МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

31

П. ВОПЕНКА

МАТЕМАТИКА В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

TEUBNER-TEXTE zür Mathematik

PETR VOPĚNKA

MATHEMATICS IN THE ALTERNATIVE SET THEORY

Leipzig 1979

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П.НОВИКОВ

31

П. ВОПЕНКА

МАТЕМАТИКА В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Перевод с английского
А. Г. Драгалина

МОСКВА «МИР» 1983

ББК 22 12
В 74
УДК 517 11, 519 5

Вопенка П.

Математика в альтернативной теории множеств: Пер с англ — М Мир, 1983 — 152 с

В книге известного чехословацкого математика предложен новый вариант нестандартного анализа — интенсивно развивающегося направления математики Автор стремится непосредственно использовать специфику нестандартного универсума для формулировки новых математических понятий В русское издание включен новый материал, полученный от автора.

Для специалистов по математической логике, анализу, топологии, теории дифференциальных уравнений.

В $\frac{1702050000-115}{041(01)-83}$ 15—83, ч.1

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В книге известного чехословацкого специалиста по математической логике П. Вопенки развит некоторый вариант нестандартного анализа. В отличие от традиционного подхода к нестандартному анализу в стиле А. Робинсона, где главное внимание уделяется нестандартным методам доказательства классических математических результатов и проблем, автор стремится непосредственно использовать специфику нестандартного универсума для формулировки новых математических понятий. При этом предполагается, что введение, например, бесконечно малых и бесконечно больших величин позволяет строить математические модели, более адекватно отражающие существо дела, чем традиционные подходы в духе теории пределов или топологии.

Изложение сопровождается весьма интересной критикой принципов традиционной теоретико-множественной математики. Применение некоторых теоретико-множественных конструкций оспаривается при этом под углом зрения, отличным от широко известной интуиционистской критики теоретико-множественной математики. В этом отношении особенно интересно первое добавление автора, написанное специально для русского перевода книги. Второе, также специально написанное, добавление посвящено краткому обзору современных результатов в альтернативной теории множеств, полученных участниками семинара по альтернативной теории множеств в Карловом университете в Праге.

Сейчас трудно сказать, в какой мере конкретные попытки автора и его коллег построить альтернативную математику окажутся плодотворными, но сам предложенный подход, например, идея интерпретировать все математические конструкции в области конечных множеств, несомненно, очень важен, интересен и перспективен.

Значительный интерес представляют мотивировки вводимых автором принципов. Читателя заинтересуют нетрадиционные понятия конечного множества, топологической формы, движения и многие другие. Можно надеяться, что этим

С формальной и технической точки зрения альтернативная теория множеств близка к нестандартному анализу, и с этой точки зрения ее можно рассматривать как частный случай нестандартного анализа.

Мой коллега Дж. Поливка помог улучшить некоторые мотивировки, а мои студенты М. Ресл и А. Венковска способствовали улучшению ряда замечаний.

Наконец, автор хотел бы поблагодарить своего друга П. Хайека, который перевел текст на английский язык, и П. Хинмана, прочитавшего корректуру глав I—V. Их многочисленные замечания способствовали улучшению текста.

Заметим, что по альтернативной теории множеств уже было опубликовано несколько предварительных сообщений, см., например, цитированные в литературе статьи А. Сохора.

ВВЕДЕНИЕ

1. КАНТОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Канторовская теория множеств есть математическая теория конечных и актуально бесконечных множеств. В ней канонизируются основные принципы, которые математики признают в качестве верных утверждений относительно множеств.

Основы теории конечных и бесконечных множеств были заложены Б. Больцано, который сформулировал некоторые из ее принципов. Несколько позднее Г. Кантор развил теорию множеств систематическим образом и дополнил ее рядом принципов.

Часть этих принципов, образующих базис теории множеств, относится к конечным множествам и со времен начала цивилизации признается в качестве основных истин не только математиками, но и всеми людьми. Принципы эти считаются самоочевидными как в результате традиционного образования, так и в силу того, что их можно непосредственно проверить в некоторых очень частных случаях, встречающихся в каждодневной практике. Тем не менее критический анализ показывает несостоятельность обычных доводов в пользу абсолютного признания даже этих принципов. Например, мы убеждены, что для данного конечного множества любые подсчеты с помощью натуральных чисел дают одно и то же количество его элементов. Если бы мы попытались доказать это утверждение математической индукцией, то свели бы проблему к аналогичному вопросу об истинности математической индукции. Представим себе, что можно найти множество, для которого один подсчет дает n элементов, в то время как другой дает m элементов, где m и n — два вполне конкретных различных натуральных числа, или по крайней мере допустим, что есть некоторые доводы в пользу существования такого множества. С другой стороны, предположим, что утверждение, гласящее, что каждое множество, имеющее n элементов при одном подсчете, имеет n элементов и при всяком другом подсчете, доказано с помощью некоторого конкретного доказательства. Пусть такое доказательство реализовано с помощью инструкции, даваемой математической индукцией. Описанная ситуация привела бы к заключению, что убедительность доказательств, подчиняющихся законам логики, убывает с увеличением их длины. Отсюда мы могли бы заключить, что даже финитарные математические утверждения могут иметь весьма сложные истинностные значения, что их не только два и т. п.

И все же основной предмет канторовской теории множеств — это бесконечные множества; их существование предполагается. Основные постулаты канторовской теории множеств сформулированы не случайным образом и не выводятся непосредственно из простого допущения о существовании некоторого актуально бесконечного множества. Их мотивировку можно найти в математике задолго до возникновения теории множеств. Сказанное относится прежде всего к следующим двум типам постулатов.

Дотеоретико-множественная математика исследовала объекты нескольких точно определенных сортов, допускающих неограниченное конструирование объектов данного сорта. Таковы, например, натуральные числа, действительные числа, точки пространства и т. д. Бесконечность, содержащаяся в таких сортах объектов, есть *потенциальная* бесконечность. Первый вид постулатов канторовской теории множеств мотивируется тем, что эта бесконечность трактуется как актуальная, т. е. объявляется, что все объекты, которые можно получить в процессе некоторой последовательной конструкции, уже построены. После неоднократного обобщения и аккуратного уточнения вида определяющих свойств объектов мы получаем принцип, согласно которому набор всех объектов, обладающих свойством указанного типа, следует воспринимать как актуально существующее множество. В то же самое время ясно, что имеются и пределы обобщения в этом направлении.

В дополнение к объектам определенного сорта дотеоретико-множественная математика имеет дело с объектами, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторыми подсемействами множества всех объектов определенного сорта. Так, кроме точек пространства рассматриваются прямые линии, плоскости и т. д. Таким образом, можно образовать множество всех прямых как множество некоторых подсемейств множества всех точек. В качестве предельного обобщения этого подхода получается принцип, гарантирующий существование множества *всех* подмножеств данного множества. В отличие от постулатов первого вида постулат о множестве всех подмножеств был, по-видимому, неизвестен Больцано.

В настоящее время существование актуально бесконечных множеств превратилось в догму, в которую верит большинство математиков; более того, математики пытаются внушить веру в эту догму и другим людям. В то же время мы не можем указать какое-либо актуально бесконечное множество в реальном мире — здесь мы имеем дело с конструкцией, расширяющей реальный мир и качественно превосходящей пределы пространства возможностей наших наблюдений. Таким образом, утверждения о бесконечных множествах теряют свое феноменологическое содержание. В результате дальнейшее развитие теории множеств всецело зависит от формальных соображений, которые оказываются единственным надежным поводырем в тьме, сгустившейся вокруг множеств.

Это обстоятельство привело к трудностям уже в самом начале теории множеств. Оказалось, что естественных постулатов канторовской теории множеств недостаточно для решения вопроса об истинности аксиомы выбора. В то же время вопрос стал столь насущным, что совершенно невозможно было ожидать формального подтверждения независимости этой аксиомы. Для нее не было никаких мотивировок, аналогичных мотивировкам предыдущих постулатов. В конце концов аксиома выбора получила общее признание по чисто формальным причинам: эта аксиома значительно упрощает структуру бесконечных множеств и приводит к некоторым очень элегантным теоремам. Попытки мотивировать аксиому выбора ее истинностью для конечных множеств были подорваны аксиомой детерминированности, которая также может быть мотивирована ее истинностью для конечных множеств, но несовместима с аксиомой выбора. Более того, по-видимому, имеется и ряд других аксиом такого вида. Достаточно взять любое суждение, истинное для конечных множеств, приемлемое или даже имеющее техническое преимущество для бесконечных множеств, но не совместимое с аксиомой выбора.

Сегодня известно заметное количество независимых суждений теории множеств, т. е. суждений, не доказуемых и не опровержимых с помощью базисных аксиом. Похоже, что математики не могут предложить интересных принципов, достаточно сильных для разрешения их истинности. Типичным примером является континуум-гипотеза. Принятие континуум-гипотезы дает некоторые технические преимущества, но и теория множеств с отрицанием континуум-гипотезы также довольно интересна. Итак, нет единой теории множеств: вместо этого имеются различные теории множеств, для которых исходная канторовская теория множеств служит общей идейной основой.

Кроме того, можно сформулировать и другие постулаты для актуально бесконечных множеств и создать таким образом теорию актуально бесконечных множеств, отличающуюся от канторовской теории множеств. Например, аксиому о множестве всех подмножеств можно заменить постулатом, гласящим, что каждое бесконечное множество может быть биективно отображено на множество всех натуральных чисел. Вполне вероятно, что получающаяся в результате теория может успешно конкурировать с канторовской теорией множеств.

Попытки математиков до конца постичь актуальную бесконечность оказались безуспешными. Но это не уменьшает, конечно, важности канторовской теории множеств, которая остается свидетельством стремления человека раздвинуть пределы пространства способом, не имеющим никакой аналогии в истории.

2. МАТЕМАТИКА В КАНТОРОВСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Значение канторовской теории множеств для математики определяется не только ею самой, но и ее положением в математике. Вскоре после возникновения теории множеств стало ясно, что она полезна главным образом по следующим трем причинам.

Все математические объекты, созданные в дотеоретико-множественной математике, могут быть заново построены как структуры в теории множеств. Точнее, эти объекты можно задать в теории множеств их каноническими моделями так, чтобы изучение оригинальных объектов заменялось изучением соответствующих моделей. В некоторых случаях эта замена влияет и на исходные понятия и влечет за собой их модификацию в согласии с рассматриваемой моделью. В качестве примеров можно взять действительные числа, исчисление бесконечно малых и т. д.

В дотеоретико-множественной математике встречались бесконечности различных видов, например бесконечность как неограниченная возможность конструирования объектов некоторого сорта, бесконечность как неограниченно возрастающее количество, бесконечность, где встречаются две параллельные прямые, и т. п. Все эти виды бесконечности были сведены к актуальной бесконечности, с которой имеет дело теория множеств. Теория множеств стала общей теорией бесконечности.

Теория множеств дала математике богатейшую в комбинаторном отношении структуру, а именно структуру конечных и актуально бесконечных множеств. Это привело к возникновению новых математических дисциплин. В некоторых из них прямо используются структуры множеств, по крайней мере частично; таковы топология, теория меры и т. п. Другие представляют собой надструктуру на классических структурах, как, например, функциональный анализ и некоторые алгебраические структуры и т. п. Теория множеств предоставляет неисчерпаемое многообразие различных абстрактных структур.

Канторовская теория множеств стала, таким образом, миром, куда вместилась вся математика в целом. Частные математические дисциплины были избавлены от ответственности за свою непротиворечивость, так как эта ответственность была возложена на теорию множеств.

Однако такая концепция математики имеет и заметные недостатки, которые все более привлекают внимание математиков.

Некоторые дисциплины, развивавшиеся в дотеоретико-множественной математике, потребовалось подвергнуть заметной насильственной перестройке, чтобы их можно было включить в теорию множеств Кроме того, некоторые подходы к их построению были абсолютизированы. Примером может служить исчисление бесконечно малых. Ко времени его перестройки теория множеств была еще недостаточно развита, чтобы сделать возможным наиболее естественное моделирование. Вот почему некоторые из основных идей исчисления бесконечно малых оказались скомпрометированными, а область исследования расширилась неадекватным образом. Непосредственные вычисления были заменены доказательствами, часто затемняющими ведущие идеи. Кроме того, этот так называемый ε-δ-анализ не отражает полностью исходное исчисление бесконечно малых, так как некоторые понятия, в которых бесконечно малые количества качественно различаются, непереводимы в ε-δ-анализ и их пришлось отбросить при использовании функционального анализа.

Теория множеств принесла в математику целую шкалу частных случаев актуальной бесконечности. Однако большинство из них нельзя разумно интерпретировать в реальном мире. Их существование есть просто следствие основной концепции актуальной бесконечности в канторовской теории множеств.

Теория множеств открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и к беспрецедентному росту знаний относительно них. Это привело к распылению математики. Кроме того, большинство результатов такого рода приобретает смысл только за счет существования соответствующей структуры в канторовской теории множеств. Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств.

Канторовская теория множеств ответственна за это ущербное развитие математики; с другой стороны, она накладывает на математику ограничения, которые не так легко преодолеть. Все структуры, изучаемые в математике, априорно жестко заданы, и роль математика есть просто роль наблюдателя, их описывающего. Именно поэтому математики столь беспомощны в постижении таких неточных по самой своей сути понятий, как реализуемость, взаимоотношение непрерывного и дискретного и т. д.

Современная математика изучает, таким образом, конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики. Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики. Он проявляется и в том, что часто глубокие и остроумные математические результаты не вызывают никакого интереса не только у людей, которые не являются математиками-профессионалами, но даже у математиков, в настоящее время работающих над проблемами с другим расположением фигур на шахматной доске.

Некоторые математики, ощущая этот кризис, предлагают запретить деятельность в некоторых областях математики или по крайней мере поставить ее под сомнение. Излишне говорить, что такая позиция бесперспективна. Математику, конечно, нельзя подправить механически.

3. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Один из возможных путей выхода из кризиса современной математики может состоять в попытке перестроить математику на феноменологической основе. Такая перестройка должна привести к естественному исключению из математики искусственных проблем, подобно тому как из классической геометрии было исключено исследование фигуры, состоящей из полуокружности и параболы.

Однако чисто феноменологическая концепция математики могла бы ее заметно обеднить; кроме того, это обеднение может сказаться на роли самой математики. Математика есть способ преодоления непосредственного горизонта человеческого опыта. Мы используем математику, чтобы выразить мысли, предваряющие наше знание, которые часто в дальнейшем нельзя проверить. В перестроенной математике мы принуждены, таким образом, также принять основные принципы, позволяющие преодолеть горизонт опыта. В частности, мы не отвергаем логику как способ вывода из аксиом, однако мы представим ряд критических соображений по ее поводу.

Учитывая центральную роль теории множеств в математике, кажется разумным начать с новой теории множеств как возможного базиса для математики (так же, как современная математика базируется на канторовской теории множеств). Эта книга и есть попытка создать такую альтернативную теорию множеств.

Мы будем рассматривать феномен бесконечности в согласии с нашим опытом, т. е. как феномен, который встречается при наблюдении больших, необозримых множеств. Мы ни в коем случае не используем понятия актуально бесконечных множеств. Заметим, что, исключив актуально бесконечные множества, мы не лишаем математику возможности достаточно хорошо их описывать, если они в будущем окажутся полезными. Кроме того, мы сможем предложить несколько различных теорий, которые могут быть использованы как теории актуальной бесконечности. Одной из них является канторовская теория множеств.

Внимательный читатель обнаружит, что наша теория даже не полностью основывается на классической концепции конечных множеств. В настоящей книге этот аспект присутствует лишь неявно; мы учли, что систематическое развитие в этом направлении заметно увеличило бы объем книги и перенесло бы ударение на темы, не слишком подходящие для первого знакомства с нашей теорией. По этой же причине мы развиваем нашу теорию в рамках классической логики.

Мотивировки ряда подходов в нашей теории напоминают некоторые идеи А. С. Есенина-Вольпина, но автор не в состоянии дать более детальный анализ этих взаимоотношений.

Мы развиваем альтернативную теорию множеств в то время, когда канторовская теория множеств уже существенно разработана. Это позволяет почти дословно переносить в нее различные методы и результаты из канторовской теории множеств; они лишь будут иначе интерпретироваться.

Проиллюстрируем это на примере. Предположим, что в популярной брошюре автор пытается рассказать о свойствах счетных множеств. Он приглашает читателя в отель, имеющий бесконечно много комнат, занумерованных натуральными числами; все комнаты заняты. Тем не менее можно принять нового гостя, предоставив ему комнату номер один и в то же время переместив каждого гостя из комнаты с номером n в комнату с номером $n+1$. Теперь представим себе, что в отеле только тысяча комнат и все они заняты. Проделаем то же самое. Новый гость помещается в комнату номер один, гость из комнаты номер один перемещается в комнату номер два и т. д. Так как гости передвигаются последовательно, процесс не закончится за один день, и, так же как и выше, каждый гость будет устроен в течение почти всего дня. В этом случае множество из тысячи комнат содержит подсемейство (подсемейство всех комнат, в которые гости потенциально передвигаются), которое ведет себя в некотором смысле как счетное множество в канторовской теории множеств.

Подобно канторовской теории множеств наша теория — неформализованная, «наивная» теория. Тем не менее некоторые из ее важных фрагментов могут быть аксиоматизированы. Так, например, почти все результаты, содержащиеся в настоящей книге, можно вывести из аксиом, которые явно сформулированы. Полученная таким образом формальная теория имеет простые модели в любой из аксиоматических систем канторовской теории множеств, например в теории множеств Цермело — Френкеля. Некоторые модели легко получить из ω-насыщенных моделей мощности $\aleph_1$ для арифметики Пеано. Это доказывает среди прочего относительную непротиворечивость нашей теории *по отношению* к теории множеств Цермело — Френкеля. Кроме того, это позволяет нам исследовать нашу теорию классическими методами, вдохновляясь результатами теории моделей и используя различную технику доказательств.

Если нашу теорию рассматривать как формальную систему, то некоторые из ее моделей можно идентифицировать с довольно частным случаем нестандартного анализа Робинсона, и это дает дополнительный важный источник методов доказательства.

Все эти источники и вдохновляющие соображения будут подходящим образом использованы.

Нам могут заметить, что наша теория как формальная система является лишь частью современной математики. Но это замечание столь же не относится к делу, как и замечание, что общая теория относительности ограничивается только одной геометрией из классификации геометрий по Клейну.

Формальная трактовка нашей теории может упростить работу в различных аспектах. Но читатель ни на минуту не должен забывать, что наша теория не является формальной системой и что приведенные в этой книге аксиомы не образуют исчерпывающего списка. Приведены лишь те аксиомы, которые реально используются. Например, в разд. 6 гл. I мы указываем принцип (сформулированный неточно) для принятия новых аксиом. Аксиомы, вводимые на основании этого принципа, могут существенно затруднить (или сделать просто невозможным) построение моделей нашей теории в рамках обычных теоретико-множественных систем.

4. МАТЕМАТИКА В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Если наша теория должна действительно стать альтернативой канторовской теории множеств, мы должны показать, что она может заменить канторовскую теорию множеств по отношению к математике. И хотя основная часть настоящей книги посвящена развитию собственно теории, все же основная цель нашей работы — развитие математики в ее рамках.

Мы уже упоминали, что наша теория есть общая теория бесконечности. Прочитав первые две главы, читатель увидит, что объекты дотеоретико-множественной математики могут быть построены в нашей теории столь же хорошо, как и в канторовской теории множеств. Некоторые сомнения могут относиться только к исчислению бесконечно малых.

Прежде всего совершенно ясно, что в нашей теории можно развить ε-δ-анализ: но функциональный анализ был бы уже при этом довольно неестественным. Однако мы и не собирались развивать исчисление бесконечно малых как ε-δ-анализ. В нашей теории для этой цели имеются более естественные средства, да и функциональный анализ может быть перестроен в рамках нашей теории более естественным образом. В настоящее время прорабатывается несколько вариантов исчисления бесконечно малых и пока не ясно, какой из них наиболее естествен. Поэтому мы и не включили в эту книгу изложение исчисления бесконечно малых.

Следует подвергнуть критическому анализу, касающемуся самых их основ, те разделы, которые развивались после возникновения теории множеств. Необходимо искать новые математические определения для понятий, которые уже были математически формализованы. Раздел топологии, посвященный формам, как раз и дает такой пример Наш опыт свидетельствует о том, что механическое приспосабливание понятий, используемых в канторовской теории множеств, часто сдерживает развитие и скрывает простые естественные подходы. Здесь и содержится главное различие между работой в нашей теории и в нестандартном анализе Робинсона. Нестандартный анализ не является неформальной теорией, и его raison d'etre выводится из канторовской теории множеств. Главная цель нестандартного анализа — обогатить канторовскую теорию множеств новой техникой. Понятия канторовской теории множеств не подвергаются при этом критике.

Наша теория позволяет дать естественную математическую трактовку *понятий, которые либо не были* определены математически, либо были определены неудовлетворительным образом. Например, мы предлагаем главу, посвященную понятию движения. Мы увидим, что развитие математики в альтернативной теории множеств быстро приводит к проблемам, для решения которых в современной математике нет подходящих методов. Таким образом, необходимо искать новую, необычную технику.

Получив определенные познания в альтернативной теории множеств, читатель сможет открыть различные возможности для развития в ее рамках частных математических дисциплин. Некоторые из таких возможностей исследовались на Семинаре по альтернативной теории множеств в Праге и были подвергнуты определенному критическому пересмотру. Настоящая книга содержит лишь некоторые примеры, разработанные ее автором.

Сужение круга математических проблем и концентрация внимания на проблемах, поставленных альтернативной теорией множеств, является сильнодействующим средством. Дух альтернативной теории множеств, как нам кажется, состоит в том, чтобы регулировать математические проблемы «in medias res». Решение таких проблем — отнюдь не легкая задача. Если наш путь или какой-либо подобный ему окажется верным, то это приведет, вероятно, к значительному сокращению математической продукции.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В АЛЬТЕРНАТИВНУЮ ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

Математик творит объекты и устанавливает связи между ними. Он делает это различными способами, и мы не будем пытаться описать их здесь в полной общности.

Объекты и отношения, образующие предмет изучения математики, существуют лишь в нашем воображении. Для различных целей математики создают сложные миры из таких объектов. Наше исследование будет посвящено одному из частных миров математических объектов.

Мы опишем и исследуем наш мир объектов неформально. Тем не менее мы попытаемся выбрать формулировки, легко допускающие формализацию, так как некоторая формализация на более поздних шагах развития нашей теории станет желательной. (При этом под формализацией мы понимаем формальную аксиоматическую систему, соответствующую рассматриваемой неформальной теории или по крайней мере некоторым важным фрагментам этой теории.) В частности, свойства, приданные нашему миру в процессе его порождения, будут выражены в виде аксиом. Исходя из этих аксиом, затем уже могут быть доказаны другие их свойства. Некоторые аксиомы будут сформулированы в виде, не допускающем непосредственной механической формализации; тем не менее они будут часто служить для ориентации.

Объекты будут обозначаться буквами, возможно с индексами, или другими стандартными символами. Запись $X = Y$ означает, что X и Y обозначают один и тот же объект, и читается как «X равно Y»; $X \neq Y$ означает, что X и Y обозначают различные объекты.

Чтобы упростить систему обозначений, мы будем использовать логические связки и кванторы $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$, $\neg$, $\exists$, $\forall$, $\exists!$. Квантор $\exists!$ читается как «существует ровно один». Далее, мы используем символы $\varphi(X)$ и $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ для обозначения свойств объектов и отношений между объектами соответственно. (Здесь X и $X_1, \ldots, X_n$ суть переменные, пробегающие объекты.)

Отношение принадлежности будет играть основополагающую роль в нашей теории. Это отношение, равно как и объекты нашего мира, будет введено позднее, но уже сейчас мы примем соглашение, что символ $\in$ означает отношение принадлежности. Мы читаем $X \in Y$ как «X есть член Y», или, эквивалентным образом, как «X принадлежит Y», или «X есть элемент Y». Мы пишем $X \notin Y$, если X не принадлежит Y. Иногда будут использоваться ограниченные кванторы ($\exists X \in Y$ (...) как сокращение для $\exists X(X \in Y \& \ldots)$ и ($\forall X \in Y$) (...) как сокращение для $\forall X(X \in Y \Rightarrow \ldots)$.

РАЗДЕЛ 1. МНОЖЕСТВА

Множества суть объекты специального вида. Мы опишем способ построения множеств и определение *отношения принадлежности* между объектами и множествами.

Прежде всего предположим, что построено пустое множество, не имеющее элементов. Таким образом, существует объект, являющийся множеством и не имеющий элементов. Это множество, как обычно, мы обозначим через $\varnothing$.

Другие множества будут конструироваться следующим образом. Предположим, что некоторые объекты уже были построены ранее и что мы можем расположить эти объекты в некоторый список или по крайней мере можем вообразить такой список. В такой ситуации говорят, что построено новое множество, а именно множество всех объектов этого списка; это множество отлично от любого объекта из списка. Оно не зависит от порядка элементов в списке, но однозначно определяется этими элементами. Таким образом, если X и Y являются множествами и имеют одни и те же члены, то $X = Y$.

Значит, наша концепция множества подобна канторовской, но все наши множества конечны с канторовской точки зрения Мы не допускаем фикции актуально бесконечных множеств.

Если $X_1, \ldots, X_n$ есть список объектов, то $\{X_1, \ldots, X_n\}$ обозначает множество, содержащее в точности объекты $X_1, \ldots, X_n$.

Универсум множеств составлен из множеств, сконструированных итеративно, начиная с пустого множества.

Мы отнюдь не утверждаем, что универсум множеств содержит все множества, которые можно построить. Наше ограничение универсумом множеств в указанном выше смысле несущественно для целей теории множеств. В этом универсуме достаточно множеств, чтобы кодировать различные объекты, ему не принадлежащие, и таким образом сводить проблемы, касающиеся множеств более общего вида, т. е. множеств, получаемых с помощью нашей конструкции из произвольных объектов, к проблемам, относящимся уже к универсуму множеств. С другой стороны, наложенное ограничение дает некоторые технические преимущества.

Будем использовать малые буквы, чтобы обозначать множества из универсума множеств, так что, говоря об объекте x, мы автоматически предполагаем, что x принадлежит универсуму множеств. При этом, конечно, не исключается и возможность обозначать множества другими символами. Тот факт, что X есть множество, обозначается через $\mathrm{Set}(X)$.

Сформулируем теперь аксиомы, описывающие некоторые основные свойства универсума множеств. Далее мы будем стараться выводить другие утверждения (или их отрицания) из наших аксиом, а не устанавливать их истинность прямо, исходя из интуиции, лежащей в основе построения универсума множеств.

Аксиома экстенсиональности для множеств

$$(\forall x)(\forall y)(x = y \equiv (\forall z)(z \in x \equiv z \in y)).$$

Для любых множеств x и y x равно y тогда и только тогда, когда x и y имеют одни и те же элементы.

Аксиома пустого множества

$$(\exists x)(\forall Y)(Y \notin x).$$

Существует множество, не имеющее элементов.

По аксиоме экстенсиональности существует в точности одно пустое множество.

Аксиома образования последующих множеств

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv (u \in x \vee u = y)).$$

Для любых двух множеств x и y существует множество z, имеющее в точности следующие элементы: y и все элементы из x.

По аксиоме экстенсиональности множество z единственным образом определяется по x и y; мы будем писать $z = x \cup \{y\}$. Заметим, что $\varnothing \cup \{y\} = \{y\}$, $\{x_1\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2\}$ и т. д.

Указанные три аксиомы отражают процесс построения универсума множеств. Если наша конструкция универсума множеств не бессмысленна, эти аксиомы верны. Аксиомы такого вида называются *аналитическими аксиомами*.

Мы рассмотрим теперь теоретико-множественные свойства и отношения, т. е. свойства и отношения, выразимые с помощью теоретико-множественных формул. *Теоретико-множественные формулы* суть выражения, конструируемые с помощью следующих правил:

1) $x = y$ и $x \in y$ — теоретико-множественные формулы.

2) Если φ и ψ — теоретико-множественные формулы, то $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $\neg(\varphi)$, $(\exists x)\varphi$, $(\forall x)\varphi$ также теоретико-множественные формулы.

3) Если в пп. 1) и 2) заменить x и y другими малыми буквами, то полученные формулы также являются теоретико-множественными.

Сформулируем теперь последнюю аксиому, относящуюся к универсуму множеств, аксиому индукции. Принимая эту аксиому, мы подчиняем наши множества законам, верным в канторовской теории множеств для конечных множеств.

Аксиома индукции

Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественное свойство. Тогда

$$\varphi(\varnothing) \& (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\})) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x).$$

(Если φ имеет место для $\varnothing$ и, коль скоро φ имеет место для x, φ имеет место для $x \cup \{y\}$, то φ имеет место для всякого x.)

Здесь у нас, конечно, не отдельная аксиома, а схема аксиом. Частные аксиомы получаются, если выбирать конкретные теоретико-множественные формулы в качестве φ.

Аксиома индукции не является аналитической аксиомой, так как, принимая ее для множеств, мы приписываем множествам различные свойства, которые не могут быть непосредственно усмотрены из определения. Такие свойства согласуются с классической теорией конечных множеств, но сами по себе проблематичны. Аксиома индукции есть постулированная гипотеза относительно конечных множеств. Аксиомы такого типа будут называться *гипотетическими аксиомами.*

Мы могли бы достичь тех же целей и не предполагая аксиомы индукции, но при этом различные части теории, с которыми легко работать с помощью традиционной техники, становятся весьма сложными технически. Таким образом, мы принимаем аксиому индукции в основном из соображений удобства. Позже мы покажем, как можно от нее избавиться.

Никаких других аксиом для множеств мы пока предполагать не будем. Правда, в конце раздела мы допустим еще одну аксиому, аксиому регулярности, которая утверждает, что пустое множество есть основание для конструирования универсума множеств, но в дальнейшем аксиома регулярности нам не будет нужна.

Некоторые свойства множеств и некоторые отношения между множествами используются довольно широко и поэтому заслуживают специальных обозначений и наименований. Например, мы определим

$$x \subseteq y \equiv (\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

(x есть *подмножество* множества y тогда и только тогда, когда каждый элемент x является и элементом y);

$$x \subset y \equiv x \subseteq y \,\&\, x \neq y$$

(x есть *собственное подмножество* множества y тогда и только тогда, когда x есть подмножество y и отлично от y).

Мы опустим в этой книге тривиальные и стандартные теоремы о множествах; предполагается, что читатель их знает. Что касается других теорем, доказательства которых хорошо известны, то мы будем либо опускать эти доказательства, либо ограничиваться наводящими указаниями.

Теорема. *Для любых множеств x и x_1 существует множество z, имеющее следующие элементы: все элементы множества x, все элементы множества x_1 и никаких иных элементов.*

Доказательство. Нашу теорему можно следующим образом записать формально:

$$(\forall x)(\forall x_1)(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \vee u \in x_1).$$

Возьмем произвольное множество x_1, и пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула $(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \vee u \in x_1)$. Прежде всего очевидно, что $\varphi(\varnothing)$. Предположим $\varphi(x)$ и возьмем произвольное y. Пусть z удовлетворяет условию $(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \vee u \in x_1)$. Тогда $(\forall u)(u \in z \cup \{y\} \equiv u \in x \cup \{y\} \vee u \in x_1)$, так что $\varphi(x \cup \{y\})$. По аксиоме индукции получаем $\forall x \varphi(x)$, что и завершает доказательство.

По аксиоме экстенсиональности множество z из предыдущей теоремы однозначно определяется по x и x_1. Следовательно, мы можем таким образом определить операцию объединения двух множеств:

$$z = x \cup x_1 \equiv (\forall u)(u \in z \equiv u \in x \vee u \in x_1).$$

Заметим, что эта операция включает в себя и ранее введенную операцию $x \cup \{y\}$ как частный случай.

Теорема. *Для всякого множества x существует множество z, элементы которого суть в точности все элементы элементов множества x.*

Доказательство. Формально следует доказать такую формулу:

$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv (\exists v \in x)(u \in v)).$$

Пусть $\varphi(x)$ есть $(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv (\exists v \in x)(u \in v))$. Допустим $\varphi(x)$, и пусть y произвольно. Пусть z удовлетворяет условию

$(\forall u)(u \in z \equiv (\exists v \in x)(u \in v))$. Тогда $(\forall u)(u \in z \cup y \equiv (\exists v \in x \cup \{y\})(u \in v))$, что влечет $\varphi(x \cup \{y\})$.

В силу аксиомы экстенсиональности z однозначно определяется по x; следовательно, мы можем определить объединение множества:

$$z = \bigcup x \equiv (\forall u)(u \in z \equiv (\exists v)(u \in v \,\&\, v \in x)).$$

Теорема. *Пусть* $\varphi(u, v)$ *есть теоретико-множественная формула, и допустим* $(\forall u)(\exists! v)\varphi(u, v)$. *Тогда*

$$(\forall x)(\exists z)(\forall v)(v \in z \equiv (\exists u \in x)\varphi(u, v)).$$

Словами: допустим, что для каждого u существует ровно одно v, такое, что $\varphi(u, v)$; *назовем это v* φ*-образом u; тогда для каждого x существует z, чьи элементы суть в точности* φ*-образы элементов x.*

Строго говоря, это не отдельная теорема, а схема теорем, называемая *схемой подстановки*. Подставляя различные теоретико-множественные формулы, мы получим частные теоремы. Наше доказательство состоит в том, что мы дадим инструкции для доказательства любого из частных случаев.

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ есть теоретико-множественная формула $(\exists z)(\forall v)(v \in z \equiv (\exists u \in x)\varphi(u, v))$. Прежде всего очевидно, что $\psi(\varnothing)$. Допустим $\psi(x)$ и возьмем произвольное y. Пусть z удовлетворяет условию $(\forall v)(v \in z \equiv (\exists u \in x)\varphi(u, v))$. Пусть $\varphi(y, y_1)$. Тогда $(\forall v)(v \in z \cup \{y_1\} \equiv (\exists u \in x \cup \{y\})\varphi(u, v))$, что влечет $\psi(x \cup \{y\})$. По аксиоме индукции имеем $\forall x \psi(x)$.

Теорема. $(\forall x)(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \subseteq x)$.

Словами: для каждого x все подмножества x образуют множество z.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ есть $(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \subseteq x)$. Допустим $\varphi(x)$ и возьмем y. Пусть z удовлетворяет условию $(\forall u)(u \in z \equiv u \subseteq x)$. Заметим, что $(\forall u)(\exists! v)(v = u \cup \{y\})$. Следовательно, схема подстановки дает множество z_1, такое, что $(\forall v)(v \in z_1 \equiv (\exists u)(u \in z \,\&\, v = u \cup \{y\}))$. Тогда $(\forall u)(u \in z \cup z_1 \equiv u \subseteq x \cup \{y\})$, откуда $\varphi(x \cup \{y\})$.

Эта теорема дает нам возможность определить операцию взятия множества подмножеств:

$$z = P(x) \equiv (\forall u)(u \in z \equiv u \subseteq x).$$

Следующий факт есть схема теорем.

Теорема. (Схема аксиом свертывания.) *Пусть $\varphi(u)$ есть теоретико-множественная формула. Тогда*

$$(\forall x)(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \,\&\, \varphi(u)).$$

Словами: для каждого x его элементы, удовлетворяющие φ, образуют множество z.

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ есть формула $(\exists z)(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \,\&\, \varphi(u))$. Допустим $\psi(x)$ и возьмем произвольное y. Пусть z удовлетворяет условию $(\forall u)(u \in z \equiv u \in x \,\&\, \varphi(u))$. Если $\varphi(y)$, то мы положим $z_1 = z \cup \{y\}$; в противном случае возьмем $z_1 = z$. Очевидно, что $(\forall u)(u \in z_1 \equiv u \in x \cup \{y\} \,\&\, \varphi(u))$, откуда $\psi(x \cup \{y\})$, и это завершает доказательство.

Если дано $\varphi(u)$, то аксиома экстенсиональности гарантирует, что для каждого x соответствующее множество z единственно. Таким образом, возникает следующая схема определений.

Для каждой теоретико-множественной формулы $\varphi(u)$

$$z = \{u \in x;\ \varphi(u)\} \equiv (\forall v)(v \in z \equiv v \in x \,\&\, \varphi(v)).$$

Некоторые частные случаи этой схемы заслуживают специальных обозначений и наименований, например мы положим

$$x \cap y = \{u \in x;\ u \in y\}, \qquad x \setminus y = \{u \in x;\ u \notin y\}.$$

Множества x и y называются *дизъюнктными*, если $x \cap y = \varnothing$. Теперь мы можем легко доказать, что в универсуме множеств нет множества, содержащего все множества из этого универсума.

Теорема. $\neg(\exists x)(\forall y)(y \in x)$, *т. е. никакое множество не содержит все множества в качестве элементов.*

Доказательство. Допустим $(\forall y)(y \in x)$ и положим $v = \{u \in x \,\&\, u \notin u\}$, тогда одновременно $v \in v$ и $v \notin v$ — противоречие.

Так как $\{X, Y\}$ есть то же самое множество, что и $\{Y, X\}$, для произвольных объектов X и Y, мы можем назвать $\{X, Y\}$ *неупорядоченной парой* объектов X и Y. *Упорядоченная пара* X и Y есть объект, который однозначно определяется объектами X и Y, взятыми в указанном порядке, и который в свою очередь определяет однозначно X в качестве своей первой компоненты и Y в качестве второй. Этого можно достичь, если, например, положить

$$\langle X, Y\rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}.$$

В частности, в универсуме множеств мы положим по определению

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Следующая теорема показывает, что это — подходящее определение упорядоченной пары.

Теорема. $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \equiv (x = x_1) \& (y = y_1)$.

Упорядоченная тройка может быть затем определена как

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle.$$

Упорядоченные четверки, пятерки и т. д. определяются подобным же образом. Теперь мы можем определить *декартово произведение* двух множеств:

$$x \times y = \{u \in P(P(x \cup y));\quad (\exists v_1 \in x)(\exists v_2 \in y)(u = \langle v_1, v_2\rangle)\}.$$

Заметим, что если $v_1 \in x$ и $v_2 \in y$, то $\{v_1, v_2\} \in P(x \cup y)$ и, таким образом, $\langle v_1, v_2\rangle \in P(P(x \cup y))$, так что

$$u \in x \times y \equiv (\exists v_1 \in x)(\exists v_2 \in y)(u = \langle v_1, v_2\rangle).$$

Будем писать x^2 вместо $x \times x$.

После того как упорядоченные пары введены, мы можем дать теоретико-множественные определения отношения и функции. Дадим следующие определения:

$$\mathrm{Rel}(x) \equiv (\forall z \in x)(z \text{ есть упорядоченная пара})$$

(x есть *отношение*),

$$\mathrm{Fnc}(x) \equiv \mathrm{Rel}(x) \& (\forall u, v, w)(\langle v, u\rangle \in x \& \langle w, u\rangle \in x \Rightarrow v = w)$$

(x есть *функция*).

Область определения, область значений и т. п. могут быть введены для произвольных множеств, а не только для отношений. Дадим такие определения:

$$\mathrm{dom}(x) = \{u \in \bigcup \bigcup x;\ (\exists v)(\langle v, u\rangle \in x)\},$$
$$\mathrm{rng}(x) = \{u \in \bigcup \bigcup x;\ (\exists v)(\langle u, v\rangle \in x)\}$$

(*область определения* и *область значений*).

Замечая, что $\langle u, v\rangle \in x$ влечет $u \in \bigcup \bigcup x$ и $v \in \bigcup \bigcup x$, мы получим непосредственно, что

(1) $\mathrm{dom}(x)$ есть множество всех u, таких, что $\langle v, u\rangle \in x$ для некоторого v,

(2) $\mathrm{rng}(x)$ есть множество всех u, таких, что $\langle u, v\rangle \in x$ для некоторого v.

Если f — функция и $u \in \mathrm{dom}(f)$, то $f(u)$ обозначает то единственное v, для которого $\langle v, u\rangle \in f$, т. е. $v = f(u)$ тогда и только тогда, когда $\langle v, u\rangle \in f$.

$x^{-1} = \{u \in P(P(\bigcup \bigcup x));\ (\exists\, v_1, v_2)(u = \langle v_1, v_2\rangle \,\&\, \langle v_2, v_1\rangle \in x)\}$ (*обратное отношение*),

$$x \upharpoonright y = x \cap (\mathrm{rng}(x) \times y)$$

(*ограничение x множеством y*).

Очевидно, что x^{-1} есть множество всех пар $\langle v_1, v_2\rangle$, таких, что $\langle v_2, v_1\rangle \in x$, и $x \upharpoonright y$ есть множество всех пар $\langle v_1, v_2\rangle \in x$, таких, что $v_2 \in x$, таких, что $v_2 \in y$.

Пользуясь теоретико-множественным понятием функции, мы можем определить эквивалентность (эквиполлентность) и субвалентность между множествами. Мы будем говорить о теоретико-множественной эквивалентности и субвалентности или, короче, о множественной эквивалентности и множественной субвалентности. Общие понятия эквивалентности и субвалентности будут введены во втором разделе. А сейчас мы дадим следующие определения:

Функцию f назовем взаимно однозначной, если f^{-1} также является функцией.

$x \mathrel{\widehat{\approx}} y$ (*x множественно эквивалентно y*) тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначная функция f, область определения которой есть x, а область значений есть y.

$x \mathrel{\widehat{\lesssim}} y$ (*x множественно субвалентно y*) тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначная функция f, область определения которой есть x, а область значений — подмножество y.

$x \mathrel{\widehat{<}} y$ (*x строго множественно субвалентно y*) тогда и только тогда, когда $x \mathrel{\widehat{\lesssim}} y$, но не $x \mathrel{\widehat{\approx}} y$.

Это общеизвестные понятия, и о них имеются различные хорошо известные теоремы. Мы ограничимся следующими тремя.

Теорема. *Еслу y — собственное подмножество x, то y строго субвалентно x.*

Доказательство. Докажем $(\forall x)(\forall u \subset x)(\neg\, u \mathrel{\widehat{\approx}} x)$. Пусть $\varphi(x)$ есть теоретико-множественная формула $\neg(\exists u)(u \subset x \,\&\, u \mathrel{\widehat{\approx}} x)$. Допустим $\varphi(x)$, и пусть $y \notin x$. Пусть u — собственное подмножество множества $x \cup \{y\}$, такое, что $u \mathrel{\widehat{\approx}} x \cup \{y\}$. Рассмотрим взаимно однозначное отображение f

множества $x \cup \{y\}$ на u. Сначала допустим, что $u \subseteq x$. Тогда $u \setminus \{f(y)\} \subset x$ и $f \upharpoonright x$ есть взаимно однозначное отображение x на $u \setminus \{f(y)\}$ — противоречие. Отсюда $y \in u$. Пусть $f(z) = y$. Положим $g = (f \upharpoonright (x \setminus \{z\})) \cup \{\langle f(y), z\rangle\}$. Тогда $g \upharpoonright x$ есть взаимно однозначное отображение x на $x \cap u$ и $x \cap u$ есть собственное подмножество x — противоречие. Таким образом, мы доказали $\varphi(x \cup \{y\})$.

Теорема. *Если* $x \mathrel{\widehat{\lesssim}} y$ *и* $y \mathrel{\widehat{\lesssim}} x$, *то* $x \mathrel{\widehat{\approx}} y$.

Теорема. $x \mathrel{\widehat{\lesssim}} y$ *или* $y \mathrel{\widehat{\lesssim}} x$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула $(\forall u)(u \mathrel{\widehat{\lesssim}} x \vee x \mathrel{\widehat{\lesssim}} u)$. Мы докажем $(\forall x)\varphi(x)$ индукцией. Допустим $\varphi(x)$, и пусть $y \notin x$. Для данного u имеем $u \mathrel{\widehat{\lesssim}} x$ или $x \mathrel{\widehat{\lesssim}} u$. В первом случае мы получаем $u \mathrel{\widehat{\lesssim}} x \cup \{y\}$, и, значит, достаточно рассмотреть случай $x \mathrel{\widehat{<}} u$. Следовательно, найдется $u_1 \subset u$, такое, что $x \mathrel{\widehat{\approx}} u_1$. Пусть $v \in u \setminus u_1$. Имеем $x \cup \{y\} \mathrel{\widehat{\approx}} u_1 \cup \{v\}$, так что $x \cup \{y\} \mathrel{\widehat{\lesssim}} u$, поскольку $u_1 \cup \{v\} \subseteq u$.

Теорема. *Для каждого непустого x существует $u \in x$, являющееся минимальным элементом x по отношению к включению, т. е. u таково, что не существует $v \in x$, которое было бы собственным подмножеством u.*

Доказательство проводится индукцией. Пусть $\varphi(x)$ есть теоретико-множественная формула $x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists u \in x)(\forall v \in x)(\neg\, v \subset u)$. Допустим $\varphi(x)$, и пусть $y \notin x$. Если $x = \varnothing$, то $x \cup \{y\}$ содержит лишь один элемент, который, очевидно, и является минимальным. Пусть $x \neq \varnothing$, и пусть u — минимальный элемент x. Если $y \subset u$, то определим $u_1 = y$; в противном случае пусть $u_1 = u$. Очевидно, что u_1 минимален в $x \cup \{y\}$.

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема. *Каждое непустое множество содержит элемент, максимальный по отношению к включению.*

Теперь сформулируем аксиому регулярности и на ней закончим наш список аксиом, относящихся только к множествам. Аксиома регулярности не используется в оставшихся разделах первой главы. Это гипотетическая схема аксиом.

Аксиома регулярности

Пусть $\varphi(x)$ есть теоретико-множественная формула. Если $(\exists x)\,\varphi(x)$, то $(\exists x)(\varphi(x)\ \&\ (\forall y \in x) \neg\, \varphi(y))$.

Словесное выражение заключения аксиомы: существует множество x, удовлетворяющее φ, такое, что никакой элемент множества x уже не удовлетворяет φ. Интуитивно x есть первое множество, удовлетворяющее φ, полученное в процессе построения универсума множеств.

Теорема. *Для всех множеств u имеем $u \notin u$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула $x = u$. Очевидно, что $(\exists x)\,\varphi(x)$. Пусть x таково, что $\varphi(x)\ \&\ (\forall y \in x) \neg\, \varphi(y)$; тогда $x = u\ \&\ (\forall y \in x)(y \neq u)$, т. е. $(\forall y \in u)(y \neq u)$, что дает $u \notin u$.

Аналогично можно доказать, что не существует x и y, для которых $x \in y\ \&\ y \in x$, и, далее, не существует x, y и z, таких, что $x \in y$, $y \in z$, $z \in x$, и т. д.

Аксиома регулярности может быть заменена следующей схемой, ей эквивалентной:

Аксиома $\in$-индукции

Пусть $\varphi(x)$ есть теоретико-множественная формула. Если $(\forall x)[(\forall y \in x)\,\varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)]$, то $\forall x \varphi(x)$.

В заключение этого раздела докажем эквивалентность аксиомы регулярности и аксиомы $\in$-индукции.

Допустим сначала, что справедлива аксиома регулярности. Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула $(\forall x)[(\forall y \in x)\,\varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)]$. Пусть $\psi(x)$ есть $\neg\,\varphi(x)$. Допустим, что существует x, не удовлетворяющий φ, т. е. $\exists x \psi(x)$. По регулярности тогда существует и x, такой, что $\psi(x)$ и $(\forall y \in x) \neg\, \psi(x)$, т. е. $(\forall y \in x)\,\varphi(x)$, что влечет $\varphi(x)$, — противоречие. Мы доказали, что $(\forall x)\,\varphi(x)$.

Обратно, допустим, что справедлива аксиома $\in$-индукции. Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула и $\exists x \varphi(x)$. Далее, допустим, кроме того, что $(\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow (\exists y \in x)\,\varphi(y))$. Пусть $\psi(x)$ есть $\neg\varphi(x)$. Тогда $(\forall x)\,[(\forall y \in x)\,\psi(y) \Rightarrow \psi(x)]$ и, следовательно, $(\forall x)\,\psi(x)$, что противоречит $(\exists x)\,\varphi(x)$. Это и завершает доказательство.

РАЗДЕЛ 2. КЛАССЫ

Каждое свойство объектов само можно рассматривать как объект. Свойство объектов, рассматриваемое как объект, называется *классом*. Классы суть дальнейшие специфические объекты нашего исследования. Тот факт, что объект X является классом, мы обозначим через $\mathrm{Cls}(X)$.

Если $\varphi(X)$ обозначает свойство объектов, то $\{X; \varphi(X)\}$ обозначает это свойство как класс; таким образом, $\{X; \varphi(X)\}$ обозначает объект исследования специального вида.

Мы ограничим теперь определенным образом ту область классов, которую мы намерены изучать, по причинам, аналогичным тем, по которым мы ограничили изучение множеств универсумом множеств, как это описано выше.

Расширенный универсум образован классами вида $\{x; \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ есть свойство множеств, взятых из универсума множеств. Такая конструкция расширенного универсума дает нам возможность сформулировать следующую аксиому.

Аксиома существования классов

Для каждого свойства $\varphi(x)$ множеств из универсума множеств расширенный универсум содержит класс $\{x; \varphi(x)\}$.

Расширенный универсум зависит от наших возможных ограничений на свойства, которые допускаются в аксиоме существования классов. Такое ограничение необходимо, например, если мы будем формализовать нашу теорию. Однако на текущий момент мы не будем устанавливать никаких ограничений на расширенный универсум. Подчеркнем основной факт, что мы отнюдь не будем в аксиоме существования классов ограничивать себя теоретико-множественными свойствами (т. е. свойствами, описываемыми теоретико-множественными формулами).

Определим теперь отношение принадлежности в частном случае классов из расширенного универсума.

Если X — объект, а Y — класс из расширенного универсума (таким образом, Y есть свойство множеств из универсума множеств), то $X \in Y$ тогда и только тогда, когда X принадлежит универсуму множеств и обладает свойством Y.

Можно достичь заметного технического упрощения, если множества из универсума множеств идентифицировать с некоторыми классами. Множество y может быть идентифицировано со свойством «x есть элемент множества y». Таким образом, универсум множеств становится частью расширенного универсума. Наше соглашение выражается следующей аксиомой:

Аксиома о множествах как частном случае классов

$$(\forall x)\, \mathrm{Cls}(x).$$

(Словами: каждое множество есть класс.)

Аксиомы для универсума множеств, сформулированные в предыдущем разделе, равно как и полученные там результаты, становятся, таким образом, частью теории расширенного универсума.

Первый естественный вопрос: что значит, что два класса X и Y из расширенного универсума равны. Очевидно, это должно означать, что X и Y суть идентичные свойства. Здесь можно, конечно, проводить тонкие различия между классами, в частности принимая во внимание различия в синтаксической форме выражений, задающих свойства. Мы не будем этого делать, поскольку развитие теории в этом направлении не является нашей целью. Будем считать, что классы X и Y суть равные объекты тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.

Так как в основном мы будем иметь дело именно с классами из расширенного универсума, будем использовать буквы X, Y, ... для обозначения классов из расширенного универсума, если специально не оговорено противное. Подобным же образом мы будем говорить просто «класс» вместо «класс из расширенного универсума».

Итак, наша концепция равенства классов может быть описана с помощью следующей аксиомы:

Аксиома экстенсиональности для классов

$$(\forall X,\ Y)(X = Y \equiv (\forall u)(u \in X \equiv u \in Y)).$$

Словами: два класса равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.

Отметим, что все до сих пор сформулированные в настоящем разделе аксиомы являлись аналитическими.

Собственный класс есть класс, не являющийся множеством. Заметим, что если X — собственный класс, то множество $\{X\}$ не принадлежит универсуму множеств.

Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула (не обязательно теоретико-множественная), касающаяся множеств, то мы пишем $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle;\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$ вместо

$$\{x;\ (\exists x_1, \ldots, x_n)(x = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mathbin{\&} \varphi(x_1, \ldots, x_n))\}..$$

Если $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула, то мы скажем, что класс $\{x; \varphi(x)\}$ *теоретико-множественно определим.* Так как $y = \{x; x \in y\}$, то каждое множество оказывается теоретико-множественно определимым.

Универсальный класс есть класс $V = \{x; x = x\}$. Очевидно, что V теоретико-множественно определим и $(\forall x)(x \in V)$. Отсюда следует, что V — собственный класс (не множество).

В первом разделе были определены различные понятия, относящиеся к множествам. Обобщим теперь эти определения до определений, относящихся к классам, и дадим некоторые новые определения.

$X \subseteq Y \equiv (\forall u)(u \in X \Rightarrow u \in Y)$ (включение),

$X \subset Y \equiv X \subseteq Y \,\&\, X \neq Y$ (собственное включение),

$X \cap Y = \{u;\ u \in X \,\&\, u \in Y\}$ (пересечение),

$X \cup Y = \{u;\ u \in X \vee u \in Y\}$ (объединение),

$X \setminus Y = \{u;\ u \in X \,\&\, u \notin Y\}$ (разность),

$X \times Y = \{\langle u, v\rangle;\ u \in X \,\&\, v \in Y\}$ (декартово произведение),

$X^2 = X \times X$ (декартов квадрат),

$\mathrm{dom}\,(X) = \{u;\ (\exists v)\langle v, u\rangle \in X\}$ (область определения),

$\mathrm{rng}\,(X) = \{u;\ (\exists v)\langle u, v\rangle \in X\}$ (область значений),

$X^{-1} = \{\langle u, v\rangle;\ \langle v, u\rangle \in X\}$ (обратное отношение),

$\bigcup X = \{u;\ (\exists v \in X)(u \in v)\}$ (объединение семейства),

$\bigcap X = \{u;\ (\forall v \in X)(u \in v)\}$ (пересечение семейства),

$P\,(X) = \{u;\ u \subseteq X\}$ (класс всех подмножеств),

$X \restriction Y = X \cap (V \times Y)$ (ограничение),

$X\,``\,Y = \{u;\ (\exists v \in Y)\langle u, v\rangle \in X\}$ (образ),

$\mathrm{Rel}\,(X) \equiv X \subseteq V^2$ (отношение),

$\mathrm{Fnc}\,(X) \equiv \mathrm{Rel}\,(X) \,\&\, (\forall u, v, w)$

$(\langle v, u\rangle \in X \,\&\, \langle w, u\rangle \in X \Rightarrow v = w)$ (функция или отображение).

Если F есть класс-функция и $x \in \mathrm{dom}(F)$, то $F(x)$ обозначает то единственное y, для которого $\langle y, x\rangle \in F$ (результат действия функции F на элемент x).

Если $\varphi(X)$ есть формула, относящаяся к классам, то $\bigcap \{X;\ \varphi(X)\}$ обозначает класс $\{u;\ (\forall X)(\varphi(X) \Rightarrow u \in X)\}$ и подобным же образом $\bigcup \{X;\ \varphi(X)\}$ обозначает класс $\{u;\ (\exists X)(\varphi(X) \,\&\, u \in X)\}$. Мы будем часто использовать и некоторые другие обозначения, например $\{x \cap y;\ \varphi(x, y)\}$ обозначает класс $\{z;\ (\exists x, y)(\varphi(x, y) \,\&\, z = x \cap y)\}$ и т. д.

Если F — функция, $\mathrm{dom}(F) = X$, $\mathrm{rng}(F) = Y$ и F^{-1} также является функцией, то мы назовем F *взаимно однозначным отображением* X на Y. Дадим такие определения: X *эквивалентен* Y (обозначение: $X \approx Y$), если существует взаимно однозначное отображение X на Y; X *субвалентен* Y (обозначение: $X \precsim Y$), если существует взаимно однозначное отображение X на подкласс класса Y; X *строго субвалентен* Y, если $X \precsim Y$, но не $X \approx Y$.

Очевидно, что

$$(\forall x)(\forall y)(x \mathrel{\widehat{\approx}} y \Rightarrow x \approx y) \quad \text{и} \quad (\forall x)(\forall y)(x \mathrel{\widehat{\precsim}} y \Rightarrow x \precsim y).$$

Как мы увидим позднее, эти импликации не могут быть обращены и невозможно доказать, что $(\forall x, y)(x \mathrel{\widehat{\precsim}} y \Rightarrow x \prec y)$.

Если R_1 и R_2 — отношения и F — отображение, то назовем F *изоморфизмом* $\langle A_1, R_1\rangle$ на $\langle A_2, R_2\rangle$, если оно есть взаимно однозначное отображение A_1 на A_2 и имеет место

$$(\forall x, y \in A_1)(\langle x, y\rangle \in R_1 \equiv \langle F(x), F(y)\rangle \in R_2).$$

Будем говорить, что $\langle A_1, R_1\rangle$ и $\langle A_2, R_2\rangle$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $\langle A_1, R_1\rangle$ на $\langle A_2, R_2\rangle$.

Отношение R является *упорядочением* класса A (иными словами, A упорядочен отношением R) тогда и только тогда, когда R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно на A, т. е.

$$(\forall x \in A)(\langle x, x\rangle \in R);$$
$$(\forall x, y \in A)(\langle x, y\rangle \in R \mathbin{\&} \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x = y);$$
$$(\forall x, y, z \in A)(\langle x, y\rangle \in R \mathbin{\&} \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R).$$

R — *линейное упорядочение* на A, если, кроме того, имеет место

$$(\forall x, y \in A)(\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R).$$

R — *вполне-упорядочение* на A, если оно есть линейное упорядочение на A и каждый непустой *подкласс* класса A имеет первый элемент, т. е.

$$(\forall Z)(\varnothing \neq Z \subseteq A \Rightarrow (\exists x \in Z)(\forall y \in Z)(\langle x, y\rangle \in R)).$$

Будем писать $\mathrm{We}(A, R)$, если A вполне упорядочен отношением R.

Пусть R — линейное упорядочение на A. Подкласс B класса A назовем его *сегментом* относительно R, если вместе с каждым элементом класс B содержит и все предшественники этого элемента, т. е. $(\forall y \in B)(\forall x \in A)(\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow x \in B)$.

Теорема. *Если* $\mathrm{We}(A, R)$ *и* $B \subseteq A$, *то* $\mathrm{We}(B, R)$.

Теорема. *Пусть* $\mathrm{We}(A, R)$. *Класс B является сегментом класса A относительно R тогда и только тогда, когда $B = A$ или существует элемент $x \in A$, такой, что* $B = (R\text{``}\{x\} \cap A) \setminus \{x\}$.

Теорема. *Если* $\mathrm{We}(A_1, R_1)$ *и* $\mathrm{We}(A_2, R_2)$, *а* F, G *суть два изоморфизма* $\langle A_1, R_1\rangle$ *на* $\langle A_2, R_2\rangle$, *то* $F = G$.

Доказательство. Допустим, что $F \neq G$. Пусть x есть R_1-первый элемент класса A_1, такой, что $F(x) \neq G(x)$; пусть $\langle F(x), G(x)\rangle \in R_2$, и пусть $y \in A_1$ таков, что $G(y) = F(x)$. Так как $\langle G(y), G(x)\rangle \in R_2$, имеем $\langle y, x\rangle \in R_1$, что влечет $F(y) = G(y)$ и, следовательно, $F(y) = F(x)$ и $y = x$ — противоречие.

Теорема. *Если* $\mathrm{We}(A, R)$ *и* B *есть сегмент* A *относительно* R, *такой, что* $A \neq B$, *то* $\langle A, R\rangle$ *и* $\langle B, R\rangle$ *не изоморфны.*

Доказательство. Допустим, что F — изоморфизм $\langle A, R\rangle$ на $\langle B, R\rangle$. Если $x \in A \setminus B$, то $x \neq F(x)$ и $\langle F(x), x\rangle \in R$. Пусть x есть R-первый элемент A, такой, что $x \neq F(x)$ и $\langle F(x), x\rangle \in R$. Тогда $F(x)$ будет R-меньше, чем x, $F(x) \neq F(F(x))$ и $\langle F(F(x)), F(x)\rangle \in R$ — противоречие.

Теорема. *Если* $\mathrm{We}(A_1, R_1)$ *и* $\mathrm{We}(A_2, R_2)$, *то существует* R_1-*сегмент* B_1 *класса* A_1, *такой, что* $\langle B_1, R_1\rangle$ *и* $\langle A_2, R_2\rangle$ *изоморфны, или* R_2-*сегмент* B_2 *класса* A_2, *такой, что* $\langle A_1, R_1\rangle$ *и* $\langle B_2, R_2\rangle$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\varphi(H)$ — формула, гласящая «$\mathrm{dom}(H)$ есть R_1-сегмент класса A_1, $\mathrm{rng}(H)$ есть R_2-сегмент класса A_2 и H — изоморфизм $\langle \mathrm{dom}(H), R_1\rangle$ на $\langle \mathrm{rng}(H), R_2\rangle$». По предыдущим теоремам из $\varphi(H) \& \varphi(H_1)$ следует, что $H \subseteq H_1$ или $H_1 \subseteq H$. Если $F = \bigcup \{H;\ \varphi(H)\}$, то, очевидно, что $\varphi(F)$. Остается доказать, что $\mathrm{dom}(F) = A_1$ или $\mathrm{rng}(F) = A_2$. Предположим противное, и пусть x есть R_1-первый элемент в $A_1 \setminus \mathrm{dom}(F)$, а y есть R_2-первый элемент в $A_2 \setminus \mathrm{rng}(F)$. Пусть $F_1 = F \cup \{\langle y, x\rangle\}$; тогда $\varphi(F_1)$, и, следовательно $F_1 \subseteq F$, что влечет $x \in \mathrm{dom}(F)$, $y \in \mathrm{rng}(F)$ — противоречие.

Следующие две теоремы относятся только к универсуму множеств.

Теорема. *Для каждого множества* x *существует линейное упорядочение* r *на нем, такое, что* $r \subseteq x^2$.

Доказательство по индукции. Пусть $x = \emptyset$; тогда возьмем $r = \emptyset$. Допустим, что $r \subseteq x^2$ и r есть линейное упорядочение x; пусть $y \notin x$. Тогда $r' = r \cup [(x \cup \{y\}) \times \{y\}]$ есть линейное упорядочение на $x \cup \{y\}$ и $r' \subseteq (x \cup \{y\})^2$.

Теорема. *Если* x *линейно упорядочено с помощью* r *и* z — *непустое подмножество множества* x, *то* z *имеет* r-*первый и* r-*последний элементы.*

Доказательство. Теорема тривиальна, если $x = \varnothing$. Допустим, что рассматриваемое утверждение имеет место для множества x; пусть r — линейное упорядочение на $x \cup \{y\}$, и пусть z — непустое подмножество множества $x \cup \{y\}$. Если $z = \{y\}$, то само y является одновременно и r-первым и r-последним элементом z; в противном случае пересечение $z \cap x$ непусто и по предположению индукции имеет r-первый элемент y_0, $y_0 \in z \cap x$. Если $y \notin z$ или если y не есть r-первый элемент множества z, то y_0 есть r-первый элемент этого множества. Существование последнего элемента доказывается аналогично.

Предостережение. Предыдущая теорема отнюдь *не утверждает*, что каждое отношение r, являющееся множеством, которое линейно упорядочивает x, обязательно и вполне упорядочивает его. Она говорит только, что каждое непустое *подмножество* множества x имеет первый элемент; тем не менее не исключено, что существуют непустые *подклассы* множества x, которые не имеют первого элемента. Такие подклассы не являются множествами. О них см. следующий раздел.

РАЗДЕЛ 3. ПОЛУМНОЖЕСТВА

Все, что делалось до сих пор, ни в чем не противоречит канторовской теории множеств. С введением и изучением понятия полумножества мы, однако, покидаем канторовский теоретико-множественный мир.

Полумножество есть подкласс множества. Будем писать $\mathrm{Sms}(X)$ для «X есть полумножество». Таким образом,

$$\mathrm{Sms}(X) \equiv (\exists y)(X \subseteq y).$$

Каждое множество, конечно, является полумножеством. *Собственное полумножество* есть полумножество, которое не является множеством. Теперь мы намерены показать существование собственных полумножеств.

Профессор Чарльз Дарвин учит нас, что существует множество D объектов и линейное упорядочение этого множества, такие, что первый элемент в этом множестве есть некая обезьянка Чарли, каждый не первый элемент есть сын непосредственно предшествующего элемента и последний элемент есть сам Дарвин. Совокупность A всех обезьян из множества D не является множеством; в противном случае A содержало бы последний элемент. Но, как знает всякий, сыновья обезьян суть обезьяны. Таким образом, оказалось бы, что все члены D, включая и Дарвина, были бы обезьянами. Элементы D могут быть закодированы в универсуме множеств, например, с помощью $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ... и т. д. так, что само D окажется множеством из универсума множеств. Класс кодов всех обезьян (элементов A) оказывается при этом собственным полумножеством.

Наш пример ни в коей мере не является изолированным. Возьмем свойство «быть живым человеком». Это, несомненно, полезное и широко используемое свойство. Однако мы вряд ли смогли бы составить список всех живущих людей. Даже если бы мы преодолели технические трудности, такой список невозможен еще и потому, что нет четкой границы между *еще не родившимся* и *уже родившимся*, равно как между *еще живым* и *уже мертвым*. С другой стороны, мы можем легко вообразить список (множество объектов), который содержит (среди других предметов) всех живущих людей.

Примеры собственных полумножеств известны издавна, но они рассматривались как аномалии, подобные известному «парадоксу лысого». Тем не менее мы встречаем собственные полумножества всюду, когда, изучая свойства некоторых объектов, делаем упор на интенсиональное содержание этого свойства, а не просто на его объем. Читатель может сам умножить подобные примеры («быть столом», «быть книгой», «быть прекрасной женщиной» и т. п.).

Заметим также, что совокупность всех натуральных чисел, которые нельзя описать с помощью русских предложений, содержащих не больше чем тысячу слов, также образует собственное полумножество, и, следовательно, мы не можем утверждать, что эта совокупность имеет первый элемент (ср. также ниже).

Для различных целей собственные полумножества можно аппроксимировать с помощью множеств. Это предмет теории аппроксимации. Неправильные аппроксимации или пренебрежение к существованию собственных полумножеств могут на различных уровнях приводить к вопросам типа: «Что было раньше, яйцо или курица?»

Таким образом, существование собственных полумножеств есть следствие аксиомы существования классов. Однако при формализации нашей теории или применении ее в частной ситуации приходится ограничивать семейство свойств, которые допускаются в аксиоме существования классов. При этом вполне может случиться, что элиминируются все собственные полумножества. Поэтому мы гарантируем существование собственного полумножества с помощью отдельной аксиомы.

Аксиома существования собственного полумножества
Существует собственное полумножество. Символически

$$(\exists X)(\mathrm{Sms}(X) \;\&\; \neg\, \mathrm{Set}(X)).$$

Теорема. *Если X и Y — полумножества, то следующие классы также суть полумножества*: $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$, $\bigcup X$, $P(X)$, $\mathrm{dom}(X)$, $\mathrm{rng}(X)$, X^{-1}, X^2, $X``Y$.

Теорема. *Если X — теоретико-множественно определимый класс, являющийся полумножеством, то X есть множество.*

(Вытекает непосредственно из результатов предыдущего раздела.)

В частности, универсальный класс V не является полумножеством.

* * *

Математическая теория, которая ставит своей целью заменить канторовскую теорию множеств в той роли, которую последняя играет в математике, должна быть пригодна для изучения проблем бесконечности. Бесконечность вносится в нашу теорию с помощью полумножеств. Однако этот вид бесконечности отличен от актуальной бесконечности в канторовском смысле. Наша бесконечность есть феномен, который встречается при наблюдении больших множеств. Она проявляется в отсутствии легкой возможности обозрения, в невозможности для нас охватить множество все целиком.

Можно было бы заподозрить, что актуально бесконечными являются собственные классы, не являющиеся полумножествами, например универсальный класс V. Но это не так. Такого рода классы можно понимать просто как потенциально бесконечные или же как полумножества — подклассы некоторого внешнего множества, не включенного в наш универсум множеств. Наши рассмотрения с самого начала могли бы быть ограничены таким большим полумножеством.

Классы, которые могут быть полностью восприняты, т. е. не содержат подклассов, являющихся собственными полумножествами, конечны. Таким образом, мы вводим следующее определение: класс X *конечен* (обозначение $\mathrm{Fin}(X)$) тогда и только тогда, когда каждый его подкласс есть множество. Бесконечными называются классы, которые не конечны.

Очевидно, что каждый конечный класс есть множество. Следовательно, все собственные классы, в частности все собственные полумножества, бесконечны. Заметим, что свойство «X конечно» не является теоретико-множественным и потому нельзя доказать, что все множества конечны. Аксиома существования собственных полумножеств влечет за собой существование бесконечных множеств. (Предостережение: подчеркнем, что наше понятие бесконечности отличается от обычного канторовского понятия. Напомним, что все множества конечны в канторовском смысле.)

Так как пустое множество само является своим собственным единственным подклассом, то пустое множество конечно. Подобным же образом каждое одноэлементное множество $\{x\}$ конечно (оно имеет ровно два подкласса, $\varnothing$ и $\{x\}$). Если X конечно и Y есть его подкласс, то Y также конечное множество.

Теорема. *Если x и y конечны, то $x \cup y$ конечно.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq x \cup y$. Тогда $X = (x \cap X) \cup (y \cap X)$. По предположению $X \cap x$ и $X \cap y$ суть множества. Таким образом, X также множество.

Теорема. (Индукция для коиечных множеств.) *Пусть Z — класс, такой, что $\varnothing \in Z$ и $x \cup \{y\} \in Z$ для всякого $x \in Z$ и всякого y. Тогда каждое конечное множество является элементом Z.*

Доказательство. Пусть x — конечное множество, и пусть $\leqslant$ есть его линейное упорядочение (само $\leqslant$ как отношение есть множество). Положим $z \in Y \equiv (z \in x \,\&\, \{w \in x;\ w \leqslant z\} \in Z)$. Мы утверждаем, что $Y = x$. Действительно, так как $Y \subseteq x$ и x конечно, то Y есть множество. Пусть $Y \neq x$ и z — первый элемент в разности $x \setminus Y$. Тогда $\{w \in x;\ w < z\} \in Z$ и $\{w \in x;\ w \leqslant z\} = \{w \in x;\ w < z\} \cup \{z\}$ также элемент Z — противоречие. Таким образом, $Y = x$ и, если z_1 — последний элемент множества x, то $x = \{w \in x;\ w \leqslant z_1\} \in Z$.

Теорема. *Пусть F — функция, область определения которой есть конечное множество. Тогда F сама конечное множество.*

Доказательство. Пусть Z — класс всех множеств x, таких, что всякая функция F с областью определения x сама есть конечное множество. С помощью предыдущей теоремы мы докажем, что Z содержит все конечные множества. Очевидно, что $\varnothing \in Z$. Допустим, что $x \in Z$ и $y \notin x$. Пусть F — функция, такая, что $\operatorname{dom}(F) = x \cup \{y\}$. Тогда $F = (F \restriction x) \cup \{\langle F(y), y \rangle\}$. По допущению $F \restriction x$ — конечное множество; $\{\langle F(y), y \rangle\}$ также, очевидно, конечное множество. Отсюда следует, что F — конечное множество, и это доказывает, что $x \cup \{y\} \in Z$.

Теорема. *Если x — конечное множество и $x \approx X$, то X — конечное множество и $x \mathrel{\widehat{\approx}} X$.*

Доказательство. Пусть F — взаимно однозначное отображение x на X. По предыдущей теореме F есть множество; следовательно, $x \mathrel{\widehat{\approx}} X$ и $X = \operatorname{rng}(F)$ — множество. Остается доказать, что X конечно. Пусть Y — подкласс множества X. Положим $Z = \{u \in x;\ F(u) \in Y\}$. Так как $Z \subseteq x$ и x конечно, Z есть множество; поскольку $Y = \operatorname{rng}(F \upharpoonright Z)$ и оба F и Z суть множества, то Y также множество. Следовательно, X — конечное множество.

Теорема. *Если x и y — конечные множества, то*

(1) $x \approx y \equiv x \mathrel{\widehat{\approx}} y$;

(2) $x \precsim y \equiv x \mathrel{\widehat{\precsim}} y$;

(3) $x \prec y \equiv x \mathrel{\widehat{\prec}} y$.

Следующие три теоремы доказываются индукцией для конечных множеств.

Теорема. *Если x конечно, то $P(x)$ также конечно.*

Доказательство. Положим $Z = \{x;\ \operatorname{Fin}(P(x))\}$. Тогда $\varnothing \in Z$. Пусть $x \in Z$ и $y \notin x$. Положим $u = \{v \subseteq x \cup \{y\};\ y \in v\}$; тогда $P(x) \mathrel{\widehat{\approx}} u$, и, значит, u конечно. Так как $P(x \cup \{y\}) = P(x) \cup u$, то $P(x \cup \{y\})$ конечно. Отсюда следует $x \cup \{y\} \in Z$.

Теорема. *Если x — конечное множество, элементы которого суть конечные множества, то $\bigcup x$ — конечное множество.*

Доказательство. Положим

$$Z = \{x;\ (\forall u)(u \in x \Rightarrow \operatorname{Fin}(u)) \Rightarrow \operatorname{Fin}(\bigcup x)\}.$$

Имеем $\varnothing \in Z$. Пусть $x \in Z$ и $y \notin x$. Очевидно, что $\bigcup(x \cup \{y\}) = (\bigcup x) \cup y$. Если каждый элемент множества $x \cup \{y\}$ конечен, то, в частности, каждый элемент множества x конечен, а, кроме того, y — конечное множество. Таким образом, $\bigcup x$ и $(\bigcup x) \cup y$ конечны. Отсюда следует, что $(x \cup \{y\}) \in Z$.

Теорема. *Если x и y конечны, то $x \times y$ также конечно.*

Доказательство. $x \times y \subseteq PP(x \cup y)$.

Теорема. *Класс всех конечных множеств не является полумножеством.*

Доказательство. Допустим, что $\{x; \mathrm{Fin}(x)\} \subseteq u$; тогда $V \subseteq \bigcup u$.

Теорема. *Множество x бесконечно тогда и только тогда, когда для каждого $y \notin x$ имеем $x \approx x \cup \{y\}$.*

Доказательство. Если x конечно, $y \notin x$ и $x \approx x \cup \{y\}$, то $x \widehat{\approx} x \cup \{y\}$, что противоречит результатам первого раздела. Обратно, пусть x бесконечно и $y \in x$. Пусть r — линейное упорядочение на x. Положим $Y = \{u \in x; \mathrm{Fin}(r``\{u\} \cap x)\}$. Для каждого $u \in Y$ определим $F(u)$ как первый элемент разности $x \setminus r``\{u\}$ в упорядочении r. Для $u \in x \setminus Y$ положим $F(u) = u$. Наконец, $F(y)$ есть r-первый элемент x. Очевидно, что F есть взаимно однозначное отображение $x \cup \{y\}$ на x.

Следствие. *Если x бесконечно и $y \notin x$, то $x \approx x \cup \{y\}$, но не $x \widehat{\approx} x \cup \{y\}$; аналогично $x \cup \{y\} \precsim x$, но не $x \cup \{y\} \widehat{\precsim} x$, и $x \widehat{<} x \cup \{y\}$, но не $x < x \cup \{y\}$.*

* * *

Из аксиомы существования собственных полумножеств не следует существования собственных полумножеств в рассматриваемом конкретном множестве. Если мы добавим аксиому, гарантирующую существование собственного полумножества, включенного в некоторое конкретное множество, то будем говорить, что мы перешли к изучению *уличенного* универсума (a witnessed universe). Если же мы ограничим семейство свойств, допускаемых в аксиоме существования классов, таким образом, чтобы было невозможно установить существование собственных полумножеств у конкретных множеств, то будем говорить, что мы изучаем *предельный* универсум (a limit universe).

Исследование уличенных универсумов более трудно, чем исследование предельных. В действительности теория уличенных универсумов противоречива в классическом смысле. Если c — совершенно конкретное множество (скажем, множество всех натуральных чисел, меньших чем $67^{293^{159}}$), то оно может быть получено за конечное количество шагов из пустого множества путем последовательного прибавления отдельных элементов; таким образом, c конечно. С другой стороны, если c содержит собственное полумножество, то c бесконечно в нашем смысле. Однако наше доказательство того факта, что c конечно, само содержит бесконечное число шагов (в нашем смысле), так что оно не убедительно. Только доказательства конечной длины (в нашем смысле) можно признать убедительными. Естественно, что в уличенном универсуме конечные множества не могут быть просто выделены. С каждой конструкцией в уличенном универсуме ассоциируется степень убедительности, которая убывает по мере того, как растет длина и сложность конструкции. Например, если мы положим $d=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$, то конечность множества $P(P(P(d)))$ имеет бо́льшую степень убедительности, чем конечность того же множества, представленного с помощью списка своих элементов. Кроме того, доказательство равенства этих двух множеств имеет примерно ту же самую степень убедительности, что и доказательство конечности последнего множества. Читатель согласится, что система 8×8 полей шахматной доски более наглядна, чем система тех же полей, но упорядоченных линейным образом. Мы не будем исследовать эти проблемы в нашей книге главным образом потому, что они еще недостаточно поняты.

Таким образом, мы будем изучать лишь предельные универсумы. Тем не менее в мире, воспринимаемом нашими чувствами, все ситуации, в которых применяется наша теория, относятся к уличенным универсумам. Поэтому мы будем иногда мотивировать различные понятия, вводимые в нашу теорию, с помощью таких ситуаций.

РАЗДЕЛ 4. СЧЕТНЫЕ КЛАССЫ

Наша способность наблюдать и различать во всех направлениях ограничена горизонтом. Нет нужды говорить, что это относится не только к оптическим наблюдениям; горизонт здесь понимается в смысле, предложенном Е. Гуссерлем в [7].

Если наблюдается большое множество x, то класс всех его элементов, лежащих до горизонта (не обязательно бесконечный) может сходиться к горизонту. Феномен бесконечности, ассоциированный с наблюдением такого класса, называется счетностью.

Таким образом, следующие классы являются счетными: класс всех людей, которых мы встретим в нашей жизни, класс всех книг, которые мы прочтем, класс всех дней до нашей смерти, а также класс всех проблем, которые будут решены некоторым компьютером, и т. д.

В нашей теории счетность изображается с помощью счетных классов. Определение подобно классическому определению в канторовской теории множеств, несмотря на то, что в нашей теории счетность имеет иной смысл.

Пару классов $\langle A, \leqslant \rangle$ назовем *упорядочением по типу* ω, если

(1) $\leqslant$ линейно упорядочивает A,
(2) A бесконечно и
(3) для всякого $x \in A$ сегмент $\{y \in A;\ y \leqslant x\}$ конечен.

Теорема. *Если $\langle A, \leqslant \rangle$ — упорядочение по типу ω, то $\leqslant$ вполне упорядочивает A.*

Доказательство. Пусть Z — непустой подкласс A, и пусть $x_0 \in Z$. Так как сегмент $a = \{y \in A;\ y \leqslant x_0\}$ есть конечное множество, то $Z \cap a$ и $(\leqslant) \cap a^2$ оба являются множествами. Положим $z = Z \cap a$ и $r = (\leqslant) \cap a^2$. Очевидно, что $x_0 \in z$, и, значит, $z \neq \varnothing$. Поскольку r линейно упорядочивает z, z имеет первый элемент, скажем y. Мы докажем, что y — первый элемент Z в упорядочении $\leqslant$. Пусть $x \in Z$ и $x \leqslant y$. Так как $\langle y, x_0 \rangle \in r$, то $x \leqslant x_0$, что дает $x \in z$. Таким образом, $\langle x, y \rangle \in r$, а так как y есть r-первый элемент множества z, то $x = y$.

Теорема. *Если $\langle A, \leqslant \rangle$ и $\langle A_1, \leqslant_1 \rangle$ суть упорядочения по типу ω, то они изоморфны.*

Доказательство. Ввиду результатов второго раздела, так как $\leqslant$ вполне упорядочивает A и $\leqslant_1$ вполне упорядочивает A_1, имеет место одно из двух: либо оба упорядочения изоморфны, либо одно из упорядочений изоморфно сегменту другого. Пусть B_1 есть сегмент A_1 (по отношению к $\leqslant_1$), такой, что $(B_1, \leqslant_1)$ изоморфно $(A, \leqslant)$. Так как B_1 не конечное множество, оно не изоморфно никакому сегменту вида $\{y \in A_1;\ y \leqslant x\}$, так что должно быть $A_1 = B_1$.

Теорема. *Пусть r — линейное упорядочение на a (здесь a и r оба суть множества). Тогда $\langle a, r \rangle$ не является упорядочением по типу ω.*

Доказательство. Допустим, что $\langle a, r \rangle$ есть упорядочение по типу ω. Тогда a бесконечно. Пусть x есть r-наибольший элемент a. Тогда $X = \{y \in a;\ \langle y, x \rangle \in r\}$ конечно, но $\{y \in a;\ \langle y, x \rangle \in r\} = a$ — противоречие.

Теорема. *Пусть r — линейное упорядочение бесконечного множества a. Пусть $X = \{x \in a;$ сегмент $\{y \in a;\ y \leqslant x\}$ конечен$\}$. Тогда $\langle X, r \rangle$ является упорядочением по типу ω, а X — собственным полумножеством.*

Доказательство. Очевидно, r линейно упорядочивает X и для каждого $x \in X$ сегмент $\{y \in X;\ \langle y, x \rangle \in r\}$ конечен. Предположим, что X — конечное множество. Тогда X —

собственное подмножество множества a; пусть y есть r-первый элемент разности $a \setminus X$. Тогда $X \cup \{y\} = \{z \in a; z \leqslant y\}$ — конечное множество, так что $y \in X$, — противоречие. Поскольку $X \subseteq a$, X есть полумножество. По предыдущей теореме X не множество.

Класс называется *счетным* (обозначение $\mathrm{Count}(X)$), если существует отношение R, такое, что $\langle X, R\rangle$ есть упорядочение по типу ω. Класс называется *несчетным*, если он не является ни конечным, ни счетным.

Следующее утверждение тривиально:

Теорема. (1) *Если X и Y счетны, то $X \approx Y$.*
(2) *Если X счетен и $X \approx Y$, то Y счетен.*

Следующая теорема доказывается в точности так же, как в канторовской теории множеств.

Теорема. (1) *Если X и Y счетны, то $X \cup Y$ и $X \times Y$ также счетны.*
(2) *Если X счетен и $Y \precsim X$, то Y счетен или конечен.*
(3) *Если X счетен, а Y конечен, то $Y \prec X$.*

* * *

Люди всегда пытаются зайти за горизонт; это типично человеческое стремление. Цель при этом состоит не просто в том, чтобы расширить горизонт, а в том, чтобы мысленно преодолеть его. Математика — один из наиболее важных инструментов для этого; в математике формулируются точные утверждения, преодолевающие границы непосредственного чувственного восприятия. Мы введем некоторый типичный принцип преодоления горизонта в нашу теорию в форме аксиомы. Введем для дальнейшего следующее соглашение: буквами F, G, возможно с индексами, будем обозначать функции; малые буквы f, g, также возможно с индексами, будут обозначать функции, являющиеся множествами. (Это соглашение выдерживается по всей книге.)

Аксиома о продолжении

Для всякой счетной функции F существует функция-множество f, такая, что $F \subseteq f$.

Аксиома о продолжении гласит, что каждая счетная функция имеет продолжение в виде множества. Этой аксиоме можно дать следующую мотивировку. Вообразим, что мы находимся на длинной прямой дороге, вдоль которой расставлены большие камни на одинаковом расстоянии друг от друга Камни занумерованы натуральными числами; мы находимся около камня с номером 0 и смотрим в направлении возрастания нумерации. Гряда камней достигает горизонта, так что мы не в состоянии различить никакого последнего камня. В этом случае функция, сопоставляющая каждому камню его номер, есть счетная в нашем смысле функция. Аксиома о продолжении говорит нам, что эта функция имеет продолжение в виде множества, т. е. что за горизонтом имеется камень номер S, такой, что камни от нулевого до S-го образуют множество и функция, нумерующая эти камни, есть множество. Это, конечно, всего лишь гипотеза, которую невозможно проверить, по крайней мере до тех пор, пока мы не изменим своего местоположения или существенно не улучшим возможности наблюдения. Аналогичным образом мы предполагаем, что после нашей смерти поведение мира будет, по крайней мере в течение некоторого времени, подобно предшествующему поведению. Можно придумать и много иных примеров такого типа. Аксиома о продолжении есть гипотеза, которая служит базой для точного знания, превосходящего непосредственную очевидность.

* * *

Теорема. *Пусть X — счетный класс. Тогда существуют множества a и $\leqslant$, такие, что $\leqslant$ есть линейное упорядочение a и X состоит из всех $x \in a$, для которых сегмент $\{y \in a;\ y \leqslant x\}$ конечен.*

Доказательство. Пусть a_1 — бесконечное множество и $\leqslant_1$ — множество, линейно упорядочивающее a_1. Пусть X_1 — класс всех $x \in a_1$, таких, что сегмент $\{y \in a_1;\ y \leqslant_1 x\}$ конечен. Тогда X_1 счетен. Пусть F — взаимно однозначное отображение X_1 на X, и пусть $F \subseteq f$. Так как $F = f \upharpoonright X_1$, то можно считать, что $\operatorname{dom}(f) = a_1$. Пусть a_2 есть множество всех $x \in a_1$, таких, что ограничение f на $\{y;\ y \leqslant_1 x\}$ взаимно однозначно. Очевидно, $X_1 \subseteq a_2$. Положим $a = f\text{“}\, a_2$, тогда $X \subseteq a$. Наконец, определим $x \leqslant y \equiv (x, y \in a \,\&\, f^{-1}(x) \leqslant_1 f^{-1}(y))$, тогда a и $\leqslant$ обладают нужными свойствами.

Последняя теорема показывает, что каждый счетный класс может быть представлен как некоторый сегмент бесконечного множества в соответствии с некоторым линейным упорядочением.

Следующее утверждение тривиально:

Теорема. *Каждый счетный класс есть собственное полумножество.*

Следовательно, никакой теоретико-множественно определимый класс не может быть счетным; каждое бесконечное множество несчетно; каждое подмножество счетного класса конечно. Универсальный класс V несчетен.

Теорема. *Если X есть счетный класс, элементы которого суть конечные множества, то класс $\bigcup X$ счетен.*

Доказательство. Прежде всего $\bigcup X$ неконечен. В самом деле, если бы $u = \bigcup X$ было конечным множеством, то X также оказывался бы конечным, поскольку $X \subseteq P(u)$. Пусть $\leqslant$ есть упорядочение X по типу ω. Положим

$$Y = \{y;\ (\exists x \in X)(y = x \setminus \bigcup \{z \neq x;\ z \leqslant x\})\}.$$

Y есть счетный класс конечных множеств, $\bigcup X = \bigcup Y$, и всякие два различных элемента Y дизъюнктны. Таким образом, можно с самого начала считать, что всякие два различных элемента X дизъюнктны. Так как X — полумножество, то $\bigcup X$ также полумножество. Пусть u — такое множество, что $\bigcup X \subseteq u$, и пусть $\leqslant_0$ есть множество — линейное упорядочение u. Для $x, y \in \bigcup X$ положим

$$x \leqslant_1 y \equiv (\exists x_0 \in X)(\exists y_0 \in X)(x \in x_0 \ \&\ y \in y_0 \ \&$$
$$((x_0 = y_0 \ \&\ x \leqslant_0 y) \vee (x_0 \neq y_0 \ \&\ x_0 \leqslant y_0))).$$

Легко показать, что $\langle \bigcup X, \leqslant_1 \rangle$ есть упорядочение по типу ω.

Теорема. *Если X счетен, то $P(X)$ также счетен.*

Доказательство. Имеем $X \precsim P(X)$, так что $P(X)$ не может быть конечным. Пусть $\langle X, \leqslant \rangle$ есть упорядочение по типу ω. Так как каждое подмножество класса X конечно, каждое подмножество y класса X есть подмножество некоторого конечного сегмента X (т. е. для y существует $x \in X$, такой, что $y \subseteq \{z \in X;\ z \leqslant x\}$). Таким образом, $P(X)$ может быть представлено как объединение счетного класса конечных множеств; по предыдущей теореме $P(X)$ счетно.

Теорема. *Пусть X есть счетный класс.*

(a) *$\bigcup X$ есть множество тогда и только тогда, когда существует $z \subseteq X$, для которого $\bigcup X = \bigcup z$.*

(b) *$\bigcap X$ есть множество тогда и только тогда, когда существует $z \subseteq X$, для которого $\bigcap X = \bigcap z$.*

Доказательство. Мы докажем (a); (b) можно доказать аналогично. Импликация $\Leftarrow$ тривиальна Докажем $\Rightarrow$ Пусть $\bigcup X = u$. Пусть a — бесконечное множество и $\leqslant$ — его линейное упорядочение, такое, что $\leqslant$ есть множество, а X

состоит из всех $x \in a$, таких, что $\leqslant$-сегмент, определенный x, является конечным. Положим $a_1 = \{x \in a; (\forall y \in a)(y \leqslant x \Rightarrow y \subseteq u)\}$. Очевидно, что $X \subseteq a_1$. Если $x \in a_1 \setminus X$, то $u = \bigcup X = \bigcup \{y \in a_1,\ y \leqslant x\}$. Пусть x_0 есть $\leqslant$-первый элемент множества a_1, такой, что $u = \bigcup \{y \in a_1;\ y \leqslant x_0\}$. Тогда $x_0 \in X$ и, следовательно, $\{y \in a_1;\ y \leqslant x_0\} \subseteq X$, т. е. множество $z = \{y \in a_1;\ y \leqslant x_0\}$ имеет все необходимые свойства.

Следствие. *Если X — счетный класс, такой, что $\bigcap X = \varnothing$, то существует подмножество z класса X, такое, что $\bigcap z = \varnothing$.*

Теорема. *Пусть X и Y суть счетные дизъюнктные классы. Тогда существуют дизъюнктные множества u и v, такие, что $X \subseteq u$ и $Y \subseteq v$.*

Доказательство. Определим функцию F на $X \cup Y$, положив $F(x) = \varnothing$ для $x \in X$ и $F(x) = \{\varnothing\}$ для $x \in Y$. Пусть $F \subseteq f$, и положим $u = \{x \in \mathrm{dom}(f);\ f(x) = \varnothing\}$ и $v = \{x \in \mathrm{dom}(f);\ f(x) = \{\varnothing\}\}$.

Теорема. *Пусть X и Y — счетные классы, такие, что $\bigcup X \cap \bigcup Y = \varnothing$. Тогда существуют дизъюнктные множества u и v, такие, что $\bigcup X \subseteq u$ и $\bigcup Y \subseteq v$.*

Доказательство. Пусть a — бесконечное множество и $\leqslant$ — его линейное упорядочение, также являющееся множеством; пусть Z — счетный класс всех $x \in a$, таких, что $\{y \in a; y \leqslant x\}$ конечно. Пусть F, G суть взаимно однозначные отображения Z на X и Y соответственно; пусть $F \subseteq f$ и $G \subseteq g$. Пусть, далее, $\bar{f}(x) = \bigcup (f``\{y \in a;\ y \leqslant x\})$ и $\bar{g}(x) = \bigcup (g``\{y \in a;\ y \leqslant x\})$; положим $a_1 = \{x \in a;\ \bar{f}(x) \cap \bar{g}(x) = \varnothing\}$. Тогда $Z \subseteq a_1$ и множества $u = \bigcup (f``a_1)$ и $v = \bigcup (g``a_1)$ имеют нужные свойства.

Следствие. *Пусть X, Y — счетные классы, такие, что $\bigcup X \subseteq \bigcap Y$. Тогда существует множество u, такое, что $\bigcup X \subseteq u \subseteq \bigcap Y$.*

Определение. Пусть $\varphi(X)$ — свойство классов из расширенного универсума. Класс $\{X; \varphi(X)\}$ по определению *направлен* (относительно включения), если для всяких X и Y, таких, что $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$, существует $Z \supseteq X \cup Y$, для которого $\varphi(Z)$. Далее, класс $\{X; \varphi(X)\}$ *дуально направлен* (относительно включения), если для всяких X, Y, таких, что $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$, существует $Z \subseteq X \cap Y$, такой, что $\varphi(Z)$.

В частности, класс Z направлен относительно включения, если $(\forall x \in Z)(\forall y \in Z)(\exists z \in Z)(x \cup y \subseteq z)$, и аналогично для дуальной направленности.

Теорема. *Пусть Z — теоретико-множественно определимый класс. Если Z направлен, то для каждого подполумножества X класса Z существует $u \in Z$, которое является верхней границей элементов X относительно включения, т. е. существует $u \in Z$, такое, что каждый элемент $v \in X$ есть подмножество u. Если Z дуально направлен, то для произвольного подполумножества X класса Z существует $u \in Z$, являющееся нижней границей элементов X относительно включения.*

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, второе доказывается аналогично. Если $Z = \emptyset$, то доказывать нечего. Допустим, что $X \neq \emptyset$. Так как $\bigcup X$ есть полумножество, то существует множество u_0, такое, что $\bigcup X \subseteq u_0$. Положим $a = \{x \subseteq u_0; (\exists z \in Z)(x \subseteq z)\}$. Заметим, что из $x \in a$ и $y \in a$ следует $x \cup y \in a$; далее, $X \subseteq a$ и, следовательно, $a \neq \emptyset$. Значит, a содержит максимальный элемент по включению, т. е. существует $u_1 \in a$, такой, что u_1 не является собственным подмножеством никакого элемента a. Возьмем $v \in a$; тогда $u_1 \cup v \in a$ и, следовательно, $u_1 \cup v = u_1$. Существует $u \in Z$, такое, что $u_1 \subseteq u$, и это u обладает нужными свойствами.

Следующая теорема аналогична предыдущей и является ее усилением.

Теорема. *Пусть Z — теоретико-множественно опредглимый класс. Пусть X есть счетное подполумножество Z. Если X направлено, то существует элемент $u \in Z$, являющийся верхней границей элементов X по включению. Если X дуально направлено, то существует $u \in Z$, являющийся нижней границей элементов X по включению.*

Доказательство. Докажем лишь первое утверждение. Пусть $\leqslant$, являющееся множеством, есть линейное упорядочение множества a, такого, что X состоит в точности из всех $x \in a$, определяющих конечный сегмент a. Положим

$$a_1 = \{x \in a; (\exists u \in Z)(\forall y \in a)(y \leqslant x \Rightarrow y \subseteq u)\}.$$

Очевидно, что $X \subset a_1$. Выберем $x_0 \in a_1 \setminus X$. Тогда найдется $u \in Z$, такое, что каждый элемент $y \in a$, меньший или равный x_0, есть подмножество u. В частности, каждый элемент X есть подмножество u.

Эта теорема имеет много важных следствий, и мы часто ее будем использовать. Назовем эту теорему теоремой о *счетных направленных полумножествах.*

Дадим пример приложения этой теоремы. Пусть F — счетная функция, и пусть Z — теоретико-множественно определимый класс. Если каждое множество $f \subseteq F$ принадлежит Z, то существует $f \in Z$, продолжающее F, т. е. такое, что $F \subseteq f$. В частности, если F — взаимно однозначная функция, то, положив $Z = \{f; f$ взаимно однозначна$\}$, мы получим взаимно однозначную функцию, продолжающую F и являющуюся множеством.

Напомним, что в первом разделе мы утверждали, что в нашей теории можно избавиться от применений аксиомы индукции. В самом деле, и без этой аксиомы мы можем определить в нашей теории конечные множества так же, как и раньше, даже если и не сможем установить многие теоремы относительно них. Далее, с некоторыми усилиями можно доказать теорему индукции для конечных множеств. Некоторая разновидность аксиомы о продолжении позволит затем перенести теоретико-множественные свойства конечных множеств на некоторые бесконечные множества. Например, не только для конечных, но и для некоторых бесконечных множеств имеется их объединение, множество всех подмножеств и т. д. В таком случае следует ограничить рассмотрения именно такими множествами.

РАЗДЕЛ 5. КОДИРУЕМЫЕ КЛАССЫ

Мы заявили, что основными нашими объектами изучения являются классы из расширенного универсума. Тем не менее иногда полезно работать и с другими классами. Классы вне расширенного универсума могут служить в качестве средства для мотивирования; кроме того, использование таких классов часто упрощает формулировки.

В частности, мы приходим к классам вне расширенного универсума, когда возникает естественная необходимость рассматривать классы, элементами которых являются классы из расширенного универсума. Этот раздел посвящен проблеме кодирования таких классов.

Если K и S — классы из расширенного универсума и если S — отношение (т. е. подкласс V^2), то $\langle K, S \rangle$ есть по определению *кодирующая пара.*

Пусть $\varphi(X)$ — свойство классов расширенного универсума. Говорим, что кодирующая пара $\langle K, S \rangle$ *кодирует класс* $\{X; \varphi(X)\}$, если для всякого класса X из расширенного универсума имеем

$$\varphi(X) \equiv (\exists y \in K)(X = S \text{“} \{y\}).$$

Класс $\{X; \varphi(X)\}$ *кодируем,* если существует кодирующая пара, которая кодирует этот класс.

Кодирующие пары $\langle K, S\rangle$ и $\langle K_1, S_1\rangle$ *кодируют один и тот же класс*, если

$$(\forall X)((\exists x \in K)(X = S\text{“}\{x\}) \equiv (\exists y \in K_1)(X = S_1\text{“}\{y\})).$$

Теорема. *Пусть $\{X; \varphi(X)\}$ — кодируемый класс. Пусть $\psi(X)$ — свойство классов из расширенного универсума, и пусть ψ влечет φ. Тогда класс $\{X; \psi(X)\}$ кодируем.*

Доказательство. Пусть пара $\langle K, S\rangle$ кодирует $\{X; \varphi(X)\}$, и положим $K_1 = \{x \in K; \psi(S\text{“}\{x\})\}$. Тогда $\langle K_1, S\rangle$ кодирует $\{X; \psi(X)\}$.

Теорема. *Класс $\{X; X \subseteq V\}$ не кодируем.*

Доказательство. Допустим, что пара $\langle K, S\rangle$ кодирует $\{X; X \subseteq V\}$. Положим $Y = \{x \in K; x \notin S\text{“}\{x\}\}$. Тогда $Y \subseteq V$ и для всех $x \in K$ имеем $Y \neq S\text{“}\{x\}$.

Теорема. *Всякий класс из расширенного универсума кодируем.*

Доказательство. Положим $E = \{\langle x, y\rangle;\ x \in y\}$. Для каждого X пара $\langle X, E\rangle$ кодирует X.

Во втором разделе мы определили отношение принадлежности объекта классу только для классов из расширенного универсума. Теперь мы расширим это определение и для кодируемых классов.

Пусть $\varphi(X)$ — свойство классов из расширенного универсума. Предположим, что класс $\{X; \varphi(X)\}$ кодируем. Тогда Y по определению *принадлежит* $\{X; \varphi(X)\}$, или *Y есть элемент* класса $\{X; \varphi(X)\}$, если Y обладает свойством φ; символически $Y \in \{X; \varphi(X)\} \equiv \varphi(Y)$.

Из предыдущей теоремы следует, что это определение является расширением определения отношения принадлежности, данного во втором разделе.

Дадим некоторые важные примеры кодируемых классов.

Класс R называется *эквивалентностью*, если R — рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, т. е. если выполняются следующие условия:

$$(\forall x)(\langle x,\ x\rangle \in R);$$

$$(\forall x)(\forall y)(\langle x,\ y\rangle \in R \equiv \langle y,\ x\rangle \in R);$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\langle x,\ y\rangle \in R\ \&\ \langle y,\ z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,\ z\rangle \in R).$$

Факторизацией класса Z по модулю R назовем класс

$$Z/R = \{X;\ (\exists y \in Z)(X = Z \cap R\text{“}\{y\})\}.$$

Класс Z/R не обязательно является классом расширенного универсума, так как некоторые классы эквивалентности элементов не обязательно являются множествами. Но все же имеет место следующая тривиальная теорема:

Теорема. *Для каждого класса Z и каждой эквивалентности R факторизация Z/R кодируется парой $\langle Z, R \cap Z^2\rangle$.*

Для каждой эквивалентности R имеет место $\mathrm{dom}(R) = V$. Нам часто придется определять эквивалентность только для элементов класса A. В таком случае мы всегда предполагаем, что для всех x, $y \notin A$ имеет место $\langle x, y\rangle \in R$ (а для всех $x \in A$, $y \notin A$ имеет место $\langle x, y\rangle \notin R$).

Для эквивалентностей мы часто используем привычные обозначения типа $\doteq$, $=_1$, $=_2$ и т. д. и пишем $x \doteq y$ вместо $\langle x, y\rangle \in \doteq$.

Введем следующие определения:

$$Z^Y = \{F;\ \mathrm{dom}(F) = Y \mathbin{\&} \mathrm{rng}(F) \subseteq Z\}$$

(напомним, что F пробегает функции!),

$$P_\omega(Z) = \{X;\ X \subseteq Z \text{ и } X \text{ конечен или счетен}\}.$$

Заметим, что если Y — конечное множество, то $Z^Y = \{f;\ \mathrm{dom}(f) = Y,\ \mathrm{rng}(f) \subseteq Z\}$ и, следовательно, Z^Y есть класс расширенного универсума. Но в нетривиальных случаях классы Z^Y и $P_\omega(Z)$ находятся вне расширенного универсума.

Теорема. *Для произвольного Z и всякого счетного Y класс Z^Y кодируем.*

Доказательство. Положим

$$S = \{\langle x, f\rangle;\ Y \subseteq \mathrm{dom}(f) \mathbin{\&} \mathrm{rng}(f \restriction Y) \subseteq Z \mathbin{\&} x \in f \restriction Y\}.$$

Покажем, что Z^Y кодируется парой $\langle \mathrm{dom}(S), S\rangle$. Если $f \in \mathrm{dom}(S)$, то $S``\{f\} = f \restriction Y$, но $f \restriction Y$ есть, конечно, элемент $Z^Y$. С другой стороны, пусть $F$ — такая функция, что $\mathrm{dom}(F) = Y$ и $\mathrm{rng}(F) \subseteq Z$. По аксиоме о продолжении существует $f$, такое, что $F \subseteq f$. Очевидно, что $f \in \mathrm{dom}(S)$ и $F = S``\{f\}$.

Теорема. *$P_\omega(Z)$ кодируемо для каждого Z.*

Доказательство. Пусть Y — счетный класс, и пусть $\langle K_1, S_1\rangle$ кодирует Z^Y. Можно предположить, что $K_1 \neq V$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Пусть $a \notin K_1$, и положим $K = K_1 \cup \{a\}$. Пусть

$$S = \{\langle x, y\rangle;\ y \in K_1 \mathbin{\&} x \in \mathrm{rng}(S_1``\{y\})\}.$$

Покажем, что $\langle K, S\rangle$ кодирует $P_\omega(Z)$. Пусть $x \in K$. Если $x = a$, то $S``\{a\} = \varnothing$. Если $x \neq a$, то $S``\{x\} = \operatorname{rng}(S_1``\{x\})$. Но $S_1``\{x\}$ есть элемент Z^Y. Таким образом, $S``\{x\}$ — подкласс $Z$, и поэтому он счетен или конечен. Обратно, пусть $X$ — конечный или счетный подкласс $Z$. Если $X = \varnothing$, то $X = S``\{a\}$; если $X \neq \varnothing$, то существует $F \in Z^Y$, такая, что $X = \operatorname{rng}(F)$. Тогда $F = S_1``\{x\}$ для $x \in K_1$, откуда $X = S``\{x\}$.

Если мы пишем $\{Y_x; x \in A\}$, то всегда имеем в виду, что фиксирована кодирующая пара $\langle A, S\rangle$, такая, что $Y_x = S``\{x\}$ для всякого $x \in A$. При этом $\{Y_x; x \in A\}$ обозначает класс

$$\{Y; (\exists x \in A)(Y = S``\{x\})\}.$$

Кодирующая пара $\langle K, S\rangle$ называется *экстенсиональной*, если $x \neq y$ влечет $S``\{x\} \neq S``\{y\}$ для всех $x, y \in K$. Кодируемый класс $\{X; \varphi(X)\}$ называется *экстенсионально кодируемым*, если существует экстенсиональная кодирующая пара, которая кодирует $\{X; \varphi(X)\}$.

Разумеется, каждый класс X расширенного универсума экстенсионально кодируется парой $\langle X, E\rangle$, где $E = \{\langle x, y\rangle; x \in y\}$.

Теорема. (1) *Если экстенсиональные кодирующие пары $\langle K, S\rangle$ и $\langle K_1, S_1\rangle$ кодируют один и тот же класс, то $K \approx K_1$.*

(2) *Если $\langle K, S\rangle$ — экстенсиональная кодирующая пара и $K \approx K_1$, то существует S_1, такое, что $\langle K_1, S_1\rangle$ кодирует тот же самый класс, что и $\langle K, S\rangle$.*

Доказательство. (1) Для $x \in K$ положим $y = F(x)$ тогда и только тогда, когда $y \in K_1 \mathbin{\&} S``\{x\} = S``\{y\}$. Очевидно, что F есть взаимно однозначное отображение K на K_1.

(2) Пусть F есть взаимно однозначное отображение K_1 на K. Положим

$$S_1 = \{\langle x, y\rangle; y \in K_1 \mathbin{\&} \langle x, F(y)\rangle \in S\}.$$

Отсюда видно, что лишь экстенсиональные кодирования кодируемых классов являются подходящими. Экстенсионально кодируемые классы ведут себя, как если бы они были классами расширенного универсума. Например, если $\{X; \varphi(X)\}$ — экстенсионально кодируемый класс, то можно естественно определить $Z \precsim \{X, \varphi(X)\}$, понимая под этим, что для экстенсиональной кодирующей пары, которая кодирует класс $\{X; \varphi(X)\}$ (пусть это будет пара $\langle K, S\rangle$), имеем $Z \precsim K$. Очевидно, что это определение не зависит от частного выбора кодирующей пары. Если теперь $\{X; \psi(X)\}$ — другой экстенсионально кодируемый класс, то очевидный смысл имеет обозначение $\{X; \varphi(X)\} \precsim \{X; \psi(X)\}$.

Мы конструировали расширенный универсум с намерением, чтобы это был полезный инструмент для исследования всякого класса, каждый из элементов которого может быть сконструирован до того, как сконструирован сам рассматриваемый класс как целое. Мы верим, что, взяв такой класс (состоящий из различных объектов X), для каждого объекта X, такого, что $\varphi(X)$, можно указать множество из универсума множеств в качестве его кода, причем таким образом, что весь класс может быть закодирован с помощью класса расширенного универсума — класса всех ассоциированных кодов. Эти рассмотрения ведут к различным аксиомам, зависящим от конкретной природы тех классов, которые мы собираемся кодировать. Сейчас мы допустим лишь одну аксиому такого типа, хотя и не исключаем возможности присоединения других подобных аксиом.

Аксиома экстенсионального кодирования

Каждый кодируемый класс является экстенсионально кодируемым.

Таким образом, коль скоро мы доказали, что некоторый класс кодируем, мы можем работать с экстенсиональным кодированием этого класса.

Теорема. *Если Y счетен, то класс $P_\omega(Y)$ несчетен.*

Доказательство. Очевидно, что класс $P_\omega(Y)$ не является конечным. Предположим, что он счетен. Пусть $P_\omega(Y)$ закодирован парой $\langle Y, S\rangle$. Положим $Z=\{x\in Y;\ x\notin S``\{x\}\}$. Очевидно, что $Z\subseteq Y$, но не существует никакого $x\in Y$, такого, что $Z=S``\{x\}$, — противоречие.

Пару $\langle A, \leqslant\rangle$ назовем *упорядочением по типу* Ω, если

(1) $\leqslant$ вполне упорядочивает A,

(2) A несчетно и

(3) для каждого $x\in A$ сегмент $\{y\in A;\ y\leqslant x\}$ счетен или конечен.

Следующие теоремы являются непосредственными следствиями теорем второго раздела.

Теорема. *Если $\langle A, \leqslant\rangle$ и $\langle A_1, \leqslant_1\rangle$ — упорядочения по типу Ω, то они изоморфны.*

Теорема. *Если $\langle A, \leqslant\rangle$ есть упорядочение по типу Ω, B счетно и $\leqslant_1$ вполне упорядочивает B, то существует собственный сегмент A_1 класса A (по отношению к $\leqslant$), такой, что $\langle A_1, \leqslant\rangle$ и $\langle B, \leqslant_1\rangle$ изоморфны.*

Теорема. *Допустим, что $\leqslant$ вполне упорядочивает A; допустим, далее, что для всякого счетного класса B и всякого вполне-упорядочения $\leqslant_1$ этого класса существует собственный сегмент A_1 класса A, такой, что $\langle A_1, \leqslant\rangle$ и $\langle B, \leqslant_1\rangle$ изоморфны. Тогда класс A несчетен.*

Теорема. *Пусть $\langle A, \leqslant\rangle$ — упорядочение по типу Ω, и пусть $B \approx A$. Тогда существует упорядочение $\leqslant_1$, такое, что $\langle B, \leqslant_1\rangle$ есть упорядочение по типу Ω.*

Теорема. *Существует упорядочение по типу Ω.*

Доказательство. Пусть Y — счетный класс; тогда класс Y^2 также счетен. Таким образом, $P_\omega(Y^2)$ экстенсионально кодируется некоторой парой $\langle K, S\rangle$. Положим

$$K_1 = \{x \in K;\ S\text{“}\{x\} \text{ вполне упорядочивает } Y\}$$

и $\langle x, y\rangle \in S_1$ тогда и только тогда, когда x, $y \in K_1$ и $\langle Y, S\text{“}\{x\}\rangle$ изоморфно $\langle Y, S\text{“}\{y\}\rangle$. Очевидно, что S_1 есть эквивалентность. Пусть $\langle A, S_2\rangle$ — экстенсиональное кодирование K_1/S_1. Для x, $y \in A$ положим $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\langle Y, S\text{“}\{x_1\}\rangle$ изоморфно (возможно, несобственному) сегменту Y относительно упорядочения $S\text{“}\{y_1\}$ для каждого $x_1 \in S_2\text{“}\{x\}$ и каждого $y_1 \in S_2\text{“}\{y\}$. Используя предыдущие теоремы, легко показать, что $\langle A, \leqslant\rangle$ есть упорядочение по типу Ω.

РАЗДЕЛ 6. НЕСЧЕТНЫЕ КЛАССЫ

При классификации различных видов бесконечности в нашей альтернативной теории мы также принимаем канторовский принцип, гласящий, что каждый класс определяет свой основной тип бесконечности — мощность независимо от той структуры, с которой этот класс может быть связан. Этот принцип формализуется в определении, что два класса имеют одну и ту же мощность тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Спросим теперь себя, какие типы бесконечности могут быть найдены в расширенном универсуме. Наша теория допускает различные теории бесконечности. Например, мы можем имитировать полную канторовскую теорию. В этом случае мы можем сначала допустить аксиому выбора, которая гарантирует вполне упорядочиваемость универсального класса, а затем определить кардинальные числа как сегменты такого вполне упорядочения, не эквивалентные никакому меньшему сегменту. Дальнейшие аксиомы могли бы гарантировать существование столь большого количества кардинальных чисел, как нам нравится. Таким способом можно моделировать полную канторовскую теорию в нашей теории. Нет необходимости говорить, что такая модель, возможно, содержит не все подклассы класса натуральных чисел, а только некоторые «подходящие». Единственное отличие от канторовской теории будет состоять в том, как мы воспринимаем бесконечные кардиналы. Канторовская теория признает бесконечные кардиналы почти как часть окружающего нас мира; в нашей же теории они являются всего лишь более или менее патологическими полумножествами.

Этот путь развития альтернативной теории отнюдь не является единственно возможным. Мы можем допустить аксиомы, порождающие любую другую теорию бесконечности, лишь бы она не противоречила другим аксиомам. Канторовская теория является лишь одной из возможностей.

К настоящему моменту неизвестно никаких причин принимать нетривиальную теорию бесконечности. Все такие теории должны быть по своему характеру чисто умозрительными. Следовательно, результаты этих теорий, касающиеся бесконечных мощностей, становятся пустыми, если отвергаются их умозрительные основания. Избегая этого, мы решаемся сразу принять тривиальную теорию бесконечных мощностей. Мы делаем это, принимая следующую аксиому:

Аксиома о мощностях

Если X и Y — несчетные классы, то они эквивалентны.

Эта аксиома гласит, что есть ровно две бесконечные мощности — счетная и несчетная.

Есть и более глубокие основания для принятия этой последней аксиомы. Наша цель состоит в том, чтобы построить расширенный универсум настолько богатым, насколько это возможно. По-видимому, только тогда он может играть роль универсального инструмента для изучения математических структур. Таким образом, мы можем постулировать существование классов, соответствующих свойствам, которые мы не в состоянии описать, лишь бы существование этих классов не приводило к абсурду. Такие классы возможны, они могут существовать. Конечно, они в определенном смысле являются воображаемыми. Говоря, что существование таких-то и таких-то классов не приводит к абсурду, мы имеем в виду лишь то, что допущение их существования не противоречит уже принятым аксиомам. Мы можем сформулировать некоторый принцип, который служит руководством для формулировки новых аксиом. Он гласит, что каждый класс, который может существовать, существует. В частности, аксиома о мощностях гласит, что для всякой пары несчетных классов X и Y существует взаимно однозначное отображение X на Y. Непротиворечивость этой аксиомы по отношению к предыдущим аксиомам была установлена А. Сохором.

И по принятии нашей последней аксиомы все же не исключена возможность развить более сложную теорию бесконечности, если такая теория окажется желательной. В этом случае мы могли бы изучать более тонкие понятия мощности, основанные на эквивалентностях, базирующихся на взаимно однозначных отображениях некоторого типа. Это относится и ко всякой другой аксиоме, принятой на основании сформулированного выше принципа.

Наша последняя аксиома имеет несколько простых следствий.

Теорема. *Для каждого несчетного класса X существует отношение R, такое, что $\langle X, R\rangle$ есть упорядочение по типу Ω.*

В частности, универсальный класс V, каждое бесконечное множество и класс $P_\omega(Y)$ для счетного Y могут служить примерами классов, имеющих упорядочение по типу Ω.

Класс X называется *селектором* отношения эквивалентности R, если

(1) $(\forall x, y \in X)(\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow x = y)$,

(2) $(\forall x)(\exists y \in X)(\langle x, y\rangle \in R)$.

Таким образом, селектор выбирает представителя в каждом элементе класса V/R.

Теорема. *X есть селектор эквивалентности R тогда и только тогда, когда $\langle X, R\rangle$ экстенсионально кодирует V/R.*

Теорема. *Каждая эквивалентность имеет селектор.*

Доказательство. Пусть R — эквивалентность, и пусть $\leqslant$ вполне упорядочивает V. Положим $A = \{x;\ (\forall y < x)(\langle x, y\rangle \notin R)\}$. Тогда A — селектор.

Теорема. *Пусть R — отношение. Существует фракция F, такая, что $F \subseteq R$ и* $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(R)$.

Доказательство. Пусть $\leqslant$ вполне упорядочивает V по типу Ω. Для $x \in \mathrm{dom}(R)$ пусть $F(x)$ есть $\leqslant$-первый элемент класса $R``\{x\}$.

Теорема. *Пусть R — отношение, такое, что класс* $\mathrm{dom}(R)$ *счетен и для всякого $x \in$* $\mathrm{dom}(R)$ *класс $R``\{x\}$ является полумножеством. Тогда само R является полумножеством.*

Доказательство. Положим

$$\bar{R} = \{\langle y, x\rangle;\ x \in \mathrm{dom}(R)\ \&\ (R \restriction \{x\}) \subseteq y\}.$$

Пусть $F \subseteq \bar{R}$ — функция, такая, что $\mathrm{dom}(\bar{R}) = \mathrm{dom}(F)$. По аксиоме о продолжении возьмем множество f, такое, что $F \subseteq f$. Тогда $\langle y, x\rangle \in R$ влечет $\langle y, x\rangle \in F(x)$ и, следовательно, $\langle y, x\rangle \in f(x)$, откуда $\langle y, x\rangle \in \bigcup(\mathrm{rng}(f))$. Таким образом, $R \subseteq \bigcup(\mathrm{rng}(f))$ и R есть полумножество.

Следствие. *Универсальный класс не является объединением счетного семейства полумножества.*

Теорема. *Пусть $\langle A, \leqslant\rangle$ — упорядочение по типу Ω. Пусть B — счетный подкласс A. Тогда существует $x \in A$, такое, что $B \subseteq \{y \in A \,\&\, y \leqslant x\}$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $A = V$. Положим $R = \{\langle y, x\rangle;\ x \in B \,\&\, y \leqslant x\}$. Тогда R является полумножеством по предыдущей теореме; $\mathrm{rng}(R)$ есть сегмент $\leqslant$ и потому также является полумножеством. Следовательно, $\mathrm{rng}(R) \neq V$ и существует x, такое, что каждый элемент $\mathrm{rng}(R)$ меньше, чем x. Таким образом,

$$B \subseteq \mathrm{rng}(R) \subseteq \{y \in A;\ y \leqslant x\}.$$

Следствие. *Если $\langle A, \leqslant\rangle$ есть упорядочение по типу Ω, то A не кофинально никакому из своих счетных подклассов.*

Теорема. *Пусть R — такое отношение, что $\mathrm{dom}(R)$ — счетный класс и для всякого $x \in \mathrm{dom}(R)$ отношение $R \restriction \{x\}$ счетно. Тогда R — счетный класс.*

Доказательство. Пусть $\leqslant$ — упорядочение V по типу Ω. Для $x \in \mathrm{dom}(R)$ пусть $F(x)$ есть первое y, такое, что из $\langle z, x\rangle \in R$ следует $\langle z, x\rangle \leqslant y$ для любого z. Так как $\mathrm{rng}(F)$, самое большее, счетен, существует x, для которого $\mathrm{rng}(F) \subseteq \{y;\ y \leqslant x\}$. Таким образом, $R \subseteq \{y;\ y \leqslant x\}$, откуда и вытекает, что R — счетный класс.

Следствие. *Объединение счетного количества счетных классов есть счетный класс.*

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ТРАДИЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В процессе развития математики математиками были созданы различные миры объектов (или различные виды таких объектов), которые стали неотъемлемой частью математики, что свидетельствует о важности этих видов объектов. Они обычно называются *традиционными математическими структурами.*

Некоторые математические структуры возникли до теории множеств или, хотя и развивались параллельно теории множеств, все же сохранили свою автономность. Другие структуры самим своим существованием обязаны теории множеств, но тем не менее их значение не ограничивается использованием лишь в теории множеств.

Любая математическая теория, которая намерена описывать весь мир математики, должна отражать и традиционные математические структуры подобно тому, как это делает канторовская теория множеств, т. е. должна некоторым образом включать их в себя.

В нашем случае мы сконструируем некоторые традиционные структуры внутри расширенного универсума. При этом не возникнет необходимости в каком-либо дальнейшем расширении нашего универсума. Такая ситуация вполне обычна и в канторовской теории множеств.

Говоря, что мы конструируем традиционную структуру в расширенном универсуме, мы имеем в виду, что mutatis mutandis мы конструируем каноническую модель этой структуры внутри расширенного универсума. Затем мы докажем некоторые теоремы об этой модели, которые призваны убедить нас, что ее можно идентифицировать с исходной структурой в том смысле, что модель обладает всеми важными свойствами, которые имеет рассматриваемая структура.

Однако традиционные структуры конструируются в расширенном универсуме не только для того, чтобы показать, что такая конструкция возможна. Они будут использоваться и для изучения расширенного универсума. Как мы убедимся, некоторые проблемы, относящиеся к расширенному универсуму, можно свести к проблемам, относящимся к традиционным структурам; таким образом, используя традиционные структуры, мы в состоянии лучше понять структуру расширенного универсума.

В этой главе мы конструируем лишь структуры, которые используются в дальнейшем.

РАЗДЕЛ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Следуя фон Нейману, мы моделируем натуральные числа в расширенном универсуме таким образом, что нуль есть пустое множество и каждое натуральное число есть множество всех меньших натуральных чисел. Итак, положим $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т. д.; иными словами, мы *идентифицируем* 2 с $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т. д.

Этот способ имеет ряд очевидных преимуществ. Прежде всего каждое натуральное число есть множество из универсума множеств. Число x меньше, чем число y, тогда и только тогда, когда $x \in y$. Заметим еще, что, например, число 5 есть множество, имеющее ровно пять элементов, что дает возможность определить число элементов произвольного множества как единственное натуральное число, множественно эквивалентное данному множеству.

Однако наша цель состоит не только в том, чтобы определить частные натуральные числа, но также и в том, чтобы определить класс всех натуральных чисел. Таким образом, нам необходимо указать свойство $\varphi(x)$, которое может быть идентифицировано со свойством быть натуральным числом. Сформулировав такое свойство, необходимо, конечно, затем доказать различные теоремы, показывающие, что наш выбор свойства был адекватным.

Мы будем конструировать натуральные числа внутри универсума множеств. Поэтому вся первая часть настоящего раздела будет относиться лишь к универсуму множеств; если мы и будем использовать классы, то только теоретико-множественно определимые; такие классы всегда можно заменить соответствующими теоретико-множественными свойствами. Для простоты мы будем широко использовать аксиому регулярности, хотя, как хорошо известно, она не является необходимой для построения натуральных чисел.

Множество x есть по определению *натуральное число*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) каждый элемент множества x является его подмножеством, т. е. $(\forall y \in x)(y \subseteq x)$,

(2) $\in$ на x удовлетворяет закону трихотомии

$$(\forall y, z \in x)(y \in z \vee y = z \vee z \in y).$$

Класс всех натуральных чисел обозначается через N. Мы используем буквы α, β, γ, δ (возможно, с индексами) в качестве переменных, пробегающих натуральные числа.

Укажем некоторые тривиальные факты.

Теорема. *Каждый элемент натурального числа есть натуральное число.*

Теорема. *Если α, $\beta \in N$, то $\alpha \cap \beta \in N$.*

Теорема. *Если α, $\beta \in N$ и α есть собственное подмножество β, то $\alpha \in \beta$.*

Доказательство. Допустим, что $\alpha \subset \beta$. По аксиоме регулярности существует $\gamma \in \beta \setminus \alpha$, такое, что $\gamma \cap (\beta \setminus \alpha) = \varnothing$. Тогда $\gamma \in \beta$ влечет $\gamma \subseteq \beta$ и, следовательно, $\gamma \subseteq \alpha$. Пусть $\delta \in \alpha$. Тогда $\delta, \gamma \in \beta$, откуда $\delta \in \gamma$ или $\delta = \gamma$, или $\gamma \in \delta$. Но из последних двух случаев следует $\gamma \in \alpha$, что невозможно. Таким образом, $\delta \in \gamma$, а отсюда $\alpha \subseteq \gamma$. Мы показали, что $\alpha = \gamma$ и, следовательно, $\alpha \in \beta$.

Теорема. *N линейно упорядочено отношением $\{\langle \alpha, \beta \rangle; \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta\}$.*

Доказательство. Положим $R = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \ \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta\}$. Очевидно, что R рефлексивно. Предположим, что $\langle \alpha, \beta \rangle \in R$, $\langle \beta, \alpha \rangle \in R$ и $\alpha \neq \beta$. Тогда $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \alpha$, следовательно, $\alpha \in \alpha$, что невозможно по аксиоме регулярности. Таким образом, $\langle \alpha, \beta \rangle \in R$ и $\langle \beta, \alpha \rangle \in R$ влечет $\alpha = \beta$. Докажем транзитивность. Пусть $\langle \alpha, \beta \rangle \in R$ и $\langle \beta, \gamma \rangle \in R$. Если $\alpha = \beta$ или $\beta = \gamma$, то тривиально $\langle \alpha, \gamma \rangle \in R$. Если $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \gamma$, то $\alpha \in \gamma$ и, следовательно, $\langle \alpha, \gamma \rangle \in R$. Наконец, возьмем произвольные α, $\beta \in N$. Тогда $\alpha \cap \beta \in N$ и $\alpha \cap \beta$ есть подмножество одновременно α и β. Если $\alpha \cap \beta = \alpha$, то $\alpha \subseteq \beta$ и, следовательно, $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$ (используем предыдущую теорему). Подобным образом рассуждаем и в случае $\alpha \cap \beta = \beta$. Таким образом, остается рассмотреть случай $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ и $\alpha \cap \beta \subset \beta$. Тогда $\alpha \cap \beta \in \alpha$ и $\alpha \cap \beta \in \beta$ по предыдущей теореме; таким образом, $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, что невозможно по аксиоме регулярности.

Когда мы говорим об упорядочении натуральных чисел, то всегда имеем в виду упорядочение из нашей последней теоремы, если специально не оговорено противное. Мы будем обозначать его через $\leqslant$. Подчеркнем тот факт, что $\leqslant$ — это совсем не вполне-упорядочение N.

Теорема. (1) $\varnothing \in N$.
(2) *$\alpha \cup \{\alpha\}$ есть элемент N для всякого $\alpha \in N$.*

(3) *Число* 0 — *наименьший элемент* N *в упорядочении натуральных чисел.*

(4) *Для каждого* α *число* $\alpha \cup \{\alpha\}$ *есть число, являющееся непосредственно следующим за* α.

(5) *Если* $\alpha \neq 0$, *то существует* β, *такое, что* $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

Доказательство. (1)—(3) тривиальны. (4) Очевидно, что $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$ и $\alpha \neq \alpha \cup \{\alpha\}$. Предположим, что $\alpha \in \gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Тогда $\gamma \in \alpha$ или $\gamma = \alpha$. В обоих случаях мы получаем $\alpha \in \alpha$ — противоречие. (5) Пусть $\alpha \neq 0$ и рассмотрим отношение $\alpha^2 \cap \{\langle\gamma, \beta\rangle; \gamma \in \beta \vee \gamma = \delta\}$ (ограничение упорядочения натуральных чисел на α). Это множество и линейное упорядочение α; таким образом, существует наибольший элемент β. Имеем $\beta \in \alpha$ и $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Так как $\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$ невозможно, мы имеем $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

Следовательно, N не имеет наибольшего элемента в упорядочении натуральных чисел и, значит, не будет множеством.

Теоремы, которые мы доказали, показывают, что наши натуральные числа обладают всеми порядковыми свойствами, которых мы ожидаем от натуральных чисел. В следующей теореме мы покажем, что наши натуральные числа обладают и необходимыми свойствами, касающимися мощностей.

Теорема. *Для всякого множества* x *существует единственное натуральное число* α, *множественно эквивалентное* x.

Доказательство. Сначала мы докажем существование, пользуясь аксиомой индукции. Пусть $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула $(\exists\alpha)(x \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha)$. Тогда $\varphi(\varnothing)$ очевидно. Допустим, что $\varphi(x)$, и пусть $y \notin x$. Пусть α таково, что $x \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha$. Тогда $x \cup \{y\} \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha \cup \{\alpha\}$, что дает $\varphi(x \cup \{y\})$. Остается доказать единственность. Допустим, что $x \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha$ и $x \mathrel{\widehat{\approx}} \beta$. Тогда $\alpha \mathrel{\widehat{\approx}} \beta$. Теперь если $\alpha \in \beta$, то α — собственное подмножество β; таким образом, $\alpha \mathrel{\widehat{\approx}} \beta$ невозможно. Подобным же образом невозможно $\beta \in \alpha$. Следовательно, $\alpha = \beta$.

По последней теореме для каждого множества x можно определить *количество его элементов* как единственное натуральное число α, такое, что $x \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha$.

Сложение и умножение натуральных чисел определяются следующим образом:

$$\gamma = \alpha + \beta \equiv \gamma \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha \cup (\{\beta\} \times \beta),$$
$$\gamma = \alpha \cdot \beta \equiv \gamma \mathrel{\widehat{\approx}} \alpha \times \beta,$$
$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Заметим, что последнее определение согласуется с определением суммы множеств и с определением единицы.

Мы можем определить и возведение в степень, взяв в качестве α^{β} количество элементов множества $\{f;\ \mathrm{dom}(f)=\beta$ и $\mathrm{rng}(f)\subseteq\alpha\}$.

Нетрудно проверить, что класс N, снабженный операциями прибавления единицы, сложения и умножения, удовлетворяет всем аксиомам арифметики Пеано первого порядка. Это показывает, что наши натуральные числа, которые мы сконструировали внутри универсума множеств, могут быть идентифицированы с классическими натуральными числами.

Теперь мы намерены доказать теорему о рекурсивном определении функций на натуральных числах; эта теорема дает важный пример применения натуральных чисел в универсуме множеств.

Теорема. *Пусть G —теоретико-множественно определимая функция, и пусть* $\mathrm{dom}(G)=V$. *Тогда существует в точности одна функция F, такая, что* $\mathrm{dom}\,F=N$ *и* $F(\alpha)=G(F\restriction\alpha)$ *для всякого α; эта функция является теоретико-множественно определимой.*

Доказательство. Положим

$$M=\{f;\ \mathrm{dom}(f)\in N\ \&\ (\forall\alpha\in\mathrm{dom}(f))(f(\alpha)=G(f\restriction\alpha))\}.$$

Очевидно, что класс M теоретико-множественно определим. Пусть f и g принадлежат M. Тогда $f\subseteq g$ или $g\subseteq f$. Действительно, если $\alpha\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$ и $f(\alpha)\neq g(\alpha)$, α наименьшее, то было бы $f\restriction\alpha=g\restriction\alpha$ и, таким образом, $f(\alpha)=G(f\restriction\alpha)=G(g\restriction\alpha)=g(\alpha)$,— противоречие. Докажем, теперь, что для каждого α существует $f\in M$, такое, что $\alpha\in\mathrm{dom}(f)$. В противном случае существовало бы наименьшее α, для которого не нашлось бы соответствующего f. Имеем $\alpha\neq 0$, так что $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$ для некоторого β. Пусть $f\in M$ и $\beta\in\mathrm{dom}(f)$. Тогда $\beta\cup\{\beta\}\notin\mathrm{dom}(f)$ и, значит, $\alpha=\mathrm{dom}(f)$. Положим $g=f\cup\{\langle G(f),\alpha\rangle\}$; тогда $g\in M$ и $\alpha\in\mathrm{dom}(g)$. Теперь положим $F=\bigcup M$. Мы видим, что F обладает всеми нужными свойствами. Остается доказать единственность. Пусть F_1 таково, что $\mathrm{dom}(F_1)=N$ и $(\forall\alpha)(F_1(\alpha)=G(F_1\restriction\alpha))$, и допустим, что $F\neq F_1$. Пусть α есть наименьшее число, такое, что $F(\alpha)\neq F_1(\alpha)$. Тогда $F\restriction\alpha=F_1\restriction\alpha$ и, таким образом, $F(\alpha)=G(F\restriction\alpha)=G(F_1\restriction\alpha)=F_1(\alpha)$—противоречие. На этом доказательство и завершается.

Существует несколько вариантов теоремы о рекурсивном определении функций; эти варианты обычно легко вывести из нашей последней теоремы или доказать аналогичным образом. Например, мы можем заменить условие $(\forall\alpha)(F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha))$ условием $F(0) = G(0)$ & $(\forall\alpha)(F(\alpha+1) = G(F(\alpha)))$ и т. п.

Используя последнюю теорему, мы определяем иерархию итерированной операции взятия множества всех подмножеств данного множества и ассоциируем с каждым множеством его ранг. Эти понятия помогают анализировать структуру универсума множеств.

Следующие равенства однозначно определяют теоретико-множественную функцию на натуральных числах:

$$\bar{P}(0) = \{\varnothing\}, \qquad \bar{P}(\alpha+1) = P(\bar{P}(\alpha)).$$

Теорема. *Если* $\alpha \in \beta$, *то* $\bar{P}(\alpha) \subseteq \bar{P}(\beta)$.

Доказательство. Мы докажем $\bar{P}(\alpha) \subseteq \bar{P}(\alpha+1)$ для каждого α. Предположим противное, и пусть α есть наименьшее число, такое, что $\bar{P}(\alpha) \nsubseteq \bar{P}(\alpha+1)$. Так как $\alpha \neq 0$, существует β, такое, что $\alpha = \beta + 1$; имеем $\bar{P}(\beta) \subseteq \bar{P}(\beta+1)$. Но тогда $P(\bar{P}(\beta)) \subseteq P(\bar{P}(\beta+1))$, и, таким образом, $\bar{P}(\alpha) \subseteq \bar{P}(\alpha+1)$ — противоречие.

Теорема. $V = \bigcup \operatorname{rng}(\bar{P})$.

Доказательство. Пусть $V' = \bigcup \operatorname{rng}(\bar{P})$. Очевидно, что $\varnothing \in V'$. Пусть $y \subseteq V'$. Пусть f — функция на y, определенная следующим образом: $f(x) = \min(\alpha;\, x \in \bar{P}(\alpha)\}$. Существует γ, такое, что $f``y \subseteq \gamma$. Следовательно, для каждого x, $x \in y$, мы имеем $x \in \bar{P}(\gamma)$, что дает $y \in \bar{P}(\gamma+1)$. Итак, $y \in V'$. Это доказывает, что $V = V'$, с помощью аксиомы $\in$-индукции.

Эта теорема показывает, что с каждым множеством из универсума множеств мы можем связать некоторое число — его *ранг* $\tau(x)$, определяемый как наименьшее натуральное число α, такое, что $x \in \bar{P}(\alpha)$. Следующее утверждение очевидно:

Теорема. (1) *Для каждого натурального числа* α *имеем* $\tau(\alpha) = \alpha$.

(2) $x \in y$ *влечет* $\tau(x) \in \tau(y)$.

(3) $\tau(x) = (\max\{\tau(y);\, y \in x\}) + 1$.

Теорема. *Существует теоретико-множественно определимое взаимно однозначное отображение* G *множества* $P(N)$ *на* N, *такое, что* $G(\varnothing) = 0$ и $x \subset y$ *влечет* $G(x) \in G(y)$.

Доказательство. Положим $G(x) = \sum\{2^\alpha;\, \alpha \in x\}$ для каждого $x \subseteq N$; это отображение и обладает нужными свойствами.

Теорема. *Существует теоретико-множественно определимое взаимно однозначное отображение N на V.*

Доказательство. Пусть G — отображение из предыдущей теоремы. Определим F индуктивно с помощью равенства $F(\alpha) = F``(G^{-1}(\alpha))$. Используя аксиому $\in$-индукции, легко докажем, что $\operatorname{rng}(F) = V$.

* * *

В остальной части этого раздела будем рассматривать натуральные числа с точки зрения расширенного универсума.

Теорема. *Существует бесконечное натуральное число.*

Доказательство. Пусть x — бесконечное множество, и пусть α — количество элементов в x, т. е. $x \widehat{\approx} \alpha$. Очевидно, что α должно быть бесконечным.

Обозначим через FN класс всех конечных натуральных чисел, т. е. $FN = \{\alpha; \operatorname{Fin}(\alpha)\}$. Очевидно, что $FN \subset N$.

Буквы n, m, k, возможно с индексами, будут использоваться как переменные для конечных натуральных чисел.

В силу результатов разд. 3 первой главы непосредственно получаем

$$0 \in FN \,\&\, (\forall n)((n+1) \in FN);$$

$$(\forall m, n)((m+n) \in FN); \quad (\forall m, n)((m \cdot n) \in FN);$$

$$(\forall m, n)(m^n \in FN); \quad (\forall n)(n \subseteq FN).$$

Теорема. *Упорядочение натуральных чисел $\{\langle\alpha, \beta\rangle; \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta\}$, ограниченное классом FN, есть упорядочение по типу ω.*

Доказательство. FN — бесконечный класс, так как не имеет наибольшего элемента в упорядочении натуральных чисел. В то же время для каждого $n \in FN$ сегмент $\{\alpha \in N; \alpha \leqslant n\}$ есть не что иное, как $n \cup \{n\}$, и, следовательно, это конечное множество.

Значит, FN — счетный класс. Заметим, что N несчетен, так как является собственным теоретико-множественно определимым классом.

Следующая теорема представляет собой принцип индукции для конечных натуральных чисел.

Теорема. *Для всякого класса X если $0 \in X$ и если X вместе с каждым натуральным числом n содержит также число $n+1$, то $FN \subseteq X$.*

Легкое доказательство этого факта предоставляется читателю. Теперь мы сформулируем теорему о рекурсивном определении функций для конечных натуральных чисел; при этом мы предложим довольно сильную формулировку.

Теорема. *Пусть* $\varphi(X, Y)$ — *такая формула, что* $(\forall Y)(\exists! X)(\varphi(X, Y))$. *Тогда существует единственное отношение* R, *такое, что* $\operatorname{dom} R \subseteq FN$ *и для каждого* n *имеем* $\varphi(R``\{n\};\ R \upharpoonright n)$.

Доказательство. Пусть $\psi(X, n)$ есть формула

$$\operatorname{Rel}(X) \mathbin{\&} \operatorname{dom}(X) \subseteq n \mathbin{\&} (\forall m \in n)\, \varphi(X``\{m\};\ X \upharpoonright m).$$

Очевидно, что $\psi(X, n) \mathbin{\&} \psi(Y, n)$ влечет $X = Y$ и что $\psi(X, n) \mathbin{\&} m \in n$ влечет $\psi(X \upharpoonright m, m)$. Докажем, что для каждого n существует X, такой, что $\psi(X, n)$. Предположим противное, и пусть n — наименьшее число, для которого $\neg(\exists X)\, \psi(X, n)$. (Здесь мы пользуемся тем фактом, что каждый элемент FN конечен!) Очевидно, $n \neq \varnothing$; пусть $n = m + 1$, и пусть Y таково, что $\psi(Y, m)$. Возьмем единственное Y_0, удовлетворяющее условию $\varphi(Y_0, Y)$, и положим $X = Y \cup (Y_0 \times \{m\})$. Тогда $\psi(X, n)$ — противоречие. Теперь, положив $R = \bigcup \{X;\ (\exists n)\, \psi(X, n)\}$, мы получим отношение с нужными свойствами. Единственность же очевидна.

Следующая теорема представляет собой другой вариант теоремы о рекурсивном определении функции; она доказывается аналогичным образом.

Теорема. *Пусть* G — *такая функция, что* $\operatorname{dom}(G) = V$. *Тогда существует единственная функция* F, *такая, что* $\operatorname{dom}(F) = FN$ *и* $F(n) = G(F \upharpoonright n)$ *для всякого* n.

Нетрудно проверить, что не только все натуральные числа, но также и все конечные натуральные числа удовлетворяют всем аксиомам арифметики Пеано. Таким образом, в расширенном универсуме мы имеем, как минимум, две модели теории натуральных чисел: элементы N, с одной стороны, и элементы FN с другой.

Заметим, что в универсуме множеств роль натуральных чисел играют только элементы N. Если же мы работаем в расширенном универсуме, который представляет собой предельный универсум, то роль классических натуральных чисел играют элементы FN. В этой ситуации мы можем смотреть на N как на полезное продолжение семейства натуральных чисел, сохраняющее многие его полезные свойства, но все же не вполне упорядоченное, так как, например, класс $N \setminus FN$ не имеет наименьшего элемента. Наконец, если мы работаем в уличенном универсуме, то классические натуральные числа соответствуют элементам N, в то время как FN — это канонический представитель пути к горизонту. Так как мы мотивируем наши рассмотрения в основном с помощью уличенного универсума, мы предпочитаем термины «натуральные числа» и «конечные натуральные числа».

РАЗДЕЛ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Поскольку мы различаем натуральные числа и конечные натуральные числа, у нас возникает и два вида рациональных чисел. Наметим вкратце их довольно обычную конструкцию.

Вначале мы конструируем целые числа (положительные, отрицательные и нуль) и конечные целые числа. С этой целью мы возьмем 0 в качестве кода для знака минус. Тогда класс $N^{(-)}$ всех целых чисел и класс $FN^{(-)}$ всех конечных целых чисел определяются следующим образом:

$$N^{(-)} = N \cup \{\langle 0, \alpha\rangle;\ \alpha \neq 0\},$$

$$FN^{(-)} = FN \cup \{\langle 0, n\rangle;\ n \neq 0\}.$$

Очевидные определения суммы и произведения (конечных) целых чисел, а также простые основные теоремы об этих операциях мы оставляем читателю Заметим лишь, что $FN^{(-)}$ есть подкласс $N^{(-)}$ и что операции на $FN^{(-)}$ суть ограничения соответствующих операций на $N^{(-)}$; $FN^{(-)}$ счетен, в то время как $N^{(-)}$ несчетен. Класс $N^{(-)}$ и операции сложения и умножения на $N^{(-)}$ теоретико-множественно определимы

Говоря о полях, областях целостности и т. п., мы будем придерживаться соглашения, согласно которому, когда мы говорим «поле T», имеется в виду класс (область), снабженный двумя операциями, удовлетворяющими обычным аксиомам, а когда мы говорим «класс T», имеется в виду только носитель соответствующего поля.

Поле RN рациональных чисел определяется как поле частных кольца $N^{(-)}$. Ясно, что это поле можно определить теоретико-множественным образом и так, чтобы $N^{(-)}$ оказалось подструктурой RN.

Поле RN имеет естественный линейный порядок, который также теоретико-множественно определим; мы обозначим его через $\leqslant$. Введем естественным образом положительные и отрицательные рациональные числа, абсолютное значение числа (обозначение $|x|$) и т. д. Прочие понятия, относящиеся к рациональным числам, вводятся обычным образом.

Класс FRN конечных рациональных чисел определяется следующим образом:

$$FRN = \left\{ \frac{x}{y};\ x,\ y \in FN^{(-)} \,\&\, y \neq 0 \right\}.$$

Ограничивая сумму и произведение с рациональных чисел на область FRN, мы превращаем последнюю в поле конечных рациональных чисел.

Очевидно, что поле FRN есть поле частных кольца $FN^{(-)}$. Естественное упорядочение FRN есть при этом ограничение естественного упорядочения RN на FRN. Абсолютное значение, определенное в FRN, оказывается ограничением абсолютного значения, определенного в RN, и т. д. Класс FRN счетен, а класс RN несчетен.

В предельном универсуме поле FRN соответствует классическим рациональным числам. С другой стороны, в уличенном универсуме роль классических рациональных чисел играют элементы класса RN.

Класс BRN ограниченных рациональных чисел определяется следующим образом:

$$BRN = \{x;\ x \in RN \,\&\, (\exists n)(|x| < n)\}.$$

Очевидно, что $FRN \subseteq BRN \subseteq RN$.

Теорема. *Пусть $x \in BRN$ и $0 \neq y \in FRN$. Тогда существует конечное натуральное число n, такое, что $|x| < n|y|$.*

Доказательство. Можно считать, что $x, y > 0$. Существуют n_1, n_2, n_3, такие, что $n_1 n_2 \neq 0$, $x < n_3$ и $y = n_1/n_2$. Пусть n таково, что $nn_1 > n_2 n_3$. Тогда, очевидно, $x < ny$.

Теорема. *Пусть X — непустой класс конечных рациональных чисел, содержащий вместе с каждым конечным рациональным числом x все конечные рациональные числа $y \leqslant x$. Тогда существует рациональное число z, такое, что $X = \{x \in FRN;\ x \leqslant z\}$. Если $X \neq FRN$, то z ограничено.*

Доказательство. Если $X = FRN$, то $X = \{x \in FRN;\ x \leqslant \alpha\}$ для каждого $\alpha \in N \setminus FN$, так что можно считать, что $X \neq FRN$. Если X имеет максимальный элемент в естественном упорядочении $\leqslant$ рациональных чисел, то в качестве z следует взять этот максимальный элемент. Если $FRN \setminus X$ имеет минимальный элемент z_1 в $\leqslant$, то положим $z = z_1 - 1/\alpha$ для некоторого бесконечного натурального числа α. Итак, предположим, что $FRN \setminus X$ не имеет минимума, а X не имеет максимума. Для каждого ненулевого n определим $F(n)$ как наибольшее конечное целое, такое, что $F(n)/2^n \in X$.

Существование такого числа есть простое следствие предыдущей теоремы. Очевидно, что

$$\frac{F(n)}{2^n} \leqslant \frac{F(n+1)}{2^{n+1}} < \frac{F(n)+1}{2^n}.$$

Если $x \in X$, то существует $n \neq 0$, такое, что $x < F(n)/2^n$. Это следует из того факта, что в X нет максимума. В самом деле, существует $y \in X$, больший, чем x, и $n \neq 0$, такие, что $1/2^n < y - x$, и, следовательно, $x < F(n)/2^n$. Аналогично, так как $FRN \setminus X$ не имеет минимума, для каждого $x \in FRN \setminus X$ существует $n \neq 0$, такое, что $(F(n)+1)/2^n < x$. По аксиоме о продолжении существует функция f, такая, что $F \subseteq f$, $\mathrm{dom}(f)$ есть бесконечное натуральное число γ и для каждого $\alpha < \gamma$ имеем

$$\frac{f(\alpha)}{2^\alpha} \leqslant \frac{f(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}} < \frac{f(\alpha)+1}{2^\alpha}.$$

Выберем бесконечное $\gamma_0 < \gamma$ и положим $z = f(\gamma_0)/2^{\gamma_0}$. Так как

$$\frac{F(n)}{2^n} \leqslant z < \frac{F(n)+1}{2^n}$$

для каждого конечного n, имеем $X = \{x \in FRN;\ x \leqslant z\}$. Кроме того, $z \in BRN$, поскольку $|z| < |F(1)+1|$.

Два рациональных числа x и y назовем *бесконечно близкими* (обозначение $x \doteq y$), если они удовлетворяют одному из следующих условий:

(a) $|x-y| < 1/n$ для каждого ненулевого $n \in FN$, или

(b) $n < x$ и $n < y$ для каждого $n \in FN$, или

(c) $x < -n$ и $y < -n$ для каждого $n \in FN$.

Очевидно, что $\doteq$ есть отношение эквивалентности.

Теорема. (1) *Если $x \in BRN$, $y \in RN$ и $x \doteq y$, то $y \in BRN$.*

(2) *Для каждой пары x, y ограниченных рациональных чисел $x \doteq y \equiv (\forall n \neq 0)(|x-y| < 1/n)$.*

(3) *Для каждой пары x, y конечных рациональных чисел $x \doteq y$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

Доказательство. (3) Если $x \neq y$, то существует $n \neq 0$, такое, что $|x-y| > 1/n$.

Теорема. *Пусть x и y — ограниченные рациональные числа, $x < y$ и x не бесконечно близко к y. Тогда существует конечное рациональное число z, такое, что $x < z < y$.*

Доказательство. Можно считать, что $0 \leqslant x$. Пусть $n \neq 0$ таково, что $1/n \leqslant y - x$. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $x < m/n$. Тогда очевидно, что $m/n < y$.

Теорема. *Пусть α — бесконечное натуральное число. Тогда для каждого $x \in RN$ существует γ, такое, что $-\alpha^2 < \gamma < \alpha^2$ и $x \doteq \gamma/\alpha$.*

Доказательство. Положим $\gamma = \max\{\beta; -\alpha^2 < \beta < \alpha^2 \,\&\, \beta/\alpha < x\}$. Тогда $x \doteq \gamma/\alpha$.

Теорема. *Пусть $x, x_1, y, y_1 \in BRN$, и предположим, что* $x \doteq x_1$ и $y \doteq y_1$. Тогда $x + y \doteq x_1 + y_1$, $x - y \doteq x_1 - y_1$, $x \cdot y \doteq x_1 \cdot y_1$. *Кроме того, если* $\neg(y \doteq 0)$, *то* $\neg(y_1 \doteq 0)$ *и* $x/y \doteq x_1/y_1$.

Читатель сможет сам сформулировать аналогичные теоремы для случая, когда x или y не ограничено.

Рациональное число x называется *бесконечно малым*, если $x \doteq 0$. Очевидно, что каждое бесконечно малое рациональное число является ограниченным.

Мы говорим, что рациональные числа x и y определяют одно и то же *вещественное число*, если $x \doteq y$. Если мы хотим изображать вещественные числа в виде объектов, то можно идентифицировать их с элементами класса $BRN/\doteq$ или использовать некоторое экстенсиональное кодирование класса $BRN/\doteq$, снабжая его подходящими алгебраическими операциями и упорядочением. Как мы увидим позднее, существуют очень полезные специальные кодирования вещественных чисел.

Результаты этого раздела показывают, что наше определение вещественного числа корректно. В предельном универсуме наши вещественные числа соответствуют классическим вещественным числам, так как они образуют линейно упорядоченное поле, которое содержит FRN в качестве плотного подполя и таково, что каждый класс вещественных чисел, имеющий верхнюю границу, имеет и наименьшую верхнюю грань.

В уличенном универсуме вещественные числа рассматриваются как подходящие аппроксимации рациональных, удобные для вычислений. Например, не существует рационального числа, такого, что $x^2 = 2$, но существует рациональное число x, такое, что $x^2 \doteq 2$, и, следовательно, существует вещественное число x, такое, что $x^2 = 2$. Вычисления с вещественными числами — это специфические вычисления с рациональными числами, характеризующиеся тем, что мы пренебрегаем бесконечно малыми числами. Именно так вещественные числа используются во всех приложениях.

РАЗДЕЛ 3. ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В гл. 1 мы ввели упорядочение по типу Ω. Из аксиомы о двух бесконечных мощностях следует, что универсальный класс V может быть упорядочен по типу Ω. Таким образом, в нашей теории достаточно работать с ординальными числами, «меньшими, чем Ω». Такие ординальные числа соответствуют счетным ординалам в канторовской теории множеств

Мы стремимся ввести в нашу теорию ординалы по той же причине, что и в классической канторовской теории множеств: мы хотим сконструировать каноническое представление для упорядочения по типу Ω. Мы определим класс ординальных чисел как некоторый подходящий подкласс класса N натуральных чисел.

Теорема. *Существует класс $Z \subseteq N$, такой, что каноническое упорядочение $\leqslant$ натуральных чисел, ограниченное на Z, является упорядочением по типу Ω и таково, что из $\alpha < \beta$ и $\alpha, \beta \in Z$ следует $\alpha^\alpha < \beta$ для всех α, β.*

Доказательство. Пусть $\leqslant^*$ есть упорядочение по типу Ω на N. Положим $Z = \{\beta;\ (\forall \alpha <^* \beta)(\alpha^\alpha \in \beta)\}$. Докажем, что на Z упорядочения $\leqslant$ и $\leqslant^*$ совпадают. Допустим, что $\alpha, \beta \in Z$ и $\alpha <^* \beta$. Тогда $a^\alpha < \beta$, так что $\alpha < \beta$. Обратно, пусть $\alpha < \beta$. Если неверно, что $\alpha <^* \beta$, то $\beta <^* \alpha$, что влечет $\beta < \alpha$, а это невозможно. Итак, $\leqslant$ и $\leqslant^*$ совпадают на Z. Кроме того, если $\alpha < \beta$ и $\alpha, \beta \in Z$, то $\alpha^\alpha < \beta$. Достаточно доказать, что класс Z несчетен. Предположим противное. Определим классы Z_n индукцией относительно FN, полагая $Z_0 = Z$, $Z_{n+1} = \{\alpha^\alpha;\ \alpha \in Z_n\}$. Для каждого n класс Z_n, самое большее, счетен и, следовательно, класс $\overline{Z} = \bigcup \{Z_n;\ n \in FN\}$ счетен. Таким образом, $\overline{Z}$ есть полумножество и $\bigcup \overline{Z}$ — собственная часть N. Пусть γ есть $\leqslant^*$-первый элемент разности $N \setminus \bigcup \overline{Z}$. Ясно, что $\gamma \notin Z$. Пусть $\alpha <^* \gamma$; тогда $\alpha \in \bigcup \overline{Z}$. Следовательно, $\alpha \in \bigcup Z_n$ для некоторого n; пусть $\beta \in Z_n$ таково, что $\alpha \in \beta$. Тогда $\alpha^\alpha < \beta^\beta$ и $\beta^\beta \in Z_{n+1}$. Это в свою очередь влечет $\alpha^\alpha \in \bigcup \overline{Z}$ и, следовательно, $\alpha^\alpha \in \gamma$. Итак, мы доказали, что из $\alpha <^* \gamma$ следует $\alpha^\alpha \in \gamma$, так что $\gamma \in Z$, — противоречие.

В дальнейшем пусть $\overline{\Omega}$ обозначает фиксированный класс, удовлетворяющий следующим трем условиям:

(1) $FN \subseteq \overline{\Omega} \subseteq N$, и каждое число $\alpha \in \overline{\Omega} \setminus FN$ четно.

(2) Если $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}$, $\alpha \in \beta$ и $\beta \notin FN$, то $\alpha^\alpha \in \beta$.

(3) Если $\leqslant$ — естественное упорядочение натуральных чисел (т. е. $\alpha \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$), то $\langle \overline{\Omega}, \leqslant \rangle$ есть упорядочение по типу Ω.

Теперь, начиная с $\overline{\Omega}$, мы сконструируем другой класс, удовлетворяющий условию (3) и $FN \subseteq \overline{\Omega} \subseteq N$ и обладающий некоторыми дополнительными хорошими свойствами. Для каждого $\gamma \in \overline{\Omega}$ определим классы $p_n(\gamma)$ индукцией относительно FN. Положим $p_0(\gamma) = \{\beta; \beta \leqslant \gamma$ и $\beta \in \overline{\Omega}\}$ и $p_{n+1}(\gamma) = \{\alpha + \beta, \alpha, \beta \in p_n(\gamma)\} \cup \{\alpha, \beta, \alpha, \beta \in p_n(\gamma)\}$ и, наконец, положим $p(\gamma) = \bigcup \{p_n(\gamma); n \in FN\}$. Очевидно, что для любых α, $\beta \in \Omega$, таких, что $\alpha \in \beta$ и $\beta \notin FN$, имеем $p(\alpha) \subseteq \beta$. Заметим, что $p(\gamma) = \{\alpha_m \gamma^m + \ldots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0;\ m \in FN \,\&\, \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \bigcup \{p(\beta); \beta \in \gamma$ и $\beta \in \overline{\Omega}\}\}$ для каждого $\gamma \in \overline{\Omega} \setminus FN$.

Положим $\Omega = \bigcup \{p(\gamma); \gamma \in \overline{\Omega}\}$ и назовем Ω *классом всех ординальных чисел.*

Теорема. $\langle \Omega, \leqslant \rangle$ *есть упорядочение по типу* Ω (*Здесь* $\leqslant$ — *естественное упорядочение натуральных чисел.*)

Доказательство. Так как $\overline{\Omega} \subseteq \Omega$, то класс Ω несчетен. Очевидно также, что для каждого $\alpha \in \Omega$ сегмент $\{\beta \in \Omega; \beta < \alpha\}$, самое большее, счетен. Таким образом, достаточно показать, что $\leqslant$ есть вполне-упорядочение Ω. С этой целью достаточно показать, что класс $p(\gamma)$ вполне упорядочен отношением $\leqslant$ для каждого $\gamma \in \overline{\Omega}$. Предположим противное, и пусть γ — первый элемент $\overline{\Omega}$, такой, что $p(\gamma)$ не является вполне упорядоченным. Ясно, что γ бесконечно. Пусть $\{\beta_n; n \in FN\}$ — убывающая последовательность элементов $p(\gamma)$. Каждый β_n может быть записан в форме полинома $\alpha_m \gamma^m + \ldots$ $\ldots + \alpha_0$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \bigcup \{p(\beta); \beta \in \gamma \cap \overline{\Omega}\}$; фиксируем для каждого β_n одно такое представление. Легко показать в таком случае, что можно найти и убывающую последовательность коэффициентов нашего счетного семейства полиномов, но это противоречие.

Мы получили, что $FN \subseteq \Omega \subseteq N$ и класс Ω замкнут относительно сложения и умножения натуральных чисел. Легко проверить, что эти операции на ординальных числах совпадают с ординальными операциями сложения и умножения, определяемыми, как обычно. Каждое предельное ординальное число оказывается четным. Первый элемент разности $\Omega \setminus FN$ (первый бесконечный ординал) мы обозначим через ω.

Существуют различные возможные формулировки теоремы об определении функции на ординальных числах по трансфинитной рекурсии; мы представим две из таких формулировок Эти теоремы будут широко использоваться. Так как их доказательства аналогичны доказательствам соответствующих теорем о рекурсии относительно FN, мы ограничимся лишь краткими указаниями

Теорема. *Пусть* $\varphi(X, Y)$ — *формула, и допустим, что* $(\forall Y)(\exists! X)\varphi(X, Y)$. *Тогда существует в точности одно отношение* R, *такое, что* $\mathrm{dom}(R) \subseteq \Omega$ *и для всякого* $\alpha \in \Omega$

$$\varphi(R``\{\alpha\},\ R \restriction (\alpha \cap \Omega)).$$

Доказательство. Пусть $\psi(X, \alpha)$ есть формула $\mathrm{dom}(X) \subseteq \alpha \cap \Omega \ \&\ \mathrm{Rel}(X) \ \&\ \alpha \in \Omega \ \&\ (\forall \beta)(\beta \in \alpha \cap \Omega \Rightarrow \varphi(X``\{\beta\};\ X \restriction (\beta \cap \Omega)))$. Положим $R = \bigcup \{X;\ (\exists \alpha \in \Omega)\,\psi(X, \alpha)\}$. Это отношение имеет все нужные свойства. Единственность очевидна.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x, Y)$ — *формула, и допустим, что для всякого не более чем счетного класса* Y *существует* x, *такое, что* $\varphi(x, Y)$ *Тогда существует функция* F, *такая, что* $\mathrm{dom}(F) = \Omega$ *и* $\varphi(F(\alpha),\ F \restriction (\alpha \cap \Omega))$ *для всякого* $\alpha \in \Omega$.

Доказательство Пусть R есть вполне-упорядочение V. Пусть $\varphi_0(x, Y)$ имеет место, если Y несчетно и $x = 0$ или если Y не более чем счетно и x есть первый элемент, такой, что $\varphi(x, Y)$ (относительно вполне-упорядочения R). Тогда $(\forall Y)(\exists! x)\,\varphi_0(x, Y)$ и для всех, самое большее, счетных Y из $\varphi_0(x, Y)$ следует $\varphi(x, Y)$. Пусть $\psi(G, \alpha)$ — формула $\alpha \in \Omega \ \&\ \mathrm{dom}(G) = \alpha \cap \Omega \ \&\ (\forall \beta \in \alpha \cap \Omega)\,\varphi_0(G(\beta);\ G \restriction (\beta \cap \Omega))$. Положим $F = \bigcup \{G;\ (\exists \alpha \in \Omega)\,\psi(G, \alpha)\}$; F обладает нужными свойствами.

Дадим теперь два примера определения по трансфинитной рекурсии

Назовем ω-*операцией* операцию $\mathcal{O}$, сопоставляющую каждой счетной последовательности $\{X_n;\ n \in FN\}$ классов расширенного универсума некоторый класс $\mathcal{O}(\{X_n;\ n \in FN\})$ расширенного универсума. Ясно, что при этом последовательность $\{X_n;\ n \in FN\}$ следует рассматривать как закодированную с помощью некоторого отношения R, такого, что $\mathrm{dom}(R) \subseteq FN$ и $R``\{n\} = X_n$ для каждого $n \in FN$; таким образом, ω-операция может рассматриваться как операция, сопоставляющая каждому отношению R расширенного универсума (такого, что $\mathrm{dom}(R) \subseteq FN$) некоторый класс из расширенного универсума

Пусть $\mathfrak{M}$ — кодируемый класс, и пусть $\mathcal{O}$ есть ω-операция. Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ замкнут относительно $\mathcal{O}$, если для каждой последовательности $\{X_n;\ n \in FN\}$ элементов $\mathfrak{M}$ класс $\mathcal{O}(\{X_n;\ n \in FN\})$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{N}$ — *кодируемый класс, и пусть* $\mathcal{O}$ — *некоторая* ω-*операция. Тогда существует кодируемый класс* $\mathfrak{M}$, *такой, что*

(1) $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$;

(2) *$\mathfrak{M}$ замкнут относительно $\mathcal{O}$;*

(3) *если $\mathfrak{M}_0$ есть кодируемый класс, удовлетворяющий условиям* (1) *и* (2), *то* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$.

Доказательство. Пусть $\langle \overline{K}, \overline{S} \rangle$ кодирует класс V^{FN} всех счетных последовательностей множеств. Сконструируем две последовательности $\{K_\alpha;\ \alpha \in \Omega\}$ и $\{S_\alpha;\ \alpha \in \Omega\}$ с помощью рекурсии относительно Ω. Пусть $\langle K_0, S_0 \rangle$ — кодирование $\mathfrak{N}$. Пусть, далее, $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \Omega$. Положим $\overline{\overline{K}} = \{\langle x;\ \alpha \rangle;\ \alpha \in \gamma \cap \Omega \ \&\ x \in K_\alpha\}$ и $\overline{\overline{S}} = \{\langle y, \langle x, \alpha \rangle \rangle;\ \langle x, \alpha \rangle \in \overline{\overline{K}}\ \&\ y \in S_\alpha\text{“}\{x\}\}$. Далее определим $K_\gamma = \{x;\ x \in \overline{K}\ \&\ \overline{S}\text{“}\{x\} \in \overline{\overline{K}}^{FN}\}$. Таким образом, пара $\langle K_\gamma, \overline{S} \rangle$ кодирует $\overline{\overline{K}}^{FN}$. Положим теперь $\overline{\overline{\overline{S}}} = \{\langle w, x \rangle;\ x \in K_\gamma\ \&\ (\exists z, y, n)(\langle z, n \rangle \in \overline{S}\text{“}\{x\}\ \&\ y \in \overline{\overline{S}}\text{“}\{z\}\ \&\ w = \langle y, n \rangle)\}$. Тогда $\langle K_\gamma, \overline{\overline{\overline{S}}} \rangle$ кодирует класс всех отношений R, таких, что $\operatorname{dom}(R) \subseteq FN$ и $(\forall n)(\exists z)(R\text{“}\{n\} = \overline{\overline{S}}\text{“}\{z\})$. Наконец, положим $S_\gamma = \{\langle y, x \rangle;\ x \in K_\gamma\ \&\ y \in \mathcal{O}(\overline{\overline{\overline{S}}}\text{“}\{x\})\}$. Тогда $\langle K_\gamma, S_\gamma \rangle$ кодирует *класс всех классов $\mathcal{O}(R)$,* где *R такое, как указано выше.* После того как построены $\langle K_\alpha, S_\alpha \rangle$ для каждого $\alpha \in \Omega$, положим

$$K = \{\langle x, \alpha \rangle;\ \alpha \in \Omega\ \&\ x \in K_\alpha\},$$

$$S = \{\langle y, \langle x, \alpha \rangle \rangle;\ \langle x, \alpha \rangle \in K\ \&\ y \in S_\alpha\text{“}\{x\}\}.$$

Класс $\mathfrak{M}$, закодированный парой $\langle K, S \rangle$, имеет все нужные свойства.

Класс $\mathfrak{M}$ однозначно определяется по $\mathfrak{N}$; мы назовем $\mathfrak{M}$ *замыканием* класса $\mathfrak{N}$ относительно операции $\mathcal{O}$. Читатель легко обобщит эту конструкцию на случай нескольких операций.

Докажем теперь несколько теорем, дающих нам возможность легко переносить некоторые результаты канторовской теории множеств в нашу теорию.

Теорема. *Существует отношение S, такое, что $\langle \Omega, S \rangle$ экстенсионально кодирует $P_\omega(\Omega)$ и $S\text{“}\{\alpha\} \subseteq \alpha$ для каждого $\alpha \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть F — взаимно однозначное отображение Ω на V. По аксиоме о продолжении для каждого, самое большее, счетного класса $X \subseteq \Omega$ класс $\{y;\ \Omega \cap y = X\}$ несчетен. Таким образом, $\{\alpha;\ \Omega \cap F(\alpha) = X\}$ несчетен. Определим класс $Z \subseteq \Omega$ индукцией по Ω следующим образом: для $\gamma \in \Omega$ имеем $\gamma \in Z$ тогда и только тогда, когда $F(\gamma) \cap \cap\, \Omega \subseteq \gamma \cap Z$ и $(\forall \alpha \in \gamma \cap \Omega)(F(\alpha) \cap \Omega \neq F(\gamma) \cap \Omega)$. Положим

$S_1 = \{\langle\beta, \alpha\rangle;\ \alpha \in Z \,\&\, \beta \in F(\alpha) \cap \Omega\}$. Ясно, что $S_1 \text{``}\{\alpha\} = F(\alpha) \cap \Omega = F(\alpha) \cap Z$ для каждого $\alpha \in Z$. Если $\alpha$, $\beta$ суть различные элементы $Z$, то $S_1 \text{``}\{\alpha\} \neq S_1 \text{``}\{\beta\}$. Если $X \subseteq Z$ — не более чем счетный класс, то пусть γ есть первое ординальное число, такое, что $X \subseteq \gamma$ и $F(\gamma) \cap \Omega = X$. Тогда $\gamma \in Z$. Следовательно, $\langle Z, S_1\rangle$ экстенсионально кодирует $P_\omega(Z)$ и Z несчетно. Пусть G — взаимно однозначное отображение Ω на Z, сохраняющее естественное упорядочение $\leqslant$. Положим $S = \{\langle\alpha, \beta\rangle;\ \langle G(\alpha), G(\beta)\rangle \in S_1\}$. Тогда $\langle\Omega, S\rangle$ обладает всеми нужными свойствами.

Теорема. *Существует класс A, удовлетворяющий следующим четырем условиям*:

(1) $(\forall x, y \in A)(x = y \equiv x \cap A = y \cap A)$;

(2) $(\forall x \in A)(x \cap A$, *самое большее, счетно*$)$;

(3) $(\forall X \subseteq A)(X$, *самое большее, счетно* $\Rightarrow (\exists x \in A)(X = x \cap A))$;

(4) $(\forall x \subseteq A)(x \in A)$.

Доказательство. Пусть $\langle\Omega, S\rangle$ — такая же пара, как в предыдущей теореме. Очевидно, что $S \text{``}\{0\} = \varnothing$. Пусть $G$ — взаимно однозначное отображение $\Omega$ на $V$. Сконструируем функцию $F$ с помощью индукции. Пусть $\alpha \in \Omega$. Если $S \text{``}\{\alpha\}$ — конечное множество, то положим $F(\alpha) = F \text{``} S \text{``}\{\alpha\}$. Если $S \text{``}(\alpha)$ счетно, то найдется $\gamma \in \Omega$, такой, что $F \text{``} S \text{``}\{\alpha\} \subseteq G(\gamma)$, $G(\gamma) \cap F \text{``}(\alpha \setminus S \text{``}\{\alpha\}) = \varnothing$, $\tau(G(\gamma)) > \tau(x)$ для всякого $x \in F \text{``}\alpha$, $G(\gamma) \cap (P_n(F \text{``}\alpha) \setminus F \text{``} S \text{``}\{\alpha\}) = \varnothing$ для каждого $n$, где $P_n(X) = P(P(\ldots(P(X))\ldots))$ ($n$ раз). В этом случае мы положим $F(\alpha) = G(\gamma)$, где $\gamma$ — первое ординальное число с $G(\gamma)$, указанным выше. Теперь достаточно положить $A = F \text{``}\Omega$; класс A обладает всеми требуемыми свойствами.

Класс A, существование которого гарантирует предыдущая теорема, может рассматриваться как модель канторовского универсума наследственно счетных множеств. Это дает нам возможность переводить все результаты, касающиеся канторовского универсума наследственно счетных множеств, в результаты нашей теории, относящиеся к классу A. Особый интерес представляют результаты, касающиеся подклассов класса FN и не упоминающие о всем классе A. Легко видеть, что класс A определен неоднозначно.

РАЗДЕЛ 4. УЛЬТРАФИЛЬТРЫ

Понятие ультрафильтра есть типичный пример понятия, важность которого трудно усматривается в канторовской теории множеств. Ультрафильтр можно понимать как разбиение семейства свойств на две взаимно дополнительные части.

Мы будем иметь дело с кодируемыми классами, чтобы достичь наибольшей общности; это необходимо в силу общей природы понятий, которые мы намерены изучать. С другой стороны, мы будем изучать ультрафильтры лишь на кольце классов, что упрощает некоторые формулировки.

Готические заглавные буквы $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}$, возможно с индексами, мы будем использовать как переменные для кодируемых классов. Смысл обозначений типа $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ и т. д. ясен.

$\mathfrak{R}$ называется *кольцом классов*, если

(1) $\bigcup \mathfrak{R}$ есть бесконечный класс и $\bigcup \mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$,

(2) $(\forall X)(\forall Y)(X, Y \in \mathfrak{R} \Rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{R})$,

(3) $(\forall X)(X \in \mathfrak{R} \Rightarrow (\bigcup \mathfrak{R} \setminus X) \in \mathfrak{R})$,

(4) если $X \in \mathfrak{R}$ и X содержит не менее двух элементов, то существует собственный непустой подкласс Y класса X, такой, что $Y \in \mathfrak{R}$.

Упомянем, например, следующие кольца классов: $P(x)$ для каждого бесконечного множества x, $V \cup \{V \setminus x;\ x \in V\}$, $P_\omega(X)$ для каждого счетного класса и т. д. Имеются и многие другие примеры.

Далее во всем разделе $\mathfrak{R}$ обозначает кольцо классов.

Теорема. *Если X, $Y \in \mathfrak{R}$, то $X \cup Y \in \mathfrak{R}$ и $X \setminus Y \in \mathfrak{R}$.*

Доказательство.

$$X \setminus Y = X \cap (\bigcup \mathfrak{R} \setminus Y); \quad X \cup Y = \bigcup \mathfrak{R} \setminus ((\bigcup \mathfrak{R} \setminus X) \cap (\bigcup \mathfrak{R} \setminus Y)).$$

Заметим, что отсюда в качестве непосредственного следствия получаем, что $\varnothing \in \mathfrak{R}$.

Класс $\mathfrak{M}$ называется *фильтром* на $\mathfrak{R}$, если

(1) $\mathfrak{M}$ — непустой собственный подкласс $\mathfrak{R}$,

(2) $(\forall X, Y \in \mathfrak{M})(X \cap Y \in \mathfrak{M})$, т. е. $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно пересечений,

(3) $(\forall X \in \mathfrak{M})(\forall Y \in \mathfrak{R})(X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathfrak{M})$, т. е. $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия надклассов.

$\mathfrak{M}$ называется *ультрафильтром*, если дополнительно к указанным трем условиям выполняется еще и следующее условие:

(4) $(\forall X \in \mathfrak{R})(X \in \mathfrak{M} \vee (\bigcup \mathfrak{R} \setminus X) \in \mathfrak{M})$, т. е. X или дополнение X принадлежит $\mathfrak{M}$ для всякого $X \in \mathfrak{R}$

Заметим, что если $\mathfrak{M}$ есть фильтр на $\mathfrak{R}$, то $\varnothing \notin \mathfrak{M}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \mathfrak{M}$, и пусть класс $\mathfrak{M}$ дуально направлен по включению. Тогда $\{X \in \mathfrak{R};\ (\exists Y \in \mathfrak{M})(Y \subseteq X)\}$ есть фильтр на $\mathfrak{R}$.*

Следующая теорема показывает, что на ультрафильтр можно смотреть как на разбиение $\mathfrak{R}$ на две взаимно дополнительные части.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — два дизъюнктных класса, объединение которых есть $\mathfrak{R}$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ оба замкнуты относительно пересечений, и пусть для всякого $X \in \mathfrak{R}$ $X \in \mathfrak{M}_1$ в том и только том случае, когда $(\bigcup \mathfrak{R} \setminus X) \in \mathfrak{M}_2$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ или $\mathfrak{M}_2$ есть ультрафильтр на $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Допустим, что $\bigcup \mathfrak{R} \in \mathfrak{M}_1$; тогда $\varnothing \in \mathfrak{M}_2$. Докажем, что $\mathfrak{M}_1$ есть ультрафильтр на $\mathfrak{R}$. Условия (1), (2) и (4), очевидно, имеют место для $\mathfrak{M}_1$. Докажем (3). Пусть $X \in \mathfrak{M}_1$, $Y \in \mathfrak{R}$ и $X \subseteq Y$. Если $Y \notin \mathfrak{M}_1$, то $(\bigcup \mathfrak{R} \setminus Y) \in \mathfrak{M}_1$ и, следовательно, $\varnothing = X \cap (\bigcup \mathfrak{R} \setminus Y) \in \mathfrak{M}_1$ — противоречие. Таким образом, $Y \in \mathfrak{M}_1$, что и завершает доказательство.

Теорема. *Для каждого фильтра $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{R}$ существует ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{R}$, такой, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{R}$ несчетен, то он допускает нумерацию вида $\{X_\alpha; \alpha \in \Omega\}$, если же этот класс счетен, то у него есть нумерация вида $\{X_\alpha; \alpha \in FN\}$. Пусть $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ — такая нумерация, где A есть Ω или FN. Сконструируем теперь класс $A_0 \subseteq A$ по рекурсии. Для каждого $\gamma \in A$ положим $\gamma \in A_0$ тогда и только тогда, когда для всякого класса $X \in \mathfrak{N}$ и всякого множества $v \subseteq \gamma \cap A_0$ имеет место $X_\gamma \cap X \cap \bigcap \{X_\alpha, \alpha \in v\} \neq \varnothing$. Положим теперь $\mathfrak{M} = \{X; (\exists \alpha \in A_0)(X = X_\alpha)\}$. Очевидно, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$; читатель легко проверит, что $\mathfrak{M}$ — ультрафильтр на $\mathfrak{R}$.

Ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{R}$ назовем *тривиальным*, если существует y, такое, что $\{y\} \in \mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ тривиален тогда и только тогда, когда существует конечное множество u, такое, что $u \in \mathfrak{M}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{N}$ — фильтр на $\mathfrak{R}$, не содержащий ни одного конечного множества. Тогда существует нетривиальный ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{R}$, такой, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_0$ состоит из всех классов вида $(\bigcup \mathfrak{R} \setminus u)$, где u — конечное множество и $u \in \mathfrak{R}$. Положим $\mathfrak{N}_1 = \{Z \in \mathfrak{R};\ (\exists X \in \mathfrak{N}_0)(\exists Y \in \mathfrak{N})(X \cap Y \subseteq Z)\}$. Тогда $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ есть фильтр на $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{M}$ — ультрафильтр на $\mathfrak{R}$, расширяющий $\mathfrak{N}_1$, то $\mathfrak{M}$ не может содержать ни одного конечного множества.

Класс $\mathfrak{I}$ назовем *идеалом на* $\mathfrak{R}$, если

(1′) $\mathfrak{I}$ — непустой собственный подкласс $\mathfrak{R}$;

(2′) $(\forall X, Y \in \mathfrak{J})(X \cup Y \in \mathfrak{J})$, т. е. $\mathfrak{J}$ замкнут относительно объединений;

(3′) $(\forall X \in \mathfrak{J})(\forall Y \in \mathfrak{R})(Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathfrak{J})$, т. е. $\mathfrak{J}$ замкнуто относительно взятия подклассов.

$\mathfrak{J}$ называется *примарным идеалом*, если, кроме того,

(4′) $(\forall X \in \mathfrak{R})(X \in \mathfrak{J} \vee (\bigcup \mathfrak{R} \setminus X) \in \mathfrak{J})$.

Двойственность между фильтрами и идеалами настолько очевидна, что результаты о фильтрах могут быть непосредственно переведены в результаты о идеалах и наоборот. Поэтому мы не будем специально рассматривать в настоящем разделе идеалы.

Счетная последовательность классов $\{X_n; n \in FN\}$ называется *убывающей*, если $X_{n+1} \subseteq X_n$ для всякого n. Класс $\mathfrak{M}$ называется *ω-полным (сверху)*, если он непуст, ни один из его элементов не является конечным множеством и для всякой убывающей последовательности классов $\{X_n; n \in FN\}$ элементов класса $\mathfrak{M}$ существует элемент $X \in \mathfrak{M}$, такой, что $X \subseteq \bigcap\{X_n;\ n \in FN\}$.

Заметим, что всякий ω-полный ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{R}$ является нетривиальным.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{N}$ есть ω-полный подкласс $\mathfrak{R}$, такой, что для каждого бесконечного $X \in \mathfrak{R}$ существует $Y \in \mathfrak{N}$, такой, что $Y \subseteq X$. Тогда существует ω-полный ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{N}$ — несчетный класс. Пусть $\{X_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ есть нумерация его элементов. Сконструируем последовательность $\{Y_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ по рекурсии следующим образом: Y_α есть первый элемент $\mathfrak{N}$ (относительно данной нумерации), такой, что $Y_\alpha \subseteq \bigcap\{Y_\beta;\ \beta \in \alpha \cap \Omega\}$ и либо $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, либо $Y_\alpha \cap X_\alpha = \varnothing$. Очевидно, что Y_α существует для каждого $\alpha \in \Omega$ Положим $\mathfrak{M} = \{X \in \mathfrak{R};\ (\exists \alpha \in \Omega)(Y_\alpha \subseteq X)\}$. Легко проверить, что $\mathfrak{M}$ есть ω-полный ультрафильтр на $\mathfrak{R}$

Из аксиом о продолжении вытекает, что класс всех бесконечных множеств является ω-полным. Таким образом, получаем

Следствие. *Пусть x — бесконечное множество. Тогда существует ω-полный ультрафильтр Z на кольце $P(x)$ всех подмножеств x.*

РАЗДЕЛ 5. ОСНОВНЫЕ ЯЗЫКИ

Язык математики является одной из традиционных математических структур, и эта структура также подвергалась математическому исследованию. В этом разделе мы собираемся сконструировать основные языки для описания расширенного универсума. Сама конструкция проводится в рамках нашей теории.

Мы пользуемся формулами, чтобы выражать некоторые свойства множеств и классов. Формулы некоторого языка суть последовательности символов специального вида из некоторого алфавита, построенные в соответствии с точными синтаксическими правилами В каждом конкретном случае мы будем иметь дело с конечным алфавитом; тем не менее удобно использовать потенциально бесконечный алфавит.

Наш алфавит состоит из следующих систем знаков:

(1) Специальные символы $\in$, $=$, &, $\vee$ $\Rightarrow$, $\equiv$, $\neg$, $\exists$, $\forall$,), (.

(2) Переменные для множеств из универсума множеств $x_0, x_1, \ldots$.

(3) Переменные для классов из расширенного универсума $X_0, X_1, \ldots$.

(4) Константы для множеств из универсума множеств.

Так как наша цель — сконструировать язык внутри универсума множеств, то мы будем действовать аналогично тому, как мы поступали, когда конструировали натуральные числа. Некоторые множества мы идентифицируем со знаками. Это можно сделать различными способами; мы выбираем следующий:

(1) Множества $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$, ..., $\langle 10, 0\rangle$ суть коды знаков $\in$, $=$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$, $\neg$, $\exists$, $\forall$), (соответственно.

(2) $\langle \alpha, 1\rangle$ есть код переменной x_α для каждого $\alpha \in N$.

(3) $\langle \alpha, 2\rangle$ есть код переменной X_α для каждого $\alpha \in N$.

(4) $\langle x, 3\rangle$ есть код константы, обозначающей x для каждого элемента $x \in V$.

Положим $\mathrm{Const} = \{\langle x, 3\rangle;\ x \in V\}$.

Алфавит Alph — это класс, состоящий из всех множеств (1)—(4). *Слово* есть функция f, такая, что $\mathrm{dom}(f) \in N$ и $\mathrm{rng}(f) \subseteq \mathrm{Alph}$. Класс всех слов обозначим через Word.

С этого момента мы будем свободно использовать сами знаки и последовательности знаков вместо соответствующих множеств, так как необходимое кодирование множествами производится непосредственным образом.

Пусть C — класс.

Формулы языка L_C суть слова, получаемые по следующим правилам:

(1) *Атомарные формулы* языка L_C — это слова вида $\Gamma \in \Delta$, $\Gamma = \Delta$, $\Gamma \in X_i$, где Γ, Δ суть переменные или константы для элементов класса C.

(2) Если φ и ψ суть формулы языка L_C и Γ — переменная, то следующие слова суть *формулы* L_C: $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $\neg(\varphi)$, $(\exists\Gamma)\varphi$, $(\forall\Gamma)\varphi$.

Класс всех формул языка L_C также обозначим через L_C. Этот класс может быть определен с помощью рекурсии относительно N, и, следовательно, он теоретико-множественно определим.

Формула φ языка L_C называется *нормальной*, если φ не содержит кванторов, связывающих переменные для классов; формулу φ назовем *теоретико-множественной*, если она вовсе не содержит переменных по классам.

Через L обозначим класс формул, не содержащих констант. Конечно, он теоретико-множественно определим, $L=L_\varnothing$.

Мы будем свободно использовать общепринятый символизм. Так, обозначая некоторую формулу языка L_C через $\varphi(x_0, x_1)$, мы имеем в виду, что все переменные, входящие в φ и отличные от x_0, x_1, связаны кванторами (т. е. φ не содержит свободных переменных, отличных от x_0, x_1). Если $\varphi(x_0, x_1)$ — формула, а q — константа, то $\varphi(x_0, q)$ обозначает формулу, полученную из φ заменой всех свободных вхождений x_1 на q, и т. п.

Подобно натуральным числам, формулы конструируются внутри универсума множеств. Исследуем теперь язык L_C с точки зрения расширенного универсума.

Обозначим через FL_C класс (язык) всех формул языка L_C, таких, что

(1) φ — конечное множество (конечная последовательность),

(2) если переменная x_α или X_α входит в φ, то $\alpha \in FN$. Положим, далее, $FL = FL_\varnothing$. Очевидно, что FL — счетный класс.

Мы уже знаем, что некоторые свойства множеств (из универсума множеств) могут быть выражены с помощью теоретико-множественных формул языка L_C. Зададим теперь обратный вопрос, а именно, какие формулы языка L_C выражают свойства множеств. Вопрос состоит в том, какие формулы мы в состоянии читать и, в частности, понимать. Мы можем прочесть атомарные формулы; если мы можем прочесть φ и ψ, то мы можем прочесть и каждую формулу, построенную из них по правилу (2) определения формул Таким образом, каждая формула FL_C может быть понята Возможно, что и некоторые другие формулы могут быть поняты, но в настоящий момент мы не можем быть в этом уверены Позже мы увидим, что аксиома о продолжении делает эту гипотезу возможной

Теперь мы должны более точно охарактеризовать теоретико-множественно определимые классы В дальнейшем класс X мы называем теоретико множественно определимым (обозначение $Sd(X)$), если существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0) \in \mathrm{FL}_V$, такая, что $X = \{x_0;\ \varphi(x_0)\}$. Очевидно, что каждое множество есть теоретико-множественно определимый класс. Следующая теорема показывает, что наше определение теоретико-множественно определимых классов корректно:

Теорема. *Класс* $\{X;\ \mathrm{Sd}(X)\}$ *кодируем.*

Доказательство. Пусть K — класс всех формул $\varphi(x_0) \in \mathrm{FL}_V$ с одной выделенной свободной переменной. Определим отношение S с $\mathrm{dom}(S) \subseteq K$ индукцией относительно FN следующим образом: для атомарных φ мы положим $S``\{\varphi(x_0)\} = \{x_0;\ \varphi(x_0)\}$. Если φ есть $\varphi_1(x_0) \& \varphi_2(x_0)$, то мы положим

$$S``\{\varphi(x_0)\} = S``\{\varphi_1(x_0)\} \cap S``\{\varphi_2(x_0)\};$$

если φ есть $\neg\, \varphi_1(x_0)$, то мы положим

$$S``\{\varphi(x_0)\}\ V \setminus S``\{\varphi_1(x_0)\}.$$

Подобным же образом поступим и с другими логическими связками. Если $\varphi(x_0)$ есть $(\exists x_1)\, \varphi_1(x_0, x_1)$, то мы положим

$$S``\{\varphi(x_0)\} = \bigcup \{S``\{\varphi_1(x_0, q)\};\ q \in \mathrm{Const}\}.$$

Подобным же образом поступим с $\forall$. Аккуратное определение следует проводить индукцией по количеству кванторов в φ. Кодирующая пара $\langle K, S\rangle$ кодирует $\{X;\ \mathrm{Sd}(X)\}$.

Теперь следует переформулировать аксиому индукции таким образом, чтобы в ней фигурировали в точности теоретико-множественно определимые классы. В результате мы получим следующую формулировку:

Аксиома индукции

$$(\forall X)(\mathrm{Sd}(X) \,\&\, \varnothing \in X \,\&\, (\forall x \in X)(\forall y)(x \cup \{y\} \in X) \Rightarrow X = V).$$

Можно увидеть, что эта переформулировка не затрагивает ни один из конкретных результатов, полученных до сих пор. Ее следует учесть, если формализовать нашу теорию.

* * *

Класс X назовем *раскрытым* (revealed), если для каждого счетного класса $Y \subseteq X$ существует множество u, такое, что $Y \subseteq u \subseteq X$.

Теорема. *Пусть класс X таков, что $X \cap u$ есть множество для всякого множества u. Тогда X раскрыт.*

Доказательство. Пусть $Y \subseteq X$, Y счетно. Существует множество v, такое, что $Y \subseteq v$. Положим $u = X \cap v$. Тогда $Y \subseteq u \subseteq X$.

Следствие. *Каждый теоретико-множественно определимый класс раскрыт.*

Теорема. (1) *Если X и Y раскрыты, то раскрыт и класс $X \cup Y$.*

(2) *Если $\{X_n;\ n \in FN\}$ — последовательность раскрытых классов, то $\bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$ есть раскрытый класс.*

Доказательство. Докажем (2). Пусть Y — счетный подкласс класса $\bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$. Тогда существует последовательность $\{u_n;\ n \in FN\}$ множеств, такая, что $Y \subseteq u_n \subseteq X_n$ для всякого n. Таким образом, $Y \subseteq \bigcap \{u_n;\ n \in FN\}$. По следствию из аксиомы о продолжении существует множество u, такое, что $Y \subseteq u \subseteq \bigcap \{u_n;\ n \in FN\}$.

Теорема. *Пусть $\{X_n;\ n \in FN\}$ — последовательность раскрытых классов, такая, что $\bigcap \{X_n;\ n \leqslant m\}$ для каждого $m \in FN$ непусто. Тогда $\bigcap \{X_n;\ n \in FN\} \neq \varnothing$.*

Доказательство. Для каждого n выберем $x_n \in X_0 \cap \ldots \cap X_n$. Положим $Y_n = \{x_m,\ n \leqslant m\}$. Каждое Y_n не более чем счетно, и мы имеем $Y_n \subseteq X_n$ для всякого n. Таким образом, существует последовательность $\{u_n;\ n \in FN\}$ множеств, такая, что $Y_n \subseteq u_n \subseteq X_n$ для каждого n. Так как $x_n \in u_0 \cap \ldots \cap u_n$, то каждое конечное подсемейство $\{u_n;\ n \in FN\}$ имеет непустое пересечение. Из аксиомы о продолжении следует, что $\bigcap \{u_n;\ n \in FN\} \neq \varnothing$. Но $\bigcap \{u_n;\ n \in FN\} \subseteq \bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$.

Теорема. *Пусть $\{X_n;\ n \in FN\}$ — убывающая последовательность раскрытых классов. Положим $X = \bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$. Тогда $\operatorname{dom}(X) = \bigcap \{\operatorname{dom}(X_n);\ n \in FN\}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{dom}(X) \subseteq \bigcap \{\operatorname{dom}(X_n);\ n \in FN\}$. Пусть $x \in \bigcap \{\operatorname{dom}(X_n);\ n \in FN\}$. Тогда $\{X_n \cap (V \times \{x\});\ n \in FN\}$ является убывающей последовательностью раскрытых непустых классов и, следовательно, $\varnothing \neq \bigcap \{X_n \cap (V \times \{x\});\ n \in FN\} = X``\{x\}$.

Класс X есть по определению *σ-класс* (*π-класс*), если он является объединением (пересечением) счетной последовательности теоретико-множественно определимых классов. Аналогичным образом мы можем определить σπ-классы, πσ-классы и т. д.

Теорема. (1) *Класс всех σ-классов и класс всех π-классов являются кодируемыми.*

(2) *X есть σ-класс тогда и только тогда, когда он является объединением счетной возрастающей последовательности теоретико-множественно определимых классов. Аналогично X есть π-класс тогда и только тогда, когда он является пересечением счетной убывающей последовательности теоретико-множественно определимых классов.*

(3) *Объединение двух π-классов есть π-класс. Пересечение двух σ-классов есть σ-класс.*

(4) *Объединение счетной последовательности σ-классов есть σ-класс. Пересечение счетной последовательности π-классов есть π-класс.*

(5) *Если X, Y суть σ-классы (π-классы), то $X \times Y$ есть σ-класс (π-класс).*

(6) *Каждый π-класс раскрыт.*

(7) *Если X есть σ-класс (π-класс), то $\operatorname{dom}(X)$ также σ-класс (π-класс).*

Доказательство. (1)—(5) очевидны. (6) Каждый теоретико-множественно определимый класс раскрыт и раскрытые классы замкнуты относительно счетного пересечения. (7) Утверждение очевидно для σ-классов. Если X есть π-класс, то он является пересечением счетного количества раскрытых классов X_n, $n \in FN$, а для таких классов мы уже установили, что

$$\operatorname{dom}\left(\bigcap \{X_n;\ n \in FN\}\right) = \bigcap \{\operatorname{dom}(X_n);\ n \in FN\}.$$

Теорема. *X является одновременно σ-классом и π-классом тогда и только тогда, когда он теоретико-множественно определим.*

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ очевидна; мы докажем $\Rightarrow$. Пусть X есть одновременно σ-класс и π-класс. Тогда он раскрыт и представим в виде объединения возрастающей последовательности $\{X_n;\ n \in FN\}$ теоретико-множественно определимых классов. Докажем, что $X = X_n$ для некоторого n. Предположим, что X_n есть собственный подкласс X_{n+1} для каждого n. Пусть $\{y_n;\ n \in FN\}$ — последовательность, такая, что $y_n \in X_{n+1} \setminus X_n$ для каждого n. Пусть v — множество, такое, что $v \subseteq X$ и $y_n \in v$ для каждого n. Тогда $v \cap (V \setminus X_n) \neq \emptyset$ для каждого n; но так как каждый класс $v \cap (V \setminus X_n)$ раскрыт, то $v \cap \bigcap \{V \setminus X_n;\ n \in FN\} \neq \emptyset$ и, следовательно, $v \cap (V \setminus X) \neq \emptyset$, что противоречит $v \subseteq X$.

Глава III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Одной из важнейших целей математики является изучение феномена непрерывности. Если мы наблюдаем множество, но не в состоянии идентифицировать (различить) его индивидуальные элементы, потому что они лежат за горизонтом наших способностей наблюдения, мы сталкиваемся с феноменом непрерывности. Так, например, когда мы наблюдаем кучу песка с достаточно большого расстояния, она представляется нам непрерывной.

Трактуя феномен непрерывности математически, мы примем гипотезу, что всякий феномен непрерывности проистекает из такого наблюдения больших отдаленных множеств или классов. Такая гипотеза хорошо согласуется с целями нашей теории.

Мы заключаем, что феномен непрерывности связан с неразличимостью отдельных элементов наблюдаемого класса. Очевидно, что отношение неразличимости рефлексивно и симметрично. В этой главе мы ограничимся изучением транзитивных отношений неразличимости, т. е. отношений эквивалентности. Это позволит нам трактовать феномен непрерывности классически. Это достигается разложением феномена непрерывности в точки — специфические коды неразличимых элементов наблюдаемого класса.

Одним из характеристических свойств множества является его форма Форма множества в действительности зависит от способа его наблюдения и, таким образом, от соответствующего отношения неразличимости. Например, если мы наблюдаем книгу, состоящую из молекул, то мы воспринимаем ее форму совершенно не так, как ее воспринимал бы наблюдатель, имеющий объем молекулы. Нет нужды говорить, что мы не ограничиваемся при этом оптическими наблюдениями.

Настоящая глава посвящена изучению свойств формы, зависящих только от отношения эквивалентности неразличимости, т. е. топологическим проблемам Но мы не ограничиваемся исследованием формы множеств, а исследуем также и форму классов.

РАЗДЕЛ 1. ОТНОШЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМОСТИ

Математическим содержанием понятия неразличимости является отношение эквивалентности, обладающее некоторыми дополнительными свойствами Каждое наблюдение дает последовательность критериев различимости. Два объекта неразличимы относительно такого наблюдения, если ни один из критериев этого наблюдения не в состоянии их различить. Таким образом, мы приходим к требованию, что отношение неразличимости должно быть пересечением счетного количества теоретико-множественно определимых классов.

Класс $\doteq$ есть *π-эквивалентность*, если $\doteq$ есть π-класс и отношение эквивалентности. Последовательность $\{R_n; n \in FN\}$ есть *порождающая последовательность* эквивалентности $\doteq$, если выполняются следующие условия:

(1) R_n — теоретико-множественно определимое рефлексивное и симметричное отношение для каждого n.

(2) Для каждого n и всяких x, y, z из $\langle x, y\rangle \in R_{n+1}$ и $\langle y, z\rangle \in R_{n+1}$ следует $\langle x, z\rangle \in R_n$; $R_0 = V^2$.

(3) $\doteq$ есть пересечение всех классов R_n.

Если $\{R_n; n \in FN\}$ — порождающая последовательность для $\doteq$, то $\doteq$ есть π-эквивалентность, $R_{n+1} \subseteq R_n$ для всякого n и $x \doteq y$ имеет место тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle \in R_n$ для всякого n.

Теорема. *Каждая π-эквивалентность имеет порождающую последовательность.*

Доказательство. Пусть $\doteq$ есть π-эквивалентность Тогда она является пересечением счетного количества теоретико-множественно определимых классов $\{X_n; n \in FN\}$. Можно предположить без потери общности, что это убывающая последовательность. Положим $S_n = X_n \cap X_n^{-1}$. Тогда $\{S_n; n \in FN\}$ удовлетворяет всем упомянутым свойствам последовательности $\{X_n; n \in FN\}$ и, кроме того, каждое отношение S_n рефлексивно и симметрично Мы утверждаем, что для всякого m существует $n > m$, такое, что для всех x, y, z если $\langle x, y\rangle \in S_n$ и $\langle y, z\rangle \in S_n$, то $\langle x, z\rangle \in S_m$. Предположим противное, и пусть для каждого $n > m$ найдутся x_n, y_n, z_n, такие, что $\langle x_n, y_n\rangle \in S_n$, $\langle y_n, z_n\rangle \in S_n$, но $\langle x_n, z_n\rangle \notin S_m$ По аксиоме о продолжении существуют x, y, z, такие, что $\langle x, z\rangle \notin S_m$, но $\langle x, y\rangle \in S_n$ и $\langle y, z\rangle \in S_n$ для всех $n > m$. Таким образом, $x \doteq y$ и $y \doteq z$, и, следовательно, $x \doteq z$ и $\langle x, z\rangle \in S_m$, что дает противоречие Тем самым наше утверждение доказано Значит, существует подпоследовательность $\{R_n; n \in FN\}$

последовательности $\{S_n;\ n \in FN\}$, такая, что $\bigcap\ \{R_n;\ n \in FN\} = \bigcap \{S_n;\ n \in FN\}$ и для каждого n и любых x, y, z из $\langle x, y\rangle \in R_{n+1}$ и $\langle y, z\rangle \in R_{n+1}$ следует $\langle x, z\rangle \in R_n$. Это и завершает доказательство.

Пусть $\{R_n;\ n \in FN\}$ — порождающая последовательность отношения $\doteq$, и пусть u — множество. Последовательность $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$ есть *продолжение* $\{R_n;\ n \in FN\}$ на u, если выполняются следующие условия:

(0) $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$ есть множество и $\tau \in N \setminus FN$.

(1) r_α — рефлексивное и симметричное отношение на u для всякого $\alpha \leqslant \tau$.

(2) Для всякого $\alpha < \tau$ и всяких x, y, z из $\langle x, y\rangle \in r_{\alpha+1}$ и $\langle y, z\rangle \in r_{\alpha+1}$ следует $\langle x, z\rangle \in r_\alpha$.

(3) $r_n = R_n \cap u^2$ для всякого n.

(4) $r_\tau = \{\langle x, x\rangle;\ x \in u\}$.

Следующая теорема непосредственно вытекает из аксиомы о продолжении.

Теорема. *Пусть $\{R_n;\ n \in FN\}$ — порождающая последовательность отношения $\doteq$. Тогда для каждого u существует последовательность $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$, продолжающая указанную выше последовательность на u.*

Сформулируем еще одно условие на отношение неразличимости. Оно вытекает из следующего рассмотрения: ни одно бесконечное множество не лежит перед горизонтом. Таким образом, всякое бесконечное множество наблюдаемых объектов содержит по крайней мере одну пару неразличимых элементов.

Эквивалентность $\doteq$ назовем *компактной*, если для каждого бесконечного множества u существуют x, $y \in u$, такие, что $x \neq y$ и $x \doteq y$.

Пусть R — симметричное отношение. Класс X есть по определению R-сеть, если не существует различных элементов x, $y \in X$, таких, что $\langle x, y\rangle \in R$; X есть *максимальная* R-сеть *на* Z, если $X \subseteq Z$ и для всякого $z \in Z$ существует $x \in X$, такое, что $\langle x, z\rangle \in R$.

Очевидно, каждый подкласс R-сети является R-сетью.

Отношение R является по определению *верхней границей* эквивалентности $\doteq$, если оно симметрично, теоретико-множественно определимо и $\doteq$ есть подкласс R, т. е. $x \doteq y$ влечет $\langle x, y\rangle \in R$ для всех x и y.

Теорема. *Пусть $\doteq$ есть компактное отношение эквивалентности, и пусть R — его верхняя граница. Тогда существует конечное число n, такое, что для каждой R-сети X имеем $X \precsim n$.*

Доказательство. Предположим, что для каждого n существует R-сеть u, имеющая в точности n элементов. По аксиоме о продолжении существует $\alpha \in N \setminus FN$ и R-сеть u, такая, что $\alpha \widehat{\approx} u$. Таким образом, u бесконечно и существуют $x, y \in u$, такие, что $x \neq y$ и $x \doteq y$. Отсюда вытекает, что $\langle x, y \rangle \in R$ и, следовательно, $x = y$ — противоречие.

Следствие. *В предположениях предыдущей теоремы каждая R-сеть есть множество.*

Теорема. *Пусть $\doteq$ есть компактное отношение эквивалентности и R — его верхняя граница. Тогда для каждого Z существует множество u, являющееся максимальной R-сетью на Z.*

Доказательство. Возьмем R-сеть $u \subseteq Z$, имеющую максимально возможное число элементов.

Теорема. *Пусть $\{R_n;\ n \in FN\}$ — порождающая последовательность отношения эквивалентности $\doteq$. Пусть $\{u_n;\ n \in FN\}$ — последовательность множеств, такая, что для всякого n соответствующее u_n есть максимальная R_n-сеть на X. Если $\bigcup \{u_n;\ n \in FN\} \subseteq u$, то для каждого $x \in X$ существует $y \in u$, такое, что $x \doteq y$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Существует последовательность $\{y_n;\ n \in FN\}$, такая, что $y_n \in u_n$ и $\langle x, y_n \rangle \in R_n$ для всякого n. Таким образом, $y_n \in u$ для всякого n; по аксиоме о продолжении найдется $y \in u$, такое, что $\langle x, y \rangle \in R_n$ для всякого n. Следовательно, $x \doteq y$.

Теорема. *Пусть $\doteq$ — некоторая π-эквивалентность. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(1) *$\doteq$ компактна;*

(2) *для всякого $\gamma \in N \setminus FN$ существует множество u, такое, что $u \widehat{\underset{\sim}{<}} \gamma$ и для всякого x существует $y \in u$, для которого $x \doteq y$;*

(3) *каждое бесконечное множество u содержит бесконечное подмножество v, такое, что $x \doteq y$ для всех $x, y \in v$.*

Доказательство. Пусть $\{R_n;\ n \in FN\}$ — порождающая последовательность для $\doteq$. Импликация (3)$\Rightarrow$(1) тривиальна. Докажем (1)$\Rightarrow$(2). Пусть $\{u_n;\ n \in FN\}$ — последовательность конечных множеств, такая, что для всякого n множество u_n является максимальной R_n-сетью на V. Положим $Y = \bigcup \{u_n;\ n \in FN\}$. Тогда Y не более чем счетно. Следовательно, для всякого бесконечного γ существует множество u, такое, что $Y \subseteq u$ и $u \mathrel{\widehat{\lesssim}} \gamma$. По предыдущей теореме для всякого x существует $y \in u$, такое, что $x \doteq y$.

(2)$\Rightarrow$(3). Пусть u — бесконечное множество. Возьмем $\gamma \notin FN$, такое, что $\gamma^2 \mathrel{\widehat{\lesssim}} u$. Пусть w таково, что $w \mathrel{\widehat{\lesssim}} \gamma$ и $(\forall x)(\exists y \in w)(x \doteq y)$, и $\{r_\alpha; \alpha \leqslant \tau\}$ — продолжение последовательности $\{R_n; n \in FN\}$ на $u \cup w$. Для $x \in u$ пусть $g(x)$ есть максимальное $\alpha \leqslant \tau$, такое, что $w \cap \{y \in u \cup w, \langle x, y\rangle \in r_\alpha\} \neq \varnothing$. Для всякого $x \in u$ соответствующее $g(x)$ бесконечно. Фиксируем линейное упорядочение на w, являющееся множеством, и для всякого $x \in u$ пусть $f(x)$ есть первый элемент w, такой, что $\langle x, f(x)\rangle \in r_{g(\alpha)}$. Очевидно, что $x \doteq f(x)$ для всякого $x \in u$. Так как f отображает u в w и так как $w \mathrel{\widehat{\lesssim}} \gamma$ и $\gamma^2 \mathrel{\widehat{\lesssim}} u$, существует $y \in w$, такое, что множество $v = \{x \in u; f(x) = y\}$ бесконечно. Для всякого $x \in v$ тогда $x \doteq f(x)$; таким образом, для всех $x_1, x_2 \in v$ имеем $x_1 \doteq x_2$.

Отношение $\doteq$ называется *отношением неразличимости* или *эквивалентностью неразличимости, если* $\doteq$ есть компактная π-эквивалентность.

Из предыдущей теоремы следует, что отношение бесконечной близости рациональных чисел, определенное во втором разделе второй главы, является отношением неразличимости.

Теорема. *Пусть $\{=_n; n \in FN\}$ — последовательность отношений неразличимости. Тогда $\bigcap \{=_n; n \in FN\}$ есть также отношение неразличимости.*

Доказательство. Очевидно, что $\bigcap \{=_n; n \in FN\}$ является отношением эквивалентности и π-классом. Остается доказать, что это пересечение компактно. Пусть u — бесконечное множество. Существует убывающая последовательность $\{v_n; n \in FN\}$ подмножеств u, такая, что для каждого n и любых $x, y \in v_n$ имеем $x =_n y$ и v_n бесконечно. Пересечение множеств v_n имеет по меньшей мере два элемента $x \neq y$ (по аксиоме о продолжении). Таким образом, $x, y \in u$ и $x =_n y$ для каждого n.

Мы говорим, что эквивалентность $=_1$ *тоньше*, чем эквивалентность $=_2$ (а также что $=_2$ *грубее*, чем $=_1$), если $x =_1 y$ влечет $x =_2 y$ для всех x, y.

Теорема. *Если $=_1$ тоньше, чем $=_2$, и $=_1$ компактна, то $=_2$ также компактная эквивалентность.*

РАЗДЕЛ 2. ФИГУРЫ

Во всем этом разделе $\doteq$ обозначает некоторое фиксированное отношение неразличимости, а $\{R_n;\, n \in FN\}$ — порождающая последовательность этого отношения. Положим

$$o(x, n) = \{y;\, \langle x, y\rangle \in R_n\}.$$

К понятию фигуры мы приходим с помощью следующего наблюдения. Два неразличимых класса имеют одинаковую форму и определяют одну и ту же фигуру. Понятие фигуры вводим так:

Класс X назовем *фигурой*, если вместе с каждым элементом x этот класс содержит и все элементы y, такие, что $x \doteq y$.

Мы используем множества из универсума множеств одновременно и для кодирования объектов, и для кодирования классов объектов. В первом случае термин «точка» используется как синоним термина «множество».

Мы не всегда используем все свойства отношения неразличимости и, следовательно, можем изучать и более общие топологии, как и в канторовской теории множеств. Автор развил общую топологию в альтернативной теории множеств; интересные результаты в такой топологии получил Дж. Чудачек. Но мы не будем развивать здесь общую топологию, пока не будут выявлены более глубокие мотивы для ее изучения в альтернативной теории множеств.

Теорема. (1) *$\emptyset$ и V суть фигуры. Если X, Y — фигуры, то $X \cup Y$, $X \cap Y$ и $X \setminus Y$ также фигуры.*

(2) *Пусть $\varphi(X)$ — свойство классов расширенного универсума, такое, что из $\varphi(X)$ следует, что X — фигура. Тогда $\bigcup \{X;\, \varphi(X)\}$ и $\bigcap \{X;\, \varphi(X)\}$ суть фигуры.*

Определим *монаду* точки x следующим образом: $\mathrm{Mon}(x) = \{y;\, y \doteq x\}$.

Очевидно, что $\mathrm{Mon}(x)$ есть фигура для каждого x. Класс X является фигурой тогда и только тогда, когда монада каждого элемента класса X есть подкласс этого класса.

Фигура класса X определяется следующим образом:

$$\mathrm{Fig}(X) = \{y;\, (\exists x \in X)(x \doteq y)\},$$

Теорема. *Для всяких X, Y и x*

(1) $\mathrm{Fig}(X)$ *есть фигура*;

(2) *если $X \subseteq Y$, то $\mathrm{Fig}(X) \subseteq \mathrm{Fig}(Y)$*;

(3) *если $X \subseteq Y$ и Y — фигура, то $\mathrm{Fig}(X) \subseteq Y$*;

(4) $\mathrm{Fig}(X \cup Y) = \mathrm{Fig}(X) \cup \mathrm{Fig}(Y)$;

(5) $\mathrm{Fig}(X) \cap \mathrm{Fig}(Y) = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fig}(X) \cap Y = \emptyset$;

(6) $\mathrm{Mon}(x) = \mathrm{Fig}(\{x\})$.

Теорема. *Если класс X теоретико-множественно определим, то $\mathrm{Fig}(X)$ есть π-класс.*

Доказательство. Положим $X_n = \bigcup \{o(x, n);\ x \in X\}$. Каждый класс X_n теоретико-множественно определим, $X_{n+1} \subseteq X_n$ и $\mathrm{Fig}(X) \subseteq \bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$. Докажем обратное включение. Пусть z — такая точка, что $z \in X_n$ для всякого n. Таким образом, для каждого n существует некоторое $x_n \in X_n$, такое, что $z \in o(x_n, n)$. Пусть $u \subseteq X$ таково, что $x_n \in u$ для каждого n, и пусть $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$ — продолжение $\{R_n;\ n \in FN\}$ на u. Существуют $\alpha \notin FN$ и $x \in u$, такие, что $\langle x, z\rangle \in r_\alpha$; следовательно, $x \in X$ и $z \in o(x, n)$ для каждого n, что влечет $x \doteq z$, а значит, $z \in \mathrm{Fig}(X)$.

Далее мы будем вводить различные естественные понятия; представляется излишним приводить подробную мотивировку для каждого из них.

Классы X и Y назовем *отделимыми* (обозначение $\mathrm{Sep}(X, Y)$), если существует теоретико-множественно определимый класс Z, такой, что $\mathrm{Fig}(X) \subseteq Z$ и $\mathrm{Fig}(Y) \cap Z = \varnothing$.

Очевидно, что X и Y отделимы тогда и только тогда, когда отделимы классы $\mathrm{Fig}(X)$ и $\mathrm{Fig}(Y)$.

Теорема. *Пусть X и Y — две фигуры, являющиеся одновременно и π-классами. Тогда X и Y отделимы в том и только в том случае, когда они дизъюнктны.*

Доказательство. Предположим, что $X \cap Y = \varnothing$. Пусть $X = \bigcap \{X_n;\ n \in FN\}$, $Y = \bigcap \{Y_n;\ n \in FN\}$, где все X_n и Y_n теоретико-множественно определимы и $X_{n+1} \subseteq X_n$, $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ для всякого n. Если $X_n \cap Y_n$ было непусто для каждого n, то мы имели бы $\bigcap \{X_n \cap Y_n;\ n \in FN\} \neq \varnothing$ и, таким образом, $X \cap Y \neq \varnothing$. Следовательно, $X_n \cap Y_n = \varnothing$ для некоторого n и, значит, X и Y отделимы. Обратная импликация очевидна.

Замыкание класса X обозначается через $\bar{X}$ и определяется следующим образом: $\bar{X} = \{x;\ \neg\, \mathrm{Sep}(\{x\}, X)\}$.

Теорема. *Для любых X, Y*

(1) *$\bar{X}$ есть фигура;*

(2) *если $\mathrm{Fig}(X) = \mathrm{Fig}(Y)$, то $\bar{X} = \bar{Y}$;*

(3) *$X \subseteq \bar{X}$;*

(4) *если $X \subseteq Y$, то $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$;*

(5) *$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$.*

Теорема. *$x \in \bar{X}$ тогда и только тогда, когда $o(x, n) \cap X \neq \varnothing$ для каждого n.*

Доказательство. Допустим, что $x \in \bar{X}$, и пусть n таково, что $o(x, n) \cap X = \varnothing$. Докажем, что $o(x, n+1) \cap$

$\mathrm{Fig}(X) = \varnothing$. Предположим, что $z \in o(x, n+1) \cap \mathrm{Fig}(X)$. Тогда существует $y \in X$, такое, что $y \doteq z$ и, таким образом, $\langle y, z\rangle \in R_{n+1}$. Но тогда $\langle x, y\rangle \in R_n$ и $y \in o(x, n) \cap X$ — противоречие.

Обратно, пусть $o(x, n) \cap X \neq \varnothing$ для всякого n. Допустим, что $x \notin \bar{X}$; тогда существует теоретико-множественно определимый класс Z, такой, что $\mathrm{Mon}(x) \subseteq Z$ и $Z \cap \mathrm{Fig}(X) = \varnothing$. Но $o(x, n) \cap (V \setminus Z) \neq \varnothing$ для всякого n. Таким образом, существует $y \in V \setminus Z$, такое, что $y \doteq z$, и, следовательно, $\mathrm{Mon}(x) \cap (V \setminus Z) \neq \varnothing$ — противоречие.

Теорема. *$\bar{\bar{X}} = \bar{X}$ для всякого класса X.*

Доказательство. Очевидно, что $\bar{X} \subseteq \bar{\bar{X}}$. Пусть $z \in \bar{\bar{X}}$. Возьмем n; существует $y \in o(z, n+1) \cap \bar{X}$. Так как $y \in \bar{X}$, существует $x \in X$, такое, что $x \in o(y, n+1) \cap X$. Отсюда вытекает, что $x \in o(z, n)$ и, следовательно, $o(z, n) \cap X \neq \varnothing$. Мы доказали, что $z \in \bar{X}$.

Заметим, что операция замыкания у нас получается из отношения неразличимости в отличие от классической топологии, где операция замыкания берется в качестве основной операции.

Класс Y *плотен* в X, если $Y \subseteq X \subseteq \bar{Y}$. Очевидно, что если Y плотен в X, то $\bar{Y} = \bar{X}$.

Теорема. *Пусть $\{u_n;\ n \in FN\}$ — последовательность классов, такая, что u_n является максимальной R_n-сетью на X для всякого n. Тогда $\bigcup \{u_n;\ n \in FN\}$ плотно в X.*

Доказательство. Очевидно, что $\bigcup \{u_n;\ n \in FN\} \subseteq X$. Пусть $x \in X$. Тогда для всякого n существует $y_n \in u_n$, такое, что $\langle x, y_n\rangle \in R_n$. Это означает, что $o(x, n) \cap \bigcup \{u_n;\ n \in FN\} \neq \varnothing$ для всякого n и, следовательно, x принадлежит замыканию $\bigcup \{u_n;\ n \in FN\}$.

Следствие. *Каждый класс X имеет плотный подкласс Y, который, самое большее, счетен.*

Теорема. *Пусть X не более чем счетен. Тогда существует множество u, такое, что X плотен в u.*

Доказательство. Пусть $\{u_n;\ n \in FN\}$ — последовательность максимальных R_n-сетей на X. Положим $Y = \bigcup \{u_n;\ n \in FN\}$. Так как Y плотен в X, имеем $\bar{X} = \bar{Y}$. Пусть v — множество, такое, что $X \subseteq v$. Положим $v_n = \{y \in v;\ (\exists x \in u_n)(\langle x, y\rangle \in R_n)\}$; тогда $X \subseteq v_n \subseteq v$. Таким образом, существует множество u, такое, что $X \subseteq u \subseteq \bigcap \{v_n;\ n \in FN\}$. Для каждого n множество u_n есть максимальная R_n-сеть на u Следовательно, Y плотен в u и $\bar{u} = \bar{Y} = \bar{X}$

Теорема. *Пусть X — фигура Тогда следующие условия эквивалентны*

(1) *X есть фигура некоторого множества u,*

(2) *X есть π-класс,*

(3) *X раскрыт,*

(4) *$X = \bar{X}$*

Доказательство (1)$\Rightarrow$(2), так как фигура каждого теоретико множественно определимого класса есть π класс

Импликация (2)$\Rightarrow$(3) тривиальна, так как всякий π-класс раскрыт

(3)$\Rightarrow$(4) Пусть X раскрыт, и предположим, что $x \notin \bar{X}$ Тогда X и $\mathrm{Mon}(x)$ — дизъюнктные классы и $\mathrm{Mon}(x)$ есть π-класс Пусть $\mathrm{Mon}(x) = \bigcap \{Z_n, n \in FN\}$, где $\{Z_n, n \in FN\}$ — убывающая последовательность теоретико множественно определимых классов Если бы для всякого n было $Z_n \cap X \neq \varnothing$, то пересечение $\bigcap \{Z_n, n \in FN\} \cap X$ также было бы непустым. Таким образом, существует n, такое, что $Z_n \cap X = \varnothing$ Значит, $\{x\}$ и X отделены и $x \notin \bar{X}$

(4)$\Rightarrow$(1) Пусть $X = \bar{X}$, и пусть Y — не более чем счетный плотный подкласс X По предыдущей теореме существует множество u, такое, что Y плотен в u и, таким образом, $\bar{Y} = \bar{u}$ и $\bar{u} = X$ Так как $\mathrm{Fig}(u)$ есть π класс, то $\mathrm{Fig}(u) = \overline{\mathrm{Fig}(u)}$ (в силу импликации (2)$\Rightarrow$(4), которая уже доказана) Таким образом, $\bar{u} = \overline{\mathrm{Fig}(u)} = \mathrm{Fig}(u)$ и, следовательно, $X = \mathrm{Fig}(u)$

Фигура X называется *замкнутой*, если она обладает одним (и, следовательно, всеми другими) из свойств, указанных в предыдущей теореме

В частности, $\varnothing$, V замкнуты, если X и Y — замкнутые классы, то X и Y отделяются тогда и только тогда, когда они дизъюнктны По предыдущей теореме класс всех замкнутых фигур кодируем

Теорема. *Пусть $\varphi(X)$ — свойство классов расширенного универсума, такое, что из $\varphi(X)$ следует $X = \bar{X}$ Тогда класс $\bigcap \{X, \varphi(X)\}$ есть замкнутая фигура*

Доказательство Положим $Y = \bigcap \{X, \varphi(X)\}$ По предыдущей теореме Y есть пересечение семейства фигур и, следовательно, Y — фигура Для каждого X, удовлетворяющего условию φ, имеем $Y \subseteq X$ и $\bar{Y} \subseteq X$, таким образом, $\bar{Y} \subseteq \bigcap \{X, \varphi(X)\} = Y$.

Теорема. *Существует не более чем счетный класс Z, такой, что для каждой замкнутой фигуры X*

$$X = \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z \ \&\ X \subseteq \mathrm{Fig}(u)\}.$$

Доказательство. Пусть Y — плотный подкласс V, который не более чем счетен. Для всякого $y \in Y$ пусть $u(y, n)$ есть множество, такое, что $\mathrm{Fig}(u(y, n)) = \mathrm{Fig}(V \setminus o(y, n))$. Такое множество существует.) Положим $Z = \{u(y, n);\ y \in Y \ \&\ n \in FN\}$. Пусть X — замкнутая фигура. Остается доказать, что для $x \notin X$ существует $y \in Y$ и $n \in FN$, такие, что $X \subseteq \mathrm{Fig}(u(y, n))$, причем $x \notin \mathrm{Fig}(u(y, n))$. Существует n, такое, что $o(x, n) \cap X = \emptyset$. Существует $y \in Y$, такое, что $\langle x, y\rangle \in R_{n+2}$. Таким образом, $x \in o(y, n+2)$; далее, $o(y, n+1) \subseteq o(x, n)$ и, следовательно, $X \subseteq \mathrm{Fig}(u(y, n+1))$. Мы докажем, что $x \notin \mathrm{Fig}(u(y, n+1))$. Допустим противное. Тогда существует $z \notin o(y, n+1)$, такой, что $x \doteq z$. Но $\langle y, x\rangle \in R_{n+2}$ и $\langle x, z\rangle \in R_{n+2}$, следовательно, $\langle y, z\rangle \in R_{n+1}$ — противоречие. Это и завершает доказательство.

Теорема. *Для всякого класса Z существует его не более чем счетный подкласс Z', для которого*

$$\bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z\} = \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z'\}.$$

Доказательство. Пусть Z_1 — класс, существование которого гарантируется предыдущей теоремой. Положим $Z_2 = \{u \in Z_1;\ (\forall v \in Z)(\mathrm{Fig}(v) \subseteq \mathrm{Fig}(u))\}$. Для всякого $u \in Z_2$ пусть u' обозначает фиксированный элемент Z, такой, что $\mathrm{Fig}(u') \subseteq \mathrm{Fig}(u)$. Положим $Z' = \{u';\ u \in Z_2\}$. Остается доказать, что $x \in \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z'\}$ влечет $x \in (\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z\}$. Пусть x таково, что $x \notin \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z\}$. Тогда существует $u \in Z$, такое, что $x \notin \mathrm{Fig}(u)$. Таким образом, существует такое $v \in Z_1$, что $x \notin \mathrm{Fig}(v)$ и $\mathrm{Fig}(u) \subseteq \mathrm{Fig}(v)$; так как $v \in Z_2$, то $\mathrm{Fig}(v') \subseteq \mathrm{Fig}(v)$; следовательно, $x \notin \mathrm{Fig}(v')$ и $x \notin \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z'\}$. Это и завершает доказательство.

Класс Z назовем *центрированным*, если $\emptyset \neq Z$ и для каждого конечного непустого подмножества w класса Z имеет место $\bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in w\} \neq \emptyset$.

Теорема. *Если Z — центрированный класс, то*

$$\bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z\} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Пусть Z' — не более чем счетный подкласс Z, такой, что $\bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z\} = \bigcap \{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z'\}$. Так как $\mathrm{Fig}(u)$ есть π-класс для каждого u и $\{\mathrm{Fig}(u);\ u \in Z'\}$ — не более чем счетный класс, такой, что пересечение произвольного конечного семейства элементов этого класса непусто, то пересечение $\bigcap\{\mathrm{Fig}(u);\ u\in Z'\}$ также должно быть непустым.

Эквивалентность-степень $\doteq_p$ определяется следующим образом:

$$u \doteq_p v \equiv \mathrm{Fig}(u) = \mathrm{Fig}(v).$$

Теорема. *$\doteq_p$ есть π-эквивалентность.*

Доказательство. Положим $\langle u, v\rangle \in R_n^p$ тогда и только тогда, когда $(\forall x\in u)(\exists y\in v)(\langle x, y\rangle\in R_n)\ \&\ (\forall y\in v)(\exists x\in u)$ $(\langle x, y\rangle\in R_n)$. Для всякого n класс R_n^p теоретико-множественно определим и $R_{n+1}^p\subseteq R_n^p$. Легко проверить, что $\mathrm{Fig}(u)=\mathrm{Fig}(v)$ тогда и только тогда, когда $\langle u, v\rangle\in R_n^p$ для каждого n. Таким образом $\doteq_p$ совпадает с классом $\bigcap\{R_n^p;\ n\in FN\}$.

Теорема. *Отношение $\doteq_p$ компактно.*

Доказательство. Согласно теореме из первого раздела, достаточно для каждого $\gamma\notin FN$ найти множество w, такое, что $w \mathrel{\widehat{\underset{\sim}{<}}} \gamma$ и для всякого u существует $v\in w$, для которого $\mathrm{Fig}(u)=\mathrm{Fig}(v)$. Пусть $\gamma\notin FN$. Возьмем $\gamma_0\notin FN$, такое, что $2^{\gamma_0} \mathrel{\widehat{\underset{\sim}{<}}} \gamma$. Пусть w_0 — множество, имеющее не более γ_0 элементов и такое, что $(\forall x)(\exists y\in w_0)(x\doteq y)$. Положим $w=P(w_0)$. Тогда w имеет не более γ элементов. Пусть u — множество и $\{r_\alpha;\ \alpha\leqslant\tau\}$ — продолжение последовательности $\{R_n;\ n\in FN\}$ на $u\cup w_0$. Пусть f — функция, являющаяся множеством и сопоставляющая каждому $x\in u$ элемент $f(x)\in w_0$ таким образом, что коль скоро $\langle x, y\rangle\in r_\alpha$ для $y\in w_0$ и $\alpha\leqslant\tau$, то $\langle x, f(x)\rangle\in r_\alpha$. Ясно, что такая функция f существует, и для всякого $x\in u$ имеем $f(x)\doteq x$. Следовательно, полагая $v=f``u$, получим $v\subseteq w_0$, т. е. $v\in w$ и $\mathrm{Fig}(v)=\mathrm{Fig}(u)$.

РАЗДЕЛ 3. СВЯЗНОСТЬ

Мы основываем наше изучение связности на понятии связного множества. Следующее определение не нуждается в разъяснениях:

Множество *u связно* (обозначение: $\mathrm{Cntd}(u)$), если для каждого непустого собственного подмножества v множества u существуют $x\in v$ и $y\in u\setminus v$, такие, что $x\doteq y$.

Полезно ввести также следующее понятие, параметризующее понятие связности:

$\mathrm{Cntd}(u, n)$ тогда и только тогда, когда для всякого непустого собственного подмножества v множества u существвуют $x \in v$ и $y \in u \setminus v$, такие, что $\langle x, y \rangle \in R_n$.

Теорема. *u связно тогда и только тогда, когда* $(\forall n)\,\mathrm{Cntd}(u, n)$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Допустим, что $\mathrm{Cntd}(u, n)$ для всякого n, и пусть v — собственное непустое подмножество u. Для всякого n пусть x_n, y_n таковы, что $x_n \in v$, $y_n \in u \setminus v$ и $\langle x_n, y_n \rangle \in R_n$. По аксиоме о продолжении существуют x, y, такие, что $x \in v$, $y \in u \setminus v$ и $\forall n\ \langle x, y \rangle \in R_n)$, таким образом, $x \doteq y$.

Теорема. *Если u — множество и существуют две дизъюнктные замкнутые фигуры X, Y, такие, что $u \subseteq X \cup Y$ и $X \cap u$ и $Y \cap u$ одновременно непусты, то u несвязно.*

Доказательство. $X \cap u$ и $Y \cap u$ суть π-классы; так как $Y \cap u = u \setminus (X \cap u)$, то $Y \cap u$ есть одновременно и σ-класс. Таким образом $Y \cap u$ теоретико-множественно определим. Так как $Y \cap u$ является также и полумножеством, то $Y \cap u$ — множество. Подобным же образом $X \cap u$ — множество. Так как $\mathrm{Fig}(X \cap u) \subseteq X$ и $\mathrm{Fig}(Y \cap u) \subseteq Y$, то $\mathrm{Fig}(X \cap u) \cap \mathrm{Fig}(Y \cap u) = \varnothing$. Следовательно, u несвязно.

Фигура X по определению *связна*, если для каждых x, $y \in X$ существует связное множество $u \subseteq X$, такое, что x, $y \in u$.

Как мы увидим ниже наше определение связных фигур согласуется с классическим определением связности для замкнутых фигур. Другие связные фигуры соответствуют так называемым полуконтинуумам классической топологии.

Теорема. *Пусть $X = \mathrm{Fig}(u)$. Тогда X связно в том и только том случае, когда u связно как множество.*

Доказательство. Если $\mathrm{Cntd}(u)$ и $x, y \in X$, то очевидно, что $\mathrm{Cntd}(u \cup \{x, y\})$, так что X — связная фигура. Обратно, предположим, что u несвязно как множество, и пусть v — непустое собственное подмножество u, такое, что $\mathrm{Fig}(v) \cap \mathrm{Fig}(u \setminus v) = \varnothing$. Возьмем $x \in \mathrm{Fig}(v)$ и $y \in \mathrm{Fig}(u \setminus v)$. Пусть $w \subseteq X$ и $x, y \in w$. Тогда $w \in \mathrm{Fig}(v) \cup \mathrm{Fig}(u \setminus v)$, $w \cap \mathrm{Fig}(v) \neq \varnothing$ и $w \cap \mathrm{Fig}(u \setminus v) \neq \varnothing$. Следовательно, по предыдущей теореме w несвязно. Значит, X — несвязная фигура.

Теорема. *Если* $\mathrm{Fig}(v) \subseteq \mathrm{Fig}(u)$, *то существует $w \subseteq u$, такое, что* $\mathrm{Fig}(v) = \mathrm{Fig}(w)$.

Доказательство. Пусть $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$ — продолжение $\{R_n;\ n \in FN\}$ на $u \cup v$. Пусть f — функция-множество, определенная на v и такая, что для всякого $x \in v$ имеем $f(x) \in u$ и коль скоро $\langle x, y\rangle \in r_\alpha$ для некоторых $y \in u$ и $\alpha \leqslant \tau$, то $\langle x, f(x)\rangle \in r_\alpha$. (Существование такой функции очевидно.) Так как $\mathrm{Fig}(v) \subseteq \mathrm{Fig}(u)$, то $x \doteq f(x)$ для каждого $x \in v$. Полагая $w = f``v$, имеем $w \subseteq u$ и $\mathrm{Fig}(w) = \mathrm{Fig}(v)$.

Теорема. *Если $\{X_n; n \in FN\}$ — убывающая последовательность замкнутых связных фигур, то $\bigcap \{X_n; n \in FN\}$ есть замкнутая связная фигура.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\bigcap \{X_n; n \in FN\}$ связно. Пусть $x, y \in \bigcap \{X_n; n \in FN\}$. По предыдущей теореме существует убывающая последовательность $\{u_n; n \in FN\}$ связных множеств, такая, что $\mathrm{Fig}(u_n) = X_n$ и $x, y \in u_n$ для всякого n. В частности, $\mathrm{Cntd}(u_n, n)$ для всякого n. По аксиоме о продолжении существует множество u, такое, что $x, y \in u$ и для всякого n имеем $u \subseteq u_n$ и $\mathrm{Cntd}(u, n)$, т. е. u связно. Так как $u \subseteq X_n$ для всякого n, то $u \subseteq \bigcap \{X_n; n \in FN\}$.

Теорема. *Для каждой фигуры X следующие два условия эквивалентны:*

(1) *X теоретико-множественно определима;*

(2) *X и $V \setminus X$ суть замкнутые фигуры.*

Доказательство. Если X теоретико-множественно определима, то теоретико-множественно определима и $V \setminus X$, так что X и $V \setminus X$ суть π-классы (и мы знаем, что фигура замкнута тогда и только тогда, когда она есть π-класс). Обратно, если X и V/X оба суть π-классы, то X — одновременно π-класс и σ-класс и, следовательно, X теоретико-множественно определим.

Фигура X называется *открыто-замкнутой*, если она удовлетворяет одному из условий (1) или (2) предыдущей теоремы (в этом случае, конечно, X удовлетворяет обоим условиям одновременно).

Теорема. *Класс всех открыто-замкнутых фигур кодируем и не более чем счетен.*

Доказательство. Кодируемость следует из кодируемости всех теоретико-множественно определимых классов. Во втором разделе мы доказали, что существует класс $Z \precapprox FN$, такой, что для всякой замкнутой фигуры X существует $Z' \subseteq Z$, такой, что $X = \{\mathrm{Fig}(u); u \in Z'\}$. Если X теоретико-множественно определим, то класс Z' может быть взят конечным. Таким образом, если мы сопоставим с каждой открыто-замкнутой фигурой конечное множество $w \subseteq Z$, такое, что $X = \bigcap \{\mathrm{Fig}(u); u \in w\}$, то получим взаимно однозначное соответствие между всеми открыто-замкнутыми фигурами и некоторым подклассом счетного класса $P(Z)$ всех (конечных) подмножеств Z. Отношение связности $\doteq_C$ определяется следующим образом: это есть отношение эквивалентности, такое, что $x \doteq_C y$ тогда и только тогда, когда существует связное множество u, такое, что $x, y \in u$.

Очевидно, что $x \doteq y$ влечет $x \doteq_C y$, т. е. отношение $\doteq_C$ грубее, чем $\doteq$. Следовательно, отношение $\doteq_C$ компактно. Положим по определению

$$R_n^C = \{\langle x, y\rangle;\ (\exists u)(\mathrm{Cntd}\,(u, n)\ \&\ x, y \in u)\}.$$

Для каждого n соответствующий класс R_n^C является теоретико-множественно определимым отношением эквивалентности и $R_{n+1}^C \subseteq R_n^C$. Далее, $\doteq_C$ есть подотношение R_n^C; таким образом, для всякого x класс $\{y; \langle x, y\rangle \in R_n^C\}$ есть фигура. Так как она определима теоретико-множественно, то это открыто-замкнутая фигура.

Теорема. $\doteq_C$ *совпадает с* $\bigcap \{R_n^C;\ n \in FN\}$.

Доказательство. Если $\langle x, y\rangle \in R_n^C$ для каждого n, то существует последовательность $\{u_n;\ n \in FN\}$, такая, что $x, y \in u_n$ и $\mathrm{Cntd}\,(u_n, n)$ для всякого n. Таким образом, $x \doteq_C y$. Обратное включение тривиально.

Следствие. $x \doteq_C$ *есть отношение неразличимости.*

Монада точки x относительно отношения $\doteq_C$ называется *компонентой* x.

Теорема. $x \doteq_C y$ *тогда и только тогда, тогда не существует открыто-замкнутой фигуры* X, *содержащей в качестве элемента* x, *но не содержащей* y.

Доказательство. Если бы нашлась открыто-замкнутая фигура X, такая, что $x \in X$ и $y \notin X$, то по предыдущей теореме не существовало бы никакого связного множества u, для которого $x, y \in u$. С другой стороны, если нет такой фигуры, то $\langle x, y\rangle \in R_n^C$ для всякого n и, следовательно, $x \doteq_C y$ по предыдущей теореме.

Теорема. *Следующие два условия эквивалентны:*

(1) *эквивалентности* $\doteq$ *и* $\doteq_C$ *совпадают.*

(2) $\doteq$ *имеет порождающую последовательность* $\{S_n;\ n \in FN\}$, *такую, что* S_n *есть отношение эквивалентности для каждого* n.

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (1). Тогда $\{R_n^C;\ n \in FN\}$ есть порождающая последовательность для $\doteq$, имеющая нужные свойства.

Обратно, допустим, что выполняется (2), и пусть x, y таковы, что не $x \doteq y$. Тогда существует n, такое, что $\langle x, y\rangle \notin S_n$. Класс $\{z;\ \langle x, z\rangle \in S_n\}$ есть теоретико-множественно определимая фигура, содержащая x и не содержащая y. По предыдущей теореме неверно, что $x \doteq_C y$. Таким образом, $\doteq$ и $\doteq_C$ совпадают.

Эквивалентность $\doteq$ называется *вполне несвязной*, если она удовлетворяет одному, а следовательно и обоим, из условий предыдущей теоремы.

Теорема. $\doteq_C$ *вполне несвязно.*

Доказательство. $\{R_n^C;\ n \in FN\}$ есть порождающая последовательность для $\doteq_C$, и каждое из отношений R_n^C есть эквивалентность.

Теорема. *Следующие три условия эквивалентны:*

(1) $\doteq$ *теоретико-множественно определимо*;

2) $\mathrm{Mon}(x)$ *есть открыто-замкнутая фигура для каждого* x;

(3) *класс* $V/\doteq$ *конечен.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) тривиально. Докажем (2)$\Rightarrow$(3). Допустим, что справедливо (2). Так как $\{\mathrm{Mon}(x);\ x \in V\}$ — класс открыто-замкнутых фигур, он не более чем счетен. Поскольку объединение этого класса есть V, то он конечен.

Докажем теперь (3)$\Rightarrow$(1). Предположим, что выполняется (3). Для каждого x класс $V \setminus \mathrm{Mon}(x)$ — замкнутая фигура (объединение конечного количества замкнутых фигур). Так как $\mathrm{Mon}(x)$ также замкнута, то она оказывается открыто-замкнутой. Таким образом, V разлагается в конечное количество теоретико-множественно определимых классов, а отсюда следует, что соответствующая эквивалентность теоретико-множественно определима.

Эквивалентность $\doteq$ называется *дискретной*, если она обладает одним из свойств, а значит, и всеми свойствами предыдущей теоремы.

Очевидно, что если $\doteq$ дискретна, то она вполне несвязна.

Глава IV

ДВИЖЕНИЕ

Движение есть феномен непрерывности, традиционно изучаемый математическими методами.

В альтернативной теории множеств мы будем иметь дело с движением на основе гипотезы относительно феномена непрерывности, сформулированной во введении к третьей главе. Эта гипотеза специально для случая движения может быть сформулирована следующим образом.

Движение есть феномен, который мы воспринимаем, когда сталкиваемся с последовательностью состояний, в которой каждое состояние отличается неразличимым образом от предыдущего состояния во времени и пространстве.

Таким образом, если мы наблюдаем движение, мы сталкиваемся с быстро предъявляемой серией фотографий. При этом мы не в состоянии заметить различие между двумя последовательными фотографиями, так как это различие находится за горизонтом нашей способности различения. В такой ситуации серия фотографий воспринимается как движение.

Изменения, происходящие при переходе от одного состояния к следующему, называются инфинитезимальными. Так как мы работаем в расширенном универсуме, мы можем попытаться моделировать состояния как множества или классы.

Описание феномена движения на основе инфинитезимальных изменений поднимает вопрос о взаимоотношении между инфинитезимальными и глобальными свойствами движения. Так, например, развитие растения из семени есть движение. Проблема состоит в том, чтобы определить результирующую форму растения из последовательности инфинитезимальных изменений его формы или, обратно, вывести эту последовательность из глобального развития.

Этот пример показывает, что движение здесь мы понимаем в довольно общем смысле и не ограничиваем себя механическими движениями.

РАЗДЕЛ 1. ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕК

На протяжении всей главы мы фиксируем отношение неразличимости $\doteq$ с порождающей последовательностью $\{R_n; n \in FN\}$.

Движение точки есть простейший вид движения. Точка движется путем перманентного изменения своего местоположения с помощью неощутимых прыжков. Прыжки эти таковы, что точка не исчезает, чтобы вдруг появиться на заметном расстоянии от прежнего местоположения; таким образом, после каждого прыжка точка должна обнаруживаться на месте, неразличимо отличающемся от предыдущего места. Эти соображения ведут к следующему определению.

Функция d есть *движение точки* за время ϑ, где $\vartheta \in N$, если:

(1) $\operatorname{dom}(d) = \vartheta + 1$ и

(2) для всякого $\alpha < \vartheta$ $d(\alpha) \doteq d(\alpha + 1)$.

Таким образом, время движения d есть число состояний, принимаемых точкой, пока она движется от $d(0)$ до $d(\vartheta)$.

Если d есть движение точки, то $\operatorname{rng}(d)$ называется *траекторией* движения d.

Теорема. *Траектория движения точки есть связное множество.*

Доказательство. Пусть v — собственное непустое подмножество $\operatorname{rng}(d)$. Предположим, что $d(0) \in v$. Пусть γ — максимальное из всех α, таких, что для каждого $\beta \leqslant \alpha$ мы имеем $d(\beta) \in v$. Тогда $\gamma < \vartheta$, $d(\gamma) \in v$, $d(\gamma + 1) \in \operatorname{rng}(d) \setminus v$ и $d(\gamma) \doteq d(\gamma + 1)$. Подобным же образом рассуждаем в случае, когда $d(0) \in \operatorname{rng}(d) \setminus v$.

Теорема. *Для каждого непустого связного множества u существует движение d некоторой точки, такое, что u есть траектория движения d.*

Доказательство. Пусть $\{r_\alpha;\ \alpha \leqslant \tau\}$ — продолжение $\{R_n;\ n \in FN\}$ на u. Мы утверждаем, что для каждого n существуют функция f и $\vartheta_n \in N$, такие, что $\operatorname{dom}(f) = \vartheta_n + 1$, $\operatorname{rng}(f) = u$ и для каждого $\alpha < \vartheta_n$ имеем $\langle f(\alpha), f(\alpha + 1)\rangle \in r_n$. По аксиоме о продолжении существуют бесконечное $\gamma < \tau$ и функция f, такие, что $\operatorname{dom}(f) = \vartheta_\gamma \in N$, $\operatorname{rng}(f) = u$ и $\langle f(\alpha), f(\alpha + 1)\rangle \in r_\gamma$ для каждого $\alpha < \vartheta_\gamma$, так что $f(\alpha) \doteq f(\alpha + 1)$ для каждого $\alpha < \vartheta_\gamma$. Итак, f есть искомое движение.

В самом деле, возьмем некоторое n. Положим

$$Y = \{f;\ \operatorname{dom}(f) \in N \mathbin{\&} \operatorname{rng}(f) \subseteq u \mathbin{\&} (\forall \alpha)(\alpha + 1 \in \operatorname{dom}(f) \Rightarrow \langle f(\alpha), f(\alpha + 1)\rangle \in r_n)\}.$$

Этот класс теоретико-множественно определим. Таким образом, существует $g \in Y$, такое, что из $f \in Y$ следует

$\operatorname{rng}(f) \widehat{\lesssim} \operatorname{rng}(g)$ ($\operatorname{rng}(g)$ имеет наибольшее возможное количество элементов). Мы покажем, что $\operatorname{rng}(g) \mathrel{\widehat{\approx}} u$, откуда $\operatorname{rng}(g) = u$, поскольку $\operatorname{rng}(g) \subseteq u$. Предположим, что $\operatorname{rng}(g)$ — собственное подмножество u. Так как $\operatorname{rng}(g) \neq \varnothing$, то существуют $\beta \in \operatorname{dom}(g)$ и $y \in u \setminus \operatorname{rng}(g)$, такие, что $g(\beta) \doteq y$. В частности, $\langle g(\beta), y\rangle \in r_n$. Положим $\operatorname{dom}(g) = \vartheta + 1$. Определим функцию f на $\vartheta + (\vartheta \setminus \beta) + 2$ следующим образом:

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha) & \text{для} \quad \alpha \leqslant \vartheta, \\ g(\alpha - 2(\alpha - \vartheta)) & \text{для} \quad \vartheta < \alpha \leqslant 2\vartheta - \beta, \\ y & \text{для} \quad \alpha = \vartheta + (\vartheta - \beta) + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $f \in Y$ и $\operatorname{rng}(f) = \operatorname{rng}(g) \cup \{y\}$, а это приводит к противоречию.

В оставшейся части раздела d обозначает движение точки за время ϑ, $\vartheta \in N$. Для α, $\beta \leqslant \vartheta$ положим $\alpha \mathrel{\underset{d}{\doteq}} \beta$ тогда и только тогда, когда для всякого γ, $\operatorname{Min}\{\alpha, \beta\} \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Max}\{\alpha, \beta\}$, имеем $d(\alpha) \doteq d(\gamma)$.

Очевидно, $\alpha \mathrel{\underset{d}{\doteq}} \beta$ влечет $d(\alpha) \doteq d(\beta)$. Таким образом, $\underset{d}{\doteq}$ тоньше, чем отношение неразличимости $\{\langle\alpha, \beta\rangle;\ d(\alpha) \doteq d(\beta)\}$.

Теорема. $\underset{d}{\doteq}$ *есть* π-*эквивалентность.*

Доказательство. Для произвольных α, $\beta \leqslant \vartheta$ положим

$$\langle\alpha, \beta\rangle \in S_n \equiv (\forall\gamma \text{ между } \operatorname{Min}\{\alpha, \beta\},\ \operatorname{Max}\{\alpha, \beta\})(\langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle \in R_n)$$

(по определению γ *между* α_1, α_2, если $\alpha_1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_2$).

Очевидно, что каждое S_n теоретико-множественно определимо, и нетрудно проверить, что $\alpha \mathrel{\underset{d}{\doteq}} \beta$ тогда и только тогда, когда $\langle\alpha, \beta\rangle \in S_n$ для всякого n.

Движение d называется *компактным*, если $\underset{d}{\doteq}$ — компактное отношение эквивалентности (и, следовательно, $\underset{d}{\doteq}$ — отношение неразличимости).

Теорема. *Движение d компактно тогда и только тогда, когда для всякого x и всякого бесконечного множества $u \subseteq \{\alpha;\ d(\alpha) \doteq x\}$ существуют α, $\beta \in u$, такие, что $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \mathrel{\underset{d}{\doteq}} \beta$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Обратно, предположим, что d некомпактно. Пусть $v \subseteq \vartheta + 1$ —

бесконечное множество, такое, что $\alpha \underset{d}{\doteq} \beta$ влечет $\alpha = \beta$ для любых $\alpha, \beta \in v$. Так как $\doteq$ компактно, то существуют точка x и бесконечное множество $u \subseteq v$, такие, что $d``u \subseteq \mathrm{Mon}(x)$. Таким образом, $u \subseteq \{\alpha; d(\alpha) \doteq x\}$, и условия нашей теоремы выполнены.

Мощность класса $\{\alpha;\ d(\alpha) \doteq x\}/\underset{d}{\doteq}$, т. е. количество классов эквивалентности отношения $\underset{d}{\doteq}$ на $\{\alpha;\ d(\alpha) \doteq x\}$, называется *порядком* точки x. Порядок точки x сообщает, как долго движение d находится в монаде точки x.

Наша последняя теорема имеет такое

Следствие. *Если порядок каждой точки не более чем счетен, то движение d компактно.*

Будем говорить, что движение d *осциллирует между точками* x, y (между множествами u, v), если $\mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{Mon}(y) = \varnothing$ $(\mathrm{Fig}(u) \cap \mathrm{Fig}(v) = \varnothing)$ и имеются последовательности $\{\alpha_n;\ n \in FN\}$, $\{\beta_n;\ n \in FN\}$, такие, что $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ для каждого n и $d(\alpha_n) \doteq x$, $d(\beta_n) \doteq y$ $(d(\alpha_n) \in u$, $d(\beta_n) \in v)$.

Следующая теорема есть непосредственное следствие аксиомы о продолжении.

Теорема. *d осциллирует между точками x, y (между множествами u, v) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{Mon}(y) = \varnothing$ $(\mathrm{Fig}(u) \cap \mathrm{Fig}(v) = \varnothing)$ и существуют последовательности $a = \{\alpha_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$, $b = \{\beta_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$ (т. е. a, b суть множества), такие, что $\delta \notin FN$ и для всякого $\gamma < \delta$ имеем $\alpha_\gamma < \beta_\gamma < \alpha_{\gamma+1} < \beta_{\gamma+1}$ и $d(\alpha_\gamma) \doteq x$, $d(\beta_\gamma) \doteq y$ $(d(\alpha_\gamma) \in u$, $d(\beta_\gamma) \in v)$.*

Теорема. *Следующие три условия эквивалентны:*

(1) *движение d не компактно;*

(2) *существуют точки x, y, такие, что d осциллирует между ними;*

(3) *существуют множества u, v, такие, что d осциллирует между ними.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). По предыдущей теореме существует точка x и бесконечное множество $\{\alpha_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$, такие, что для всякого $\gamma < \delta$ имеем $\alpha_\gamma < \alpha_{\gamma+1}$, $d(\alpha_\gamma) \doteq x$, но не $\alpha_\gamma \underset{d}{\doteq} \alpha_{\gamma+1}$. Для всякого γ пусть $\bar{\gamma}$ — наименьшее натуральное число, такое, что существует β, для которого $\alpha_\gamma < \beta < \alpha_{\gamma+1}$ и $\langle d(\alpha_\gamma), d(\beta)\rangle \notin R_{\bar{\gamma}}$. Очевидно, что $\bar{\gamma} \in FN$. Пусть β_γ — наименьшее β, такое, что $\alpha_\gamma < \beta \leqslant \alpha_{\gamma+1}$ и $\langle d(\alpha_\gamma), d(\beta)\rangle \notin R_{\bar{\gamma}}$.

Последовательность $\{\beta_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$ есть множество, и существуют точка y и бесконечное множество $v \subseteq \delta$, такие, что $\gamma \in v$ влечет $d(\beta_\gamma) \doteq y$ для каждого y. Так как неверно, что $d(\alpha_\gamma) \doteq d(\beta_\gamma)$, обязательно неверно и что $x \doteq y$. Таким образом, последовательности $\{\alpha_\gamma; \gamma \in v\}$, $\{\beta_\gamma; \gamma \in v\}$ свидетельствуют об осцилляции движения d между точками x, y.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть d осциллирует между точками x, y, и пусть $\{\alpha_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$, $\{\beta_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$ — соответствующие последовательности из определения осцилляции. Существуют множества u, v, такие, что $u \subseteq \mathrm{Mon}(x)$, $v \subseteq \mathrm{Mon}(y)$ и для всякого $\gamma \leqslant \delta$ имеем $d(\alpha_\gamma) \in u$, $d(\beta_\gamma) \in v$. Тогда d осциллирует между множествами u, v.

(3) $\Rightarrow$ (1). По предыдущей теореме существуют u, v, такие, что $\mathrm{Fig}(u) \cap \mathrm{Fig}(v) = \varnothing$, и последовательности $\{\alpha_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$, $\{\beta_\gamma; \gamma \leqslant \delta\}$ (являющиеся множествами!), такие, что $\delta \notin FN$ и для всякого $\gamma \leqslant \delta$ имеем $\alpha_\gamma < \beta_\gamma < \alpha_{\gamma+1} < \beta_{\gamma+1} < \vartheta$, $d(\alpha_\gamma) \in u$, $d(\beta_\gamma) \in v$. Таким образом, из $\gamma < \delta$ следует, что неверно $\alpha_\gamma \underset{d}{\doteq} \alpha_{\gamma+1}$, и, значит, для любых γ, $\beta \in \delta$ из $\alpha_\gamma \underset{d}{\doteq} \alpha_\beta$ следует $\gamma = \beta$. Поэтому d не компактно.

Когда мы следим за движением d точки, мы имеем отношение неразличимости $\underset{T}{\doteq}$ на его длительности $\vartheta + 1$, удовлетворяющее следующим естественным условиям:

$$(\alpha < \gamma < \beta \,\&\, \alpha \underset{T}{\doteq} \beta) \Rightarrow \alpha \underset{T}{\doteq} \gamma \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta, \gamma.$$

Характер движения d зависит от взаимоотношения между $\underset{d}{\doteq}$ и $\underset{T}{\doteq}$.

Например, если $\underset{T}{\doteq}$ тоньше, чем $\underset{d}{\doteq}$, то наше наблюдение позволяет для каждой монады времени указать соответствующую монаду положения движущейся точки, т. е. монаду отношения $\doteq$. Так как отношение $\underset{T}{\doteq}$ компактно, это возможно, только если d компактно.

С другой стороны, если монада $\underset{T}{\doteq}$ пересекается с более чем одной монадой $\underset{d}{\doteq}$, то для такой монады времени мы не можем определить единственной монады положения как положения движущейся точки, соответствующего данной монаде времени.

Дальнейшие свойства движений точки, зависящие от метрических свойств отношений $\doteq$ и $\underset{T}{\doteq}$, не будут здесь рассматриваться, так как для такого рассмотрения не разработаны еще необходимые понятия.

РАЗДЕЛ 2. ТОЧЕЧНООБРАЗНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теперь мы намерены сформулировать определение движения множества; это определение будет согласовано с нашей концепцией движения, но будет относиться лишь к простейшему случаю, когда на движущемся множестве не рассматривается никакой структуры.

Функция d называется *движением множества* за время ϑ, где ϑ — натуральное число, если $\operatorname{dom}(d) = \vartheta + 1$ и для всякого $\alpha < \vartheta$ имеет место $\operatorname{Fig}(d(\alpha)) = \operatorname{Fig}(d(\alpha + 1))$.

Ясно, что d есть движение множества за время ϑ тогда и только тогда, когда d есть движение точки за время ϑ по отношению к другому отношению неразличимости, а именно эквивалентности-степени $\underset{\mathrm{T}}{\doteqdot}$ для отношения $\doteqdot$. Так как движения множеств суть частные случаи движения точек, все результаты предыдущего раздела в надлежащей модификации применимы и к движениям множеств.

Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы сформулировать инфинитезимальные условия, эквивалентные разложимости движения множества в движении отдельных точек. Если некоторые точки двигаются одновременно, то невозможно, чтобы две различные точки занимали одно и то же положение. Это мотивирует следующее определение:

Класс T назовем *пучком движений точек* за время ϑ, если выполняются следующие два условия:

(1) каждый элемент T есть движение точки за время ϑ;

(2) если f, g суть различные элементы T и если $\alpha \leqslant \vartheta$, то $f(\alpha) \neq g(\alpha)$.

Положим $T_\alpha = \{f(\alpha);\ f \in T\}$ для всякого $\alpha \leqslant \vartheta$ и $T_{\alpha, \beta} = \{\langle f(\alpha),\ f(\beta)\rangle;\ f \in T\}$ для любых α, $\beta \leqslant \vartheta$. Очевидно, что $T_{\alpha, \beta}$ есть взаимно однозначное отображение T_β на T_α. Кроме того, $T_{\alpha, \alpha+1}$ сопоставляет с каждой точкой неразличимую точку.

Классы X, Y назовем *инфинитезимально сдвинутыми* (обозначение: $\operatorname{Shftd}(X, Y)$), если для каждого z имеем $\operatorname{Mon}(z) \cap X \approx \operatorname{Mon}(z)\, Y$ (т. е. существует взаимно однозначное отображение $\operatorname{Mon}(z) \cap X$ на $\operatorname{Mon}(z) \cap Y$).

Очевидно, что если X, Y инфинитезимально сдвинуты, то $\operatorname{Fig}(X) = \operatorname{Fig}(Y)$. В частности, если T — пучок движений точек за время ϑ и $\alpha < \vartheta$, то T_α, $T_{\alpha+1}$ инфинитезимально сдвинуты.

Движение d множества за время ϑ назовем *точечнообразным движением множества*, если для каждого $\alpha < \vartheta$ множества $d(\alpha)$ и $d(\alpha + 1)$ инфинитезимально сдвинуты.

Как следует из предыдущих рассмотрений, если движение d множества разложимо в движения точек, то d есть точечнообразное движение множества. Мы докажем, что обратная импликация также верна. Кроме того, мы укажем способ разложения точечнообразного движения множества в движения точек, обладающий дополнительными полезными свойствами.

Пучок T движений точек за время ϑ назовем *строгим разложением* точечнообразного движения множества d, если выполняются следующие условия:

(1) для всякого $\alpha \leqslant \vartheta$ имеем $T_\alpha = d(\alpha)$;

(2) для всяких $\alpha, \beta \leqslant \vartheta$ и всякого $u \subseteq T_\beta$ $T_{\alpha,\beta}``u$ есть множество;

(3) для всякого $u \subseteq T_0$ функция $\{\langle T_{\alpha,0}``u, \alpha\rangle; \alpha \leqslant \vartheta\}$, сопоставляющая каждому $\alpha$ множество $T_{\alpha,0}``u$, сама является множеством.

Условие (1) гласит, что T разлагает d в движения точек. Условия (2), (3) означают, что T индуцирует движение подмножеств множества, движущегося в движении d.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого раздела.

Теорема. *Пусть d — точечнообразное движение множества за время ϑ. Тогда существует пучок T движений точек за время ϑ, который является строгим разложением d.*

Сначала сформулируем два простых следствия этой теоремы.

Следствие. *Следующие три условия эквивалентны:*

(1) *u и v инфинитезимально сдвинуты;*

(2) *существует взаимно однозначное отображение F множества u на множество v, такое, что $x \doteq F(x)$ для каждого $x \in u$;*

(3) *существует взаимно однозначное отображение F множества u на v, такое, что $x \doteq F(x)$ для каждого $x \in u$ и $\mathrm{Set}(X) \equiv \mathrm{Set}(F``X)$ для всякого подкласса $X \subseteq u$.*

Следствие. *Пусть u, v — бесконечные множества. Тогда существует взаимно однозначное отображение F множества u на множество v, такое, что произвольный подкласс $X \subseteq u$ является множеством тогда и только тогда, когда $F``X$ есть множество.*

Докажем теперь нашу основную теорему. Доказательство было существенно упрощено К. Чудой и Дж. Млчеком. Все теоремы и понятия в оставшейся части раздела являются вспомогательными для этого основного доказательства.

Далее c обозначает множество, которое будет определено в процессе доказательства наших вспомогательных теорем, а $\{r_\alpha; \alpha \leqslant \tau\}$ обозначает продолжение последовательности $\{R_n; n \in FN\}$ на c. В отличие от предыдущего раздела $o(x, \alpha)$ теперь обозначает множество $\{y \in c;\ \langle x, y\rangle \in r_\alpha\}$. Для $u \subseteq c$ и $x \in c$ мы положим $y = S(x, u)$ тогда и только тогда, когда y есть первый элемент c (в некотором фиксированном линейном упорядочении $\leqslant$ множества c, таком, что $\leqslant$ есть множество), для которого $o(x, \alpha) \cap u \neq \varnothing \Rightarrow y \in o(x, \alpha) \cap u$ для всякого $\alpha \leqslant \tau$.

Очевидно, что S — множество. Для $u \neq \varnothing$ имеем $S(x, u) \in u$, для $x \in u$ имеем $S(x, u) = x$ и для $x \in \mathrm{Fig}(u)$ имеем $S(x, u) \doteq x$.

Теорема. *Пусть u и u' инфинитезимально сдвинуты, и пусть v, w — дизъюнктные множества, объединение которых есть u. Тогда существуют дизъюнктные множества v', w', объединение которых есть u', такие, что v, v' инфинитезимально сдвинуты и w, w' также инфинитезимально сдвинуты.*

Доказательство. Пусть $u \cup u' \subseteq c$. Предположим сначала, что $u \subseteq u'$. Положим

$$\bar{v} = \{x;\ x \in u' \setminus u \,\&\, \mathrm{Min}\{\alpha;\ o(x, \alpha) \cap v \gtrless \alpha\} \geqslant \mathrm{Min}\{\alpha;\ o(x, \alpha) \cap w \gtrless \alpha\}\},$$

положим также $v' = v \cup \bar{v}$, $w' = u' \setminus v'$. Докажем, что v, v' инфинитезимально сдвинуты, Так как $v \subseteq v'$, достаточно доказать, что если $\mathrm{Mon}(x) \cap v$ конечно, то $\mathrm{Mon}(x) \cap v = \mathrm{Mon}(x) \cap v'$, таким образом, $\mathrm{Mon}(x) \cap \bar{v} = \varnothing$. Предположим противное; тогда можно допустить, что $x \in \bar{v}$. Следовательно, существует m, такое, что $o(x, m) \cap v = \mathrm{Mon}(x) \cap v$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Min}\{\alpha;\ o(x, \alpha) \cap v \gtrless \alpha\} \in FN$. Но тогда также $\mathrm{Min}\{\alpha;\ o(x, \alpha) \cap w \gtrless \alpha\} \in FN$, поскольку $x \in \bar{v}$. Поэтому $\mathrm{Mon}(x) \cap w$ конечно и, значит, $\mathrm{Mon}(x) \cap u$ также конечно. Так как u, u' инфинитезимально сдвинуты и $u \subseteq u'$, имеем $\mathrm{Mon}(x) \cap u = \mathrm{Mon}(x) \cap u'$. Таким образом, $x \in u$ — противоречие. Подобным же образом доказывается $\mathrm{Shftd}(w, w')$.

Докажем теперь эту теорему в полной общности. Для $\alpha \leqslant \tau$ определим множества v_α, w_α и функции f_α, g_α по индукции следующим образом: v_α и w_α суть максимальные r_α-сети на $v \setminus \bigcup\{v_\beta;\ \beta \in \alpha\}$ и $w \setminus \bigcup\{w_\beta;\ \beta \in \alpha\}$ соответственно. Положим

$$f_\alpha(x) = S(x, u' \setminus (\bigcup\{\mathrm{rng}(f_\beta);\ \beta \in \alpha\} \cup \bigcup\{\mathrm{rng}(g_\beta);\ \beta \in \alpha\}))$$

для каждого $x \in v_\alpha$ и

$$g_\alpha(x) S(x, u' \setminus (\bigcup\{\mathrm{rng}(f_\beta);\ \beta \leqslant \alpha\} \cup \bigcup\{\mathrm{rng}(g_\beta);\ \beta \in \alpha\}))$$

для каждого $x \in w_\alpha$.

Пусть δ — максимальное из всех $\alpha \leqslant \tau$, таких, что $\bigcup \{f_\beta \cup g_\beta;\ \beta \leqslant \alpha\}$ есть взаимно однозначное отображение и, кроме того, $\langle x, f_\beta(x)\rangle \in r_\beta$ для всякого $\beta \leqslant \alpha$ и $x \in v_\beta$, а также $\langle x, g_\beta(x)\rangle \in r_\beta$ для каждого $\beta \leqslant \alpha$ и $x \in w_\beta$. Так как u, u' инфинитезимально сдвинуты, то $x \in v_n$ влечет $x \doteq f_n(x)$, а $x \in w_n$ влечет $x \doteq g_n(x)$ для всех n. Таким образом, $\delta \notin FN$. Положим $f = \bigcup \{f_\alpha;\ \alpha \leqslant \delta\}$ и $g = \bigcup \{g_\beta;\ \beta \leqslant \delta\}$. Тогда $\mathrm{Shftd}(\mathrm{dom}(f),\ \mathrm{rng}(f))$, $\mathrm{Shftd}(\mathrm{dom}(g),\ \mathrm{rng}(g))$ и, кроме того, $\mathrm{rng}(g) \cap \mathrm{rng}(f) = \varnothing$. Согласно первой части доказательства, найдутся v', w', такие, что $v' \cap w' = \varnothing$, $v' \cup w' = u'$, $\mathrm{Shftd}(\mathrm{rng}(f),\ v')$, $\mathrm{Shftd}(\mathrm{rng}(g),\ w')$. Остается доказать, что $\mathrm{Shftd}(v, \mathrm{dom}(f))$ и $\mathrm{Shftd}(w, \mathrm{dom}(g))$. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Заметим, что $\mathrm{dom}(f) \subseteq v$; значит, достаточно доказать, что если $\mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{dom}(f)$ конечно, то $\mathrm{Mon}(x) \cap v \subseteq \mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{dom}(f)$. Предположим противное. Пусть $\mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{dom}(f)$ конечно и в то же время $x \in v \setminus \mathrm{dom}(f)$. (Это можно допустить без потери общности.) Выберем n_1 так, что $\mathrm{Mon}(x) \cap \mathrm{dom}(f) = o(x,\ n_1) \cap \mathrm{dom}(f)$. Далее, выберем n_2 так, что $o(x,\ n_1) \cap \mathrm{dom}(f) \subseteq \bigcup \{v_n;\ n \leqslant n_2\}$. Положим $m = \mathrm{Max}\{n_1, n_2\} + 1$. Тогда существует $y \in v_m$, такое, что $\langle x, y\rangle \in r_m$; следовательно, $y \in o(x, n_1)$ и $y \in \mathrm{dom}(f) \setminus \bigcup \{v_n;\ n \leqslant n_2\}$, т. е. мы пришли к противоречию.

Анализ этого доказательства показывает, что мы фактически описали некоторую теоретико-множественно определимую функцию, сопоставляющую с каждой четверкой $\langle u, v, w, u'\rangle$, удовлетворяющей условиям $u = v \cup w$, $v \cap w = \varnothing$, $u \cup u' \subseteq c$, разложение $\langle v', w'\rangle$ множества u' в два дизъюнктных множества. С помощью аксиом, относящихся к расширенному универсуму, мы показали, что $\mathrm{Shftd}(u, u')$ влечет $\mathrm{Shftd}(v, v')$ и $\mathrm{Shftd}(w, w')$. Итерируя эту конструкцию и выбирая подходящим образом c, мы легко получим следующую теорему:

Теорема. *Пусть d — точечнообразное движение множества за время ϑ. Пусть $\gamma \leqslant \vartheta$ и $v \subseteq d(\gamma)$. Тогда существуют точечнообразные движения d_1, d_2 множеств за время ϑ, такие, что $d_1(\gamma) = v$ и для каждого $\alpha \leqslant \vartheta$ пара $\langle d_1(\alpha),\ d_2(\alpha)\rangle$ есть разложение $d(\alpha)$ на два дизъюнктных множества.*

Для каждого α, такого, что $\alpha + 2 \leqslant \tau$, положим

$$u^{(\alpha)} = \{x;\ x \in u \ \&\ o(x,\ \alpha) \cap u = o(x,\ \alpha + 2) \cap u \ \&\ o(x,\ \alpha) \widehat{<} \alpha\}.$$

Пусть $\mathrm{Shftd}(\alpha, u, v)$ есть конъюнкция следующих двух формул:

$$(\forall x \in u^{(\alpha)})\,(o(x,\ \alpha + 2) \cap u \mathrel{\widehat{\approx}} o(x,\ \alpha + 1) \cap v),$$

$$(\forall x \in v^{(\alpha)})\,(o(x,\ \alpha + 2) \cap v \mathrel{\widehat{\approx}} o(x,\ \alpha + 1) \cap u),$$

Очевидно, что $\mathrm{Shftd}(\alpha, u, v)$ записывается в виде теоретико-множественной формулы.

Теорема. *u и v инфинитезимально сдвинуты тогда и только тогда, когда* $(\forall n)(\mathrm{Shftd}\,(n,\ u,\ v))$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathrm{Shftd}(u, v)$, и пусть $n \in FN$. Пусть, например, $x \in u^{(n)}$, т. е. $o(x,\ n) \cap u = o(x,\ n+2) \cap u \mathrel{\widehat{\underset{\sim}{<}}} n$. Для каждого $y \in o(x,\ n+2)$ множество $\mathrm{Mon}(y) \cap u$ конечно; так как $\mathrm{Shftd}(u, v)$ и $o(x, n+2) \cap u = o(x,\ n+1) \cap u$, то существует взаимно однозначное отображение f множества $o(x, n+2) \cap u$ на $o(x, n+1) \cap v$; кроме того, можно допустить, что f каждой точке сопоставляет бесконечно близкую точку. Это и доказывает $o(x, n+2) \cap u \mathrel{\widehat{\approx}} o(x, n+1) \cap v$.

Обратно, допустим, что u, v не являются инфинитезимально сдвинутыми. Например, пусть $x \in u$ и $\mathrm{Mon}(x) \cap u$ имеет ровно k элементов, где k есть конечное натуральное число, и пусть $\mathrm{Mon}(x) \cap v$ имеет более чем k элементов. Тогда существует $n > k$, такое, что $\mathrm{Mon}(x) \cap u = o(x, n) \cap u$, и, таким образом, $x \in u^{(n)}$. Но $\mathrm{Mon}(x) \cap v \subseteq o(x, n+1) \cap v$, так что $o(x,\ n+2) \cap u \mathrel{\widehat{<}} o(x,\ n+1) \cap v$, и, следовательно, неверно, что $\mathrm{Shftd}(n, u, v)$.

В оставшейся части раздела пусть d обозначает фиксированное точечнообразное движение множества за время ϑ. Далее, a обозначает множество всех функций f, таких, что $\mathrm{dom}(f) = \vartheta + 1$ и $f(\alpha) \subseteq d(\alpha)$ для каждого $\alpha \leqslant \vartheta$, и A есть класс всех $f \in a$, таких, что f есть точечнообразное движение множества за время ϑ. Для $X \subseteq a$ положим

$$\nu(X) = \{\gamma;\ (\forall\alpha \leqslant \vartheta)(\forall\beta \leqslant \gamma)(\forall f \in X)(\mathrm{Shftd}\,(\beta,\ f(\alpha),\ f(\alpha+1)))\}.$$

Очевидно, для всякого $X \subseteq a$ имеем $X \subseteq A$ тогда и только тогда, когда $FN \subseteq \nu(X)$. Кроме того, если X — счетный подкласс a, то $X \subseteq A$ тогда и только тогда, когда FN есть собственный подкласс $\nu(X)$.

Класс $B \subseteq a$ называется (булевой) *алгеброй* на d, если выполняются следующие два условия:

(1) если $f \in B$ и g — функция на $\vartheta + 1$, такая, что $g(\alpha) = d(\alpha) \setminus f(\alpha)$ для всякого $\alpha \leqslant \vartheta$, то $g \in B$;

(2) если f_1, $f_2 \in B$ и g — функция на $\vartheta + 1$, такая, что $g(\alpha) = f_1(\alpha) \cup f_2(\alpha)$ для каждого $\alpha \leqslant \vartheta$, то $g \in B$.

Для каждого класса $X \subseteq a$ пусть $B(X)$ по определению есть пересечение всех алгебр B на d, таких, что $X \subseteq B$. Очевидно, что $B(X)$ есть алгебра и если X конечен (счетен), то $B(X)$ также конечна (счетна). Далее, очевидно, что B — счетная алгебра тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность $\{B_n; n \in FN\}$ конечных алгебр, объединение которых есть B.

Конечное множество p назовем *разбиением*, если $p \subseteq a$ и выполняются следующие два условия:

(1) $(\forall f_1, f_2 \in p)(\forall \alpha \leqslant \vartheta)(f_1 \neq f_2 \Rightarrow f_1(\alpha) \cap f_2(\alpha) = \varnothing)$,

(2) $(\forall \alpha \leqslant \vartheta)(d(\alpha) = \bigcup \{f(\alpha);\ f \in p\})$.

Если p — разбиение, то

$$B(p) = \{f;\ (\exists x \subseteq p)(\forall \alpha \leqslant \vartheta)(f(\alpha) = \bigcup\{g(\alpha),\ g \in x\})\}.$$

Отсюда следует, что если $p \subseteq A$, то $B(p) \subseteq A$. Далее, B — конечная алгебра тогда и только тогда, когда существует разбиение p, такое, что $B = B(p)$.

Теорема. *Пусть $B \subseteq A$ — не более чем счетная алгебра, и пусть $\gamma \leqslant \vartheta$ и $v \subseteq d(\gamma)$. Тогда существует не более чем счетная алгебра B', такая, что $B \subseteq B' \subseteq A$ и $v = f(\gamma)$ для некоторой функции $f \in B'$.*

Доказательство. Предположим сначала, что B конечна. Пусть p — разбиение, такое, что $B = B(p)$. Очевидно, что $p \subseteq A$. По нашей второй вспомогательной теореме существует разбиение $p' \subseteq A$, такое, что

$$\{f(\gamma);\ f \in p'\} = \{f(\gamma) \cap v;\ f \in p\} \cup \{f(\gamma) \setminus v;\ f \in p\}.$$

Достаточно положить $B' = B(p)$.

Теперь допустим, что B счетно, и пусть $\{B_n;\ n \in FN\}$ — возрастающая последовательность алгебр, дающая в объединении B. Пусть $\{B'_n;\ n \in FN\}$ — последовательность соответствующих алгебр, сконструированная в согласии с первой частью доказательства. Выберем $\delta \notin FN$, такое, что $\delta \in \nu(B_n) \cap \nu(B'_n)$ для всякого n. По аксиоме о продолжении обе последовательности имеют продолжения $\{B_\alpha;\ \alpha \in \alpha_0$, $\{B'_\alpha;\ \alpha \in \alpha_0\}$, которые уже являются множествами, и эти продолжения таковы, что для всех $\alpha \in \alpha_0$ имеем $\delta \in \nu(B_\alpha) \cap \nu(B'_\alpha)$, т. е. $B_\alpha \subseteq A$, $B'_\alpha \subseteq A$; кроме того, $B_\alpha \subseteq B_{\alpha+1}$, $B_\alpha \subseteq B'_\alpha$ и существует в точности одно $f_\alpha \in B'_\alpha$, такое, что $f_\alpha(\gamma) = v$. Выберем $\alpha \in \alpha_0$, $\alpha \notin FN$ и положим $B' = B(B \cup \{f_\alpha\})$. Очевидно, что $B \subseteq B' \subseteq B'_\alpha \subseteq A$, B' — счетный класс и содержит f_α; следовательно B' и есть искомая алгебра

Теорема. *Существует алгебра $B \subseteq A$, такая, что для всякого $\gamma \leqslant \vartheta$ и всякого $v \subseteq d(\gamma)$, существует $f \in B$, такое, что $f(\gamma) = v$.*

Доказательство. Занумеруем все упорядоченные пары $\langle\gamma, v\rangle$, где $\gamma \leqslant \vartheta$ и $v \subseteq d(\gamma)$, ординальными числами (элементами Ω). Сконструируем, далее, последовательность $\{B_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ счетных алгебр, такую, что для каждого $\alpha \in \Omega$ $B_\alpha \subseteq A$ есть алгебра, существование которой утверждается в предыдущей теореме для алгебры $B = \bigcup \{B_\beta;\ \beta \in \alpha \cap \Omega\}$ и для α-пары $\langle\gamma, v\rangle$. Наконец, положим окончательно $B = \bigcup\{B_\alpha; \alpha \in \Omega\}$.

Доказательство основной теоремы. Пусть B такая же, как в предыдущей теореме. Если $f \in B$ и $\gamma \leqslant \vartheta$ таково, что $f(\gamma)$ — одноэлементное множество, то $f(\alpha)$ является одноэлементным множеством и для всех $\alpha \leqslant \vartheta$, так как f — точечнообразное движение множества. Для каждого f, которое есть движение точки за время ϑ, положим $\bar{f}(\alpha) = \{f(\alpha)\}$ для всех $\alpha \leqslant \vartheta$. Теперь положим $T = \{f; \bar{f} \in B\}$. Тогда T есть пучок движений точек за время ϑ, так как для $f, g \in T$, $f \neq g$, и $\gamma \leqslant \vartheta$ не может быть $f(\gamma) = g(\gamma)$; если бы было $f(\gamma) = g(\gamma)$, то мы имели бы $\bar{f}(\gamma) = \bar{g}(\gamma)$ и, взяв $h \in B$, такое, что $h(\alpha) = \bar{f}(\alpha) \setminus \bar{g}(\alpha)$ для всякого α, мы получили бы $h(\gamma) = \varnothing$ и, значит, $h(\alpha) = \varnothing$ для всякого α. Далее легко увидеть, что T есть строгое разложение d.

Глава V

ПОДОБИЯ

В классической геометрии две фигуры являются конгруэнтными, если они различаются лишь своим положением и ничем иным. Эта глава посвящена аналогичному понятию, относящемуся к классам расширенного универсума. Таким образом, как и в гл. I, мы будем изучать расширенный универсум, но используем теперь понятия, введенные во второй и третьей главах.

Выбор нашего предмета исследования не случаен: развивая математику в альтернативной теории множеств, мы моделируем разнообразные ситуации, поддающиеся математической трактовке, в расширенном универсуме. Подобия суть отображения, позволяющие нам иметь дело с моделями, которые обладают важными техническими преимуществами, поскольку они хорошо расположены в расширенном универсуме. С другой стороны, используя подобия, мы можем глубже изучить структуру расширенного универсума.

Языки FL и FL_C играют важную роль во всей главе. Наш предмет исследования вынуждает нас использовать языки, так как только путем включения формул различных видов в состав объектов исследования можно достичь удовлетворительной общности. Это минимальный фрагмент математической логики, необходимый всем математикам.

В пятом разделе второй главы мы доказали, что класс всех теоретико-множественно определимых классов кодируем. Читатель, знакомый с математической логикой, заметит, конечно, что в доказательстве этой теоремы мы фактически построили в соответствующей ситуации отношение истинности, выполнимости, для теоретико-множественных формул языка FL_V по отношению к структуре V. Таким образом, при формализации нашей теории мы можем заменять выражения вида $\{x; \varphi(x)\}$, где $\varphi(x_0)$ — теоретико-множественная формула языка FL_V, на $\{x;\, x$ удовлетворяет формуле φ в $V\}$.

В первом разделе этой главы мы будем пользоваться и более общими формулировками типа «класс $\{x, \varphi(x, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m)\}$, где φ — формула языка FL, $y_1, \ldots, y_n$ суть множества, а $Y_1, \ldots, Y_m$ — классы из расширенного универсума». Такого рода класс очевидно существует для каждой *фактически реализованной* формулы φ языка L и каждых $y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m$; класс всех формул FL есть подкласс класса всех фактически реализуемых формул L.

Такой способ рассуждения невозможен, если пытаться формализовать нашу теорию в исчислении предикатов с начальными предикатами $\in$ и $=$ и переменными для классов из расширенного универсума. В таком случае нам придется ограничиться очевидными модификациями наших теорем, заменяя их схемами теорем (каждая теорема распадается в бесконечную серию теорем, по одной теореме для каждой фактически реализованной формулы). Другая возможность состоит во введении новой примитивной операции Sat, сопоставляющей с каждой формулой φ языка FL, каждой последовательностью $\bar{y} = \{y_n; n \in FN\}$ множеств и каждой последовательностью $\bar{Y} = \{Y_n; n \in FN\}$ классов некоторый класс $\mathrm{Sat}(\varphi, \bar{y}, \bar{Y})$, с дальнейшей формулировкой очевидных аксиом, позволяющих заменять выражения вида $\{x; \varphi(x, y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m)\}$ на $\mathrm{Sat}(\varphi, \bar{y}, \bar{Y})$.

РАЗДЕЛ 1. АВТОМОРФИЗМЫ

Функция F есть по определению *подобие*, если для всякой теоретико-множественной формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ языка FL и для всяких $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{dom}(F)$ имеем

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi(F(y_1), \ldots, F(y_n)).$$

Классы X и Y назовем *подобными* (обозначение $X \approxeq Y$), если существует подобие F, такое, что $\mathrm{dom}(F) = X$ и $\mathrm{rng}(F) = Y$.

Теорема. (1) *Всякое подобие есть взаимно однозначное отображение.*

(2) *Если F — подобие, то F^{-1} также подобие.*

(3) *Композиция подобий есть подобие.*

(4) *Если F — подобие и $G \subseteq F$, то G также подобие.*

(5) *Пустой класс есть подобие.*

(6) *Если $\mathfrak{R}$ — кодируемый направленный класс подобий, то $\bigcup \mathfrak{R}$ есть подобие.*

Пусть φ — формула языка FL_V, и пусть A — константа, обозначающая класс. Тогда через φ^A обозначим формулу, получающуюся из φ путем ограничения всех кванторов по множествам элементами A и всех кванторов по классам подклассами A. Таким образом, кванторы $(\forall x_i)$ и $(\exists x_i)$ заменяются на $(\forall x_i \in A)$ и $(\exists x_i \in A)$ соответственно, а кванторы $(\forall X_i)$ и $(\exists X_i)$ — на $(\forall X_i \subseteq A)$ и $(\exists X_i \subseteq A)$ соответственно.

Следующая теорема показывает, что два подобных класса неразличимы с помощью формул языка FL. Она легко доказывается индукцией по сложности формул.

Теорема. *Если* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ — *формула* FL, F — *подобие и* $A = \operatorname{dom}(F)$, $B = \operatorname{rng}(F)$, *то*

$$\varphi^A(y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m) \equiv \varphi^B(F(y_1), \ldots, F(y_n), F\text{``}Y_1, \ldots, F\text{``}Y_m)$$

для любых $y_1, \ldots, y_n \in A$, $Y_1, \ldots, Y_m \subseteq A$.

В частности, как следует из определения и предыдущей теоремы, все свойства, характеризующие класс Ω, инвариантны относительно подобий. Таким образом, если Z таково, что $Z \approxeq \Omega$, то Z может быть идентифицировано с Ω; возможно, что такое Z можно выбрать с дополнительными полезными свойствами. Подобные соображения применимы и в других случаях.

Теорема. *Пусть F — не более чем счетное подобие. Тогда для всякого множества u существует v, такое, что $F \cup \{\langle v, u\rangle\}$ есть подобие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс всех классов вида $\{x; \varphi(x, F(y_1), \ldots, F(y_n))\}$, где $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — теоретико-множественная формула языка FL и $y_1, \ldots, y_n$ — элементы $\operatorname{dom}(F)$, такие, что $\varphi(u, y_1, \ldots, y_n)$. Очевидно, что $\mathfrak{R}$ кодируем и не более чем счетен. Так как

$$\{x; \varphi_1(x, F(y_1), \ldots, F(y_n))\} \cap \{x; \varphi_2(x, F(y_1), \ldots, F(y_n))\} = \{x; \varphi_1(x, F(y_1), \ldots, F(y_n)) \,\&\, \varphi_2(x, F(y_1), \ldots, F(y_n))\},$$

то класс $\mathfrak{R}$ дуально направлен по включению. Из $\varphi(u, y_1, \ldots, y_n)$ получаем $(\exists x_0)\varphi(x_0, y_1, \ldots, y_n)$ и, следовательно, $(\exists x_0)\varphi(x_0, F(y_1), \ldots, F(y_n))$. Таким образом, каждый элемент $\mathfrak{R}$ — непустой теоретико-множественно определимый класс. Отсюда $\bigcap \mathfrak{R} \neq \varnothing$. Возьмем $v \in \bigcap \mathfrak{R}$. Тогда $F \cup \{\langle v, u\rangle\}$ — подобие.

Подобие, область определения и область значений которого есть V, называется *автоморфизмом.*

Теорема. *Пусть F — автоморфизм. Тогда для каждого множества u имеем $F(u) = F\text{``}u$.*

Доказательство. Очевидно, что из $x \in u$ следует $F(x) \in F(u)$ и, таким образом, $F\text{``}u \subseteq F(u)$. Если $y \in F(u)$, то для некоторого $x$ имеем $y = F(x)$ и $F(x) \in F(u)$. Отсюда следует, что $x \in u$ и, значит, $y \in F\text{``}u$. Мы доказали включение $F(u) \subseteq F\text{``}u$.

Следствие. *Если F — автоморфизм, то X является множеством тогда и только тогда, когда $F``X$ — множество.*

Теорема. *Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ — формула* FL. *Пусть F — автоморфизм. Тогда*

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m) \equiv \varphi(F(y_1), \ldots, F(y_n), F``Y_1, \ldots, F``Y_m)$$

для всяких $y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m$.

Теорема. *Если F_0 — подобие и не более чем счетно, то существует автоморфизм F, такой, что $F_0 \subseteq F$.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha; 0 \neq \alpha \in \Omega\}$ — нумерация всех элементов V. Сконструируем класс $\{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ подобий индуктивно следующим образом: для каждого ненулевого $\alpha \in \Omega$ пусть F_α есть не более чем счетное подобие, такое, что $\bigcup \{F_\beta; \beta \in \Omega \cap \alpha\} \subseteq F_\alpha$, $x_\alpha \in \operatorname{dom}(F_\alpha)$ и $x_\alpha \in \operatorname{rng}(F_\alpha)$. Существование такого F_α следует из предыдущих теорем; для определенности можно взять в качестве F_α первое отображение, имеющее нужные свойства, — первое во вполне-упорядочении класса $P_\omega(V)$.

Наконец, положим $F = \bigcup \{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$. Очевидно, что F — автоморфизм и $F_0 \subseteq F$.

* * *

Множество y по определению *определимо*, если существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, такая, что y есть единственное множество, удовлетворяющее φ, т. е. $\varphi(y) \,\&\, (\exists! x_0)\varphi(x_0)$. Класс всех определимых множеств обозначим через Def.

Теорема. *Произвольное множество y определимо тогда и только тогда, когда $F(y) = y$ для всякого автоморфизма F.*

Доказательство. Пусть y определимо посредством формулы $\varphi(x_0)$, и пусть F — автоморфизм. Тогда $\varphi(F(y))$ и, следовательно, $F(y) = y$. С другой стороны, предположим, что y не определимо. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс, состоящий из всех классов вида $\{x; \varphi(x)\}$, где φ — теоретико-множественная формула языка FL и y удовлетворяет φ. Тогда $\mathfrak{R}$ кодируем, непуст и не более чем счетен, а также $y \in \bigcap \mathfrak{R}$. Предположим, что $\bigcap \mathfrak{R} = \{y\}$; тогда $\{y\}$ может быть получено как пересечение конечного количества элементов $\mathfrak{R}$, так как $\mathfrak{R}$ состоит из теоретико-множественно определимых классов. Следовательно, найдутся теоретико-множественные формулы

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ языка FL, такие, что $\varphi_1(y) \& \ldots \& \varphi_n(y) \& (\exists! x_0)(\varphi_1(x_0) \& \ldots \& \varphi_n(x_0))$. Но тогда множество y определимо, и мы получим противоречие. Таким образом, существует $z \in \bigcap \mathfrak{N}$, такое, что $z \neq y$. Так как z удовлетворяет тем же теоретико-множественным формулам, что и y, множество $\{\langle z, y\rangle\}$ есть подобие. Тогда существует автоморфизм F, такой, что $F(y) = z$, т. е. $F(y) \neq y$.

Теорема. *Множество y определимо тогда и только тогда, когда существует произвольная, не обязательно теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, такая, что $\varphi(y)$ и $(\exists! x_0)\varphi(x_0)$.*

Доказательство. По определению если y определимо, то существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, такая, что $\varphi(y) \& (\exists! x_0)\varphi(x_0)$. С другой стороны, если $\varphi(x_0)$ — произвольная формула языка FL и F — автоморфизм, то $\varphi(y)$ влечет $\varphi(F(y))$. Таким образом, если y — единственное множество, удовлетворяющее φ, то $F(y) = y$. Следовательно, y — неподвижная точка всех автоморфизмов, и, значит, y определимо.

Теорема. *Если $y_1, \ldots, y_n$ определимы, $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — формула FL и $y_{n+1} = \{x; \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$, то y_{n+1} также определимое множество.*

Доказательство. Пусть F — автоморфизм. Тогда $F(y_{n+1}) = F\text{``}\, y_{n+1}$. Таким образом, достаточно доказать, что $y_{n+1} = F\text{``}\, y_{n+1}$. Так как

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi(F(x), F(y_1), \ldots, F(y_n))$$

для всякого x, то

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi(F(x), y_1, \ldots, y_n).$$

Пусть z — произвольный элемент множества y_{n+1}, и пусть x таково, что $z = F(x)$. Имеем $\varphi(z, y_1, \ldots, y_n)$, откуда $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, а следовательно, $x \in y_{n+1}$ и $z \in F\text{``}\, y_{n+1}$. Мы доказали, что $y_{n+1} \subseteq F\text{``}\, y_{n+1}$; обратная импликация доказывается аналогично.

Следствие. *Если $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Def}$, то $\{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_1 \cap y_2$, $y_1 \cup y_2$, $P(y_1)$, $\bigcup y_1$ и т. п. суть определимые множества.*

Очевидно, что $\varnothing$ — определимое множество. Легко проверить по индукции, что каждое конечное натуральное число также определимо,

Теорема. *Класс* Def *счетен.*

Доказательство. Так как имеется лишь счетное количество теоретико-множественных формул, класс Def не более чем счетен. Поскольку $FN \subseteq \mathrm{Def}$, класс Def не может быть конечным.

Теорема. *Каждое подмножество класса* Def *есть элемент этого класса.*

Доказательство. Так как Def счетно, каждое подмножество u класса Def конечно. Следовательно, $u = \{x_1, \ldots, \ldots, x_n\}$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Def}$.

Теорема. *Если $\varphi(x_0)$ — теоретико-множественная формула языка* FL *и класс $X = \{x;\ \varphi(x)\}$ непуст, то он содержит определимый элемент.*

Доказательство. В первом разделе второй главы мы доказали, что существует теоретико-множественное определимое взаимно однозначное отображение V на N. Анализ нашего доказательства показывает, что построенное отображение может быть описано теоретико-множественной формулой языка FL (т. е. без параметров). Таким образом, мы можем построить теоретико-множественную формулу $\vartheta(x_1, x_2)$ языка FL, такую, что класс $R = \{\langle x, y\rangle, \vartheta(x, y)\}$ есть линейное упорядочение V, такое, что для каждого x начальный сегмент, определенный x, есть множество. Пусть $\psi(x_0)$ — формула

$$\varphi(x_0) \mathbin{\&} (\forall x_1)(\varphi(x_1)) \Rightarrow \vartheta(x_0, x_1).$$

Таким образом, $\psi(x_0)$ гласит, что x_0 есть первый элемент, удовлетворяющий φ (в упорядочении R). Очевидно, что существует ровно одно u, удовлетворяющее ψ; таким образом, u — определимый элемент X.

Теорема. *Если множество u определимо и непусто, то оно содержит определимый элемент.*

Доказательство. Пусть $\psi(x_0)$ — теоретико-множественная формула языка FL, определяющая u, и пусть $\varphi(x_0)$ — формула $(\exists x_1)(\psi(x_1) \mathbin{\&} x_0 \in x_1)$; тогда $u = \{x;\ \varphi(x)\}$. По предыдущей теореме u содержит определимый элемент.

* * *

Положим $x \stackrel{\circ}{=} y$ тогда и только тогда, когда для каждой теоретико-множественной формулы $\varphi(x_0)$ языка FL имеем $\varphi(x) = \varphi(y)$. Очевидно, что $\stackrel{\circ}{=}$ есть эквивалентность.

Теорема. $\overset{\circ}{=}$ *есть отношение неразличимости.*

Доказательство. Для каждой теоретико-множественной формулы $\varphi(x_0)$ языка FL положим $R_\varphi = \{\langle x, y\rangle;\ \varphi(x) \equiv \varphi(y)\}$. Очевидно, что R_φ есть теоретико-множественно определимое отношение эквивалентности, имеющее только два класса эквивалентности, $\{x;\ \varphi(x)\}$ и $\{x;\ \neg\varphi(x)\}$. Таким образом, R_φ — отношение неразличимости. Далее, $\overset{\circ}{=}$ есть пересечение всех эквивалентностей R_φ, т. е. пересечение счетного количества отношений неразличимости и, следовательно, $\overset{\circ}{=}$ есть отношение неразличимости.

Теорема. *Отношение* $\overset{\circ}{=}$ *вполне несвязно.*

Доказательство. Образуя конечные пересечения эквивалентностей R_φ, нетрудно построить порождающую последовательность для $\overset{\circ}{=}$, состоящую из эквивалентностей.

Следующая теорема непосредственно получается из предыдущих результатов.

Теорема. (1) *Если* F — *подобие и* $x \in \operatorname{dom}(F)$, *то* $x \overset{\circ}{=} F(x)$.

(2) $x \overset{\circ}{=} y$ *тогда и только тогда, когда существует автоморфизм* F, *такой, что* $y = F(x)$.

(3) $x \overset{\circ}{=} y$ *тогда и только тогда, когда для каждой формулы* $\varphi(x_0)$ *языка* FL *имеем* $\varphi(x) \equiv \varphi(y)$.

В последующем изложении все понятия, введенные в третьей главе, используются применительно к эквивалентности $\overset{\circ}{=}$.

Теорема. *Для каждой формулы* $\varphi(x_0)$ *языка* FL *класс* $\{x;\ \varphi(x)\}$ *есть фигура.*

Доказательство. Пусть $X = \{x;\ \varphi(x)\}$. Пусть $y \in X$ и $z \overset{\circ}{=} y$. Пусть F — автоморфизм, такой, что $z = F(y)$. Тогда из $\varphi(y)$ следует $\varphi(F(y))$ и, значит, $\varphi(z)$. Таким образом, $z \in X$.

Теорема. *Пусть* $\varphi(X_0)$ — *формула* FL, *такая, что* $(\exists! X_0)(\varphi(X_0))$. *Тогда то единственное* Y, *которое удовлетворяет условию* φ, *является фигурой.*

Доказательство. Пусть $\psi(x_0)$ — формула $(\exists X_0)(\varphi(X_0)\ \&\ x_0 \in X_0)$. Тогда $Y = \{x;\ \psi(x)\}$ и Y — фигура по предыдущей теореме.

Теорема. *Класс* Y *является открыто-замкнутой фигурой тогда и только тогда, когда существует теоретико-множественная формула языка* FL, *такая, что* $Y = \{x;\ \varphi(x)\}$.

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ непосредственна (в самом деле, Y есть теоретико-множественно определимая фигура). Обратно, предположим, что Y — фигура и теоретико-множественно определимый класс. Пусть $\mathfrak{N}$ — класс, состоящий из всех классов $\{x; \varphi(x)\}$, где $\varphi(x_0)$ есть теоретико-множественная формула языка FL и $Y \subseteq \{x; \varphi(x)\}$. Тогда класс $\mathfrak{N}$ кодируем, не более чем счетен, дуально направлен по включению и $Y \subseteq \bigcap \mathfrak{N}$. Мы утверждаем, что $Y = \bigcap \mathfrak{N}$. Пусть $y \notin Y$. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс, состоящий из всех классов $\{x; \varphi(x)\}$, где $\varphi(x_0)$ — теоретико-множественная формула языка FL, которая выполняется на y. Класс $\mathfrak{M}$ кодируем, не более чем счетен и дуально направлен по включению. Если бы для каждого $X \in \mathfrak{M}$ было $X \cap Y \neq \varnothing$, то было бы $\bigcap \mathfrak{M} \cap Y \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathrm{Mon}(y) \cap Y \neq \varnothing$ и $y \in Y$, так как Y — фигура. Следовательно, существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, такая, что y удовлетворяет этой формуле и $\{x; \varphi(x)\} \cap Y = \varnothing$. Отсюда $\{x; \neg\varphi(x)\} \in \mathfrak{N}$ и $y \notin \bigcap \mathfrak{N}$. Мы доказали наше утверждение. Поскольку Y теоретико-множественно определим, $\mathfrak{N}$ не более чем счетен, дуально направлен и содержит лишь теоретико-множественно определимые классы, имеем $Y \in \mathfrak{N}$. Таким образом, существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL (т. е. без констант!), такая, что $Y = \{x; \varphi(x)\}$.

Теорема. *Класс* Def *плотен в* V.

Доказательство. Класс $\overline{\mathrm{Def}}$ (замыкание Def) является, конечно, замкнутым и, следовательно, π-классом. Если $y \notin \overline{\mathrm{Def}}$, то $\mathrm{Mon}(y) \cap \overline{\mathrm{Def}} = \varnothing$. Пусть $\mathfrak{N}$ — класс, состоящий из всех классов $\{x; \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — теоретико-множественная формула языка FL, на которой выполняется y. Он кодируем, не более чем счетен, дуально направлен и $\mathrm{Mon}(y) = \bigcap \mathfrak{N}$. Если бы было $X \cap \overline{\mathrm{Def}} \neq \varnothing$ для каждого $X \in \mathfrak{N}$, то было бы $\bigcap \mathfrak{N} \cap \overline{\mathrm{Def}} \neq \varnothing$ и, значит, $\mathrm{Mon}(y) \cap \overline{\mathrm{Def}} \neq \varnothing$. Следовательно, существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, которая выполняется на y и такая, что $\overline{\mathrm{Def}} \cap \{x; \varphi(x)\} = \varnothing$. Но по предыдущей теореме $\{x; \varphi(x)\}$ обязательно имеет определимый элемент, и мы приходим к противоречию.

Теорема. (1) *Если* $y \in \mathrm{Def}$, *то* $\mathrm{Mon}(y) = \{y\}$.

(2) *Если* $\mathrm{Mon}(y)$ — *теоретико-множественно определимый класс, то* $y \in \mathrm{Def}$.

Доказательство. (1) Тривиально. (2) Предположим, что $\mathrm{Mon}(y)$ открыто-замкнут. Тогда существует теоретико-множественная формула $\varphi(x_0)$ языка FL, такая, что $\mathrm{Mon}(y) = \{x; \varphi(x)\}$. Но $\{x; \varphi(x)\}$ имеет определимый элемент, т. е. существует $z \in \mathrm{Def}$, такое, что $y \stackrel{\circ}{=} z$. Но по (1) $\mathrm{Mon}(z) = \{z\}$, следовательно, $y = z$ и $y \in \mathrm{Def}$.

Следствие. *Для всякого* $y \notin \mathrm{Def}$ $\mathrm{Mon}(y)$ — *несчетный* π-*класс.*

Теорема. *Пусть* $\varphi(X_0)$ — *формула* FL, *такая, что* $(\exists! X_0)\varphi(X_0)$. *Если тот единственный класс* Y, *для которого* $\varphi(Y)$, *счетен, то* $Y \subseteq \mathrm{Def}$.

Доказательство. Предположим, что $y \in Y \setminus \mathrm{Def}$. Тогда $\mathrm{Mon}(y) \leqslant Y$, так как Y — фигура. Но $\mathrm{Mon}(y)$ — несчетный класс, и мы приходим к противоречию.

Нетрудно построить формулу $\varphi(X_0)$ языка FL, такую, что $(\exists! X_0)\varphi(X_0)$, и такую, что единственный класс, удовлетворяющий φ, есть Def. Таким образом, Def — наибольший из классов, определимых таким способом.

Теорема. *Пусть* X, Y — *открыто-замкнутые фигуры. Тогда* $X \cap \mathrm{Def} = Y \cap \mathrm{Def}$ *в том и только в том случае, когда* $X = Y$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_0)$, $\psi(x_0)$ — теоретико-множественные формулы языка FL, определяющие X и Y соответственно. Если, например, y удовлетворяет φ, но не ψ, то множество $\{x; \varphi(x) \,\&\, \neg\psi(x)\}$ непусто и, следовательно, содержит определимый элемент.

Утверждение, что Def содержит несчетный элемент, не зависит от тех аксиом, которые мы допустили.

РАЗДЕЛ 2. ЭНДОМОРФИЗМЫ

Во всем этом разделе $\mathfrak{M}$ обозначает ультрафильтр на кольце $\{X; \mathrm{Sd}(X)\}$ всех теоретико-множественно определимых классов.

Будем говорить, что F, $\mathfrak{M}$ и d *когерентны*, если для всякой теоретико-множественной формулы φ языка FL и всяких $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{dom}(F)$ имеем

$$\{x; \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\} \in \mathfrak{M} \equiv \varphi(d, F(y_1), \ldots, F(y_n)).$$

Теорема. (1) *Если* F, $\mathfrak{M}$, d *когерентны, то* F — *подобие.*

(2) *Если* F, $\mathfrak{M}$, d *когерентны и* $G \subseteq F$, то G, $\mathfrak{M}$, d *также когерентны.*

(3) *Пусть* $\mathfrak{N}$ — *кодируемый непустой класс, направленный по включению, такой, что каждый его элемент есть подобие и* F, $\mathfrak{M}$, d *когерентны для всякого* $F \in \mathfrak{N}$. *Тогда* $\bigcup \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, d *также когерентны.*

Теорема. *Если* F — *не более чем счетное подобие, то существует* d, *такое, что* F, $\mathfrak{M}$, d *когерентны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ состоит из всех классов $\{z; \varphi(z, F(y_1), \ldots, F(y_n))\}$, где (1) φ — теоретико-множественная формула языка FL, (2) $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{dom}(F)$ и (3) $\{x; \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\} \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{N}$ кодируем, не более чем счетен, дуально направлен и каждый его элемент есть непустой теоретико-множественно определимый класс. Отсюда следует, что $\bigcap \mathfrak{N} \neq \varnothing$. Выберем $d \in \bigcap \mathfrak{N}$; тогда $F, \mathfrak{M}, d$ когерентны.

Теорема. *Если F, $\mathfrak{M}$, d когерентны и F — не более чем счетный класс, то для всякого множества u существует v, такое, что $F \cup \{\langle v, u\rangle\}$, $\mathfrak{M}$, d когерентны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ состоит из всех классов $\{z; \varphi(d, z, F(y_2), \ldots, F(y_n))\}$, где (1) φ есть теоретико-множественная формула языка FL, (2) $y_2, \ldots, y_n \in \mathrm{dom}(F)$ и (3) $\{y; \varphi(y, u, y_2, \ldots, y_n)\} \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{N}$ кодируем, не более чем счетен, дуально направлен и каждый его элемент теоретико-множественно определим. Предположим, что $\{z; \varphi(d, z, F(y_2), \ldots, F(y_n))\} \in \mathfrak{N}$. Тогда $\{y; \varphi(y, u_1, y_2, \ldots, y_n)\} \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $\{y; (\exists x_1)\varphi(y, x_1, y_2, \ldots, y_n)\} \in \mathfrak{M}$. Поэтому каждый элемент $\mathfrak{N}$ непуст и, значит, $\bigcap \mathfrak{N} \neq \varnothing$. Выберем $v \in \bigcap \mathfrak{N}$; тогда $F \cup \{\langle v, u\rangle\}$, $\mathfrak{M}$, d когерентны.

Подобие, областью определения которого служит V, называется *эндоморфизмом*.

Теорема. *Пусть F_0, $\mathfrak{M}$, d когерентны, и пусть F_0 не более чем счетен. Тогда существует эндоморфизм F, такой, что $F_0 \subseteq F$ и F, $\mathfrak{M}$, d когерентны.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha; 0 \neq \alpha \in \Omega\}$ — нумерация V. Мы построим последовательность $\{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$, такую, что F_α, $\mathfrak{M}$, d когерентны для всякого $\alpha \in \Omega$, каждая функция F_α не более чем счетна, $x_\alpha \in \mathrm{dom}(F_\alpha)$ и $\bigcup \{F_\beta;\ \beta \in \alpha \cap \Omega\} \subseteq F_\alpha$. Для каждого α существование такой F_α гарантируется приведенными выше теоремами; таким образом, мы просто выбираем первого возможного кандидата в фиксированном вполне-упорядочении класса $P_\omega(V)$. Наконец, положим $F = \bigcup \{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$. Очевидно, что F — эндоморфизм, $F_0 \subseteq F$ и F, $\mathfrak{M}$, d когерентны.

Предыдущая теорема имеет несколько важных следствий; приведем некоторые из них.

Теорема. *Существует полумножество, подобное универсальному классу V.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — ультрафильтр, такой, что для каждого y имеем $\{x; y \in x\} \in \mathfrak{M}$. (Очевидно, что такой $\mathfrak{M}$ существует.) Пусть F — эндоморфизм и d — множество, такое, что F, $\mathfrak{M}$, d когерентны. Положим $A = F``V$. Тогда $A \approxeq V$. Так как $\{x; y \in x\} \in \mathfrak{M}$ для каждого y, мы имеем $F(y) \in d$ и, следовательно, $A \subseteq d$.

Эта теорема придает точный смысл нашим туманным замечаниям относительно того, что во всех рассмотрениях альтернативной теории множеств универсальный класс V может быть заменен подходящим полумножеством.

Теорема. *Для всякого X существует класс Y и множество d, такие, что $X \approxeq Y$, $Y \subseteq d$ и*

$$((\forall x)(x \subseteq X \mathbin{\&} \mathrm{Fin}(x) \Rightarrow \varphi(x))) \Rightarrow \varphi(d)$$

для всякой теоретико-множественной формулы φ языка FL.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ таков, что $\{x; y \in x\} \in \mathfrak{M}$ для всякого $y \in X$ и, кроме того, $\{x; \varphi(x)\} \in \mathfrak{M}$ для всякой теоретико-множественной формулы языка FL, которая выполняется на каждом конечном подмножестве X. Очевидно, что такой ультрафильтр $\mathfrak{M}$ существует. Пусть F — эндоморфизм и d — множество, такие, что F, $\mathfrak{M}$, d когерентны. Положим $Y = F``X$. Если $y \in X$, то $\{x; y \in x\} \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $F(y) \in d$; таким образом, $Y \subseteq d$. Если $\varphi(x_0)$ — теоретико-множественная формула языка FL, которая выполняется на всяком конечном подмножестве X, то $\{x; \varphi(x)\} \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $\varphi(d)$.

Заметим теперь, что каждый класс, подобный функции, сам является функцией, и каждое подмножество функции есть функция. Отсюда вытекает такое

Следствие. *Для каждой функции F существуют функции G и g, такие, что $F \approxeq G$, $G \subseteq g$ и, кроме того,*

$$(\forall f \subseteq F)(\mathrm{Fin}(f) \Rightarrow \varphi(f)) \Rightarrow \varphi(g)$$

для всякой теоретико-множественной формулы φ языка FL.

Это — усиление аксиомы о продолжении, так как из него следует, что различные несчетные функции также имеют продолжения. Очевидно, что не всякая функция может быть продолжена до функции-множества, но для каждой функции существует подобная ей функция, которая уже допускает такое продолжение.

Все приведенные выше понятия и теоремы допускают естественное обобщение путем замены языка FL на язык FL_C, где C — не более чем счетный класс. Детали мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Добавление 1

АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА[1]

За последнее столетие канторовская теория множеств заняла в математике настолько видное место, что все, относящееся к математике, автоматически с ней сопоставляется. При этом право на существование отвоевывает себе только то, что можно настолько адаптировать, чтобы результат уже допускал моделирование в канторовской теории. Канторовская теория множеств стала, таким образом, универсальным миром математики.

Подобного сопоставления не может избежать и альтернативная теория множеств. При этом мы видим, что основные принципы, изложенные в нашей книге, могут быть также адаптированы и затем снова интерпретированы таким образом, что и эта теория станет описанием определенной структуры в канторовском мире.

В настоящее время математика, опирающаяся на канторовскую теорию множеств, наталкивается, однако, на серьезные трудности, корни которых уходят как раз в саму канторовскую теорию множеств. Сегодня вместо одной универсальной теории множеств возник целый ряд таких теорий, и никто пока не может решить, которая из них настоящая. В этой ситуации напрашивается вопрос, можно ли вообще некоторую из них считать настоящей.

Ядром канторовской теории множеств, а также ее наиболее уязвимым местом являются бесконечные множества. Канторовская теория множеств — это теория актуально бесконечных множеств. Первой теорией актуально бесконечных множеств была теория Больцано. Канторовская теория является ее продолжением только отчасти. Различия между этими теориями было принято до сих пор считать недостатками, иногда даже заблуждениями, больцановской теории. Мы, однако, не разделяем эту точку зрения.

Первый параграф этого добавления посвящен канторовской теории множеств, причем мы к ней подходим с точки зрения некоторых идей Больцано.

---

[1] Перевод с чешского Аллы Горальчиковой.

Во втором параграфе намечена общая теория актуально бесконечных множеств. Эта теория развивает идеи Больцано и, конечно, во многом выходит за их рамки.

Только в третьем параграфе мы переходим к рассмотрению альтернативной теории множеств. Теория актуально бесконечных множеств трактуется с точки зрения альтернативной теории. Оказывается, что теория актуально бесконечных множеств сводится к изучению определенных структур в альтернативной теории множеств и, следовательно, обе эти теории по крайней мере равноценны.

Ограниченный объем добавлений заставляет нас излагать материал в сжатой форме.

§ 1. О КАНТОРОВСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Возможность

Первоначально возможность понималась в математике чаще всего в смысле осуществимости. Для осуществления чего бы то ни было необходимо могущество. Однако на пути к осуществлению могут встретиться такие препятствия, которые никакое могущество не сумеет преодолеть. Так, например, в классической геометрии утверждалось, что невозможны четыре взаимно перпендикулярные прямые. Такие прямые неосуществимы, поскольку на пути их осуществления стоят свойства пространства.

Больцано понимает возможность в другом, более общем смысле. В § 14 из [1] он пишет: «То, что противоречит какой-либо чисто умозрительной истине, мы должны назвать невозможным, а возможным — то, что не находится в противоречии ни с какой умозрительной истиной».

Возможность в этом смысле слова мы бы сегодня назвали непротиворечивостью. Некоторый объект непротиворечив, если понятия, в которых он отражен в мышлении, и связи между этими понятиями не приводят к противоречию.

Таким образом, осуществимость связана с могуществом, а непротиворечивость — только с разумом.

Предмет больцановской теории множеств

Предметом больцановской теории множеств являются только существующие множества. Для того чтобы множество существовало, необходимо, чтобы существовали все его элементы, каждый в отдельности. Бесконечное множество, следовательно, актуально бесконечно.

Первой задачей, стоящей перед больцановской теорией, было доказательство существования бесконечного множества.

В реальном мире мы не находим примера актуально бесконечного множества. Чтобы указать такое множество, мы должны выйти за рамки непосредственного реального мира. Больцано поэтому прибегает к теологическим рассуждениям. Он доказывает существование определенного бесконечного множества «в мысли божией», причем способом, который не лишен привлекательности и изобретательности.

Предмет канторовской теории множеств

Предметом канторовской теории множеств являются множества, которые с точки зрения Больцано только возможны. Первоначальным намерением канторовской теории было изучение вообще всех возможных множеств.

Деликатный характер предмета канторовской теории множеств требует адекватного подхода к его изучению. Точнее говоря, канторовские множества следовало бы изучать средствами некоторой подходящей модальной логики.

В канторовской теории мы тем не менее изучаем множества не как возможные, а как существующие, что видно уже из того, что при их изучении мы руководствуемся правилами исчисления предикатов. Это, однако, означает, что исходный подход канторовской теории множеств заключается в предположении, что изучаемые множества переведены с помощью какого-то законченного акта из состояния возможности в состояние существования.

Парадокс Рассела

Предположим, что мы посредством какого-то законченного акта перевели в состояние существования некоторые множества. Рассмотрим множество M, элементами которого являются в точности те существующие множества, которые сами не являются своими элементами. Оказывается, что множество M не существует. Доказательство проводится обычным способом.

Сформулировав аккуратно приведенные выше рассуждения, мы приходим к выводу, что здесь нет абсолютно никакого противоречия. Мы только доказали, что множество M не существует, т. е. его нет среди множеств, которые были посредством нашего акта переведены в состояние существования. Тем самым, однако, мы не доказали противоречивость множества M. Следовательно, нет никаких оснований возражать против утверждения, что посредством какого-либо следующего акта может быть переведено в состояние существования и это множество. Само собой разумеется, что после второго акта мы можем аналогичными рассуждениями описать множество, которое не было переведено в состояние существования и этим вторым актом. Но это уже будет какое-то другое множество, а не наше первоначальное множество M.

Итак, парадокс Рассела мы свели к утверждению, что посредством одного законченного акта нельзя перевести в состояние существования *все возможные* множества.

Универсум множеств

Универсум множеств образуют множества, которые были переведены в состояние существования посредством какого-то законченного акта. В канторовской теории множеств, раз мы пользуемся классическим исчислением предикатов, мы изучаем не все возможные множества вообще, а только множества из некоторого универсума множеств.

До начала нашего изучения множества существуют только в смысле возможности, но еще не в смысле существования. Их изучение начинается с того, что мы с помощью какого-то законченного акта переводим в состояние существования множества из некоторого универсума множеств. После следующего законченного акта может возникнуть более обширный универсум множеств, при этом сложение двух последовательных законченных актов мы считаем одним законченным актом.

Условием существования какого-либо множества является, само собой разумеется, существование всех его элементов, каждого в отдельности. Следовательно, некоторое множество может быть переведено в состояние существования только тогда, когда уже заранее были переведены или одновременно с ним переводятся в состояние существования все его элементы. Таким образом, универсум множеств является транзитивным по отношению к отношению принадлежности.

Осуществимые множества

То, что осуществимо, непротиворечиво. Поэтому и произвольное осуществимое множество непротиворечиво. Если некоторое множество осуществимо, то возможно посредством одного законченного акта перевести одновременно в состояние существования все его элементы.

Поскольку канторовская теория множеств предназначена для изучения как можно большего числа множеств, мы не накладываем на осуществимость множества никаких других условий, кроме двух приведенных выше, которые являются необходимыми.

Таким образом, некоторое множество осуществимо, если оно непротиворечиво и если посредством одного законченного акта возможно одновременно перевести в состояние существования все его элементы.

Если осуществимы какие-либо два множества, то мы считаем непротиворечивыми и, следовательно, осуществимыми их пересечение, разность, декартово произведение, неупорядоченную пару и т. п. Подобным же образом мы также считаем непротиворечивым и, значит, осуществимым множество, элементами которого являются в точности все множества из данного универсума множеств.

Кроме того, мы предполагаем осуществимость некоторого бесконечного множества, например множества всех натуральных чисел.

Потенциальная супербесконечность

Любое осуществимое множество можно перевести в состояние существования. Парадокс Рассела мы, напротив, сводим к утверждению, что все осуществимые множества вообще нельзя перевести в состояние существования посредством одного законченного акта. Это значит, что к области всех осуществимых множеств мы подходим так же, как математики, не признающие актуальную бесконечность, подходят, например, к области всех натуральных чисел. В этом случае все натуральные числа не могут быть созданы разом, хотя мы можем создать любое натуральное число, если, конечно, оставить без внимания связанные с этим технические трудности.

Область всех осуществимых множеств больше любой бесконечности, которую можно создать. Поэтому мы будем говорить, что она супербесконечна. Эта супербесконечность неактуальна, поскольку ее нельзя реализовать посредством никакого законченного акта, и поэтому мы ее понимаем в потенциальном смысле.

Теория множеств, усилия которой были направлены на актуализацию потенциальной бесконечности, оказалась неспособной потенциальность устранить, а только смогла переместить ее в более высокую сферу.

Предпосылки осуществимости множества всех подмножеств

Пусть X — некоторое существующее бесконечное множество. Под множеством всех подмножеств множества X мы понимаем множество, элементами которого являются в точности все осуществимые подмножества множества X. Согласно условиям, накладываемым на осуществимость множеств, любое непротиворечивое подмножество множества X осуществимо. Итак, $P(X)$ — это множество, элементами которого являются именно все непротиворечивые подмножества множества X.

В настоящее время нет никаких причин считать множество $P(X)$ противоречивым. Проблема осуществимости множества $P(X)$, однако, более сложна. Для того чтобы мы могли считать множество $P(X)$ осуществимым, необходимо, чтобы все осуществимые подмножества множества X могли быть переведены в состояние существования одновременно посредством одного законченного акта.

Канторовская теория множества признает осуществимость множества $P(X)$. Таким образом, она существенно вышла за рамки больцановской теории множеств. Одновременно Кантор прорывается через до тех пор непреодолимые границы математики, которые были очерчены геометрическим пространством. Его множества не умещаются в пространстве, и роль, которую до сего времени играло пространство, берет на себя ныне канторовская теория множеств. Все это является следствием известной теоремы Кантора, по которой множества X и $P(X)$ имеют разную мощность.

Мы называем некоторый универсум *совершенным*, если он содержит вместе с каждым лежащим в нем множеством и все осуществимые подмножества этого множества.

Проблема актуализации супербесконечности

После того как мы уяснили себе аналогию между потенциальной бесконечностью и супербесконечностью, у нас непременно должна возникнуть мысль, что мы можем, аналогично тому, как мы пришли к понятию актуальной бесконечности, прийти к понятию актуальной супербесконечности. И если мы откровенны, то должны признать, что идея актуализации супербесконечности ничем не сумасброднее идеи актуализации бесконечности. Рассмотрим теперь внимательнее обстоятельства, при которых возможно эту идею осуществить.

Представим себе множество V, элементами которого являются как раз все осуществимые множества. Если множество V противоречиво, то мы должны отказаться от идеи актуализации супербесконечности.

Предположим, что множество V непротиворечиво. Чтобы мы могли перевести это множество в состояние существования, мы должны предположить, что мы настолько могущественны, что можем посредством некоторого суперакта перевести в состояние существования все его элементы Только тогда мы можем говорить об актуализации множества V.

Очевидно, что даже посредством суперактов мы не можем перевести в состояние существования все непротиворечивые множества одновременно. Следовательно, место супербесконечности займет потенциальная суперсупербесконечность и мы будем продолжать процесс актуализации.

Основная гипотеза канторовской теории множеств

Мы уже знаем, что, пользуясь классическими средствами канторовской теории множеств, мы изучаем не все возможные множества, а только множества из некоторого универсума множеств. Это, однако, не означает, что мы хотим отказаться от изучения всех осуществимых множеств. Можно предполагать, что свойства области всех осуществимых множеств отражены в подходящем универсуме множеств. Такими подходящими универсумами мы считаем так называемые ZF-универсумы или GB-универсумы.

Мы говорим, что некоторый универсум множеств является ZF-*универсумом*, если его множества удовлетворяют всем аксиомам Цермело — Френкеля.

Мы говорим, что некоторый универсум множеств — это GB-*универсум*, если он обладает следующими свойствами. Во-первых, в этом универсуме существует такое множество V, так называемый *носитель*, что все множества из этого универсума являются подмножествами множества V. Во-вторых, если мы интерпретируем элементы множества V как множества, а подмножества множества V — как классы, то удовлетворяются все аксиомы Гёделя — Бернайса.

Основную гипотезу канторовской теории множеств, состоящую в том, что существенные свойства области всех осуществимых множеств могут быть отражены в подходящих универсумах множеств, можно более точно сформулировать (в двух вариантах) следующим образом.

ZF-*вариант*. Пусть X — некоторое осуществимое множество. Тогда можно посредством законченного акта перевести в состояние существования совершенный ZF-универсум множеств, содержащий множество X.

GB-*вариант*. Пусть X — некоторое осуществимое множество. Тогда можно посредством законченного акта перевести в состояние существования совершенный GB-универсум множеств, причем множество X является элементом его носителя.

Может случиться, что мы придем к убеждению, что некоторое утверждение, которое нельзя доказать, исходя из аксиом ZF или GB, верно в области всех осуществимых множеств. В этом случае мы требуем, чтобы и это утверждение было справедливо в подходящем универсуме множеств.

Очевидно, что ZF-универсумы отражают свойства области всех осуществимых множеств с позиции, с которой супербесконечность мы считаем потенциальной. С другой стороны, в GB-универсумах открыт в случае необходимости и переход к актуализации супербесконечности.

GB-вариант гораздо сильнее ZF-варианта. Пусть V — некоторое множество, элементами которого являются в точности все множества из некоторого совершенного ZF-универсума, и пусть мы расширили этот универсум, добавив к нему множество V и все его осуществимые подмножества. У нас нет никаких оснований предполагать, что при этом мы получим совершенный GB-универсум множеств.

Большие мощности

Носитель совершенного GB-универсума множеств имеет недостижимую мощность. Из GB-варианта основной гипотезы вытекает, что если X — осуществимое множество, то осуществимо и некоторое множество Y, мощность которого недостижима и больше, чем мощность множества X. Следовательно, аксиома существования собственного класса недостижимых кардиналов является естественной аксиомой теории множеств Гёделя — Бернайса. Подобные рассуждения не проходят, если мы примем только ZF-вариант. Таким образом, утверждение, допускающее осуществимость произвольно больших множеств недостижимых мощностей, является следствием такого подхода к супербесконечности, при котором допустима актуализация.

Пойдем теперь дальше и попытаемся актуализировать супербесконечность. Наша первоначальная область всех бесконечных множеств, таким образом, становится некоторым исходным множеством области бесконечных множеств, поэтому мы будем говорить, что она суперсчетна. Проследив далее эту аналогию, мы придем к заключению, что суперсчетная мощность является сильно измеримым кардиналом. Следовательно, в случае, если мы допускаем актуализацию супербесконечности, мы должны добавить к аксиомам Гёделя — Бернайса и аксиому существования сильной меры.

Наконец, пойдем еще дальше. Мы будем актуализировать супербесконечность, продолжая процесс актуализации до абсурда. Сейчас нас будет интересовать вопрос, какими дополнительными аксиомами можно охватить эту область всех псевдовозможных множеств.

Из сказанного выше вытекает, что довольно хорошо мотивировано добавление к системе GB аксиомы, по которой существует собственный класс сильно измеримых кардиналов.

Этого, однако, было бы недостаточно, поскольку эта аксиома удовлетворяется и в случае, когда приведенные выше итерации актуализации мы проводим не слишком долго. Следовательно, необходимо добавить еще некоторые другие аксиомы.

Мотивировкой для следующей аксиомы нам послужит тот факт, что при достаточном числе итераций актуализации можно описать нетривиальные эндоморфизмы области всех осуществимых множеств. Прослеживая эту идею более подробно, мы приходим к заключению, что наша новая аксиома в системе GB может быть сформулирована в следующей форме:

В каждом собственном классе, элементами которого являются отношения, существуют хотя бы два разных отношения, таких, что одно можно гомоморфно отобразить в другое.

В случае надобности ее можно сформулировать в более сильной форме:

Для любой данной мощности в каждом собственном классе, элементами которого являются отношения, существуют хотя бы два разных отношения, таких, что множество всех гомоморфизмов одного из них в другое имеет бо́льшую мощность, чем эта наперед заданная мощность.

Кризис

Аксиомы больших мощностей не могут быть доказаны ни в системе GB, ни в системе ZF. Несмотря на это, мы привели определенные аргументы в пользу их оправданности, которые, однако, в значительной степени обусловлены тем, что в случае, если бы оказалось, что рассуждения, из которых мы исходили, неправильны, эти аргументы тут же обернулись бы против принятия этих аксиом.

Однако под вопросом оказываются не только аксиомы больших мощностей. В подобном и, собственно говоря, еще в более безвыходном положении находятся аксиома выбора, аксиома детерминированности (axiom of determinateness), гипотеза континуума и целый ряд других аксиом. Об этом мы уже упоминали во введении к нашей книге, и, поскольку речь идет о всем известном кризисе канторовской теории множеств, мы не будем на этих вопросах подробнее останавливаться.

Кризис, постигший канторовскую теорию множеств, начинает постепенно захватывать и другие математические дисциплины. Этого и следовало ожидать, поскольку эти дисциплины опирались с таким доверием на канторовскую теорию множеств, что нередко заменяли свою первоначальную проблематику проблематикой, индуцированной теорией множеств. Поиск убежища в формализме или прагматизме, хотя сам по себе и является определенным выходом из положения, не может удовлетворить всех математиков.

§ 2. НАБРОСОК ОБЩЕЙ ТЕОРИИ АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Об одной формулировке Больцано

В § 20 книги [1] Больцано пишет: «Перейдем теперь к рассуждению о в высшей степени заслуживающей внимания особенности, которая может встретиться, когда речь идет об отношении двух множеств, если оба они бесконечны, которая, собственно, даже встречается всегда и, однако, до сей поры упускалась из виду в ущерб... А именно, я утверждаю: два множества, оба бесконечные, могут быть в таком отношении друг к другу, что, с одной стороны, можно связать в пару каждый предмет, принадлежащий одному из них, с каким-то предметом, принадлежащим другому из них, таким образом, чтобы ни один предмет в обоих множествах не остался без пары, а также чтобы ни один из них не встретился в двух или более парах...»

Сегодня мы бы это, разумеется, сказали короче: два множества, оба бесконечные, могут быть друг на друга взаимно однозначно отображены. Учитывая различие, которое Больцано делает между существующими и возможными множествами, нас не удивит, что он говорит, что упомянутые множества могут быть друг на друга отображены, а никоим образом не что они уже отображены друг на друга. Такое отображение только непротиворечиво, осуществимо ли оно — это уже другой вопрос.

Под влиянием более поздних результатов канторовской теории множеств утверждение Больцано о том, что такое отображение двух бесконечных множеств возможно всегда, считалось заблуждением Больцано.

Генеральный коллапс

Под генеральным коллапсом мы понимаем следующее утверждение:

Пусть X, Y — два существующие бесконечные множества. Тогда осуществимо взаимно однозначное отображение F множества X на Y.

Правильность генерального коллапса можно в наше время считать достаточно подтвержденной. Несомненно, нам нетрудно будет сойтись на том, что множество всех взаимно однозначных функций, областью определения которых является конечное подмножество множества X, а областью значений — конечное подмножество множества Y, по меньшей мере непротиворечиво. Тогда естественное упорядочение этого множества влечет за собой существование взаимно однозначного отображения X на Y. Это обстоятельство является достаточным аргументом в пользу того, чтобы считать такое отображение F непротиворечивым, т. е., представляя себе такое отображение, мы не придем к противоречию. Поскольку декартово произведение множеств X и Y мы считаем осуществимым, нам не остается ничего другого, как считать и отображение F осуществимым.

Следствия генерального коллапса

Если X — некоторое существующее бесконечное множество, то множество $P(X)$ неосуществимо. Если бы было осуществимо некоторое бесконечное множество Y, элементами которого являются все подмножества множества X, то, согласно генеральному коллапсу, было бы осуществимо и взаимно однозначное отображение F множества X на Y. Но тогда диагональный метод Кантора позволяет нам осуществить такое подмножество множества X, которое не является элементом множества Y. Итак, множество $P(X)$ неосуществимо, поскольку нельзя посредством одного законченного акта перевести одновременно в состояние существования все осуществимые подмножества множества X. При этом, однако, множество $P(X)$ все еще может быть непротиворечивым, и, следовательно, мы можем его изучать, хотя уже не методами классического исчисления предикатов, а средствами, более адекватными его характеру.

Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает, что универсум множеств, содержащий бесконечное множество, никогда не будет совершенным.

Область вещественных чисел мы не можем считать завершенной даже в наше время. А именно, мы всегда можем уже существующие вещественные числа каким-либо внешним способом, т. е. способом, выходящим за рамки универсума множеств, в котором мы работаем, перенумеровать натуральными числами, и, таким образом, добавить извне к этой области новое вещественное число.

Подобным же образом все точки, лежащие на некоторой прямой, т. е. все существующие точки, эту прямую не исчерпывают. А именно, мы всегда можем добавить к этой прямой некоторую новую точку. Следовательно, неверно, что прямая — это множество всех лежащих на ней точек, хотя она этим множеством и определена.

Потенциальную супербесконечность нельзя актуализировать. А именно, если бы посредством некоторого суперакта были переведены в состояние существования все первоначально осуществимые множества, то между ними были бы также и все осуществимые подмножества некоторого бесконечного множества X. Следовательно, и множество $P(X)$ было бы осуществимо. Однако, так поступив, мы бы пришли к противоречию с генеральным коллапсом.

Таким образом, генеральный коллапс аннулирует своими следствиями все рассуждения, которые мы проводили в предыдущем параграфе, начиная с заглавия «Предпосылки осуществимости множества всех подмножеств».

Канторовская теория множеств

Математика, миром которой является канторовская теория множеств, — это математика, в которой все события происходят в некотором ZF-универсуме или GB-универсуме множеств. Этот универсум является несовершенным, чего мы, однако, находясь в нем, не осознаем, т. е. пока осуществимым мы считаем только то, что в нем осуществлено.

Такие конструкции, как булевы модели, пермутационные модели, L-модель Гёделя и т. п., которые проводятся внутри нашего универсума множеств, дают возможность предполагать, что возможны и другие универсумы множеств. Действительно, рассматривая эти конструкции с точки зрения общей теории актуально бесконечных множеств, мы тут же обнаруживаем, что они нам дают руководство к осуществлению других ZF-универсумов множеств, которые шире или уже нашего исходного.

Поскольку множество всех подмножеств бесконечного множества неосуществимо, нельзя в каком-то абсолютном смысле ставить вопрос о справедливости аксиомы выбора, гипотезы континуума и т. п. Имеет смысл интересоваться справедливостью этих утверждений только в том или другом ZF-универсуме множеств. Это, однако, другой вопрос, и на него известен целый ряд удовлетворительных ответов.

Математика канторовской теории множеств опирается на основную гипотезу канторовской теории множеств, в которой нам теперь придется отказаться от требования совершенства соответствующих универсумов множеств. Однако аргументы, которые свидетельствовали в пользу этой гипотезы в предыдущем параграфе, теперь теряют свою силу. В частности, аксиома, требующая существования множества всех подмножеств любого множества, ничем не обоснована. Таким образом, математика, опирающаяся на канторовскую теорию множеств, теряет почву под ногами.

Принимая предположение об осуществимости множества всех подмножеств существующего множества, математика попадает в странный мир. Это мир прямо сказочный, в котором мы встречаемся с целым рядом удивительных существ в виде разных фантастических топологических пространств, алгебраических структур и т. п.

Бессмертие канторовской теории множеств состоит не в том, что она настоящая, а как раз, наоборот, в ее фантастичности, в ее способности наводить на размышления, которые позволили ей вдохновлять математику целой эпохи.

Проблема совместимости области осуществимых множеств

После того, как мы при рассмотрении множеств отделили друг от друга непротиворечивость и осуществимость, мы должны обращаться с областью осуществимых множеств очень осторожно.

При рассмотрении некоторых непротиворечивых множеств X и Y разум не запрещает рассматривать оба этих множества одновременно. Совершенно другая ситуация, однако, возникает в случае, когда множества X и Y осуществимы. Мы не можем гарантировать, что область осуществимых множеств совместна, т. е. что из осуществимости каждого из множеств X и Y вытекает также их одновременная осуществимость. В реальном мире это ясно, поскольку, например, из одного камня можно «осуществить» разные статуи, но осуществление одной из них исключает осуществление ряда других.

Многое свидетельствует о том, что область осуществимых множеств несовместна. Во всяком случае, пока эта проблема не будет разрешена, мы должны обращаться с областью осуществимых множеств таким образом, как будто она несовместна.

Переводя множества в состояние существования, мы начинаем фильтровать область осуществимых множеств. А именно, после осуществления некоторого множества область осуществимых множеств может сузиться. На следующем шаге мы можем осуществить уже только множество из этой суженной области осуществимых множеств, и при осуществлении следующего множества область осуществимых множеств опять уменьшится. Поэтому мы будем говорить, что процесс осуществления всегда протекает на некотором фильтре осуществимых множеств.

Множество натуральных чисел

Множество натуральных чисел мы мыслим посредством понятий и связей между ними, которые мы для этой цели создали и которые мы считаем не приводящими к противоречию. При этом, однако, мы не способны разработать такие понятия, с помощью которых нам бы удалось это множество описать совершенно однозначно. Следовательно, предполагая осуществимость множества натуральных чисел, мы предполагаем, что осуществимо только *некоторое* множество из многих, свойства которых уже отражены в соответствующих понятиях. Это означает, что возможны разные множества, для которых выполняются требования, предъявляемые к множеству натуральных чисел, даже в случае, когда отдельные натуральные числа понимаются в смысле фон Неймана.

К множеству натуральных чисел мы также предъявляем требования, относящиеся к области осуществимых множеств. В частности, мы требуем, чтобы это множество было после осуществления стандартным, т. е. чтобы каждое его непустое осуществимое подмножество обязательно обладало первым элементом. Если бы область осуществимых множеств была совместной, было бы возможно только одно стандартное множество натуральных чисел. Но без этого предположения нельзя исключить, что может быть больше чем одно стандартное множество натуральных чисел, точнее, разные осуществимые множества натуральных чисел, отличающиеся даже справедливостью некоторого утверждения о натуральных числах, могут быть осуществлены в качестве стандартных. В этом случае, однако, осуществив в качестве стандартного одно из множеств, мы уже не можем таким же образом осуществить остальные.

При переводе в состояние существования бесконечных множеств мы обычно вначале осуществляем некоторое стандартное множество натуральных чисел. Тем самым мы задаем определенный фильтр на области осуществимых множеств. Этот шаг является решающим, поскольку он предопределяет также непротиворечивость, связанную очевидным образом с таким стандартным множеством натуральных чисел.

Стандартные множества

Имея в распоряжении стандартное осуществленное множество натуральных чисел, мы можем разделить на стандартные и нестандартные и остальные существующие множества. Множество нестандартно, если осуществима последовательность множеств, первым членом которой является само это множество, а каждый следующий член последовательности является элементом предыдущего. В наше время теория множеств ограничивается в большинстве случаев изучением стандартных множеств. Поэтому и в основной гипотезе канторовской теории множеств уместно требовать, чтобы упомянутый универсум множеств был стандартным, т. е. чтобы он не содержал нестандартных множеств.

По несчастному стечению обстоятельств нестандартные множества были вытеснены из теории множеств незадолго до выявления их полезности.

Предположим, что уже создан некоторый стандартный ZF-универсум множеств. Тогда мы можем интерпретировать разные конструкции нестандартных моделей ZF как конструкции изоморфных образов некоторых ZF-универсумов множеств, на этот раз уже нестандартных.

Предположим, что аксиоматическая теория ZF непротиворечива. Тогда по теореме Гёделя мы можем определить ее модель. Таким образом, из того, что было сказано выше, мы имеем право заключить, что можно посредством некоторого законченного акта создать ZF-универсум множеств. Этот универсум может быть, однако, нестандартным. Предположение о возможности создания стандартного ZF-универсума множеств гораздо сильнее предположения о непротиворечивости теории ZF.

§ 3. АКТУАЛЬНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теологическая мотивировка

До сих пор мы обсуждали актуально бесконечные множества таким образом, как будто бы мы знаем, о чем идет речь. Актуальная бесконечность или, более точно, то, что мы под ней подразумеваем, не принадлежит к числу феноменов. Бесконечные множества мы не можем созерцать ни в осуществлении, ни в возможности. Больцано хорошо понимал, что бесконечные множества может созерцать только бог. Математики, однако, не могли смириться с больцановским доказательством существования бесконечного множества, а поскольку другого доказательства они не нашли, они постарались о нем забыть. Теологические мотивировки, однако, не удалось из математики совсем устранить, они были устранены только из сознания. Тем прочнее они обосновались в подсознании.

В силу того что математики присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных множествах справедливы, они как будто поставили себя на место, с которого эти множества можно созерцать, т. е. на место, доступное только богу. Говоря, что некоторое вещественное число, обладающее определенными свойствами, существует, мы ведь имеем в виду не что мы его можем найти или что его вообще кто-то может найти, а что его видит бог. Но мало того, мы начали проводить конструкции, в которые входит бесконечно много объектов. Например, мы образуем предел некоторой последовательности лишь на основании того, что она удовлетворяет условию Больцано — Коши. О пределе такой последовательности мы часто не можем сказать ничего другого, кроме того, что он существует. Бесконечные конструкции и манипуляции часто выходят за рамки наших возможностей. Вследствие этого в математике стали появляться такие объекты, которые никто не может прямо созерцать. Больцановская непрерывная функция без производных может служить этому первым примером. Таким образом мы создаем объекты, которые, собственно, создать не умеем.

Единственным настоящим аргументом в пользу принятия аксиомы выбора является то, что бог обладает могуществом такую функцию выбора сотворить. С другой стороны, аксиома детерминированности также хорошо аргументирована, поскольку бог не может не знать, как надо оптимально играть соответствующую игру.

Наконец, мы должны признать, что акты, посредством которых в предыдущих параграфах переводили множества из состояния возможности в состояние существования, являются не чем иным, как актами божьего могущества.

Феномен актуальной бесконечности

Как бы мы ни старались, мы не можем созерцать бесконечные множества «очами божьими». Глядя на такое множество, мы видим только то, что видим, а не то, что хотели бы видеть. Если нам кажется, что мы видим актуально бесконечное множество, а значит, целое и одновременно все его отдельные элементы, то мы себе представляем это целое и его отдельные элементы как удаляющиеся от нас в разных направлениях к горизонту и по мере приближения к горизонту все более затуманивающиеся.

Таким образом, пытаясь себе представить некоторое актуально бесконечное множество, мы представляем себе только счетный класс в смысле альтернативной теории множеств. Другими словами, то, о чем мы думаем, что это актуально бесконечное множество, в действительности представляет собой счетный класс. Следовательно, мнимый феномен актуальной бесконечности — это феномен счетного множества.

Модели фильтров осуществимых множеств

Представляя себе стандартное множество натуральных чисел, мы себе представляем класс FN. Конечно, нет надобности долго объяснять, что класс A, определенный в конце третьего раздела гл. II, является подходящей моделью максимального фильтра стандартных осуществимых множеств. Таким образом, если мы считаем, что работаем с существующими стандартными актуально бесконечными множествами, то с точки зрения альтернативной теории множеств мы находимся внутри класса A. Изучением классов, моделирующих такие фильтры на осуществимых множествах, которые содержат и нестандартные множества, пока никто в альтернативной теории множеств не занимался. Такое изучение могло бы принести результаты, касающиеся структуры актуально бесконечных нестандартных множеств, т. е. проблематики, от которой классическая теория множеств отказалась.

Расширенный универсум, изучаемый в альтернативной теории множеств, зависит существенным образом от горизонта наших способностей наблюдения. Задачей класса FN является как раз отражение удаленности горизонта. Поскольку горизонт может находиться на разных расстояниях, возможны и разные универсумы, а именно универсумы, отличающиеся своими классами FN. Эти расширенные универсумы могут, конечно, отличаться друг от друга и некоторыми утверждениями, касающимися классов. Каждый такой расширенный универсум имеет свой класс A, который может иметь в разных расширенных универсумах разные дополнительные свойства и, следовательно, моделировать некоторый другой фильтр стандартных осуществимых актуально бесконечных множеств.

Аксиомы канторовской теории множеств

В канторовской теории множеств мы предполагаем возможным такой расширенный универсум, в котором класс A удовлетворяет основной гипотезе канторовской теории множеств. Под ZF-универсумом мы понимаем такой элемент u класса A, что в классе $u \cap A$ выполняются все аксиомы ZF и, кроме того, для любых $x, y \in A$ из того, что $y \in x \in u$, вытекает, что $y \in u$.

Основную гипотезу канторовской теории множеств мы можем теперь сформулировать как следующую дополнительную аксиому альтернативной теории множеств:

Для каждого $x \in A$ существует ZF-универсум $u \in A$, такой, что $x \in u$.

Эта аксиома может быть, конечно, по-разному усилена в соответствии с традиционными канторовскими представлениями. После принятия этой аксиомы, которая канторовской теорией множеств подсознательно принимается, канторовская теория множеств становится не чем иным, как изучением одного специального класса в определенном типе расширенных универсумов, изучаемых альтернативной теорией множеств. До сих пор не было найдено соображений, опирающихся на основную интуицию альтернативной теории множеств, которые свидетельствовали бы в пользу принятия этой аксиомы. Было бы чрезвычайно интересно такие соображения найти.

Добавление 2

Над развитием математики, опирающейся на альтернативную теорию множеств, работает небольшая группа пражских математиков. В этом добавлении приводятся в качестве примера некоторые из достигнутых результатов, которые были или в ближайшее время будут опубликованы. Для каждой темы мы приводим ссылки на те работы, в которых содержатся более подробные сведения.

Выбор приведенных здесь тем отражает личные вкусы авторов. Несмотря на большие усилия, группа неспособна охватить открывающуюся проблематику во всем ее объеме. Последнюю следовало бы развивать в следующих трех направлениях:

1) новая математизация того, что уже математизировалось классически;

2) поиск и математизация тех областей, которые до сих пор не были математизированы;

3) развитие внутренней проблематики альтернативной теории множеств.

Отметим попутно, что при таком развитии альтернативной теории иногда приходится добавлять новые аксиомы. Некоторые из них, например аксиома отражения, интуитивно верны, и поэтому их можно принять на правах равноценных аксиом альтернативной теории множеств.

С другой стороны, некоторые другие аксиомы, например аксиомы канторовской теории множеств, отражают добавочные предпосылки, из которых исходят определенные математические теории, и потому принятие этих аксиом обусловлено нашим желанием заниматься указанными теориями.

Ультрафильтры множеств [21]

Мы будем иметь дело с ультрафильтрами в системе всех теоретико-множественно определимых классов и ограничимся рассмотрением ультрафильтров, содержащих множество.

Следующие два сегмента натурального ряда N естественным образом характеризуют ультрафильтр $\mathfrak{M}$:

$$\mu(\mathfrak{M}) = \{\alpha;\ (\forall p)((p \widehat{\underset{\sim}{<}} \alpha \,\&\, \bigcup p \in \mathfrak{M}) \Rightarrow p \cap \mathfrak{M} = \varnothing)\},$$

$$\nu(\mathfrak{M}) = \{\alpha;\ (\forall x \in \mathfrak{M})(\neg\, x \widehat{\underset{\sim}{<}} \alpha)\}.$$

Теорема. *Если $\mathfrak{M}$ — нетривиальный ультрафильтр на классе Sd_V всех теоретико-множественно определимых классов, содержащий множество, то*

(a) $\alpha, \beta \in \mu(\mathfrak{M}) \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mu(\mathfrak{M})$;
(b) $\alpha \in \mu(\mathfrak{M}) \,\&\, \beta \in \nu(\mathfrak{M}) \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \nu(\mathfrak{M})$;
(c) $FN \subseteq \mu(\mathfrak{M}) \subseteq \nu(\mathfrak{M})$;
(d) *если* $\nu(\mathfrak{M})$ *есть* π-*класс, то* $\mathfrak{M}$ *не является* ω-*полным*;
(e) *если* $\mathfrak{M}$ *не является* ω-*полным, то* $\mu(\mathfrak{M}) = FN$.

Следующие две теоремы показывают, что для всяких двух сегментов $R \subsetneqq S \subset N$ существуют ультрафильтры $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, такие, что $\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{M}') = R \,\&\, \nu(\mathfrak{M}) = \nu(\mathfrak{M}') = S$ и $\mathfrak{M}$ является ω-полным, в то время как $\mathfrak{M}'$ не ω-полон, при естественном предположении, что существование таких ультрафильтров не запрещено первой теоремой.

Теорема. *Если собственное полумножество S есть сегмент, замкнутый относительно сложения, то существует нетривиальный ультрафильтр $\mathfrak{M}$ на Sd_V, не являющийся ω-полным и такой, что $\nu(\mathfrak{M}) = S$.*

Теорема. *Если $FN \subsetneqq R \subsetneqq S$ — два сегмента, такие, что S не является π-классом и имеет место формула*

$$(\forall \alpha \in R)(\forall \beta \in S)(\alpha \cdot \beta \in S \,\&\, (\forall \alpha, \beta \in R)(\alpha \cdot \beta \in R)),$$

то существует ω-полный ультрафильтр на Sd_V, такой, что $\mu(\mathfrak{M}) = R$ и $\nu(\mathfrak{M}) = S$.

Эндоморфичные универсумы [18], [22], [23]

Класс называется *эндоморфичным универсумом*, если он подобен универсальному классу. Следовательно, класс A является эндоморфичным универсумом тогда и только тогда, когда существует эндоморфизм F, такой, что $\mathrm{rng}(F) = A$.

Эндоморфичный универсум является копией универсального класса, подходящим образом вложенной в исходный универсальный класс.

Теорема. *Следующие свойства класса A эквивалентны:*
(1) A — *эндоморфичный универсум*;

(2) *если* $\varphi(Z_1, \ldots, Z_n)$ — *нормальная формула языка* FL_A, *то для любых не более чем счетных подклассов* $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$ *класса* A *имеем* $\varphi^A(X_1, \ldots, X_n) = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$;

(3) *класс* A *удовлетворяет следующим двум условиям*:

(a) *если* $\varphi(z)$ — *теоретико-множественная формула языка* FL_A, *то*

$$(\exists x)(\varphi(x) \Rightarrow (\exists x \in A)\varphi(x),$$

(b) *для каждого счетного класса* $F \subseteq A$ *существует* $f \in A$ *такое, что* $F \subseteq f$;

(4) *если* $\{\varphi_n(z); n \in FN\}$ — *последовательность теоретико-множественных формул языка* FL_A, *то*

$$(\exists x)(\forall n)\varphi_n(x) \Rightarrow (\exists x \in A)(\forall n)\varphi_n(x).$$

Класс Def (который сам по себе не является эндоморфичным универсумом) может быть получен как пересечение двух эндоморфичных универсумов или даже как пересечение убывающей последовательности эндоморфичных универсумов, причем эта последовательность счетна. С другой стороны, пересечение не более чем счетного количества раскрытых эндоморфичных универсумов является эндоморфичным универсумом. Объединение произвольной счетной возрастающей последовательности эндоморфичных универсумов не обязательно является эндоморфичным универсумом.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *кодируемый класс эндоморфичных универсумов, такой, что для всякого не более чем счетного* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ *существует* $A \in \mathfrak{M}$, *такой, что* $\bigcup \mathfrak{N} \subseteq A$. *Тогда* $\bigcup \mathfrak{M}$ *является эндоморфичным универсумом.*

Теорема. *Пусть* A *и* B — *эндоморфичные универсумы. Тогда существует наименьший эндоморфичный универсум, подклассом которого является класс* $A \cup B$.

Теорема. *Существует транзитивный эндоморфичный универсум, являющийся пересечением счетного количества множеств.*

Теорема. *Если* A — *эндоморфичный универсум, то* $\bigcup A$ *является раскрытым эндоморфичным универсумом.*

Для произвольных класса A и множества d положим

$$A[d] = \{f(d); f \in A \,\&\, d \in \mathrm{dom}(f)\}.$$

Теорема. *Пусть* A — *эндоморфичный универсум и* $d \in \bigcup A$. *Тогда* $A[d]$ — *наименьший эндоморфичный универсум, подклассом которого является класс* $A \cup \{d\}$.

Множество y называется *определимым с использованием параметров из класса X*, если существует теоретико-множественная формула $\varphi(z)$ языка FL_X, такая, что верны формулы $(\exists! z)\varphi(z)$ и $\varphi(y)$. Обозначим через Def_X класс всех множеств, определимых с использованием параметров из класса X.

По данным двум классам X, Y определим класс, который мы назовем *резервом* класса X по отношению к классу Y, следующим образом: $\mathrm{Rsv}(X, Y) = \{x; \mathrm{Def}_{X \cup \{x\}} \cap Y = \varnothing\}$.

Теорема. (a) *Пусть X, Y — теоретико-множественно определимые классы или, более общо, пусть пара $\langle X, Y\rangle$ вполне раскрыта* (определение см. далее). *Тогда класс $\mathrm{Rsv}(X, Y)$ раскрыт.*

(b) *Пусть X, Y суть σ-классы. Тогда класс $\mathrm{Rsv}(X, Y)$ раскрыт.*

Теорема. *Пусть $\mathrm{Rsv}(X, Y)$ — раскрытый непустой класс. Тогда существует эндоморфичный универсум A, такой, что $X \subseteq A$ и $Y \cap A = \varnothing$.*

Теорема. *Пусть для каждого множества y класс $\mathrm{Rsv}(X, \{y\})$ раскрыт. Тогда пересечение всех эндоморфичных универсумов, содержащих X, есть в точности класс $\mathrm{Def}\, X$.*

Теорема. *Существует эндоморфичный универсум A, такой, что начальный сегмент $\{\alpha \in N; \alpha \subseteq A\}$ с обычными операциями сложения и умножения не является моделью арифметики Пеано.*

Теорема. (a) *Пусть $w \notin \mathrm{Def}_w$. Тогда существует эндоморфичный универсум A, такой, что $w \subseteq A$ и $w \notin A$.*

(b) *Каждое бесконечное множество u содержит подмножество w, такое, что $w \notin \mathrm{Def}_w$.*

Теорема. *Существует эндоморфичный универсум A, такой, что*

$$(\forall \gamma \in N \setminus FN)(\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \gamma \setminus FN)(\alpha_1 \in A \,\&\, \alpha_2 \notin A).$$

Теорема. *Пусть x, y, d суть множества, причем $\mathrm{Def}_x \cap (y \cup \{d\}) = \varnothing$, $d \in \bigcup \mathrm{Def}\, x$, $x, y \in \mathrm{Def}_{(x \cup \{d\})}$. Тогда существует эндоморфичный универсум A, такой, что $x \subseteq A$, $y \cap A = \varnothing$ и $A[d] = V$.*

Подобия, допускающие расширения до автоморфизмов [23]

Теорема. *Пусть u — множество и H — счетный класс. Предположим, что $F = H \cup \mathrm{Id} \restriction (u \cup \{u\})$ есть подобие и $\mathrm{rng}(F) = \mathrm{dom}(F)$.* (*Здесь* $\mathrm{Id}(x)$ *обозначает тождественное* *отображение множества x.) Тогда существует автоморфизм $\tilde{F}$, такой, что $\tilde{F} \supseteq F$.*

Теорема. *Пусть функция f является множеством и подобием. Предположим, что существует подобие $F \supseteq f$, такое, что* $\mathrm{dom}(F)$ — *наименьший класс T, удовлетворяющий следующим трем условиям: $T \supseteq \mathrm{dom}(f)$, $T \supseteq P(T)$ и для всякого множества $u \subseteq \mathrm{dom}(F)$ имеет место равенство $F(u) = F$“ u (такое F определено однозначно). Тогда существует автоморфизм $\tilde{F}$, такой, что $\tilde{F} \supseteq f$.*

Раскрытия [19]

Класс X назовем *вполне раскрытым*, если для каждой нормальной формулы $\varphi(z, Z)$ языка FL класс $\{x; \varphi(x, X)\}$ раскрыт.

Кодируемый класс $\mathfrak{M}$ называется *раскрытым* тогда и только тогда, когда существует кодирующая пара $\langle K, S\rangle$, которая вполне раскрыта (более точно: мы требуем, чтобы класс $K \times \{0\} \cup S \times \{1\}$ был вполне раскрыт).

Если φ — формула языка FL_V и $\mathfrak{M}$ — кодируемый класс, то через $\varphi^{(\mathfrak{M})}$ мы обозначим формулу, получающуюся из φ ограничением всех кванторов по классам формулы φ элементами $\mathfrak{M}$ (кванторы по множествам при этом остаются без изменения).

Удобно сопоставить каждому классу вполне раскрытый класс, имеющий свойства, аналогичные свойствам исходного класса. В связи с этим кодируемый класс $\mathfrak{M}$ назовем *раскрытием кодируемого класса* $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}$ — вполне раскрытый кодируемый класс, такой, что $\varphi^{(\mathfrak{N})} \equiv \varphi^{(\mathfrak{M})}$ для каждой формулы $\varphi \in \mathrm{FL}$; класс X назовем *раскрытием класса* Y, если X — вполне раскрытый класс, такой, что имеет место $\varphi(X) \equiv \varphi(Y)$ для всякой нормальной формулы $\varphi(Z)$ языка FL.

Теорема. *Для каждого кодируемого класса существует его раскрытие.*

Теорема. *Пусть кодируемый класс $\mathfrak{M}$ есть раскрытие кодируемого класса $\mathfrak{N}$. Тогда кодируемый класс $\mathfrak{M}'$ является раскрытием класса $\mathfrak{N}$ в том и только в том случае, когда существует автоморфизм F, такой, что $\mathfrak{M}' = F$“ $\mathfrak{M}$ В частности, если класс X — раскрытие класса Y, класс Z является раскрытием класса Y тогда и только тогда, когда существует автоморфизм F, удовлетворяющий условию $Z = F$“ X.*

Теорема. *Кодируемый класс $\mathfrak{M}$ вполне раскрыт тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(Rv_1) *если* $\varphi(z, Z_1, \ldots, Z_k)$ — *формула языка* FL_V *и* $X_1, \ldots, X_k$ — *элементы* $\mathfrak{M}$, *то класс* $\{x;\ \varphi^{(\mathfrak{M})}(x, X_1, \ldots, X_k)\}$ *вполне раскрыт*;

(Rv_2) *если* $\{\varphi_n(z, Z_1, \ldots, Z_{k_n});\ n \in FN\}$ — *последовательность формул языка* FL_V *и* $\{X_n;\ n \in FN\}$ — *подкласс* $\mathfrak{M}$, *то*

$$(\forall n)(\exists X \in \mathfrak{M})\left(\varphi_0^{(\mathfrak{M})}\left(X, X_1, \ldots, X_{k_0}\right) \& \ldots \& \varphi_n^{(\mathfrak{M})}\left(X, X_1, \ldots, X_{k_n}\right)\right) \Rightarrow$$
$$(\exists X \in \mathfrak{M})(\forall n)\, \varphi_n^{(\mathfrak{M})}\left(X, X_1, \ldots, X_{k_n}\right).$$

Теорема. *Пусть* $\varphi(Z)$ — *формула языка* FL *и кодируемый класс* $\mathfrak{M}$ — *раскрытие кодируемого класса* $\mathfrak{N}$. *Тогда класс* $\{x;\ \varphi^{(\mathfrak{M})}(x)\}$ *есть раскрытие класса* $\{x;\ \varphi^{(\mathfrak{N})}(x)\}$. *В частности, если* $\psi(z, Z)$ — *нормальная формула языка* FL *и класс* X — *раскрытие класса* Y, *то класс* $\{x;\ \psi(x, X)\}$ *есть раскрытие класса* $\{x;\ \psi(x, Y)\}$.

Теорема. *Если* $\bar{X}$ *обозначает замыкание* X *в топологии* $\stackrel{\circ}{=}$, *то* $\bar{X} = \bigcup \{Y;$ «Y *есть раскрытие класса* X»$\}$.

Теорема. *Кодируемый класс имеет в точности одно раскрытие тогда и только тогда, когда существует кодирующая пара этого кодируемого класса, имеющая вид* $\{x;\ \varphi(x)\}$, *где* φ — *теоретико-множественная формула языка* FL.

Стандартные расширения [18]

В альтернативной теории множеств имеется много различных эндоморфичных универсумов. Во многих случаях имеются возможности для естественного расширения эндоморфичного универсума.

На этом пути мы можем имитировать результаты, которые получаются традиционными методами нестандартного анализа в стиле Робинсона.

Пусть A — эндоморфичный универсум. Операцию Ex, определенную на всех подклассах A, назовем *стандартным расширением* на A, если для всякой нормальной формулы $\varphi(Z_1, \ldots, Z_n)$ языка FL_A и произвольных классов $X_1, \ldots, X_n \subseteq A$ имеем

$$\varphi^A(X_1, \ldots, X_n) \equiv \varphi(ExX_1, \ldots, ExX_n).$$

В частности, доказано, что операция Ex и гёделевы операции коммутируют. Можно показать, что каждый эндоморфичный универсум имеет не более одного стандартного расширения и что существуют эндоморфичные универсумы, у которых есть стандартное расширение.

Теорема. *Класс* $Ex(X)$ *вполне раскрыт для всякого* $X \subseteq A$,

Теорема. *Класс* $Ex(X)\setminus X$ *раскрыт для всякого* $X\subseteq A$ *и, кроме того,* $\neg\operatorname{Fin}(X)\Rightarrow Ex(X)\setminus X\neq\varnothing$.

Аксиома отражения [20]

Эта аксиома может служить примером интуитивно истинного утверждения, которое тем не менее не включено нами в основную аксиоматическую систему альтернативной теории множеств, так как оно в большинстве рассмотрений не является необходимым.

Эта аксиома утверждает существование систем классов (называемых *отражающими системами*), которые, с одной стороны, кодируемы и, таким образом, «малы», а с другой стороны, имеют «те же свойства», что и система всех классов.

Будем говорить, что класс $\mathfrak{R}$ есть *отражающая система (классов)*, если выполняются следующие два условия:

(a) для всякой формулы $\varphi(Z_1, \ldots, Z_k)$ языка FL_V и любых $X_1, \ldots, X_k\in\mathfrak{R}$ имеем $\varphi(X_1, \ldots, X_k)\equiv\varphi^{(\mathfrak{R})}(X_1, \ldots, X_k)$.

(b) если $\{X_n; n\in FN\}\subseteq\mathfrak{R}$, то существует кодирующая пара $\langle K, S\rangle$, которая кодирует $\{X_n; n\in FN\}$.

Аксиома отражения

Для каждого класса X существует *кодируемая* отражающая система $\mathfrak{R}$, такая, что $X\in\mathfrak{R}$.

Аксиома отражения дает возможность ввести новые типы стандартных расширений, определенных на отражающих системах, так, что мы можем имитировать расширения нестандартных методов.

Элиминация бесконечно малых количеств [5]

Пусть $\varphi(X)$ — формула, описывающая некоторое свойство подмножеств вещественных чисел с использованием бесконечно малых количеств или бесконечно больших чисел (т. е. $\varphi(X)$ — формула, все кванторы в которой суть кванторы по вещественным числам, с единственной свободной переменной X по подмножествам вещественных чисел, содержащая в своем составе предикат «быть бесконечно большим натуральным числом»). В частности, мы можем описывать таким образом все свойства вещественных функций от n вещественных переменных в инфинитезимальном исчислении лейбницевского типа. Бесконечно большие натуральные числа могут связываться в различных местах формулы φ кванторами. В такой ситуации существует процедура нахождения формулы $\psi(X)$, описывающей то же самое свойство, в которой используются лишь вспомогательные переменные для вещественных и натуральных чисел и не используются бесконечно большие и бесконечно малые количества.

Заметим, что, например, для свойства $\lim_{x \to a} f(x) = b$ такая процедура хорошо известна со времени Коши.

Заметим еще, что Сохор доказал, что предикат «быть стандартным действительным числом» не может быть элиминирован в общих нестандартных моделях.

Оценки [9] — [11]

Теорема. *Пусть R есть π-эквивалентность на a. Тогда существует метрика h: $a^2 \to RN(\geqslant 0)$ (где $RN(\geqslant 0) = \{x \geqslant 0;\ x \in RN\}$), такая, что имеет место $h(x, y) \doteq 0 \equiv xRy$.*

Более общо: пусть Sd_V^* — раскрытие класса Sd_V, и пусть R есть π-эквивалентность на классе $A \in \mathrm{Sd}_V^*$. Тогда существует метрика H на Sd_V, такая, что имеет место $H(x, y) \doteq 0 \equiv$ $\equiv xRy$.

Заметим, что существует метрика $H \in \mathrm{Sd}_V^*$, такая, что $H(x, y) \doteq 0 \equiv x \overset{\circ}{=} y$, но не существует метрика $H \in \mathrm{Sd}_V$ с этим свойством.

Теорема. *Пусть Q есть π-идеал (соответственно σ-идеал на $P(a)$). Тогда существует отображение h: $P(a) \to RN(\geqslant 0)$ (соответственно h: $P(a) \to N$), такое, что $h(x) \doteq 0 \equiv x \in Q$ (соответственно $h(x) \in FN \equiv x \in Q$) и*

$$h(x \cup y) = h(x) + h(y), \qquad x \leqslant y \Rightarrow h(x) \leqslant h(y).$$

Указанные результаты суть частные случаи общих теорем об оценке.

Изображения моделей PA и ZF

Наша цель состоит в том, чтобы изобразить модели арифметики Пеано PA в виде некоторых подструктур натурального ряда N и модели ZF или $\mathrm{ZF_{fin}}$ в виде подструктур универсального класса V.

Теорема. *Пусть $M \models PA$. Тогда существуют подструктура M^* структуры $\langle N, 0, 1^+\rangle$ и функция f, являющаяся множеством, такая, что M и $\langle M^*, f \cap (M^*)^3\rangle$ изоморфны.*

Теорема. *Пусть $M \models$ ZF или $M \models \mathrm{ZF_{fin}}$. Тогда существует экстенсиональный класс A, такой, что $P_{\mathrm{fin}}(A) \subseteq A$, операции $\cup$, $\setminus$, $\cap$ абсолютны для A и структуры M и $\langle A, \in\rangle$ изоморфны.*

Последняя теорема может быть легко усилена.

Реальные и воображаемые классы [6]

Каждое наше наблюдение характеризуется некоторым отношением неразличимости. Классы, которые мы наблюдаем на горизонте наших возможностей наблюдения, суть в точности фигуры в упомянутом отношении неразличимости. Эти рассмотрения ведут к следующим определениям.

Класс X расширенного универсума назовем *реальным*, если существует отношение неразличимости $\stackrel{+}{=}$, такое, что X является фигурой в этом отношении $\stackrel{+}{=}$. Класс X, не являющийся реальным, называется *воображаемым*.

Теорема. *Пусть F — автоморфизм. Если X — реальный класс, то $F``X$ также реальный класс.*

Теорема. *Если $\varphi(x, X_1, \ldots, X_n)$ — формула языка FL_V и $Y_1, \ldots, Y_n$ суть реальные классы, то класс $\{y; \varphi(y, Y_1, \ldots \ldots, Y_n)\}$ также реальный.*

Теорема. *Класс $\{F``X;\ F$ есть автоморфизм$\}$ кодируем тогда и только тогда, когда X — реальный класс.*

Теорема. *Если X — реальный раскрытый класс, то он есть π-класс.*

Теорема. *Класс Ω является воображаемым.*

Теорема. *Пусть $\stackrel{+}{=}$ — компактное отношение эквивалентности. Пусть $V/\stackrel{+}{=}$ — несчетный класс. Если далее X — селектор отношения эквивалентности $\stackrel{+}{=}$, то X — воображаемый класс.*

Теорема. *Если F — автоморфизм, отличный от тождественного отображения, то F есть воображаемый класс.*

Теорема. *Эндоморфичный универсум является воображаемым классом тогда и только тогда, когда он не является π-классом.*

Теорема. *Для всякой реальной функции F существует последовательность $\{F_n;\ n \in FN\}$ теоретико-множественно определимых функций, такая, что $F \subseteq \bigcup\{F_n;\ n \in FN\}$.*

Теорема. *Если $\alpha \notin FN$, то существует реальное взаимно однозначное отображение α на 2α, и в то же время всякое взаимно однозначное отображение α на α^2 является воображаемым.*

Метаматематика альтернативной теории множеств [16], [17]

Пусть ZF_{fin} (соответственно KM_{fin}) — теория Цермело — Френкеля (соответственно теория Келли — Морса), в которой аксиома бесконечности заменена ее отрицанием. Пусть KM^- — теория множеств Келли — Морса, в которой исключена аксиома множества подмножеств. Через AST мы обозначим подходящим образом формализованную аксиоматическую систему, описанную в первой главе.

Можно показать, что ZF_{fin} эквивалентна той части системы AST, которая относится только к множествам. Далее, KM_{fin} эквивалентна теории, которая получается из AST путем замены аксиомы о продолжении аксиомой, утверждающей, что каждый подкласс множества есть тоже множество.

Результаты, касающиеся интерпретируемости исследованных теорий, можно свести в следующую диаграмму, где $\rightarrow$ обозначает существование интерпретации первой теории во второй. Перечеркнутая стрелка указывает, что соответствующей интерпретации не существует.

$$\begin{tikzcd} KM_{fin} \arrow[r, shift left] & AST \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right] & ZF \arrow[l, shift left, "/" marking] \\ & KM^- \arrow[u, shift right] & \end{tikzcd}$$

Как видно из этой диаграммы, теория AST «существенно сильнее», чем KM_{fin}, в смысле интерпретируемости. Однако положение этих теорий изменится, если мы исследуем доказуемость теоретико-множественных формул. Можно показать, что в AST доказуемы в точности те же теоретико-множественные формулы, что и в ZF_{fin}, и, следовательно, в AST можно доказать меньше теоретико-множественных формул, чем в KM_{fin}.

Показано, что система AST экстремально минимизирована в том смысле, что ни одна ее аксиома не зависит от других. Кроме того, AST не является конечно аксиоматизируемой.

Как теория AST + аксиома отражения, так и теория AST + $\neg$ (аксиома отражения) непротиворечивы относительно системы ZF.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bolzano B. Paradoxien des Unendlichen, Leipzig, 1851. [Имеется перевод: Больцано Б. Парадоксы бесконечного. — Одесса: Mathesis, 1911.]
2. Cantor G. Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten. I—VI, Math. Ann., 1879—1884.
3. Cantor G. Beiträge zur Bergündung der transfiniten Mengenlehre. I, II, Math. Ann., 1895, 1897.
4. Chang C. C., Keisler H. J. Model Theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. [Имеется перевод: Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]
5. Čuda K. An Elimination of infinitely small quantities, CMUC[1]) 21, 3, 1980.
6. Čuda K., Vopěnka P., Real and imaginary classes, CMUC 20, 4, 1979.
7. Husserl E. Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie, Husserliana VI, Martinus Nijhoff, Haag, 1954.
8. Есенин-Вольпин А. С. Анализ потенциальиой осуществимости. — В сб.: Логические исследования. — М.: АН СССР, 1959, с. 218—262.
9. Mlček J. Approximation of π-classes and σ-classes, CMUC 20, 4, 1979.
10. Mlček J. Valuations of structures, CMUC 20, 4, 1979.
11. Mlček J. Monotonic valuations and valuations of triads, CMUC 22, 2, 1981.
12. Resl M. On Models in the Alternative set theory, CMUC 20, 4, 1979.
13. Robinson A. Nonstandard Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.
14. Sochor A. The Alternative Set Theory, Set Theory and Hierarchy Theory, Lecture Notes in Math., 537, 1976.
15. Sochor A. Diferential calculus in the Alternative Set Theory, Set Theory and Hierarchy Theory V, Lecture Notes in Math., 619, 1977. (Терминология в этих двух статьях иногда отличается от терминологии в настоящей книге.)
16. Sochor A. Metamathematics of the Alternative set theory I. CMUC 20, 4, 1979.
17. Sochor A. Metamathematics of the Alternative set theory II, III, будет опубликовано в CMUC.
18. Sochor A., Vopěnka P. Endomorphic universes and their standard extencions, CMUC 20, 4, 1979.
19. Sochor A., Vopěnka P. Revealments, CMUC 21, 1, 1980.
20. Sochor A., Vopěnka P. The axiom of reflection, CMUC 22, 1, 1981.
21. Sochor A., Vopěnka P. Ultrafilters of sets, будет опубликовано в CMUC.

---

[1]) CMUC — Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.

22. Vencovská A. A method for constructing some endomorphic universes, CMUC 20, 4, 1979.
23. Vencovská A. Constructions of endomorphie universes and similarities, будет опубликовано в CMUC.
24. Vopěnka P., Hajek P. The Theory of Semisets, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Academia Praha, 1972.
25. Vopěnka P. The lattice of indiscernibility equivalences, CMUC 20, 4, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, Издательство «Мир».

Петр Вопенка

МАТЕМАТИКА В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МИОЖЕСТВ

Научный редактор Г. М. Цукерман
Млад. научн. ред. Т. А. Денисова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И Шаповалов
Технический редактор Е. С. Потапенкова
Корректор А Я Шехтер

ИБ № 3153

Сдано в набор 14 05 82 Подписаио к печати 04.03 83. Формат 60×90[1]/16 Бумага тнпографская № ?. Гарнитура литературиая. Печать высокая Объем 4,75 бум. л. Усл. печ. л. 9,5. Уч кр-отт. 9,79. Уч-изд. л. 8,33. Тираж 6 000 экз. Зак. 248. Цена 1 р. 10 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговлн. 198052, г. Ленииград, Л-52, Измайловскнй проспект, 29.

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

Вышли в свет:

1. Ф. Гриффитс, Дж. Кинг. ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ.
2. ВЫЧИСЛЕНИЯ В АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.
3. Л. Заде. ПОНЯТИЕ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПРИНЯТИЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ.
4. ГЛАДКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.
5. Л. Ниренберг. ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ.
6. КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ.
7. К. Престон. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ.
8. Д. Орнстейн. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, СЛУЧАЙНОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.
9. М. Гусман. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В $\mathbb{R}^n$.
10. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ВЫБОРОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.
11. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.
12. ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. МАРКОВСКИЙ ПОДХОД.
14. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СИСТЕМ.
15. Р. Харви. ГОЛОМОРФНЫЕ ЦЕПИ И ИХ ГРАНИЦЫ.
16. К ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП.
17. О. О'Мира. ЛЕКЦИИ О СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУППАХ.
18. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ
19. ПРОБЛЕМЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА.
20. ИЗОМОРФИЗМЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП НАД ЦЕЛОСТНЫМИ КОЛЬЦАМИ.
21. РАЗРЕШИМЫЕ И ПРОСТЫЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ.
22. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ.
23. Г. Крайзель. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ.
24. Т. Спрингер. ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ.
25. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ.
26. Ж. Лере. ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.
27. Т. Чепмен. ЛЕКЦИИ О Q-МНОГООБРАЗИЯХ.
28. Р. Мандельбаум. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ.

1р.10 коп.

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

Вышли в свет:

29. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ.
32. Г. Джеймс. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП.
33. У. Фултон, Р. Мак-Ферсон. КАТЕГОРНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ПРОСТРАНСТВ С ОСОБЕННОСТЯМИ.

Готовятся к выпуску:

М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива. ГОЛОНОМНЫЕ КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ. АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ, ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И L-ФУНКЦИИ.

Р. Грэхем. НАЧАЛА ТЕОРИИ РАМСЕЯ.

О. Ковальский. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

К. Оконек, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "М И Р" МОСКВА