left[i(\hbar c)\overline{\Psi}\Gamma^M\nabla_M\Psi + (h.c.)\right], \qquad (10.1.2)$$

где $G^{(7)}$ – определитель матрицы из компонент 7-мерного метрического тензора G_{MN} многообразия $(M, N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ с сигнатурой $(+ - - - \mid - - -)$, ${}^7R$ – 7-мерная скалярная кривизна; Ψ – 8-компонентный спинор; $\nabla_M\Psi$ – 7-мерная ковариантная производная от спинора

$$\nabla_M\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^M} - \frac{1}{4}\triangle_M(NP)\Gamma(N)\Gamma(P)\Psi. \qquad (10.1.3)$$

Здесь $\triangle_M(NP)$ – 7-мерные коэффициенты вращения Риччи, Γ_M – квадратные 8-рядные матрицы (функции от координат), связанные с метрическим тензором соотношением

$$\Gamma_M\Gamma_N + \Gamma_N\Gamma_M = 2I_8G_{MN}, \qquad (10.1.4)$$

I_8 – 8-рядная единичная матрица.

5) Принципиально новым моментом данной модели по сравнению с общей теорией относительности и 5-мерной теорией Калуцы является допущение зависимости компонент 7-мерной метрики от дополнительных координат (нарушение условий цилиндричности по x^5 и x^6) и допущение комплексности некоторых компонент метрики. Это обусловлено тем, что в этой теории предлагается описание через компоненты метрики векторных заряженных $W^{\pm}$-бозонов (и заряженных хиггсовских скалярных бозонов). Смешанные компоненты метрики, описывающие эти частицы, согласно изложенному выше, должны зависеть от дополнительных координат. Напомним также, что в стандартной квантовой механике заряженные поля описываются комплексными волновыми функциями. Ничего подобного не было ни в общей теории относительности, ни в 5- и 6-мерных теориях Калуцы и

Клейна, т.к. в них взаимодействие переносится нейтральными бозонами.

6) В 7-мерной геометрической модели для введения масс покоя частиц предлагается использовать процедуру, аналогичную механизму Хиггса. При этом скалярные поля вводятся через конформный фактор. Это означает *переход от исходной 7-мерной метрики к конформно ей соответствующей*, где конформный фактор выражается через одну из дополнительных диагональных компонент метрики.

7) Для записи многомерных геометрических величин и выражений через привычные 4-мерные понятия стандартной модели Вайнберга-Салама необходимо использовать редукцию теории на 4-мерное пространство-время, т.е. произвести процедуру 1+1+1+4-расщепления исходного 7-мерного многообразия. Это осуществляется с помощью *триадного метода* в специальной калибровке типа трижды хронометрической в общей теории относительности.

8) Окончательное выражение для плотности 4-мерного лагранжиана грави-электрослабых взаимодействий получается из 7-мерной гиперплотности (10.1.2) посредством усреднения по малым периодам зависимостей от дополнительных координат согласно формулам вида (7.4.17) и (7.6.9), использованным уже в 5-оптике Румера. После интегрирования гиперплотности лагранжиана по dx^4, dx^5 и dx^6 все экспоненциальные слагаемые типа (10.1.1), не сократившиеся при умножении составляющих слагаемых, исчезают, и получается выражение, зависящее лишь от 4 классических координат.

В следующих параграфах этой главы продемонстрировано решение указанных задач с помощью перечисленных геометрических методов.

10.2 Составляющие метрического тензора

1. Начнем с алгебры триадного метода в рассматриваемом варианте 7-мерной теории. В общековариантном виде 7-метрика G_{MN} представляется в форме

$$G_{MN} = g_{MN} - \xi_M \xi_N - \lambda_M \lambda_N - \sigma_M \sigma_N, \qquad (10.2.1)$$

где к векторам ξ_M и λ_M, использованным в главах 7 и 8, добавлен вектор σ_M, соответствующий седьмой координате x^6. Величины из (10.2.1) удовлетворяют условиям ортонормированности типа (4.6.19).

2. Возьмем калибровку типа трижды хронометрической в 4-мерной ОТО. Пусть вектор ξ^A направлен вдоль x^4 после первого 1+6-расщепления, вектор λ^A выделен вторым 1+1+5-расщеплением, а вектор σ^A выделен третьим расщеплением, т.е. пусть

$$\xi^A = \frac{G_4^A}{\sqrt{-G_{44}}}; \quad \lambda^A = \frac{\tilde{G}_5^A}{\sqrt{-\tilde{G}_{55}}}; \quad \sigma^A = \frac{\hat{G}_6^A}{\sqrt{-\hat{G}_{66}}}, \tag{10.2.2}$$

где положено

$$\tilde{G}_{MN} = G_{MN} + \xi_M \xi_N; \quad \hat{G}_{MN} = G_{MN} + \xi_M \xi_N + \lambda_M \lambda_N.$$

После соответствующих выкладок компоненты 4-мерной метрики находятся в виде

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu 4} G_{\nu 4}}{G_{44}} + \\ &+ \frac{(G_{\mu 6} G_{56} - G_{\mu 5} G_{66})(G_{\nu 6} G_{56} - G_{\nu 5} G_{66})}{G_{66}(G_{56}^2 - G_{66} G_{55})}; \\ g^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

Компоненты 7-мерных векторов в данной калибровке записываются в виде

$$\begin{aligned} \xi^A &= \left\{ 0^\mu; \ \frac{1}{\sqrt{-G_{44}}}; \ 0; \ 0 \right\}; \\ \xi_A &= \left\{ \frac{G_{\mu 4}}{\sqrt{-G_{44}}}; \ -\sqrt{-G_{44}}; \ \frac{G_{54}}{\sqrt{-G_{44}}}; \ \frac{G_{64}}{\sqrt{-G_{44}}} \right\} \end{aligned} \tag{10.2.4}$$

$$\lambda_\alpha = \frac{G_{45} G_{4\alpha} - G_{44} G_{5\alpha}}{\sqrt{-G_{44}(G_{44} G_{55} - G_{45}^2)}}; \tag{10.2.5}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = &\frac{(G_{56} G_{45} - G_{55} G_{46}) G_{4\alpha} + (G_{45} G_{46} - G_{44} G_{56}) G_{5\alpha}}{\sqrt{\Delta (G_{44} G_{55} - G_{45}^2)}} + \\ &+ \frac{\sqrt{G_{44} G_{55} - G_{45}^2}}{\sqrt{\Delta}} G_{6\alpha}, \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

где

$$-\Delta = G_{44} G_{55} G_{66} - G_{66} G_{45}^2 - G_{55} G_{46}^2 - G_{44} G_{56}^2 + 2 G_{56} G_{46} G_{45}.$$

3. Как видно из изложенного, при непосредственном обобщении 5-мерной теории Калуцы каждой новой размерности может соответствовать одно новое вещественное векторное поле. В рамках 7-мерия таковых три,— это 4-мерные части трех 7-мерных векторов триады: ξ_μ, λ_μ и σ_μ. Однако, как известно, в модели Вайнберга-Салама фигурируют 4 векторных поля: два нейтральных (B_μ и $A(3)_\mu$) и два заряженных ($A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$). Следовательно, непосредственным обобщением теории Калуцы-Клейна можно получить лишь нейтральные векторные поля, для введения заряженных векторных полей необходимо выйти за рамки традиционной теории Калуцы-Клейна, — следует допустить, что векторы триады содержат слагаемые,зависящие циклическим образом от дополнительных координат. Коэффициенты при соответствующих гармониках следует отождествить с новыми (уже заряженными) векторными полями.

В самом общем случае следует положить

$$\xi_\alpha = c_4\tilde{\xi}_\alpha + b_4 B_\alpha + a_4 A(3)_\alpha +$$

$$+w_4^+ W_\alpha^+ \exp[i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + w_4^- W_\alpha^- \exp[-i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + \cdots; \tag{10.2.7}$$

$$\lambda_\alpha = c_5\tilde{\xi}_\alpha + b_5 B_\alpha + a_5 A(3)_\alpha +$$

$$+w_5^+ W_\alpha^+ \exp[i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + w_5^- W_\alpha^- \exp[-i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + \cdots; \tag{10.2.8}$$

$$\sigma_\alpha = c_6\tilde{\xi}_\alpha + b_6 B_\alpha + a_6 A(3)_\alpha +$$

$$+w_6^+ W_\alpha^+ \exp[i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + w_6^- W_\alpha^- \exp[-i\alpha f(x^4, x^5, x^6)] + \cdots, \tag{10.2.9}$$

где a_s, b_s, c_s, $w_s^\pm$ - некоторые постоянные размерные коэффициенты, которые определены ниже; $\tilde{\xi}_\alpha$, B_α, $A(3)_\alpha$ – три нейтральных векторных поля, а W_α^+ и W_α^- – два заряженных векторных поля, связанные с физическими векторными полями $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$ стандартными формулами (9.3.5). При последних стоят экспоненты с показателями, куда входит неизвестная функция $f(x^4, x^5, x^6)$, определяющая гармоники циклической зависимости. Именно с помощью этих гармоник решается задача введения заряженных векторных полей. Многоточием отмечены возможные слагаемые с другими гармониками.

В этой главе не будем учитывать векторное поле $\tilde{\xi}_\alpha$, соответствующее координате x^4, т.е. будем полагать

$$c_4 = c_5 = c_6 = 0. \tag{10.2.10}$$

4. В 7-мерной геометрической модели, в которой произведено 1+1+1+4-расщепление с калибровкой, типа хронометрической в указанной выше последовательности, выделяются следующие координатные преобразования:

$$x'^4 = x'^4(x^\mu, x^4, x^5, x^6); \tag{10.2.11}$$

$$x'^5 = x'^5(x^\mu, x^5, x^6); \tag{10.2.12}$$

$$x'^6 = x'^6(x^\mu, x^6); \tag{10.2.13}$$

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^\mu). \tag{10.2.14}$$

Эти формулы соответствуют приведенным ранее в 5-, 6- и 7-мерных моделях.

Формулы (10.2.7) – (10.2.9) и другие подразумевают, что в теории допустимы лишь такие преобразования координат, которые не меняют характера введенной зависимости величин от дополнительных координат. Это означает сужение класса преобразований (10.2.11) – (10.2.14) до таких, в которых не перемешиваются 4-мерные классические координаты и три дополнительные. Ограничиваясь лишь линейными преобразованиями дополнительных координат, приходим к следующей усеченной системе преобразований трех координат:

$$x'^4 = c_4^4 x^4 + c_5^4 x^5 + c_6^4 x^6 + f_4(x^\mu); \tag{10.2.15}$$

$$x'^5 = c_5^5 x^5 + c_6^5 x^6 + f_5(x^\mu); \tag{10.2.16}$$

$$x'^6 = c_6^6 x^6 + f_6(x^\mu), \tag{10.2.17}$$

где c_r^s - некоторые вещественные параметры, $f_4(x^\mu)$, $f_5(x^\mu)$ и $f_6(x^\mu)$ – произвольные функции от четырех классических координат.

5. Координатные преобразования (10.2.15) – (10.2.17) диктуют инвариантность функции $f(x^4, x^5, x^6)$ в (10.2.7) – (10.2.9) относительно допустимых преобразований дополнительных координат. Рассмотрим простейший вариант теории, когда эта функция зависит только от одной координаты x^6. Без ущерба для общности можно положить $c_6^6 = 1$. По причинам, о которых будет идти речь ниже, положим

$$f(x^4, x^5, x^6) = \varepsilon_6 x^6 = 2x^6 \to \varepsilon_6 = 2, \tag{10.2.18}$$

то есть положим метрику цилиндричной по дополнительным координатам x^4 и x^5. Тогда формулы (10.2.7) – (10.2.9) с учетом (10.2.10) принимают вид

$$\xi_\alpha = b_4 B_\alpha + a_4 A(3)_\alpha +$$

$$+w_4^+ W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + w_4^- W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6]; \qquad (10.2.19)$$

$$\lambda_\alpha = b_5 B_\alpha + a_5 A(3)_\alpha +$$

$$+w_5^+ W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + w_5^- W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6]; \qquad (10.2.20)$$

$$\sigma_\alpha = b_6 B_\alpha + a_6 A(3)_\alpha +$$

$$+w_6^+ W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + w_6^- W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6]. \qquad (10.2.21)$$

Содержащиеся в этих формулах 12 коэффициентов будут найдены из сопоставления геометрической модели со стандартной моделью Вайнберга-Салама.

Заметим, что здесь слагаемые с экспонентами можно рассматривать как часть разложения компонент 4-мерных компонент триады в ряд Фурье по гармоникам[1].

6. Для упрощения дальнейших выкладок положим, что смешанные компоненты векторов триады обращаются в нуль, то есть вместе с (10.2.4) имеем

$$\xi^5 = \xi^6 = 0; \quad \lambda^4 = \lambda^6 = 0; \quad \sigma^4 = \sigma^5 = 0. \qquad (10.2.22)$$

10.3 Лагранжиан векторных бозонов

1. Следующая важная составная часть триадного метода — *задание триадных физико-геометрических тензоров.* В данной калибровке и с заданной зависимостью от дополнительных координат часть из них тождественно обращается в нуль, часть физико-геометрических тензоров дает вклады в массовые слагаемые. Остаются три антисимметричных тензора второго ранга, представляющие основной интерес:

$$F_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \qquad (10.3.1)$$

$$F_{\alpha\beta}^{(5)} = \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \qquad (10.3.2)$$

$$F_{\alpha\beta}^{(6)} = \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (\sigma_{M,N} - \sigma_{N,M}), \qquad (10.3.3)$$

[1]В общем случае можно было бы брать бесконечный ряд разложения по соответствующим гармоникам. Естественно ставить вопрос о критерии, позволяющем произвести обрезание этого ряда, или нужно попытаться объяснить физический смысл других возможных векторных полей. В рамках многомерного подхода вряд ли возможно обосновать ограничение лишь одним выражением с двумя знаками.

которые соответствуют (но не напрямую) двум антисимметричным тензорам в модели Вайнберга-Салама $F(B)_{\alpha\beta}$, $\vec{F}_{\alpha\beta}$ (см. формулы (9.1.11) и (9.3.9)).

Следует обратить особое внимание на нелинейные слагаемые справа в (9.1.11), обусловленные неабелевым характером калибровочных полей $A(s)_\mu$ в модели Вайнберга-Салама. В 7-мерной модели выражения (10.3.1) – (10.3.3) также содержат нелинейные слагаемые аналогичного типа. Чтобы в этом убедиться, следует учесть что компоненты g_α^M при условиях (10.2.22) имеют вид

$$g_\alpha^\beta = G_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta; \quad g_\alpha^4 = \xi^4\xi_\alpha; \quad g_\alpha^5 = \lambda^5\lambda_\alpha; \quad g_\alpha^6 = \sigma^6\sigma_\alpha. \quad (10.3.4)$$

Расписывая компоненты тензоров из (10.3.1) – (10.3.3), имеем

$$F_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{1}{2}\left[(\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) + \sigma^6(\sigma_\beta\xi_{\alpha,6} - \sigma_\alpha\xi_{\beta,6})\right]; \quad (10.3.5)$$

$$F_{\alpha\beta}^{(5)} = \frac{1}{2}\left[(\lambda_{\alpha,\beta} - \lambda_{\beta,\alpha}) + \sigma^6(\sigma_\beta\lambda_{\alpha,6} - \sigma_\alpha\lambda_{\beta,6})\right]; \quad (10.3.6)$$

$$F_{\alpha\beta}^{(6)} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_{\beta,\alpha}) + \sigma^6(\sigma_\beta\sigma_{\alpha,6} - \sigma_\alpha\sigma_{\beta,6})\right]. \quad (10.3.7)$$

В этом факте нелинейности трех физико-геометрических тензоров состоит решение третьей из сформулированных в §10.1 задач.

2. Четвертая составная часть триадного метода — *запись основных выражений через спроектированные величины, триадные физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования.* В данном случае нас интересует скалярная 7-мерная кривизна, входящая в гиперплотность лагранжиана (10.1.2). В триадном виде она представляется следующим образом

$${}^7R = {}^4R + F_{\alpha\beta}^{(4)}F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)}F^{(5)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(6)}F^{(6)\alpha\beta} + \cdots. \quad (10.3.8)$$

Именно второе, третье и четвертое слагаемые справа описывают вклады промежуточных векторных бозонов в гиперплотность лагранжиана.

3. Расписывая компоненты геометрических тензоров напряженностей через векторы триады (10.2.19) – (10.2.21) и производя усреднение по периодам компактификации дополнительных размерностей, находим

$$4\left(F_{\alpha\beta}^{(4)}F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)}F^{(5)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(6)}F^{(6)\alpha\beta}\right) \Rightarrow$$

$$
\begin{gathered}
\Rightarrow F(B)_{\alpha\beta}F(B)^{\alpha\beta}(b_4^2+b_5^2)+ \\
+\left[F(1)_{\alpha\beta}F(1)^{\alpha\beta}+F(2)_{\alpha\beta}F(2)^{\alpha\beta}\right](w_4^+w_4^-+w_5^+w_5^-+w_6^+w_6^-)+ \\
+F(3)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}(a_4^2+a_5^2+a_6^2)+F(B)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}2(b_4a_4+b_5a_5)+ \\
+F(B)_{\alpha\beta}A(1)^{\alpha}A(2)^{\beta}\times \\
\times 8\alpha\sigma^6\left[b_4(w_4^+w_6^-+w_4^-w_6^+)+b_5(w_5^+w_6^-+w_5^-w_6^+)\right]+ \\
+\left[F(1)_{\alpha\beta}A(2)^{\alpha}A(3)^{\beta}+F(2)_{\alpha\beta}A(3)^{\alpha}A(1)^{\beta}\right]\times \\
\times 8\alpha\sigma^6a_6(w_4^+w_4^-+w_5^+w_5^-+w_6^+w_6^-)- \\
-F(3)_{\alpha\beta}A(1)^{\alpha}A(2)^{\beta}\times \\
\times 8\alpha\sigma^6\left[a_4(w_4^+w_6^-+w_4^-w_6^+)+a_5(w_5^+w_6^-+w_5^-w_6^+)+2a_6w_6^+w_6^-\right]+ \\
+[A(1)_{\alpha}A(1)^{\alpha}A(3)_{\beta}A(3)^{\beta}+A(2)_{\alpha}A(2)^{\alpha}A(3)_{\beta}A(3)^{\beta}- \\
-(A(1)_{\alpha}A(3)^{\alpha})^2-(A(2)_{\alpha}A(3)^{\alpha})^2]\times \\
\times 8\alpha^2(\sigma^6)^2a_6^2(w_4^+w_4^-+w_5^+w_5^-+w_6^+w_6^-)+ \\
+\left[A(1)_{\mu}A(1)^{\mu}A(2)_{\beta}A(2)^{\beta}-(A(1)_{\alpha}A(2)^{\alpha})^2\right]\times \\
\times 8\alpha^2(\sigma^6)^2\left[(w_4^+w_6^-+w_4^-w_6^+)^2+(w_5^+w_6^-+w_5^-w_6^+)^2+4(w_6^+w_6^-)^2\right].
\end{gathered}
\tag{10.3.9}
$$

Здесь уже использовано условие

$$
b_6=0, \tag{10.3.10}
$$

приводящее к исчезновению произведений из перекрестных слагаемых вида $B_{\alpha}A(s)^{\alpha}$.

4. Геометрические вклады от векторных полей в гиперплотности лагранжиана (10.1.2) (после усреднения по периодам компактификации дополнительных размерностей) и вклады векторных полей (9.3.8) в плотность лагранжиана модели Вайнберга-Салама должны совпадать, т.е.

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2\tilde{æ}c}\int\int\int\left(F^{(4)}_{\alpha\beta}F^{(4)\alpha\beta}+F^{(5)}_{\alpha\beta}F^{(5)\alpha\beta}+F^{(6)}_{\alpha\beta}F^{(6)\alpha\beta}\right)dx^4dx^5dx^6= \\
=\mathcal{L}_{Bos}.
\end{gathered}
\tag{10.3.11}
$$

5. Из сопоставления векторных вкладов в двух моделях получаем условия на коэффициенты:

$$b_4^2 + b_5^2 = C_1^2; \quad b_6 = 0; \tag{10.3.12}$$

$$a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = C_1^2; \tag{10.3.13}$$

$$b_4 a_4 + b_5 a_5 = 0; \tag{10.3.14}$$

$$b_4 x + b_5 y = 0; \tag{10.3.15}$$

$$w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^- = C_1^2; \tag{10.3.16}$$

$$a_6(w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = C_1^2 C_2; \tag{10.3.17}$$

$$a_6^2(w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = C_1^2 C_2^2; \tag{10.3.18}$$

$$a_4 x + a_5 y + a_6 z = -C_1^2 C_2; \tag{10.3.19}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 C_2^2, \tag{10.3.20}$$

где использованы обозначения:

$$C_1^2 = \frac{4k}{c^4}; \quad C_2 = \frac{g_2}{2\alpha\sigma^6(\hbar c)}; \tag{10.3.21}$$

$$x = w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+; \quad y = w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+; \quad z = 2w_6^+ w_6^-. \tag{10.3.22}$$

10.4 Следствия из условий сопоставления

Из условий (10.3.16) – (10.3.18) находим коэффициент

$$a_6 = C_2 = \frac{g_2}{2\alpha\sigma^6(\hbar c)}. \tag{10.4.1}$$

Значения других коэффициентов существенно зависят от соотношения констант C_1^2 и C_2^2. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. **Пусть** $C_1^2 - C_2^2 > 0$.

а) *Общий случай.* Условия (10.3.12) – (10.3.15) позволяют выразить четыре оставшихся неопределенными коэффициента перед нейтральными полями через константы и комбинации коэффициентов перед заряженными векторными полями:

$$b_4 = \frac{C_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad b_5 = -\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$a_4 = \frac{x\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad a_5 = \frac{y\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{10.4.2}$$

Подставив (10.4.2) в (10.3.19), из условий (10.3.19) и (10.3.20) находим комбинацию

$$2w_6^+ w_6^- = z = -C_2^2. \tag{10.4.3}$$

Это означает, что коэффициенты w_6^+ и w_6^- перед заряженными векторными полями в (10.2.21) не могут быть комплексно сопряженными выражениями, то есть *компоненты вектора* σ_α (*смешанные компоненты 6-мерной метрики* $G_{6\alpha}$) *в такой 7-мерной геометрической модели обязательно являются комплексными.*

Из (10.4.1), (10.4.2), (10.3.19) и (11.3.20) находим условия на две оставшиеся комбинации из коэффициентов

$$x^2 + y^2 = C_2^2(C_1^2 - C_2^2); \quad w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- = C_1^2 + \frac{C_2^2}{2}. \tag{10.4.4}$$

Кроме того, из (10.3.19) и (10.3.20) находим окончательные выражения для коэффициентов перед нейтральными векторными полями:

$$b_4 = \frac{C_1 y}{C_2\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}; \quad b_5 = -\frac{C_1 x}{C_2\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}; \quad b_6 = 0;$$

$$a_4 = \frac{x}{C_2}; \quad a_5 = \frac{y}{C_2}; \quad a_6 = C_2. \tag{10.4.5}$$

б) Отдельно рассмотрим *частный случай, когда все коэффициенты перед физическими полями являются вещественными*, более того, пусть

$$w_6^+ = \pm\frac{C_2}{\sqrt{2}}; \quad w_6^- = \mp\frac{C_2}{\sqrt{2}}. \tag{10.4.6}$$

В этом случае условие (10.3.20) означает

$$(w_4^- - w_4^+)^2 + (w_5^- - w_5^+)^2 = 2(C_1^2 - C_2^2). \tag{10.4.7}$$

Учитывая второе из условий (10.4.4), отсюда получаем

$$(w_4^-)^2 + (w_4^+)^2 + (w_5^-)^2 + (w_5^+)^2 = 4C_1^2 - C_2^2, \tag{10.4.8}$$

то есть коэффициенты определены с точностью до преобразований на 3-мерной сфере в 4-мерном евклидовом многообразии.

Компоненты двух векторов ξ_α и λ_α в этом случае становятся вещественными только в случае $C_1^2 = C_2^2$.

2. **Пусть** $C_1^2 = C_2^2 \equiv C^2$.

а) В *общем случае* из выписанных выше условий опять получаем, что комбинация из констант перед заряженными векторными полями является отрицательной

$$w_6^+ w_6^- = -\frac{C^2}{2}, \tag{10.4.9}$$

то есть остается в силе вывод о комплексном характере смешанных компонент метрики $G_{6\alpha}$.

Для коэффициентов перед нейтральными векторными полями получаем следующие значения и условие:

$$b_4^2 + b_5^2 = C^2; \quad b_6 = 0; \quad a_4 = a_5 = 0; \quad a_6 = \pm C, \tag{10.4.10}$$

то есть два отличных от нуля коэффициента перед векторным полем B_α определены с точностью до поворотов на окружности радиуса C.

Для коэффициентов перед заряженными векторными полями, кроме (10.4.9), имеем два условия:

$$x^2 + y^2 = 0; \quad w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- = \frac{3}{2}C^2, \tag{10.4.11}$$

соответствующие (10.4.4).

б) Отдельно рассмотрим *случай вещественных коэффициентов перед физическими полями.* В этом случае условие (10.4.7) принимает вид

$$(w_4^- - w_4^+)^2 + (w_5^- - w_5^+)^2 = 0, \tag{10.4.12}$$

то есть получаем

$$w_4^- = w_4^+ \equiv w_4; \quad w_5^- = w_5^+ \equiv w_5, \tag{10.4.13}$$

и 4-мерные компоненты двух векторов триады ξ_α и λ_α автоматически становятся вещественными. Из (10.4.11) и (10.4.13) следует, что два вещественных коэффициента удовлетворяют условию

$$w_4^2 + w_5^2 = \frac{3}{2}C^2. \tag{10.4.14}$$

Для этого случая выпишем вид векторов триады (10.2.19) – (10.2.21)

$$\xi_\alpha = b_4 B_\alpha + w_4 \left(W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6] \right); \quad (10.4.15)$$

$$\lambda_\alpha = b_5 B_\alpha + w_5 \left(W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6] \right); \quad (10.4.16)$$

$$\sigma_\alpha = \pm CA(3)_\alpha \pm \frac{C}{\sqrt{2}} \left(W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] - W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6] \right). \quad (10.4.17)$$

Обратим внимание на тот факт, что из условий сопоставления коэффициенты с индексом "6" (в компонентах вектора σ_α) находятся, тогда как коэффициенты при двух оставшихся векторах триады ξ_α и λ_α определяются лищь с точностью до поворотов на плоскости (см. формулы (10.4.10) – (10.4.11) и (10.4.14)). Можно показать, что этот произвол связан с оставшейся в использованной калибровке свободой в преобразованиях дополнительных координат (10.2.15) и (10.2.16). В частности, эти преобразования допускают повороты в плоскости (x^4, x^5). При таких преобразованиях компоненты векторов ξ_α и λ_α будут преобразовываться друг через друга, что соответствует указанным преобразованиям коэффициентов при нейтральных и заряженных физических полях.

3. Перейдем от 7-мерной геометрической модели к ранее рассматривавшейся **6-мерной модели грави-электрослабых** взаимодействий [19]. В такой модели отсутствовала дополнительная размерность с индексом 4, поэтому положим $\xi_M = 0$. Легко видеть, что условия на коэффициенты (10.3.12) – (10.3.20) тогда принимают вид

$$b_5^2 = C_1^2; \quad b_6 = 0; \quad (10.4.18)$$

$$a_5^2 + a_6^2 = C_1^2; \quad (10.4.19)$$

$$b_5 a_5 = 0; \quad (10.4.20)$$

$$b_5 (w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+) = 0; \quad (10.4.21)$$

$$w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^- = C_1^2; \quad (10.4.22)$$

$$a_6 (w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = C_1^2 C_2; \quad (10.4.23)$$

$$a_6^2 (w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = C_1^2 C_2^2; \quad (10.4.24)$$

$$a_5 (w_5^- w_6^+ + w_5^+ w_6^-) + 2a_6 w_6^+ w_6^- = -C_1^2 C_2; \quad (10.4.25)$$

$$(w_5^- w_6^+ + w_5^+ w_6^-)^2 + 4(w_6^+ w_6^-)^2 = C_1^2 C_2^2, \qquad (10.4.26)$$

что совпадает с условиями на коэффициенты, приведенными в работе [19].

Рассмотрим решения этих уравнений (условий).

а) *Общий случай.* Из этих условий, прежде всего, следует

$$C_1^2 = C_2^2 \equiv C. \qquad (10.4.27)$$

Для коэффициентов перед нейтральными векторными полями находятся значения:

$$b_5 = \pm C; \quad b_6 = 0; \quad a_5 = 0; \quad a_6 = C_2 = \pm C. \qquad (10.4.28)$$

Для коэффициентов перед заряженными векторными полями имеем соотношения:

$$w_5^- w_6^+ + w_5^+ w_6^- = 0; \qquad (10.4.29)$$

$$w_5^+ w_5^- = \frac{3}{2}C^2; \quad w_6^+ w_6^- = -\frac{1}{2}C^2. \qquad (10.4.30)$$

Последнее условие соответствует ранее упоминавшемуся комплексному характеру компонент метрики $G_{6\alpha}$.

б) В *частном случае вещественных коэффициентов* и при условии (10.4.6) автоматически получается вещественность компонент λ_α и

$$w_5^+ = w_5^- = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}C. \qquad (10.4.31)$$

Для этого случая запишем выражения для 6-мерных векторов диады

$$\lambda_\alpha = \pm C B_\alpha \pm \sqrt{\frac{3}{2}}C\left(W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] + W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6]\right); \qquad (10.4.32)$$

$$\sigma_\alpha = \pm C A(3)_\alpha \pm \frac{C}{\sqrt{2}}\left(W_\alpha^+ \exp[2i\alpha x^6] - W_\alpha^- \exp[-2i\alpha x^6]\right). \qquad (10.4.33)$$

Указанный в работе [19] произвол в выборе коэффициентов в 6-мерной геометрической модели связан с допущением их комплексных значений. В случае вещественности коэффициентов произвол устраняется, и все коэффициенты определяются из выписанных условий. Это соответствует тому факту, что в 6-мерной геометрической модели в выбранной калибровке отсутствуют допустимые вращения в плоскости дополнительных координат.

10.5 Триадные операторы дифференцирования

1. Рассмотрим следующую составную часть триадного метода в используемой калибровке – *задание операторов дифференцирования*. Согласно общей для монадного, диадного и т. д. методике при учете (10.2.22) они записываются в виде:

$$\partial_4^{\dagger\dagger} = \xi^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \xi^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \tag{10.5.1}$$

$$\partial_5^{\dagger\dagger} = \lambda^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5}; \tag{10.5.2}$$

$$\partial_6^{\dagger\dagger} = \sigma^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma^6 \frac{\partial}{\partial x^6}; \tag{10.5.3}$$

$$\partial_\alpha^{\dagger\dagger} = g_\alpha^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \xi_\alpha \partial_4^{\dagger\dagger} + \lambda_\alpha \partial_5^{\dagger\dagger} + \sigma_\alpha \partial_6^{\dagger\dagger}. \tag{10.5.4}$$

2. Произведем физическую интерпретацию этих операторов. Сопоставим оператор (10.5.4) с удлиненной производной (9.2.4) в модели Вайнберга-Салама. Очевидно, что дополнительные к частной производной слагаемые возникают лишь для величин (функций), зависящих от дополнительных координат. В модели Вайнберга-Салама это поля, обладающие гиперзарядом Y или изотопическим спином. Отсюда делаем вывод, что в 7-мерной геометрической модели *зависимость величин от дополнительных координат соответствует наличию изотопического спина или гиперзаряда.*

3. Оператор дифференцирования (10.5.1), как и в главах 7 и 8, следует интерпретировать как массовый, т.е.

$$\partial_4^{\dagger\dagger} \Psi \sim m\Psi. \tag{10.5.5}$$

В этом и в ряде последующих параграфов будем полагать

$$\xi^4 \beta \ll \lambda^5 \varepsilon_5 \alpha; \quad \xi^4 \beta \ll \sigma^6 \varepsilon_6 \alpha, \tag{10.5.6}$$

то есть зависимостью от x^4 будем пренебрегать.

4. Поскольку заряженные векторные поля $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$ были введены в метрику в комбинациях с экспоненциальными слагаемыми, а последние выбраны зависящими только от координаты x^6, то естественно постулировать, что *взаимодействие с триплетом векторных полей $A(s)_\alpha$ описывается оператором*

(10.5.3). В частности, для нейтральной части следует положить

$$\tilde{\sigma}_\alpha \partial_6^{\dagger\dagger}\Psi = -\frac{ig_2}{\hbar c} T_3 A(3)_\alpha \Psi, \tag{10.5.7}$$

где значком $\tilde{\sigma}_\alpha$ обозначена часть вектора σ_α без заряженных (экспоненциальных) слагаемых. Здесь Ψ обозначает произвольную полевую функцию как геометрического, так и не геометрического происхождения. Из (10.5.3) при условии, что отличны от нуля только диагональные "скалярные" компоненты триады, находим

$$A(3)_\alpha = -\alpha\hbar c \frac{\sigma^6 \varepsilon_6}{g_2 T_3} \tilde{\sigma}_\alpha. \tag{10.5.8}$$

Отсюда следует, что в формуле (10.2.9) нужно положить

$$b_6 = 0; \quad a_6 \neq 0 \tag{10.5.9}$$

в согласии с найденным решением (10.4.10).

Легко видеть, что при допустимых преобразованиях дополнительных координат (10.2.15) – (10.2.17) комбинация $\sigma^6\varepsilon_6$ остается инвариантной. Используя инвариантность σ^6, постулируем

$$\varepsilon_6 = 2T_3, \tag{10.5.10}$$

т.е. *коэффициент ε_6 в экспонентах равен удвоенному значению изотопического спина T_3 в модели Вайнберга-Салама.* На основании формул (10.5.8) и (10.4.6) приходим к уже ранее найденному соотношению констант (10.3.21).

5. Исходя из ранее изложенного, постулируем, что *взаимодействие с нейтральным полем B_α характеризуется собственным значением оператора* (10.5.2), т.е.

$$\tilde{\lambda}_\alpha \partial_5^{\dagger\dagger}\Psi = -\frac{ig_1}{\hbar c}\frac{Y}{2} B_\alpha \Psi. \tag{10.5.11}$$

Здесь опять тильдой помечена лишь нейтральная часть компоненты вектора. Действительно, учитывая (10.5.2), получаем

$$B_\alpha = -2\alpha\hbar c \frac{\lambda^5 \varepsilon_5}{g_1 Y} \tilde{\lambda}_\alpha. \tag{10.5.12}$$

Отсюда находим, что в формуле (10.2.20) следует положить

$$a_5 = 0; \quad b_5 \neq 0 \tag{10.5.13}$$

в согласии с полученным ранее решением (10.4.10).

Легко видеть, что при допустимых преобразованиях (10.2.15) и (10.2.16)

$$\lambda'^5\varepsilon'_5 + \lambda'^6\varepsilon'_6 = \lambda^5\varepsilon_5 + \lambda^6\varepsilon_6 = Inv.$$

Даже в отсутствие условий (10.2.22) можно выбрать такую координатную систему, в которой $\lambda^6 = 0$, тогда

$$\varepsilon_5 = Y, \tag{10.5.14}$$

то есть *гармоника* ε_5 *в экспоненциальных зависимостях величин от дополнительных координат определяет значение гиперзаряда* Y. Из формул (10.5.12) и (10.5.14) получаем соотношение для констант

$$-2\alpha(\hbar c)b_5 = \frac{g_1}{\lambda^5}. \tag{10.5.15}$$

6. Собирая вместе формулы (10.5.10) и (10.5.14), приходим к универсальной формуле для значения электрического заряда (в единицах e) в данной 7-мерной модели

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6), \tag{10.5.16}$$

соответствующей известной формуле (9.2.5) в модели Вайнберга-Салама. Она также обобщает формулу (8.2.12) для электрического заряда в 5-мерной теории Калуцы.

10.6 Нейтральные векторные поля, заряды и угол Вайнберга

1. В 7-мерной геометрической модели можно получить выражения для векторного потенциала электромагнитного поля, для Z-бозона, электрического заряда и для угла Вайнберга. Чтобы это сделать, забегая вперед, укажем вид зависимости от дополнительных координат нейтрального хиггсовского бозона (геометрического происхождения) φ. Согласно выше изложенным соображениям эта зависимость должна быть выбрана, во-первых, из условия нейтральности

$$Q_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6) = 0 \tag{10.6.1}$$

и, во-вторых, из того, что нейтральный хиггсовский бозон входит в состав изотопического дублета, т.е. для него

$$T_3 = -\frac{1}{2} \to \varepsilon_6 = -1. \tag{10.6.2}$$

Отсюда следует, что $Y = +1$, и φ представляется в виде

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left[i\alpha(x^5 - x^6)\right], \tag{10.6.3}$$

где φ_0 – часть φ, зависящая лишь от 4-мерных координат.

2. Для наших целей можно ограничиться лишь нейтральными составляющими векторов диады. В этом случае диадный оператор дифференцирования (10.5.4) означает

$$\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + i\alpha(\lambda^5\tilde{\lambda}_\alpha - \sigma^6\tilde{\sigma}_\alpha)\varphi. \tag{10.6.4}$$

Поскольку массовые слагаемые получаются из взаимодействия с (нейтральным) хиггсовским бозоном, то масовый вклад будет иметь лишь присутствущая в (10.6.4) комбинация векторных полей, т.е. Z-бозон должен определяться формулой

$$Z_\alpha = \frac{1}{C_3}(\lambda^5\tilde{\lambda}_\alpha - \sigma^6\tilde{\sigma}_\alpha), \tag{10.6.5}$$

где C_3- некоторая размерная постоянная.

Запишем выражение для второй, безмассовой комбинации векторных полей в форме

$$A_\alpha = \frac{1}{C_3}(\tilde{x}\lambda^5\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{y}\sigma^6\tilde{\sigma}_\alpha), \tag{10.6.6}$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и C_3 – пока неизвестные коэффициенты. Эта комбинация должна быть сопоставлена векторному потенциалу электромагнитного поля.

3. Три неизвестные коэффициента ($\tilde{x}$, $\tilde{y}$, C_3) находятся из отождествления части соотношения (10.3.9), содержащей только нейтральные векторные поля, выражению

$$\mathcal{L}'_{Bos} = -\frac{1}{16}[F(A)_{\alpha\beta}F(A)^{\alpha\beta} + F(Z)_{\alpha\beta}F(Z)^{\alpha\beta}]. \tag{10.6.7}$$

Здесь использованы обозначения:

$$F(A)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad F(Z)_{\alpha\beta} = \frac{\partial Z_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Потребовав, чтобы в (10.6.7) слева и справа совпадали коэффициенты при $F(B)_{\alpha\beta}F(B)^{\alpha\beta}$, $F(3)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$ и $F(B)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$, приходим к трем уравнениям для величин x, y и C_3.

4. Решая получившуюся систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k_g}}\frac{\sigma^6\tilde{\lambda}_\alpha+\lambda^5\tilde{\sigma}_\alpha}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}} = \\ &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k_g}}(\tilde{\lambda}_\alpha\cos\theta_W+\tilde{\sigma}_\alpha\sin\theta_W); \qquad (10.6.8) \\ Z_\alpha &= \frac{c^2}{2\sqrt{k_g}}\frac{\lambda^5\tilde{\lambda}_\alpha-\sigma^6\tilde{\sigma}_\alpha}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}} = \\ &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k_g}}(\tilde{\lambda}_\alpha\sin\theta_W-\tilde{\sigma}_\alpha\cos\theta_W); \qquad (10.6.9) \\ C_3^2 &= \frac{4k_g}{c^4}[(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2], \qquad (10.6.10) \end{aligned}$$

где введен угол θ_W так, что

$$\begin{aligned} \sin\theta_W &= \frac{\lambda^5}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}}; \\ \cos\theta_W &= \frac{\sigma^6}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}}. \qquad (10.6.11) \end{aligned}$$

Этот угол соответствует углу Вайнберга в (9.3.2), он определяет поворот от векторов диады $\tilde{\lambda}_\alpha$ и $\tilde{\sigma}_\alpha$ к векторным потенциалам A_α и Z_α.

5. Заменим в удлиненной производной (в формуле, содержащей лишь нейтральные векторные поля) 4-мерные части векторов диады на физические поля A_μ и Z_μ, используя обратные (10.6.8) и (10.6.9) соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_\alpha &= \frac{2\sqrt{k_g}}{c^2}\frac{(-\sigma^6A_\alpha+\lambda^5Z_\alpha)}{\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}}; \qquad (10.6.12) \\ \tilde{\sigma}_\alpha &= -\frac{2\sqrt{k_g}}{c^2}\frac{(\lambda^5A_\alpha+\sigma^6Z_\alpha)}{\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}}. \qquad (10.6.13) \end{aligned}$$

Учитывая выражения для операторов (10.5.7), (10.5.11), а также соотношения (10.5.8) и (10.5.12), для оператора (10.5.4) находим

$$\partial_\alpha^{\dagger\dagger} \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{4\sqrt{k_g}}{c^2}\frac{\alpha\lambda^5\sigma^6}{\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}}QA_\alpha -$$

$$-i\alpha\frac{4\sqrt{k_g}}{c^2}\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}\left[T_3-Q\frac{(\lambda^5)^2}{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}\right]Z_\alpha. \qquad (10.6.14)$$

Эта формула соответствует (нейтральной) удлиненной производной в модели Вайнберга-Салама (9.3.4).

6. Из сравнения формул (10.6.14) и (9.3.4) следует геометрическая интерпретация зарядов. Так, для электрического заряда e и заряда $\overline{g}$, определяющего взаимодействие с Z-бозоном, соответственно имеем

$$e = \frac{4\sqrt{k_g}}{c^2}\hbar c\frac{\alpha\lambda^5\sigma^6}{\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}}; \qquad (10.6.15)$$

$$\overline{g} = \frac{4\sqrt{k_g}}{c^2}\hbar c\alpha\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}\approx\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}, \qquad (10.6.16)$$

где $\sin\theta_W$ и $\cos\theta_W$ определены в (10.6.11). Из этих или из других формул можно установить соотношения между константами, заменяющие (10.5.8) и (10.5.15):

$$\alpha\lambda^5=\frac{c^2}{4\sqrt{k_g}}\frac{g_1}{\hbar c};\quad \alpha\sigma^6=\frac{c^2}{4\sqrt{k_g}}\frac{g_2}{\hbar c}. \qquad (10.6.17)$$

7. Экспериментально установлено, что $\theta_W\simeq 30^o$. В 6-мерной модели это означает

$$\sin\theta_W=\frac{\lambda^5}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5)^2}}\simeq\frac{1}{2}, \qquad (10.6.18)$$

откуда следует

$$(\sigma^6)^2\simeq 3(\lambda^5)^2. \qquad (10.6.19)$$

Формулы (10.6.17) завязывают величины λ^5 и σ^6 с константой α. Если положить

$$\lambda^5\simeq 1;\quad \sigma^6\simeq\sqrt{3}, \qquad (10.6.20)$$

то период компактификации дополнительных размерностей оказывается связанным со значением фундаментальных физических констант

$$\alpha^{-1}=2\sqrt{3}\frac{\hbar\sqrt{k_g}}{ec}=2\sqrt{3}\cdot l_{Pl}\tilde{\gamma}^{-1}\simeq 1,7\cdot 10^{-31}\text{см.}, \qquad (10.6.21)$$

где $l_{Pl}=\sqrt{\hbar k_g/c^3}\simeq 1,6\cdot 10^{-33}$см. – планковская длина, $\tilde{\gamma}=e^2/(\hbar c)=1/137$ – постоянная тонкой структуры.

10.7 Геометрический аналог механизма Хиггса и массы бозонов

1. В главах 7 и 8 обсуждалась проблема геометризации категории частиц, описываемых скалярным полем (как нейтральным, так и заряженных), через конформный фактор. Для описания электрослабых взаимодействий фермионов такое грубое описание материи уже неприемлемо. Именно по этой причине данная модель строится на основе именно 5-й физической парадигмы. Для геометризации модели Вайнберга-Салама необходимо указать геометрический аналог используемого там механизма Хиггса ввода масс частиц посредством взаимодействия их с дублетом скалярных полей. В 7-мерной геометрической модели это можно сделать с помощью конфомного фактора, который теперь призван играть иную роль – описывать хиггсовские скалярные бозоны. Обсудим этот вариант описания масс элементарных частиц.

Произведем конформное преобразование исходной 7-мерной метрики согласно формулам, аналогичным (7.7.1) и (8.7.2)

$$\tilde{G}_{MN} = \chi^2 G_{MN}; \quad \sqrt{\tilde{G}^{(7)}} = \chi^7 \sqrt{G^{(7)}}, \tag{10.7.1}$$

где χ^2 – конформный фактор – скалярное поле, в общем случае зависящее от всех семи координат. Можно положить его равным одной из дополнительных диагональных компонент 7-мерной метрики. Положим

$$\chi^2 = -\tilde{G}_{44}. \tag{10.7.2}$$

Будем считать, что во всех предыдущих параграфах этой главы использовались конформно соответствующие исходной метрике компоненты G_{MN} в (10.7.1).

2. Используя общие формулы конформного преобразования, получаем следующее выражение для плотности 7-мерной скалярной кривизны

$$-\frac{\sqrt{\tilde{G}^{(7)}}}{2\tilde{æ}c}{}^7\tilde{R} =$$

$$= -\frac{\sqrt{G^{(7)}}}{2\tilde{æ}c}\chi^5 \left({}^7R - 12G^{MN}\frac{\nabla_M\nabla_N\chi}{\chi} - 18G^{MN}\frac{\chi_{,M}\chi_{,N}}{\chi^2}\right). \tag{10.7.3}$$

Сосредоточим внимание на скалярной части вклада в гиперплотность лагранжиана.

Произведем процедуру 1+1+1+4-расщепление конформно выделенной части. Кроме того, избавимся от вторых 4-мерных производных выделением дивергентных слагаемых. Это приводит к следующему выражению

$$-\frac{3\sqrt{G^{(7)}}}{\tilde{æ}c}\chi^3\{5g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\chi)\partial_\beta^{\dagger\dagger}\chi+2\chi[\partial_4^{\dagger\dagger 2}\chi+\partial_5^{\dagger\dagger 2}\chi+\partial_6^{\dagger\dagger 2}\chi]+$$

$$+3[(\partial_4^{\dagger\dagger}\chi)^2+(\partial_5^{\dagger\dagger}\chi)^2+(\partial_6^{\dagger\dagger}\chi)^2]\}+(\text{дивергентный член}). \quad (10.7.4)$$

Здесь использовались обозначения операторов (10.5.1) – (10.5.4). Кроме того, положено, что компоненты λ^5 и σ^6 являются постоянными.

3. Для согласования с теорией хиггсовских скалярных полей в модели Вайнберга-Салама постулируем следующую зависимость конформного фактора от дополнительных координат:

$$\chi = 1 + b_0\left(\varphi_0\exp[i\alpha(x^5-x^6)] - \varphi_0^*\exp[-i\alpha(x^5-x^6)]\right)+$$

$$+b_+\left(\varphi_+\exp[i\alpha(x^5+x^6)] - \varphi_+^*\exp[-i\alpha(x^5+x^6)]\right), \quad (10.7.5)$$

где b_0, b_+ – константы, φ_0 и φ_+ – комплексные скалярные поля, зависящие лишь от четырех классических координат. Эти поля соответствуют изотопическому дублету полей Хиггса в модели Вайнберга-Салама[2]. В (10.7.5) введена зависимость от дополнительных координат в согласии с их зарядами и ранее введенной интерпретацией гармоник. Знаки минус в круглых скобках существенны для обеспечения положительной определенности вклада скалярных полей в тензор энергии-импульса, то есть эти поля описываются чисто мномой добавкой в конформном факторе.

Пользуясь произволом констант, выберем их в виде

$$b_0 \neq 0; \quad b_+ = 0, \quad (10.7.6)$$

что соответствует унитарной калибровке в модели Вайнберга-Салама. В итоге остается одно поле φ_0.

[2]Заметим, что в (10.7.5) вместо единицы можно было бы ввести комбинацию $1+\Phi$, где функция Φ описывает возможное дополнительное безмассовое скалярное поле геометрического происхождения. Если бы такое поле существовало, то оно бы приводило к ряду специфических эффектов скаляризма [9, 11], в частности, к переменности (зависимости от 4-мерных координат) отношений электрического заряда частиц к их массе.

4. Подставим (10.7.5) и (10.7.6) в (10.7.4). После несложных алгебраических выкладок и усреднений по периодам зависимостей от координат x^5 и x^6 из (10.7.4) получаем выражение

$$\frac{30}{æ}\sqrt{G^{(7)}}b_0^2\left\{g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha^{\dagger\dagger}\varphi_0^*)\partial_\beta^{\dagger\dagger}\varphi_0 - \alpha^2[(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2]\varphi_0^*\varphi_0\right\} + O(b_0^4), \tag{10.7.7}$$

где явно не выписаны слагаемые, пропорциональные четвертой и более высоким степеням b_0. Использованные здесь операторы дифференцирования были выписаны в (10.6.4).

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка, из (10.7.7) находим значение массы покоя так введенного скалярного поля

$$m_H c^2 = \alpha\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}(\hbar c). \tag{10.7.8}$$

Это выражение, как и в главе 8, имеет порядок планковской массы. Опять встает задача перенормировки масс.

5. Геометрический аналог механизма Хиггса состоит в представлении нейтрального (геометрического) скалярного поля в виде

$$\varphi_0 = \eta_0 + \phi_0, \tag{10.7.9}$$

где η_0 – некоторая постоянная, соответствующая вакуумному среднему скалярного поля в калибровочной теории, ϕ_0 – эффективное скалярное поле. Именно константа η_0 ответственна за возникновение массовых слагаемых у физических полей в результате их взаимодействия с полем φ_0.

6. В §10.6 при обсуждении вопроса о выделении комбинаций из векторов триады (диады), соответствующих физическим электромагнитному и Z-бозоному полям, уже использовалось скалярное поле φ_0. К динамическому вкладу Z-бозона в плотность лагранжиана (10.6.7) добавляется массовая часть из-за слагаемых вида (10.6.4) в (10.7.7). Масса покоя нейтрального векторного бозона Z_α определяется выражением

$$m_z c^2 \sim (\hbar c)(b_0\eta_0)^2\alpha\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2}. \tag{10.7.10}$$

Согласно экспериментальным данным $m_z c^2 \sim 93$ГэВ. Отсюда можно оценить комбинацию констант

$$(\hbar c)(b_0\eta_0)^2\alpha\sqrt{(\lambda^5)^2+(\sigma^6)^2} \sim 20,8\text{ГэВ}. \tag{10.7.11}$$

7. Скалярное поле φ_0 взаимодействует также с заряженными $W_\alpha^\pm$-бозонами. Для получения таких массовых вкладов следует

выделить в (10.7.7) члены из ξ_α, λ_α и σ_α, содержащие экспоненты от дополнительных координат. После соответствующих вычислений получается хиггсовское значение массы покоя $W^\pm$-бозонов.

Однако это лишь часть значения массы заряженных бозонов. Значительно большие вклады дают физико-геометрические тензоры, которые ранее не учитывались. В частности, такие вклады дают комбинации из векторных физико-геометрических полей, указанных в (8.5.20) и обозначенных многоточием в (10.3.8). Легко показать, что эти вклады будут, как для скалярных бозонов в (10.7.9), пропорциональны квадрату периода компактификации дополнительных параметров, то есть такие массы имеют порядок массы Планка. Возникает проблема перенормировки планковских масс $W^\pm$-бозонов.

В работе [19] было показано, что для перенормировки планковских масс $W^\pm$-бозонов можно использовать более общую геометрию с кручением, причем выбрать такой вид кручения, который не наблюдается в 4-мерном мире и не взаимодействует со спинорами.

Глава 11

Фермионный сектор 7-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий

В предыдущей главе была рассмотрена лишь геометрическая часть (бозонный сектор) 7-мерной модели грави-электрослабых взаимодействий. В этой главе в рамках той же пятой физической парадигмы обсуждена фермионная материя (лептоны), вносимая в геометрию извне. Показано, что удается достичь достаточно полного соответствия геометрической модели с общепринятой моделью Вайнберга-Салама и в фермионном секторе.

11.1 Фермионы в 7-мерной геометрической модели

В 7-мерной геометрической модели используется традиционное обобщение 2-компонентных спиноров на основе алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел [65], когда спиноры могут иметь лишь 2^n компонент, где n - целое число. В данном случае 7 измерений с сигнатурой $(+---\mid---)$ фермионы описываются 8-компонентными комплексными спинорами ($n = 3$). Для их описания в искривленном многообразии, прежде всего, необходимо осветить ряд ключевых моментов.

1. **Септадный формализм (метод)**. В 7-мерной модели

для описания фермионов следует использовать естественное обобщение тетрадного формализма (см. §7.2) на случай семи измерений – септадный формализм, в котором 7-мерный метрический тензор представляется в виде

$$G_{\mu\nu} = \sum_P G_M(P) G_N(P), \tag{11.1.1}$$

где $P = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $G_M(P)$ – компоненты септады. Очевидно, использованный выше триадный метод можно трактовать как промежуточный между общековариантным метрическим и септадным формализмами. Следует положить

$$G_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_M(\alpha) g_N(\alpha) - \xi_M \xi_N - \lambda_M \lambda_N - \sigma_M \sigma_N, \tag{11.1.2}$$

где

$$G_M(\alpha) = g_M(\alpha); \quad G_M(4) = \xi_M; \quad G_M(5) = \lambda_M; \quad G_M(6) = \sigma_M \tag{11.1.3}$$

с условиями ортонормировки

$$G_M(P) G_N(S) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & P = S = 0; \\ -1 & P = S = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \\ 0 & P \neq S. \end{array} \right\} \tag{11.1.4}$$

Септадный метод, как и монадный, диадный и т.д., можно представить в виде четырех составных частей. В алгебру септадного метода входит, в частности, проектирование всех тензорных величин посредством компонент септады, например, для произвольного вектора имеем

$$B(P) = B_M G^M(P), \tag{11.1.5}$$

где $B(P)$ скаляр. Индекс в скобках означает номер вектора септады, с которым свернут 7-мерный вектор B_M. В формуле (10.1.3) уже использованы понятия септадного метода, например, там присутствуют компоненты коэффициентов вращения Риччи. Более подробно можно ознакомиться с тетрадным (септадным) методом по нашим работам [9, 11].

2. **Представление матриц** Γ_M. В 7-мерной модели роль матриц Дирака играют 8-рядные матрицы Γ_M. Однако, согласно (10.1.4) они являются функциями координат. Непосредственным обобщением постоянных матриц Дирака являются проекции матриц Γ_M на локальную систему из семи ортогональных векторов септады

$$\Gamma(P) = \Gamma_M G^M(P). \tag{11.1.6}$$

Эти векторы постоянны (зависимость от координат берут на себя компоненты септады) и являются образующими алгебры Клиффорда $C(1,6)$, соответствующей используемому 7-мерному многообразию с сигнатурой $(+---|---)$.

Выберем следующее представление матриц

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma_N g^N(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) & 0 \end{pmatrix}; \tag{11.1.7}$$

$$\Gamma(4) = i\begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}; \ \Gamma(5) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \ \Gamma(6) = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.1.8}$$

где I_4 – 4-рядная единичная матрица, $\gamma(\alpha)$ – постоянные 4-рядные матрицы Дирака, напомним

$$\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление характерно одинаковой блочной структурой всех матриц, удобной для дальнейшего расщепления 8-рядных величин на 4-рядные.

3. **Левые и правые компоненты спиноров**. В согласии с данным выше представлением Г-матриц 8-компонентные Ψ-функции естественным образом расщепляются на две 4-компонентные функции:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix} \to \overline{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma(0) = (\overline{\Psi}(2), \overline{\Psi}(1)), \tag{11.1.9}$$

где

$$\overline{\Psi}(s) = \Psi^\dagger(s)\gamma(0); \quad s = 1, 2.$$

Разложим компоненты 4-рядных функций на левые и правые составляющие согласно стандартным формулам:

$$\Psi_L(s) = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi(s) \to \overline{\Psi}_L(s) = \frac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(1 - i\gamma_5);$$

$$\Psi_R(s) = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi(s) \to \overline{\Psi}_R(s) = \frac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(1 + i\gamma_5), \tag{11.1.10}$$

тогда имеем для (11.1.9)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L(1) + \Psi_R(1) \\ \Psi_L(2) + \Psi_R(2) \end{pmatrix};$$

$$\overline{\Psi} = (\overline{\Psi}_L(2) + \overline{\Psi}_R(2);\ \overline{\Psi}_L(1) + \overline{\Psi}_R(1)). \qquad (11.1.11)$$

4. **Зависимость функций от дополнительных координат**. В модели Вайнберга-Салама левые и правые компоненты лептонов имеют разные изотопические свойства и разный гиперзаряд. В §10.5 эти понятия были связаны с характером зависимости от дополнительных координат. На время пренебрежем зависимостью спинорных компонент от координаты x^4, – описание масс лептонов будет обсуждено в §11.4. В согласии с формулами (10.5.10), (10.5.14) и (10.5.16) введем зависимость спинорных функций от x^5 и x^6 и произведем физическое отождествление входящих в (10.1.11) величин

$$\begin{aligned} \Psi_L(s) &= \left(a_{Ls}\nu_L e^{i\alpha x^6} + b_{Ls}e_L e^{-i\alpha x^6}\right) e^{-i\alpha x^5}; \\ \Psi_R(s) &= a_{Rs}\nu_R + b_{Rs}e_R e^{-2i\alpha x^5}, \end{aligned} \qquad (11.1.12)$$

где $s = 1, 2$. Здесь a_{Ls}, a_{Rs}, b_{Ls}, b_{Rs}- постоянные коэффициенты, определяемые из условий нормировки и соображений соответствия получаемых формул со стандартными в модели Вайнберга-Салама.

Для правых компонент можно положить

$$a_{R1} = a_{R2} = 0, \qquad (11.1.13)$$

т.е. исключить правую компоненту нейтрино (оно не обладает массой покоя), а правую компоненту электрона будем рассматривать как изоскаляр, положив, в частности,

$$b_{R1} = 1; \quad b_{R2} = 0. \qquad (11.1.14)$$

Тогда отличные от нуля коэффициенты левых компонент лептонов в двух строках (10.1.11) имеют характер 2-компонентного спинора из ν_L и e_L в изотопическом пространстве.

Данные о зависимостях от x^5 и x^6 (в координатной системе, где $\lambda^6 = 0$) всех введенных выше величин сведены в таблицу.

Частицы	Зависимость от x^5	Гиперзаряд Y	Зависимость от x^6	Проекция изоспина T_3
			Изодублет	
ν_L	$\exp(-i\alpha x^5)$	-1	$\exp(i\alpha x^6)$	$+\frac{1}{2}$
e_L	$\exp(-i\alpha x^5)$	-1	$\exp(-i\alpha x^6)$	$-\frac{1}{2}$
			Синглеты	
ν_R	$\exp(0)$	0	$\exp(0)$	0
e_R	$\exp(-2i\alpha x^5)$	-2	$\exp(0)$	0
B_α	$\exp(0)$	0	$\exp(0)$	0
			Изотриплет	
W^+_α	$\exp(0)$	0	$\exp(2i\alpha x^6)$	$+1$
W^-_α	$\exp(0)$	0	$\exp(-2i\alpha x^6)$	-1
$A(3)_\alpha$	$\exp(0)$	0	$\exp(0)$	0
			Изодублет	
ϕ_0	$\exp(i\alpha x^5)$	1	$\exp(-i\alpha x^6)$	$-\frac{1}{2}$
ϕ_+	$\exp(i\alpha x^5)$	1	$\exp(i\alpha x^6)$	$+\frac{1}{2}$

Гармоники фермионов и бозонов из этой таблицы графически проилюстрированы на рисунке 11.1. На этом графике по верти-

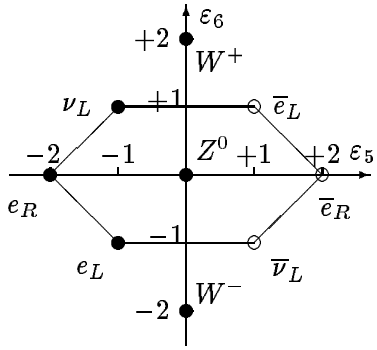


Рис. 11.1: Гармоники фермионов и бозонов в 7-мерной (6-мерной) геометрической модели.

кальной оси отложены гармоники ε_6, а по горизонтальной оси – гармоники ε_5. Как видно из рисунка, осуществляется плотная упаковка частиц по гармоникам вблизи их начала отсчета.

Еще раз подчеркнем, что для перехода от гиперплотности лагранжиана к стандартной плотности лагранжиана нужно произвести усреднение по периодам зависимостей от x^5 и x^6. При этом уничтожаются все слагаемые, содержащие экспоненты, однако останутся гармоники ε_5 и ε_6, интерпретируемые через гиперзаряд и проекции изоспина.

11.2 Лагранжиан взаимодействия фермионов с векторными бозонами

1. Для записи удлиненной производной от фермионов обратимся к выражению для ковариантной производной от спинора (10.1.3). Легко показать, что слагаемые с коэффициентом вращения Риччи соответствуют гравитационному взаимодействию, взаимодействию с векторными полями через аномальные моменты и частично массовым слагаемым. Непосредственное (прямое) взаимодействие с векторными полями определяется первым слагаемым справа в (10.1.3).

Чтобы в этом убедиться перейдем к 4-мерной записи соответствующего слагаемого из (10.1.2), т.е. произведем процедуру 1+1+1+4-расщепления:

$$\begin{aligned}\Gamma^M\frac{\partial}{\partial x^M} &= \tilde{\Gamma}^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\xi_\alpha\xi^4\frac{\partial}{\partial x^4}+\lambda_\alpha\lambda^5\frac{\partial}{\partial x^5}+\sigma_\alpha\sigma^6\frac{\partial}{\partial x^6}\right]-\\ &- \sigma^6\Gamma(6)\frac{\partial}{\partial x^6}-\Gamma(5)\lambda^5\frac{\partial}{\partial x^5}-\Gamma(4)\xi^4\frac{\partial}{\partial x^4}, \qquad (11.2.1)\end{aligned}$$

где $\tilde{\Gamma}^\alpha = \Gamma^M g^\alpha_M$. Здесь первое слагаемое справа соответствует свободным полям, второе, третье и четвертое слагаемые описывают взаимодействие с векторными полями, а остальные дают вклад в массовые члены. Ограничимся слагаемыми, описывающими лишь прямое взаимодействие с векторными бозонами, и пренебрежем зависимостью от x^4, то есть отбросим второе слагаемое справа.

2. Выпишем гиперплотность лагранжиана для таких слагаемых

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_\Psi &= \frac{i\sqrt{G^{(7)}}(\hbar c)}{2C_f}\{\left(\overline{\Psi}\,\tilde{\Gamma}^\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\tilde{\overline{\Psi}}}{\partial x^\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha\Psi\right)+\\ &+ \lambda^5\lambda_\alpha\left(\overline{\Psi}\tilde{\Gamma}^\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x^5}-\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^5}\tilde{\Gamma}^\alpha\Psi\right)+ \qquad (11.2.2)\end{aligned}$$

$$+ \quad \sigma^6\sigma_\alpha\left(\overline{\Psi}\tilde{\Gamma}^\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x^6} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^6}\tilde{\Gamma}^\alpha\Psi\right)\},$$

где C_f – некоторый размерный коэффициент, введенный для учета последующей процедуры усреднения по периодам дополнительных координат. Характерным общим свойством всех слагаемых в (11.2.2) является то, что в них Г-матрицы входят квадратично (с учетом матрицы $\Gamma(0)$ в определении $\overline{\Psi}$). Это означает, что в выбранном представлении матриц не будет перекрестных членов из компонент $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$.

Кроме того, все парные комбинации из Ψ-функций будут состоять либо только из левых, либо только из правых компонент спиноров:

$$\overline{\Psi}(s)\gamma_\mu\Psi(s) = \overline{\Psi}_L(s)\gamma_\mu\Psi_L(s) + \overline{\Psi}_R(s)\gamma_\mu\Psi_R(s). \qquad (11.2.3)$$

здесь и в дальнейшем будем обозначать постоянные матрицы Дирака в стандартном представлении обычным образом, то есть $\gamma(\mu) \to \gamma^\mu$.

3. Подставим в (11.2.2) выражения для Ψ из (11.1.12) с произвольными значениями коэффициентов a и b, учтя лишь условия (11.1.13). В общем случае находим

$$\tilde{\mathcal{L}}_\Psi = \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi(free)} + \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi(int)} =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{i}{2C_f}\sqrt{G^{(7)}}(\hbar c)\{(a^*_{L1}a_{L1} + a^*_{L2}a_{L2})\left(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\frac{\partial\nu_L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\overline{\nu}_L}{\partial x^\alpha}\gamma^\alpha\nu_L\right) + \\
+ \quad & (b^*_{L1}b_{L1} + b^*_{L2}b_{L2})\left(\overline{e}_L\gamma^\alpha\frac{\partial e_L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\overline{e}_L}{\partial x^\alpha}\gamma^\alpha e_L\right) + \\
+ \quad & (b^*_{R1}b_{R1} + b^*_{R2}b_{R2})\left(\overline{e}_R\gamma^\alpha\frac{\partial e_R}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\overline{e}_R}{\partial x^\alpha}\gamma^\alpha e_R\right)] - \\
- \quad & 2i\alpha(b^*_{R1}b_{R1} + b^*_{R2}b_{R2})\lambda^5(\lambda_\alpha + \lambda^*_\alpha)(\overline{e}_R\gamma^\alpha e_R) - \\
- \quad & i\alpha(a^*_{L1}a_{L1} + a^*_{L2}a_{L2})[\lambda^5(\lambda_\alpha + \lambda^*_\alpha) - \sigma^6(\sigma_\alpha + \sigma^*_\alpha)](\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L) - \\
- \quad & i\alpha(b^*_{L1}b_{L1} + b^*_{L2}b_{L2})[\lambda^5(\lambda_\alpha + \lambda^*_\alpha) + \sigma^6(\sigma_\alpha + \sigma^*_\alpha)](\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L) - \\
- \quad & i\alpha(a^*_{L1}b_{L1} + a^*_{L2}b_{L2})[\lambda^5(\lambda_\alpha + \lambda^*_\alpha) + \sigma^6(\sigma_\alpha - \sigma^*_\alpha)](\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L) - \\
- \quad & i\alpha(a_{L1}b^*_{L1} + a_{L2}b^*_{L2})[\lambda^5(\lambda_\alpha + \lambda^*_\alpha) - \sigma^6(\sigma_\alpha - \sigma^*_\alpha)](\overline{e}_L\gamma^\alpha\nu_L)\}.
\end{aligned} \qquad (11.2.4)$$

Здесь везде подразумевается, что соответствующие экспоненциальные слагаемые включены в выражения для ν и e. В этой

формуле первые три строки соответствуют стандартным членам плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\Psi(free)}$ свободных фермионных полей ν и e. В них экспоненциальные слагаемые погашают друг друга. Для полного совпадения со стандартной теорией следует положить

$$a^*_{L1}a_{L1} + a^*_{L2}a_{L2} = 1; \quad b^*_{L1}b_{L1} + b^*_{L2}b_{L2} = b^*_{R1}b_{R1} + b^*_{R2}b_{R2} = 1. \tag{11.2.5}$$

Остальные пять строк описывают взаимодействия лептонов через промежуточные векторные бозоны.

4. Подставим в последние четыре строки (11.2.4) выражения для компонент λ_α и σ_α, а также учтем экспоненциальные слагаемые фермионов. Произведем усреднение (интегрирование по периодам зависимостей) по дополнительным координатам. Это означает, что в (11.2.4) останутся лишь те слагаемые, в которых экспоненты бозонных слагаемых гасят экспоненты фермионных слагаемых. Очевидно, что в четвертой, пятой и шестой строках остаются лишь нейтральные векторные поля, т.е. этими строками описываются взаимодействия через нейтральные векторные бозоны. В последних двух строках выживают только заряженные векторные поля, т.е. этими строками описываются взаимодействия лептонов через заряженные векторные $W^\pm$-бозоны. В итоге плотность лагранжиана взаимодействия фермионов принимает вид

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\psi(int)} = \frac{1}{2}\sqrt{G^{(7)}}(\hbar c)\alpha\{+4b_5\lambda^5 B_\alpha(\overline{e}_R\gamma^\alpha e_R)+ \\
+2b_5\lambda^5 B_\alpha[(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L) + (\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L)]- \\
-2b_5\sigma^6 A(3)_\alpha[(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L) - (\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L)]+ \\
+(a^*_{L1}b_{L1} + a^*_{L2}b_{L2})\times \\
\times\left[\lambda^5(w^+_5 + w^{*-}_5) + \sigma^6(w^+_6 - w^{*-}_6)\right] W^+_\alpha(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L)+ \\
+(a_{L1}b^*_{L1} + a_{L2}b^*_{L2})\times \\
\times\left[\lambda^5(w^-_5 + w^{*+}_5) - \sigma^6(w^-_6 - w^{*+}_6)\right] W^-_\alpha(\overline{e}_L\gamma^\alpha\nu_L).
\end{gathered} \tag{11.2.6}$$

Подчеркнем, здесь пока не конкретизированы значения коэффициентов $w^\pm_5$ и $w^\pm_6$, константа C_1 определена в (10.3.21).

5. Отдельно проанализируем слагаемые из (11.2.6), описывающие взаимодействие лишь через *нейтральные* векторные бозоны. Используя определения A_α и Z_α через компоненты триады

λ_α и σ_α согласно (10.6.8) и (10.6.9), эту часть плотности лагранжиана взаимодействия можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi(A,Z)} &= -\frac{4\sqrt{k_g}}{c^2}(\hbar c)\frac{\alpha\lambda^5\sigma^6}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5-\lambda^6)^2}}A_\alpha \times \\
&\times \ (\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L + \overline{e}_R\gamma^\alpha e_R) + \\
&+ \ \frac{4\sqrt{k}}{c^2}(\hbar)\alpha\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5-\lambda^6)^2}Z_\alpha \times \\
&\times \ [\left(\frac{1}{2}+0\right)(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L) + (0+0)(\overline{\nu}_R\gamma^\alpha\nu_R) + \\
&+ \ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^5\sin\theta_V}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5-\lambda^6)^2}}\right)(\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L) + \\
&+ \ \left(0+\frac{\lambda^5\sin\theta_V}{\sqrt{(\sigma^6)^2+(\lambda^5-\lambda^6)^2}}\right)(\overline{e}_R\gamma^\alpha e_R)]. \quad (11.2.7)
\end{aligned}$$

Здесь опущен множитель $\sqrt{G^{(7)}}$. Это выражение лишний раз подтверждает произведенные в §10.6 отождествления геометрических величин с физическими.

11.3 Сопоставление с лагранжианом модели Вайнберга-Салама

1. Представим 3 последние слагаемые в (11.2.6) справа (пять последних строк) в форме, подходящей для обсуждения вопроса об $SU(2)$-симметрии. Для этого распишем $W^\pm_\alpha$ через векторные потенциалы согласно (9.3.5). Кроме того, ограничимся случаем $C_1^2 = C_2^2 = C$ и вещественными коэффициентами в представлении векторов триады (10.2.19) – (10.2.21). Используя решения для коэффициентов (10.4.9), (10.4.10) и (10.4.14), находим

$$\mathcal{L}_{\psi(int)} = \frac{1}{2}\sqrt{G^{(7)}}(\hbar c)\alpha\{+4b_5\lambda^5 B_\alpha(\overline{e}_R\gamma^\alpha e_R)+$$

$$+2b_5\lambda^5 B_\alpha[(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L)+(\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L)]-$$

$$-2b_5\sigma^6 A(3)_\alpha[(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L)-(\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L)]+$$

$$+A(1)_\alpha\left[\sqrt{2}\lambda^5 w_5 \pm C\sigma^6\right][z(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L)+z^*(\overline{e}_L\gamma^\alpha\nu_L)+$$

$$+iA(1)_\alpha \left[\sqrt{2}\lambda^5 w_5 \pm C\sigma^6\right] [z(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L) - z^*(\overline{e}_L\gamma^\alpha \nu_L), \qquad (11.3.1)$$

где использовано обозначение

$$z = a^*_{L1} b_{L1} + a^*_{L2} b_{L2}. \qquad (11.3.2)$$

Учтем, что следующие три лептонные комбинации образуют вектор в изотопическом пространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(1)^\alpha &= (\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L) + (\overline{e}_L\gamma^\alpha \nu_L); \\ \tilde{A}(2)^\alpha &= i[(\overline{\nu}_L\gamma^\alpha e_L) - (\overline{e}_L\gamma^\alpha \nu_L)]; \\ \tilde{A}(3)^\alpha &= (\overline{\nu}_L\gamma^\alpha \nu_L) - (\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L). \end{aligned} \qquad (11.3.3)$$

Любопытно отметить, что выражение во второй строке (11.3.1) можно рассматривать как временно-подобную компоненту этого вектора в 4-мерном изотопическом "пространстве-времени"

$$\tilde{A}(0)^\alpha = (\overline{\nu}_L\gamma^\alpha \nu_L) + (\overline{e}_L\gamma^\alpha e_L). \qquad (11.3.4)$$

Учитывая также, что в модели Вайнберга-Салама изотопическим 3-мерным вектором является триплет $A(s)_\alpha$, приходим к выводу, что для получения из последних трех строк в (11.3.1) справа $SU(2)$-инвариантной комбинации[1] вида

$$\tilde{A}(1)^\alpha A(1)_\alpha + \tilde{A}(2)^\alpha A(2)_\alpha + \tilde{A}(3)^\alpha A(3)_\alpha = Inv \qquad (11.3.5)$$

необходимо положить, во-первых

$$z = z^* \qquad (11.3.6)$$

и, во-вторых,

$$2b_5\sigma^6 = \sqrt{2}\lambda^5 w_5 \pm C\sigma^6 \to w_5 = \frac{\sigma^6}{\sqrt{2}\lambda^5}(2b_5 \mp C). \qquad (11.3.7)$$

Последнее выражение представляет собой дополнительное условие на коэффициенты b_5 и w_5.

2. Для осмысления этого условия рассмотрим 6-мерный вариант геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий, для которого коэффициенты разложения диады по физическим полям были найдены в §10.4. Опять ограничимся случаем вещественных коэффициентов, когда имеют место формулы

[1] Заметим, что можно было бы говорить о $SL(2,C)$-комбинации, в которой вектор B_α играет роль четвертой (временно-подобной) компоненты $A(0)_\alpha$.

(10.4.27), (10.4.28) и (10.4.31). Подставляя их в (11.3.7) и используя ранее изложенные соображения, приходим к соотношению

$$\sqrt{3}\lambda^5 = \sigma^6, \tag{11.3.8}$$

которое справедливо лишь при значении угла Вайнберга, равном 30°. Заметим, что данное условие приводит также к согласованию знаков в формулах (10.4.6) и (10.4.28). Во всех этих формулах следует выбирать либо верхний, либо нижний знак.

3. Из изложенного следует, что при выборе вещественных коэффициентов в (10.2.19) – (10.2.21) *отклонение угла Вайнберга от* 30° *должно описываться с помощью дополнительного (седьмого) измерения, соответствующего координате* x^4. Это означает, в частности, отличие от нуля некоторых коэффициентов в разложении вектора триады ξ_α по физическим полям.

Например, положим в (11.3.7) $w_5 = \sqrt{3/2}C$, как в 6-мерной модели. Тогда имеем

$$\sigma^6 = \sqrt{3}\lambda^5 \frac{C}{2b_5 - C}. \tag{11.3.9}$$

Из (10.4.10) следует, что $|b_5| \leq C$, то есть

$$\sigma^6 \leq \sigma_0^6 \equiv \sqrt{3}\lambda^5. \tag{11.3.10}$$

Согласно (10.6.18) это означает, что угол Вайнберга может быть либо равным 30°, либо меньше, как это и следует из эксперимента.

4. В выборе фермионных параметров еще остается произвол даже в рамках условий (11.2.5) и (11.3.6). Взглянем на этот произвол под следующим углом зрения. Представим левые компоненты лептонов согласно (11.1.11) в виде 2-компонентного столбца

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_L(1) \\ \Psi_L(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{L1}\nu_L + b_{L1}e_L \\ a_{L2}\nu_L + b_{L2}e_L \end{pmatrix}. \tag{11.3.11}$$

Пусть коэффициенты a_L, b_L удовлетворяют условиям (11.2.5). Произведем преобразования этих коэффициентов с помощью некой матрицы $\{c_r^s\}$

$$\Psi'_L = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} \Psi_L = \begin{pmatrix} a'_{L1}\nu + b'_{L1}e_L \\ a'_{L2}\nu + b'_{L2}e_L \end{pmatrix}. \tag{11.3.12}$$

Потребуем, чтобы при этих преобразованиях по-прежнему выполнялись условия (11.2.5). Это будет, если коэффициенты преобразований c_r^s удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{l} c_1^{*1}c_1^1 + c_1^{*2}c_1^2 = 1; \quad c_2^{*1}c_2^1 + c_2^{*2}c_2^2 = 1; \\ c_1^{*1}c_2^1 + c_2^{*2}c_2^2 = 0. \end{array} \tag{11.3.13}$$

Эти условия определяют группу преобразований $U(2)$. Очевидно, что при этих преобразованиях остается инвариантным и выражение $z = a_{L1}^* b_{L1} + a_{L2}^* b_{L2}$. В частности, можно взять более узкие преобразования, составляющие группу $SU(2)$. Они соответствуют добавлению условия

$$c_1^1 c_2^2 - c_2^1 c_1^2 = 1. \tag{11.3.14}$$

11.4 Масса лептона

1. Обсудим происхождение масс лептонов в многомерной геометрической модели, характеризуемой гиперплотностью лагранжиана (10.1.2). Обратим внимание, что в этом выражении нет волевым образом введенного массового слагаемого. Масса будет получаться, как и в модели Вайнберга-Салама, из-за взаимодействия со скалярным полем, которое в данной многомерной геометрической модели возникает в виде конформного фактора χ. Чтобы выписать массовые вклады в гиперплотность фермионной части лагранжиана, прежде всего, необходимо установить, как в него входит скалярное поле. Согласно (10.7.1) из определителя метрики возникает общий множитель χ^7. Однако χ входит в состав фермионной части еще в два места: в матрицы Γ^M и в коэффициенты вращения Риччи $\Delta_M(NP)$.

2. Компоненты матриц Γ^M должны преобразовываться при конформном преобразовании (10.7.1) вследствие их связи с 7-мерным метрическим тензором (10.1.4), то есть имеем

$$\tilde{\Gamma}^M = \chi^{-1}\Gamma^M. \tag{11.4.1}$$

Естественно положить, что фермионная волновая функция не изменяется при конформном преобразовании. Без учета вклада от коэффициентов вращения Риччи из (10.1.2) получаем следующие массовые слагаемые:

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(1)}_{\Psi(m)} = -\frac{i(\hbar c)}{2}\chi^6\overline{\Psi}\left(\Gamma(4)\xi^4\frac{\partial}{\partial x^4} + \Gamma(5)\lambda^5\frac{\partial}{\partial x^5} + \Gamma(6)\sigma^6\frac{\partial}{\partial x^6}\right)\Psi + (h.c.) \tag{11.4.2}$$

На первый взгляд (без использования механизма типа хиггсовского) может показаться, что это выражение должно приводить к планковским массам, однако это не так.

3. Чтобы в этом убедиться, нужно расписать фермионные функции согласно формулам (11.1.9) – (11.1.12) и учесть выбранные представления Г-матриц (11.1.7). В итоге получаются выражения из 4-компонентных функций, состоящие из перекрестных комбинаций из левых и правых компонент. Легко видеть, что вследствие (11.1.12) экспоненциальные множители в спинорных слагаемых не могут скомпенсировать друг друга. Это можно сделать только с помощью экспоненциальных слагаемых скалярного поля. Возведя (10.7.5) в 6-ю степень,

$$\chi^6 = 1 + 6b_0 \left(\varphi_0 \exp[i\alpha(x^5 - x^6)] - \varphi_0^\star \exp[-i\alpha(x^5 - x^6)]\right) + O(b_0^2), \tag{11.4.3}$$

легко видеть, что следует ограничиться лишь первой степенью полинома. Остальные слагаемые при усреднении по периодам дополнительных размерностей сократятся.

4. Массовые вклады от коэффициентов вращения Риччи сводятся к соответствующим вкладам от дифференцирования скалярного поля, возникающего после конформного преобразования $\Delta_M(NP)$. Нетрудно показать, что эти слагаемые имеют вид:

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(2)}_{\Psi(m} = -\frac{3i(\hbar c)}{2}\chi^5 \left(\xi^4 \frac{\partial\chi}{\partial x^4}\overline{\Psi}\Gamma(4)\Psi + \lambda^5 \frac{\partial\chi}{\partial x^5}\overline{\Psi}\Gamma(5)\Psi + \right.$$

$$\left. + \sigma^6 \frac{\partial\chi}{\partial x^6}\overline{\Psi}\Gamma(6)\Psi\right) + (h.c.) \tag{11.4.4}$$

Очевидно, что экспоненциальные слагаемые фермионов компенсируются факторами дифференцируемых скалярных функций, то есть от слагаемого χ^5 нужно учесть лишь нулевой порядок разложения по скалярным полям.

5. Производя соответствующие выкладки с использованием экспоненциальной зависимости фермионных функций от дополнительных координат (11.1.12), а также (10.7.5), можно убедиться, что *массовые вклады* (11.4.2) и (11.4.4) *взаимно сокращаются друг с другом.* Это обусловлено, во-первых, степенями конформных факторов в массовых вкладах и, во-вторых, разными знаками показателей экспонент в фермионных комбинациях и у скалярного поля. Эта закономерность (можно сказать, теорема) была установлена в нашей книге [11, с.118] в рамках смешанного торсионно-метрического варианта 6-мерной теории гравиэлектрослабых взаимодействий. Она справедлива и для метри-

ческого варианта теории, причем выполняется для любой размерности геометрической модели. В [11] рассматривались два возможных пути преодоления этой трудности, однако оба они имеют недостаточно обоснованный формальный характер.

6. Для получения отличных от нуля массовых слагаемых в рамках развиваемой здесь 7-мерной геометрической модели предлагается использовать игнорировавшуюся до сих пор возможную зависимость фермионных волновых функций от дополнительной координаты x^4. Напомним, что эта дополнительная координата в 5-мерном варианте Клейна-Румера была введена именно для описания массовых слагаемых в уравнениях и в лагранжиане соответствующих полей.

Обобщим определения (11.1.12) на случай зависимости от координаты x^4 в согласии с общей формулой (10.1.1). При этом следует учесть следующие соображения:

1) Чтобы не было описанной выше компенсации двух вкладов, необходимо постулировать различный характер зависимости от x^4 фермионных функций и скалярного поля. Положим, что от координаты x^4 зависят только фермионные волновые функции.

2) Для того, чтобы зависимость от x^4 не повлияла на описанное выше взаимодействие фермионных полей с заряженными векторными $W^{\pm}$-бозонами необходимо положить, что левые компоненты нейтрино и массивного лептона имеют одинаковую зависимость от координаты x^4.

3) Для того, чтобы при усреднениях по периодам зависмостей от дополнительных координат экспоненциальные факторы с x^4 сокращались в слагаемых, описывающих взаимодействия фермионов с нейтральными векторными бозонами и в массовых слагаемых, необходимо положить одинаковую зависимость от x^4 левой и правой компонент массивного лептона.

Всем этим условиям удовлетворяет следующий вид зависимостей фермионных функций от дополнительных координат:

$$\Psi_L(s) = \left(a_{Ls}\nu_L e^{i\alpha x^6} + b_{Ls}e_L e^{-i\alpha x^6}\right) e^{i(\beta x^4 - \alpha x^5)}; \qquad (11.4.5)$$

$$\Psi_R(s) = b_{Rs}e_R e^{i(\beta x^4 - 2\alpha x^5)}, \qquad (11.4.6)$$

где константа β, как и прежде, характеризует период зависимости величин от 4-й координаты.

7. Исходя из изложенного, легко показать, что отличный от нуля массовый вклад возникает только из первого слагаемого справа в (11.4.2). После подстановки вида всех входящих в это выражение величин и после усреднения по периоду зависимости

от координаты x^4 получаем массовый вклад вида

$$\mathcal{L}_{\psi(m)} = 6i(\hbar c)b_0\eta_0\beta\zeta^4\left[(\overline{e}_R e_L)(b^\star_{R2}b_{L1} - b^\star_{R1}b_{L2}) - \right.$$
$$\left. -(\overline{e}_L e_R)(b^\star_{L1}b_{R2} - b^\star_{L2}b_{R1})\right]. \qquad (11.4.7)$$

Напомним, что комбинация констант $b_0\eta_0$ определяется из значения массы покоя Z-бозона.

Легко видеть, что константу β всегда можно выбрать в согласии с наблюдаемым значением массы лептона (электрона). Таким образом, константа f_e, введенная в модели Вайнберга-Салама в плотность лагранжиана (9.5.2) для описания массы электрона, в многомерной геометрической модели соответствует константе β, то есть периоду компактификации дополнительной координаты x^4.

11.5 Описание трех поколений лептонов

1. До сих пор в рамках многомерных геометрических моделей рассматривалось электрослабое взаимодействие лептонов одного поколения. Возникает естественный вопрос, каким образом в данном подходе описать три поколения частиц. В ряде работ [11, 20] предпринимались попытки решения этой задачи.

В частности, в работе [20] предлагалось для этой цели использовать имеющийся произвол в числе используемых гармоник (по дополнительным координатам) в волновых функциях фермионов (11.1.12) и в разложениях компонент триады (10.2.7) – (10.2.9). Почему в этих формулах нужно ограничиваться лишь первыми членами разложения? Исследовался вопрос о возможности связать следующие члены разложения с принадлежностью частиц к другим поколениям. Обсуждалось несколько вариантов. На этом пути встретился ряд трудностей, связанных, во-первых, с выполнением правил запрета для взаимодействий через нейтральные токи, во-вторых, с одновременным выполнением правил запрета для заряженных токов и, в-третьих, – с описанием масс элементарных частиц. В-четвертых, не удалось найти достаточно веского критерия существования именно трех поколений частиц.

Другой путь анализировался в рамках одной из первых многомерных моделей грави-электрослабых взаимодействий [11], когда использовался смешанный торсионно-метрический вариант описания промежуточных векторных бозонов. Для этой цели предлагалось увеличить размерность геометрической модели. Делался переход от 6-мерной к 7-мерной модели, и в ее рамках описывались частицы нескольких поколений. На этом пути также

встретился ряд трудностей различного характера. В частности, в этом подходе возникало несколько дополнительных векторных геометрических полей, которые не удавалось должным образом физически интерпретировать.

2. Опираясь на опыт построения метрического варианта многомерных теорий а также на соображения параллельно развиваемой бинарной геометрофизики, следует выбрать путь дальнейшего *увеличения размерности* многомерных геометрических моделей. Для этой цели еще раз проанализируем ключевые формулы (11.1.12), где были заданы гармоники левых, правых компонент массивного лептона и нейтрино одного поколения. Из этих формул можно сделать следующие выводы:

1) Дополнительная координата x^6 оказалась необходимой для обеспечения взаимодействия между левыми компонентами массивного лептона и нейтрино через W-бозоны. Разность их зависимостей от x^6 погашается соответствующей зависимостью W-бозонов от x^6, так что такие экспоненциальные слагаемых погашаются, и нужные слагаемые выживают при усреднении по периодам дополнительных координат.

2) Дополнительная координата x^5, во-первых, различает левые компоненты массивного лептона от правых и, во-вторых, вид гармоник ε_5 у этих компонент и хиггсовских скалярных бозонов таков, чтобы описать массовые слагаемые.

3. Исходя из проведенного анализа предлагается для частиц трех поколений

а) использовать один и тот же вид зависимостей от дополнительной координаты x^6 (они одинаково взаимодействуют с W-бозонами) и

б) ввести для каждого из трех поколений вместо x^5 свою дополнительную координату, то есть предлагается увеличить размерность на две единицы.

Это означает, что для лептонов первого поколения (электронов и электронного нейтрино) будут иметь место формулы вида (11.4.5) – (11.4.6):

$$\begin{aligned}
\Psi_L^{(1)}(s) &= \left(a_{Ls}^{(1)}\nu_{eL}e^{i\alpha x^6} + b_{Ls}^{(1)}e_L e^{-i\alpha x^6}\right) e^{i(\beta\varepsilon_4^{(1)}x^4 - \alpha x^5)};\\
\Psi_R^{(1)}(s) &= b_{Rs}^{(1)}e_R e^{i(\beta\varepsilon_4^{(1)}x^4 - 2\alpha x^5)}, \qquad (11.5.1)
\end{aligned}$$

где введена гармоника $\varepsilon_4^{(1)}$, характеризующая значение массы лептона первого поколения. Для лептонов второго поколения (мюонов и мюонного нейтрино) следует положить

$$\Psi_L^{(2)}(s) = \left(a_{Ls}^{(2)}\nu_{\mu L}e^{i\alpha x^6} + b_{Ls}^{(2)}\mu_L e^{-i\alpha x^6}\right) e^{i(\beta\varepsilon_4^{(2)}x^4 - \alpha x^7)};$$

$$\Psi_R^{(2)}(s) = b_{Rs}^{(2)}\mu_R e^{i(\beta\varepsilon_4^{(2)}x^4 - 2\alpha x^7)}, \tag{11.5.2}$$

где для второго поколения введены новая координата (размерность) x^7 и новая гармоника $\varepsilon_4^{(2)}$, характеризующая иную массу лептона второго поколения (мюона).

Аналогично, для лептонов третьего поколения (тау-лептона и тау-лептонного нейтрино) следует записать

$$\begin{aligned}\Psi_L^{(3)}(s) &= \left(a_{Ls}^{(3)}\nu_{\tau L}e^{i\alpha x^6} + b_{Ls}^{(3)}\tau_L e^{-i\alpha x^6}\right)e^{i(\beta\varepsilon_4^{(3)}x^4 - \alpha x^8)};\\ \Psi_R^{(3)}(s) &= b_{Rs}^{(3)}\tau_R e^{i(\beta\varepsilon_4^{(3)}x^4 - 2\alpha x^8)},\end{aligned} \tag{11.5.3}$$

где для третьего поколения введены новая координата (размерность) x^8 и своя гармоника $\varepsilon_4^{(3)}$, определяющая массу тау-лептона.

4. Таким образом, для решения проблемы поколений частиц и описания их масс покоя следует использовать 9-мерную геометрическую модель. В такой геометрии общепринятые спиноры описываются 16 компонентами, то есть индекс s принимает 4 значения. Составляющие многокомпонентного спинора $\Psi(s)$ записываются через введенные величины следующим образом

$$\Psi(s) = \Psi^{(1)}(s) + \Psi^{(2)}(s) + \Psi^{(3)}(s). \tag{11.5.4}$$

Очевидно, в такой модели для фермионов можно сохранить формулу связи гиперзаряда и проекции изотопического спина (10.5.16) с электрическим зарядом Q, только для второго и третьего поколений вместо гармоники с номером 5 теперь следует подставлять гармоники с номерами 7 или 8. Для введенных определений эту формулу следует обобщить

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \tag{11.5.5}$$

так что для гиперзаряда имеет место выражение

$$Y = \varepsilon_5 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8. \tag{11.5.6}$$

5. Такую теорию следует формулировать в соответствующем обобщении тетрадного формализма. Четыре (или пять) дополнительных векторов $G(r)_\alpha$ (где $r = (4), 5, 6, 7, 8$), соответствующих смешанным компонентам метрического тензора, следует представить через физические поля посредством формул типа (10.2.7) – (10.2.9) (или (10.4.15) – (10.4.17)), то есть

$$G(r)_\beta = b_r B_\beta + a_r A(3)_\beta +$$

$$+w_r^+ W_\beta^+ \exp[2i\alpha x^6] + w_r^- W_\beta^- \exp[-2i\alpha x^6]. \qquad (11.5.7)$$

Для описания электрослабого взаимодействия частиц трех поколений через промежуточные W-бозоны (в согласии со стандартной теорией) нет необходимости вводить другие гармоники зависимостей от дополнительных координат. Очевидно, что в таком случае будут соблюдаться правила запрета для взаимодействия заряженных токов. Из-за различия дополнительных координат фермионы из разных поколений перемешиваться не будут.

Нет необходимости также использовать дополнительные степени свободы для описания новых нейтральных векторных полей. Напомним, что следуя идеологии теории Калуцы-Клейна (каждой новой размерности соответствует свое нейтральное векторное поле) в общем случае можно было бы ввести четыре (или пять) нейтральных векторных полей. В данном же случае достаточно двух полей.

Расписывая скалярную кривизну через составляющие метрического тензора (11.5.7) согласно изложенному в предыдущей главе и сравнивая результат с бозонным сектором модели Вайнберга-Салама, можно найти условия на новые коэффициенты разложения a_r, b_r, $w_r^\pm$. Теперь их значительно больше. Очевидно, эти коэффициенты находятся со значительным произволом. Аналогично изложенному в предыдущих параграфах из сравнения фермионных секторов двух моделей можно найти условия на коэффициенты $b_{Ls}^{(k)}$, $b_{Rs}^{(k)}$ и $a_s^{(k)}$ из формул (11.5.1) – (11.5.3).

6. Для описания массовых вкладов для частиц трех поколений необходимо обобщить разложение (10.7.5) хиггсовских нейтральных бозонов по гармоникам зависимостей от дополнительных координат. Ограничиваясь только нейтральными скалярными бозонами, теперь следует писать

$$\chi = 1 + b_0^{(1)} \left(\varphi_0 \exp[i\alpha(x^5 - x^6)] - \varphi_0^\star \exp[-i\alpha(x^5 - x^6)]\right) +$$

$$+b_0^{(2)} \left(\varphi_0 \exp[i\alpha(x^7 - x^6)] - \varphi_0^\star \exp[-i\alpha(x^7 - x^6)]\right) +$$

$$+b_0^{(3)} \left(\varphi_0 \exp[i\alpha(x^8 - x^6)] - \varphi_0^\star \exp[-i\alpha(x^8 - x^6)]\right), \qquad (11.5.8)$$

где коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ и $b_0^{(3)}$ в общем случае являются разными.

Легко видеть, что такое определение хиггсовских нейтральных бозонов не приведет к перемешиванию массовых вкладов частиц разных поколений.

7. К недостаткам этой модели можно отнести, во-первых, отсутствие критерия для существования именно трех поколений

элементарных частиц, во-вторых, наличие ряда неиспользованных степеней свободы при описании нейтральных векторных бозонов (можно было бы ввести в рассмотрение несколько видов Z-бозонов), в-третьих, с позиций многомерной геометрической модели может показаться искусственным использование только одной гармоники в разложении по экспоненциальным зависимостям от дополнительных координат. В общем случае можно было бы ввести несколько промежуточных заряженных векторных бозонов.

11.6 Выводы и замечания по 7-мерной геометрической модели

Завершая обсуждение 7-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий, с полным основанием можно утверждать, что в рамках этой модели удается достаточно полно описать известные закономерности электрослабых взаимодействий лептонов, вскрытых в рамках калибровочного подхода (модели Вайнберга-Салама), и объединить эту теорию с эйнштейновской общей теорией относительности.

Анализ предложенной 7-мерной геометрической модели можно проводить с четырех принципиально различных позиций:

1) с позиций сравнения с общепринятой моделью Вайнберга-Салама (1-й физической парадигмой);

2) сопоставляя данную модель с развитыми ранее аналогичными 6-мерными геометрическими моделями;

3) в рамках ее собственной 5-й физической парадигмы, всецело опираясь на геометрические методы и представления;

4) с точки зрения более глубокой 9-й физической парадигмы, то есть понятий бинарной геометрофизики.

Сделаем некоторые замечания отдельно с каждой из названных позиций.

1. **С позиций модели Вайнберга-Салама** обсуждение 7-мерной модели велось в течение всей этой главы. К изложенному добавим следующее:

а) В ряде работ (см. обзор [15]), посвященных геометризации модели Вайнберга-Салама, стараются напрямую геометризовать группы, используемые в этой модели, то есть используется топология сферы, соответствующая группе $SU(2)$, и берется еще одна размерность, соответствующая группе $U(1)$, как в классическом варианте 5-мерной теории Калуцы. В рассмотренной здесь 7-мерной модели показано, что для получения $SU(2) \times U(1)$-симметричного лагранжиана Вайнберга-Салама достаточно ограничиться более простой топологией 3-мерного тора. Это

достигается, во-первых, допущением циклической зависимости метрики от дополнительных координат, во-вторых, должным выбором коэффициентов разложения векторов триады по физическим полям и, в-третьих, процедурой усреднения по периодам дополнительных размерностей.

б) С точки зрения 7-мерной геометрической модели введение двух калибровочных групп в модели Вайнберга-Салама оказывается связанным с проектированием на направления двух векторов: а) группа $U(1)$ обусловлена проектированием на направление вектора λ_M, то есть размерности, от которой метрика не зависит, б) группа $SU(2)$ обусловлена проектированием на направление вектора σ_M, то есть размерности, от которой метрика зависит циклическим образом.

в) Строго говоря, в рассмотренной 7-мерной модели можно говорить еще об одной группе $U(1)$, связанной с проектированием на направление третьего вектора триады ξ_M. Эта дополнительная размерность описывает массы полей.

2. 7-Мерная геометрическая модель обладает рядом преимуществ по сравнению с исследовавшимися ранее **6-мерными геометрическими моделями** грави-электрослабых взаимодействий[2]:

а) В 6-мерных моделях использовались 8-компонентные комплексные спиноры, которые с точки зрения алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел присущи именно 7-мерному многообразию с выбранной здесь сигнатурой. Напомним аналогичную ситуацию, когда комплексный характер использовавшихся в общепринятой теории 4-компонентных спиноров рассматривался как один из доводов в пользу перехода от 4-мерной к 5-мерной теории.

б) В 6-мерной геометрической модели массы фермионов тождественно равны нулю. Для получения отличной от нуля массы необходимо использовать зависимость спинорных функций от еще координаты x^4, то есть следует перейти к 7-мерной модели.

в) В метрическом варианте 6-мерной геометрической теории для описания отклонения угла Вайнберга от 30 градусов приходилось использовать комплексные коэффициенты разложения векторов диады λ_α и σ_α по физическим полям, тогда как в 7-мерной модели можно ограничиться вещественными коэффициентами, используя третий вектор триады ξ_α.

г) Именно в 7-мерной геометрической модели оказывается задействованым весь комплекс обсуждавшихся ранее идей о сути

[2]В работах В.Г.Кречета [32] была предпринята попытка описать грави-электрослабые взаимодействия в рамках 5-мерной геометрической модели. Однако для этой цели пришлось использовать афинные геометрии с кручением и с вейлевской неметричностью.

дополнительных размерностей, как в рамках теории Калуцы, когда каждая новая размерность позволяет описать новое физическое взаимодействие, так и в рамках теории Клейна, когда одна размерность соответствует действию (интервалу).

3. **В рамках понятий и методов 5-й парадигмы** (сугубо геометрической теории), прежде всего, следует отметить две дополнительные особенности 7-мерной (6-мерной) модели:

а) появление циклической зависимости компонент метрики от дополнительных координат, причем такая зависимость не находится из решения многомерных уравнений типа уравнений Эйнштейна, а вводится волевым образом;

б) комплексный характер некоторых смешанных компонент 7-мерной метрики (компонент $G_{\alpha 6}$).

Эти особенности лежат вне правил построения традиционных геометрических теорий. Однако, напомним, при построении данной геометрической модели мы исходили из того, что, выходя в дополнительные размерности, нельзя навязывать природе понятия и методы, полученные и опробированные в изученной области четырех классических измерений. Необходимо нащупывать свойства мира в новых измерениях, исходя из найденных закономерностей физического микромира, для описания которого и предназначена эта теория.

Исходя из этого можно обосновать указанные особенности. Циклическая зависимость от дополнительных координат связана с впервые возникшей необходимостью через компоненты метрики описывать заряженные физические поля $W^{\pm}$-бозонов. Известно, что уже в 5-мерной теории Калуцы заряженные (негеометрические) поля циклическим образом зависят от дополнительной координаты.

Комплексный характер метрики проявляется лишь на многомерном уровне. После осуществления процедуры усреднения по периодам дополнительных координат скалярная кривизна, а следовательно и физический лагранжиан, становятся вещественными. Строго говоря, вариационные методы справедливы лишь в рамках классических четырех измерений.

Отметим, что введение угла Вайнберга через компоненты λ^5 и σ^6 согласно (10.6.11) равносильно использованию двух разных периодов компактификации по дополнительным координатам x^5 и x^6, поскольку введенный выше единый период компактификации α^{-1} входит в физически значимые формулы в комбинациях $\alpha\lambda^5$ и $\alpha\sigma^6$ (см, например, формулы (10.6.15) – (10.6.19)). Следовательно, 2 константы электрослабых взаимодействий g_1 и g_2 можно связать с периодами компактификации двух дополнительных координат.

Пользуясь лишь традиционными геометрическими представлениями вряд ли возможно ответить на законные вопросы о причинах компактификации дополнительных размерностей, о числе дополнительных размерностей, о характере зависимостей от дополнительных координат, о сигнатуре используемого многообразия и о других свойствах обсужденной выше 7-мерной геометрической модели.

4. **С позиций бинарной геометрофизики** можно ответить на ряд принципиально важных вопросов многомерных теорий. Назовем некоторые из них.

а) Число измерений, равное семи, как уже отмечалось, диктуется рангом (4,4) БСКО, положенной в основу простейшей модели физического пространства-времени и фундаментальных взаимодействий. Именно в 7-мерной геометрической модели используется весь комплекс размерностей, прообраз которых вводится в простейшей модели бинарной геометрофизике – на основе БСКО ранга (4,4).

б) Компактификация двух "зарядовых" размерностей обусловлена квазивырожденным характером параметров с индексом "3" элементов БСКО ранга(4,4). Симметричная комбинация пары параметров лептона соответствует импульсу p_5 компактифицированной координаты x^5, а антисимметричная комбинация – импульсу p_6 компактифицированной координаты x^6. Как уже отмечалось в главе 8, процедура компактификации имитирует факт отсутствия классических аналогов координат в теории, которую пытаются построить на основе постулата о существовании многомерного координатного пространства-времени.

Напомним, в бинарной геометрофизике исходными понятиями являются отношения. Из них строятся прообразы импульсных компонент и далее решается задача построения координатного пространства-времени. Как видно из бинарной геометрофизики, координаты возможно сопоставить только четырем компонентам импульсов p_α, соответствующим простейшей невырожденной БСКО ранга (3,3).

Компактификация дополнительной координаты x^4 связана с другими обстоятельствами.

в) Два типа полей, отвечающих в модели Вайнберга-Салама двум калибровочным группам $SU(2)$ и $U(1)$, тесно связаны с наличием двух комбинаций параметров с индексом 3: симметричной и антисимметричной.

Раздел V

Электрослабые взаимодействия в бинарной геометрофизике

После обсуждения в предыдущем разделе полевых (в частности, многомерных) моделей электрослабых взаимодействий, соответствующих нижней части блок-схемы рисунка 1.1, в этом разделе делается возврат к первоосновам физической картины мира. В трех главах этого раздела обсуждены электрослабые взаимодействия лептонов в рамках реляционной теории типа $R_\mu(\mu)$, то есть на основе самодостаточного круга первичных понятий микромира, описываемых БСКО рангов (4,4) и выше. Напомним, на блок-схеме рисунка 1.1 эта теория изображена в верхней части. Рассмотрены понятия и соотношения, имеющие место до осуществления процедур перехода к макроприбору и сопутствующих этому полевых понятий.

Использован индуктивный метод изложения – проанализированы возможности описания электрослабых взаимодействий частиц последовательно в рамках БСКО рангов (4,4) (глава 12), (5,5) (глава 13) и (6,6) (глава 14). Фактически применен тот же метод, что и при анализе возможностей многомерных геометрических моделей физических взаимодействий в предыдущих главах, когда последовательно обсуждались возможности 5-, 6- и 7-мерных моделей типа теории Калуцы-Клейна.

В начальной главе 12 обсуждена простейшая модель электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4), то есть продолжен анализ принципиальных сторон бинарной геометрофизики на базе БСКО минимального ранга (4,4), пригодного для этой цели. Показаны возможности и недостатки этой модели.

В главе 13 показано, что достаточно полное описание электрослабых взаимодействий одного поколения лептонов достигается в рамках БСКО ранга (5,5). Для описания электрослабых взаимодействий кварков (адронов) необходимо перейти к БСКО ранга (6,6). Этот вопрос кратко обсужден в заключительной главе 14 этого раздела.

Глава 12

Модель электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4)

В этой главе показано, как из базовых 4×4-отношений БСКО ранга (4,4) при учете не только симметричных, но и антисимметричных комбинаций дополнительных параметров можно получить основные понятия и закономерности модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама.

Значительная часть главы посвящена сопоставлению реляционной теории $R_m(\mu)$ (в рамках 9-й парадигмы) с калибровочной моделью Вайнберга-Салама (в рамках 1-й парадигмы), что диктует использование в качестве промежуточного звена дальнодействующей версии (из 3-й парадигмы) модели Вайнберга-Салама, специально построенной для этой цели в главе 9.

12.1 Характерные черты базовых 4×4-отношений

В разделах 2 и 3 антисимметричные комбинации из дополнительных параметров $c_L - c_R$ или $\tilde{c}_L - \tilde{c}_R$ фактически полагались равными нулю. Понятия классического пространства-времени, электромагнитные и гравитационные взаимодействия выводились именно на основе симметричных комбинаций. В связи с этим возникает ряд естественных вопросов: Какую роль в построении мира играют антисимметричные комбинации? Можно ли построить аналогичный прообраз мира, основанный на антисимметричных комбинациях дополнительных параметров? Если

нет, то почему? и так далее.

Постараемся ответить на эти другие подобные вопросы, опять опираясь на базовые 4×4-отношения БСКО ранга (4,4) и проанализировав пройденный в разделах 2 и 3 путь, но только теперь оставив лишь антисимметричные комбинации дополнительных параметров. В этом параграфе будем полагать

$$c_{1L}+c_{1R}=\tilde{c}_{1L}+\tilde{c}_{1R}=0;\quad c_{sL}+c_{sR}=\tilde{c}_{sL}+\tilde{c}_{sR}=0,\quad (12.1.1)$$

где $s=2,3,\cdots$ - номера всех других частиц мира, окружающих выделенную частицу (1).

1. **Базовые 4×4-отношения из комбинаций 4+4+0.** Напомним, что в самом общем случае после исключения из (3.1.4) "лишних слагаемых" получались выражениях (3.3.8), которые разбивались на 1) слагаемые (3.3.10), описывающие взаимодействия, и на 2) прообраз действия "свободной частицы " (3.3.9). Используя (12.1.1), отдельно рассмотрим эти части.

1) Алгебраический прообраз *действия взаимодействия* по-прежнему определяется четырьмя внутренними диагональными слагаемыми в (3.4.2) и в данном случае описывается произведением *псевдовекторов* соответствующих частиц

$$\tilde{S}_{int}(1;2,0)=\frac{1}{32}\exp(1)\exp(2)\times$$
$$\times[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})-(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})]\times[(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})-(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})]\times$$
$$[(\tilde{c}_{1L}-\tilde{c}_{1R})(c_{2L}-c_{2R})+(c_{1L}-c_{1R})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{2R})].\qquad (12.1.2)$$

Напомним, что разности векторных комбинаций из левых и правых компонент массивных лептонов представляются в виде

$$(\overline{e}_L\gamma_{\mu}e_L)-(\overline{e}_R\gamma_{\mu}e_R)=\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_{\mu}\Psi,\qquad (12.1.3)$$

где 4-компонентные столбец и строка определены в (3.2.1).

2) В данном случае по-прежнему обращаются в нуль вклады в прообраз свободного действия от крайних диагональных слагаемых в (3.1.4), но теперь становятся отличными от нуля два другие угловые слагаемые, которые можно представить в следующих видах:

$$\tilde{S}_m(1;2,0)=\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ js\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ js\end{pmatrix}=$$
$$=(\overline{e}_{1R}e_{1L})(\overline{e}_{2L}e_{2R})\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ js\end{pmatrix}+(\overline{e}_{1L}e_{1R})(\overline{e}_{2R}e_{2L})\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ ik\end{pmatrix}=$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\overline{\Psi}_1\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\Psi_2) - (\overline{\Psi}_1\gamma_5\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\gamma_5\Psi_2)\right]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L}-\tilde{c}_{1R})(c_{2L}-c_{2R}) + (c_{1L}-c_{1R})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{2R})]-$$
$$-\frac{i}{4}\left[(\overline{\Psi}_1\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\gamma_5\Psi_2) - (\overline{\Psi}_1\gamma_5\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\Psi_2)\right]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L}-\tilde{c}_{1R})(c_{2L}-c_{2R}) - (c_{1L}-c_{1R})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{2R})]. \qquad (12.1.4)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$\overline{\Psi}\gamma_5\Psi = 0. \qquad (12.1.5)$$

Тогда имеем

$$\tilde{S}_m(1;2,0) = -\frac{1}{4}[(\overline{e}_{1L}e_{1R}) + (\overline{e}_{1R}e_{1L})][(\overline{e}_{2L}e_{2R}) + (\overline{e}_{2R}e_{2L})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L}-\tilde{c}_{1R})(c_{2L}-c_{2R}) + (c_{1L}-c_{1R})(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{2R})]. \qquad (12.1.6)$$

Это выражение естественно понимать как вклад массовых слагаемых в прообраз действия.

2. **Принцип Маха**, как было показано в главе 4, состоит в учете базовых 4×4-отношений из комбинаций типа 4+3+1, 4+1+3, а также других и в суммировании их. Опять отдельно рассмотрим прообраз действия взаимодействия и прообраз действия "свободных частиц".

1) Из анализа 4×4-отношения вида 4+3+1 и других следует, что *третьи частицы не дают вкладов в прообраз действия взаимодействия*. Это чрезвычайно важное свойство теории с антисимметричными комбинациями дополнительных параметров.

2) Вклады в алгебраический прообраз *свободного действия* при сделанных в разделе 2 предположениях возникают только из базовых 4×4-отношений вида 4+(2)+(2). Они имеют вид

$$\tilde{S}_{free}^{[4+(2)+(2)]}(1;2,3) =$$
$$= \frac{1}{4}[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})]\times[(\overline{e}_{1L}\gamma_\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma_\mu e_{1R})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{2L}-\tilde{c}_{2R})(c_{3L}-c_{3R}) + (c_{2L}-c_{2R})(\tilde{c}_{3L}-\tilde{c}_{3R})]. \qquad (12.1.7)$$

Заметим, что это выражение можно переписать через квадрат псевдовектрных комбинаций, воспользовавшись следующим соотношением

$$[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})]\times[(\overline{e}_{1L}\gamma_\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma_\mu e_{1R})] =$$

$$= -[(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})] \times [(\overline{e}_{1L}\gamma_{\mu}e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma_{\mu}e_{1R})]. \quad (12.1.8)$$

Таким образом, в варианте теории с антисимметричными комбинациями дополнительных параметров возникают существенные отличия от варианта с симметричными комбинациями. Они состоят, во-первых, в отсутствии вкладов третьих частиц в прообраз действия взаимодействия и, во-вторых, в появлении своеобразных массовых вкладов (12.1.6), обусловленных двумя недиагональными угловыми слагаемыми. Первое из указанных отличий ограничивает проявление принципа Маха только вкладами в "свободную" часть действия.

12.2 Прагеометрия "слабого мира"

1. **Прообраз 6-мерной метрики.** Попробуем построить 6-мерную квадратичную форму таким же образом, как это делалось в §4.4 в варианте теории с симметричными комбинациями дополнительных параметров. Однако здесь возникает своеобразие в определении классических 4-мерных скоростей и соответствующих им 4-мерных смещений. Общепринятые скорости и смещения частиц имеют временно-подобный характер и определяются векторными выражениями, построенными из параметров с номерами 1 и 2 соответствующих частиц. Псевдовекторные комбинации строятся из тех же самых параметров, но имеют пространственно-подобный характер, не имеющий классического аналога.

Имеются два пути рассмотрения теории с антисимметричными комбинациями дополнительных параметров:

Первый (реалистический) путь не претендует на построение классического аналога геометрии (прагеометрии) на базе отдельно лишь антисимметричных комбинаций. В нем прообраз свободного действия записывается по-прежнему через квадратичную комбинацию 4-скоростей. Тот факт, что источниками являются псевдовекторы, на этом пути означает, что должны рассматриваться только микрочастицы. Полагается, что в таком варианте теории должны рассматриваться в совокупности антисимметричные и симметричные комбинации дополнительных параметров. На основе последних в теории вводятся понятия, соответствующие классическому пространству-времени и вместе с ними определяются волновые функции частиц согласно изложенному в главе 5. Это самый прямой путь к стандартной модели Вайнберга-Салама.

Второй (гипотетический) путь состоит в анализе возможностей модели, построенной на базе только антисимметричных комбинаций дополнительных параметров, аналогично тому, как

это делалось в главах 4 – 6 на основе лишь симметричных комбинаций. Этот путь диктует полную замену скоростей (импульсов) частиц на псевдоскорости (псевдоимпульсы). Соотношение (12.1.8) позволяет это сделать. В этом параграфе проанализируем этот путь, действуя по плану глав 3 и 4.

Введем новые эффективные 4-мерные квазиклассические величины – 4-мерные квазискорости $\tilde{u}^\mu$ согласно формуле, аналогичной (3.6.1),

$$-i\overline{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi = (\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) - (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R) = (\tilde{u}^\mu + \tilde{c}_1\tilde{\kappa}^\mu)e^{i(\varphi'-\varphi)}, \quad (12.2.1)$$

где $\tilde{c}_1$ - некоторая константа, $\tilde{\kappa}^\mu$ - квазискорость передачи от одной частицы другой.

На основе этого определения можно записать выражения для квадратичных комбинаций из псевдовекторов:

$$(\overline{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi)(\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi) = \tilde{u}^\mu\tilde{u}_\mu + 2\tilde{c}_1\tilde{u}_\mu\tilde{\kappa}^\mu + \tilde{c}_1^2\tilde{\kappa}^\mu\tilde{\kappa}_\mu; \quad (12.2.2)$$

$$(\overline{\Psi}_1\gamma_5\gamma^\mu\Psi_1)(\overline{\Psi}_2\gamma_5\gamma_\mu\Psi_2) = \tilde{u}^\mu_{(1)}\tilde{u}'_{(2)\mu} + \tilde{c}_1\tilde{\kappa}^\mu\tilde{u}'_{(2)\mu}. \quad (12.2.3)$$

Эти формулы аналогичны (3.6.2) и (3.6.3).

Заметим, что формулы (12.2.1) – (12.2.3) справедливы и при развитии теории по первому (реалистическому) пути. Только в этом случае $\tilde{u}_\mu$ означает 4-скорости частицы, а $\tilde{\kappa}_\mu$ – переданное другой частицей изменение 4-скорости в результате их слабого взаимодействия.

Определим 4-мерные квазисмещения $d\tilde{x}^\mu$ выделенной частицы согласно формуле

$$\tilde{u}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{ds}, \quad (12.2.4)$$

тогда как антисимметричные комбинации из дополнительных параметров, как и в (3.6.9), будем представлять как шестые компоненты многомерной скорости

$$c_L - c_R = \tilde{c}_L - \tilde{c}_R = \frac{dx^6}{ds} = u^6. \quad (12.2.5)$$

Собирая вместе все выписанные выше вклады из базовых 4×4-отношений и умножая их на ds_1^2, получаем 6-мерную квадратичную форму, аналогичную записанной в §4.5,

$$\tilde{a}(1,1')ds_1^2 \equiv d\tilde{I}^2 = \tilde{G}_{MN}d\tilde{x}^M d\tilde{x}^N. \quad (12.2.6)$$

Ее можно рассматривать как квадрат некой 6-мерной метрики, компоненты которой

$$\tilde{G}_{MN} = \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{G}_{\mu\nu} & \tilde{G}_{\mu 4} & \tilde{G}_{\mu 6} \\ \hline \tilde{G}_{4\nu} & \tilde{G}_{44} & \tilde{G}_{46} \\ \tilde{G}_{6\nu} & \tilde{G}_{64} & \tilde{G}_{66} \end{array} \right) \tag{12.2.7}$$

после первого этапа процедур имеют вид

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} f_1(u^6); \tag{12.2.8}$$

$$\tilde{G}_{\mu 4} = \tilde{c}_1 \tilde{\kappa}_\mu f_1(u^6); \tag{12.2.9}$$

$$\tilde{G}_{\mu 6} = \exp(1)\exp(2)\tilde{u}'_{(2)\mu} f_2(u^6); \tag{12.2.10}$$

$$\tilde{G}_{44} = \tilde{c}_1^2 \tilde{\kappa}_\beta \tilde{\kappa}^\beta f_1(u^6); \tag{12.2.11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{46} &= \tilde{c}_1 \exp(1)\tilde{\kappa}^\beta \exp(2)\tilde{u}'_{(2)\beta} f_2(u^6) + \\ &+ 8\tilde{c}_2^2 f_2(u^6); \end{aligned} \tag{12.2.12}$$

$$\tilde{G}_{66} = 0, \tag{12.2.13}$$

где $f_1(u^6)$ и $f_2(u^6)$ – некоторые две функции от u^6 второй и третьих частиц; кроме того положено, что инварианты частиц вида $i^1k^2 - i^2k^1$ нормированы на константу $\tilde{c}_2$. Опять, как и в варианте с симметричными комбинациями, последняя диагональная компонента $(\tilde{G}_{66})$ обращается в нуль.

2. **Процедура 1+1+4-расщепления прообраза 6-мерной метрики** осуществляется согласно формулам, приведенным в §4.6 и §4.7, только теперь в них следует заменить индексы “5” на индексы “6”, а метрику представить в виде

$$\check{G}_{MN} = \check{g}_{MN} - \xi_M \xi_N - \sigma_M \sigma_N, \tag{12.2.14}$$

где σ_M - второй вектор диады (вместо вектора λ_M в предыдущих главах). Опять с учетом (12.2.13) для компонент элементарной метрики и векторов диады имеем

$$\begin{aligned} \check{g}_{\mu\nu} &= \check{G}_{\mu\nu} - 2\frac{\check{G}_{4\mu}\check{G}_{4\nu}}{\check{G}_{44}} - \frac{\check{G}_{44}}{\check{G}_{46}^2}\check{G}_{6\mu}\check{G}_{6\nu} + \\ &+ \frac{1}{\check{G}_{46}}(\check{G}_{4\mu}\check{G}_{6\nu} + \check{G}_{6\mu}\check{G}_{4\nu}); \end{aligned} \tag{12.2.15}$$

$$\xi_\mu = \frac{\check{G}_{4\mu}}{\sqrt{-\check{G}_{44}}}; \tag{12.2.16}$$

$$\sigma_\mu = \frac{\check{G}_{4\mu}}{\sqrt{-\check{G}_{44}}} + \sqrt{-\check{G}_{44}}\frac{\check{G}_{6\mu}}{\check{G}_{46}}. \qquad (12.2.17)$$

Здесь использовано предположение, что имеет место сигнатура $(+ - -- \mid --)$, в частности положено, что $\check{G}_{44} < 0$. Подставляя в эти выражения компоненты 6-мерной метрики из (12.2.8) – (12.2.13), приходим к выводу, что вектор диады

$$\xi_\mu = \tilde{\kappa}_\mu \sqrt{\frac{f_1(u^6)}{\tilde{\kappa}_\beta \tilde{\kappa}^\beta}} \qquad (12.2.18)$$

не несет в себе пространственной зависимости (не содержит экспоненциальных слагаемых), а, следовательно, *не дает вклада в координатную зависимость 4-мерного метрического тензора.* Напомним, что в случае "электромагнитного" мира (см. (6.1.2)) основной вклад в координатно зависимую часть метрики был обусловлен именно таким вектором диады (и аналогичной составляющей второго вектора диады λ_μ).

Произведя конфомное преобразование (в качестве конформного фактора выбираем коэффициент в $f_1(u^6)$), приходим к 4-мерной метрике вида

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{8\tilde{\kappa}_\mu \tilde{\kappa}_\nu}{\tilde{\kappa}_\beta \tilde{\kappa}^\beta} - \frac{\tilde{\kappa}_\alpha \tilde{\kappa}^\alpha \exp^2(1)\exp^2(2)\tilde{u}'_{(2)\mu}\tilde{u}'_{(2)\nu}}{[8\frac{\tilde{c}_2^2}{\tilde{c}_1} + \exp(1)\exp(2)\tilde{\kappa}^\beta \tilde{u}'_{(2)\beta}]^2} +$$

$$+ \frac{\exp(1)\exp(2)(\tilde{\kappa}_\mu \tilde{u}'_{(2)\nu} + \tilde{\kappa}_\nu \tilde{u}'_{(2)\mu})}{8\frac{\tilde{c}_2^2}{\tilde{c}_1} + \exp(1)\exp(2)\tilde{\kappa}^\beta \tilde{u}'_{(2)\beta}}. \qquad (12.2.19)$$

Наконец, для второго вектора диады имеем выражение

$$\sigma_\mu = \tilde{\kappa}_\mu \sqrt{\frac{f_1(u^6)}{\tilde{\kappa}_\beta \tilde{\kappa}^\beta}} + \frac{\sqrt{f_1(u^6)\tilde{\kappa}_\alpha \tilde{\kappa}^\alpha}\exp(1)\exp(2)\tilde{u}'_{(2)\mu}}{8(\tilde{c}_2^2/\tilde{c}_1) + \exp(1)\exp(2)\tilde{\kappa}^\beta \tilde{u}'_{(2)\beta}}. \qquad (12.2.20)$$

3. **Усреднение по макрообъектам** (третий этап из названных в §4.5), в данном случае проблематичен. Для его проведения нужно опираться на лежащее за пределами данной модели (в рамках БСКО ранга (4,4)) свойство частиц образовывать макрообъект. В случае электромагнетизма у нас были такие основания. В данном случае их нет. Вряд ли возможно указать макрообъект, построенный на основе слабых взаимодействий.

4. **Суммирование по элементарным базисам, составляющим макроприбор**, (четвертый этап) на любом пути, как реалистическом, так и гипотетическом, должен приводить к появлению интегрирования по $d^4\tilde{\kappa}$.

5. Изложенные выше свойства гипотетической прагеометрии позволяют сделать **следующие выводы**:

1) От гипотетической модели, основанной только на антисимметричных комбинациях дополнительных параметров невозможно перейти к аналогу классической геометрии. Из выражения (12.2.19) не получается координатно зависимой метрики, которая могла бы быть аналогом метрики общей теории относительности. Из векторов (12.2.18) и (12.2.20) описанными в предыдущих разделах методами не получается координатно зависимых величин. Переход к классическму геометрическому пределу возможен лишь на основе симметричных комбинаций дополнительных параметров.

2) Следует отметить, что в рамках сформулированного в §6.1 критерия можно построить прообраз нового вектора, имеющего физическую интерпретацию

$$\check{Z}_\mu = \frac{\check{G}_{6\mu}}{\check{G}_{44}}. \tag{12.2.21}$$

3) Идя по реалистическому пути построения теории (при совместном учете симметричных и антисимметричных комбинаций из дополнительных параметров), следует более внимательно отнестись к совокупности суммируемых базовых 4×4-отношений. Очевидно, эта совокупность окажется значительно шире рассмотренной в §12.1. В частности, следует полагать, что их учет приведет к появлению дополнительного слагаемого в компоненту эффективной метрики $\check{G}_{44}$. Тогда от вектора (12.2.21) с помощью описанных выше процедур усреднений по элементарным базисам и других можно прийти к пропагатору вида

$$\int \frac{\exp[\tilde{k}_\alpha(x_2^\alpha - x_1^\alpha)]}{\tilde{k}_\beta \tilde{k}^\beta + \tilde{m}^2 c^2} d\tilde{k}^4 \to D^c_{\tilde{m}}(x_2 - x_1), \tag{12.2.22}$$

где $\tilde{m}^2$ - некая добавка к эффективной компоненте метрики $\check{G}_{44}$, имеющая физический смысл квадрата массы “промежуточного бозона”. Этот пропагатор соответствует промежуточному векторному бозону (Z-бозону) в модели Вайнберга-Салама.

12.3 Электрослабые взаимодействия массивных лептонов в бинарной геометрофизике

1. Вернемся к обсуждению прообраза действия взаимодействия, получаемого из базового 4×4-отношения вида 4+4+0. Из §12.1 и §12.2 следует, что таких отношений достаточно для описания слабых взаимодействий. В самом общем виде прообраз действия взаимодействия $\tilde{S}_{int}(e_1, e_2)$ с учетом как симметричных, так и антисимметричных комбинаций из дополнительных параметров записан в (3.4.2). Производя в нем симметризации и антисимметризации аналогично тому, как это делалось в §3.4, приходим к выражению (3.4.4) с упрощенными коэффициентами

$$\tilde{S}_{int}(e_1, e_2) =$$

$$= \frac{1}{8}\{[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \cdot [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R}) + (c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})]+$$
$$+[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \cdot [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} - c_{2R}) + (c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R})]-$$
$$-[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) - (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \cdot [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L} - \tilde{c}_{1R})(c_{2L} + c_{2R}) + (c_{1L} - c_{1R})(\tilde{c}_{2L} + \tilde{c}_{2R})]-$$
$$-[(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})] \cdot [(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) - (\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})]\times$$
$$\times[(\tilde{c}_{1L} + \tilde{c}_{1R})(c_{2L} - c_{2R}) + (c_{1L} + c_{1R})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{2R})]\}. \qquad (12.3.1)$$

Еще раз подчеркнем, что во всех выражениях с псевдовекторным слагаемым обязательно присутствует множитель вида $(c_L - c_R)$ или $(\tilde{c}_L - \tilde{c}_R)$. Таким образом, при замене левых компонент на правые одновременно и в псевдовекторных выражениях, и в комбинациях из дополнительных параметров все слагаемые остаются инвариантными относительно этой процедуры. Это соответствует тому факту в стандартной модели Вайнберга-Салама, что Z-бозоны описываются векторными, а не псевдовекторными полями.

2. Из вышеизложенного материала ясно появление векторных и псевдовекторных выражений для взаимодействующих частиц, а также возникновение пропагаторов. В этом и следующих параграфах сосредоточим внимание на значениях дополнительных

параметров частиц. Для упрощения записи выражений введем следующие обозначения:

$$(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L) \leftrightarrow e_L; \quad (\overline{e}_R\gamma^\mu e_R) \leftrightarrow e_R. \tag{12.3.2}$$

В дальнейшем будем писать комбинации: (e_{1L}, e_{2L}), (e_{1R}, e_{2R}), (e_{1L}, e_{2R}), (e_{1R}, e_{2L}), где всегда на первом месте стоит выражение для первой частицы, а на втором – второй. В этих обозначениях перепишем (3.4.2) в более компактном виде

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{int}(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}(e_{1L}, e_{2L})(c_{1R} - c_{2R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1R}) + \\
&+ \frac{1}{2}(e_{1R}, e_{2R})(c_{1L} - c_{2L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1L}) + \\
&+ \frac{1}{2}(e_{1L}, e_{2R})(c_{1R} - c_{2L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1R}) + \\
&+ \frac{1}{2}(e_{1R}, e_{2L})(c_{1L} - c_{2R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1L}).
\end{aligned} \tag{12.3.3}$$

Выпишем отдельно коэффициенты при слагаемых, описывающих взаимодействия между соответствующими компонентами двух массивных лептонов:

$$(e_{1L}, e_{2L}) \Rightarrow (c_{1R} - c_{2R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1R}); \tag{12.3.4}$$
$$(e_{1R}, e_{2R}) \Rightarrow (c_{1L} - c_{2L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1L}); \tag{12.3.5}$$
$$(e_{1L}, e_{2R}) \Rightarrow (c_{1R} - c_{2L})(\tilde{c}_{2L} - \tilde{c}_{1R}); \tag{12.3.6}$$
$$(e_{1R}, e_{2L}) \Rightarrow (c_{1L} - c_{2R})(\tilde{c}_{2R} - \tilde{c}_{1L}). \tag{12.3.7}$$

3. Как уже отмечалось, возможны два варианта взаимодействия двух массивных лептонов. Один соответствует симметричному (равноправному) взаимодействию левых и правых компонент массивных лептонов, а второй – асимметричному взаимодействию. Еще раз обсудим эти два варианта, исходя из допущения, что массивные лептоны могут находиться в низших ("невозбужденных") состояниях и в возбужденных состояний, соответствующих двум названным вариантам взаимодействия. Взаимодействие будем понимать как передачу возбужденного состояния от одной частицы к другой.

4. Начнем с обсуждения **симметричного варианта**. Пусть первая частица находилась в невозбужденном состоянии. Обозначим дополнительные параметры этой частицы символом u'. Тогда имеем

$$c_{1L} = c_{1R} = u'. \tag{12.3.8}$$

Пусть в результате взаимодействия эта частица перешла в возбужденное состояние, характеризуемое значениями дополнительных параметров z, тогда

$$\tilde{c}_{1L} = \tilde{c}_{1R} = z. \tag{12.3.9}$$

Пусть вторая частица, наоборот, в результате взаимодействия перешла из возбужденного в невозбужденное состояние, т.е. для нее

$$c_{2L} = c_{2R} = z; \quad \tilde{c}_{2L} = \tilde{c}_{2R} = u'. \tag{12.3.10}$$

Подставляя эти значения параметров в (12.3.4) – (12.3.7), приходим к одному соотношению

$$(z - u')^2 \equiv A^2 \to z = u' \pm A, \tag{12.3.11}$$

где A - некоторая константа, характеризующая симметричный (электромагнитный) вариант взаимодействия массивных лептонов.

Заметим, что при одинаковых значениях всех коэффициентов в (12.3.4) – (12.3.7) и одинаковых значениях u для возбужденных состояний левых и правых компонент с необходимостью следует одинаковость значений u' для левых и правых компонент частиц в невозбужденных состояниях. Напомним, что ранее приводились доводы в пользу того, чтобы положить $u' = 0$. Это соответствует тому, что в результате электромагнитного взаимодействия происходит переход от БСКО ранга (3,3) к БСКО ранга (4,4).

5. **Асимметричный вариант** взаимодействия будем характеризовать одинаковыми[1] значениями u дополнительных параметров в невозбужденных состояниях частиц и различными значениями параметров левых (x_3) и правых (x_2) компонент в возбужденных состояниях. Пусть первая частица опять будет в невозбужденном состоянии и переходит в возбужденное, т.е.

$$c_{1R} = c_{1L} = u; \quad \tilde{c}_{1L} = x_3; \quad \tilde{c}_{1R} = x_2, \tag{12.3.12}$$

а правая частица пусть переходит из начального возбужденного в конечное невозбужденное состояние:

$$c_{2R} = x_2; \quad c_{2L} = x_3; \quad \tilde{c}_{2R} = \tilde{c}_{2L} = u. \tag{12.3.13}$$

[1]Отметим, что в общем случае значения u и u' могут не совпадать. В этой главе это не существенно, однако в следующей главе будет показано, что $u \neq u'$. Более того, окажется, что для левых и для правых компонент эти значения различны.

Подставляя эти значения в (12.3.4) – (12.3.7), приходим к соотношениям:

$$(e_{1L}, e_{2L}) \;\Rightarrow\; (x_2 - u)^2 \equiv a_{22}^2; \tag{12.3.14}$$
$$(e_{1R}, e_{2R}) \;\Rightarrow\; (x_3 - u)^2 \equiv a_{33}^2; \tag{12.3.15}$$
$$(e_{1L}, e_{2R}) \;\Rightarrow\; (x_2 - u)(x_3 - u) = a_{23}^2 = a_{22}a_{33}; \tag{12.3.16}$$
$$(e_{1R}, e_{2L}) \;\Rightarrow\; (x_2 - u)(x_3 - u) = a_{23}^2 = a_{22}a_{33}, \tag{12.3.17}$$

где a_{22} и a_{33} – некоторые новые константы, в общем случае не равные друг другу и характеризующие слабые взаимодействия левых и правых компонент массивного лептона. Обратим внимание на то, что для смешанных произведений токов коэффициенты выражаются через константы при произведениях однородных токов. Из (12.3.14) и (12.3.15) находим

$$x_2 = u \pm a_{22}; \qquad x_3 = u \pm a_{33}. \tag{12.3.18}$$

Из выражений (12.3.11), (12.3.18) и последующих видно, что значения параметров возбужденных состояний везде определяются в комбинациях с параметрами невозбужденных состояний вида $z - u'$, $x_2 - u$, $x_3 - u$, т.е. отдельно значения u и u' оказываются несущественными.

6. Чтобы сопоставить полученные здесь выражения с соответствующими формулами из **модели Вайнберга-Салама** (в дальнодействующей версии) перепишем выражение (9.4.5) в более компактном виде, учитывая обозначения (12.3.2),

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{int}(e_1, e_2) = \\
= \;& (e_{1L}, e_{2L})\left[-\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} D_A + \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{4(g_1^2 + g_2^2)} D_Z\right] + \\
+ \;& (e_{1R}, e_{2R})\left[-\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} D_A + \frac{g_1^4}{g_1^2 + g_2^2} D_Z\right] + \\
+ \;& (e_{1L}, e_{2R})\left[-\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} D_A + \frac{g_1^2(g_1^2 - g_2^2)}{2(g_1^2 + g_2^2)} D_Z\right] + \\
+ \;& (e_{1R}, e_{2L})\left[-\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} D_A + \frac{g_1^2(g_1^2 - g_2^2)}{2(g_1^2 + g_2^2)} D_Z\right].
\end{aligned} \tag{12.3.19}$$

Обратим внимание на то, что во всех четырех составных частях справа имеются слагаемые (в квадратных скобках), содержащие, во-первых, одинаковый член, пропорциональный D_A, и,

во-вторых, несколько отличающиеся друг от друга члены, пропорциональные D_Z.

Если учесть, что согласно экспериментальным данным $g_2^2 \sim 3g_1^2$, то находим, что все коэффициенты при D_Z по модулю близки друг к другу и имеют порядок $g_1^2/4$.

7. Сопоставим друг с другом, с одной стороны, выражение (12.3.3), полученное из базового 4×4-отношения бинарной геометрофизики, и, с другой стороны, (12.3.19) из дальнодействующей версии модели Вайнберга-Салама. При этом будем учитывать наличие в бинарной геометрофизике двух типов пропагаторов, соответствующих $D_A(1,2)$, $D_Z(1,2)$, и обусловленных взаимодействиями через симметричные и антисимметричные комбинации из дополнительных параметров.

Начнем с сопоставления вкладов **электромагнитного взаимодействия** в бинарной геометрофизике (см. (12.3.4) – (12.3.7)) с выражениями в квадратных скобках (12.3.19), пропорциональными D_A. Это означает

$$(z-u')^2 \sim \frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}, \tag{12.3.20}$$

т.е. следует положить

$$z-u' = \pm A = \pm\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}. \tag{12.3.21}$$

8. Для случая **слабого взаимодействия** (через "Z-бозон"), опять сопоставляя (12.3.14) – (12.3.17) с соответствующими слагаемыми из (12.3.19), приходим к отождествлению

$$x_2-u = \pm a_{22} = \pm\frac{g_1^2-g_2^2}{2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}; \qquad x_3-u = \pm a_{33} = \pm\frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}. \tag{12.3.22}$$

Очевидно, что при экспериментально установленных значениях констант g_1 и g_2 введенные выше константы a_{22} и a_{33} близки по модулям и отличаются знаками.

Из соотношений (12.3.22) можно найти значения констант g_1 и g_2 модели Вайнберга-Салама через константы a_{22} и a_{33}, введенные в бинарной геометрофизике:

$$g_1^2 = 2a_{33}(a_{33}-a_{22}); \quad g_2^2 = -2(a_{33}-a_{22})(2a_{22}-a_{33}). \tag{12.3.23}$$

12.4 Электрослабые взаимодействия нейтрино (через "Z-бозон")

1. Прежде всего, следует доопределить понятие нейтрино. Анализ возможных вариантов взаимодействия нейтрино с массивными лептонами и их сравнения с известной моделью Вайнберга-Салама заставляют положить, что в рассматриваемой модели *нейтрино, так же как и массивный лептон, обладает двумя компонентами: левой и правой*, – однако левая компонента описывается двумя невырожденными параметрами (с номерами 1 и 2) при неопределенном третьем, а правая компонента описывается элементом, у которого два невырожденных параметра равны нулю, а третий – имеет отличное от нуля значение. Обозначим его значение в невозбужденном состоянии через u_1, а значение в возбужденном состоянии x_1 найдем из сопоставления со стандартной моделью Вайнберга-Салама.

Заметим, что такое определение нейтрино является инвариантным относительно выделенной группы $SL(2,C)$ (лоренц-инвариантным). Действительно, при этих линейных преобразованиях изначально нулевые значения невырожденных параметров правой компоненты останутся нулевыми.

2. Рассмотрим взаимодействие нейтрино с массивным лептоном. Для этого опять воспользуемся базовым 4×4-отношением (3.1.4). Пусть массивный лептон характеризуется элементами i, k, α, β, а нейтрино – элементами j,γ (левая компонента) и s,δ (правая компонента). Как и ранее, взаимодействие описывается четырьмя внутренними диагональными слагаемыми в (3.1.4). Однако, из-за равенства нулю невырожденных параметров правой компоненты нейтрино два из этих слагаемых обращаются в нуль. Остаются только два слагаемых:

$$\tilde{S}_Z(e,\nu) = \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta\delta\\ ks\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\delta\\ is\end{pmatrix}. \tag{12.4.1}$$

3. Перейдем к общепринятым обозначениям для нейтрино. Согласно данному выше определению нейтрино в 4-мерных обозначениях его следует считать левым, т.е. при записи его в виде 4-столбца отличные от нуля невырожденные параметры следует писать сверху. Аналогично (3.2.16) определим для нейтрино компоненты изотропного 4-мерного вектора:

$$(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L) = \left\{\begin{array}{l}\overline{\nu}_L\gamma_0\nu_L = j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2;\\ \overline{\nu}_L\gamma_1\nu_L = j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1;\\ \overline{\nu}_L\gamma_2\nu_L = i(j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1);\\ \overline{\nu}_L\gamma_3\nu_L = j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2.\end{array}\right\} \tag{12.4.2}$$

Здесь справа γ^s означают не компоненты дираковской γ-матрицы, а параметры нейтрино. С учетом этих соотношений вектор-векторные комбинации в (12.3.19) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L); \\ \begin{bmatrix} \beta\gamma \\ kj \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L). \end{aligned} \tag{12.4.3}$$

Во введенных обозначениях (12.4.1) принимает вид

$$\begin{gathered} \tilde{S}_Z(e,\nu) = \\ = \frac{1}{2}(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)(c_R - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_R) + \\ + \frac{1}{2}(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)(c_L - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_L), \end{gathered} \tag{12.4.4}$$

где символы c_L и c_R обозначают параметры массивного лептона, а $c_{\nu R}$ – параметр нейтрино.

4. Сосредоточим внимание на слагаемых из дополнительных параметров. Для них запишем выражения, аналогичные (12.3.4):

$$(e_L, \nu_L) \quad \Rightarrow \quad (c_R - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_R) \equiv a_{12}^2; \tag{12.4.5}$$

$$(e_R, \nu_L) \quad \Rightarrow \quad (c_L - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_L) \equiv a_{13}^2, \tag{12.4.6}$$

где a_{12} и a_{13} - некоторые новые константы.

Пусть массивный лептон находился в невозбужденном состоянии и в результате взаимодействия с нейтрино перешел в возбужденное состояние, описанное в предыдущих разделах, т.е. для него имеем

$$c_L = c_R = u = 0; \quad \tilde{c}_L = x_3; \quad \tilde{c}_R = x_2. \tag{12.4.7}$$

Пусть нейтрино находилось в невозбужденном состоянии и в результате взаимодействия перешло в возбужденное состояние, т.е. для нейтрино имеем

$$c_{\nu R} = u_1; \quad \tilde{c}_{\nu R} = x_1. \tag{12.4.8}$$

Подставляя эти значения в (12.4.4), находим, что соотношения (12.4.5) – (12.4.6) принимают вид

$$(e_L, \nu_L) \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_1)(u_1 - u) = a_{12}^2; \tag{12.4.9}$$

$$(e_R, \nu_L) \quad \Rightarrow \quad (x_3 - x_1)(u_1 - u) = a_{13}^2. \tag{12.4.10}$$

Рассматривая эти соотношения как уравнения для u_1 и x_1 и используя ранее найденные выражения (12.3.22), находим решения:

$$x_1 - u = \pm\frac{a_{12}^2 a_{33} - a_{13}^2 a_{22}}{a_{12}^2 - a_{13}^2}; \quad u_1 - u = \pm\frac{a_{12}^2 - a_{13}^2}{a_{22} - a_{33}}, \qquad (12.4.11)$$

где знаки $\pm$ соответствуют знакам в §12.3.

5. Найдем введенные константы из сопоставления (12.4.4) с соответствующими слагаемыми, содержащими нейтрино, из стандартной модели Вайнберга-Салама в (9.4.6). Легко видеть, что имеют место соотношения:

$$a_{12}^2 = \frac{g_1^2 - g_2^2}{4}; \quad a_{13}^2 = \frac{g_1^2}{2}. \qquad (12.4.12)$$

Используя эти выражения и (12.4.11), находим

$$u_1 - u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}; \quad x_1 = u. \qquad (12.4.13)$$

Таким образом, приходим к выводу, что значение дополнительного параметра нейтрино в возбужденном состоянии совпадает со значением дополнительных параметров массивного лептона в невозбужденном состоянии.

6. Исходя из найденных параметров нейтрино из их взаимодействий (через "Z-бозон" в терминологии стандартной теории) с массивными лептонами, обсудим **слабое взаимодействие двух нейтрино**. Опять воспользуемся базовым 4×4-отношением, в котором теперь останется только одно диагональное слагаемое, описывающее взаимодействия

$$\tilde{S}_Z(\nu_1, \nu_2) = \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta\delta \\ ks \end{pmatrix}, \qquad (12.4.14)$$

где элементы i, k, α, β описывают первое нейтрино, а элементы j, s, γ, δ – второе нейтрино. Вводя прежние обозначения, эту формулу можно переписать в виде

$$\tilde{S}_Z(\nu_1, \nu_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{\nu}_{1L}\gamma^\mu\nu_{1L})(\overline{\nu}_{2L}\gamma_\mu\nu_{2L})(c_{\nu 1R} - c_{\nu 1R})(\tilde{c}_{\nu 2R} - \tilde{c}_{\nu 2R}). \qquad (12.4.15)$$

Обозначения очевидны. Выделим из этого выражения вклады дополнительных параметров

$$(\nu_{1L}, \nu_{2L}) \Rightarrow (c_{\nu 1R} - c_{\nu 2R})(\tilde{c}_{\nu 2R} - \tilde{c}_{\nu 1R}) \equiv a_{11}^2, \qquad (12.4.16)$$

где a_{11} – некоторая константа.

7. Рассмотрим два случая:

а) Пусть оба нейтрино находились в невозбужденных начальных состояниях, т.е.

$$c_{\nu 1R} = c_{\nu 2R} = u_1. \tag{12.4.17}$$

Очевидно, что в этом случае нужно положить $a_{11}^2 = 0$, т.е. невозбужденные нейтрино не взаимодействуют друг с другом.

б) Пусть первое нейтрино находилось в невозбужденном состоянии, т.е.

$$c_{\nu 1R} = u_1; \quad \tilde{c}_{\nu 1R} = x_1, \tag{12.4.18}$$

а второе нейтрино пусть находилось в возбужденном состоянии (из-за взаимодействия с массивным лептоном), т.е.

$$c_{\nu 2R} = x_1; \quad \tilde{c}_{\nu 2R} = u_1. \tag{12.4.19}$$

Подставляя эти выражения в (12.4.16), приходим к отличному от нуля результату

$$(c_{\nu 1R} - c_{\nu 2R})(\tilde{c}_{\nu 2R} - \tilde{c}_{\nu 1R}) = (x_1 - u_1)^2 = a_{11}^2. \tag{12.4.20}$$

Подставляя в эту формулу ранее найденные значения для u_1 и x_1, приходим к выражению

$$(x_1 - u_1)^2 = (u_1 - u)^2 = a_{11}^2 = \frac{(a_{12}^2 - a_{13}^2)^2}{(a_{22} - a_{33})^2} = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4}, \tag{12.4.21}$$

совпадающему с соответствующим коэффициентом в (9.4.8) для взаимодействия двух нейтрино в стандартной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама (в дальнодействующей версии).

12.5 Прообраз взаимодействия нейтрино через W-бозоны

1. Изложенное в трех предыдущих параграфах соответствует слабому взаимодействию лептонов в модели Вайнберга-Салама через Z-бозоны. Как уже отмечалось в главе 9, имеется другой канал взаимодействия нейтрино и массивных лептонов через заряженные промежуточные векторные W-бозоны, поясненный на рисунке 9.2. Он описывается посредством смешанных векторных комбинаций вида

$$(\overline{e}_L \gamma^\mu \nu)(\overline{\nu} \gamma_\mu e_L).$$

Оказывается, такие комбинации можно свести к уже известным. Чтобы показать это, учтем, что ранее использованные вектор-векторные слагаемые можно записать в иных видах:

$$(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)(\overline{\nu}\gamma_\mu\nu) = 2\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} i^1 & j^1\\ i^2 & j^2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\alpha^1 & \gamma^1\\ \alpha^2 & \gamma^2\end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} i^1 & j^1\\ i^2 & j^2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\gamma^1 & \alpha^1\\ \gamma^2 & \alpha^2\end{vmatrix} = -2\begin{bmatrix}\gamma\alpha\\ ij\end{bmatrix} = -(\overline{e}_L\gamma^\mu\nu)(\overline{\nu}\gamma_\mu e_L). \tag{12.5.1}$$

Подобные равенства в теории слабых взаимодействий известны как соотношения Фирца [00], обычно записываемые в виде

$$(\overline{u}_a O^\mu u_b)(\overline{u}_c O_\mu u_d) = -(\overline{u}_a O^\mu u_d)(\overline{u}_c O_\mu u_b),$$

где u_a, u_b, u_c, u_d – четыре 4-компонентные величины, а операторы $O_\mu = \gamma_\mu(1 \pm i\gamma_5)$.

Таким образом, описание известных взаимодействий через W-бозоны сводится в бинарной геометрофизике к появлению дополнительных слагаемых известного ранее вида с некоторыми новыми коэффициентами.

2. Исходя из изложенного, следует допустить существование в бинарной геометрофизике иного канала взаимодействия нейтрино с массивными лептонами. В самом общем виде он должен представляться в прежнем виде (12.4.5) – (12.4.6), но с измененными конечными значениями дополнительных параметров и с иными значениями констант справа:

$$(e_L, \nu_L) \quad\Rightarrow\quad (c_R - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_R) \equiv W^2; \tag{12.5.2}$$

$$(e_R, \nu_L) \quad\Rightarrow\quad (c_L - c_{\nu R})(\tilde{c}_{\nu R} - \tilde{c}_L) \equiv W'^2. \tag{12.5.3}$$

Положим, что массивный лептон и нейтрино находились в начальных невозбужденных состояниях, т.е.

$$c_R = c_L = u = 0; \qquad c_{\nu R} = u_1, \tag{12.5.4}$$

и после взаимодействия они перешли в некоторые возбужденные состояния, характеризуемые следующими (пока неизвестными) значениями дополнительных параметров:

$$\tilde{c}_R = x_2'; \quad \tilde{c}_L = x_3'; \quad \tilde{c}_{\nu R} = x_1'. \tag{12.5.5}$$

3. Для установления новых параметров воспользуемся подсказкой из известной модели Вайнберга-Салама: в этом канале

левое нейтрино не взаимодействует с правой компонентой массивного лептона, т.е. в соотношении (12.5.3) следует положить

$$W' = 0. \tag{12.5.6}$$

Исходя из (12.5.4) и (12.5.5), отсюда получаем условия на неизвестные параметры

$$(u_1 - u)(x_3' - x_1') = W'^2 = 0. \tag{12.5.7}$$

Следовательно, имеем

$$x_3' = x_1'. \tag{12.5.8}$$

Необходимо дополнительное предположение; например, в данной модели можно положить, что дополнительный параметр левой компоненты в результате взаимодействия принимает то же самое значение, что и в предыдущем пункте, т.е. что

$$x_3' = x_3 = \pm a_{33} + u \to x_1' = x_3 = \pm a_{33} + u. \tag{12.5.9}$$

4. Оставшееся соотношение (12.5.2) во введенных обозначениях принимает вид

$$(u_1 - u)(x_2' - x_3) = W^2. \tag{12.5.10}$$

В этом выражении две неизвестные константы: x_2' и W. Необходимо еще одно дополнительное условие. Оно находится из алгебраической симметрии, изложенной в следующем параграфе.

12.6 Алгебраическая симметрия электрослабых взаимодействий

1. Проанализируем вскрытые выше закономерности модели электрослабых взаимодействий на базе БСКО ранга (4,4) и сопоставим их со свойствами модели Вайнберга-Салама. Как было показано, в обеих моделях возникают одинаковые комбинации из вектор-векторных, псевдовектор-векторных и иных выражений, составленных из характеристик двух взаимодействующих частиц. При их сравнении ключевую роль играют коэффициенты при соответствующих выражениях, главным образом, число независимых констант, определяющих эти коэффициенты.

В *бинарной геометрофизике* было введено 8 констант:

$$a_{11}^2, \quad a_{12}^2, \quad a_{13}^2, \quad a_{22}^2, \quad a_{33}^2, \quad A^2, \quad W^2, \quad W'^2. \tag{12.6.1}$$

Им соответствовало 8 других констант, определяющих невозбужденные и возбужденные состояния рассматриваемых частиц:

$$z, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad u_1, \quad x_1', \quad x_2', \quad x_3'. \tag{12.6.2}$$

(Значение $u' = 0$ не является дополнительной константой, а значение u оказывается несущественным.) Была установлена связь между этими двумя наборами величин.

В *модели Вайнберга-Салама* имеются две независимые константы g_1 и g_2 и набор постулированных значений гиперзарядов и изотопических спинов рассматриваемых частиц.

В §12.3 – §12.5 из сравнения формул в двух моделях константы бинарной геометрофизики были выражены через константы g_1 и g_2. Основной результат фактически состоял в том, что это возможно сделать непротиворечивым образом и было показано, как это конкретно делается.

В модели Вайнберга-Салама причиной того, что все константы оказались выраженными только через две независимые, явилось условие $SU(2) \times U(1)$-симметрии теории. Поскольку бинарной геометрофизикой предлагается описывать те же самые закономерности, то в ней *должны быть некие аналогичные симметрии, формулируемые на ее собственном языке.* Из сравнения двух моделей можно вскрыть эти симметрии.

2. Прежде всего, нужно отметить, что имеются три канала взаимодействий: 1) электромагнитный, 2) аналог взаимодействия через Z-бозоны и 3) аналог взаимодействия через W-бозоны. Отдельно еще раз обсудим эти каналы, иллюстрируя выявленные закономерности с помощью таблиц. Как уже было показано, эти каналы характеризуются коэффициентами перед парными произведениями трех типов токов: нейтринного (ν), левой компоненты массивного лептона (e_L) и правой компоненты массивного лептона (e_R). Выпишем в виде 3×3-таблиц коэффициенты перед соответствующими произведениями токов в каждом из каналов взаимодействия. При этом будем изображать пары таблиц, соответствующие обозначениям в бинарной геометрофизике и в модели Вайнберга-Салама.

1) **Электромагнитное взаимодействие** можно охарактеризовать следующими таблицами:

	ν	e_L	e_R
ν	0	0	0
e_L	0	A^2	A^2
e_R	0	A^2	A^2

$\longrightarrow$

	ν	e_L	e_R
ν	0	0	0
e_L	0	$\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}$	$\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}$
e_R	0	$\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}$	$\frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2+g_2^2}$

(12.6.3)

2) **Слабые взаимодействия через Z-бозоны** в рамках БСКО ранга (4,4) обсуждены в §12.3 и §12.4. Из выписанных там формул (12.3.16), (12.3.17), (12.4.9) и (12.4.10) и других следует закономерность: *коэффициент при произведении двух разных токов равен корню квадратному из произведения двух коэффициентов при соответствующих произведениях одинаковых токов.* С учетом этой закономерности имеем следующие таблицы:

	ν	e_L	e_R
ν	a_{11}^2	$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$	$a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$
e_L	$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$	a_{22}^2	$a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$
e_R	$a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$	$a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$	a_{33}^2

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

	ν	e_L	e_R
ν	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2-g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2}{2}$
e_L	$\frac{g_1^2-g_2^2}{4}$	$\frac{(g_1^2-g_2^2)^2}{4(g_1^2+g_2^2)}$	$\frac{g_1^2(g_1^2-g_2^2)}{2(g_1^2+g_2^2)}$
e_R	$\frac{g_1^2}{2}$	$\frac{g_1^2(g_1^2-g_2^2)}{2(g_1^2+g_2^2)}$	$\frac{g_1^4}{g_1^2+g_2^2}$

(12.6.4)

3) **Слабые взаимодействия через W-бозоны** в двух теориях характеризуются таблицами:

	ν	e_L	e_R
ν	0	W^2	0
e_L	W^2	0	0
e_R	0	0	0

$\longrightarrow$

	ν	e_L	e_R
ν	0	$\frac{g_2^2}{2}$	0
e_L	$\frac{g_2^2}{2}$	0	0
e_R	0	0	0

(12.6.5)

3. Из сравнения таблиц можно прийти к выводу, что *групповым $SU(2)$- и $U(1)$-симметриям модели Вайнберга-Салама соответствует следующая симметрия суммарных коэффициентов при произведениях трех типов токов*:

	ν	e_L	e_R
ν	a_{11}^2	$a_{11}^2 = a_{11}a_{22} + W^2$	$a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$
e_L	$a_{11}^2 = a_{11}a_{22} + W^2$	$a_{11}^2 = a_{22}^2 + A^2$	$a_{13}^2 = a_{22}a_{33} + A^2$
e_R	$a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$	$a_{13}^2 = a_{22}a_{33} + A^2$	$a^2 = a_{33}^2 + A^2$

$\rightarrow$

(12.6.6)

$\longrightarrow$

	ν	e_L	e_R
ν	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2}{2}$
e_L	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$	$\frac{g_1^2+g_2^2}{4}$
e_R	$\frac{g_1^2}{2}$	$\frac{g_1^2}{2}$	g_1^2

4. Другими словами, можно утверждать, что для суммарных коэффициентов имеет место полная симметрия между левыми компонентами нейтрино и массивного лептона. Все коэффициенты в левых верхних подматрицах одинаковы (a_{11}^2). Одинаковы также суммарные коэффициенты при произведениях левых токов (как нейтрино, так и массивного лептона) с током правой компоненты массивного лептона (a_{13}^2), то есть для суммарных коэффициентов можно записать матрицу

	ν_L	e_L	e_R
ν_L	b^2	b^2	y^2
e_L	b^2	b^2	y^2
e_R	y^2	y^2	a^2

, (12.6.7)

где введены новые обозначения: $b^2 = a_{11}^2$, $y^2 = a_{13}^2$ и a^2 для правого нижнего элемента матрицы.

5. Данная симметрия приводит к тому, что независимыми следует считать не совокупность из 8 параметров (12.6.1) или (12.6.2), а всего два параметра. В качестве таковых можно выбрать параметры b^2 и a^2. Действительно, рассматрим 6 различных соотношений в матрице (12.6.6) (три диагональные и три соотношения над диагональю) как систему уравнений относительно 6 неизвестных: a_{11}, a_{22}, a_{33}, W^2, A^2 и y^2:

$$(\nu_{1L}, \nu_{2L}) \quad \Rightarrow \quad b^2 = a_{11}^2; \tag{12.6.8}$$

$$(e_{1L}, e_{2L}) \quad \Rightarrow \quad b^2 = a_{22}^2 + A^2; \tag{12.6.9}$$

$$(\nu_{1L}, e_{2L}) \quad \Rightarrow \quad b^2 = a_{11}a_{22} + W^2; \tag{12.6.10}$$

$$(\nu_{1L}, e_{2R}) \quad \Rightarrow \quad y^2 = a_{11}a_{33}; \tag{12.6.11}$$

$$(e_{1L}, e_{2R}) \quad \Rightarrow \quad y^2 = a_{22}a_{33} + A^2; \tag{12.6.12}$$

$$(e_{1R}, e_{2R}) \quad \Rightarrow \quad a^2 = a_{33}^2 + A^2. \tag{12.6.13}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$a_{11} = \pm b; \quad a_{22} = \pm\frac{a^2 - 2b^2}{2b}; \quad a_{33} = \pm\frac{a^2}{2b}; \quad y^2 = \frac{a^2}{2}; \tag{12.6.14}$$

$$A^2 \equiv e^2 = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{4b^2}; \quad W^2 = \frac{4b^2 - a^2}{2}; \quad (\text{либо } W^2 = \frac{a^2}{2}). \tag{12.6.15}$$

Это решение приводит к известным в модели Вайнберга-Салама соотношениям между фундаментальными константами, если положить

$$a^2 = g_1^2; \quad b^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4}. \tag{12.6.16}$$

Легко видеть, что второе возможное решение для константы W^2 в (12.6.15) должно быть отброшено как не соответствующее эксперименту.

6. Очевидно, что в качестве коренных констант можно выбрать и другие две, например, константу A, отвечающую за электромагнитное взаимодействие, и константу a_{11}, отвечающую за слабое взаимодействие нейтрино в Z-канале. Тогда из системы (12.6.8) – (12.6.13) получаем соотношения:

$$a_{11} \equiv b; \quad a_{22} = \pm\sqrt{a_{11}^2 - A^2}; \quad a_{33} = \frac{A^2}{a_{11} \mp \sqrt{a_{11}^2 - A^2}}; \tag{12.6.17}$$

$$y^2 = \frac{A^2 a_{11}}{a_{11} \mp \sqrt{a_{11}^2 - A^2}}; \quad a^2 = \frac{2A^2 a_{11}}{a_{11} \mp \sqrt{a_{11}^2 - A^2}}; \tag{12.6.18}$$

$$W^2 = a_{11}\left(a_{11} \mp \sqrt{a_{11}^2 - A^2}\right), \tag{12.6.19}$$

эквивалентные (12.6.14) – (12.6.15).

Таким образом, из вскрытой симметрии следует, что в данном подходе (в рамках БСКО ранга (4,4)) так же, как и в модели Вайнберга-Салама, *в качестве независимых выступают только две коренные константы.*

12.7 Выводы и замечания по модели на основе БСКО ранга (4,4)

1. Сделаем **главные выводы** по обсужденной в этой главе модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4).

1) Основной вывод состоит в том, что *в рамки БСКО ранга (4,4) можно вложить основные закономерности электрослабых взаимодействий лептонов*, впервые найденные в рамках калибровочной модели Вайнберга-Салама.

2) На основе проведенного анализа *вскрыты более глубокие и простые алгебраические симметрии электрослабых взаимодействий*, заменяющие групповые $SU(2) \times U(2)$-симметрии общепринятой модели Вайнберга-Салама. В итоге открывается более простой взгляд на электрослабые взаимодействия и их суть. Можно опустить все промежуточные соображения о групповых $SU(2)$- и $U(1)$- симметриях, о локализации этих симметрий, о спонтанных нарушениях симметрии и прочие тонкости полевой модели.

3) Изложенное в этой главе не противоречит ранее сделанному выводу, что с *электромагнитным взаимодействием* можно связать переход (для массивного лептона) от БСКО ранга (3,3) к БСКО ранга (4,4). Это соответствует нулевым значениям дополнительных параметров в начальном состоянии ($i^3 = k^3 = u' = 0$).

4) Отдельно подчеркнем факт, что в рамках БСКО ранга (4,4) для прообраза *слабых взаимодействий* значения дополнительных параметров в начальном состоянии (u) оказываются несущественными.

2. Однако, данная модель, основанная на БСКО ранга (4,4), обладает **рядом недостатков**. Перечислим главные из них.

1) В рамках данной модели прообраз слабых взаимодействий лептонов через промежуточные W-бозоны выглядит искусственным. Хотелось бы получить более естественное обоснование существования этого канала электрослабых взаимодействий.

2) К недостаткам данной модели следует отнести неопределенность значений дополнительных параметров u для прообраза слабых взаимодействий.

Глава 13

Описание электрослабых взаимодействий лептонов на основе БСКО ранга (5,5)

Забегая вперед, отметим, что в бинарной геометрофизике теория сильных взаимодействий, соответствующая хромодинамике, описывается БСКО ранга (6,6) (см. главу 14). Встает естественный вопрос о роли в физической картине мира БСКО промежуточного ранга (5.5). В этой главе показано, что именно в ее рамках достаточно полно описываются электрослабые взаимодействия лептонов одного поколения, включая аналог взаимодействия через промежуточные W-бозоны. С позиций данной модели рассмотренная в предыдущих главах теория взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4) выглядит как приближенная (точнее, упрощенная) модель. Только в рамках БСКО ранга (5,5) начинает проясняться смысл алгебраических симметрий, лежащих в основе модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама.

13.1 БСКО ранга (5,5) и фундаментальное 4×4-отношение

1. Согласно общей теории БСКО, изложенной в 1-й части [17] и кратко в §1.3, закон БСКО ранга (5,5) имеет вид

$$\Phi_{(5,5)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \qquad (13.1.1)$$

где парные отношения записываются согласно (1.3.3)

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i^4\alpha^4. \qquad (13.1.2)$$

Элементы БСКО ранга (5,5) характеризуются четырьмя параметрами.

2. Будем полагать, как и в главах 3 – 6 и 12, что *парами элементов этой БСКО описываются лептоны в каждом из состояний.* Тогда любому лептону e, описываемому элементами i и k, например, в начальном состоянии сопоставляется следующая прямоугольная матрица:

$$e(i,k) \to \left(\begin{array}{cc} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \\ \hline i^3 & k^3 \\ i^4 & k^4 \end{array} \right). \qquad (13.1.3)$$

Здесь горизонтальной чертой разделены (внешние) спинорные параметры, образующие 4-мерные скорости (импульсы), и дополнительные (внутренние) параметры с индексами 3 и 4.

Примечательно, что в рамках этого ранга числа внешних и внутренних параметров частиц совпадают, то есть имеет место своеобразная симметрия получаемых из них внешних и внутренних понятий.

3. Как и ранее, будем полагать, что внешние спинорные параметры (с индексами 1 и 2) для *правой компоненты нейтрино* обращаются в нуль, то есть нейтрино, например, в начальном состоянии будем характеризовать следующей матрицей параметров:

$$\nu(j,s) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} j^1 & 0 \\ j^2 & 0 \\ \hline j^3 & s^3 \\ j^4 & s^4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} j^1 & 0 \\ j^2 & 0 \\ \hline ? & c^3_{\nu R} \\ ? & c^4_{\nu R} \end{array} \right), \qquad (13.1.4)$$

где вопросительными знаками помечены несущественные для описания взаимодействий дополнительные параметры левой компоненты нейтрино. Они могут оказаться существенными при рассмотрении масс массивных лептонов (электронов).

4. В соответствии с общей методикой, неоднократно использовавшейся ранее, взаимодействие двух произвольных лептонов должно описываться неким 4×4-отношением. Своеобразием данного ранга является то, что теперь в качестве такого отношения следует использовать не базовое, как это было в модели на базе БСКО ранга (4,4), а *фундаментальное* 4×4-*отношение*, то есть отличный от нуля минор максимального ранга в законе БСКО ранга (5,5) (13.1.1)

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \\ i\;k\;j\;s \end{bmatrix} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} \\ \hline u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} i^1 & k^1 & j^1 & s^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 & s^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{cc|cc} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \hline \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{array}\right| . \qquad (13.1.5)$$

Здесь в нижней строке горизонтальная черта опять разделяет внешние и внутренние параметры. Как и ранее, будем полагать, что элементы i, α, k, β описывают состояния первого лептона, а элементы j, γ, s, δ – состояния второго лептона. В соответствии с этим вертикальные линии и горизонтальная линия в верхней строке (13.1.5) разделяют элементы двух рассматриваемых частиц.

5. Рассмотренные в предыдущих главах электрослабые взаимодействия между лептонами (одного поколения) на основе *базовых* 4×4-отношений будем понимать как приближенный вариант более общей теории, основанной на фундаментальных 4×4-отношениях. Раскладывая определители в (13.1.5) справа по первым двум строкам, находим, что фундаментальные 4×4-отношения записываются точно так же, как и базовые 4×4-отношения (3.1.1). Их можно представить в виде 9 подматриц

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \\ i\;k\;j\;s \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} M(4,0) & +M(3,1) & +M[(2),(2)]+ \\ \hline +M(3,1) & +M(2,2) & +M(1,3)+ \\ \hline +M[(2),(2)] & +M(1,3) & +M(0,4) \end{array}\right), \qquad (13.1.6)$$

охарактеризованных числами *внешних* параметров (с индексами 1 и 2) элементов разных лептонов в соответствующих слагаемых. Каждое слагаемое в таком выражении представляется в

виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix}', \tag{13.1.7}$$

где второе слагаемое в квадратных скобках, помеченных штрихом, записывается через дополнительные параметры точно так же, как первое слагаеме записывается через внешние параметры согласно (1.3.6), то есть

$$\begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix}' = \begin{vmatrix} k^3 & s^3 \\ k^4 & s^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta^3 & \delta^3 \\ \beta^4 & \delta^4 \end{vmatrix}. \tag{13.1.8}$$

6. Прообраз "свободного" действия первого лептона описывается подматрицей $M(4,0)$, состоящей из одного слагаемого,

$$\tilde{S}_{free}(e_1) = M(4,0) = \begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ i\;\;k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma\,\delta \\ j\;\;s \end{bmatrix}'. \tag{13.1.9}$$

Здесь вторая квадратная скобка содержит дополнительные параметры только второго лептона. Аналогичным образом подматрица (слагаемое) $M(0,4)$ представляет собой прообраз "свободного" действия второго лептона.

13.2 Прообраз действия взаимодействия лептонов

1. Прообраз действия взаимодействия двух лептонов описывается, как и прежде, средней подматрицей $M(2,2)$ из (13.1.6), точнее, ее диагональными слагаемыми:

$$M(2,2) \to \tilde{S}_{int}(e_1, e_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;\;j \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;\;s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;j \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;\;s \end{bmatrix}'. \tag{13.2.1}$$

Это выражение соответствует формуле (3.3.10) в варианте описания электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4).

2. Для комбинаций из внешних параметров введем те же близкие к стандартным обозначения (3.2.16), что и в главе 3.

Внутренних параметров теперь стало больше. Введем для массивных лептонов обозначения, естественным образом обобщающие ранее использованные в моделе БСКО ранга (4,4):

$$\begin{array}{ll|ll} i^3 = c^3_{1L}; & i^4 = c^4_{1L}; & \alpha^3 = \tilde{c}^3_{1L}; & \alpha^4 = \tilde{c}^4_{1L}; \\ k^3 = c^3_{1R}; & k^4 = c^4_{1R}; & \beta^3 = \tilde{c}^3_{1R}; & \beta^4 = \tilde{c}^4_{1R}; \\ & & & \\ j^3 = c^3_{2L}; & j^4 = c^4_{2L}; & \gamma^3 = \tilde{c}^3_{2L}; & \gamma^4 = \tilde{c}^4_{2L}; \\ s^3 = c^3_{2R}; & s^4 = c^4_{2R}; & \delta^3 = \tilde{c}^3_{2R}; & \delta^4 = \tilde{c}^4_{2R}. \end{array} \tag{13.2.2}$$

В таких обозначениях прообраз действия взаимодействия двух *массивных лептонов* записывается следующим образом

$$\tilde{S}_{int}(e_1, e_2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) \times \left(c^3_{1R}c^4_{2R} - c^4_{1R}c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1R}\tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1R}\tilde{c}^3_{2R}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})(\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R}) \times \left(c^3_{1L}c^4_{2L} - c^4_{1L}c^3_{2L}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L}\tilde{c}^4_{2L} - \tilde{c}^4_{1L}\tilde{c}^3_{2L}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\overline{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R}) \times \left(c^3_{1R}c^4_{2L} - c^4_{1R}c^3_{2L}\right)\left(\tilde{c}^3_{1R}\tilde{c}^4_{2L} - \tilde{c}^4_{1R}\tilde{c}^3_{2L}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})(\overline{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) \times \left(c^3_{1L}c^4_{2R} - c^4_{1L}c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L}\tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1L}\tilde{c}^3_{2R}\right). \tag{13.2.3}$$

3. Взаимодействия нейтрино между собой и с массивными лептонами по-прежнему будем описывать фундаментальным 4×4-отношением (13.1.5). Из подматрицы $M(2,2)$ в (13.1.6) получаем прообраз действия взаимодействия *двух нейтрино* в следующих видах:

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \\ i\;\;k\;\;j\;\;s \end{bmatrix} \to \tilde{S}_{int}(\nu_1, \nu_2) \equiv (\nu_{1L}, \nu_{2L}) = \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;\;s \end{bmatrix}' =$$

$$= -\frac{1}{2}(\overline{\nu}_{1L}\gamma^\mu \nu_{1L})(\overline{\nu}_{2L}\gamma_\mu \nu_{2L}) \times$$

$$\times \left(c^3_{\nu 1R}c^4_{\nu 2R} - c^4_{\nu 1R}c^3_{\nu 2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{\nu 1R}\tilde{c}^4_{\nu 2R} - \tilde{c}^4_{\nu 1R}\tilde{c}^3_{\nu 2R}\right). \tag{13.2.4}$$

Здесь использованы обозначения для внутренних параметров нейтрино, данные в (13.1.4), и очевидные обобзначения для параметров сопряженных состояний.

4. Прообраз действия взаимодействия *нейтрино с массивными лептонами* также получается из фундаментального 4×4-отношения (13.1.5) и записывается следующим образом

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \\ i\;\;k\;\;j\;\;s \end{bmatrix} \to \tilde{S}_{int}(e,\nu) \equiv (e_L,\nu_L) + (e_R,\nu_L) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;\;s \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;\;s \end{bmatrix}' =$$

$$= -\frac{1}{2}(\overline{e}_L\gamma^\mu e_L)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)\left(c^3_{eR}c^4_{\nu R} - c^4_{eR}c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eR}\tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eR}\tilde{c}^3_{\nu R}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(\overline{e}_R\gamma^\mu e_R)(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)\left(c^3_{eL}c^4_{\nu R} - c^4_{eL}c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eL}\tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eL}\tilde{c}^3_{\nu R}\right). \tag{13.2.5}$$

5. Следует ожидать, что найденные выше прообразы действия взаимодействия лептонов (13.2.3), (13.2.4) и (13.2.5) находятся в некотором соответствии с действием взаимодействия стандартной модели Вайнберга-Салама (в дальнодействующей версии) при наложении некоторых условий симметрии на внутренние параметры. Отвлекаясь от вида пропагаторов, запишем соответствующие выражения для внутренних параметров

$$(\nu_{1L},\nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{\nu 1R}c^4_{\nu 2R} - c^4_{\nu 1R}c^3_{\nu 2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{\nu 1R}\tilde{c}^4_{\nu 2R} - \tilde{c}^4_{\nu 1R}\tilde{c}^3_{\nu 2R}\right); \tag{13.2.6}$$

$$(e_{1L},\nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{eR}c^4_{\nu R} - c^4_{eR}c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eR}\tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eR}\tilde{c}^3_{\nu R}\right); \tag{13.2.7}$$

$$(e_{1L},e_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{1R}c^4_{2R} - c^4_{1R}c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1R}\tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1R}\tilde{c}^3_{2R}\right); \tag{13.2.8}$$

$$(e_{1R},e_{2R}) \Rightarrow -\left(c^3_{1L}c^4_{2L} - c^4_{1L}c^3_{2L}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L}\tilde{c}^4_{2L} - \tilde{c}^4_{1L}\tilde{c}^3_{2L}\right); \tag{13.2.9}$$

$$(e_{1R},\nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{eL}c^4_{\nu R} - c^4_{eL}c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eL}\tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eL}\tilde{c}^3_{\nu R}\right); \tag{13.2.10}$$

$$(e_{1R},e_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{1L}c^4_{2R} - c^4_{1L}c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L}\tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1L}\tilde{c}^3_{2R}\right) \tag{13.2.11}$$

и аналогичные соотношения для переставленных местами токов.

6. Необходимо конкретизировать значения параметров левых и правых компонент электрона и нейтрино, удовлетворяющие этим соотношениям, а также условиям расщепления матрицы токов на подматрицы с тремя видами симметрий (см §12.6), соответствующими

1) взаимодействию через промежуточные Z-бозоны,

2) электромагнитному взаимодействию (через фотоны),

3) взаимодействию левых компонент электрона с нейтрино через промежуточные W-бозоны.

Эту задачу будем решать последовательно в указанном порядке, находя допустимые для соответствующего взаимодействия значения параметров трех типов элементов: ν, e_L и e_R.

13.3 Прообраз взаимодействия лептонов через промежуточные Z-бозоны

1. Для описания прообраза слабых взаимодействий через промежуточные векторные Z-бозоны необходимо, чтобы правые части в соотношениях (13.2.6) – (13.2.11) составляли подматрицу вида (12.6.4), то есть

$$(\nu_{1L}, \nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{\nu 1R} c^4_{\nu 2R} - c^4_{\nu 1R} c^3_{\nu 2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{\nu 1R} \tilde{c}^4_{\nu 2R} - \tilde{c}^4_{\nu 1R} \tilde{c}^3_{\nu 2R}\right) = a^2_{11}; \tag{13.3.1}$$

$$(e_{1L}, \nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{eR} c^4_{\nu R} - c^4_{eR} c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eR} \tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eR} \tilde{c}^3_{\nu R}\right) = a^2_{12}; \tag{13.3.2}$$

$$(e_{1L}, e_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{1R} c^4_{2R} - c^4_{1R} c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1R} \tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1R} \tilde{c}^3_{2R}\right) = a^2_{22}; \tag{13.3.3}$$

$$(e_{1R}, e_{2R}) \Rightarrow -\left(c^3_{1L} c^4_{2L} - c^4_{1L} c^3_{2L}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L} \tilde{c}^4_{2L} - \tilde{c}^4_{1L} \tilde{c}^3_{2L}\right) = a^2_{33}; \tag{13.3.4}$$

$$(e_{1R}, \nu_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{eL} c^4_{\nu R} - c^4_{eL} c^3_{\nu R}\right)\left(\tilde{c}^3_{eL} \tilde{c}^4_{\nu R} - \tilde{c}^4_{eL} \tilde{c}^3_{\nu R}\right) = a^2_{13}; \tag{13.3.5}$$

$$(e_{1R}, e_{2L}) \Rightarrow -\left(c^3_{1L} c^4_{2R} - c^4_{1L} c^3_{2R}\right)\left(\tilde{c}^3_{1L} \tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1L} \tilde{c}^3_{2R}\right) = a^2_{23} \tag{13.3.6}$$

где правые части из недиагональных a^2_{ik} представляются в виде парных произведений диагональных коэффициентов $a^2_{ik} = a_{ii} a_{kk}$.

2. Анализ комбинаций из дополнительных параметров показывает, что

а) поскольку эти комбинации записываются через определители (антисимметричные выражения), то дополнительные параметры двух взаимодействующих частиц не могут быть одинаковыми, – следует использовать идею, примененную в предыдущих главах, о двух состояниях взаимодействующих частиц и об обмене значениями дополнительных параметров;

б) при описании прообраза слабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5) нельзя полагать, что одно из состояний ("невозбужденное") описывается элементами БСКО ранга (3,3), – в этом случае комбинации из дополнительных параметров обращаются в нуль;

в) поскольку все выражения из дополнительных параметров слева в (13.3.1) – (13.3.6) представляют собой произведения двух комбинаций отдельно для начальных и конечных состояний, то обменный характер взаимодействия позволяет ограничиться рассмотрением лишь одной из таких комбинаций (одного слагаемого).

3. Исходя из такого анализа следует ввести три пары возможных состояний компонент взаимодействующих частиц. Введем для них следующие обозначения:

1) для нейтрино

$$\begin{pmatrix} c^3_{\nu R} \\ c^4_{\nu R} \end{pmatrix} \to \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \right], \tag{13.3.7}$$

2) для правой компоненты массивного лептона (электрона)

$$\begin{pmatrix} c^3_{R} \\ c^4_{R} \end{pmatrix} \to \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right], \tag{13.3.8}$$

3) для левой компоненты массивного лептона (электрона)

$$\begin{pmatrix} c^3_{L} \\ c^4_{L} \end{pmatrix} \to \left[\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} z_3 \\ u_3 \end{pmatrix} \right]. \tag{13.3.9}$$

Напомним, что взаимодействие (внешнего) тока левой компоненты массивного лептона характеризуются дополнительными параметрами правой компоненты этого же лептона и наоборот, точно так же, как взаимодействия левой компоненты нейтрино определяется дополнительными параметрами правой компоненты нейтрино.

Таким образом, аналог взаимодействия лептонов через Z-бозоны характеризуется 12 пока неизвестными параметрами: x_i, y_i, z_i, u_i.

4. Введенные параметры не являются независимыми на них следует наложить условия, вытекающие из симметрии Z-матрицы (12.6.4). Из сделанного в п.1 замечания (в) следует, что таких условий 9. Они записываются для комбинаций из однородных параметров вида

$$\left(c^3_R c^4_{\nu R} - c^4_R c^3_{\nu R}\right), \quad \left(c^3_{1R} c^4_{2R} - c^4_{1R} c^3_{2R}\right), \cdots.$$

Выпишем их в виде таблицы, где по горизонтали и вертикали символами ν, e_L, e_R обозначены (внешние) токи двух взаимодействующих частиц, произведениям которых соответствуют выписанные уравнения.

	ν_2	e_{2L}	e_{2R}
ν_1	$x_1u_1 - y_1z_1 = a_{11};$	$x_1u_2 - y_1z_2 = a_{12};$	$x_1u_3 - y_1z_3 = a_{13};$
e_{1L}	$x_2u_1 - y_2z_1 = a_{12};$	$x_2u_2 - y_2z_2 = a_{22};$	$x_2u_3 - y_2z_3 = a_{23};$
e_{1R}	$x_3u_1 - y_3z_1 = a_{13};$	$x_3u_2 - y_3z_2 = a_{23};$	$x_3u_3 - y_3z_3 = a_{33}.$

(13.3.10)

Выпишем также в виде таблицы связь правых частей этих уравнений a_{ik} с тремя величинами a_{11}, a_{22} и a_{33}, введенными в главе 12:

	ν_2	e_{2L}	e_{2R}
ν_1	$a_{11};$	$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}};$	$a_{13} = \sqrt{a_{11}a_{33}};$
e_{1L}	$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}};$	$a_{22};$	$a_{23} = \sqrt{a_{22}a_{33}};$
e_{1R}	$a_{13} = \sqrt{a_{11}a_{33}};$	$a_{23} = \sqrt{a_{22}a_{33}};$	$a_{33}.$

(13.3.11)

Очевидно, что все детерминанты 2-го порядка матрицы $\{a_{ik}\}$ обращаются в нуль.

5. Из диагональных уравнений (13.3.10) выразим величины y_i:

$$y_1 = \frac{1}{z_1}(x_1u_1 - a_{11}); \quad y_2 = \frac{1}{z_2}(x_2u_2 - a_{22}); \quad y_3 = \frac{1}{z_3}(x_3u_3 - a_{33}) \tag{13.3.12}$$

и подставим в оставшиеся 6 уравнений из (13.3.10). Исключая из них величины x_i, приходим к трем соотношениям на оставшиеся 6 неизвестных:

$$\begin{aligned} N_1(a_{12}z_2 - a_{22}z_1) \quad &+ \quad N_3(a_{23}z_2 - a_{22}z_3) = 0; \\ N_1(a_{13}z_3 - a_{33}z_1) \quad &+ \quad N_2(a_{23}z_3 - a_{33}z_2) = 0; \\ N_2(a_{12}z_1 - a_{11}z_2) \quad &+ \quad N_3(a_{13}z_1 - a_{11}z_3) = 0, \end{aligned} \tag{13.3.13}$$

где введены обозначения:

$$N_1 = u_3z_2 - u_2z_3; \quad N_2 = u_1z_3 - u_3z_1; \quad N_3 = u_2z_1 - u_1z_2. \tag{13.3.14}$$

Из анализа (13.3.13) и (13.3.14) следует, что искомое решение оказывается зависящим от 5 произвольных констант, в качестве которых можно выбрать z_1, z_2, z_3, и u_1, u_2 (или N_2 и N_3).

6. После несложных выкладок получаем решение, которое можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_1 a_{12} - z_2 a_{11})/N_3 \\ (u_1 a_{12} - u_2 a_{11})/N_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}; \tag{13.3.15}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_1 a_{22} - z_2 a_{12})/N_3 \\ (u_1 a_{22} - u_2 a_{12})/N_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix}; \tag{13.3.16}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_1 a_{23} - z_2 a_{13})/N_3 \\ (u_1 a_{23} - u_2 a_{13})/N_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ (z_3 u_1 - N_2)/z_1 \end{pmatrix}. \tag{13.3.17}$$

7. Легко видеть, что состояния, характеризуемые столбцами из x_i и y_i, оказались коллинеарными, то есть для них

$$x_i u_k - y_i z_k = 0. \tag{13.3.18}$$

Два таких столбца можно выразить через один:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{13.3.19}$$

Состояния, характеризуемые столбцами из z_i и u_i, не являются коллинеарными. Два смешанных определителя из их компонент (13.3.14) можно выразить через один N_1 следующим образом

$$N_2 = N_1 \frac{z_3 a_{11} - z_1 a_{13}}{z_2 a_{13} - z_3 a_{12}}; \quad N_3 = N_1 \frac{z_1 a_{12} - z_2 a_{11}}{z_2 a_{13} - z_3 a_{12}}. \tag{13.3.20}$$

Встает вопрос об интерпретации этих двух типов столбцов: какие из них следует считать характеризующими возбужденные и какие невозбужденные состояния.

13.4 Описание прообраза электромагнитных взаимодействий

1. Можно указать следующие три способа описания электромагнитных взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5):

1) Первый из них состоит в построении еще одного канала обменного взаимодействия, аналогичного построенному в предыдущем параграфе, однако с другой системой уравнений типа

(13.3.10), отвечающей симметрии электромагнитных взаимодействй. Для этого случая правые части уравнений ($a_{sr} \to A_{sr}$) вместо (13.3.11) будут иметь вид:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \nu_2 & e_{2L} & e_{2R} \\ \hline \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_{1L} & 0 & A & A \\ e_{1R} & 0 & A & A, \end{array} \qquad (13.4.1)$$

где A – константа, харатеризующая электромагнитное взаимодействие, определенная в (12.3.11).

При этом способе описания электромагнитных взаимодействий встает ряд проблем по согласованию различных каналов (аналогов электромагнитного и слабого) взаимодействий.

2) Второй способ можно было бы мыслить в виде обобщения 2-компонентных столбцов из дополнительных параметров (13.3.7) и соответствующей им системы уравнений (13.3.10) так, чтобы ими можно было бы одновременно описывать и электромагнитные, и слабые взаимодействия. Анализ этого варианта выявил ряд существенных трудностей в описании электромагнетизма[1].

3) Третий способ описания электромагнетизма основан на идее о том, что *электромагнитное взаимодействие описывается в рамках БСКО ранга (4,4)*, как было изложено в предыдущих главах, тогда как слабые взаимодействия описываются с помощью БСКО ранга (5,5).

Трудности в реализации первых двух способов свидетельствуют в пользу реализации в природе именно третьего способа.

2. Обсудим модель электрослабых взаимодействий в рамках именно последнего подхода к сути электромагнетизма. Он означает постулирование 2-ступенчатой природы электрослабых взаимодействий. Будем полагать, что

а) в согласии с трактовкой электромагнетизма, данной в предыдущих главах, электромагнитное взаимодействие осуществляет переход от описания массивных лептонов в рамках БСКО ранга (3,3) (от их невозбужденных состояний) к их описанию в рамках БСКО ранга (4,4), характеризующей возбужденные состояния лептонов;

[1]Были исследованы обобщения системы уравнений (13.3.10), соответствующие симметриям, приведенным в параграфе 12.6. В частности, среди таких систем имеются 512 вариантов, приводящих к уравнениям на константы связи электрослабых взаимодействий. Их решения приводят либо к нефизическим (комплексным) значениям констант взаимодействия, либо к исключению электромагнитного взаимодействия.

б) слабые взаимодействия осуществляют переход от описания массивных лептонов в рамках БСКО ранга (4,4) (от их невозбужденных состояний с позиций слабого взаимодействия) к их описанию в рамках БСКО ранга (5,5), характеризующей как бы дважды возбужденные состояния лептонов.

Очевидно, что здесь подразумеваются и обратные переходы, осуществляемые в рамках БСКО соответствующих рангов.

3. В связи с принятием гипотезы о 2-ступенчатой природе электрослабых взаимодействий необходимо доопределить возбужденные состояния массивных лептонов в электромагнитных взаимодействиях (в БСКО ранга (4,4)) и уточнить вид невозбужденных состояний в слабых взаимодействиях (в БСКО ранга (5,5)) таким образом, чтобы можно было их отождествить.

Начнем с обсуждения прооообраза слабых взаимодействий через промежуточные Z-бозоны. В §13.3 были найдены два вида состояний для трех сортов элементов и был поставлен вопрос: какими столбцами (из параметров x_i и y_i или z_i и u_i) описываются невозбужденные и возбужденные состояний лептонов? Из условия сшивки (отождествления) возбужденных состояний электромагнитных состояний и невозбужденных слабых взаимодействий следует положить, что такие состояния как левой, так и правой компоненты массивного лептона должны описываться элементами БСКО ранга (4,4), то есть с позиций БСКО ранга (5,5) должны иметь по одному нулевому дополнительному параметру. Если выбрать в качестве невозбужденных состояний столбцы из параметров x_i и y_i, то согласно (13.3.15) – (13.3.17) все три компоненты, в том числе и для нейтрино, будут иметь по одинаковому нулевому дополнительному параметру, что, как будет показано ниже (см. §13.5), не позволит описать аналог слабого взаимодействия через W-бозоны. Следовательно, в качестве невозбужденного состояния слабых взаимодействий нужно выбрать столбцы из z_i и u_i.

Но в этом случае для левых и правых компонент массивного лептона дополнительные параметры с нулевыми значениями должны быть разными. Более того, из условия симметрии электромагнитных взаимодействий ненулевые значения параметров должны быть одинаковыми. Из-за имеющегося произвола в определении параметров в (13.3.15) – (13.3.17) эти требования можно осуществить. Обозначим значения ненулевых параметров (характеризующих электромагнитное взаимодействие) символом A, тогда невозбужденные состояния массивных лептонов описываются столбцами:

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}. \tag{13.4.2}$$

Из (13.4.2) легко находится значение определителя

$$N_1 = u_3 z_2 - u_2 z_3 = A^2 \tag{13.4.3}$$

и, кроме того, учитывая (13.3.12), можно выразить значение дополнительного параметра возбужденного состояния x_3 через коэффициенты a_{33} и A:

$$x_3 = \frac{a_{33}}{A}. \tag{13.4.4}$$

4. Перейдем к обсуждению возбужденных состояний электромагнитных взаимодействий. Как ранее и утверждалось, они описываются элементами БСКО ранга (4,4), однако с позиций БСКО ранга (5,5) теперь можно определить две разные БСКО ранга (4,4): для одной из них в качестве дополнительного параметра выступает c^3, а для другой – параметр c^4 БСКО ранга (5,5). Таким образом, *электромагнитно возбужденные состояния левой и правой компонент массивного лептона описываются элементами разных БСКО ранга (4,4).*

В связи с таким обстоятельством возникает вопрос о справедливости (законности) данного в предыдущих главах описания электрослабых взаимодействий лептонов в рамках одной БСКО ранга (4,4). Все, что там касалось слабых взаимодействий, теперь следует воспринимать как приближенную модель, а относительно электромагнитного взаимодействия нужно заметить следующее. В §3.1 при обсуждении базового 4×4-отношения (3.1.1) было отмечено, что его можно представить как своеобразное фундаментальное 4×4-отношение (3.1.6) так называемой *вырожденной* БСКО ранга (4,4;a). Оказывается, описания взаимодействий в рамках вырожденной и невырожденной БСКО являются эквивалентными. Очевидно, это можно отнести к любой из двух введенных выше БСКО ранга (4,4), то есть каждый из двух возможных параметров c^3 и c^4 можно считать вырожденным.

Встает вопрос о возможности вырождений не по одному, а по двум параметрам. Он рассматривался в §1.3 первой части книги (см. [00, с. 35]), и там было показано, что вырождение по двум и более параметрам эквивалентно вырождению по одному параметру, причем такой вырожденный параметр представляется прямой суммой отдельных вырожденных параметров. На основании этого можно считать две вырожденные БСКО ранга (4,4;a) соответствующими одной дважды вырожденной БСКО ранга (5,5), то есть одной вырожденной БСКО ранга (4,4;a). Тогда приходим к изложенному в предыдущих главах, причем оказывается несущественным возможное существование двух разных БСКО ранга (4,4).

13.5 Прообраз взаимодействия через W-бозоны

1. Прообраз электрослабого взаимодействия через промежуточные W-бозоны описывается другим каналом обменного взаимодействия в рамках БСКО ранга (5,5). Он имеет следующие характерные черты:

1) Как и для первого канала (для прообраза слабого взаимодействия через промежуточные Z-бозоны), невозбужденным состоянием будем считать возбужденные электромагнитным образом состояния массивного лептона, описываемые 2-компонентными столбцами (13.3.7) – (13.3.9) из параметров z_i и u_i.

2) В этом канале описывается взаимодействие двух лептонов, находящихся одновременно в невозбужденном (или в возбужденном) состоянии, в отличие от канала Z-взаимодействия, когда один лептон находится в невозбужденном, а другой – в возбужденном состоянии. Однако в данном случае возбужденные состояния являются иными. Введем соответственно для правой компоненты нейтрино, правой компоненты электрона и левой компоненты электрона обозначения, близкие к ранее использованным в (11.3.1) – (11.3.3):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix}. \tag{13.5.1}$$

2. Для данного канала во введенных обозначениях выпишем соотношения (13.2.6) – (13.2.11), следующие из фундаментального 4×4-отношения, полагая, что обе частицы изначально находились в невозбужденных состояниях:

$$(\nu_{1L}, \nu_{2L}) \Rightarrow 0; \tag{13.5.2}$$

$$(e_{1L}, \nu_{2L}) \Rightarrow -(z_2 u_1 - u_2 z_1)(\tilde{x}_2 \tilde{y}_1 - \tilde{y}_2 \tilde{x}_1) = W^2; \tag{13.5.3}$$

$$(e_{1L}, e_{2L}) \Rightarrow 0; \tag{13.5.4}$$

$$(e_{1R}, e_{2R}) \Rightarrow 0; \tag{13.5.5}$$

$$(e_{1R}, \nu_{2L}) \Rightarrow -(z_3 u_1 - u_3 z_1)(\tilde{x}_3 \tilde{y}_1 - \tilde{y}_3 \tilde{x}_1) = 0; \tag{13.5.6}$$

$$(e_{1R}, e_{2L}) \Rightarrow -(z_3 u_2 - u_3 z_2)(\tilde{x}_3 \tilde{y}_2 - \tilde{y}_3 \tilde{x}_2) = 0. \tag{13.5.7}$$

Здесь использован известный факт, что через промежуточный W-бозон взаимодействуют только левые компоненты нейтрино и массивного лептона. Напомним, константа W была введена в (12.5.2).

3. Проанализируем эту систему соотношений.

1) Обращение в нуль диагональных соотношений (13.5.2), (13.5.4) и (13.5.5) очевидно из-за одинаковых столбцов из дополнительных параметров в определителях.

2) Отличное от нуля выражение (13.5.3), напомним, обусловлено выбором в предыдущем параграфе в качестве невозбужденных состояний 2-компонентных столбцов из параметров z_i и u_i именно для этой цели. Воспользуемся отчасти подсказкой из стандартной модели Вайнберга-Салама, а отчасти соображениями минимального количества входящих в теорию параметров, – постулируем, что в результате такого взаимодействия *правые компоненты нейтрино и массивного лептона обмениваются друг с другом своими дополнительными параметрами*, то есть имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}. \tag{13.5.8}$$

Тогда (13.5.3) принимает вид

$$(z_2 u_1 - u_2 z_1)^2 = (A u_1)^2 = W^2. \tag{13.5.9}$$

Здесь использовано, что согласно (13.4.2) $u_2 = 0$ и $z_2 = A$. Отсюда находится ранее неизвестный параметр

$$u_1 = \pm \frac{W}{A}. \tag{13.5.10}$$

3) Из обращения в нуль выражений (13.5.6) и (13.5.7) следует обращение в нуль правых скобок. Используя (13.5.8), имеем

$$\tilde{x}_3 \tilde{y}_1 - \tilde{y}_3 \tilde{x}_1 = 0 \quad \to \quad \tilde{y}_3 = 0; \tag{13.5.11}$$

$$\tilde{x}_3 \tilde{y}_2 - \tilde{y}_3 \tilde{x}_2 = 0 \quad \to \quad \tilde{x}_3 = 0, \tag{13.5.12}$$

то есть в возбужденном состоянии дополнительные параметры левой компоненты электрона равны нулю. Это значит, что состояние этой компоненты описывается элементом БСКО ранга (3,3):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13.5.13}$$

4. Из ранее найденных параметров можно найти значение еще одного определителя из (13.3.14)

$$N_3 = u_2 z_1 - u_1 z_2 = -A u_1 = \mp W. \tag{13.5.14}$$

Подставляя N_3 и другие найденные параметры в выражение для x_1 из (13.3.15), находим последний неизвестный параметр

$$x_1 = \frac{z_1 a_{12} - z_2 a_{11}}{N_3} \to z_1 = \mp \frac{a_{13} W}{a_{12} A} + \frac{a_{11}}{a_{12}} A. \qquad (13.5.15)$$

Последний определитель из (13.3.8) находится в виде

$$N_2 = u_1 z_3 - u_3 z_1 = -A z_1 = \pm \frac{a_{13}}{a_{12}} W - \frac{a_{11}}{a_{12}} A^2. \qquad (13.5.16)$$

Легко показать, что все другие соотношения, записанные в §13.3 для найденных значений параметров выполняются тождественно.

13.6 Анализ модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5)

1. Как уже отмечалось, модель электрослабых взаимодействий на основе БСКО ранга (5,5) имеет 2-ступенчатый характер, где первая ступень характеризует электромагнитные взаимодействия (описывается в рамках БСКО ранга (4,4)), а вторая ступень определяет слабые взаимодействия. Причем имеются два 2-ступенчатых канала: один (Z-канал) описывает электромагнитные взаимодействия и прообраз взаимодействий через промежуточные Z-бозоны, а второй (W-канал) описывает прообраз слабых (электрослабых) взаимодействий через промежуточные W-бозоны. Отдельно прокомментируем эти каналы.

1) **Z-канал** проиллюстрирован блок-схемой на рисунке 13.1. Левая часть блок-схемы соответствует первично (электромагнитно) невозбужденным состояниям массивных лептонов, описываемым БСКО ранга (3,3). Средняя часть блок-схемы изображает электромагнитно возбужденные и в то же время невозбужденные состояния с точки зрения слабых Z-взаимодействий массивных лептонов, описываемые БСКО ранга (4,4). Электромагнитное взаимодействие означает изменение ранга БСКО, которым описываются состояния массивных лептонов, с (3,3) на (4,4) или наоборот.

Правая часть блок-схемы изображает (дважды) возбужденные слабым Z-взаимодействием состояния массивных лептонов а также невозбужденные и возбужденные состояния нейтрино (нижний правый блок), описываемые БСКО ранга (5,5). Особо следует подчеркнуть, что если в этом канале в результате

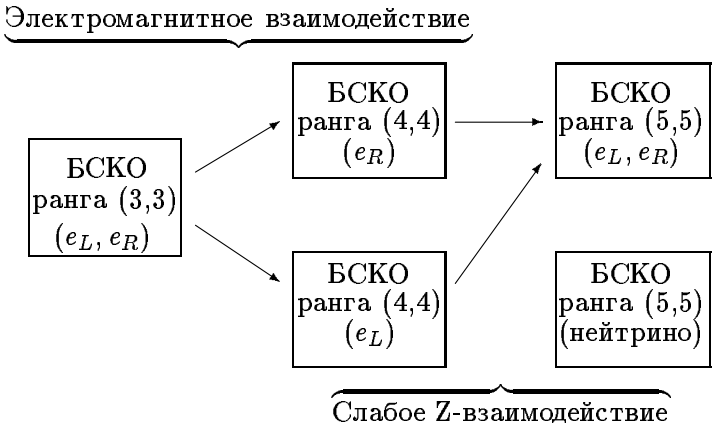


Рис. 13.1: Электрослабые взаимодействия в Z-канале

взаимодействий для массивных лептонов меняется ранг БСКО, которыми они описываются, то для нейтрино ранг БСКО не изменяется и всегда остается равным (5,5).

2) **W-канал** проиллюстрирован блок-схемой на рисунке 13.2. Средняя часть блок схемы изображает невозбужденные с точ-

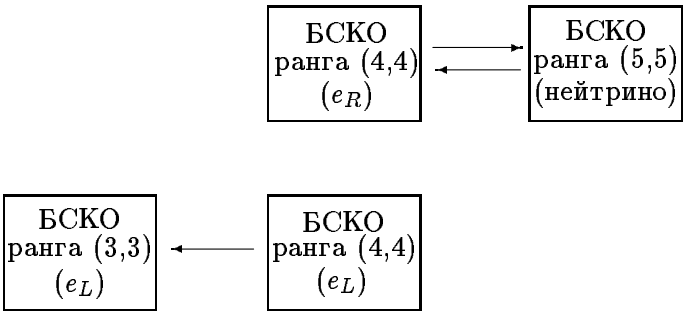


Рис. 13.2: Электрослабые взаимодействия в W-канале

ки зрения слабых взаимодействий состояния массивных лептонов, описываемые двумя БСКО ранга (4,4). Правая часть блок-схемы изображает, в частности, невозбужденное состояние нейтрино, описываемое БСКО ранга (5,5). Двойными стрелками (туда и обратно) показано, что дополнительные параметры правых компонент нейтрино и массивного лептона в результате W-взаимодействия меняются местами, то есть правая компонента массивного лептона начинает описываться БСКО более высокого ранга (5,5), тогда как правая компонента нейтрино теперь опи-

сывается БСКО меньшего ранга (4,4). Одинарная стрелка снизу показывает, что дополнительные параметры левой компоненты массивного лептона в результате W-взаимодействия обращаются в нуль, то есть левая компонента теперь описывается БСКО меньшего ранга (3,3), – она переходит в невозбужденное электромагнитное состояние. Напомним, что процессы с дополнительными параметрами правых компонент сказываются на внешних (общепринятых) токах левых компонент частиц и наоборот.

2. В рассмотренной здесь модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5) все параметры несут вполне определенную физическую нагрузку. Продемонстрируем это по пунктам, развернув изложенное выше в обратном порядке:

1) За исходное можно взять определение электромагнитно возбужденных состояний массивного лептона

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}, \tag{13.6.1}$$

где A определяет константу электромагнитного взаимодействия.

2) В самом общем случае прообраз слабых взаимодействий в Z-канале характеризуется тремя диагональными элементами матрицы $\{a_{ik}\}$, то есть a_{11}, a_{22}, a_{33}. Из них строятся все остальные элементы этой матрицы. Подставляя (13.6.1) во второй и в третий столбцы уравнений (13.3.10), где справа стоят a_{ik}, находим все 6 параметров (дважды) возбужденных состояний Z-канала:

$$x_i = \frac{a_{i3}}{A}; \quad y_i = -\frac{a_{i2}}{A}. \tag{13.6.2}$$

3) Прообраз электрослабого взаимодействия через W-бозоны характеризуется одной константой W. Используя выражение для (e_L, ν_L)-взаимодействия в W-канале (13.5.3) и постулат об обменном характере этого взаимодействия, находим неизвестный параметр через константу W

$$u_1 = \pm\frac{W}{A}. \tag{13.6.3}$$

4) Подставляя это значение в определение параметра x_1 в (13.3.15), найденное из условий симметрии Z-канала, получаем значение последнего параметра z_1, приведенное в (13.5.15).

3. В моделе, построенной только на изложенных соображениях, в самом общем случае будет содержаться 5 произвольных констант:

$$a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}, \quad A, \quad W.$$

Прообраз модели Вайнберга-Салама получается, если на дополнительные параметры правых компонент нейтрино (ν_R) и массивного лептона (e_R) наложить условие симметрии. Еще раз подчеркнем, что оно соответствует симметрии токов левых компонент, построенных из внешних параметров. Как уже отмечалось в §12.6, эта симметрия соответствует трем условиям на константы:

$$a_{11}^2 = a_{22}^2 + A^2; \quad a_{11}^2 = a_{12}^2 + W^2; \quad a_{13}^2 = a_{23}^2 + A^2. \qquad (13.6.4)$$

Из этих условий пять констант выражаются через две независимые. В качестве таковых можно выбрать константы $a_{11}^2 \equiv b^2$ и $a_{33}^2 + A^2 \equiv a^2$. В итоге получаются соотношения (12.6.14) – (12.6.15), где, напомним, независимые константы следующим образом выражаются через две константы g_1 и g_2 модели Вайнберга-Салама:

$$a_{11}^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4}; \quad a^2 = g_1^2. \qquad (13.6.5)$$

13.7 Сопоставление моделей электрослабых взаимодействий в разных парадигмах

Сравним развиваемую здесь модель электрослабых взаимодействий в рамках бинарной геометрофизики отдельно с изложенной в главах 10 и 11 7-мерной геометрической моделью типа теории Калуцы-Клейна и с общепринятой моделью Вайнберга-Салама.

I. Сопоставление с 7-мерной геометрической моделью. Не касаясь общих методов и идей, использованных при построении двух моделей, — они многократно подчеркивались по ходу изложения, — отметим наиболее существенные аналогии между этими теориями:

1. В многомерных геометрических моделях электромагнитные взаимодействия описываются посредством перехода от 4-мерной общей теории относительности (или ее 5-мерной модификации) к (унарной) геометрической теории на единицу большей размерности. В бинарной геометрофизике электромагнитные взаимодействия описываются БСКО (бинарной геометрией) ранга (4,4), на единицу большего, чем это необходимо для описания исходных, невозбужденных состояний. В обеих моделях электромагнетизм представляет собой первую ступень на пути в мир скрытых размерностей (или, точнее, в мир их прообразов — скрытых рангов).

2. В многомерных геометрических моделях слабые взаимодействия через промежуточный Z-бозон описывались (унарной) геометрией размерности, на единицу большей, чем необходимо для описания электромагнитных взаимодействий. В бинарной геометрофизике это соответствует первому каналу (Z-каналу), в котором осуществляется переход между двумя БСКО рангов (4,4) и (5,5). На единицу повышается размерность или ранг, то есть в обеих моделях электрослабые взаимодействия представляют собой второй шаг в мир скрытых размерностей (рангов).

Напомним, что возникновение двух дополнительных размерностей для описания электромагнитных и слабых Z-взаимодействий обосновывается в рамках БСКО ранга (4,4) (см. §3.8), то есть в упрощенной модели электрослабых взаимодействий.

3. В многомерных геометрических моделях Z-бозоны описываются суперпозицией двух векторов λ_μ и σ_μ, соответствующих двум дополнительным координатам x^5 и x^6. В бинарной геометрофизике этому факту можно поставить в соответствие то, что невозбужденное состояние Z-взаимодействий одновременно является возбужденным состоянием с точки зрения прообраза электромагнитного взаимодействия.

4. В 7-мерной (6-мерной) модели электрослабых взаимодействий W-бозоны описывались в рамках той же размерности, что и Z-бозоны, коэффициентами при разложениях векторов λ_μ и σ_μ по экспоненциальным зависимостям от дополнительных координат. Этот факт можно поставить в соответствие существованию второго канала (W-канала) слабых (электрослабых) взаимодействий в бинарной геометрофизике в рамках одного и того же ранга (5,5).

5. Наличие электрического заряда у W-бозонов в многомерных геометрических моделях (и в модели Вайнберга-Салама), соответствует, во-первых, тому, что в бинарной геометрофизике в W-канале для левой компоненты массивного лептона осуществляется переход между рангами (4,4) и (3,3), соответствующий электромагнитному взаимодействию, и, во-вторых, тому, что происходит обмен дополнительными параметрами у правых компонент электрона и нейтрино.

Можно провести и другие аналогии.

II. Сравнение с моделью Вайнберга-Салама производилось на всех этапах построения модели электрослабых взаимодействий в бинарной геометрофизике, тем не менее необходимо особо выделить следующие моменты:

1. Можно утверждать, что в описании электрослабых взаимодействий, начиная с ранга (5,5), бинарная геометрофизика отрывается от необходимости постоянного обращения к общепринятой модели Вайнберга-Салама и формулируется целиком

в рамках своих собственных понятий и закономерностей. Такого нельзя было сказать о 7-мерной геометрической модели электрослабых взаимодействий, как и о других моделях типа теории Калуцы-Клейна.

2. В модели Вайнберга-Салама постулируется изотопическое внутреннее пространство, векторами (спинорами) которого описываются левые компоненты лептонов. В модели бинарной геометрофизики на основе БСКО ранга (5,5) после размерной редукции на БСКО ранга (3,3) автоматически получается 2-мерное комплексное пространство дополнительных параметров, то есть также можно сказать, что компоненты лептонов описываются спинорами во внутреннем пространстве.

3. Прямое сопоставление изотопических спиноров (внутренних параметров) в двух моделях затруднено тем обстоятельством, что в общепринятой теории (в модели Вайнберга-Салама) такие понятия, как электрический заряд, гиперзаряд или проекции изотопического спина, присваиваются частицам независимо от процесса взаимодействия. В бинарной геометрофизике иная ситуация — в ней определяются несколько состояний частиц, и понятия зарядов и других аналогичных характеристик возникает лишь в процессе взаимодействия. Так, массивные лептоны в (электромагнитно) невозбужденном состоянии вообще не обладают электрическим зарядом, — он возникает лишь в результате взаимодействия, то есть после перехода в возбужденное состояние. Другими словами, в каждом процессе взаимодействия лептону сопоставляются два 2-компонентных спинора а не один, как в модели Вайнберга-Салама.

4. В бинарной геометрофизике имеются существенные отличия в описании компонент лептонов во внутреннем пространстве. Назовем наиболее существенные:

а) взаимодействия общепринятых токов левых и правых компонент в бинарной геометрофизике характеризуются дополнительными параметрами противоположных (соответственно, правых и левых) компонент лептонов;

б) нейтрино характеризуются двумя компонентами, а не одной, как это принято в модели Вайнберга-Салама;

в) правая (точнее, по дополнительным параметрам левая) компонента массивного лептона также характеризуется спинором во внутреннем пространстве, а не является изотопическим скаляром, как в модели Вайнберга-Салама.

5. Из отмеченного выше различия характера спиноров во внутренних пространствах следуют отличия и в описании взаимодействий. Напомним, что в модели Вайнберга-Салама свойством $U(1) \times SU(2)$-инвариантности обладает полный лагранжиан взаимодействия, тогда как в бинарной геометрофизике все от-

дельные слагаемые взаимодействий: (ν_L, e_L), (e_L, e_R) и так далее — описываются произведениями определителей из пар внутренних параметров. Можно рассмотреть группу $(SL(2,C)$ или более узкую группу $SU(2))$ преобразований внутренних параметров, тогда взаимодействие между любыми парами компонент лептонов будут характеризоваться инвариантами группы.

6. Если в бинарной геометрофизике ввести группу преобразований пар дополнительных параметров друг через друга, тогда можно говорить о соответствующей инвариантности модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (5,5). В этом также можно усмотреть некую аналогию двух моделей. С этой точки зрения изложенную выше модель можно трактовать как теорию на основе соответствующей группы, но в специальном представлении (в специальной калибровке). Так, для описания слабых взаимодействий в Z-канале совсем не обязательно полагать, что невозбужденные состояния левой и правой компонент массивного лептона характеризуются одной нулевой и одинаковыми ненулевыми параметрами. Это и отражено в произволе 2-компонентных столбцов, найденных в §13.3. Однако подобный подход уже затруднителен при описании прообраза электромагнитных взаимодействий. Нам представляется, что в рамках бинарной геометрофизики групповой подход играет не определяющую, а некую вспомогательную роль, да и то не во всем объеме теории.

7. Как известно, в модели Вайнберга-Салама взаимодействия характеризуются двумя константами g_1 и g_2. В бинарной геометрофизике количество возникающих констант можно связать с числом используемых рангов. Можно высказать следующее утверждение: *каждому рангу учитываемой БСКО соответствует своя константа.* Действительно, БСКО ранга (2,2) соответствует постоянная Планка $\hbar$, БСКО ранга (3,3) можно сопоставить массу лептона (m), БСКО рангов (4,4) и (5,5) следует сопоставить две константы. В качестве последних можно выбрать g_1 и g_2 или константы a и b, обсужденные в §12.6.

8. Наконец, следует еще раз подчеркнуть, что здесь производилось сопоставление моделей, как бы разделенных глубокой пропастью. С одной стороны, находилась модель бинарной геометрофизики на самом элементарном уровне ($R_\mu(\mu)$ в верхней части рисунка 1.1), а с другой стороны — многомерная геометрическая модель и модель Вайнберга-Салама, соответствующие теории после осуществления перехода к макроприбору (теории типа $R_m(\mu)$ в нижней части рисунка 1.1). Именно после такого перехода при зарядах и токовых комбинациях в модели бинарной геометрофизики возникают пропагаторы соответствующих промежуточных бозонов. В этой главе этот вопрос не обсуждался.

Глава 14

Прообраз электрослабых взаимодействий кварков в рамках БСКО ранга (6,6)

Следуя логике данного в предыдущих главах описания электрослабых взаимодействий лептонов, естественно положить, что представители адронов в слабых взаимодействиях – кварки должны характеризоваться тройками элементов. На основе БСКО ранга (5,5) можно построить приближенную модель электрослабых взаимодействий кварков и лептонов, аналогично тому, как в рамках БСКО ранга (4,4) имелась упрощенная модель взаимодействия лептонов. Однако она не позволяет описывать электрослабые взаимодействий между кварками. Для этой цели необходимо перейти к БСКО более высокого ранга (6,6). Отдавая себе отчет о множестве возникающих на этом пути задач, требующих детальной проработки, охарактеризуем в самых общих чертах возможную модель прообраза электрослабых взаимодействий кварков на основе БСКО ранга (6,6). При этом естественным образом возникает возможность обоснования трех поколений лептонов и кварков и открывается более широкий взгляд на суть элементарных частиц.

14.1 Модель взаимодействия лептонов и кварков на основе БСКО ранга (5,5)

1. Начнем с обсуждения упрощенной модели электрослабых взаимодействий лептонов и кварков. Исходя из представлений о трехкварковой структуре барионов, естественно положить, что и их представители в электрослабых взаимодействиях – кварки описываются тройками элементов в каждом состоянии. Считая, как это делалось в предыдущих главах, что лептоны характеризуются парами элементов, следует положить, что кварк-лептонное взаимодействие описывается неким 5×5-отношением. Минимальный ранг БСКО, где это можно сделать, это (5,5). Тогда взаимодействие таких частиц должно описываться *базовым* 5×5-*отношением* аналогично тому, как в главе 12 упрощенная модель электрослабых взаимодействий двух лептонов описывалась базовым 4×4-отношением БСКО ранга (4,4). Подобное 5×5-отношение графически проиллюстрировано на рисунке 14.1, где слева изображена 10-хвостка бинарной геометрофизики, в середине представлено обобщение диаграммы фейнмановского типа, а справа – стандартная диаграмма рассеяния одной массивной частицы на другой.

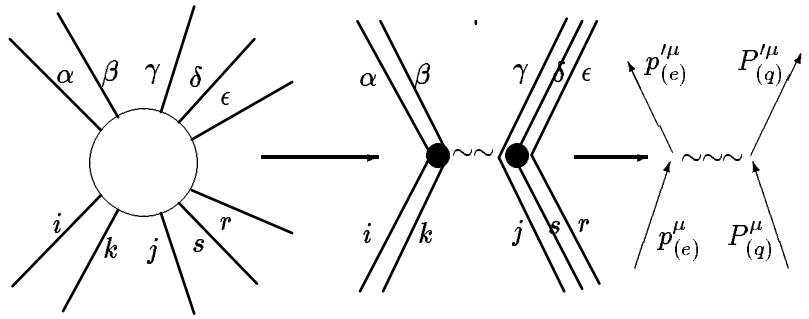


Рис. 14.1: Физическая иллюстрация 5×5- отношения.

2. Базовое 5×5-отношение можно рассмотреть по аналогии с базовым 4×4-отношением БСКО ранга (4,4), обсужденным в главе 3. Оно записывается через окаймленный определитель из отношений между двумя пятерками разноименных элементов и

представляется в видах

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\\ i\;\;k\;\;j\;\;s\;\;r\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\epsilon} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\epsilon} \\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\epsilon} \\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\epsilon} \\ 1 & u_{r\alpha} & u_{r\beta} & u_{r\gamma} & u_{r\delta} & u_{r\epsilon} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i^1 & k^1 & j^1 & s^1 & r^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 & r^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & s^3 & r^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 & r^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 & \epsilon^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \epsilon^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \epsilon^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \epsilon^4 \end{vmatrix}. \qquad (14.1.1)$$

3. Раскладывая определители справа по минорам второй и третьей строк и перемножая их, базовое 5×5-отношение можно представить в форме 10×10-матрицы вида

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\\ i\;\;k\;\;j\;\;s\;\;r\end{matrix}\right\} = \left(\begin{array}{c|ccccccc|ccc}
\star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot
\end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{c|c|c} M(4,0) & +M(3,1) & +M[(2),(2)] \\ \hline +M(3,1) & +M(2,2) & +M(1,3) \\ \hline +M[(2),(2)] & +M(1,3) & +M(0,4) \end{array}\right), \qquad (14.1.2)$$

где звездочками отмечены слагаемые, наиболее интересные для описания взаимодействий. Все слагаемые, отмеченные точкой или звездочкой, представляют собой комбинации вида

$$\begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ i\;\;k\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\,\delta\,\epsilon\\ j\;\;s\;\;r\end{pmatrix} = M(4,0), \qquad (14.1.3)$$

где квадратными скобками отмечены фундаментальные 2×2-отношения, построенные из (внешних) параметров с индексами

1 и 2, а круглыми скобками отмечены комбинации из дополнительных параметров вида

$$\begin{pmatrix} \gamma\ \delta\ \epsilon \\ j\ s\ r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j^3 & s^3 & r^3 \\ j^4 & s^4 & r^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma^3 & \delta^3 & \epsilon^3 \\ \gamma^4 & \delta^4 & \epsilon^4 \end{vmatrix}. \qquad (14.1.4)$$

В последней строке (14.1.2) символами из букв $M(n_1, n_2)$ обозначены соответствующие им прямоугольные матрицы. При этом символом $M(4,0)$, как и в §13.1, обозначена "свободная" часть первой частицы (из двух элементов) (14.1.3), а символом $M(0,4)$ - обозначена 3×3-матрица, соответствующая "свободной" части второй частицы (из трех элементов).

Символическая запись базового 5×5-отношения (14.1.2) аналогична записанной в 6×6-матричном виде формуле (3.1.4), также разделенной горизонтальными и вертикальными линиями. Как и ранее, внутренняя, ограниченная линиями, часть формулы описывает непосредственные взаимодействия частиц. Из нее выделены диагональные слагаемые, определяющие прообраз лагранжиана взаимодействия частиц. Они помечены звездочками.

4. Известно, что, аналогично массивным лептонам, кварки обладают левыми и правыми компонентами. Используя опыт описания нейтрино, в рамках данной модели сформулируем гипотезу: *кварк характеризуется тремя элементами, из которых один обладает нулевыми значениями внешних параметров*[1], то есть

$$q \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} j^1 & s^1 & l^1 \\ j^2 & s^2 & l^2 \\ \hline j^3 & s^3 & l^3 \\ j^4 & s^4 & l^4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc} j^1 & s^1 & 0 \\ j^2 & s^2 & 0 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \end{array}\right). \qquad (14.1.5)$$

Отметим, что в этой формуле элемент с нулевыми значениями внешних параметров расположен справа. Кроме того, в правой

[1]Имеется соблазн по примеру нейтрино (верхнего лептона) и электрона(нижнего лептона) назвать так определенный кварк нижним (d-кварком), а верхний (u-кварк) определить через три элемента, из которых два обладают нулевыми значениями внешних параметров, то есть положить

$$q_u \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} j^1 & s^1 & r^1 \\ j^2 & s^2 & r^2 \\ \hline j^3 & s^3 & r^3 \\ j^4 & s^4 & r^4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc} j^1 & 0 & 0 \\ j^2 & 0 & 0 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \end{array}\right),$$

однако в этом случае возникают трудности с определением левых и правых компонент u-кварка.

матрице введены принятые ранее обозначения для внутренних параметров с той разницей, что вместо символов левых (L) и правых (R) компонент введены числовые индексы от 1 до 3 (в скобках).

5. Подставляя это определение кварков в (14.1.2) и выделяя диагональные элементы средней матрицы $M(2,2)$, можно получить прообраз лагранжиана взаимодействия кварков с лептонами, определенными в предыдущих главах. Далее можно перейти к упрощенной модели взаимодействия электрона с протонами, то есть к модели водородоподобного атома. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной монографии. Здесь отметим лишь, что в данном подходе модель водородоподобного атома, во-первых, строится, начиная с импульсного пространства и, во-вторых, при этом естественным образом проявляется открытая В.А.Фоком O(4)-симметрия атома водорода [00]. Переход к стандартной модели атома водорода в координатном пространстве осуществляется посредством усреднения по элементарным базам, описанного в главе 5.

6. Данная модель на основе БСКО ранга (5,5) обладает рядом недостатков принципиального характера. Назовем два из них:

1) Эта модель может претендовать на описание лишь одного поколения лептонов и кварков.

2) Данная модель не позволяет описать взаимодействие двух барионов. Для этой цели нужно перейти к модели на основе БСКО ранга (6,6).

Имеются и другие недостатки.

14.2 Модель взаимодействия лептонов и кварков на основе БСКО ранга (6,6)

1. Перейдем к более совершенной модели описания электрослабых взаимодействий лептонов и кварков на основе БСКО ранга (6,6).

Согласно общей теории, изложенной в главе 1, закон БСКО ранга (6,6) определяется для шести произвольных пар разноименных элементов и имеет вид

$$\Phi_{(6,6)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} & u_{i\rho} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} & u_{k\rho} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} & u_{j\rho} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} & u_{s\rho} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} & u_{l\rho} \\ u_{r\alpha} & u_{r\beta} & u_{r\gamma} & u_{r\delta} & u_{r\lambda} & u_{r\rho} \end{vmatrix} = 0, \qquad (14.2.1)$$

где парное отношение записывается для элементов, характеризуемых пятью параметрами

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i^4\alpha^4 + i^5\alpha^5. \qquad (14.2.2)$$

2. Очевидно, частицы (кварки), описываемые тремя элементами в каждом состоянии, в общем случае характеризуются следующей матрицей параметров

$$q \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} j^1 & s^1 & l^1 \\ j^2 & s^2 & l^2 \\ \hline j^3 & s^3 & l^3 \\ j^4 & s^4 & l^4 \\ j^5 & s^5 & l^5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc} j^1 & s^1 & l^1 \\ j^2 & s^2 & l^2 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ c^5_{(1)} & c^5_{(2)} & c^5_{(3)} \end{array}\right), \qquad (14.2.3)$$

где горизонтальными линиями разделены внешние и внутренние параметры. Здесь использованы введенные в (14.1.5) и (14.4.6) обозначения для внутренних параметров.

Аналогично, лептоны в самом общем случае теперь должны характеризоваться следующей матрицей параметров

$$e \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \\ \hline i^3 & k^3 \\ i^4 & k^4 \\ i^5 & k^5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \\ \hline c^3_L & c^3_R \\ c^4_L & c^4_R \\ c^5_L & c^5_R \end{array}\right). \qquad (14.2.4)$$

3. Исходя из данных представлений о числах элементов, которыми описываются частицы, приходим к выводу, что теперь для этой цели следует использовать *фундаментальное* 5×5-*отношение* БСКО ранга (6,6)

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;j\;s\;l \end{bmatrix} \equiv \left|\begin{array}{cc|ccc} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} \\ \hline u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cc|ccc} i^1 & k^1 & j^1 & s^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 & l^2 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 & s^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 & l^4 \\ i^5 & k^5 & j^5 & s^5 & l^5 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{cc|ccc} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \lambda^2 \\ \hline \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \lambda^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \lambda^4 \\ \alpha^5 & \beta^5 & \gamma^5 & \delta^5 & \lambda^5 \end{array}\right|. \qquad (14.2.5)$$

Раскладывая его по первым двум строкам (по внешним параметрам), легко убедиться, что оно представляется в виде (14.1.2), где каждый элемент, помеченный точкой или звездочкой, теперь записывается в форме

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ i\;\;k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma\,\delta\,\lambda \\ j\;\;s\;\;l \end{bmatrix}', \tag{14.2.6}$$

где первыми квадратными скобками обозначены фундаментальные 2×2-отношения, построенные из параметров с индексами 1 и 2, а вторыми квадратными скобками, помеченными штрихом, – комбинации из дополнительных параметров вида

$$\begin{bmatrix} \gamma\,\delta\,\lambda \\ j\;\;s\;\;l \end{bmatrix}' = \begin{vmatrix} j^3 & s^3 & l^3 \\ j^4 & s^4 & l^4 \\ j^5 & s^5 & l^5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma^3 & \delta^3 & \lambda^3 \\ \gamma^4 & \delta^4 & \lambda^4 \\ \gamma^5 & \delta^5 & \lambda^5 \end{vmatrix}. \tag{14.2.7}$$

Легко видеть, что взаимодействия между такими частицами в самом общем случае опять описываются шестью диагональными элементами средней матрицы $M(2,2)$ в (14.1.2), помеченными звездочками, а с учетом принятой гипотезы о сути кварков число отличных от нуля диагональных элементов сокращается до четырех и меньше.

4. Для построения на основе БСКО ранга (6,6) реалистической модели электрослабых взаимодействий лептонов и кварков следует решить следующие задачи:

1) Необходимо конкретизировать значения дополнительных параметров с индексом 5 лептона. Положим, что для лептона рассматриваемого поколения они равны нулю, то есть матрица параметров (14.2.4) принимает вид

$$e \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \\ \hline i^3 & k^3 \\ i^4 & k^4 \\ i^5 & k^5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} \\ 0 & 0 \end{array} \right). \tag{14.2.8}$$

2) Следует конкретизировать значения внутренних параметров с индексом 5 кварка. Эту задачу будем решать при заданном виде параметров лептона, исходя из принципа соответствия с ранее решенной в главе 13 задачей описания электрослабых взаимодействий двух лептонов.

5. Обсудим случай взаимодействия массивного лептона и кварка. Прообраз такого действия получается из упрощенного фундаментального 5×5-отношения (14.2.5) вида

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;j\;s\;l \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{cc|ccc} i^1 & k^1 & j^1 & s^1 & 0 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 & 0 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 & s^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 & l^4 \\ 0 & 0 & j^5 & s^5 & l^5 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{cc|ccc} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & 0 \\ \hline \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \lambda^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \lambda^4 \\ 0 & 0 & \gamma^5 & \delta^5 & \lambda^5 \end{array}\right|. \tag{14.2.9}$$

Раскладывая определители по первым двум строкам и учитывая ранее использовавшиеся соображения о выделении диагональных слагаемых, получаем прообраз лагранжиана взаимодействия в форме

$$\tilde{S}_{int}(e,q) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ i\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\delta\,\lambda \\ k\;s\;l \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \beta\,\delta \\ k\;s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma\,\lambda \\ i\;j\;l \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\,\gamma\,\lambda \\ k\;j\;l \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \beta\,\gamma \\ k\;j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,\delta\,\lambda \\ i\;s\;l \end{bmatrix}', \tag{14.2.10}$$

где правые квадратные скобки, помеченные штрихом, записываются согласно (14.2.7).

6. Введем в обозначения дополнительных параметров символы e и q соответственно для массивного лептона и кварка, так что для кварка имеем:

$$\begin{array}{l|l} j^3 = c^3_{q(1)};\;\; j^4 = c^4_{q(1)};\;\; j^5 = c^5_{q(1)}; & \gamma^3 = \tilde{c}^3_{q(1)};\;\; \gamma^4 = \tilde{c}^4_{q(1)};\;\; \gamma^5 = \tilde{c}^5_{q(1)}; \\ s^3 = c^3_{q(2)};\;\; s^4 = c^4_{q(2)};\;\; s^5 = c^5_{q(2)}; & \delta^3 = \tilde{c}^3_{q(2)};\;\; \delta^4 = \tilde{c}^4_{q(2)};\;\; \delta^5 = \tilde{c}^5_{q(2)}; \\ l^3 = c^3_{q(3)};\;\; l^4 = c^4_{q(3)};\;\; l^5 = c^5_{q(3)}; & \lambda^3 = \tilde{c}^3_{q(3)};\;\; \lambda^4 = \tilde{c}^4_{q(3)};\;\; \lambda^5 = \tilde{c}^5_{q(3)}. \end{array} \tag{14.2.11}$$

Из этих параметров можно определить комбинации, имеющие смысл левых и правых компонент кварка:

$$\begin{array}{l|l} c^3_{qR} \equiv c^3_{q(2)}c^5_{q(3)} - c^5_{q(2)}c^3_{q(3)}; & \tilde{c}^3_{qR} \equiv \tilde{c}^3_{q(2)}\tilde{c}^5_{q(3)} - \tilde{c}^5_{q(2)}\tilde{c}^3_{q(3)}; \\ c^4_{qR} \equiv c^4_{q(2)}c^5_{q(3)} - c^5_{q(2)}c^4_{q(3)}; & \tilde{c}^4_{qR} \equiv \tilde{c}^4_{q(2)}\tilde{c}^5_{q(3)} - \tilde{c}^5_{q(2)}\tilde{c}^4_{q(3)}; \\ & \\ c^3_{qL} \equiv c^3_{q(1)}c^5_{q(3)} - c^5_{q(1)}c^3_{q(3)}; & \tilde{c}^3_{qL} \equiv \tilde{c}^3_{q(1)}\tilde{c}^5_{q(3)} - \tilde{c}^5_{q(1)}\tilde{c}^3_{q(3)}; \\ c^4_{qL} \equiv c^4_{q(1)}c^5_{q(3)} - c^5_{q(1)}c^4_{q(3)}; & \tilde{c}^4_{qL} \equiv \tilde{c}^4_{q(1)}\tilde{c}^5_{q(3)} - \tilde{c}^5_{q(1)}\tilde{c}^4_{q(3)}. \end{array} \tag{14.2.12}$$

7. Выражения справа в (14.2.10) можно представить как совокупность из четырех слагаемых, описывающих взаимодействия левых компонент (по “внешним” параметрам) лептона с левыми компонентами кварка, правых компонент лептона с правыми

компонентами кварка и так далее, т.е. в символическом виде имеем

$$\tilde{S}_{int}(e, q_d) = (e_L, q_L) + (e_R, q_R) + (e_L, q_R) + (e_R, q_L). \qquad (14.2.13)$$

Для каждого из этих слагаемых имеем такие же вклады из дополнительных параметров, как и в (13.2.8) – (13.2.11):

$$(e_L, q_L) \Rightarrow -\left(c^3_{eR}c^4_{qR} - c^4_{eR}c^3_{qR}\right) \times \left(\tilde{c}^3_{eR}\tilde{c}^4_{qR} - \tilde{c}^4_{eR}\tilde{c}^3_{qR}\right); \qquad (14.2.14)$$

$$(e_R, q_R) \Rightarrow -\left(c^3_{eL}c^4_{qL} - c^4_{eL}c^3_{qL}\right) \times \left(\tilde{c}^3_{eL}\tilde{c}^4_{qL} - \tilde{c}^4_{eL}\tilde{c}^3_{qL}\right); \qquad (14.2.15)$$

$$(e_L, q_R) \Rightarrow -\left(c^3_{eR}c^4_{qL} - c^4_{eR}c^3_{qL}\right) \times \left(\tilde{c}^3_{eR}\tilde{c}^4_{qL} - \tilde{c}^4_{eR}\tilde{c}^3_{qL}\right); \qquad (14.2.16)$$

$$(e_R, q_L) \Rightarrow -\left(c^3_{eL}c^4_{qR} - c^4_{eL}c^3_{qR}\right) \times \left(\tilde{c}^3_{eL}\tilde{c}^4_{qR} - \tilde{c}^4_{eL}\tilde{c}^3_{qR}\right). \qquad (14.2.17)$$

Далее можно использовать все те выкладки, которые были произведены в предыдущей главе при описании электрослабых взаимодействий двух лептонов, только теперь в качестве соответствующих параметров кварка (второй частицы) следует использовать определители (14.2.12).

14.3 Электрослабые взаимодействия двух кварков

1. Прообраз электрослабых взаимодействий двух кварков описывается базовым 6×6-отношением БСКО ранга (6,6), которое для данного случая имеет вид

$$\left\{\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\lambda\,\rho \\ i\;k\;j\;s\;l\;r \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|ccc} i^1 & k^1 & 0 & s^1 & l^1 & 0 \\ i^2 & k^2 & 0 & s^2 & l^2 & 0 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 & s^3 & l^3 & r^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 & l^4 & r^4 \\ i^5 & k^5 & j^5 & s^5 & l^5 & r^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha^1 & \beta^1 & 0 & \delta^1 & \lambda^1 & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 0 & \delta^2 & \lambda^2 & 0 \\ \hline \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \lambda^3 & \rho^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \lambda^4 & \rho^4 \\ \alpha^5 & \beta^5 & \gamma^5 & \delta^5 & \lambda^5 & \rho^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \tilde{S}_{int}(q_1, q_2). \qquad (14.3.1)$$

Это прообраз действия двух взаимодействующих частиц.

2. Раскладывая определители по первым двум строкам (по внешним спинорным параметрам), приходим к сумме из 36 слагаемых, которые можно записать в виде 6×6-матрицы типа (3.1.4). Из нее опять выделяется 4×4-подматрица, диагональные элементы которой образуют прообраз действия взаимодействия двух кварков

$$\tilde{S}_{int}(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ i & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \lambda & \rho \\ k & j & l & r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \lambda \\ k & l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \delta & \rho \\ i & j & s & r \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ i & l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \rho \\ k & j & s & r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \delta \\ k & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \lambda & \rho \\ i & j & l & r \end{pmatrix}, \qquad (14.3.2)$$

где в каждом из четырех слагаемых левые квадратные скобки, как и ранее, записываются через параметры с номерами 1 и 2, а правые круглые скобки записываются через параметры с индексами 3, 4 и 5, например

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \lambda & \rho \\ k & j & l & r \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{cc|cc} k^3 & j^3 & l^3 & r^3 \\ k^4 & j^4 & l^4 & r^4 \\ k^5 & j^5 & l^5 & r^5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc|cc} \beta^3 & \gamma^3 & \lambda^3 & \rho^3 \\ \beta^4 & \gamma^4 & \lambda^4 & \rho^4 \\ \beta^5 & \gamma^5 & \lambda^5 & \rho^5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|. \qquad (14.3.3)$$

Выражения справа в (14.3.2) можно понимать как совокупность четырех слагаемых, описывающих взаимодействия левых с левыми компонентами (по "внешним" параметрам) двух кварков, правых с правыми и так далее, т.е. в символическом виде имеем

$$\tilde{S}_{int}(q_1, q_2) = (q_{1L}, q_{2L}) + (q_{1R}, q_{2R}) + (q_{1L}, q_{2R}) + (q_{1R}, q_{2L}). \qquad (14.3.4)$$

3. Начнем с обсуждения вкладов из дополнительных параметров в выражение (q_{1L}, q_{2L}), которому соответствует (14.3.3). Рассмотрим один из определителей. Пусть это будет определитель из параметров множества $\mathcal{M}$. Используя обозначения типа (14.2.11), его можно представить в виде

$$(q_{1L}, q_{2L}) \Rightarrow - \left| \begin{array}{cc|cc} k^3 & j^3 & r^3 & l^3 \\ k^4 & j^4 & r^4 & l^4 \\ k^5 & j^5 & r^5 & l^5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} c^3_{1(2)} & c^3_{1(3)} & c^3_{2(2)} & c^3_{2(3)} \\ c^4_{1(2)} & c^4_{1(3)} & c^4_{2(2)} & c^4_{2(3)} \\ c^5_{1(2)} & c^5_{1(3)} & c^5_{2(2)} & c^5_{2(3)} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= (c^3_{1(3)} - c^3_{1(2)})(c^4_{2(2)} c^5_{2(3)} - c^5_{2(2)} c^4_{2(3)}) -$$

$$-(c^4_{1(3)} - c^4_{1(2)})(c^3_{2(2)}c^5_{2(3)} - c^5_{2(2)}c^3_{2(3)})-$$
$$-(c^3_{1(2)}c^5_{1(3)} - c^5_{1(2)}c^3_{1(3)})(c^4_{2(3)} - c^4_{2(2)})+$$
$$+(c^4_{1(2)}c^5_{1(3)} - c^5_{1(2)}c^4_{1(3)})(c^3_{2(3)} - c^3_{2(2)})+$$
$$+(c^5_{1(3)} - c^5_{1(2)})c^{(34)}_{2R} + c^{(34)}_{1R}(c^5_{2(3)} - c^5_{2(2)}), \qquad (14.3.5)$$

где введены новые обозначения:

$$c^{(34)}_R = c^3_{(2)}c^4_{(3)} - c^3_{(3)}c^4_{(2)}. \qquad (14.3.6)$$

4. Для того, чтобы выражение (14.3.5) соответствовало формулам, полученным в предыдущей главе для лептонов, ему необходимо иметь вид

$$(q_{1L}, q_{2L}) \Rightarrow C(\tilde{c}^3_{1R}\tilde{c}^4_{2R} - \tilde{c}^4_{1R}\tilde{c}^3_{2R}), \qquad (14.3.7)$$

где значком с тильдой обозначены выражения, соответствующие параметрам, использованным в предыдущей главе, символом C обозначена некоторая возможная константа. Это налагает на дополнительные параметры ряд условий.

Для того, чтобы исключить в последней строке (14.3.5) ("лишние") слагаемые, содержащие $c^{(34)}_R$, достаточно наложить условия:

$$c^5_{1(2)} = c^5_{1(3)}; \quad c^5_{2(2)} = c^5_{2(3)}. \qquad (14.3.8)$$

Тогда выражение (14.3.5) можно представить в форме

$$(q_{1L}, q_{2L}) \Rightarrow \left(c^5_{1(3)} - c^5_{2(3)}\right) \times$$
$$\times \left[(c^3_{1(2)} - c^3_{1(3)})(c^4_{2(2)} - c^4_{2(3)}) - (c^4_{1(2)} - c^4_{1(3)})(c^3_{2(2)} - c^3_{2(3)})\right], \qquad (14.3.9)$$

соответствующей (14.2.14), если положить для обеих частиц

$$\begin{pmatrix} c^3_R \\ c^4_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3_{(2)} - c^3_{(3)} \\ c^4_{(2)} - c^4_{(3)} \end{pmatrix} \qquad (14.3.10)$$

и, кроме того, если наложить еще одно условие на параметры с индексом 5:

$$c^5_{1(3)} - c^5_{2(3)} = Const. \qquad (14.3.11)$$

Без ущерба для общности здесь можно положить

$$c^5_{1(3)} = -c^5_{2(3)} = \frac{1}{2} \to C = 1. \qquad (14.3.12)$$

Резюмируя обсуждение взаимодействия левых токов, приходим к следующей информации о виде матрицы из внутренних параметров кварка:

$$(e) \to \begin{pmatrix} ? & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ ? & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ ? & \pm 1/2 & \pm 1/2 \end{pmatrix}. \qquad (14.3.13)$$

Здесь первый столбец еще неизвестен, два члена в последней строке равны друг другу.

5. Дополнительные параметры для правых (внешних) вкладов (q_{1R}, q_{2R}) находятся аналогично. Так, на параметры кварков теперь следует наложить условия:

$$c^5_{1(1)} = c^5_{1(3)}; \quad c^5_{2(1)} = c^5_{2(3)}, \qquad (14.3.14)$$

аналогичные (14.3.8). Тогда эффективные левые параметры кварков записываются в виде

$$\begin{pmatrix} c^3_L \\ c^4_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3_{(1)} - c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} - c^4_{(3)} \end{pmatrix}. \qquad (14.3.15)$$

В итоге приходим к формулам, аналогичным (14.3.9) – (14.3.12).

6. Собирая вместе всю информацию о взаимодействии левых и правых токов, приходим к виду полной матрицы из внутренних параметров кварка

$$(q) \to \begin{pmatrix} c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ \pm 1/2 & \pm 1/2 & \pm 1/2 \end{pmatrix}. \qquad (14.3.16)$$

Из вида этой матрицы можно сделать следующие выводы:

1) Все три параметра нижней строки одинаковы, причем для двух взаимодействующих кварков они должны иметь противоположные знаки.

2) Два 2-компонентных столбца из (14.3.10) и (14.3.15) можно сопоставить 2-компонентным столбцам левых и правых внутренних параметров массивного лептона в модели, основанной на

БСКО ранга (5,5) и рассмотренной в главе 13. В частности, для Z-канала можно записать

$$\begin{pmatrix} c^3_{(2)} - c^3_{(3)} \\ c^4_{(2)} - c^4_{(3)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} z_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \right]; \tag{14.3.17}$$

$$\begin{pmatrix} c^3_{(1)} - c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} - c^4_{(3)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} z_3 \\ u_3 \end{pmatrix} \right]. \tag{14.3.18}$$

14.4 Гипотеза о природе трех поколений частиц

Известно, что частицы, участвующие в электрослабых взаимодействиях — лептоны и кварки, составляют три поколения. В современной физике нет общепринятого теоретического обоснования существования именно трех поколений элементарных частиц. Как представляется автору, в бинарной геометрофизике открываются возможности для объяснения этого феноменологического факта. Выскажем несколько гипотез и предположений на этот счет.

1. Начнем обсуждение этой проблемы с **лептонов**. В §14.2 при обсуждении взаимодействия лептонов и кварков в (14.2.8) был использован постулат, что дополнительные внутренние параметры с индексом 5 для лептонов равны нулю ($c^5_L = c^5_R = 0$), однако можно предположить, что этот постулат имеет место лишь для одного (первого) поколения лептонов, тогда как для второго и третьего поколений эти параметры могут быть отличны от нуля. Выскажем гипотезу, *три поколения лептонов обусловлены рангом (6,6) БСКО, необходимой для описания ключевых элементарных частиц и их составляющих (кварков), то есть наличием именно трех внутренних параметров элементов*. Другими словами можно сказать, что понятие поколений лептонов обусловлено существованием адронов (кварков), описываемых БСКО более высокого ранга (6,6), и взаимодействием лептонов с ними.

Относительно конкретных значений трех дополнительных параметров лептонов трех поколений можно высказать ряд предположений. Например, из соображений симметрии можно было бы ожидать, что три поколения лептонов связаны с существованием трех возможных вариантов размещения нулевых значений

одного (или пары) параметров:

$$\begin{pmatrix} c_L^3 & c_R^3 \\ c_L^4 & c_R^4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c_L^3 & c_R^3 \\ 0 & 0 \\ c_L^5 & c_R^5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_L^4 & c_R^4 \\ c_L^5 & c_R^5 \end{pmatrix}. \tag{14.4.1}$$

Однако это предположение вызывает трудности с описанием взаимодействий между лептонами разных поколений. Нет подходящих фундаментальных или базовых 4×4-отношений для единого способа построения прообраза действия двух лептонов разных поколений.

Эту трудность можно преодолеть, допустив, например, что реальные взаимодействия лептонов имеют не 2-частичный, а 3-частичный характер и описываются базовым 6×6-отношением (14.3.1), где две шестерки элементов составляют не пары кварков, а тройки лептонов. Это далеко идущее предположение.

Другое допущение может состоять в том, что лептоны при взаимодействии между собой не различают существования дополнительного параметра и вступают друг с другом в отношения, описываемые БСКО ранга (5,5).

2. Для описания трех поколений **кварков** можно пойти несколькими путями. Назовем два из них. Первый путь можно назвать *горизонтальным*, – исходя из общих соображений симметрии, можно попробовать связать номер поколения с тремя возможными положениями элементов с нулевыми значениями внешних параметров в (14.1.5), то есть со следующими возможными значениями матриц параметров:

$$\left(\begin{array}{ccc} i^1 & k^1 & 0 \\ i^2 & k^2 & 0 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ c^5_{(1)} & c^5_{(2)} & c^5_{(3)} \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccc} i^1 & 0 & j^1 \\ i^2 & 0 & j^2 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ c^5_{(1)} & c^5_{(2)} & c^5_{(3)} \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & k^1 & j^1 \\ 0 & k^2 & j^2 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ c^5_{(1)} & c^5_{(2)} & c^5_{(3)} \end{array}\right). \tag{14.4.2}$$

Очевидно, что имеются только три таких размещения нулевых внешних параметров. Легко показать, что три поколения таких кварков будут одинаково взаимодействовать между собой, причем эти взаимодействия единообразно описываются базовым 6×6-отношением (14.3.1). На этом пути возникают вопросы о причинах нарушения данной симметрии, приводящих к различию трех поколений кварков.

Другой путь можно назвать *вертикальным*, – он аналогичен первому из приведенных выше способов описания трех поколений лептонов. Он состоит в должном подборе внутренних па-

раметров c^3, c^4, c^5, согласующемся с определением поколений лептонов.

В рамках данной БСКО ранга (6,6) имеются и другие подходы к проблеме описания (обоснования) трех поколений элементарных частиц.

14.5 Выводы и замечания по модели на основе БСКО ранга (6,6)

Сделаем ряд выводов и замечаний по изложенному в этой главе материалу:

1. Следует еще раз подчеркнуть, что эта глава не претендует на достаточно полное описание прообраза электрослабых взаимодействий кварков. В ней на полукачественном уровне обсуждены лишь самые общие свойства возможной модели. Тем не менее, можно утверждать, что *БСКО ранга (6,6) составляют достаточную основу для построения искомой теории.*

2. Имеются достаточно веские основания полагать, что *три поколения элементарных частиц* (лептонов и кварков) *обусловлены существованием адронов*, описываемых БСКО ранга (6,6). Изложенное в этой главе лишь подтверждает, что рассмотренная ранее модель на основе БСКО ранга (5,5) представляет собой достаточно полную теорию электрослабых взаимодействий лишь одного поколения лептонов.

3. Принятие модели электрослабых взаимодействий на основе БСКО ранга (6,6) ставит ряд новых вопросов по интерпретации природы электромагнитных и электрослабых взаимодействий лептонов второго и третьего поколений.

4. В этой главе не были затронута проблема масс элементарных частиц. Для ее решения необходимо рассмотреть угловые элементы, получающиеся из базовых 6×6-отношений, и учесть вклады в парные взаимодействия со стороны частиц окружающего мира.

5. Нам представляется, что изложенный здесь подход открывает новый путь для поиска объяснения и классификации наблюдаемой совокупности элементарных частиц и резонансов.

6. Наконец, обратим внимание на тот факт, что если бы теория строилась на основе бинарных систем *вещественных* отношений (БСВО) рангов (5,5) и (6,6), то простая склейка элементов двух множеств, описанная в первой части книги (см. [17, с. 46]), приводила бы к унарным геометриям соответственно трех и четырех измерений, важных для теории классического пространства-времени. Но комплексный характер отношений

содержит в себе значительно больше информации, которая соответствует, во-первых, 4-мерным классическим пространственно-временным отношениям, во-вторых, содержит прообраз (основания) дополнительных размерностей, вскрытых многомерными геометрическими моделями типа теории Калуцы-Клейна, и, в-третьих, включает в себя основания для описания ряда других свойств физики микромира, таких как ароматические или цветовые характеристики элементарных частиц.

Раздел VI

Сильные взаимодействия

В этом разделе сделан следующий шаг в развитии реляционной теории пространства-времени и физических взаимодействий — произведен переход от грави-электрослабых взаимодействий к описанию грави-сильных взаимодействий также с позиций нескольких парадигм. Опять сопоставляются четыре физические парадигмы:

1) наиболее глубокая, девятая, соответствующая бинарной геометрофизике;

2) промежуточная третья (теория прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа);

3) геометризованная, пятая (многомерные модели типа теории Калуцы-Клейна) и

4) общепринятая первая (калибровочный подход к описанию физических взаимодействий).

Поскольку при построении каждой новой теории, прежде всего, нужно показать выполнение принципа соответствия с уже существующей теорией (парадигмой), этот раздел начинается с главы (15), в которой изложены ключевые положения теории сильных взаимодействий в рамках общепринятой первой физической парадигмы. В следующей главе (16) развита 8-мерная геометрическая модель грави-сильных взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. В заключительной главе (17) сильные взаимодействия обсуждены с позиций бинарной геометрофизики (в рамках БСКО ранга (6,6)).

Глава 15

Начала хромодинамики

В этой главе кратко изложены самые необходимые для дальнейшего сведения из классической хромодинамики – современной калибровочной теории сильных взаимодействий (более подробно см., например, в [48, 85]). Как известно, хромодинамика является типичной теорией поля, поэтому от нее к бинарной геометрофизике необходимо перебросить мостик в виде версии этой теории в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа, что также сделано в этой главе.

15.1 Основные положения хромодинамики

1. Современная теория сильных взаимодействий, именуемая *хромодинамикой*, опирается на следующие ключевые положения:

1) Хромодинамика строится в рамках заранее заданного классического (координатного) пространства-времени, что означает использование всех сопутствующих этому понятий, таких как координаты, частные производные и т.д.

2) Теория сильных взаимодействий основана на принципах калибровочного подхода. Используется группа внутренних симметрий $SU(3)$; сильные взаимодействия вводятся посредством локализации этой группы. Напомним, основные положения калибровочного подхода изложены в §9.1.

3) Понятие "хромодинамика" связано с цветовыми терминами, присваимыми трем квантовым состояниям кварков. Говорят, что кварки обладают *тремя цветами* (цветовыми зарядами),

т.е. образуют цветовой триплет

$$q_{(j)} = \begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \\ q_{(3)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_R \\ q_Y \\ q_G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{красный} \\ \text{желтый} \\ \text{зеленый} \end{pmatrix}. \qquad (15.1.1)$$

4) Поскольку группа $SU(3)$ является 8-параметрической, то при локализации этой группы возникают 8 векторных полей V_μ^a, которые именуются *глюонами*; здесь индекс a принимает значения: 1, 2, ..., 8. Полагается, что сильные взаимодействия переносятся глюонами.

5) Кварки участвуют как в сильных, так и в слабых взаимодействиях, поэтому они характеризуются двумя сортами компонент $q_{f(j)}$, где f определяет ароматический заряд (электрослабые взаимодействия), а (j) – цветовой заряд.

6) Кварки обладают свойством *асимптотической свободы* на малых расстояниях и *конфайнмента* на больших. В свободном состоянии они ненаблюдаемы. Все физически наблюдаемые частицы (например, барионы и мезоны) представляют собой синглетные, т.е. бесцветные комбинации из кварков.

2. *Лагранжиан хромодинамики* в каноническом виде записывается следующим образом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(a)} F_{(a)}^{\mu\nu} + \left[\sum_{(f)} \overline{q}_f (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu^\star - m_{(f)} c^2) q_f + (h.c.) \right], \quad (15.1.2)$$

где сумма берется по всем ароматам f кварков, $\partial_\mu^\star$ – оператор удлиненной производной, определенный ниже, $m_{(f)}$ – масса кварка с ароматом f, не зависящая от цвета. В этом выражении опущены цветовые индексы кварковых полей, так как использована матричная запись, где под q понимается вектор-столбец из трех 4-компонентных функций. В этой главе ароматические свойства сильно взаимодействующих частиц рассматриваться не будут.

Первая часть в (15.1.2) справа определяет бозонный сектор теории, а оставшаяся часть справа – фермионный сектор.

15.2 Фермионный сектор хромодинамики

1. Выделим из (15.1.2) и обсудим фермионную часть плотности лагранжиана хромодинамики (без массовых вкладов)

$$\mathcal{L}_F = i\hbar c \overline{q} \gamma^\mu \partial_\mu^\star q + (h.c.). \qquad (15.2.1)$$

В нее входит *оператор удлиненной производной*, имеющий вид

$$\partial^{\star}_{\mu} = \partial_{\mu} + ig_o\vec{V}_{\mu} = \partial_{\mu} + i\frac{g_o}{2\hbar c}\lambda_a V^a_{\mu}, \qquad (15.2.2)$$

где V^a_{μ} – калибровочные поля сильных взаимодействий (a=1,2,. . ., 8), λ_a – матрицы Гелл-Манна, g_o – калибровочная константа связи по группе $SU(3)$. Здесь везде подразумевается матричная запись, т.е.

$$\partial_{\mu} \to I_3\partial_{\mu},$$

где I_3 – единичная 3×3-матрица.

2. Приведем вид матриц Гелл-Манна в наиболее часто встречающемся представлении

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\\
&\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\\
&\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\\
&\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \qquad (15.2.3)$$

3. Оператор (15.2.2) можно переписать в ином виде

$$\partial^{\star}_{\mu} = I_3\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + I_3\frac{ig_o}{2\hbar c}\lambda_3\mathcal{A}_{\mu} + I_3\frac{ig_o}{2\hbar c}\lambda_8\mathcal{B}_{\mu} + \frac{ig_o}{2\hbar c}\lambda_n V^n_{\mu}, \qquad (15.2.4)$$

где индекс n пробегает значения: 1, 2, 4, 5, 6, 7. Здесь введены новые обозначения для двух (нейтральных) калибровочных векторных полей, стоящих при диагональных матрицах Гелл-Манна:

$$V^3_{\mu} \equiv \mathcal{A}_{\mu}; \qquad V^8_{\mu} \equiv \mathcal{B}_{\mu}. \qquad (15.2.5)$$

Поскольку матрицы λ_3 и λ_8 эрмитовы, можно им сопоставить две характеристики цветовых зарядов: Q_a - цветовой изотопический заряд и Q_b - гиперцветовой заряд, которые являются

источниками нейтральных глюонных полей A_μ и B_μ соответственно. Значения этих зарядов (в единицах g_o) для основных частиц: кварков и глюонов, рассматриваемых в хромодинамике, приведены в таблице

Частицы		Q_a	Q_b
Кварки	$q_{(1)} \equiv q_R$	$1/2$	$1/(2\sqrt{3})$
	$q_{(2)} \equiv q_Y$	$-1/2$	$1/(2\sqrt{3})$
	$q_{(3)} \equiv q_G$	0	$-1/\sqrt{3}$
Глюоны	$\mathcal{A}_\mu, \quad \mathcal{B}_\mu$	0	0
	X_μ^+	-1	0
	Y_μ^+	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
	Z_μ^+	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$

Используя введенные заряды, оператор (15.2.4) можно переписать еще в одном виде

$$\partial_\mu^\star = I_3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} + I_3 \frac{ig_o}{\hbar c} Q_a \mathcal{A}_\mu + I_3 \frac{ig_o}{\hbar c} Q_b \mathcal{B}_\mu + \frac{ig_o}{2\hbar c} \lambda_n V_\mu^n, \qquad (15.2.6)$$

4. Приведенное в (15.2.3) представление матриц Гелл-Манна по ряду соображений не является удобным. Перейдем к другому представлению, известному в литературе под названием *представление в базисе Картана-Вейля*. В этом представлении матрицы λ_3 и λ_8 остаются прежними, а остальные попарно группируются следующим образом

$$\begin{aligned}
\tau_{12} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\tau_{21} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\tau_{13} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\tau_{31} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (15.2.7) \\
\tau_{23} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\tau_{32} = \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Операторы, соответствующие матрицам τ_{ab}, действуют как повышающие и понижающие операторы в 3-мерном цветовом пространстве. Расположения единиц показывают, какое значение цветового заряда в какое новое место перебрасывает соответствующий оператор.

5. Перепишем фермионную часть лагранжиана хромодинамики (в безмассовом пределе) в новом представлении матриц Гелл-Манна

$$\mathcal{L}_F = \hbar c \left[i\overline{q}\gamma^\mu \partial_\mu q - \frac{g_o}{2\hbar c}\overline{q}\gamma^\mu V_\mu^a \lambda_a q \right] + (h.c.) =$$

$$= \hbar c \left\{ i\overline{q}\gamma^\mu \partial_\mu q - \frac{g_o}{2\hbar c}\overline{q}\gamma^\mu \left[(\lambda_3 \mathcal{A}_\mu + \lambda_8 \mathcal{B}_\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{2}(\tau_{21}X_\mu^+ + \tau_{31}Y_\mu^+ + \tau_{32}Z_\mu^+ + \tau_{12}X_\mu^- + \tau_{13}Y_\mu^- + \tau_{23}Z_\mu^-) \right] q \right\} +$$

$$+ (h.c.), \qquad (15.2.8)$$

где введены новые обозначения для комбинаций из 6 заряженных (в смысле цвета) глюонных полей:

$$X_\mu^+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^1 + iV_\mu^2); \quad X_\mu^- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^1 - iV_\mu^2);$$

$$Y_\mu^+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^4 + iV_\mu^5); \quad Y_\mu^- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^4 - iV_\mu^5); \qquad (15.2.9)$$

$$Z_\mu^+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^6 + iV_\mu^7); \quad Z_\mu^- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^6 - iV_\mu^7).$$

Поскольку определенные так глюонные поля входят в плотность лагранжиана (в удлиненные производные) в комбинациях с соответствующими матрицами τ_{ab}, легко проинтерпретировать роль этих глюонных полей. Они изменяют цветовые заряды соответствующих кварков, т.е. генерируют переходы кварков между состояниями, поясненными на диаграммах рисунка 15.1.

15.3 Бозонный сектор хромодинамики

1. Бозонная часть плотности лагранжиана (15.1.2)

$$\mathcal{L}_{Bos} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(a)} F_{(a)}^{\mu\nu} \qquad (15.3.1)$$

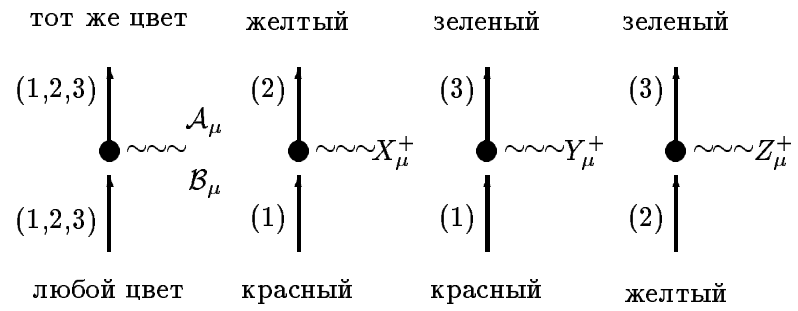


Рис. 15.1: Кварк-глюонные взаимодействия.

записывается через тензоры напряженности калибровочных полей V_μ^a, которые имеют вид

$$F_{\mu\nu}^a = \left(\frac{\partial V_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial V_\mu^a}{\partial x^\nu}\right) - \frac{g_o}{\hbar c} f_{.bc}^a V_\mu^b V_\nu^c, \tag{15.3.2}$$

где $f_{.bc}^a$ – структурные константы группы $SU(3)$, антисимметричные по всем трем индексам, например,

$$f_{123} = -f_{132} = -f_{213} = f_{231} = f_{312} = -f_{321} = 1. \tag{15.3.3}$$

Кроме f_{123} отличны от нуля следующие константы:

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}; \tag{15.3.4}$$

$$f_{458} = f_{478} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{15.3.5}$$

и другие константы, получающиеся из них перестановками индексов. Остальные равны нулю.

Легко показать, что коммутаторы удлиненных производных записываются через тензоры напряженности следующим образом

$$[\partial_\mu^\star, \partial_\nu^\star]_- = i\frac{g_o}{\hbar c}\vec{F}_{\mu\nu} = i\frac{g_o}{2\hbar c}\lambda_a F_{\mu\nu}^a. \tag{15.3.6}$$

2. Плотность лагранжиана (15.3.1) будем рассматривать в базисе Картана-Вейля, то есть запишем ее через заряженные

поля $X^{\pm}_{\mu}, Y^{\pm}_{\mu}, Z^{\pm}_{\mu}$ и нейтральные поля $\mathcal{A}_{\mu}, \mathcal{B}_{\mu}$. Ввиду сложности этого выражения удобно использовать обозначения:

$$F(P) \equiv \frac{\partial P_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial P_{\mu}}{\partial x^{\nu}},$$

где P_{ν} – собирательный образ любого из названных заряженных или нейтральных глюонных полей. Кроме того воспользуемся так называемыми скобками Хуанга [86]:

$$(PQ) \equiv (PQ)_{\mu\nu} \equiv P_{\mu}Q_{\nu} - P_{\nu}Q_{\mu}. \tag{15.3.7}$$

Скобки Хуанга обладают следующими свойствами, позволяющими упрощать вычисления:

$$\begin{aligned}
X^{+}A(BX^{-}) &\equiv X^{+}_{\mu}A_{\nu}(BX^{-})^{\mu\nu} = AX^{+}(X^{-}B);\\
(AX^{-}) &= -(X^{-}A);\\
X^{+}A(BX^{-}) &= -AX^{+}(BX^{-});\\
(AX^{+})(BX^{-}) &= 2AX^{+}(BX^{-});\\
(AX^{-})_{\mu\nu} &= -(AX^{-})_{\nu\mu};\\
AX^{-}(BX^{+}) &= BX^{+}(AX^{-}),
\end{aligned} \tag{15.3.8}$$

где символы A, B являются собирательными обозначениями нейтральных глюонных полей, а символы $X^{\pm}$ – заряженных глюонных полей.

3. Используя введенные обозначения, плотность лагранжиана (15.3.1) можно представить в виде трех слагаемых

$$\mathcal{L}_{Bos} = \mathcal{L}(2)_{Bos} + \mathcal{L}(3)_{Bos} + \mathcal{L}(4)_{Bos}, \tag{15.3.9}$$

представляющих собой соответственно квадратичную, кубичную и комбинацию четвертой степени по глюонным полям. Они имеют вид

$$\mathcal{L}(2)_{Bos} = -\frac{1}{4}\{F(A)^2 + F(B)^2 +$$

$$+2F(X^{+})F(X^{-}) + 2F(Y^{+})F(Y^{-}) + 2F(Z^{+})F(Z^{-})\}; \tag{15.3.10}$$

$$\mathcal{L}(3)_{Bos} = -\frac{ig_o}{4\hbar c}\{F(A)[2(X^{+}X^{-}) + (Y^{+}Y^{-}) - (Z^{+}Z^{-})] +$$

$$+\sqrt{3}F(B)[(Y^{+}Y^{-}) + (Z^{+}Z^{-})] - 2[F(X^{+})(AX^{-}) - F(X^{-})(AX^{+})] -$$

$$-[F(Y^{+})(AY^{-}) - F(Y^{-})(AY^{+})] -$$

$$-\sqrt{3}[F(Y^+)(BY^-) - F(Y^-)(BY^+)]-$$
$$-\sqrt{3}[F(Z^+)(BZ^-) - F(Z^-)(BZ^+)]+$$
$$+[F(Z^+)(AZ^-) - F(Z^-)(AZ^+)]-$$
$$-\sqrt{2}[F(X^+)(Y^-Z^+) - F(X^-)(Y^+Z^-)]-$$
$$-\sqrt{2}[F(Z^+)(X^+Y^-) - F(Z^-)(X^-Y^+)]+$$
$$+\sqrt{2}[F(Y^+)(Z^-X^-) - F(Y^-)(Z^+X^+)]\}; \qquad (15.3.11)$$

$$\mathcal{L}(4)_{Bos} = -\frac{g_o^2}{4(\hbar c)^2}\{2(AX^+)(AX^-)+$$
$$+\frac{1}{2}[(AY^+)(AY^-) + (AZ^+)(AZ^-)]+$$
$$+\frac{3}{2}[(BY^+)(BY^-) + (BZ^+)(BZ^-)]+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}[(AY^+)(BY^-) + (AY^-)(BY^+)]+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}[(AZ^+)(BZ^-) + (AZ^-)(BZ^+)]+$$
$$+[(Y^+Z^-)(Y^-Z^+) + (Z^+X^+)(Z^-X^-) + (X^-Y^+)(X^+Y^-)]+$$
$$+\sqrt{2}[(AX^+)(Y^-Z^+) + (AX^-)(Y^+Z^-)]-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(AY^+)(Z^-X^-) + (AY^-)(Z^+X^+)]-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(AZ^+)(X^+Y^-) + (AZ^-)(X^-Y^+)]-$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2}}[(BY^+)(Z^-X^-) + (BY^-)(Z^+X^+)]+$$
$$+\sqrt{\frac{3}{2}}[(BZ^+)(X^+Y^-) + (BZ^-)(X^-Y^+)]-$$
$$-[(X^-X^+)^2 + (Y^-Y^+)^2 + (Z^-Z^+)^2]-$$
$$-[(X^-X^+)(Y^-Y^+) + (X^-X^+)(Z^-Z^+) + (Y^-Y^+)(Z^-Z^+)]\}. \qquad (15.3.12)$$

4. Заметим, что в случае использования $SU(3) \times U(1)$ - симметричного выражения, аналогичного варианту электрослабых взаимодействий, необходимо ввести еще одно векторное поле M_μ, являющееся синглетом в цветовом изотопическом пространстве. К полной плотности лагранжиана тогда следует добавить слагаемые

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F(M)_{\mu\nu}F(M)^{\mu\nu} - \frac{\tilde{g}_o}{2}\overline{q}\gamma^\mu M_\mu q + (h.c.), \qquad (15.3.13)$$

где $\tilde{g}_o$ - заряд источника нового поля и

$$F(M)_{\mu\nu} = \frac{\partial M_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial M_\mu}{\partial x^\nu} \qquad (15.3.14)$$

- тензор напряженности векторного поля M_μ.

Эти слагаемые понадобятся при обсуждении 8-мерной геометрической (унарной) модели грави-сильных взаимодействий.

15.4 Дальнодействующая версия хромодинамики

1. Как уже отмечалось, современная хромодинамика является типичной теорией поля. В ней сильные взаимодействия между фермионными частицами – кварками переносятся 8 глюонными полями. В развиваемой здесь бинарной геометрофизике полей переносчиков взаимодействий нет среди первичных понятий, поэтому для сопоставления друг с другом двух моделей сильных взаимодействий необходимо промежуточное звено, позволяющее сравнивать теории разной природы. В качестве такого звена, как и в случае описания электромагнитных и электрослабых взаимодействий, предлагается использовать дальнодействующую версию хромодинамики. Построим ее по правилам, изложенным в §9.4.

2. Но прежде, чем это делать, перепишем фермионную часть плотности лагранжиана (15.2.8) в наиболее подходящем для этого виде, соответствующем формуле (9.3.6) в модели электрослабых взаимодействий. Используя вид матриц Гелл-Манна в базисе Картана-Вейля, для плотности лагранжиана взаимодействия находим

$$\mathcal{L}_{F,int} = -\frac{g_o}{2}\mathcal{A}_\mu[(\overline{q}_{(1)}\gamma^\mu q_{(1)}) - (\overline{q}_{(2)}\gamma^\mu q_{(2)})] -$$

$$-\frac{g_o}{2\sqrt{3}}\mathcal{B}_\mu[(\overline{q}_{(1)}\gamma^\mu q_{(1)}) + (\overline{q}_{(2)}\gamma^\mu q_{(2)}) - 2(\overline{q}_{(3)}\gamma^\mu q_{(3)})] -$$

$$-\frac{g_o}{\sqrt{2}}X_\mu^+(\overline{q}_{(2)}\gamma^\mu q_{(1)}) - \frac{g_o}{\sqrt{2}}X_\mu^-(\overline{q}_{(1)}\gamma^\mu q_{(2)}) -$$

$$-\frac{g_o}{\sqrt{2}}Y_\mu^+(\overline{q}_{(3)}\gamma^\mu q_{(1)}) - \frac{g_o}{\sqrt{2}}Y_\mu^-(\overline{q}_{(1)}\gamma^\mu q_{(3)}) -$$

$$-\frac{g_o}{\sqrt{2}}Z_\mu^+(\overline{q}_{(3)}\gamma^\mu q_{(2)}) - \frac{g_o}{\sqrt{2}}Z_\mu^-(\overline{q}_{(2)}\gamma^\mu q_{(3)}) + (h.c.). \qquad (15.4.1)$$

3. Аналогично тому, как это делалось в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия Фоккера-Фейнмана, введем вместо полей в (15.4.1) комбинации из волновых функций кварков второго бариона, с которым непосредственно взаимодействует первый, причем таким образом, чтобы кварки двух барионов входили симметричным образом. Взаимодействия между двумя парами комбинаций из характеристик частиц описываются пропагаторами.

Заметим, что в хромодинамике три кварка, составляющие барион, фактически соответствуют двум компонентам лептонов (левой и правой) в теории электрослабых взаимодействий. Учитывая это, в дальнейших формулах будем понимать индексы (1), (2), (3) соответствующими символам “L” и “R” в модели Вайнберга-Салама, а номера частиц, чтобы не путались с индексами, будем писать в круглых скобках. Тогда для векторных потенциалов, создаваемых вторым барионом в месте нахождения первого бариона, будем иметь

$$\mathcal{A}(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{2}\int[(\overline{q}_{2(1)}\gamma_\mu q_{2(1)}) - (\overline{q}_{2(2)}\gamma_\mu q_{2(2)})]D_A(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.2)$$

$$\mathcal{B}(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{2\sqrt{3}}\int[(\overline{q}_{2(1)}\gamma_\mu q_{2(1)}) + (\overline{q}_{2(2)}\gamma_\mu q_{2(2)}) -$$

$$-2(\overline{q}_{2(3)}\gamma_\mu q_{2(3)})]D_B(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.3)$$

$$X^+(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(2)}\gamma_\mu q_{2(1)})D_{X^+}(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.4)$$

$$X^-(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(1)}\gamma_\mu q_{2(2)})D_{X^-}(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.5)$$

$$Y^+(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(3)}\gamma_\mu q_{2(1)})D_{Y^+}(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.6)$$

$$Y^-(1,2)_\mu = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(1)}\gamma_\mu q_{2(3)})D_{Y^-}(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.7)$$

$$Z^{+}(1,2)_{\mu} = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})D_{Z^{+}}(1,2)d^4x_{(2)}; \qquad (15.4.8)$$

$$Z^{-}(1,2)_{\mu} = -\frac{g_o}{\sqrt{2}}\int(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})D_{Z^{-}}(1,2)d^4x_{(2)}, \qquad (15.4.9)$$

где $D_A(1,2)$, $D_B(1,2)$, $\cdots$ – пропагаторы соответствующих взаимодействий.

4. Подставляя (15.4.2) – (15.4.9) в (15.4.1), находим действие для дальнодействующей версии хромодинамики в виде

$$S_{int}(1,2) = \int\int[\mathcal{L}_A(1,2) + \mathcal{L}_B(1,2) +$$

$$+\mathcal{L}_X(1,2) + \mathcal{L}_Y(1,2) + \mathcal{L}_Z(1,2)]d^4x_{(1)}d^4x_{(2)}, \qquad (15.4.10)$$

где отдельные слагаемые в подинтегральном выражении имеют вид

$$\mathcal{L}_A(1,2) = \frac{g_o^2}{4}[(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)}) - (\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})]\times$$

$$\times[(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) - (\overline{q}_{2(2)}\gamma^{\mu}q_{2(2)})]D_A(1,2); \qquad (15.4.11)$$

$$\mathcal{L}_B(1,2) = \frac{g_o^2}{12}[(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)}) + (\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)}) - 2(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})]\times$$

$$\times[(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) + (\overline{q}_{2(2)}\gamma^{\mu}q_{2(2)}) - 2(\overline{q}_{2(3)}\gamma^{\mu}q_{2(3)})]D_B(1,2); \qquad (15.4.12)$$

$$\mathcal{L}_X(1,2) = \frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})]D_{X^{+}}(1,2) +$$

$$+\frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})]D_{X^{-}}(1,2); \qquad (15.4.13)$$

$$\mathcal{L}_Y(1,2) = \frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})]D_{Y^{+}}(1,2) +$$

$$+\frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})]D_{Y^{-}}(1,2); \qquad (15.4.14)$$

$$\mathcal{L}_Z(1,2) = \frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})]D_{Z^{+}}(1,2) +$$

$$+\frac{g_o^2}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})]D_{Z^{-}}(1,2). \qquad (15.4.15)$$

15.5 Некоторые замечания по калибровочной теории сильных взаимодействий

По изложенной модели классической (не квантовой) хромодинамики можно высказать примерно те же замечания, что и по модели Вайнберга-Салама (см. §9.7).

1. По нашему глубокому убеждению, всякая теория фундаментальных физических взаимодействий должна быть тесно связана со свойствами пространственно-временного многообразия, чего не достигнуто в современной формулировке сильных взаимодействий. Она, как и модель Вайнберга-Салама, имеет феноменологический, временный характер.

2. От более глубокой теории сильных взаимодействий следует ожидать теоретическое обоснование выбора из всех возможных групп Ли именно группы $SU(3)$.

3. Следует признать, что модель хромодинамики опирается на меньшее число постулатов, нежели модель Вайнберга-Салама. В частности, в ней нет того обилия дополнительных постулатов о значениях гиперзаряда и проекций изотопического спина для фигурирующих в модели частиц и полей.

4. В современной хромодинамике ряд вопросов связан с проблемой конфайнмента. Почему кварки ненаблюдаемы в свободных состояниях?

5. Здесь только обозначим проблемы, связанные с описанием масс кварков и вообще сильно взаимодействующих частиц.

Несмотря на эти и другие претензии к модели хромодинамики, в настоящее время она составляет основу описания сильных взаимодействий. Поэтому любая иная вновь предлагаемая модель, прежде всего, должна удовлетворять принципу соответствия с уже установленными ключевыми положениями хромодинамики.

Глава 16

8-Мерная геометрическая модель грави-сильных взаимодействий

В этой главе обсуждена 8-мерная геометрическая (унарная) модель грави-сильных взаимодействий, развиваемая с помощью тех же методов многомерных теорий типа Калуцы-Клейна, что и при построении 7-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий. Показано, что в рамках этой модели можно описать известные соотношения классической хромодинамики.

16.1 Основные идеи 8-мерной геометрической модели грави-сильных взаимодействий.

1. Задачи, решаемые при построении 8-мерной геометрической модели грави-сильных взаимодействий, аналогичны перечисленным в §10.1. Тем не менее, отметим важнейшие из них:

1) Необходимо геометрическими методами описать три типа цветовых зарядов хромодинамики.

2) Поскольку в хромодинамике сильные взаимодействия переносятся 8 типами глюонов, необходимо показать геометрический образ этих физических векторных полей в многомерной геометрической модели.

3) Калибровочная группа $SU(3)$ приводит к существенно нелинейным выражениям в бозонном секторе лагранжиана теории. Следовало показать, что все эти нелинейные слагаемые можно описать в рамках многомерной геометрической модели типа теории Калуцы-Клейна.

4) Следовало продемонстрировать, что в 8-мерной модели можно описать взаимодействие фермионов с глюонами в согласии с фермионным сектором хромодинамики.

В рассматривамом ниже варианте геометрической теории пока не ставилась задача описания масс элементарных частиц.

2. Для решения перечисленных задач были использованы следующие идеи и методы:

1) Анализ показал, что размерности 7 недостаточно для решения данных задач. Было предложено использовать 8-мерную геометрическую модель с сигнатурой $(+---|----)$. Главным доводом в пользу трех дополнительных размерностей (к четырем классическим плюс координате x^4) явилась необходимость описания трех цветовых зарядов (для решения первой из перечисленных задач). Известно, что в теориях Калуцы-Клейна заряды соответствуют дополнительным компонентам импульсов. Три заряда – три новых размерности (импульса). Будем обозначать три новые дополнительные координаты индексами x^7, x^8, x^9, имея ввиду, что все предыдущие номера уже были заняты для описания классического 4-мерного пространства-времени и электрослабых взаимодействий.

Заметим, что в §11.5 уже вводились дополнительные размерности для описания трех поколений лептонов. Если ставить задачу объединения грави-электрослабых и сильных взаимодействий, то естественно было бы опереться на тот же набор из 9 размерностей с дополнительными координатами x^5, x^7, x^8. Однако на этом пути возникает ряд дополнительных проблем, поэтому пока сосредоточимся на описании (объединении с гравитацией) исключительно сильных взаимодействий.

2) Три дополнительные размерности выбираются компактифицированными. Опять предлагается использовать топологию 3-тора. Это означает, что все поля, обладающие цветовыми зарядами, должны циклическим образом зависеть от дополнительных координат. Для описания трех цветовых состояний кварков $q_{(j)}$ предлагается использовать следующую их зависимость от дополнительных координат:

$$q_{(1)} \sim \exp(i\gamma x^7); \quad q_{(2)} \sim \exp(i\gamma x^8); \quad q_{(3)} \sim \exp(i\gamma x^9), \quad (16.1.1)$$

где γ - некая новая константа, определяющая период компактификации дополнительных размерностей, характеризующих силь-

ные взаимодействия. Из-за симметрии в хромодинамике всех трех зарядов положено, что радиусы компактификации одинаковы для этих трех измерений.

3) Для описания 8 глюонов предлагается использовать метрический вариант 8-мерной теории[1], когда все глюоны описываются компонентами многомерной метрики, как и в случае 7-мерной модели грави-электрослабых взаимодействий.

Как было указано в предыдущей главе из 8 глюонов два являются нейтральными по цветовым зарядам, а шесть – заряженными. В согласии с определенной в (16.1.1) зависимостью кварков от дополнительных координат, цветовым образом заряженные глюоны должны иметь следующие зависимости:

$$X_\mu^\pm \sim \exp[\mp i\gamma(x^7 - x^8)]; \quad Y_\mu^\pm \sim \exp[\mp i\gamma(x^7 - x^9)];$$

$$Z_\mu^\pm \sim \exp[\mp i\gamma(x^8 - x^9)]. \tag{16.1.2}$$

4) Как указывалось в §10.2, в стандартном подходе к описанию спиноров в рамках алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел имеется жесткая связь между размерностью, сигнатурой многообразия и числом компонент спиноров. Для размерности 8 следует использовать 16-компонентные спиноры.

5) В согласии с духом общей теории относительности и многомерных теорий Калуцы-Клейна в качестве ключевого (базового) выражения модели выбирается *8-мерная гиперплотность лагранжиана*, слагающаяся из геометрической части (скалярной кривизны) и внешней к геометрии спинорной материи

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-G^{(8)}}\left[-\frac{{}^8R}{2\tilde{æ}c} + \frac{i\hbar c}{2}\overline{\Psi}\Gamma^M\nabla_M\Psi + (h.c.)\right]. \tag{16.1.3}$$

Здесь все обозначения те же, что и в 7-мерной модели, рассмотренной в главах 10 и 11. Ковариантные производные от спинора по-прежнему определяются формулой (10.1.3), где индексы пробегают 8 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, и используются 8-мерные

[1]В нашей работе [11] был развит в качестве предварительного шага торсионно-метрический вариант 7-мерной теории, в котором нейтральные (в цветовом смысле) глюоны описывались многомерной метрикой, как фотоны в 5-мерной теории Калуцы, а заряженные глюоны вводились посредством тензора кручения. Кроме того, в работах А.В.Мишакова [42, 45] был исследован 7-мерный метрический вариант грави-сильных взаимодействий. Было показано, что семи измерений недостаточно для построения одновременно как бозонного, так и фермионного секторов теории. 8-Мерный вариант исследовался совместно с А.Н.Губановым.

коэффициенты вращения Риччи. Для 16-рядных матриц Γ_M, обобщающих матрицы Дирака, имеют место соотношения связи с компонентами метрического тензора, аналогичные (10.1.4).

6) Как и в предыдущих многомерных геометрических моделях физических взаимодействий, предлагается использовать обобщения монадного метода редукции на 4-мерие. В данном случае это будет тетрадный метод 1+1+1+1+4-расщепления.

7) Для получения окончательных формул опять будет использоваться метод усреднения (интегрирования) исходных 8-мерных выражений по дополнительным координатам.

16.2 Метрика и тетрадные физико-геометрические тензоры

Опираясь на ранее изложенный материал по монадному и диадному методам редукции, изложим самые необходимые сведения о тетрадном методе 1+1+1+1+4-расщепления. Будем следовать прежней схеме изложения: алгебра, физико-геометрические тензоры, ...

1. В тетрадном методе 8-мерный метрический тензор в выбранной выше сигнатуре представляется в следующем виде

$$^8G_{MN} = g_{MN} - \xi_M\xi_N - \zeta_M\zeta_N - \eta_M\eta_N - \omega_M\omega_N, \qquad (16.2.1)$$

где ξ_M, ζ_M, η_M, ω_M – четыре ортонормированные (пространственно-подобные) векторы тетрады.

Будем использовать калибровку типа четырежды хронометрической, когда компоненты векторов тетрады следующим образом связаны с компонентами 8-мерного метрического тензора:

$$\xi^M = \frac{G_4^M}{\sqrt{-G_{44}}}; \quad \omega^M = \frac{\hat{G}_9^M}{\sqrt{-\hat{G}_{99}}}; \quad \eta^M = \frac{\tilde{G}_8^M}{\sqrt{-\tilde{G}_{88}}}; \quad \zeta^M = \frac{\tilde{\tilde{G}}_7^M}{\sqrt{-\tilde{\tilde{G}}_{77}}}, \qquad (16.2.2)$$

где

$$\hat{G}_{MN} = {}^8G_{MN} + \xi_M\xi_N; \quad \tilde{G}_{MN} = \hat{G}_{MN} + \omega_M\omega_N;$$
$$\tilde{\tilde{G}}_{MN} = \tilde{G}_{MN} + \eta_M\eta_N.$$

В тетрадном виде компоненты составляющих метрического тензора имеют довольно громоздкий вид, поэтому ограничимся записью только нескольких величин:

$$\xi_\alpha = \frac{G_{4\alpha}}{\sqrt{-G_{44}}}; \quad \omega_\alpha = \frac{G_{9\alpha}}{\sqrt{-G_{99}}};$$

$$\eta_\alpha = -\frac{G_{99}G_{8\alpha} - G_{89}G_{9\alpha}}{\sqrt{-G_{99}(G_{88}G_{99} - G_{89}^2)}}; \qquad (16.2.3)$$

$$\zeta_\alpha = -(G_{88}G_{99}G_{7\alpha} - G_{89}^2G_{7\alpha} + G_{79}G_{89}G_{8\alpha} - G_{78}G_{99}G_{8\alpha} +$$
$$+G_{78}G_{89}G_{9\alpha} - G_{88}G_{79}G_{9\alpha})(G_{88}G_{99} - G_{89}^2)^{-1/2}\times$$
$$\times(G_{77}G_{88}G_{99} - G_{77}G_{89}^2 - G_{88}G_{79}^2 - G_{99}G_{78}^2 + 2G_{78}G_{79}G_{89})^{-1/2};$$

$$\xi^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}; \quad \omega^9 = \frac{1}{\sqrt{-G_{99}}}; \quad \eta^8 = \frac{\sqrt{-G_{99}}}{\sqrt{G_{88}G_{99} - G_{89}^2}};$$

$$\zeta^7 = \frac{-\sqrt{G_{88}G_{99} - G_{89}^2}}{\sqrt{G_{77}G_{88}G_{99} - G_{77}G_{89}^2 - G_{88}G_{79}^2 - G_{99}G_{78}^2 + 2G_{78}G_{79}G_{89}}}; \qquad (16.2.4)$$

$$g_\alpha^9 = \xi^9\xi_\alpha + \zeta^9\zeta_\alpha + \eta^9\eta_\alpha + \omega^9\omega_\alpha; \quad g_\alpha^8 = \xi^8\xi_\alpha + \zeta^8\zeta_\alpha + \eta^8\eta_\alpha;$$
$$g_\alpha^7 = \xi^7\xi_\alpha + \zeta^7\zeta_\alpha; \quad g_\alpha^4 = \xi^4\xi_\alpha. \qquad (16.2.5)$$

2. В согласии с изложенным ранее будем полагать, что 4-мерные компоненты четырех векторов тетрады циклическим образом зависят от трех дополнительных координат в духе 7-мерных формул (10.2.7) – (10.2.9):

$$\xi_\alpha = C\{a_4\mathcal{A}_\alpha + b_4\mathcal{B}_\alpha +$$
$$+x_4^+X_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + x_4^-X_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^8)] +$$
$$+y_4^+Y_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^9)] + y_4^-Y_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^9)] +$$
$$+z_4^+Z_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^8 - x^9)] + z_4^-Z_\alpha^-\exp[i\gamma(x^8 - x^9)]\}; \qquad (16.2.6)$$

$$\zeta_\alpha = C\{a_7\mathcal{A}_\alpha + b_7\mathcal{B}_\alpha +$$
$$+x_7^+X_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + x_7^-X_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^8)] +$$
$$+y_7^+Y_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^9)] + y_7^-Y_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^9)] +$$
$$+z_7^+Z_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^8 - x^9)] + z_7^-Z_\alpha^-\exp[i\gamma(x^8 - x^9)]\}; \qquad (16.2.7)$$

$$\eta_\alpha = C\{a_8\mathcal{A}_\alpha + b_8\mathcal{B}_\alpha +$$
$$+x_8^+X_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + x_8^-X_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^8)] +$$
$$+y_8^+Y_\alpha^+\exp[-i\gamma(x^7 - x^9)] + y_8^-Y_\alpha^-\exp[i\gamma(x^7 - x^9)] +$$

$$+z_8^+ Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^8 - x^9)] + z_8^- Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^8 - x^9)]\}; \qquad (16.2.8)$$

$$\omega_\alpha = C\{a_9\mathcal{A}_\alpha + b_9\mathcal{B}_\alpha +$$

$$+x_9^+ X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + x_9^- X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^8)] +$$

$$+y_9^+ Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^9)] + y_9^- Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^9)] +$$

$$+z_9^+ Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^8 - x^9)] + z_9^- Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^8 - x^9)]\}, \qquad (16.2.9)$$

где C - некая размерная константа, a_s, b_s, $x_s^\pm$, $y_s^\pm$, $z_s^\pm$ - безразмерные константы (s=4,7,8,9), которые должны быть определены из условий соответствия с бозонным сектором хромодинамики. Векторные поля $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{B}_\alpha$, $X_\alpha^\pm$, $Y_\alpha^\pm$, $Z_\alpha^\pm$ представляют собой 8 глюонных полей (15.2.5), (15.2.9) стандартной хромодинамики.

Заметим, что в выражения (16.2.6) - (16.2.9) в общем случае можно было бы ввести еще два нейтральных векторных поля с соответствующими при них коэффициентами. Теория с такими полями претендует на роль $SU(3) \times U(1) \times U(1)$-симметричной модели. Однако здесь ограничимся частным случаем без таких "лишних" векторных полей.

3. Кроме того, ограничимся случаями, когда недиагональные "скалярные" компоненты векторов тетрады равны нулю:

$$\xi^9 = \xi^8 = \xi^7 = \zeta^8 = \zeta^9 = \eta^9 = 0. \qquad (16.2.10)$$

Естественно также положить,

$$\xi^4 = \zeta^7 = \eta^8 = \omega^9. \qquad (16.2.11)$$

4. В тетрадном методе из составляющих метрического тензора и их первых производных строится ряд физико-геометрических тензоров. Выпишем четыре из них, которые (неявным образом) соответствуют нелинейным тензорам напряженности (с неабелевыми "хвостами") глюонных полей в хромодинамике,

$$F_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{1}{2}[(\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) + \zeta^7(\zeta_\beta\xi_{\alpha,7} - \zeta_\alpha\xi_{\beta,7}) +$$

$$+\eta^8(\eta_\beta\xi_{\alpha,8} - \eta_\alpha\xi_{\beta,8}) + \omega^9(\omega_\beta\xi_{\alpha,9} - \omega_\alpha\xi_{\beta,9})]; \qquad (16.2.12)$$

$$F_{\alpha\beta}^{(7)} = \frac{1}{2}[(\zeta_{\alpha,\beta} - \zeta_{\beta,\alpha}) + \zeta^7(\zeta_\beta\zeta_{\alpha,7} - \zeta_\alpha\zeta_{\beta,7}) +$$

$$+\eta^8(\eta_\beta\zeta_{\alpha,8} - \eta_\alpha\zeta_{\beta,8}) + \omega^9(\omega_\beta\zeta_{\alpha,9} - \omega_\alpha\zeta_{\beta,9})]; \qquad (16.2.13)$$

$$F^{(8)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_{\beta,\alpha}) + \zeta^7(\zeta_\beta \eta_{\alpha,7} - \zeta_\alpha \eta_{\beta,7}) +$$

$$+\eta^8(\eta_\beta \eta_{\alpha,8} - \eta_\alpha \eta_{\beta,8}) + \omega^9(\omega_\beta \eta_{\alpha,9} - \omega_\alpha \eta_{\beta,9})]; \qquad (16.2.14)$$

$$F^{(9)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(\omega_{\alpha,\beta} - \omega_{\beta,\alpha}) + \zeta^7(\zeta_\beta \omega_{\alpha,7} - \zeta_\alpha \omega_{\beta,7}) +$$

$$+\eta^8(\eta_\beta \omega_{\alpha,8} - \eta_\alpha \omega_{\beta,8}) + \omega^9(\omega_\beta \omega_{\alpha,9} - \omega_\alpha \omega_{\beta,9})], \qquad (16.2.15)$$

где нет слагаемых с дифференцированием по x^4, поскольку используется условие цилиндричности по этой координате. Имеется еще ряд отличных от нуля других тетрадных физико-геометрических тензоров, которые дают вклады в массовые слагаемые. Они здесь рассматриваться не будут.

5. Для наших целей основной интерес представляет 8-мерная скалярная кривизна ${}^8R$, входящая в гиперплотность лагранжиана (16.1.3), которая после 1+1+1+1+4-расщепления принимает вид

$${}^8R = {}^4R + F^{(4)}_{\alpha\beta} F^{(4)\alpha\beta} +$$

$$+F^{(7)}_{\alpha\beta} F^{(7)\alpha\beta} + F^{(8)}_{\alpha\beta} F^{(8)\alpha\beta} + F^{(9)}_{\alpha\beta} F^{(9)\alpha\beta} + \ldots, \qquad (16.2.16)$$

где многоточием отмечены вклады других тетрадных физико-геометрических тензоров, описывающих, как уже отмечалось, массовые слагаемые.

6. Бозонный сектор 8-мерной геометрической модели описывается первой частью (справа) в гиперплотности лагранжиана (16.1.3), куда подставлено выражение для 8-мерной скалярной кривизны (16.2.16). Очевидно, что 4-мерная скалярная кривизна описывает гравитацию, а оставшиеся в (16.2.16) справа слагаемые следует сопоставить лагранжиану векторных бозонных полей стандартной хромодинамики в (15.3.9) – (15.3.12). В дальнейшем будем полагать, что гравитационные вклады пренебрежимо малы, и сосредоточимся на обсуждении глюонных вкладов в практически плоском 4-мерном пространстве-времени. Подставляя в (16.2.16) представление компонет векторов тетрады через физические глюонные поля и экспоненциальные слагаемые (16.2.6) – (16.2.9), после усреднения по периодам дополнительных координат находим плотность 4-мерного геометрического лагранжиана. Ввиду громоздкости получающееся выражение не будем выписывать.

Следует показать, что можно подобрать введенные в (16.2.6) – (16.2.9) коэффициенты так, что геометрическая бозонная часть будет совпадать с бозонной частью стандартной хромодинамики.

16.3 Условия на коэффициенты разложения

Из сопоставления плотности геометрического лагранжиана 8-мерной модели грави-сильных взаимодействий с бозонной частью плотности лагранжиана стандартной хромодинамики находятся 46 условий (уравнений) на 33 коэффициента разложения векторов тетрады (смешанных компонент 8-мерной метрики) (16.2.6) – (16.2.9) по физическим векторным полям глюонов и на одну константу

$$C = \frac{\gamma\zeta^7 C}{g_0},$$

где g_0 – константа связи сильных взаимодействий в хромодинамике. По характеру сопоставляемых величин эти условия разбиваются на 5 групп:

1. Условия из сравнения квадратичных комбинаций из глюонных полей:

$$a_4^2 + a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 = 1; \tag{16.3.1}$$

$$b_4^2 + b_7^2 + b_8^2 + b_9^2 = 1; \tag{16.3.2}$$

$$a_4 b_4 + a_7 b_7 + a_8 b_8 + a_9 b_9 = 0; \tag{16.3.3}$$

$$x_4^+ x_4^- + x_7^+ x_7^- + x_8^+ x_8^- + x_9^+ x_9^- = 1; \tag{16.3.4}$$

$$y_4^+ y_4^- + y_7^+ y_7^- + y_8^+ y_8^- + y_9^+ y_9^- = 1; \tag{16.3.5}$$

$$z_4^+ z_4^- + z_7^+ z_7^- + z_8^+ z_8^- + z_9^+ z_9^- = 1. \tag{16.3.6}$$

2. Условия из сравления кубичных комбинаций нейтральных и заряженных глюонных полей:

$$(x_8^- - x_7^-)\sum_i a_i x_i^+ + (x_8^+ - x_7^+)\sum_i a_i x_i^- = \frac{1}{C}; \tag{16.3.7}$$

$$C(a_8 - a_7) = -1; \tag{16.3.8}$$

$$(x_8^- - x_7^-)\sum_i b_i x_i^+ + (x_8^+ - x_7^+)\sum_i b_i x_i^- = 0; \tag{16.3.9}$$

$$C(b_8 - b_7) = 0; \tag{16.3.10}$$

$$(y_9^- - y_7^-)\sum_i a_i y_i^+ + (y_9^+ - y_7^+)\sum_i a_i y_i^- = \frac{1}{2C}; \tag{16.3.11}$$

$$C(a_9 - a_7) = -\frac{1}{2}; \tag{16.3.12}$$

$$(y_9^- - y_7^-)\sum_i b_i y_i^+ + (y_9^+ - y_7^+)\sum_i b_i y_i^- = \frac{\sqrt{3}}{2C}; \tag{16.3.13}$$

$$C(b_9 - b_7) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \tag{16.3.14}$$

$$(z_8^- - z_9^-)\sum_i a_i z_i^+ + (z_8^+ - z_9^+)\sum_i a_i z_i^- = \frac{1}{2C}; \tag{16.3.15}$$

$$C(a_8 - a_9) = -\frac{1}{2}; \tag{16.3.16}$$

$$(z_8^- - z_9^-)\sum_i b_i z_i^+ + (z_8^+ - z_9^+)\sum_i b_i z_i^- = -\frac{\sqrt{3}}{2C}; \tag{16.3.17}$$

$$C(b_9 - b_8) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{16.3.18}$$

Здесь и в дальнейшем производится суммирование по i, пробегающему значения: 4, 7, 8, 9.

3. Условия из сравнения кубичных комбинаций только заряженных глюонных полей:

$$(y_9^- - y_8^-)\sum_i x_i^+ z_i^+ + (z_9^+ - z_7^+)\sum_i x_i^+ y_i^- = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.19}$$

$$(y_9^+ - y_8^+)\sum_i x_i^- z_i^- + (z_9^- - z_7^-)\sum_i x_i^- y_i^+ = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.20}$$

$$(x_8^- - x_9^-)\sum_i y_i^+ z_i^+ + (z_8^- - z_7^-)\sum_i y_i^+ x_i^- = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.21}$$

$$(x_8^+ - x_9^+)\sum_i y_i^- z_i^+ + (z_8^+ - z_7^+)\sum_i y_i^- x_i^+ = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.22}$$

$$(x_7^+ - x_9^+)\sum_i z_i^+ y_i^- + (y_7^- - y_8^-)\sum_i z_i^+ x_i^+ = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.23}$$

$$(x_7^- - x_9^-)\sum_i z_i^- y_i^+ + (y_7^+ - y_8^+)\sum_i z_i^- x_i^- = \frac{1}{C\sqrt{2}}; \tag{16.3.24}$$

4. Условия из сравнения комбинаций четвертой степени только заряженных глюонных полей:

$$(y_9^- - y_8^-)[\sum_i y_i^+ z_i^+ (z_7^- - z_9^-) + \sum_i z_i^+ z_i^- (y_8^+ - y_9^+)]+$$

$$+(z_7^+ - z_9^+)[\sum_i y_i^- z_i^- (y_9^+ - y_8^+) + \sum_i y_i^+ y_i^- (z_9^- - z_7^-)] = -\frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.25}$$

$$(z_7^- - z_8^-)[\sum_i x_i^- z_i^+ (x_8^+ - x_9^+) + \sum_i x_i^+ x_i^- (z_8^+ - z_7^+)]+$$

$$+(x_8^- - x_9^-)[\sum_i x_i^+ z_i^- (z_7^+ - z_8^+) + \sum_i z_i^+ z_i^- (x_9^+ - x_8^+)] = -\frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.26}$$

$$(y_7^- - y_8^-)[\sum_i x_i^+ y_i^+ (x_7^- - x_9^-) + \sum_i x_i^+ x_i^- (y_7^+ - y_8^+)]+$$

$$+(x_7^+ - x_9^+)[\sum_i x_i^- y_i^- (y_7^+ - y_8^+) + \sum_i y_i^+ y_i^- (x_7^- - x_9^-)] = \frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.27}$$

$$(y_7^+ - y_9^+)[\sum_i x_i^- y_i^- (x_7^+ - x_8^+) + \sum_i x_i^+ y_i^- (x_7^- - x_8^-)]+$$

$$+(y_7^- - y_9^-)[\sum_i x_i^- y_i^+ (x_7^+ - x_8^+) + \sum_i x_i^+ y_i^+ (x_7^- - x_8^-)] = \frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.28}$$

$$(x_8^- - x_7^-)[\sum_i x_i^+ z_i^+ (z_9^- - z_8^-) + \sum_i x_i^+ z_i^- (z_9^+ - z_8^+)]+$$

$$+(x_8^+ - x_7^+)[\sum_i x_i^- z_i^+ (z_9^- - z_8^-) + \sum_i x_i^- z_i^- (z_9^+ - z_8^+)] = -\frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.29}$$

$$(y_9^+ - y_7^+)[\sum_i y_i^- z_i^- (z_9^+ - z_8^+) + \sum_i y_i^- z_i^+ (z_9^- - z_8^-)]+$$

$$+(y_9^- - y_7^-)[\sum_i y_i^+ z_i^+ (z_9^- - z_8^-) + \sum_i z_i^- y_i^+ (z_9^+ - z_8^+)] = \frac{1}{2C^2}; \tag{16.3.30}$$

$$(y_8^- - y_7^-)[\sum_i y_i^+ x_i^- (x_7^+ - x_9^+) + \sum_i x_i^+ x_i^- (y_8^+ - y_7^+)]+$$

$$+(x_7^- - x_9^-)[\sum_i y_i^- x_i^+ (y_8^+ - y_7^+) + \sum_i y_i^- y_i^+ (x_7^+ - x_9^+)] = 0; \quad (16.3.31)$$

$$(z_7^+ - z_8^+)[\sum_i x_i^- z_i^- (x_9^+ - x_8^+) + \sum_i x_i^+ x_i^- (z_8^- - z_7^-)] +$$

$$+(x_9^- - x_8^-)[\sum_i z_i^+ x_i^+ (z_7^- - z_8^-) + \sum_i z_i^- z_i^+ (x_8^+ - x_9^+)] = 0; \quad (16.3.32)$$

$$(y_8^- - y_9^-)[\sum_i y_i^+ z_i^- (z_7^+ - z_9^+) + \sum_i z_i^+ z_i^- (y_9^+ - y_8^+)] +$$

$$+(z_7^- - z_9^-)[\sum_i z_i^+ y_i^- (y_8^+ - y_9^+) + \sum_i y_i^- y_i^+ (z_9^+ - z_7^+)] = 0; \quad (16.3.33)$$

$$\sum_i x_i^- x_i^- (x_8^+ - x_7^+)^2 + \sum_i x_i^+ x_i^+ (x_8^- - x_7^-)^2 + 2(x_7^+ - x_8^+)(x_7^- - x_8^-) = \frac{1}{C^2}; \quad (16.3.34)$$

$$\sum_i y_i^- y_i^- (y_9^+ - y_7^+)^2 + \sum_i y_i^+ y_i^+ (y_9^- - y_7^-)^2 + 2(y_7^+ - y_9^+)(y_7^- - y_9^-) = \frac{1}{C^2}; \quad (16.3.35)$$

$$\sum_i z_i^- z_i^- (z_8^+ - z_9^+)^2 + \sum_i z_i^+ z_i^+ (z_8^- - z_9^-)^2 + 2(z_8^+ - z_9^+)(z_8^- - z_9^-) = \frac{1}{C^2}. \quad (16.3.36)$$

5. Условия из сравнений смешанных комбинаций четвертой степени заряженных и нейтральных глюонных полей:

$$(a_8 - a_7)[\sum_i x_i^+ z_i^+ (y_9^- - y_8^-) + \sum_i x_i^+ y_i^- (z_9^+ - z_7^+)] = -\frac{\sqrt{2}}{2C^2}; \quad (16.3.37)$$

$$(a_8 - a_7)[\sum_i x_i^- z_i^- (y_9^+ - y_8^+) + \sum_i x_i^- y_i^+ (z_9^- - z_7^-)] = -\frac{\sqrt{2}}{2C^2}; \quad (16.3.38)$$

$$(a_7 - a_9)[\sum_i y_i^+ z_i^- (x_8^- - x_9^-) + \sum_i x_i^- y_i^+ (z_8^- - z_7^-)] = \frac{1}{2\sqrt{2}C^2}; \quad (16.3.39)$$

$$(b_9 - b_7)[\sum_i x_i^- y_i^+ (z_7^- - z_8^-) + \sum_i z_i^- y_i^+ (x_9^- - x_8^-)] = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}C^2}; \quad (16.3.40)$$

$$(b_9 - b_7)[\sum_i x_i^+ y_i^- (z_7^+ - z_8^+) + \sum_i z_i^+ y_i^- (x_9^+ - x_8^+)] = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}C^2}; \tag{16.3.41}$$

$$(b_9 - b_8)[\sum_i z_i^+ y_i^- (x_7^+ - x_9^+) + \sum_i z_i^+ x_i^+ (y_7^- - y_8^-)] = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}C^2}; \tag{16.3.42}$$

$$(b_9 - b_8)[\sum_i z_i^- y_i^+ (x_7^- - x_9^-) + \sum_i z_i^- x_i^- (y_7^+ - y_8^+)] = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}C^2}; \tag{16.3.43}$$

$$(a_7 - a_9)[\sum_i z_i^+ y_i^- (x_8^+ - x_9^+) + \sum_i y_i^- x_i^+ (z_8^+ - z_7^+)] = \frac{1}{2\sqrt{2}C^2}; \tag{16.3.44}$$

$$(a_8 - a_9)[\sum_i z_i^+ y_i^- (x_9^+ - x_7^+) + \sum_i z_i^+ x_i^+ (y_8^- - y_7^-)] = \frac{1}{2\sqrt{2}C^2}; \tag{16.3.45}$$

$$(a_8 - a_9)[\sum_i z_i^- y_i^+ (x_9^- - x_7^-) + \sum_i z_i^- x_i^- (y_8^+ - y_7^+)] = \frac{1}{2\sqrt{2}C^2}. \tag{16.3.46}$$

16.4 Решение уравнений и их анализ

1. Примечательно, что получившаяся система уравнений не является переопределенной. Из этой системы выделим 9 уравнений под номерами: 1, 2, 3, 8, 10, 12, 14, 16, 18 (здесь имеется ввиду лишь последняя цифра в нумерации формул), куда входят лишь 8 “нейтральных” коэффициентов, и константа C. Из этой подсистемы находим решение:

$$a_4 = 0; \quad a_7 = -a_8 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a_9 = 0; \tag{16.4.1}$$

$$b_4 = 0; \quad b_7 = b_8 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad b_9 = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}; \tag{16.4.2}$$

$$C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{16.4.3}$$

Во всех этих выражениях знаки плюс-минус согласованы друг с другом. Они отражают тот факт, что переменные входят в ряд выражений квадратично.

Любопытно отметить, что решения для двух троек коэффициентов с номерами: 7, 8, 9 соответствуют двум (диагональным) матрицам Гелл-Манна λ_3 и λ_8 из (15.2.3), если их расположить в соответствии с номерами: $7 \to 1$; $8 \to 2$; $9 \to 3$. Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_8 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3; \qquad (16.4.4)$$

$$\begin{pmatrix} b_7 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & 0 \\ 0 & 0 & b_9 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_8. \qquad (16.4.5)$$

2. Подставляя найденные решения в оставшиеся уравнения, находим решения для “заряженных” коэффициентов. Отдельно выпишем коэффициенты с индексами “4”:

$$x_4^+ = x_4^- = y_4^+ = y_4^- = z_4^+ = z_4^- = \pm 1. \qquad (16.4.6)$$

Оставшиеся коэффициенты с индексами: 7, 8, 9 удобно представить в 3-мерном векторном виде, например

$$\vec{x}^{\pm} = (x_7^{\pm}, x_8^{\pm}, x_9^{\pm}).$$

Для них находятся 8 пар решений. Представим их в виде следующей таблицы:

	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант
$\vec{x}^-$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$
$\vec{x}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{y}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
$\vec{z}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \mp 1, 0)$
$\vec{z}^+$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
	5-й вариант	6-й вариант	7-й вариант	8-й вариант
$\vec{x}^-$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{x}^+$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{y}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
$\vec{z}^-$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \pm 1, 0)$
$\vec{z}^+$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$

Совокупность этих решений удваивается за счет выбора двух знаков у коэффициентов с индексами “4” в (16.4.6).

3. Ниже будет показано, что условия, вытекающие из согласования фермионных секторов двух теорий, выделяют первый вариант решения. Вид этого решения соответствует структуре трех пар недиагональных матриц Гелл-Манна в базисе Картана-Вейля (15.2.7), если должным образом построить 3-рядные матрицы из коэффициентов $\vec{x}^{\mp}$, $\vec{y}^{\mp}$, $\vec{z}^{\mp}$. Действительно, образуем шесть 3-рядных матриц из строк: либо из компонент вектора с индексом "-" сверху, либо из компонент вектора с индексом "+" сверху и двух строк из трех нулей. Одна строка из нулей помещается в место, соответствующее номеру индекса, которого нет в соответствующих экспонентах. Например, для векторов $\vec{x}^{\mp}$ экспонента определена в (16.1.2), т.е. в нее входят координаты с индексами 7 и 8, – значит, нужно добавить нулевую третью строку, соответствующую недостающему индексу $9 \to 3$. Другую нулевую строку следует писать согласно следующему правилу. Если взята строка из компонент вектора с индексом "-", то вторая нулевая строка пишется ниже ее; если взята строка из компонент вектора с индексом "+", то вторая нулевая строка пишется выше ее. В итоге будем иметь

$$\begin{pmatrix} \vec{x}^{-} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{12}; \qquad (16.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{x}^{+} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{21}; \qquad (16.4.8)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y}^{-} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{13}; \qquad (16.4.9)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{y}^{+} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{31}; \qquad (16.4.10)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{z}^{-} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{23}; \qquad (16.4.11)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{z}^{+} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm\tau_{32}. \qquad (16.4.12)$$

4. Выпишем явно компоненты тетрады (16.2.6) – (16.2.9) для

первого варианта решения:

$$\xi_\alpha = C_0[X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^8)]+$$

$$+4Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^9)] + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^9)]+$$

$$+Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^8 - x^9)] + Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^8 - x^9)]]; \qquad (16.4.13)$$

$$\zeta_\alpha = C_0[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{B}_\alpha+$$

$$+X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^8)] + Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^7 - x^9)]]; \qquad (16.4.14)$$

$$\eta_\alpha = C_0[-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{B}_\alpha+$$

$$+X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^8)] + Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^8 - x^9)]]; \qquad (16.4.15)$$

$$\omega_\alpha = C_0\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}\mathcal{B}_\alpha + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^7 - x^9)] + Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^8 - x^9)]\right]. \qquad (16.4.16)$$

5. В более раннем варианте 7-мерной метрической модели грави-сильных взаимодействий [45] решалась аналогичная задача нахождения коэффициентов в компонентах триады (16.2.7) – (16.2.9). Были найдены те же самые решения (16.4.1) – (16.4.2) для коэффициентов перед нейтральными векторными полями, а для коэффициентов перед заряженными векторными полями опять получилось 8 пар вариантов решений, которые представлены в виде следующей таблицы:

	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант
$\vec{x}^+$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\mp1, 0, \mp1)$
$\vec{x}^-$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(0, \mp1, \mp1)$
$\vec{y}^+$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(0, \pm1, \pm1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$	$(0, \pm1, \pm1)$
$\vec{z}^+$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$
$\vec{z}^-$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$	$(\pm1, 0, \pm1)$
	5-й вариант	6-й вариант	7-й вариант	8-й вариант
$\vec{x}^+$	$(0, \pm1, \pm1)$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(0, \pm1, \pm1)$	$(\pm1, 0, \pm1)$
$\vec{x}^-$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(0, \pm1, \pm1)$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(0, \pm1, \pm1)$
$\vec{y}^+$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(0, \pm1, \pm1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(0, \mp1, \mp1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$	$(0, \pm1, \pm1)$
$\vec{z}^+$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(\pm1, \pm1, 0)$	$(\mp1, 0, \mp1)$	$(\mp1, \mp1, 0)$
$\vec{z}^-$	$(\pm1, \pm1, 0)$	$(\pm1, 0, \pm1)$	$(\mp1, \mp1, 0)$	$(\mp1, 0, \mp1)$

Таким образом, *имеются по 8 пар вариантов решений для коэффициентов разложения дополнительных смешанных компонент многомерного метрического тензора как в 8-мерной геометрической модели, так и в 7-мерной модели, при которых имеет место совпадение бозонных секторов двух теорий.*

16.5 Тетрадные операторы дифференцирования и нейтральные векторные поля

1. В тетрадном формализме ключевую роль играют пять тетрадных операторов дифференцирования. В качестве таковых можно рассматривать следующие операторы:

$$\partial_4^\star = \xi^M \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow \xi^4 \frac{\partial}{\partial x^4}; \tag{16.5.1}$$

$$\partial_7^\star = \zeta^M \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow \zeta^7 \frac{\partial}{\partial x^7}; \tag{16.5.2}$$

$$\partial_8^\star = \eta^M \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow \eta^8 \frac{\partial}{\partial x^8}; \tag{16.5.3}$$

$$\partial_9^\star = \omega^M \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow \omega^9 \frac{\partial}{\partial x^9}; \tag{16.5.4}$$

$$\partial_\mu^\star = g_\mu^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \xi_\mu \partial_4^\star + \zeta_\mu \partial_7^\star + \eta_\mu \partial_8^\star + \omega_\mu \partial_9^\star. \tag{16.5.5}$$

Действие всех этих операторов не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемых величин.

2. Последний оператор (16.5.5) соответствует удлиненной производной (15.2.6) в хромодинамике. Полагая, что этот оператор действует на произвольную функцию Ψ со следующей зависимостью от дополнительных координат

$$\Psi = \psi(x^\alpha) \exp[i\beta\varepsilon_4 x^4 + i\gamma(\varepsilon_7 x^7 + \varepsilon_8 x^8 + \varepsilon_9 x^9)], \tag{16.5.6}$$

где $\psi(x^\alpha)$ - зависит только от четырех классических координат, и используя решения (16.4.1) – (16.4.2) для коэффициентов при нейтральных векторных полях, получаем для удлиненной производной (16.5.5) выражение

$$\partial_\mu^\star \Psi =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sqrt{2}i\tilde{\gamma}C\frac{\varepsilon_7 - \varepsilon_8}{2}\mathcal{A}_\mu + \sqrt{2}i\tilde{\gamma}C\frac{\varepsilon_7 + \varepsilon_8 - 2\varepsilon_9}{2\sqrt{3}}\mathcal{B}_\mu + \cdots\right]\Psi. \tag{16.5.7}$$

Здесь выбраны верхние знаки в (16.4.1) – (16.4.2); $\tilde{\gamma} = \gamma\eta^7$.

Если бы рассматривался вариант теории с дополнительным нейтральным векторным полем M_μ, то к удлиненной производной (16.5.7) справа добавился бы член

$$\sqrt{6}i\tilde{\gamma}C\frac{\varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9}{3}M_\mu\Psi. \tag{16.5.8}$$

3. Сравнивая удлиненную производную (15.2.6) в стандартной хромодинамике с (16.5.7) в 8-мерной геометрической модели, приходим к следующим отождествлениям:

$$Q_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8); \quad Q_b = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varepsilon_7 + \varepsilon_8 - 2\varepsilon_9). \tag{16.5.9}$$

В случае присутствия дополнительного нейтрального векторного поля M_μ и соответствующего ему слагаемого (16.5.8) естественно ввести еще один заряд

$$Q_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9), \tag{16.5.10}$$

который можно именовать *квазиэлектрическим зарядом.*

4. Используя формулы для зарядов (16.5.9) – (16.5.10) и приведенные ранее в (16.1.1) и (16.1.2) зависимости от дополнительных координат для кварков и глюонов, запишем для всех рассматриваемых частиц гармоники и заряды в виде таблицы, соответствующей таблице в §15.2.

Частицы		ε_7	ε_8	ε_9	Q_a	Q_b	Q_c
Кварки	$q_{(1)} \equiv q_R$	1	0	0	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$1/3$
	$q_{(2)} \equiv q_Y$	0	1	0	$-1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$1/3$
	$q_{(3)} \equiv q_G$	0	0	1	0	$-1/\sqrt{3}$	$1/3$
Глюоны	$\mathcal{A}_\mu, \quad \mathcal{B}_\mu$	0	0	0	0	0	0
	X_μ^+	-1	1	0	-1	0	0
	Y_μ^+	-1	0	1	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	0
	Z_μ^+	0	-1	1	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	0

Здесь все заряды даны в единицах g_o.

5. Наконец, аналогично тому, как это было сделано в §10.5, укажем физический смысл тетрадных операторов дифференцирования (16.5.2) – (16.5.4). *Собственные значения трех комбинаций из них с точностью до коэффициента представляют собой введенные выше значения зарядов*:

$$\frac{1}{2}(\partial_7^\star - \partial_8^\star)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_a\Psi; \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}(\partial_7^\star + \partial_8^\star - 2\partial_9^\star)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_b\Psi; \quad (16.5.11)$$

$$\frac{1}{3}(\partial_7^\star + \partial_8^\star + \partial_9^\star)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_c\Psi. \quad (16.5.12)$$

Оставшийся оператор дифференцирования (16.5.1), как и ранее, будем интерпретировать как массовый.

16.6 Фермионный сектор 8-мерной модели

1. Перейдем к обсуждению фермионного сектора 8-мерной модели грави-сильных взаимодействий. После пренебрежения гравитационным взаимодействием и исключением массовых слагаемых негеометрическая фермионная часть гиперплотности лагранжиана (16.1.3) принимает вид

$$\tilde{\mathcal{L}}_\Psi = \frac{\sqrt{-g}}{2}(i\hbar c\overline{\Psi}\tilde{\Gamma}^\mu\partial_\mu^\star\Psi + \ldots) + (h.c.), \quad (16.6.1)$$

где, напомним, оператор тетрадной удлиненной производной выписан в (16.5.5), а 16-рядные матрицы, обобщающие матрицы Дирака, спроектированы на 4-мерные направления:

$$\tilde{\Gamma}^\mu = \Gamma^M g_M^\mu. \quad (16.6.2)$$

2. Выберем для для матриц $\tilde{\Gamma}^\mu$ следующее представление через стандартные (в плоском пространстве-времени) 4×4-матрицы Дирака γ^μ

$$\tilde{\Gamma}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 & \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu & 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.6.3)$$

В 8-мерном многообразии с данным заданием $\tilde{\Gamma}$- матриц будем использовать 16-компонентные комплексные спиноры

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \\ \Psi(3) \\ \Psi(4) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\Psi} = \Psi^{\dagger}\Gamma(0) = (\overline{\Psi}(4), \overline{\Psi}(3), \overline{\Psi}(2), \overline{\Psi}(1)), \tag{16.6.4}$$

где $\Psi(s)$ и $\overline{\Psi}(s) = \Psi^{\dagger}(s)\gamma(0)$ - 4-компонентные комплексные спиноры ($s = 1, 2, 3, 4$).

3. Учитывая симметрию трех кварков, предлагается использовать следующее представление введенных выше 4-компонентных спиноров через кварковые волновые функции:

$$\Psi(s) = c_s[q_{(1)} \exp(i\gamma x^7) + q_{(2)} \exp(i\gamma x^8) + q_{(3)} \exp(i\gamma x^9)], \tag{16.6.5}$$

где в согласии с (16.1.1) для трех цветов кварков введена циклическая зависимость от дополнительных координат; $q_{(j)}$ – зависящие только от 4 координат части волновых функций кварков, c_s – четыре комплексных коэффициента, которые должны быть определены из условия соответствия с хромодинамикой.

4. Подставляя (16.6.3) и (16.6.4) в (16.6.1) и производя усреднение по периодам дополнительных координат, получаем 4-мерный вид фермионной части плотности лагранжиана. Отождествляя его с фермионным сектором стандартной хромодинамики, получаем систему из 9 независимых алгебраических соотношений между коэффициентами c_s и коэффициентами бозонного сектора a_s, b_s, $x_s^{\pm}$, ... Полагая коэффициенты c_s одинаковыми, эти условия находим в виде

$$a_7 = \frac{1}{2C}; \quad a_8 = -\frac{1}{2C}; \quad a_9 = 0; \tag{16.6.6}$$

$$b_7 = \frac{1}{2\sqrt{3}C}; \quad b_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}C}; \quad b_9 = -\frac{1}{\sqrt{3}C}; \tag{16.6.7}$$

$$x_7^+ + x_8^- = y_7^+ + y_9^- = z_8^+ + z_9^- = \frac{\sqrt{2}}{C} \tag{16.6.8}$$

Кроме того, получается еще одно условие на коэффициенты c_s

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3 + c_4^* c_4 = 1. \tag{16.6.9}$$

5. Подставляя в эти соотношения первый вариант решения для коэффициентов a_s, b_s, $x_s^{\pm}$, ..., выписанный в таблице §16.4

(п.5), находим, что соотношения (16.6.6) – (16.6.8) выполняются тождественно. Условие (16.6.9) удовлетворяется, если положить

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{2}. \qquad (16.6.10)$$

Следует отметить, что из приведенных в таблице §16.4 вариантов решений еще три варианта (третий, пятый и седьмой) удовлетворяют выписанным условиям, если не полагать коэффициенты c_s одинаковыми.

16.7 Выводы и замечания по 8-мерной геометрической модели

Завершая главу, сделаем ряд выводов и замечаний:

1. Можно утверждать, что *в рамках рассмотренной 8-мерной геометрической объединенной модели* гравитационных и сильных взаимодействий (типа теории Калуцы-Клейна) *можно добиться полного соответствия как с бозонным, так и с фермионным секторами стандартной хромодинамики.*

2. В ранее исследовавшемся аналогичными методами варианте 7-мерной геометрической модели грави-сильных взаимодействий [45] получалась иная система условий на коэффициенты, которые не удовлетворялись ни при одном из вариантов решений, приведенных в таблице §16.4 (п.8). Получалось так, что отдельно выполнялись либо условия на "нейтральные" коэффициенты, но не выполнялись условия для "заряженных" коэффициентов (получался противоположный знак), либо наоборот. *Эта трудность преодолевается с помощью дополнительной (массовой) размерности с координатой* x^4, точнее, благодаря использованию дополнительного вектора ξ_μ.

3. В этой главе не рассматривалось введение масс кварков. Массы могут быть введены посредством учета зависимости волновых функций кварков от дополнительной координаты x^4. При этом имеются два способа задания масс. Первый способ состоит в непосредственном дифференцировании функций кварков по координате x^4. Второй способ фактически основан на теории электрослабых взаимодействий кварков. Он осуществляется теми же методами, которыми в главе 11 описывались массы лептонов.

4. За предалами этой главы (и книги) осталось обсуждение проблемы объединения грави-электрослабых и сильных взаимодействий в рамках многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна.

Глава 17

Описание сильных взаимодействий в бинарной геометрофизике

От обсуждения моделей сильных (грави-сильных) взаимодействий в рамках концепции близкодействия (от первой и пятой физических парадигм) перейдем к описанию сильных взаимодействий в концепции дальнодействия, точнее, в рамках бинарной геометрофизики (в девятой физической парадигме). Это означает переход от теорий типа $R_m(\mu)$, находящихся в нижней части блок-схемы рисунка 1.1, к реляционной теории самого глубинного уровня микромира $R_\mu(\mu)$, изображенной в верхней части блок-схемы. В этой главе рассмотрены отношения между элементами, составляющими барионы, еще до процедур перехода к макроприбору и к сопутствующим ему понятиям макромира. Показано, что в рамках БСКО ранга (6,6) описываются закономерности сильных взаимодействий, вскрытые в рамках хромодинамики. Следует подчеркнуть, что здесь изложены лишь исходные, ключевые моменты построения реляционной модели сильных взаимодействий.

17.1 Базовое 6×6-отношение

1. При решении проблемы описания барионов в бинарной геометрофизике, прежде всего, следует иметь ввиду его 3-кварковую структуру. Отобразим этот факт тем, что будем характеризо-

вать барионы тремя элементами в начальном и тремя элементами в конечном состояниях. В отличие от главы 14, где рассматривались токовые (электрослабым образом взаимодействующие) кварки, в этой главе *будем описывать блоковые (сильно взаимодействующие) кварки отдельными элементами БСКО ранга (6,6)*.

В соответствии с ранее принятой методикой описания взаимодействий сложных частиц будем описывать сильное взаимодействие двух барионов *базовым* 6×6*-отношением БСКО ранга (6,6)*. Это означает, что, как и в главе 14, каждый элемент должен характеризоваться пятью параметрами, а бариону (B), например, в начальном состоянии должна сопоставляться прямоугольная матрица из параметров составляющих его элементов вида (14.2.3):

$$B \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 \\ i^5 & k^5 & j^5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ \hline c^3_{(1)} & c^3_{(2)} & c^3_{(3)} \\ c^4_{(1)} & c^4_{(2)} & c^4_{(3)} \\ c^5_{(1)} & c^5_{(2)} & c^5_{(3)} \end{array}\right), \qquad (17.1.1)$$

где верхние две строки опять соответствуют внешним спинорным компонентам, а оставшиеся три строки – дополнительным параметрам, теперь описывающим внутренние степени свободы сильно взаимодействующей частицы. Для обозначения параметров бариона здесь приняты обозначения главы 14.

2. Выпишем явно базовое 6×6-отношение БСКО ранга (6,6)

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\lambda\,\rho \\ i\;\;k\;\;j\;\;s\;\;l\;\;r \end{array}\right\} \equiv \left|\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} & u_{i\rho} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} & u_{k\rho} \\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} & u_{j\rho} \\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} & u_{s\rho} \\ 1 & u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} & u_{l\rho} \\ 1 & u_{r\alpha} & u_{r\beta} & ur\gamma & u_{r\delta} & u_{r\lambda} & u_{r\rho} \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|ccc} i^1 & k^1 & j^1 & s^1 & l^1 & r^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2 & l^2 & r^2 \\ \hline i^3 & k^3 & j^3 & s^3 & l^3 & r^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & s^4 & l^4 & r^4 \\ i^5 & k^5 & j^5 & s^5 & l^5 & r^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 & \lambda^1 & \rho^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \lambda^2 & \rho^2 \\ \hline \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \lambda^3 & \rho^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \lambda^4 & \rho^4 \\ \alpha^5 & \beta^5 & \gamma^5 & \delta^5 & \lambda^5 & \rho^5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|, \qquad (17.1.2)$$

где вертикальные линии подчеркивают тот факт, что первый барион описывается элементами i, k, j, α, β, γ (в согласии с (17.1.1)), а второй барион описывается элементами s, l, r, δ, λ, ρ. Горизонтальная черта в последних определителях отделяет "внешние" параметры (с индексами 1 и 2) от "внутренних" параметров (с индексами 3, 4, 5).

3. Базовое 6×6-отношение можно представить в нескольких видах, аналогично тому, как это делалось для базового 4×4-отношения в §3.1. Как и ранее, нас будет интересовать редуцированное на "4-мерие" выражение, то есть такое, где выделены параметры с индексами 1 и 2, и итоговое выражение имеет $SL(2,C)$-инвариантный вид. Это достигается разложением определителей справа в последней строке (17.1.2) по минорам первой и второй строк. Перемножая их, базовое 6×6-отношение можно представить в форме 15×15-матрицы вида

$$\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\lambda\,\rho \\ i\;k\;j\;s\;l\;r \end{Bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccccccccc|ccc}
\star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \star
\end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{c|c|c}
M(4,0) & +M(3,1) & +M[(2)(2)]+ \\
\hline
+M(3,1) & +M(2,2) & +M(1,3)+ \\
\hline
+M((2),(2)] & +M(1,3) & +M(0,4)
\end{array}\right), \qquad (17.1.3)$$

где в средней матрице отдельные слагаемые обозначены точками или звездочками. Последними отмечены диагональные слагаемые при их расположении в соответствии с §3.1. Нижняя матрица слагается из 9 блоков, очерченных горизонтальными и вертикальными линиями в средней матрице. Она соответствует матрицам, приведенным в (13.1.6) и в (14.1.2).

4. Каждое слагаемое в средней матрице, отмеченное точкой или звездочкой, представляет собой произведение двух комбинаций вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ i & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \lambda & \rho \\ k & j & l & r \end{pmatrix}, \tag{17.1.4}$$

где квадратными скобками, как и ранее, отмечены фундаментальные 2×2-отношения, построенные из параметров с индексами 1 и 2 (как и в (3.1.4)), а круглыми скобками отмечены комбинации из дополнительных параметров вида (14.3.3).

5. Как и в предыдущих разделах левый верхний блок $M(4,0)$ в нижней строке (17.1.3) следует трактовать как прообраз действия первого "свободного" бариона, а правый нижний блок $M(0,4)$ – как прообраз "свободного" действия второго бариона. Легко видеть, что, как и в случае базового 4×4-отношения, взаимодействие между двумя барионами описывается слагаемыми среднего блока $M(2,2)$.

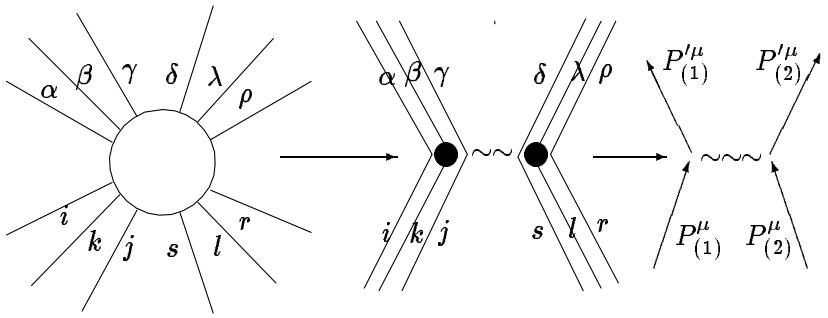


Рис. 17.1: Физическая иллюстрация базового 6×6- отношения.

Физическая интерпретация базового 6×6-отношения проиллюстрирована диаграммами рисунка 17.1, где слева изображена 12-хвостка бинарной геометрофизики. Две тройки нижних линий описывают начальные состояния двух барионов, а две верхние тройки – их конечные состояния. В середине представлено обобщение диаграммы фейнмановского типа, а справа дана стандартная диаграмма рассеяния одной массивной частицы на другой. Очевидно, что данные диаграммы иллюстрируют и электрослабые взаимодействия двух токовых кварков.

17.2 Внешние параметры и прообраз действия взаимодействия

1. Приступая к обсуждению взаимодействия двух барионов, напомним, что в стандартной хромодинамике оно представляется как суммарный итог взаимодействия между собой отдельных кварков, составляющих эти барионы. В согласии с квантовомеханическими представлениями полагается, что каждый кварк может находиться в трех цветовых состояниях, поэтому взаимодействие двух кварков слагается из взаимодействий их возможных состояний. Именно это имелось ввиду при написании формул типа (15.2.8).

В развиваемом здесь подходе (на самом элементарном уровне) имеется существенное различие. Оно состоит в том, что в каждом слагаемом базового 6×6-отношения содержатся параметры 5 кварков в каждом из состояний, то есть ими описываются своеобразные *многоточечные отношения*. Отношения (взаимодействия) приобретают существенно коллективный характер[1]. Трактовка слагаемых как описывающих взаимодействие пар конкретных кварков теперь имеет условный характер. Ее можно произвести по внешним (с индексами 1 и 2) параметрам, из которых строятся общепринятые вектор-векторные комбинации двух кварков. Именно в этом смысле будем понимать приведенные выше формулы хромодинамики (в дальнодействующей версии), то есть как отношения (взаимодействия) между различными кварками двух барионов. При этом не будем забывать, что стандартные квантовомеханические представления связаны с последующим переходом к суммированию (усреднению) по элементарным базам, составляющим макроприбор.

2. Проанализируем слагаемые матрицы $M(2,2)$, описывающей взаимодействие между кварками различных барионов, опираясь на комбинации в квадратных скобках, которые записываются через внешние параметры. Они определяют, как и в главе 3, вектор-векторные отношения пар кварков. Вместо символов левых L и правых R компонент частицы будем писать символы (1), (2) или (3). Пусть для первого бариона b_1 символу (1) соответствуют элементы i и α, символу (2) соответствуют элементы k и β, а символу (3) – элементы j и γ. Аналогично в порядке, как изображено на рисунке 17.1, трем индексам сопоставим элементы второго бариона b_2. В согласии с такой интерпретацией введем новые (промежуточные) обозначения для вектор-векторных

[1] Строго говоря, то же самое можно было бы сказать и про электрослабые взаимодействия, однако там из-за меньшего числа дополнительных параметров это носило менее выраженный характер.

("внешних") частей слагаемых:

$$\begin{bmatrix} s\ s' \\ r\ r' \end{bmatrix},$$

где, как и ранее, в левом столбце снизу записан номер кварка в начальном состоянии первого бариона, сверху в том же левом столбце – номер кварка в конечном состоянии первого бариона, а во втором столбце то же самое, но для второго бариона. В итоге матрицу $M(2,2)$ можно охарактеризовать следующим образом

$$M(2,2) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 1 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 3\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 1\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 1\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 1\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 2\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 2\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 2\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 3\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 3\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 3\ 3 \end{bmatrix}
\end{array}\right] \tag{17.2.1}$$

Очевидно, что этот вид матрицы $M(2,2)$ соответствует приведенному в (3.1.4) виду средней части 4×4-отношения.

3. Перейдем к стандартным обозначениям вектор-векторных комбинаций. Поскольку в данном подходе кварки описываются лишь парами спинорных (внешних) компонент, то аналогично случаю нейтрино введем 4-компонентные столбцы, где эти компоненты будут записываться сверху. Тогда фигурирующие

в (17.2.1) комбинации можно представить, например, в виде

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha\,\delta \\ i\;\;s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) \\
\begin{bmatrix} \alpha\,\lambda \\ i\;\;l \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}), \qquad (17.2.2)
\end{aligned}$$

и так далее.

4. Выделим из (17.2.1) слагаемые, соответствующие прообразу действия взаимодействия двух барионов b_1 и b_2 через **нейтральные глюоны**. Легко видеть, что в данной записи матрицы $M(2,2)$ они находятся на главной диагонали. Используя введенные обозначения и учитывая комбинации из дополнительных параметров (в круглых скобках), прообраз действия взаимодействия через нейтральные глюоны $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{B}_\mu$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{int}^{(A,B)}(b_1,b_2) &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;l\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\rho \\ k\;j\;s\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ k\;j\;s\;l \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ i\;j\;l\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\rho \\ i\;j\;s\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;j\;s\;l \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\lambda\,\rho \\ i\;k\;l\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\rho \\ i\;k\;s\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;s\;l \end{pmatrix}. \qquad (17.2.3)
\end{aligned}$$

Эта формула соответствует (3.3.10).

5. Легко видеть, что диагональными слагаемыми матрицы $M(2,2)$ не описываются взаимодействия кварков через 6 **заря-**

женных глюонов. Глядя на формулы (15.4.13) – (15.4.15), приходим к выводу, что необходимые для этой цели слагаемые находятся за пределами главной диагонали (17.2.1). Они содержат вектор-векторные комбинации видов:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}); \\
\begin{bmatrix} 2\,1 \\ 1\,2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}); \qquad (17.2.4) \\
\begin{bmatrix} 1\,3 \\ 3\,1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}); \\
\begin{bmatrix} 3\,1 \\ 1\,3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}); \qquad (17.2.5) \\
\begin{bmatrix} 2\,3 \\ 3\,2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}); \\
\begin{bmatrix} 3\,2 \\ 2\,3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}). \qquad (17.2.6)
\end{aligned}$$

6. Учитывая коэффициенты из дополнительных параметров, получаем прообраз действия взаимодействия через заряженные глюоны $X^{\pm}_{\mu}$, $Y^{\pm}_{\mu}$, $Z^{\pm}_{\mu}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{(X,Y,Z)}_{int}(b_1,b_2) &= \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\rho \\ i\;j\;l\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;s\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(1)})\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;l\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;s\;l \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(2)})\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;s\;r \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2}(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(3)})\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\rho \\ i\;j\;s\;l \end{pmatrix}.
\end{aligned} \qquad (17.2.7)$$

17.3 Внутренние параметры

1. Выражения в (17.2.1) в круглых скобках записываются через внутренние параметры (с индексами 3, 4, 5) согласно (14.3.3). Разлагая определители по строкам из единиц, легко убедиться, что они расписываются через 3×3-определители, обладающие свойством инвариантности относительно группы $SL(3,C)$ преобразований дополнительных параметров друг через друга. Например, для первого из определителей в (14.3.3) имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k^3 & j^3 & l^3 & r^3 \\ k^4 & j^4 & l^4 & r^4 \\ k^5 & j^4 & l^4 & r^5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} j^3 & l^3 & r^3 \\ j^4 & l^4 & r^4 \\ j^4 & l^4 & r^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k^3 & l^3 & r^3 \\ k^4 & l^4 & r^4 \\ k^5 & l^4 & r^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k^3 & j^3 & r^3 \\ k^4 & j^4 & r^4 \\ k^5 & j^4 & r^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k^3 & j^3 & l^3 \\ k^4 & j^4 & l^4 \\ k^5 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} c^3_{1(3)} & c^3_{2(2)} & c^3_{2(3)} \\ c^4_{1(3)} & c^4_{2(2)} & c^4_{2(3)} \\ c^4_{1(3)} & c^4_{2(2)} & c^5_{2(3)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c^3_{1(2)} & c^3_{2(2)} & c^3_{2(3)} \\ c^4_{1(2)} & c^4_{2(2)} & c^4_{2(3)} \\ c^5_{1(2)} & c^4_{2(2)} & c^5_{2(3)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c^3_{1(2)} & c^3_{1(3)} & c^3_{2(3)} \\ c^4_{1(2)} & c^4_{1(3)} & c^4_{2(3)} \\ c^5_{1(2)} & c^4_{1(3)} & c^5_{2(3)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c^3_{1(2)} & c^3_{1(3)} & c^3_{2(2)} \\ c^4_{1(2)} & c^4_{1(3)} & c^4_{2(2)} \\ c^5_{1(2)} & c^4_{1(3)} & c^4_{2(2)} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv [(3;23) - (2;23) + (23;3) - (23;2)], \qquad (17.3.1)$$

где использованы обозначения для внутренних параметров, введенные в (17.1.1). Без скобок обозначены номера барионов. В последней строке в круглых скобках введены условные обозначения для определителей через комбинации номеров кварков двух барионов, входящих в соответствующий определитель. До точки с запятой стоят номера кварков первого бариона, а после – номера кварков второго бариона.

2. В связи с упомянутым свойством $SL(3,C)$-инвариантности определителей в (17.3.1) напомним, что в 1-й части [17] в главе 5 при обсуждении БСКО ранга (4,4) было введено понятие *3-компонентного (финслерова) спинора*. Было показано, что в рамках теории БСКО открывается новый канал обобщения теории 2-компонентных спиноров.

Общеизвестным является канал обобщения 2-компонентных спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных

чисел [11, 65]. В нем получаются спиноры, обладающие 2^n вещественными, комплексными или кватернионными компонентами в зависимости от размерности и сигнатуры многообразия, в котором они определены. В рассматриваемом здесь канале возможны спиноры с любым числом компонент $r-1$, зависящем от ранга (r,r) БСКО. Так, в рамках БСКО ранга (3,3) возникали общеизвестные 2-компонентные спиноры, тогда как в рамках БСКО ранга (4,4) имеют место 3-компонентные спиноры. В предыдущих главах они не использовались из-за того, что сразу же была произведена редукция на 4-мерие, то есть на понятия БСКО ранга (3,3).

Напомним, что 3-компонентные финслеровы спиноры определяются строго по аналогии с 2-компонентными спинорами, как это кратко изложено в §1.4. Во-первых, это векторы в 3-мерных комплексных пространствах, например, в данном случае

$$i \to \begin{pmatrix} i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix}; \quad \alpha \to (\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5). \tag{17.3.2}$$

Во-вторых, в таком пространстве определена группа линейных преобразований, аналогичная (1.4.4), соответствующая возможным изменениям элементарных базисов. Из нее естественно выделяется группа $SL(3,C)$. Вместо инвариантности 2×2- определителей в (1.4.3) или в (1.4.5) теперь имеет место инварианость 3×3-определителей вида (17.3.1), то есть вместо квадратичной антисимметричной формы возникает кубичная антисимметричная форма. По аналогии с теорией 2-компонентных спиноров можно ввести ко- и контравариантные компоненты спиноров. (При этом имеются некоторые отличия.) Из них по формулам, аналогичным (1.4.7), можно образовать компоненты 9-мерных векторов. Для последних определяются кубичная (финслерова) метрика. Именно это обстоятельство послужило основанием назвать 3-компонентные спиноры финслеровыми.

3. Используя введенные в (17.1.1) обозначения, выпишем коэффициенты из комбинаций дополнительных параметров (в круглых скобках) при вектор-векторных слагаемых в прообразе действия взаимодействия через *нейтральные глюоны* (17.2.3):

$$(\overline{q}_{1(1)}\gamma^\mu q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_\mu q_{2(1)}) \equiv [1;1] \to \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;l\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;23)-(2;23)+(23;3)-(23;2)][\overline{(3;23)}-\overline{(2;23)}+\overline{(23;3)}-\overline{(23;2)}];$$

$$(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}) \equiv [1;2] \to \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\rho \\ k\;j\;s\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;13)-(2;13)+(23;3)-(23;1)][\overline{(3;13)}-\overline{(2;13)}+\overline{(23;3)}-\overline{(23;1)}];$$

$$(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}) \equiv [1;3] \to \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ k\;j\;s\;l \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;12)-(2;12)+(23;2)-(23;1)][\overline{(3;12)}-\overline{(2;12)}+\overline{(23;2)}-\overline{(23;1)}];$$

$$(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) \equiv [2;1] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ i\;j\;l\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;23)-(1;23)+(13;3)-(13;2)][\overline{(3;23)}-\overline{(1;23)}+\overline{(13;3)}-\overline{(13;2)}];$$

$$(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}) \equiv [2;2] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\rho \\ i\;j\;s\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;13)-(1;23)+(13;3)-(13;1)][\overline{(3;13)}-\overline{(1;13)}+\overline{(13;3)}-\overline{(13;1)}];$$

$$(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}) \equiv [2;3] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;j\;s\;l \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= [(3;12)-(1;13)+(13;2)-(13;1)][\overline{(3;12)}-\overline{(1;12)}+\overline{(13;2)}-\overline{(13;1)}];$$

$$(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) \equiv [3;1] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\lambda\,\rho \\ i\;k\;l\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(2;23)-(1;23)+(12;3)-(12;2)][\overline{(2;23)}-\overline{(1;23)}+\overline{(12;3)}-\overline{(12;2)}];$$

$$(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}) \equiv [3;2] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\rho \\ i\;k\;s\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= [(2;13)-(1;13)+(12;3)-(12;1)][\overline{(2;13)}-\overline{(1;13)}+\overline{(12;3)}-\overline{(12;1)}];$$

$$(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}) \equiv [3;3] \to \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;s\;l \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= [(2;12)-(1;12)+(12;2)-(12;1)][\overline{(2;12)}-\overline{(1;12)}+\overline{(12;2)}-\overline{(12;1)}]. \tag{17.3.3}$$

Здесь везде справа вторые комбинации в квадратных скобках соответствуют конечным состояниям. Это отмечено чертой над соответствующими круглыми скобками.

4. Аналогичным образом записываются комбинации из дополнительных параметров в прообразе действия взаимодействия через *заряженные глюоны*

$$(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) \to \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\rho \\ i\;j\;l\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$[(3;23)-(1;23)+(13;3)-(13;2)][\overline{(3;13)}-\overline{(2;13)}+\overline{(23;3)}-\overline{(23;1)}]; \tag{17.3.4}$$

$$(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}) \to \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;s\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$=[(3;13)-(2;13)+(23;3)-(23;1)][\overline{(3;23)}-\overline{(1;23)}+\overline{(13;3)}-\overline{(13;2)}]; \tag{17.3.5}$$

$$(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(1)}) \to \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;l\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$=[(2;23)-(1;23)+(12;3)-(12;2)][\overline{(3;12)}-\overline{(2;12)}+\overline{(23;2)}-\overline{(23;1)}]; \tag{17.3.6}$$

$$(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{2(1)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}) \to \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\lambda\,\rho \\ k\;j\;s\;l \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$=[(3;12)-(2;12)+(23;2)-(23;1)][\overline{(2;23)}-\overline{(1;23)}+\overline{(12;3)}-\overline{(12;2)}]; \tag{17.3.7}$$

$$(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(3)})(\overline{q}_{2(3)}\gamma_{\mu}q_{2(2)}) \to \begin{pmatrix} \alpha\,\gamma\,\delta\,\lambda \\ i\;k\;s\;r \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$=[(2;13)-(1;13)+(12;3)-(12;1)][\overline{(3;12)}-\overline{(1;12)}+\overline{(13;2)}-\overline{(13;1)}]; \tag{17.3.8}$$

$$(\overline{q}_{1(3)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{2(2)}\gamma_{\mu}q_{2(3)}) \to \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\delta\,\rho \\ i\;j\;s\;l \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$=[(3;12)-(1;12)+(13;2)-(13;1)][\overline{(2;13)}-\overline{(1;13)}+\overline{(12;3)}-\overline{(12;1)}]. \tag{17.3.9}$$

17.4 Модель обменного взаимодействия

1. Далее встает вопрос об изменениях дополнительных параметров в результате сильных взаимодействий двух барионов.

Напомним, что в главах 3, 12, 13 и 14 для случая электрослабых взаимодействий лептонов и токовых кварков были определены невозбужденные и возбужденные состояния. Взаимодействие двух частиц, в частности, состояло в обмене значениями дополнительных параметров. Придерживаясь общих правил описания взаимодействий, в данном случае сильных взаимодействий следует сформулировать нечто аналогичное. Спрашивается, какие значения дополнительных параметров следует приписать невозбужденным и возбужденным состояниям бариона? При этом естественно полагать, что задание значений параметров не должно нарушать свойство $SL(3,C)$-инвариантности отдельных определителей.

Рассмотрим упрощенную модель сильных взаимодействий. В ней предлагается описывать невозбужденные состояния бариона коллинеарными 3-мерными векторами (спинорами) $\vec{b}_s \equiv \{c^3_{(s)}, c^4_{(s)}, c^5_{(s)}\}$, где $s = 1, 2, 3$. Очевидно, что в этом случае остается произвол в выборе модулей векторов. Введем три пока неизвестных значения для коэффициентов при соответствующих векторах (спинорах):

$$|\vec{b}_{(1)}| \sim x_1; \quad |\vec{b}_{(2)}| \sim x_2; \quad |\vec{b}_{(3)}| \sim x_3. \tag{17.4.1}$$

Легко видеть, что это условие приводит к тому, что $SL(3,C)$-инвариантные определители в (17.3.1), обращаются в нуль, если содержат два столбца из дополнительных параметров бариона в невозбужденном состоянии.

Пусть аналогичные векторы для возбужденных состояний бариона не являются коллинеарными. Это означает, что имеются лишь три разновидности $SL(3,C)$-инвариантных определителей, составленных из параметров барионов в невозбужденном и возбужденном состояниях. Пусть в возбужденном состоянии находится второй барион. Выразим значения отличных от нуля определителей через новые пока неизвестные числа y_r, где $r = 1, 2, 3$:

$$(s;23) = x_s y_1; \quad (s;12) = x_s y_3; \quad (s;13) = x_s y_2, \tag{17.4.2}$$

где символом s обозначен номер кварка первого бариона.

Для барионов в конечных состояниях имеют место такие же обозначения.

2. Пусть первый барион в начальном состоянии был невозбужденным, а второй барион – возбужденным. В результате взаимодействия первый барион перешел в возбужденное состояние,

а второй – в невозбужденное. Тогда соотношения (17.3.3) в прообразе действия взаимодействия через *нейтральные глюоны* записываются через введенные числа следующим образом

$$[1;1] \Rightarrow y_1^2(x_3 - x_2)^2; \quad [1;2] \Rightarrow y_1 y_2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1);$$

$$[1;3] \Rightarrow y_1 y_3 (x_3 - x_2)(x_2 - x_1); \quad [2;1] \Rightarrow y_1 y_2 (x_3 - x_1)(x_3 - x_2);$$

$$[2;2] \Rightarrow y_2^2(x_3 - x_1)^2; \quad [2;3] \Rightarrow y_2 y_3 (x_3 - x_1)(x_2 - x_1);$$

$$[3;1] \Rightarrow y_1 y_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_2); \quad [3;2] \Rightarrow y_2 y_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1);$$

$$[3;3] \Rightarrow y_3^2(x_2 - x_1)^2. \tag{17.4.3}$$

3. Покажем, что определенный выше механизм описания сильных взаимодействий через обмен барионами значениями дополнительных параметров пригоден для описания взаимодействий кварков через нейтральные глюоны. В главе 15 было показано, что таких глюонов два. Они обозначались символами $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{B}_\mu$. Сопоставляя комбинации из выражений (17.3.3) с известными соотношениями для взаимодействий двух барионов в хромодинамике (в дальнодействующей версии) запишем условия на введенные выше коэффициенты x_s, y_s отдельно для взаимодействия через $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{B}_\mu$ глюоны.

1) Используя (15.4.11), получаем 9 уравнений на 6 введенных величин для случая взаимодействия через промежуточный A-глюон:

$$y_1^2(x_3 - x_2)^2 = \tilde{c}^2; \quad y_1 y_2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = -\tilde{c}^2;$$

$$y_1 y_3 (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = 0; \quad y_1 y_2 (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = -\tilde{c}^2;$$

$$y_2^2(x_3 - x_1)^2 = \tilde{c}^2; \quad y_2 y_3 (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = 0;$$

$$y_1 y_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) = 0; \quad y_2 y_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) = 0;$$

$$y_3^2(x_2 - x_1)^2 = 0, \tag{17.4.4}$$

где $\tilde{c}^2$ – некоторая константа, содержащая в себе константу g_o сильных взаимодействий.

Эта система уравнений оказывается совместной. Ее решения имеют вид:

$$y_1(x_3 - x_2) = \pm\tilde{c}; \quad y_2(x_3 - x_1) = \mp\tilde{c}; \quad y_3(x_2 - x_1) = 0. \tag{17.4.5}$$

2) Используя (15.4.12), получаем другие 9 уравнений на те же 6 величин для случая взаимодействия через промежуточный B-глюон:

$$y_1^2(x_3-x_2)^2=\frac{\tilde{c}^2}{3};\quad y_1y_2(x_3-x_2)(x_3-x_1)=\frac{\tilde{c}^2}{3};$$

$$y_1y_3(x_3-x_2)(x_2-x_1)=-2\frac{\tilde{c}^2}{3};\quad y_1y_2(x_3-x_1)(x_3-x_2)=\frac{\tilde{c}^2}{3};$$

$$y_2^2(x_3-x_1)^2=\frac{\tilde{c}^2}{3};\quad y_2y_3(x_3-x_1)(x_2-x_1)=-2\frac{\tilde{c}^2}{3};$$

$$y_1y_3(x_2-x_1)(x_3-x_2)=-2\frac{\tilde{c}^2}{3};\quad y_2y_3(x_2-x_1)(x_3-x_1)=-2\frac{\tilde{c}^2}{3}.$$

$$y_3^2(x_2-x_1)^2=4\frac{\tilde{c}^2}{3}. \tag{17.4.6}$$

Эта система уравнений также совместна. Ее решения имеют вид

$$y_1(x_3-x_2)=\pm\frac{\tilde{c}}{\sqrt{3}};\quad y_2(x_3-x_1)=\pm\frac{\tilde{c}}{\sqrt{3}};\quad y_3(x_2-x_1)=\mp\frac{2\tilde{c}}{\sqrt{3}}. \tag{17.4.7}$$

Из приведенных решений следует, что невырожденное состояние должно характеризоваться разными значениями x_s:

$$x_1\neq x_2;\quad x_1\neq x_3;\quad x_2\neq x_3. \tag{17.4.8}$$

4. Для случая взаимодействий через промежуточные *заряженные глюны* в рамках данной упрощенной модели ситуация оказывается сложнее[2], поэтому здесь ограничимся лишь некоторыми замечаниями.

а) Прежде всего, отметим, что, если исходить из представлений о переходе из невырожденного состояния в некие вырожденные состояния, то выражения (17.3.4) – (17.3.9) соответственно представляются через введенные величины следующим образом:

$$X\Rightarrow y_1^2(x_3-x_1)^2; \tag{17.4.9}$$

$$X\Rightarrow y_2^2(x_3-x_2)^2; \tag{17.4.10}$$

$$Y\Rightarrow y_1^2(x_2-x_1)^2; \tag{17.4.11}$$

[2]Можно допустить, что такие взаимодействия описываются переходами между возбужденными состояниями.

$$Y \Rightarrow y_3^2(x_3 - x_2)^2; \tag{17.4.12}$$

$$Z \Rightarrow y_2^2(x_2 - x_1)^2; \tag{17.4.13}$$

$$Z \Rightarrow y_3^2(x_3 - x_1)^2. \tag{17.4.14}$$

б) Из сопоставлений (17.2.7) с формулами (15.4.13) – (15.4.15) находим отдельные нетривиальные соотношения на коэффициенты имеем

$$X \Rightarrow y_1^2(x_3 - x_1)^2 = 2\tilde{c}^2; \quad y_2^2(x_3 - x_2)^2 = 2\tilde{c}^2; \tag{17.4.15}$$

$$Y \Rightarrow y_1^2(x_2 - x_1)^2 = 2\tilde{c}^2; \quad y_3^2(x_3 - x_2)^2 = 2\tilde{c}^2; \tag{17.4.16}$$

$$Z \Rightarrow y_2^2(x_2 - x_1)^2 = 2\tilde{c}^2; \quad y_3^2(x_3 - x_1)^2 = 2\tilde{c}^2. \tag{17.4.17}$$

в) Анализ показывает, что все другие недиагональные слагаемые в матрице $M(2,2)$, не соответствующие вектор-векторным взаимодействиям стандартной хромодинамики, имеют качественно иной характер. В частности, все такие слагаемые содержат произведения двух различных разностей $(x_s - x_r)$, а не квадрат одного, как в (17.4.15) – (17.4.17). Например, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) = y_1^2(x_3 - x_2)(x_3 - x_1);$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) = y_2^2(x_3 - x_2)(x_2 - x_1), \cdots. \tag{17.4.18}$$

17.5 Некоторые замечания

Не претендуя на достаточно полное раскрытие теории сильных взаимодействий на базе БСКО ранга (6,6), сделаем несколько замечаний, которые могут оказаться полезными при дальнейшем развитии данного направления.

1. Можно поставить вопрос о построении более точной физической картины мира на базе БСКО ранга (6,6), опираясь на те же принципы, которые были использованы в предыдущих разделах в рамках БСКО ранга (4,4). Однако следует заметить, что в этой главе обсуждалась более частная проблема описания в рамках БСКО ранга (6,6) лишь сильных взаимодействий.

2. Как уже отмечалось в §17.1, прообраз "свободного" действия двух барионов b_1 и b_2 описывается двумя соответствующими подматрицами $M(4,0)$ и $M(0,4)$ базового 6×6-отношения

(17.1.1). При этом опять следует помнить об условном характере "свободного" действия, понимаемого только через входящие в него комбинации из внешних параметров частиц. При этих комбинациях обязательно стоят выражения, составленные из дополнительных параметров другого бариона.

Подматрицу $M(4,0)$ (для первого бариона) можно охарактеризовать аналогично (17.2.1) через комбинации внешних параметров следующим образом

$$M(4,0) \to \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{17.5.1}$$

Естественно ожидать, что аналогом "свободной части" прообраза действия является сумма диагональных элементов. Пользуясь введенными выше обозначениями, прообраз "свободного" действия можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered} \tilde{S}_{free}(b_{(1)}) = \\ = \frac{1}{2}[(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{1(2)}\gamma_{\mu}q_{1(2)})]\times \\ \times[(123)_2-(3;23)+(3;13)-(3;12)][\overline{(123)}_2-\overline{(3;23)}+\overline{(3;13)}-\overline{(3;12)}]+ \\ +\frac{1}{2}[(\overline{q}_{1(1)}\gamma^{\mu}q_{1(1)})(\overline{q}_{1(3)}\gamma_{\mu}q_{1(3)})]\times \\ \times[(123)_2-(2;23)+(2;13)-(2;12)][\overline{(123)}_2-\overline{(2;23)}+\overline{(2;13)}-\overline{(2;12)}]+ \\ +\frac{1}{2}[(\overline{q}_{1(2)}\gamma^{\mu}q_{1(2)})(\overline{q}_{1(3)}\gamma_{\mu}q_{1(3)})]\times \\ \times[(123)_2-(1;23)+(1;13)-(1;12)][\overline{(123)}_2-\overline{(1;23)}+\overline{(1;13)}-\overline{(1;12)}], \end{gathered} \tag{17.5.2}$$

где символом $(123)_2$ обозначен определитель, целиком построенный из дополнительных параметров второго бариона.

Легко видеть, что в частной модели взаимодействий, рассмотренной в §17.4, это выражение обращается в нуль, так как одна из квадратных скобок будет соответсовать невозбужденному состоянию второго бариона. Отличный от нуля результат

может дать только учет вкладов от трех (и более) барионов (в духе принципа Маха).

Отметим, что для случая модели электрослабых взаимодействий в рамках БСКО ранга (4,4) прообраз "свободного" действия представлялся не через три, как в (17.5.1), а только через одну комбинацию параметров. Выражение из внешних параметров выражалось через 4-компонентные столбец и строку. Аналогичные выражения можно записать и в данном случае, однако теперь каждый раз следует выбирать свои виды 4-компонентных столбцов и строк.

3. Следует иметь ввиду, что из базового 6×6-отношения следует ожидать вкладов в прообраз действия еще двух других угловых подматриц $M[(2),(2)]$ в (17.1.3). В разделе 5 такие вклады были названы массовыми.

4. Коллективный (многоточечный) характер отношений (взаимодействий) кварков в базовом 6×6-отношении (17.1.2), видимо, проливает свет на проблему конфайнмента, то есть на проблему ненаблюдаемости кварков в свободных состояниях. В рамках рассматриваемой здесь концепции невозможно говорить о сильных взаимодействиях без участия сразу множества кварков, ибо смысл самих параметров элементов (кварков) имеет характер отношений с другими элементами (кварками). Без достаточного количества этих элементов теряется сам смысл сильно взаимодействующих частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из изложенного, можно утверждать:

1. В основу физической картины мира следует положить самостоятельную систему понятий и закономерностей, имеющих силу в физике микромира и не требующих предварительного задания классических пространственно-временных отношений и сопутствующих им макропонятий. Последние выводятся из системы первичных понятий. В развиваемой в этой книге реляционной теории пространства-времени и физических взаимодействий (бинарной геометрофизике) предложена конкретная реализация этой идеи (о макроскопической природе классического пространства-времени). Перечислим ключевые ее положения.

1) В качестве первичных понятий следует взять комплексные отношения между двумя множествами элементов, описывающих состояния элементарных частиц.

2) Комплексные отношения обладают свойством фундаментальной симметрии, открытой Ю.И.Кулаковым в теории физических структур, то есть образуют бинарную систему комплексных отношений (БСКО).

3) Вместо топологического понятия размерности в БСКО выступает ранг – пара целых чисел, характеризующая количества элементов, для которых записываются законы, и тем самым определяет числа элементов, участвующих в элементарном акте взаимодействия.

Следует отметить, что свойства отношений значительно беднее сложного комплекса аксиом и принципов, составляющих понятие классического пространства-времени. В частности, для них нет понятия больше-меньше, нет аксиом непрерывности. Тем не менее, как показано выше, на основе БСКО низших рангов можно развернуть достаточно содержательную теорию, отражающую ключевые свойства элементарных частиц. В этой теории легко усматриваются прообразы известных понятий из общепринятых классической и квантовой теорий. Так, сами бинарные системы отношений являются прообразом классических систем

отсчета (в каком-то смысле их квантовым аналогом). Квантовое понятие спинорности частиц отображается парой комплексных отношений, соответствующих рангу (3,3).

2. При отказе от априорного классического пространства-времени оказывается возможным опереться только на прямые отношения между элементами-событиями, что соответствует использованию концепции дальнодействия, альтернативной общепринятой теории поля. Именно по этой причине для построения бинарной геометрофизики важное значение имели уроки теории прямого межчастичного взаимодействия (ТПМЧВ) Фоккера-Фейнмана. Из изложенного видно, что, во-первых, идеи и методы ТПМЧВ используются при построении бинарной геометрофизики, во-вторых, ТПМЧВ обосновывается с более глубоких позиций бинарной геометрофизики, в-третьих, ТПМЧВ является промежуточным звеном между бинарной геометрофизикой и общепринятыми теориями и, в-четвертых, сама бинарная геометрофизика может рассматриваться как развитие концепции дальнодействия, наиболее далеко развитой (ранее) в рамках ТПМЧВ Фоккера-Фейнмана.

Концепция близкодействия в виде теории поля доминирует в физике уже более ста лет, подавляя идеи дальнодействия. Нам представляется, что физика XXI века преодолеет этот недостаток. Можно прогнозировать в физике будущего столетия замену концепции близкодействия на концепцию дальнодействия, оплодотворенную идеями и опытом как традиционной теории поля, так и многомерных геометрических моделей. Автор надеется, что данная книга будет содействовать этому.

3. Переход от первичных понятий реляционной теории микромира к классическим (макроскопическим) пространственно-временным представлениям далеко не тривиален. Непосредственно из первичных отношений получаются компоненты импульсов. Для перехода от импульсного пространства к координатному необходимо использовать ряд принципов (процедур):

1) прообраз принципа Маха, состоящий в суммировании вкладов в отношение между парой любых частиц со стороны третьих частиц (событий с третьими частицами) всего окружающего мира;

2) принцип усреднения по элементарным базам, составляющим макроприбор, — только в результате этой процедуры возникает идея классического пространства-времени;

3) процедуру усреднения по частицам, составляющим макрообъекты, между которыми возникают классические пространственно-временные отношения.

4. Из представлений о реляционной природе пространства-времени и введенного понятия системы отношений следует но-

вая интерпретация квантовой теории, согласно которой статистическая природа квантовой теории, во-первых, связана с комплексными (циклическими) отношениями, описываемыми БСКО минимального ранга (2,2), и, во-вторых, обусловлена переходом от элементарных базисов (систем отношений) к огромному ансамблю из них, составляющему классический макроприбор (тело классической системы отсчета).

5. В рамках развитой (девятой) парадигмы открывается нетрадиционный взгляд на суть физических взаимодействий и возникает новый подход к их объединению. На самом элементарном уровне (еще до перехода к макропонятиям) можно разглядеть прообразы классического действия взаимодействующих частиц. Таковыми являются базовые или фундаментальные $n \times n$-отношения, представляющие своеобразные объемы бинарной геометрии.

Естественным образом строится последовательность моделей известных физических взаимодействий, в частности:

1) В рамках БСКО ранга (4,4) строится простейшая модель электрослабых взаимодействий, которая может быть поставлена в соответствие с общепринятой моделью Вайнберга-Салама. В терминах этой модели формулируется алгебраический прообраз групповых $SU(2)$- и $U(1)$- симметрий, положенных в основу калибровочной модели Вайнберга-Салама.

2) В рамках БСКО ранга (5,5) раскрывается более совершенная модель электрослабых взаимодействий лептонов, основанная на собственной системе понятий и принципов.

3) В рамках БСКО ранга (6,6) выводится модель электрослабых взаимодействий кварков, позволяющая объяснить существование трех поколений частиц.

4) На основе БСКО ранга (6,6) можно прийти к описанию ключевых положений хромодинамики – современной теории сильных взаимодействий. Полагаем, что таким образом закладываются основы для нового подхода к описанию сильных взаимодействий элементарных частиц, альтернативного калибровочному подходу в общепринятой теории поля.

Есть основания надеяться, что в рамках БСКО ранга (6,6) удастся построить объединенную модель электрослабых и сильных взаимодействий.

6. Из понятий бинарной геометрофизики выводится прообраз многомерной метрики, что можно понимать как обоснование многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Таким образом обоснована плодотворность идеи о проявлении дополнительных размерностей в микромире в виде электрослабых и сильных взаимодействий.

Опираясь на идеи теорий Калуцы и Клейна и руководствуясь положениями бинарной геометрофизики, удается развить конкретные варианты многомерных геометрических моделей, объединяющие общую теорию относительности и теории других взаимодействий, в частности:

1) 5- и 6-мерные геометрические модели единой теории гравитации и электромагнетизма, развивающие и обобщающие первые варианты 5-мерных теорий Калуцы и Клейна-Румера;

2) 6- и 7-мерные варианты единой теории гравитационных и электрослабых взаимодействий, совмещающие закономерности эйнштейновской общей теории относительности и модели электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама (последняя достаточно хорошо вкладывается в теорию 7 измерений);

3) 8-мерную геометрическую модель гравитационных и сильных взаимодействий, объединяющую общую теорию относительности и классическую хромодинамику.

При дальнейшем увеличении размерностей, например в рамках 10 измерений, можно построить единую геометрическую теорию грави-электрослабых и сильных взаимодействий.

7. Анализ многомерных геометрических моделей с более глубоких позиций бинарной геометрофизики позволил под новым углом зрения взглянуть на принципиальные трудности классических моделей типа теории Калуцы-Клейна. Напомним некоторые из них:

1) *Проблема компактификации дополнительных размерностей.* С точки зрения изложенного здесь подхода выглядят бесперспективными попытки обосновать компактификацию дополнительных размерностей классическими геометрическими методами. В исследованиях подобного рода исходят из ничем не оправданной посылки о первичности некомпактифицированных размерностей и пытаются объяснить их компактификацию, тогда как в бинарной геометрофизике, наоборот, предлагается обоснование появления четырех классических некомпактифицированных размерностей, исходя, можно сказать, из первично компактифицированных понятий.

2) *Проблема числа измерений* многомерных моделей также, на наш взгляд, должна решаться за пределами геометрической (пятой) парадигмы. В предложенном здесь подходе выделенность дополнительных размерностей решается на элементарном уровне еще до перехода к макропонятиям.

3) *Проблема поиска и физической интерпретации решений многомерных уравнений Эйнштейна.* С точки зрения развиваемого здесь подхода следует усомниться в физической обоснованности вариационных принципов в многомерных геометрических моделях до проведения процедуры 4-мерной редукции, а следова-

тельно, и усомниться в справедливости многомерных уравнений Эйнштейна. Строго говоря, вариационные методы можно применять, когда введено классическое координатное пространство-время. А как показано выше, для дополнительных размерностей имеют смысл лишь компоненты импульсов, и нет аналога координатного пространства-времени. Последнее можно ввести только для четырех классических координат. Именно по этой причине в главах 8, 10, 11 и 16 записывались лишь гиперплотности многомерных лагранжианов и от них посредством процедур размерной редукции осуществлялся переход к 4-мерным плотностям лагранжиана. К таким лагранжианам уже применим вариационный принцип. Подчеркнем, в указанных главах нигде не использовались 5-, 6- и т. д. -мерные уравнения Эйнштейна.

8. Особо следует выделить вывод о сущности гравитационного взаимодействия. В главе 7 показано, что 4-мерную искривленную (риманову) геометрию и описываемые с ее помощью гравитационные взаимодействия можно трактовать как следствия, во-первых, электромагнитных (электрослабых) взаимодействий и, во-вторых, как результат учета влияния окружающей материи (учет принципа Маха). Заметим, от того, как трактуется сущность гравитации, зависит постановка и решение многих фундаментальных проблем современной теории гравитации, таких как "квантование гравитации", описание ранних стадий развития Вселенной, поиск гравитационного излучения и многие другие.

9. Опираясь на изложенный материал, можно высказать предположение, что история развития теории физических взаимодействий могла бы оказаться иной. Как известно, в физике XX века доминирующей была концепция близкодействия. Теория физических взаимодействий развивалась в рамках теории поля. И сейчас подавляющее число физиков-теоретиков мыслит построение теории великого объединения не иначе, как в рамках единой теории поля. Но физика могла бы пойти и по одному из двух других путей:

Во-первых, теория могла бы развиваться на основе концепции дальнодействия. Любопытно отметить, что многие открытия в теоретической физике XX века были сделаны в связи с размышлениями в духе концепции дальнодействия. Еще раз напомним, что Эйнштейн пришел к созданию общей теории относительности, следуя идеям Маха. Спустя много лет оказалось, что Мах стоял у колыбели основных фундаментальных достижений XX века. Другой яркий пример: Р.Фейнман в своей Нобелевской лекции заявил, что к результатам, за которые ему вручалась премия, он пришел на основе идей концепции дальнодействия...

Если бы идеи дальнодействия обсуждались научным сообществом более активно, то многие результаты современной теоретической физики были бы получены в ее рамках. Значительно раньше (не в конце 60-х годов XX века) можно было бы открыть теорию физических структур Кулакова, а затем бы развить и идеи бинарной геометрофизики.

Во-вторых, физика могла бы развиваться по пути многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна. Об этом свидетельствуют возрождение интереса к ним с конца 70-х годов, не затихающего уже два десятилетия. Изложенное выше показывает, что в их рамках можно реализовать принципиальные моменты существующих ныне калибровочных теорий физических взаимодействий. Многомерные геометрические модели типа теории Калуцы-Клейна несомненно отражают свойства реального мира, но они представляются лишь вершиной плавающего айсберга. Его основная часть оказывается скрытой для ограничивающихся рамками пятой парадигмы.

Но физика XX века пошла по пути теории поля и калибровочного подхода к описанию взаимодействий. В главах 2 и 7 сделана попытка объяснить, почему все произошло так, а не иначе. Основные причины имели, по-видимому, психологический характер. Пионерские работы названных направлений оказались преждевременными. В них довольно быстро вскрылись проблемы, которые не могли быть немедленно решены имеющимися на тот момент средствами, тогда как теория поля представлялась менее проблематичной и позволяла обойти многие острые вопросы.

10. Изложенный в книге материал не претендует на исчерпывающее решение поднятых вопросов, но, хочется надеяться, что им закладываются основы для формирования нового подхода к решению фундаментальных проблем современной теоретической физики, и что здесь сделаны первые шаги на этом пути.

На взгляд автора, открываются захватывающие перспективы на новом пути, не скованном представлениями об априорном классическом пространстве-времени.

Хотелось бы завершить книгу словами Т.Калуцы, приведенными в заключении его класической работы: “Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности, громоздящиеся на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них*степени формального единства,* – всего лишь капризная игра обманчивой случайности” [27, с.534].

СПИСОК КЛЮЧЕВЫХ ТЕРМИНОВ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$R_a(b)$ – реляционная теория объектов b относительно базиса a.

1. БИНАРНАЯ ГЕОМЕТРОФИЗИКА

БСКО ранга (r,r) – бинарная система комплексных отношений ранга (r,r), где $r = 2, 3, 4, \cdots$;

i^s – параметры элементов из множества $\mathcal{M}$ начальных состояний;

α^s – параметры элементов из множества $\mathcal{N}$ конечных состояний;

$u_{i\alpha}$ – парное отношение между элементами i и α;

$\Phi_{(r,r)}$ – закон БСКО ранга (r, r);

$\begin{bmatrix} \alpha\ \beta\ \cdots \\ i\ k\ \cdots \end{bmatrix}$ – фундаментальное $(r-1) \times (r-1)$-отношение БСКО ранга (r,r);

$\begin{Bmatrix} \alpha\ \beta\ \cdots \\ i\ k\ \cdots \end{Bmatrix}$ – базовое $r \times r$-отношение БСКО ранга (r,r);

$\Psi = \begin{pmatrix} i^s \\ \beta_r \end{pmatrix}$ – 4-компонентный столбец из внешних параметров частицы, где $s, r = 1, 2$;

$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = -\{k_r, \alpha^s\}$ – 4-компонентная строка из внешних параметров частицы, где $s, r = 1, 2$;

$\begin{bmatrix} \alpha\ \beta \\ i\ k \end{bmatrix}$ – фундаментальное 2×2-отношение БСКО ранга (3,3) или 2×2-отношение из внешних параметров элементов БСКО ранга (r,r) при $r > 3$;

(e_{1L}, e_{2L}) – скалярное произведение левых компонент частиц (из внешних параметров);

(e_{1R}, e_{2R}) – скалярное произведение правых компонент частиц (из внешних параметров);

$\exp(s)$ – экспоненциальный фактор частицы s, соответствующий элементу БСКО ранга (2,2);

$\varphi \sim S$ – вещественный показатель экспоненты – прообраза "действия";

$k_\mu = mc\kappa_\mu$ – импульс передачи при взаимодействии двух частиц;

$c^r, \tilde{c}^r$ – внутренние параметры элементов $(r = 3, 4, \cdots)$;

c^r_L, c^r_R – внутренние параметры соответственно левой и правой компонент лептона;

$\begin{pmatrix} \alpha\ \beta \\ i\ k \end{pmatrix}$ – 2×2- отношение из внутренних параметров элементов БСКО ранга (4,4);

$c_L + c_R \sim e$ – прообраз электрического заряда лептона;

$c_L - c_R \sim \tilde{g}$ – прообраз слабого заряда лептона;

$\tilde{S}(1, 2)$ – прообраз действия двух взаимодействующих частиц;

$d\tilde{I}^2 = \check{G}_{MN} dx^M dx^N$ – прообраз квадрата 7-мерного интервала, где $M, N = 0, 1, 2, \cdots, 6$;

$\check{G}_{MN}$ – компоненты прообраза метрического тензора.

2. ТЕОРИЯ ПРЯМОГО МЕЖЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

$S^{(e)}(1,2)$ – фоккеровское действие прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия частиц с номерами 1 и 2;

$S^{(g)}(1,2)$ – фоккеровское действие прямого межчастичного гравитационного взаимодействия частиц с номерами 1 и 2;

$S^{(\varphi)}(1,2)$ – фоккеровское действие прямого межчастичного скалярного взаимодействия частиц с номерами 1 и 2;

$A_\alpha(i,k)$ – электромагнитный векторный потенциал, создаваемый зарядом k в месте нахождения заряда i;

$A_\alpha(i)$ – суммарный электромагнитный потенциал в месте расположения заряда i;

$F_{\mu\nu}(1,2)$ – тензор электромагнитной напряженности, создаваемый зарядом 2 в месте нахождения заряда 1;

$h_{\alpha\beta}(1,2)$ – добавок к метрическому тензору пространства Минковского, создаваемый частицей 2 в месте нахождения частицы 1;

$\delta(s^2(1,2))$ – дираковская дельта-функция для двух событий в точках 1 и 2;

$j^\mu_{(i)}$ – электрический ток заряда i;

$T^{\mu\nu}_{(i)}$ – тензор энергии-импульса частицы i.

3. МНОГОМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА ТЕОРИИ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА

$dI^2 = G_{MN} dx^M dx^N$ – квадрат n-мерного интервала, где $M, N = 0, 1, 2, \cdots, n-1$;

G_{MN} – компоненты многомерного метрического тензора;

$G^{(n)}$ – определитель из компонент n-мерного метрического тензора;

$g_{\mu\nu}$ – компоненты 4-мерного метрического тензора, где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$;

ξ_M – компоненты монады, соответствующей координате x^4;

λ_M – компоненты монады, соответствующей координате x^5;

σ_M – компоненты монады, соответствующей координате x^6;

ζ_M – компоненты монады, соответствующей координате x^7;

η_M – компоненты монады, соответствующей координате x^8;

ω_M – компоненты монады, соответствующей координате x^9;

$G^M(N)$ – компоненты многомерной n-ады, обобщающей тетраду

в ОТО;
$\tilde{G}_{MN} = \chi^2 G_{MN}$ – исходная (до процедуры конформного преобразования) многомерная метрика;
χ^2 – конформный фактор;
Γ^M_{NP} – многомерные символы Кристоффеля;
$\Delta_M(NP)$ – многомерные коэффициенты вращения Риччи;
$\Phi_\mu, F_{\mu\nu}, Д_{\mu\nu}$ – монадные физико-геометрические тензоры;
$F^{(s)}_{\mu\nu}$ – антисимметричные физико-геометрические тензоры при $n > 5$, где $s = 4, 5, \cdots$;
∇_M – оператор ковариантного дифференцирования;
$\partial^\dagger_\mu$ – монадный оператор 4-мерного дифференцирования;
$\partial^{\dagger\dagger}_\mu$ – диадный оператор 4-мерного дифференцирования;
k_g – ньютоновская гравитационная постоянная;
$æ = \frac{8\pi k_g}{c^4}$ – эйнштейновская гравитационная постоянная;
$\tilde{æ}$ – многомерное обобщение эйнштейновской гравитационной постоянной;
$\alpha = \frac{ec}{2\sqrt{k_g}\hbar}$ – константа, характеризующая период компактификации по координатам x^5 и x^6 (при описании электрослабых взаимодействий);
$\beta = \frac{mc}{\hbar}$ – константа, характеризующая период компактификации по координате x^4;
γ – константа,характеризующая период компактификации по координатам x^7, x^8 и x^9 (при описании сильных взаимодействий);
ε_r – гармоника циклической зависимости по координате x^r;
$\Psi = \psi \exp\{i[\beta\varepsilon_4 x^4 + \alpha(\varepsilon_5 x^5 + \varepsilon_6 x^6)]\}$ – многомерная спинорная волновая функция;
ψ – часть спинорной волновой функции, зависящая только от четырех классических координат;
Γ^M – многомерное обобщение дираковских γ-матриц;
${}^nR$ – n-мерная скалярная кривизна;
$\tilde{\mathcal{L}}$ – гиперплотность геометрического лагранжиана;
$\tilde{\mathcal{L}}_m$ – гиперплотность негеометрического лагранжиана.

4. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

B_μ – калибровочное поле, соответствующее группе $U(1)$;
$A(s)_\mu$ – триплет калибровочных полей, соответствующих группе $SU(2)$;
A_μ – компоненты электромагнитного потенциала;

Z_μ – компоненты нейтрального Z-бозона;
$W_\mu^\pm$ – компоненты заряженных $W^\pm$-бозонов;
$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}$ – дублет хиггсовских скалярных бозонов;
∂_μ^{++} – удлиненная производная электрослабых взаимодействий;
g_1 – константа взаимодействия с калибровочным полем B_μ;
g_2 – константа взаимодействия с калибровочными полями группы $SU(2)$;
$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}$ – электромагнитный заряд электрона;
$\theta_W = arc\sin\left(\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\right)$ – угол Вайнберга;
Y – гиперзаряд;
T_3 – проекция изотопического спина;
$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$ – электрический заряд в единицах e;
$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ – изотопический дублет из левых компонент нейтрино и электрона;
e_R – правая компонента электрона (изоскаляр);
σ_k – 2-рядные матрицы Паули;
γ_μ – 4-рядные матрицы Дирака;
$\mathcal{L}$ – плотность лагранжиана.

5. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

V_μ^a – векторные потенциалы (глюонных) калибровочных полей $(a = 1, 2, 3, \cdots, 8)$;
$F_{\mu\nu}^{(a)}$ – тензоры напряженности калибровочных полей;
$\mathcal{A}_\mu = V_\mu^3,\ \mathcal{B}_\mu = V_\mu^8$ – нейтральные (глюонные) калибровочные поля;
$X_\mu^\pm,\ Y_\mu^\pm,\ Z_\mu^\pm$ – заряженные (глюонные) калибровочные поля;
$\partial_\mu^\star$ – удлиненная производная сильных взаимодействий;
g_0 – константа сильных взаимодействий;
$q_{(s)}$ – цветовой триплет кварков;
Q_a – цветовой изотопический заряд;
Q_b – гиперцветовой заряд;
λ_a – 3-рядные матрицы Гелл-Манна;
τ_{sr} – матрицы Гелл-Манна в базисе Картана-Вейля;
$\mathcal{L}_{Bos}$ – бозонная часть плотности лагранжиана;
$\mathcal{L}_F$ – фермионная часть плотности лагранжиана.

Библиография

[1] *Блохинцев Д.И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.

[2] *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.

[3] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.

[4] *Бройль Л.де* (De Broglie L.). Революция в физике. М.: Госатомиздат, 1963.

[5] *Булюбаш Б.В.* Электродинамика дальнодействия // Физика XIX-XX вв. в общенаучном и социокультурном контекстах. (Физика XIX века). М.: Наука, 1995, с. 221-250.

[6] *Вайнберг* Идейные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. [Нобелевская лекция по физике 1979 года] //УФН, 1980. Т.132, с. 201.

[7] *Вессон П., Понсе де Леон Дж., Лю Х., Машхун Б., Каллигас Д., Эверит К., Билляр А., Лим П., Овердин Дж.* (Wesson P., Ponce de Leon J., Liu H., Mashhoon B., Kalligas D., Everitt C.W.F., Billyard A., Lim P., Overduin J.) A theory of space, time and matter //Int. J. of Mod. Phys. A. 1996, v.11, N.18, p. 3247-3255.

[8] *Владимиров Ю.С.* Модель квантованного пространства-времени //Сб. Классическая и квантовая теория гравитации. Минск. Изд-во Института физики АН БССР, 1976, с. 57-58.

[9] *Владимиров Ю.С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.

[10] *Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.

[11] *Владимиров Ю.С.* Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[12] *Владимиров Ю.С.* Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с. 42-60.

[13] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.

[14] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Физическая структура ранга (4,4;б) и трехкомпонентные спиноры //Вычислительные системы. N.135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с. 44-66.

[15] *Владимиров Ю.С., Попов А.Д.* Многомерные модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна //Сб. Итоги науки и техники (Серия. Классическая теория поля и теория гравитации). Т.1 (Гравитация и космология). М.: ВИНИТИ, 1991, с. 5-48.

[16] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время и электрослабые взаимодействия в бинарной геометрофизике //Gravitation and Cosmology. Vol.1 (1995). No.2, p. 1-7.

[17] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. (Теория систем отношений). М.: Изд-во Моск. ун-та., 1996.

[18] *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика, философия и религия. Кострома. Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.

[19] *Владимиров Ю.С., Мамонтов С.И.* (Vladimirov Yu.S., Mamontov S.I.). Simmetry in a 6-dimensional geometric model of gravi-electroweak interactions //Gravitation and Cosmology. 1996, v.2, N.3(7), p. 235-243.

[20] *Владимиров Ю.С., Мамонтов С.И.* Поколения лептонов в 6-мерной геометрической модели грави-электрослабых взаимодействий // Тезисы докладов 9-й Российской гравитационной конференции. Новгород. 1996. М.: 1996, с. 53.

[21] *Грановский Я.И., Пантюшин А.А.* К релятивистской теории тяготения //Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат., 1965, N.2, с. 65-69.

[22] *Данциг ван Д.* (Van Dantzig D.) On the relation between geometry and physics and the concept of space- time //Funfzig Jahre Relativitatstheorie. Konferenz Bern, Basel. 1955. Bd.1, S. 569.

[23] *Дэвис П.* (Davies P.C.W) The Physics of time assymmetry. Berkely – Los Angeles: Univ. of California Press, 1974, 214 p.

[24] *Жданов В.И., Пирагас К.А.* О круговых орбитах в динамике двух частиц, учитывающей запаздывание взаимодействия //Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1974, с. 65-80.

[25] *Зельманов А.Л.* Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности // Докл. АН СССР, 1956, т.107, N.6, с. 815.

[26] *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. М.-Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит. 1951.

[27] *Калуца Т.* (Kaluza T.). К проблеме единства физики //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с. 529-534.

[28] *Клейн О.* (Klein O.) Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie //Zeits.f. Physik, 1926, Bd. 37, S. 895.

[29] *Клиффорд В.* О пространственной теории материи //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с. 36-37.

[30] *Клиффорд В.* Здравый смысл точных наук. 1922. (См. Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с. 38-47.)

[31] *Кокарев С.С.* Geometrization of perfect fluid in 5-D Kaluza-Klein theory //Gravitation and Cosmology. 1995, v.1, N.3, p. 247-251.

[32] *Кречет В.Г.* Geometrization of physical interactions, 5-dimensional theories and the many world problem // Gravitation and Cosmology. 1995, v.1, N.3, p. 199-203.

[33] *Кузнецов Б.Г.* Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна в свете современной науки. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

[34] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск. Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968.

[35] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, 1971. Том 201. N 3, с. 570-572.

[36] *Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Изд-во Архимед, 1991.

[37] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.

[38] *Лейбниц Г.В.* Переписка с Кларком. Сочинения. Том 1. М.: Мысль, 1982, с. 430-528.

[39] *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987.

[40] *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: Изд-во С.Скирмунта, 1909.

[41] *Мах Э.* Механика //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир. 1979, с. 73-84.

[42] *Мирошник А.О., Мишаков А.В.* Многомерная модель хромодинамики с метрическим описанием глюонных полей //Сб. Гравитация и электромагнетизм. Минск. Изд-во Университетское, 1988, с. 149-154.

[43] *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур //Доклады АН СССР, 1972. Том 206. N 5, с. 1056-1058.

[44] *Михайличенко Г.Г.* Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск, 1997.

[45] *Мишаков А.В.* Возможные эффекты скаляризма в многомерных теориях физических взаимодействий. Канд. дисс. Москва, МГУ, 1993.

[46] *Нарликар Дж.* (Narlikar J.V.) On the general correspondence between field theories and the theories of direct interparticle action //Proc. Cambridge Philos.Soc., 1968, vol.64, p. 1071-1079.

[47] *Нарликар Дж.В.* (Narlikar J.V.). Инерция и космология в теории относительности Эйнштейна //Сб. "Астрофизика, кванты и теория относительности". М.: Мир, 1982, с. 498-534.

[48] *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990.

[49] *Окунь Л.Б.* Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1988.

[50] *Пантюшин А.А.* Теория прямого гравитационного взаимодействия тел //Гравитация и теория относительности. Казань, 1969, т.6, с. 30-40.

[51] *Паули В.* (Pauli W.) Über die Formulierung der Naturgeset e mit funf homogen koordinaten //Ann. der Phys., 1933, Bd.18, S. 305-372.

[52] *Пенроуз Р.* (Penrose R.). Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

[53] *Пенроуз Р., Риндлер В.* (Penrose R., Rindler V.) Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987.

[54] *Пирагас К.А., Жданов В.И., Александров А.Н., Кудря Ю.Н., Пирагас Л.Е.* Качественные и аналитические методы в релятивисткой динамике. М.: Энергоатомиздат, 1995.

[55] *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.

[56] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[57] *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с. 18-33.

[58] *Румер Ю.Б.* Спинорный анализ. М-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

[59] *Румер Ю.Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.

[60] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970.

[61] *Румер Ю.Б.* Принципы сохранения и свойства пространства и времени //Сб. Пространство, время, движение. М.: Наука, 1971, с. 107-125.

[62] *Рязанов Г.В.* Квантовомеханические вероятности как суммы по путям. // ЖЭТФ, 1958. Т.35, с. 121-136.

[63] *Рязанов Г.В.* Путь к новым смыслам. М.: Гнозис, 1993.

[64] *Салам А., Стрэди Дж.* (Salam A., Strathdee J.) On Kaluza-Klein theory //Ann. of Phys., 1982, v.141, p. 316-352.

[65] *Салингарес Н.* (Salingaros N.). On the classification of Clifford algebras and their relation to spinor in n dimensions //Journ.Math.Phys., 1982. Vol.23, N 1, p. 1-7.

[66] *Синг Дж.Л.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.

[67] *Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А.* N-Точечная геометрия типа Евклида //Сб. Математические методы и физико-механические поля. Киев. Наукова думка, 1975. Вып.1, с. 5-10.

[68] *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[69] *Тетроде Г.* (Tetrode H.) Über der Wikugszussammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dinamik //Z.Phys., 1922, Bd.10, S. 316-328.

[70] Твисторы и калибровочные поля. М.: Мир, 1983.

[71] *Турыгин А.Ю.* Уравнения Эйнштейна как тождества в теории прямого гравитационного взаимодействия // Вестн. Моск. ун-та. Сер.3. Физ., Астрон., 1982, т.23, N.5, с. 110-113.

[72] *Уилер Дж.А., Фейнман Р.* (Wheeler J.A., Feynman R.P.) Interaction with the absorber as the mechanism of radiation //Rev.Mod.Phys., 1945, vol.17, p. 157-181.

[73] *Уилер Дж.А., Фейнман Р.* (Whileer J.A., Feynman R.P.) Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action //Rev.Mod.Phys., 1949, vol.24, p. 425-433.

[74] *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: Издат. иностр. лит-ры, 1962.

[75] *Фейнман Р.* Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике //Сб. Вопросы причинности в квантовой механике. М.: Издат. иностр. лит-ры, 1955, с. 167-207.

[76] *Фейнман Р.* (Feynman R.) Нобелевская лекция "Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте" //Сб. Характер физических законов. М.: Мир. 1968, с. 193-231.

[77] *Фок В.А.* (Fock V.) Zur Schrodingerishen Wellenmechanik //Zeits. für Phys., 1926, Bd.38, H. 3, S. 242-250.

[78] *Фок В.А.* Квантовая физика и философские проблемы //Сб. Физическая наука и философия. М.: Наука, 1973, с. 55-77.

[79] *Фок В.А.* Об основных принципах теории тяготения Эйнштейна //Сб. Современные проблемы гравитации. Тбилиси. Издат. Тбил. гос. ун-та, 1967, с. 5-11.

[80] *Фоккер А.Д.* (Fokker A.D.) Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrisher Massenteilchen //Z.Phys., 1929, Bd.58, S. 386-393.

[81] *Френкель Я.И.* //Природа электрического тока. (Беседы-диспут в Ленинградском политехническом институте). М.-Л.: Издат. Всесоюзн. электротехн. общ-ва. 1930.

[82] *Френкель Я.И.* Принцип причинности и полевая теория материи //Сб. Вопросы теоретической физики. СПб.: ПИЯФ, 1994, с. 132-154.

[83] *Хёнль Г.* К истории принципа Маха //Эйнштейновский сборник-1968. М.: Наука, 1968, с. 258-285.

[84] *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F, Narlikar J.V.). Action at a distance in physics and cosmology. San Francisco: W.N.Freeman and Comp., 1974.

[85] *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F., Narlikar J.) Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics //Rev.Mod.Phys., 1995, vol.67, N.1, p. 113-155.

[86] *Хуанг К.* (Huang K.). Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.

[87] *Циммерман Е.Дж.* (Zimmerman E.J.) The macroscopic nature of space-time //Amer. J. Philos., 1962, vol.30, p. 97-105.

[88] *Шмутцер Э.* (Schmutzer E.) Projectiv unified field theory. I-V //Exp. Techn. Phys., 1980, Bd 28, S. 395-402, 499-508; 1981, Bd 29, S. 129-136, 337-341, 463-480.

[89] *Эддингтон А.* (Eddington A.S.) Fundamental theory. N.Y.: Cambridge Press, 1946.

[90] *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М.: Наука, 1965.

[91] *Эйнштейн А.* Принципиальное содержание общей теории относительности //Собрание научных трудов. Т.1. М.: Наука, 1965, с. 613-615.

[92] *Эйнштейн А.* Автобиографические заметки //Собрание научных трудов. Т.4. М.: Наука, 1967, с. 259-294.

[93] *Эйнштейн А., Бергман П.* Обобщение теории электричества Калуцы //Собрание научных трудов. Т.2. М.: Наука, 1966, с. 492-513.

[94] *Эйнштейн А., Майер В.* Единая теория гравитации и электричества //Собрание научных трудов. Т.2. М.: Наука, 1966, с. 366-386.

[95] *Янг Ч., Миллс Р.* (Yang C.N., Mills R.L.) Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность //Сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля. М.: Мир, 1964, с. 28-38.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адроны 257
Алгебра
— диадного метода 124
— Клиффорда 230
— монадного метода 122
Ароматы 256

Базис
— макроскопический 135
— элементарный 24
Барионы 412
Близкодействие 45
Блок-схема
— книги 40
— описаний взаимодействий 37
— парадигм 32
— реляционных теорий 21
— содержания 1-й части 29
Биспинор 82
Бозоны
— хиггсовские 254
— Z-бозоны 248
— W-бозоны 249

Вектор ускорения системы отсчета 207
Взаимодействие
— гравитационное 55, 168
— запаздывающее 52
— опережающее 52
— сильное 379
— слабое 341, 350
— электромагнитное 51, 164
— электрослабое 245

Гармоники
— 5-мерного обобщения ОТО 194
— 5-мерной теории Калуцы 217
— 6-мерной теории 231
— 7-мерной модели 278
— 8-мерной модели 406
Геометрия
— бинарная 22
— многоточечная 108
— риманова 182
— унарная 27, 371
Геометрофизика бинарная 12
Гиперзаряд
— цветовой 381
— слабых взаимодействий 246
Гиперплотность лагранжиана
— 5-мерная 202
— 6-мерная 230
— 7-мерная 264
— 8-мерная 393
Глюоны
— заряженные 383, 393
— нейтральные 381
Группа
— допустимых координатных 124
— $SL(2, C)$ 26
— $SL(3, C)$ 79
— $SU(2)$ 243
— $SU(3)$ 381
— $U(1)$ 243

Дальнодействие 43
Действие
— взаимодействия 51, 56
— свободной частицы 53

Закон системы отношений (структуры) 23
— ранга (2,2) 158
— ранга (5,5) 336
— ранга (6,6) 361
Заряд
— цветовой 380, 392, 407
— электрический 250, 279, 282, 303

Инвариантность
— калибровочная 243
— хронометрическая 207
Интерпретация квантовой

механики 141, 144

Калибровка
— хронометрическая 123, 206
— дважды хронометрическая 126
Кварки
— токовые 257
— блоковые 360
Компактификация 221
Компоненты
— лептонов 84, 246
— 4-скорости 28
Константа (постоянная)
— гравитационная ньютоновская 163
— гравитационная эйнштейновская 185
— космологическая 185
— сильных взаимодействий 381
— электрослабых взаимодействий 245
Концепция
— близкодействия 45
— дальнодействия 43, 44, 48
— реляционная 71
Конус световой (изотропный) 52
Коэффициенты
— вращения Риччи 188
— разложения триады 267
— разложения тетрады 395
Кривизна скалярная 185

Лагранжиан 269
Лептоны 246, 336, 362

Макрообъект 147
Макроприбор 138
Масса
— бозонов 255, 285
— планковская 235
— фермионов 256, 298
Матрицы
— Гелл-Манна 381
— Дирака 83
— Паули 83
— 8-рядные 289
— 16-рядные 408
Метод
— диадный 226
— монадный 195
— септадный 288
— тетрадный 188
Метрика
— 3-мерная 206
— 4-мерная 184
— 5-мерная 196, 213
— 6-мерная 214, 227
— 7-мерная 265
— 8-мерная 394
Механизм Хиггса 254
Модель
— Вайнберга-Салама 245
— геометрическая
— — 5-мерная 198
— — 6-мерная 229
— — 7-мерная 261
— — 8-мерная 391
— на основе БСКО
— — ранга (4,4) 311
— — ранга (5,5) 335
— — ранга (6,6) 357

Нейтрино 324, 336

Операторы дифференцирования
— монадного 197, 207
— диадного 228
— триадного 277
— тетрадного 406
Оптика
— 5-оптика Румера 145, 191
— 6-оптика 214
Отношения 23, 73
— базовые
— — 4×4- 78, 311
— — 5×5- 358
— — 6×6- 365, 412
— парные 23
— фундаментальные 25
— — 2×2- 26

— — 3 × 3- 78
— — 4 × 4- 336
— — 5 × 5- 362

Парадигмы 30
— клиффордовские 33
— маховские 33
Параметры элементов 24
— внешние 81
— внутренние 89, 339, 419
Плотность лагранжиана
— ОТО 186
— модели Вайнберга-Салама 245
— скалярного поля 187
— спинорного поля 187
— хромодинамики 380
— электромагнитного поля 186
Поглотитель Фейнмана-Уилера 63
Подход
— геометрический 182, 209
— калибровочный 241
Поле
— калибровочное 244, 248
— скалярное 187, 201
— спинорное 187
— хиггсовское 254
— электромагнитное 186
— Янга-Миллса 243
Поколения элементарных частиц 256, 258, 301, 369
Преобразования
— допустимые координатные 124
— калибровочные 217
— конформные 201, 283
— линейные 26
— многомерные 124, 126
Принцип
— Маха 67, 107
— усреднения по базисам 134
— Фоккера 51
Природа макроскопическая пространства-времени 16
Проекция на
— БСКО ранга (3,3) 79
— меньшие размерности 199
Производная
— ковариантная 185
— Ли 197
— удлиненная
— — в 5-мерии 201
— — электромагнитная 217
— — модели Вайнберга-Салама 246
— — хромодинамики 381
— хронометрически инвариантная 207
Прообраз
— действия 92, 103
— метрики 103, 116, 127
— потенциала 130
Пропагатор 62, 131, 149
Пространство
— внутреннее 355
— изотопическое 243
— импульсное 28, 157
— координатное 140
— Лобачевского 28
Пространство-время 152

Размерность 29, 131, 307
Ранг системы отношений 23
Расщепление
— 1+3- 205
— 1+n- 122
— 1+1+n- 124
Редукция на
— БСКО ранга (3,3) 79
— меньшие размерности 199

Сектор
— бозонный 231, 383
— фермионный 231, 287, 380, 408
Септада 288
Сигнатура 125, 196, 264, 392
Символы Кристоффеля 184
Симметрия
— алгебраическая 330
— групповая 242
— фундаментальная 23

Система
— отношений
— — бинарных комплексных 22
— — — ранга (2,2) 86, 97
— — — (3,3) 25
— — — (4,4) 78
— — — (5,5) 336, 358
— — — (6,6) 361, 412
— — вырожденная 80
— — унарных вещественных 27
— отсчета 19, 205
Состояния
— возбужденные 93
— невозбужденные 93
— начальные 24
— конечные 24
Спин изотопический 246
Спиноры
— 2-компонентные 26
— многомерные 230, 264
— финслеровы 26
Структуры
— бинарные 22
— унарные 27, 371

Твисторы 18
Тензор
— кривизны 185
— кручения 286, 306
— метрический
— — 4-мерный 184
— — многомерный 196, 214, 265
— Риччи 185
— скоростей-деформаций 207
— угловой скорости вращения 207
— физико-геометрический 196
— электромагнитного поля 216
— энергии-импульса 186
Теория
— калибровочная 243
— Калуцы 215
— Клейна-Румера 223
— Калуцы-Клейна 214, 229
— общая теория относительности 181, 183
— поглотителя 63
— поля 175
— прямого межчастичного взаимодействия 51
— релятивистская (гравитации) 183
— реляционная (пространства-времени) 9, 21
— физических структур (Кулакова) 22
— Фоккера-Фейнмана 55
Тетрада 188
Триада 267
Топология тора 263

Угол
— Вайнберга 248, 281
— Каббибо 259
Уравнения
— геодезических линий
— — 4-мерные 184
— — 5-мерные 218
— движения заряженной частицы 186
— Дирака 188
— Клейна-Фока 187
— Максвелла 55, 186
— Эйнштейна 60, 185

Фактор
— конформный 201, 283
— экспоненциальный 86
Функция
— волновая 141
— Грина 62, 176
— дираковская δ-функция 51, 54

Хромодинамика 379
Хроногеометрия 155

Эволюция 94
Элементы
— системы отношений 22
— эталонные 24

CONTENTS

Foreword 9

Part 1. Origins of a new physical paradigm 15
1. Introduction 16
2. Lessons of action-at-a-distance theory of Fokker-Feynman type. 43

Part 2. Foundations of physical interactions 75
3. Interactions between two separated particles 77
4. Mach's principle 107
5. Macroscopic nature of classical space-time 133

Part 3. Electromagnetism and gravitation 159
6. Direct electromagnetic and gravitational interactions 161
7. Five-dimensional generalization of Einstein's gravitational theory 181
8. Unified geometrical models of gravitational and electromagnetical interactions (Kaluza-Klein theory) 211

Part 4. Electroweak interactions in conception of a field approach (short-range action) 239
9. Gauge theory of electroweak interactions (Weinberg-Salam model) 241
10. Unified seven-dimensional geometrical theory of gravitational and electroweak interactions (boson sector) 261
11. Fermion sector of the 7-dimensional geometrical theory of gravi-electroweak interactions 287

Part 5. Electroweak interactions in binary geometrophysics 309
12. Electroweak interactions in the BISCR (4,4)[1] model 311
13. Discription of electroweak interactions of leptons in BISCR (5,5) model 335
14. Prototype of electroweak interactions of quarks in BISCR (6,6) model 357

Part 6. Strong interactions 373
15. Gauge theory of strong interactions (chromodynamics) 375
16. Unified eight-dimensional geometrical theory of gravitational and strong interactions 387
17. Strong interactions in binary geometrophysics 407

Conclusion 425

List of the main terms and notations 431

References 435

Index 443

[1]BISCR (r,r) – binary system of complex relations of rank (r,r).

Научное издание

Владимиров Юрий Сергеевич

Реляционная теория
пространства-времени и взаимодействий

Часть 2
Теория физических взаимодействий

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97.
Подписано в печать 17.06.98. Формат 60×90/16. Бумага
офс. № 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 28,0. Уч.-изд. л. 29,7.
Тираж 500 экз. Заказ №

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Типография Издательства РУДН.
117923, ГСП-1, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.