Введение в теорию алгебр Ли и их представлений

УДК 554.31
ББК 22.144
Х18

Федеральная Программа Книгоиздания России

Хамфрис Дж.

Х18 Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. / Перев. с англ. Б. Р. Френкина. — М.: МЦНМО, 2003.— 216 с.: ил.

ISBN 5-900916-79-0

Данная книга является одним из лучших пособий для изучения теории алгебр Ли. В ней подробно излагаются основы теории: разрешимые алгебры, нильпотентные алгебры, теоремы Ли и Энгеля, теория полупростых алгебр Ли, системы корней. Обсуждаются классические результаты о построении полупростой алгебры Ли по ее системе корней. Отдельные главы посвящены теории представлений и теории групп и алгебр Шевалле.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

ББК 22.144

Translation from the English language edition: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* by James E. Humphreys.

ISBN 0-387-90053-5 (англ.)
ISBN 3-540-90053-5 (англ.)
ISBN 5-900916-79-0

Оглавление

Предисловие редактора перевода 9
Предисловие 10

Глава I. Основные понятия **12**

§1 Определения и первые примеры 12
1.1 Понятие алгебры Ли 12
1.2 Линейные алгебры Ли 13
1.3 Алгебры Ли дифференцирований 15
1.4 Абстрактные алгебры Ли 16
§2 Идеалы и гомоморфизмы 18
2.1 Идеалы 18
2.2 Гомоморфизмы и представления 19
2.3 Автоморфизмы 21
§3 Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли 23
3.1 Разрешимость 23
3.2 Нильпотентность 25
3.3 Доказательство теоремы Энгеля 26

Глава II. Полупростые алгебры Ли **29**

§4 Теоремы Ли и Картана 29
4.1 Теорема Ли 29
4.2 Разложение Жордана—Шевалле 31
4.3 Критерий Картана 34
§5 Форма Киллинга 36
5.1 Критерий полупростоты 36
5.2 Простые идеалы алгебры L 38
5.3 Внутренние дифференцирования 39
5.4 Абстрактное разложение Жордана 39
§6 Полная приводимость представлений 40
6.1 Модули 41
6.2 Элемент Казимира представления 43
6.3 Теорема Вейля 44
6.4 Сохранение разложения Жордана 45
§7 Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 48
7.1 Веса и старшие векторы 48
7.2 Классификация неприводимых модулей 48
§8 Разложение на корневые подпространства 52

8.1 Максимальные торические подалгебры и корни 52
8.2 Централизатор подалгебры H 53
8.3 Свойства ортогональности 54
8.4 Свойства целочисленности 56
8.5 Свойства рациональности. Выводы 57

Глава III. Системы корней **60**

§9 Аксиоматика 60
9.1 Отражения в евклидовом пространстве 60
9.2 Системы корней 61
9.3 Примеры 62
9.4 Пары корней 63
§10 Простые корни и группа Вейля 65
10.1 Базисы и камеры Вейля 65
10.2 Леммы о простых корнях 68
10.3 Группа Вейля 69
10.4 Неприводимые системы корней 70
§11 Классификация 74
11.1 Матрица Картана для Φ 74
11.2 Графы Коксетера и схемы Дынкина 75
11.3 Неприводимые компоненты 76
11.4 Теорема классификации 77
§12 Построение систем корней и автоморфизмов 82
12.1 Построение типов A—G 83
12.2 Автоморфизмы системы Φ 85
§13 Абстрактная теория весов 87
13.1 Веса 87
13.2 Доминантные веса 89
13.3 Вес δ 89
13.4 Насыщенные множества весов 90

Глава IV. Теоремы об изоморфизме и сопряженности **93**

§14 Теорема об изоморфизме 93
14.1 Редукция к случаю простой алгебры 93
14.2 Теорема об изоморфизме 94
14.3 Автоморфизмы 97
§15 Подалгебры Картана 99
15.1 Разложение алгебры L относительно ad x 99
15.2 Подалгебры Энгеля 100
15.3 Картановские подалгебры 101
15.4 Функториальные свойства 102

§ 16 Теоремы о сопряженности 103
16.1 Группа $\mathscr{E}(L)$ 103
16.2 Сопряженность картановских подалгебр (разрешимый случай 104
16.3 Борелевские подалгебры 105
16.4 Сопряженность борелевских подалгебр 106
16.5 Группы автоморфизмов 109

Глава V. Теоремы существования **113**

§ 17 Универсальные обертывающие алгебры 113
17.1 Тензорные и симметрические алгебры 113
17.2 Построение алгебры $\mathfrak{U}(L)$ 114
17.3 Теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта и ее следствия . . 115
17.4 Доказательство теоремы ПБВ 117
17.5 Свободные алгебры Ли 119
§ 18 Образующие и соотношения 120
18.1 Определяющие соотношения в L 121
18.2 Следствия из соотношений (S1)—(S3) 121
18.3 Теорема Серра 124
18.4 Применение: теоремы существования и единственности . 126
§ 19 Простые алгебры 128
19.1 Критерий полупростоты 128
19.2 Классические алгебры 129
19.3 Алгебра G_2 129

Глава VI. Теория представлений **134**

§ 20 Веса и старшие векторы 134
20.1 Весовые подпространства 134
20.2 Стандартные циклические модули 135
20.3 Теоремы существования и единственности 137
§ 21 Конечномерные модули 140
21.1 Необходимое условие конечномерности 140
21.2 Достаточное условие конечномерности 141
21.3 Серии и диаграммы весов 143
21.4 Образующие и соотношения для $V(\lambda)$ 143
§ 22 Формула кратностей 146
22.1 Универсальный элемент Казимира 146
22.2 Следы на весовых подпространствах 148
22.3 Формула Фрейденталя 150
22.4 Примеры 152
22.5 Формальные характеры 154

§23 Характеры . . . 156
23.1 Инвариантные полиномиальные функции . . . 156
23.2 Стандартные циклические модули и характеры . . . 159
23.3 Теорема Хариш-Чандры . . . 160
§24 Формулы Вейля, Костанта и Стейнберга . . . 166
24.1 Некоторые функции на H^* . . . 167
24.2 Формула кратностей Костанта . . . 168
24.3 Формулы Вейля . . . 170
24.4 Формула Стейнберга . . . 172

Глава VII. Алгебры и группы Шевалле **178**

§25 Базис Шевалле в L . . . 178
25.1 Пары корней . . . 178
25.2 Существование базиса Шевалле . . . 179
25.3 Вопросы единственности . . . 181
25.4 Редукция по простому модулю . . . 182
25.5 Построение групп Шевалле (присоединенный тип) . . . 183
§26 Теорема Костанта . . . 185
26.1 Одна комбинаторная лемма . . . 185
26.2 Частный случай: $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ . . . 186
26.3 Леммы о коммутировании . . . 187
26.4 Доказательство теоремы Костанта . . . 189
§27 Допустимые решетки . . . 191
27.1 Существование допустимых решеток . . . 191
27.2 Стабилизатор допустимой решетки . . . 193
27.3 Изменение допустимой решетки . . . 195
27.4 Переход к произвольному полю . . . 196
27.5 Обзор родственных результатов . . . 197
Литература . . . 200
Послесловие . . . 206
Предметный указатель . . . 209
Список обозначений . . . 212

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию читателя книга Дж. Хамфриса посвящена полупростым комплексным алгебрам Ли и их конечномерным линейным представлениям. Она продолжает традицию книг Н. Джекобсона «Алгебры Ли» и Ж.-П. Серра «Полупростые комплексные алгебры Ли» (перевод которой вошел в книгу Ж.-П. Серра «Алгебры Ли и группы Ли»). Согласно этой традиции, алгебры Ли рассматриваются как первичный и самоценный объект и их теория строится без использования групп Ли или алгебраических групп. Читатель, не желающий отягощать себя изучением теории групп Ли и алгебраической геометрии, будет чувствовать себя очень комфортно, тем более что автор об этом специально позаботился: каждый шаг мотивирован, изложение носит подробный характер и снабжено хорошо продуманными примерами и упражнениями. Дж. Хамфрис известен у нас по переводам двух других его книг «Линейные алгебраические группы» и «Арифметические группы», также отмеченных высокими методическими достоинствами.

От книги Н. Джекобсона настоящая книга отличается более современным характером изложения, а от книги Ж.-П. Серра — большей полнотой и обстоятельностью. Для специалиста особый интерес могут представить разделы, посвященные центру обертывающей алгебры и теории представлений. Наряду с формулой Вейля для характеров, доказываются формулы Фрейденталя и Костанта для кратностей весов, формулы Стейнберга и Брауэра—Климыка для кратностей неприводимых компонент в тензорном произведении представлений. Теория конечномерных представлений излагается в контексте более общих представлений со старшим вектором.

Э. Б. Винберг

Посвящается памяти моих племянников
Уилларда Чарлза Хамфриса III
и Томаса Эдварда Хамфриса

Предисловие

Назначение этой книги — ввести читателя в теорию полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, с особым упором на их представления. Предполагается хорошее знание линейной алгебры (включая собственные значения, билинейные формы, евклидовы пространства и тензорные произведения векторных пространств), так же как и некоторое знакомство с методами абстрактной алгебры. Первые четыре главы вполне доступны сильному студенту; однако остальные три предполагают несколько бо́льшую подготовленность.

Будучи полезной для многих разделов математики и физики, теория полупростых алгебр Ли привлекательна и сама по себе, сочетая определенную глубину с достаточной завершенностью основных результатов. За десятилетие, прошедшее после появления книги Джекобсона, появились новые достижения даже в классических разделах теории. Я попытался представить здесь некоторые из них, сделав предмет более доступным для неспециалистов. Для специалиста нужно отметить следующее.

1. Широко применяется разложение линейных преобразований Жордана — Шевалле с использованием торических подалгебр, заменяющих в полупростом случае более традиционные картановские подалгебры.

2. Теорема сопряженности для картановских подалгебр доказывается (следуя Уинтеру и Мостову) элементарными методами теории алгебр Ли без применения алгебраической геометрии.

3. Теорема об изоморфизме вначале доказана элементарным способом (теорема 14.2), а затем получена вновь как следствие теоремы Серра (п. 18.3), которая дает описание в терминах образующих и соотношений.

4. В тексте и упражнениях с самого начала уделяется большое внимание простым алгебрам типов A, B, C, D.

5. Системы корней вводятся аксиоматически (гл. III) вместе с элементами теории весов.

6. В §§ 23 и 24 представлен концептуальный подход к формуле характеров Вейля, основанный на теории «характеров» Хариш-Чандры и не зависящий от формулы кратностей Фрейденталя (п. 22.3). Мы основывались на диссертации Д.-Н. Верма и более поздней работе И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда и С. И. Гельфанда.

7. Основные конструкции в теории групп Шевалле в гл. VII следуют лекциям Р. Стейнберга.

Мне пришлось опустить многие стандартные темы (большинство из которых, как мне представляется, больше подходят для продвинутого курса), например когомологии, теоремы Леви и Мальцева, теоремы Адо и Ивасавы, классификацию алгебр над не алгебраически замкнутыми полями, алгебры Ли в случае простой характеристики. Надеюсь, что я побудил читателя изучить эти темы по книгам и статьям, упомянутым в библиографии, в особенности таким, как Jacobson [1], Bourbaki [1], [2], Winter [1], Seligman [1].

Несколько слов о технической стороне. Терминология в основном традиционна, а обозначения сведены к минимальному набору, чтобы читателю легче было наводить справки в предыдущих и последующих частях текста. После ознакомления с гл. I—III все остальные можно читать почти в любом порядке, если читатель готов прорабатывать немногочисленные ссылки на другие разделы (имеются следующие исключения: глава VII зависит от § 20 и § 21, а глава VI — от § 17). Ссылка на теорему 14.2 относится к (единственной) теореме в пункте 14.2 (в § 14). Некоторые параграфы завершаются замечаниями, в которых указаны нестандартные источники или материал для дальнейшего чтения, но я не пытался дать историю каждой теоремы (исторические замечания см. в Bourbaki [2] или Freudenthal — de Vries [1]). Список литературы в основном состоит из работ, на которые имеются явные ссылки; более обширную библиографию см. в Jacobson [1], Seligman [1]. В книгу включено около 240 упражнений всех степеней трудности; на некоторые, наиболее легкие, опирается основной текст.

Эта книга выросла из лекций, которые я читал на семинаре по теории алгебраических групп, организованном Национальным научным фондом в Баудойнском колледже в 1968 г.; мое тогдашнее намерение состояло в том, чтобы дополнить блестящие, но неполные записки лекций Ж.-П. Серра [2]. Очевидны и другие мои литературные долги (книгам и запискам лекций, авторами которых являются Н. Бурбаки, Н. Джекобсон, Р. Стейнберг, Д. Дж. Уинтер и др.). Менее очевиден мой личный долг моим учителям Джорджу Селигмэну и Натану Джекобсону, которые первыми пробудили мой интерес к алгебрам Ли. Я признателен Дэвиду Дж. Уинтеру, который позволил мне ознакомиться с его книгой до публикации, Роберту Л. Уилсону за многочисленные полезные замечания по первоначальному варианту книги, Конни Энгл за помощь в подготовке окончательного варианта и Майклу Дж. Де Райзу за моральную поддержку. С благодарностью отмечаю финансовую поддержку со стороны Курантовского института математических наук и Национального научного фонда.

Дж. Э. Хамфрис
Нью-Йорк, 4 апреля 1972 г.

Глава I

Основные понятия

§1. Определения и первые примеры

1.1. Понятие алгебры Ли. Алгебры Ли появляются «в природе» как векторные пространства линейных преобразований, снабженные новой операцией, которая в общем случае не ассоциативна и не коммутативна:

$$[x, y] = xy - yx$$

(операции в правой части этого равенства — обычные действия над линейными преобразованиями). Алгебраические системы такого рода можно описать абстрактно при помощи нескольких аксиом.

Определение. Векторное пространство L над полем F с операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемой *скобкой* или *коммутатором* элементов x и y, называется *алгеброй Ли* над полем F, если выполняются следующие аксиомы:

(L1) операция коммутирования билинейна;

(L2) $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ $(x, y, z \in L)$.

Аксиома (L3) называется *тождеством Якоби*.

Заметим, что из аксиом (L1) и (L2), примененных к элементу $[x + y, x + y]$, следует соотношение антикоммутативности:

(L2′) $[x, y] = -[y, x]$.

(Обратно, если $\operatorname{char} \mathsf{F} \neq 2$, то очевидным образом из (L2′) следует (L2).)

Алгебры Ли L и L' над полем F будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi\colon L \to L'$, удовлетворяющий соотношению $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ для всех $x, y \in L$ (и тогда φ называется *изоморфизмом алгебр Ли*). Также очевидно определение *подалгебры* в L: подпространство K пространства L называется подалгеброй, если для $x, y \in K$ всегда выполнено условие $[x, y] \in K$. Тогда само подпространство K также является алгеброй Ли относительно исходных операций. Заметим, что любой ненулевой элемент $x \in L$ определяет одномерную подалгебру $\mathsf{F}x$, умножение в которой тривиально в силу условия (L2).

В этой книге мы будем рассматривать исключительно алгебры Ли, векторное пространство которых к о н е ч н о м е р н о над полем F. *Это всегда будет подразумеваться, если не указано противное.* Однако отметим сразу, что некоторые бесконечномерные векторные пространства и ассоциативные алгебры над F будут играть важнейшую роль при изучении представлений (гл. V—VII). Отметим также, прежде чем переходить к конкретным примерам, что аксиомы алгебр Ли вполне осмысленны и в более общем случае модулей над коммутативным кольцом, но мы не будем здесь развивать этот подход.

1.2. Линейные алгебры Ли. Если V — конечномерное векторное пространство над F, то $\mathrm{End}\ V$ будет обозначать множество линейных преобразований $V \to V$. Оно имеет размерность n^2 как векторное пространство над F (где $n = \dim V$) и является кольцом с естественной операцией умножения. Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, называемую *скобкой* элементов x и y. С этой операцией $\mathrm{End}\ V$ становится алгеброй Ли над F: аксиомы (L1) и (L2) очевидны, тогда как проверка аксиомы (L3) требует небольшого вычисления (рекомендуем читателю его сейчас и произвести). Чтобы отличать эту новую алгебраическую структуру от прежней, ассоциативной, мы обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ пространство $\mathrm{End}\ V$, рассматриваемое как алгебра Ли. Эту алгебру Ли назовем *полной линейной алгеброй* (поскольку она тесно связана с *полной линейной группой* $\mathrm{GL}(V)$, состоящей из всех обратимых эндоморфизмов пространства V). Мы будем употреблять обозначение $\mathfrak{gl}(V)$ и в случае бесконечномерного пространства V без дальнейших пояснений.

Любая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли*. Читатель, который предпочитает иметь дело с матрицами, а не с линейными преобразованиями, мог бы фиксировать базис в пространстве V, тем самым отождествив $\mathfrak{gl}(V)$ с множеством всех $n \times n$-матриц над F, которое обозначается $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$. Эта процедура безвредна и очень удобна для вычислений в явном виде. Выпишем для последующих ссылок таблицу умножения в алгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ в стандартном базисе, состоящем из матриц e_{ij} (у которых в позиции (i, j) стоит 1, а в остальных 0). Поскольку $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, мы получаем, что

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}. \tag{$*$}$$

Заметим, что все матричные элементы равны ± 1 или 0; таким образом, все они лежат в простом подполе поля F.

Теперь рассмотрим некоторые другие примеры, которые наряду с $\mathfrak{gl}(V)$ играют основную роль в этой книге. Они распадаются на четыре семейства A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ ($\ell \geqslant 1$) и называются *классическими алгебрами* (поскольку соответствуют некоторым из классических линейных групп Ли). В примерах B_ℓ—D_ℓ будем считать, что $\mathrm{char}\ \mathsf{F} \neq 2$.

A_ℓ: Пусть $\dim V = \ell + 1$. Множество эндоморфизмов пространства V с нулевым следом обозначим $\mathfrak{sl}(V)$ или $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathsf{F})$. (Напомним, что *след* матрицы — это сумма ее диагональных элементов; след не зависит от выбора базиса в пространстве V и потому определен для его эндоморфизма.) Поскольку $\mathrm{Tr}(xy)=\mathrm{Tr}(yx)$ и $\mathrm{Tr}(x+y)=\mathrm{Tr}(x)+\mathrm{Tr}(y)$, множество $\mathfrak{sl}(V)$ является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(V)$. Она называется *специальной линейной алгеброй*, поскольку связана со *специальной линейной группой* $\mathrm{SL}(V)$, состоящей из эндоморфизмов с определителем 1. Какова ее размерность? С одной стороны, $\mathfrak{sl}(V)$ — собственная подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, поэтому ее размерность не больше $(\ell+1)^2-1$. С другой стороны, такое количество линейно независимых матриц с нулевым следом можно указать явно: возьмем все e_{ij} $(i\neq j)$, а также все $h_i=e_{ii}-e_{i+1,i+1}$ $(1\leqslant i\leqslant l)$; в общей сложности получим $\ell+(\ell+1)^2-(\ell+1)$ матриц. Этот базис мы всегда будем рассматривать как стандартный базис в $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathsf{F})$.

C_ℓ: Пусть $\dim V=2\ell$, и пусть $(v_1,\ldots,v_{2l})$ — базис. Определим невырожденную кососимметрическую форму f на пространстве V посредством матрицы $s=\begin{pmatrix}0 & I_\ell\\ -I_\ell & 0\end{pmatrix}$. (Можно показать, что невырожденная билинейная форма, удовлетворяющая условию $f(v,w)=-f(w,v)$, существует лишь в четной размерности.) *Симплектическая алгебра*, обозначаемая $\mathfrak{sp}(V)$ или $\mathfrak{sp}(2\ell,\mathsf{F})$, по определению состоит из всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v),w)=-f(v,x(w))$. Читатель легко может проверить, что множество $\mathfrak{sp}(V)$ замкнуто относительно коммутатора. На матричном языке условие симплектичности для $x=\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$ $(m,n,p,q\in\mathfrak{gl}(\ell,\mathsf{F}))$ состоит в том, что $sx=-x^ts$ (здесь x^t — матрица, транспонированная к x), т. е. что $n^t=n$, $p^t=p$ и $m^t=-q$. (Из последнего равенства следует, что $\mathrm{Tr}(x)=0$.) Теперь легко найти базис в $\mathfrak{sp}(2\ell,\mathsf{F})$. Возьмем диагональные матрицы $e_{ii}-e_{\ell+i,\ell+i}$ $(1\leqslant i\leqslant\ell)$, общим количеством ℓ. Добавим к ним все матрицы $e_{ij}-e_{\ell+j,\ell+i}$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant\ell)$, общим количеством $\ell^2-\ell$. Подматрице n сопоставим элементы базиса $e_{i,\ell+i}$ $(1\leqslant i\leqslant\ell)$ и $e_{i,\ell+j}+e_{j,\ell+i}$ $(1\leqslant i<j\leqslant\ell)$, общим количеством $\ell+\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$, и аналогично для p. Суммируя, получаем $\dim\mathfrak{sp}(2\ell,\mathsf{F})=2\ell^2+\ell$.

B_ℓ: Пусть размерность $\dim V=2\ell+1$ нечетна, а f — невырожденная симметрическая билинейная форма на V с матрицей $s=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_\ell\\ 0 & I_\ell & 0\end{pmatrix}$. *Ортогональная алгебра* $\mathfrak{o}(V)$ или $\mathfrak{o}(2\ell+1,\mathsf{F})$ состоит всех эндоморфизмов пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v),w)=-f(v,x(w))$ (то же требование, что и в случае C_ℓ). Если мы разобьем x на блоки так же, как s, скажем, $x=\begin{pmatrix}a & b_1 & b_2\\ c_1 & m & n\\ c_2 & p & q\end{pmatrix}$, то равенство $sx=-x^ts$ превратится в следующую совокупность условий: $a=0$, $c_1=-b_2^t$, $c_2=-b_1^t$, $q=-m^t$, $n^t=-n$, $p^t=-p$. (Как и в случае C_ℓ, отсюда вытекает, что $\mathrm{Tr}(x)=0$.)

В качестве базисных элементов возьмем, во-первых, ℓ диагональных матриц $e_{ii}-e_{\ell+i,\ell+i}$ $(2\leqslant i\leqslant \ell+1)$. Добавим 2ℓ матриц, в которых ненулевыми являются только первая строка и первый столбец: $e_{1,\ell+i+1}-e_{i+1,1}$ и $e_{1,i+1}-e_{\ell+i+1,1}$ $(1\leqslant i\leqslant \ell)$. Подматрице $q=-m^t$ сопоставим (как и в случае C_ℓ) матрицы $e_{i+1,j+1}-e_{\ell+j+1,\ell+i+1}$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant \ell)$. Подматрице n сопоставим $e_{i+1,\ell+j+1}-e_{j+1,\ell+i+1}$ $(1\leqslant i<j\leqslant \ell)$, а подматрице p — матрицы $e_{i+\ell+1,j+1}-e_{j+\ell+1,i+1}$ $(1\leqslant j<i\leqslant \ell)$. Общее количество базисных элементов равно $2\ell^2+\ell$. (Отметим, что такова же была размерность алгебры C_ℓ.)

D_ℓ: Здесь мы получим другую *ортогональную алгебру*. Она строится так же, как и B_ℓ, с теми отличиями, что размерность $\dim V=2\ell$ четна, а s имеет более простой вид $\begin{pmatrix}0 & I_\ell\\ I_\ell & 0\end{pmatrix}$. В качестве упражнения предоставляем читателю построить базис и проверить, что $\dim \mathfrak{o}(2\ell,\mathsf{F})=2\ell^2-\ell$ (упражнение 8).

В заключение этого пункта упомянем еще несколько подалгебр в $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{F})$, которые будут играть для нас важную вспомогательную роль. Пусть $\mathfrak{t}(n,\mathsf{F})$ — множество *верхнетреугольных матриц* (a_{ij}), $a_{ij}=0$ при $i>j$. Далее, пусть $\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$ — множество *строго верхнетреугольных матриц* ($a_{ij}=0$ при $i\geqslant j$). Наконец, пусть $\mathfrak{d}(n,\mathsf{F})$ — множество всех *диагональных матриц*. Тривиально проверяется, что каждое их этих множеств замкнуто относительно коммутирования. Заметим также, что $\mathfrak{t}(n,\mathsf{F})=\mathfrak{d}(n,\mathsf{F})+\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$ (прямая сумма векторных пространств), причем $[\mathfrak{d}(n,\mathsf{F}),\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$, а значит $[\mathfrak{t}(n,\mathsf{F}),\mathfrak{t}(n,\mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$, см. упражнение 5. (Если H, K — подалгебры в L, то $[H,K]$ обозначает подпространство в L, натянутое на коммутаторы $[x,y]$, $x\in H$, $y\in K$.)

1.3. Алгебры Ли дифференцирований. Некоторые линейные алгебры Ли возникают наиболее естественно при рассмотрении дифференцирований алгебр. Под F-*алгеброй* (не обязательно ассоциативной) будем понимать просто векторное пространство $\mathfrak{A}$ над F, наделенное билинейной операцией $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, обозначение которой обычно опускается (исключая случай алгебры Ли, когда используются квадратные скобки). *Дифференцированием* в алгебре $\mathfrak{A}$ мы называем линейное отображение $\delta\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, удовлетворяющее обычному правилу дифференцирования произведения $\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b$. Легко проверяется, что совокупность $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ является векторным подпространством в $\operatorname{End}\mathfrak{A}$. Читателю следует также проверить, что коммутатор $[\delta,\delta']$ двух дифференцирований снова является дифференцированием (хотя их обычное произведение не всегда дифференцирование, см. упражнение 11). Таким образом, $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$.

Поскольку алгебра Ли L является F-алгеброй в указанном смысле, определена алгебра $\operatorname{Der}L$. Некоторые дифференцирования вполне естественно возникают следующим образом. Если $x\in L$, то отображение

$y \mapsto [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L, который мы обозначим $\operatorname{ad} x$. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, поскольку можно переписать тождество Якоби (с учетом (L2′)) в следующем виде: $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$. Дифференцирования такого вида называются *внутренними*, а все остальные — *внешними*. Разумеется, вполне возможно, что $\operatorname{ad} x = 0$ при $x \neq 0$: например, так будет в любой одномерной алгебре Ли. Отображение $L \to \operatorname{Der} L$, имеющее вид $x \mapsto \operatorname{ad} x$, называется *присоединенным представлением* алгебры L; во всем последующем изложении оно играет решающую роль.

Иногда нам придется рассматривать x одновременно как элемент алгебры L и ее подалгебры K. Чтобы избежать путаницы, для действия элемента x на L и на K будут применяться обозначения $\operatorname{ad}_L x$ и $\operatorname{ad}_K x$ соответственно. Например, если x — диагональная матрица, то $\operatorname{ad}_{\mathfrak{d}(n,\mathsf{F})}(x) = 0$, тогда как $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(n,\mathsf{F})}(x)$ не обязано быть нулем.

1.4. Абстрактные алгебры Ли. Мы рассмотрели некоторые естественные примеры линейных алгебр Ли. Известно, что на самом деле любая (конечномерная) алгебра Ли изоморфна некоторой линейной алгебре Ли (теоремы Адо и Ивасавы). Здесь это утверждение не доказывается (см. Jacobson [1], гл. VI, или Bourbaki [1]); тем не менее уже на раннем этапе будет очевидно, что этот результат верен во всех интересующих нас случаях.

Однако иногда бывает желательно рассматривать алгебры Ли абстрактно. Например, если L — произвольное конечномерное векторное пространство над F, то можно превратить его в алгебру Ли, положив $[x, y] = 0$ при всех $x, y \in L$. Такая алгебра Ли с тривиальным умножением называется *абелевой* (поскольку в линейном случае равенство $[x, y] = 0$ как раз означает, что x и y коммутируют). Если L — алгебра Ли с базисом $x_1, \ldots, x_n$, то очевидно, что всю ее таблицу умножения можно восстановить по *структурным константам* a_{ij}^k, которые входят в выражения $[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k$. Более того, константы для которых $i \geqslant j$, восстанавливаются по остальным благодаря свойствам (L2), (L2′). Обратно, можно с самого начала задать абстрактную алгебру Ли множеством ее структурных констант. Естественно, подойдет не всякое множество скаляров $\{a_{ij}^k\}$, но минутное размышление показывает, что достаточно наложить «очевидные» тождества, а именно, вытекающие из (L2) и (L3):

$$a_{ii}^k = 0 = a_{ij}^k + a_{ji}^k; \quad \sum_k (a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m) = 0.$$

Реально нам не потребуется строить алгебры Ли столь искусственным путем. Но в качестве применения абстрактного подхода мы можем найти (с точностью до изоморфизма) все алгебры Ли размерности не выше чем 2.

В размерности 1 имеется единственный базисный вектор x с таблицей умножения $[x, x]=0$ (см. (L2)). В случае размерности 2 выберем в L базис x, y. Ясно, что все произведения в алгебре L пропорциональны $[x, y]$. Если все они равны 0, то алгебра L абелева. В противном случае можно заменить x в базисе на любой вектор, кратный прежнему $[x, y]$, а в качестве y взять любой вектор, независимый от нового вектора x. Тогда $[x, y]=ax$ $(a \neq 0)$. Заменив y на $a^{-1}y$, получаем в итоге $[x, y]=x$. Таким образом, существует не более одной неабелевой двумерной алгебры Ли (читателю следует проверить, что равенство $[x, y]=x$ действительно определяет алгебру Ли).

Упражнения

1. Пусть L совпадает с вещественным векторным пространством $\mathbb{R}^3$. При $x, y \in L$ положим $[x, y]$ равным векторному произведению $x \times y$. Проверьте, что L является алгеброй Ли. Выпишите ее структурные константы относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$.

2. Проверьте, что следующие уравнения, вместе с вытекающими из аксиом (L1) и (L2), определяют структуру алгебры Ли на трехмерном векторном пространстве с базисом (x, y, z): $[x, y]=z$, $[x, z]=y$, $[y, z]=0$.

3. Пусть $x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — упорядоченный базис в $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Вычислите матрицы операторов $\operatorname{ad} x$, $\operatorname{ad} h$, $\operatorname{ad} y$ в этом базисе.

4. Найдите линейную алгебру Ли, изоморфную неабелевой двумерной алгебре, построенной в п. 1.4. [Указание: рассмотрите присоединенное представление.]

5. Проверьте все утверждения, сделанные в п. 1.2 относительно $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$, $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$, $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, и вычислите размерность каждой алгебры, найдя ее базис.

6. Пусть элемент $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ имеет n различных собственных значений $a_1, \ldots, a_n$ в поле F. Докажите, что собственные значения оператора $\operatorname{ad} x$ — это в точности n^2 скаляров $a_i - a_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, разумеется, не обязательно различных.

7. Пусть $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$ обозначает совокупность *скалярных матриц* (т. е. равных единичной матрице, умноженной на скаляр) в алгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$. Докажите, что если характеристика $\operatorname{char} \mathsf{F}$ равна нулю или простому числу, не делящему n, то $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F}) = \mathfrak{sl}(n, \mathsf{F}) + \mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$ (прямая сумма векторных пространств), где $[\mathfrak{s}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})]=0$.

8. Проверьте сделанное в тексте утверждение о размерности алгебры D_ℓ.

9. Покажите, что при $\operatorname{char} \mathsf{F}=0$ каждая из классических алгебр $L=\mathsf{A}_\ell, \mathsf{B}_\ell, \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell$ равняется $[L, L]$. (Это снова показывает, что каждая из этих алгебр состоит из матриц с нулевым следом.)

10. При малых значениях параметра ℓ между некоторыми из классических алгебр обнаруживаются изоморфизмы. Покажите, что A_1, B_1, C_1

изоморфны друг другу, тогда как D_1 — одномерная алгебра Ли. Покажите, что алгебра B_2 изоморфна C_2, а D_3 изоморфна A_3. Что можно сказать о D_2?

11. Проверьте, что коммутатор двух дифференцирований F-алгебры снова является дифференцированием, а обычное произведение — не всегда.

12. Пусть L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем, $x \in L$. Докажите, что подпространство в L, порожденное всеми собственными векторами оператора $\operatorname{ad} x$, является подалгеброй.

§2. *Идеалы и гомоморфизмы*

2.1. Идеалы. Подпространство I алгебры Ли L называется *идеалом* в L, если из того, что $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$. (Так как $[x, y] = -[y, x]$, это условие можно записать как $[y, x] \in I$.) В теории алгебр Ли идеалы играют роль, аналогичную роли нормальных подгрупп в теории групп или двусторонних идеалов в теории колец, — они появляются как ядра гомоморфизмов (см. п. 2.2).

Очевидно, что 0 (подпространство, состоящее только из нулевого вектора) и сама алгебра L являются идеалами в L. Менее тривиальный пример — *центр* $Z(L) = \{z \in L\colon [x, z] = 0$ для всех $x \in L\}$. Из тождества Якоби немедленно следует, что $Z(L)$ действительно является идеалом. Отметим, что алгебра L абелева, если и только если $Z(L) = L$. Другой важный пример — *производная алгебра*, обозначаемая через $[L, L]$ и аналогичная коммутанту в группе. Она состоит из всех линейных комбинаций коммутаторов $[x, y]$ и, очевидно, является идеалом.

Ясно, что алгебра L абелева в том и только том случае, когда $[L, L] = 0$. К другому крайнему случаю, когда $L = [L, L]$, приводит рассмотрение таблицы умножения алгебры $L = \mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ из п. 1.2 (где $n \neq 2$ при $\operatorname{char} \mathsf{F} = 2$) или любой другой классической линейной алгебры Ли (упражнение 1.9).

Если I, J — два идеала в алгебре Ли L, то $I + J = \{x + y;\ x \in I,\ y \in J\}$ также является идеалом. Аналогично идеалом является и $[I, J] = \{\sum x_i y_i;$ $x_i \in I,\ y_j \in J\}$. Производная алгебра $[L, L]$ — частный случай этой конструкции.

Рассмотрение идеалов алгебры Ли — это естественный способ анализа ее структуры. Если в алгебре L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L, L] \neq 0$, то L называется *простой* алгеброй. Условие $[L, L] \neq 0$ (т. е. что алгебра L неабелева) наложено для того, чтобы не придавать излишнее значение одномерной алгебре. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L, L]$.

Пример. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $\operatorname{char} \mathsf{F} \neq 2$. Выберем стандартный базис в L в виде трех матриц (см. п. 1.2)

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножение в алгебре полностью определяется равенствами

$$[x, y]=h, \quad [h, x]=2x, \quad [h, y]=-2y.$$

(Отметим, что x, y, h — собственные векторы оператора $\operatorname{ad} h$, соответствующие собственным значениям 2, -2, 0. Так как $\operatorname{char} \mathsf{F} \neq 2$, эти собственные значения различны.) Пусть I — ненулевой идеал в L и $ax+by+ch$ — произвольный ненулевой элемент в I. Дважды применяя к этому элементу оператор $\operatorname{ad} x$, получаем $-2bx \in I$, а применяя дважды оператор $\operatorname{ad} y$, получаем $-2ay \in I$. Поэтому если a или b отлично от нуля, то I содержит y или x ($\operatorname{char} \mathsf{F} \neq 2$) и, значит, $I=L$. С другой стороны, если $a=b=0$, то $0 \neq ch \in I$ и поэтому $h \in I$, что снова влечет влечет $I=L$. Мы заключаем, что L — простая алгебра.

В случае когда алгебра Ли L не проста (и не одномерна), можно профакторизовать ее по ненулевому собственному идеалу I, получив алгебру Ли меньшей размерности. Конструкция *факторалгебры* L/I (где I — идеал в L) формально та же самая, что и для факторкольца: как векторное пространство, L/I совпадает с факторпространством, а лиево умножение определяется формулой $[x+I, y+I]=[x, y]+I$. Последнее определение корректно. В самом деле, из равенств $x+I=x'+I$, $y+I=y'+I$ вытекает, что $x'=x+u$, $u \in I$, и $y'=y+v$, $v \in I$. Отсюда $[x', y']=[x, y]+([u, y]+[x, v]+[u, v])$, и потому $[x', y']+I=[x, y]+I$, так как все члены в скобках принадлежат идеалу I.

Далее нам понадобится ряд связанных между собой понятий, аналогичных тем, которые возникают в теории групп. *Нормализатор* подалгебры (и вообще подпространства) K алгебры L определяется условием $N_L(K)=\{x \in L\colon [x, K] \subset K\}$. Ввиду тождества Якоби $N_L(K)$ является подалгеброй в L; ее можно описать как наибольшую подалгебру в L, в которой K является идеалом (наиболее важен случай, когда K является подалгеброй в L). Если $K=N_L(K)$, то подалгебра K называется *самонормализуемой*; некоторые важные примеры таких подалгебр возникнут ниже. *Централизатором* подмножества X в L называется множество $C_L(X)=\{x \in L\colon [x, X]=0\}$. Опять-таки из тождества Якоби следует, что $C_L(X)$ является подалгеброй в L. В частности, $C_L(L)=Z(L)$.

2.2. Гомоморфизмы и представления. Следующее определение не будет неожиданным. Линейное преобразование $\varphi\colon L \to L'$ (где L и L' — алгебры Ли над F) называется *гомоморфизмом*, если $\varphi([x, y])=[\varphi(x), \varphi(y)]$ при всех $x, y \in L$. Гомоморфизм φ называется *мономорфизмом* при $\operatorname{Ker} \varphi=0$, *эпиморфизмом* при $\operatorname{Im} \varphi=L'$ и *изоморфизмом* (см. также п. 1.1), если φ одновременно моно- и эпиморфизм. Первое интересное наблюдение состоит в том, что $\operatorname{Ker} \varphi$ является идеалом в L: в самом деле, если $\varphi(x)=0$, а $y \in L$ — произвольный элемент, то $\varphi([x, y])=[\varphi(x), \varphi(y)]=0$. Также несложно проверить, что $\operatorname{Im} \varphi$ является подалгеброй в L'. Как и в других алгебраических теориях, существует естественное взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и идеалами: гомоморфизму φ соответствует идеал $\operatorname{Ker}\varphi$, а идеалу I — *каноническое отображение* $\pi\colon L\to L/I$, $x\mapsto x+I$. Проверка стандартных теорем о гомоморфизмах предоставляется читателю в качестве легкого упражнения.

Предложение. (a) *Если* $\varphi\colon L\to L'$ *— гомоморфизм алгебр Ли, то* $L/\operatorname{Ker}\varphi\cong\operatorname{Im}\varphi$. *Если* I *— произвольный идеал в* L, *содержащийся в* $\operatorname{Ker}\varphi$, *то существует такой единственный гомоморфизм* $\psi\colon L/I\to L'$, *такой что следующая диаграмма коммутативна* (π *— каноническое отображение*):

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

(b) *Если* I *и* J *— два таких идеала в* L, *что* $I\subset J$, *то* J/I *— идеал в* L/I, *а алгебра* $(L/I)/(J/I)$ *естественно изоморфна факторалгебре* L/J.

(c) *Пусть* I, J *— идеалы в* L. *Тогда существует естественный изоморфизм между идеалами* $(I+J)/J$ *и* $I/(I\cap J)$.

Представлением алгебры Ли L называется гомоморфизм $\varphi\colon L\to\mathfrak{gl}(V)$ (где V — векторное пространство над F). Хотя мы предполагаем, что алгебра L конечномерна, полезно рассматривать пространства V произвольной размерности: алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ определена в любом случае. Но пока надо иметь в виду только один важный пример — присоединенное представление $\operatorname{ad}\colon L\to\mathfrak{gl}(L)$, которое было введено в п. 1.3. Оно сопоставляет элементу x оператор $\operatorname{ad}x$, где $\operatorname{ad}x(y)=[x, y]$. (Образ отображения ad содержится в $\operatorname{Der}L\subset\mathfrak{gl}(L)$, но в данный момент для нас это не важно.) Очевидно, что ad — линейное отображение. Проверим, что оно сохраняет коммутатор:

$$\begin{aligned}
[\operatorname{ad}x, \operatorname{ad}y](z) &= \operatorname{ad}x\,\operatorname{ad}y(z)-\operatorname{ad}y\,\operatorname{ad}x(z)=\\
&=\operatorname{ad}x([y, z])-\operatorname{ad}y([x, z])=[x, [y, z]]-[y, [x, z]]=\\
&=[x, [y, z]]+[[x, z], y]= \qquad \text{(L2}'\text{)}\\
&=[[x, y], z]= \qquad \text{(L3)}\\
&=\operatorname{ad}[x, y](z).
\end{aligned}$$

Что является ядром эндоморфизма ad? Оно состоит из всех таких элементов $x\in L$, для которых $\operatorname{ad}x=0$, т. е. $[x, y]=0$ при всех $y\in L$. Итак, $\operatorname{Ker}\operatorname{ad}=Z(L)$. Отсюда уже вытекает интересное следствие: если алгебра L проста, то $Z(L)=0$ и отображение $\operatorname{ad}\colon L\to\mathfrak{gl}(L)$ является мономорфизмом.

Это означает, что *любая простая алгебра Ли изоморфна линейной алгебре Ли*.

2.3. Автоморфизмы. *Автоморфизм* алгебры Ли L — это ее изоморфизм на себя. Группа всех автоморфизмов обозначается $\mathrm{Aut}\, L$. Важные примеры автоморфизмов возникают в случае, когда L — линейная алгебра Ли: $L \subset \mathfrak{gl}(V)$. Если $g \in \mathrm{GL}(V)$ — обратимый эндоморфизм пространства V, причем $gLg^{-1} = L$, то непосредственно проверяется, что отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом алгебры L. В частности, если $L = \mathfrak{gl}(V)$ или даже $\mathfrak{sl}(V)$, то условие $gLg^{-1} = L$ автоматически выполнено и, тем самым, мы получаем большой набор автоморфизмов (см. упражнение 12).

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{char}\, \mathsf{F} = 0$. Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\mathrm{ad}\ x$ *нильпотентен*, т. е. $(\mathrm{ad}\ x)^k = 0$ при некотором $k > 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем F, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(\mathrm{ad}\ x) = 1 + \mathrm{ad}\ x + \frac{(\mathrm{ad}\ x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{ad}\ x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(\mathrm{ad}\ x)^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

Мы утверждаем, что $\exp(\mathrm{ad}\ x) \in \mathrm{Aut}\, L$. Более того, результат остается верным, если $\mathrm{ad}\ x$ заменить на произвольное нильпотентное дифференцирование δ в L. Для доказательства применим знакомое правило Лейбница:

$$\frac{\delta^n}{n!}(xy) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\, \delta^i x \frac{1}{(n-i)!}\, \delta^{n-i} y.$$

Мы имеем (считая, что $\delta^k = 0$)

$$\begin{aligned}
\exp \delta(x)\ \exp \delta(y) &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\delta^j y}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\delta^i x}{i!}\, \frac{\delta^{n-i} y}{(n-i)!}\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{\delta^n(xy)}{n!} = \qquad \text{(правило Лейбница)} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\delta^n(xy)}{n!} = \qquad (\delta^k = 0) \\
&= \exp \delta(xy).
\end{aligned}$$

Обратимость элемента $\exp \delta$ следует (обычным образом) из явного выражения для обратного элемента: $1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \ldots \pm \eta^{k-1}$, $\exp \delta = 1 + \eta$.

Автоморфизм вида $\exp(\mathrm{ad}\ x)$, где оператор $\mathrm{ad}\ x$ нильпотентен, называется *внутренним*; подгруппа в $\mathrm{Aut}\, L$, порожденная такими элементами, обозначается через $\mathrm{Int}\, L$, и ее элементы также называются внутренними автоморфизмами. Это нормальная подгруппа: если $\varphi \in \mathrm{Aut}\, L$, $x \in L$, то $\varphi(\mathrm{ad}\, x)\varphi^{-1} = \mathrm{ad}\, \varphi(x)$, откуда следует, что $\varphi \exp(\mathrm{ad}\, x)\varphi^{-1} = \exp(\mathrm{ad}\, \varphi(x))$.

Например, пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом (x, y, h). Положим $\sigma = \exp \mathrm{ad}\, x \cdot \exp \mathrm{ad}(-y) \cdot \exp \mathrm{ad}\, x$ (тогда $\sigma \in \mathrm{Int}\, L$). Легко вычислить действие преобразования σ на базисе (упражнение 10): $\sigma(x) = -y$, $\sigma(y) = -x$, $\sigma(h) = -h$. Как следствие, преобразование σ имеет порядок 2. Заметим, что $\exp x$, $\exp(-y)$ — корректно определенные элементы группы $\mathrm{SL}(2, \mathsf{F})$, состоящей из 2×2-матриц с определителем 1. Как отмечено в начале этого пункта, трансформирование этими матрицами оставляет алгебру L инвариантной, так что произведение $s = (\exp x)(\exp(-y))(\exp x)$ индуцирует автоморфизм $z \mapsto szs^{-1}$ на L. Несложная выкладка показывает, что $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а трансформирование этим элементом совпадает с действием отображения σ на L.

Отмеченное явление не случайно. Пусть $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ — произвольная линейная алгебра Ли ($\mathrm{char}\, \mathsf{F} = 0$), а элемент $x \in L$ нильпотентен. Мы утверждаем, что

$$(\exp x)y(\exp x)^{-1} = \exp \mathrm{ad}\, x(y) \quad \text{при всех } y \in L. \tag{$*$}$$

Для доказательства заметим, что $\mathrm{ad}\, x = \lambda_x + \rho_{-x}$, где λ_x, ρ_x обозначают левое и правое умножение на x в кольце $\mathrm{End}\, V$ (они, разумеется, коммутируют и нильпотентны). Тогда из обычных свойств экспоненты вытекает, что $\exp \mathrm{ad}\, x = \exp(\lambda_x + \rho_{-x}) = \exp \lambda_x \cdot \exp \rho_{-x} = \lambda_{\exp x} \cdot \rho_{\exp(-x)}$, откуда следует соотношение $(*)$.

Упражнения

1. Докажите, что множество всех внутренних дифференцирований $\mathrm{ad}\, x$, $x \in L$, является идеалом в $\mathrm{Der}\, L$.

2. Покажите, что $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ — это в точности производная алгебра для $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ (см. упражнение 1.9).

3. Докажите, что центр алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ равен совокупности скалярных матриц $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$. Докажите, что центр алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ равен 0, если $\mathrm{char}\, \mathsf{F}$ не делит n. В противном случае центр равен $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$.

4. Докажите, что (с точностью до изоморфизма) существует единственная алгебра Ли над F размерности 3, производная алгебра которой имеет размерность 1 и лежит в $Z(L)$.

5. Пусть $\dim L = 3$, $[L, L] = L$. Докажите, что L — простая алгебра. [Вначале установите, что любой гомоморфный образ алгебры L также совпадает со своей производной алгеброй.] Воспользовавшись этим фактом, еще раз докажите, что алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $\mathrm{char}\, \mathsf{F} \neq 2$, — простая.

6. Докажите, что алгебра $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ простая, если $\mathrm{char}\, \mathsf{F} \neq 3$ (см. упражнение 3). [Используйте стандартный базис h_1, h_2, e_{ij} $(i \neq j)$. Если I —

ненулевой идеал, то I является прямой суммой собственных подпространств для $\operatorname{ad} h_1$ или $\operatorname{ad} h_2$; сравните собственные значения операторов $\operatorname{ad} h_1$, $\operatorname{ad} h_2$ при действии на e_{ij}.]

7. Докажите, что $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ и $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ — самонормализуемые подалгебры в $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$, в то время как нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ равен $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$.

8. Докажите, что если $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$, то в каждой классической линейной алгебре Ли (см. п. 1.2) множество диагональных матриц образует самонормализуемую подалгебру.

9. Докажите предложение 2.2.

10. Пусть σ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, определенный в п. 2.3. Проверьте, что $\sigma(x) = -y$, $\sigma(y) = -x$, $\sigma(h) = -h$.

11. Пусть $L = \mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$, $g \in \mathrm{GL}(n, \mathsf{F})$. Докажите, что отображение алгебры L в себя, определенное формулой $x \mapsto -gx^t g^{-1}$ (x^t — матрица, транспонированная к x), принадлежит $\operatorname{Aut} L$. Докажите, что если $n = 2$, а g — единичная матрица, то этот автоморфизм — внутренний.

12. Пусть L — ортогональная алгебра Ли (типа B_ℓ или D_ℓ). Далее, пусть g — *ортогональная* матрица, т. е. g обратима и $g^t s g = s$. Докажите, что формула $x \mapsto gxg^{-1}$ определяет автоморфизм алгебры L.

§3. *Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли*

3.1. Разрешимость. Естественно изучать алгебру Ли L при помощи ее идеалов. В этом пункте мы займемся построением производных алгебр. Прежде всего определим следующую последовательность идеалов алгебры L (*производный ряд*):

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(1)} = [L, L], \quad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \quad \ldots, \quad L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}].$$

Алгебра L называется *разрешимой*, если $L^{(n)} = 0$ при некотором n. В частности, абелевость влечет разрешимость, тогда как простые алгебры заведомо не разрешимы.

В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры служит алгебра верхнетреугольных матриц $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$, введенная в п. 1.2. Очевидный базис этой алгебры состоит из матричных единиц e_{ij}, где $i \leqslant j$; ее размерность равна $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Чтобы показать, что алгебра $L = \mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ разрешима, найдем ее производный ряд при помощи формулы для коммутаторов из п. 1.2. В частности, мы имеем $[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ при $i < l$, откуда следует, что $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F}) \subset [L, L]$, где $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ — подалгебра верхнетреугольных нильпотентных матриц. Так как $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F}) = \mathfrak{d}(n, \mathsf{F}) + \mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, а $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ — абелева подалгебра, $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ является производной алгеброй для L (см. упражнение 1.5). В алгебре $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ естественно определено понятие «уровня», а именно, уровень элемента e_{ij} равен $j - i$. В формуле для коммутаторов будем предполагать, что $i<j$, $k<l$. Без ограничения общности можно также считать, что $i \neq l$. Тогда $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}$ (если $j=k$) или 0 (в противном случае). Как следствие, любой элемент e_{il} является коммутатором двух матриц, уровни которых в сумме дают его уровень. Отсюда следует, что $L^{(2)}$ порождается элементами e_{ij}, уровень которых больше или равен 2, а $L^{(i)}$ — элементами, уровень которых больше или равен 2^{i-1}. Наконец, очевидно, что $L^{(i)}=0$ при $2^{i-1}>n-1$.

Теперь приведем несколько простых свойств разрешимых алгебр.

Предложение. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L разрешима, то разрешимы все ее подалгебры и гомоморфные образы.*

(b) *Если I — такой разрешимый идеал в L, что алгебра L/I разрешима, то разрешима и сама алгебра L.*

(c) *Если I и J — разрешимые идеалы в L, то идеал $I+J$ также разрешим.*

Доказательство. (a) Если K — подалгебра в L, то из определения следует, что $K^{(i)} \subset L^{(i)}$. Аналогично, если $\varphi\colon L \to M$ — эпиморфизм, то несложная индукция по i показывает, что $\varphi(L^{(i)}) = M^{(i)}$.

(b) Пусть $(L/I)^{(n)}=0$. Применяя утверждение a к каноническому гомоморфизму $\pi\colon L \to L/I$, получаем $\pi(L^{(n)})=0$ или $L^{(n)} \subset I = \operatorname{Ker} \pi$. Далее, если $I^{(m)}=0$, то из очевидного равенства $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$ вытекает, что $L^{(n+m)}=0$. (Примените доказательство утверждения a к случаю $L^{(n)} \subset I$.)

(c) Одна из стандартных теорем о гомоморфизмах (предложение 2.2(c)) устанавливает изоморфизм между алгебрами $(I+J)/J$ и $I/(I\cap J)$. Вторая из них разрешима как гомоморфный образ идеала I. Значит, разрешима и алгебра $(I+J)/J$. Чтобы установить разрешимость алгебры $I+J$, применим утверждение (b) к паре $I+J$, J. □

В качестве первого приложения рассмотрим алгебру Ли L и ее максимальный разрешимый идеал S (т. е. такой разрешимый идеал, который не содержится ни в каком большем разрешимом идеале). Если I — любой другой разрешимый идеал в L, то из п. (c) доказанного предложения вытекает, что $S+I=S$ (ввиду максимальности идеала S), т. е. $I \subset S$. Это доказывает существование единственного максимального разрешимого идеала, называемого *радикалом* алгебры L и обозначаемого через $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется *полупростой*. Например, *простая алгебра является полупростой*: в ней нет идеалов, кроме нее самой и 0, и она не разрешима. Отметим, что если алгебра L не разрешима, т. е. $L \neq \operatorname{Rad} L$, то алгебра $L/\operatorname{Rad} L$ полупроста (примените п. (b) доказанного предложения). Изучению полупростых алгебр Ли (над полем нулевой характеристики) преимущественно и посвящена эта книга. (Однако попутно потребуются и некоторые разрешимые подалгебры.)

3.2. Нильпотентность. Определение разрешимости воспроизводит соответствующее понятие из теории групп, восходящее к Абелю и Галуа. Наоборот, понятие нильпотентной группы было построено уже по образцу соответствующего понятия из теории алгебр Ли. Определим последовательность идеалов алгебры Ли L (*убывающий* или *нижний центральный ряд*), полагая

$$L^0 = L, \quad L^1 = [L, L] \; (= L^{(1)}), \quad L^2 = [L, L^1], \quad \ldots, \quad L^i = [L, L^{i-1}].$$

Алгебра L называется *нильпотентной*, если $L^n = 0$ при некотором n. Например, любая абелева алгебра нильпотентна. Очевидно, что $L^{(i)} \subset L^i$ для всех i, и поэтому нильпотентные алгебры разрешимы. Обратное, однако, неверно. Рассмотрим снова алгебру $L = \mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$. Из п. 3.1 видно, что $L^{(1)} = L^1 = \mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, $L^2 = [L, L^1] = L^1$, и поэтому $L^i = L^1$ для всех $i \geqslant 1$. С другой стороны, легко видеть, что алгебра $M = \mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ нильпотентна. Действительно, M^1 порождается элементами e_{ij}, уровень которых не меньше 2, M^2 — элементами уровня не меньше 3, ..., M^i — элементами уровня не меньше $i + 1$.

Предложение. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы также нильпотентны.*

(b) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

(c) *Если алгебра L нильпотентна и $L \neq 0$, то $Z(L) \neq 0$.*

Доказательство. (a) Нужно воспроизвести доказательство утверждения (a) предложения 3.1.

(b) Пусть $L^n \subset Z(L)$. Тогда $L^{n+1} = [L, L^n] \subset [L, Z(L)] = 0$.

(c) Последний ненулевой член убывающего центрального ряда содержится в центре алгебры L. □

Условие нильпотентности алгебры L может быть сформулировано по-другому: при некотором n (зависящем только от L) $\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \ldots \ldots \operatorname{ad} x_n(y) = 0$ для всех $x_i, y \in L$. В частности, $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ для всех $x \in L$. Если теперь x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad-*нильпотентным*, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. На этом языке предыдущее условие можно сформулировать так: если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Замечательно, что верно и обратное.

Теорема (Энгель). *Если все элементы алгебры Ли L* ad-*нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

Доказательство будет приведено в следующем пункте. С помощью теоремы Энгеля легко доказать нильпотентность алгебры $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, не вычисляя ее убывающий центральный ряд в явном виде. Нам лишь потребуется следующая простая лемма.

Лемма. *Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$ — нильпотентный эндоморфизм. Тогда эндоморфизм* ad x *также нильпотентен.*

Доказательство. Как и в п. 2.3, с элементом x можно связать два эндоморфизма пространства End V — умножение слева и справа: $\lambda_x(y) = xy$ и $\rho_x(y) = yx$. Эти эндоморфизмы нильпотентны, поскольку нильпотентен элемент x. При этом очевидно, что λ_x и ρ_x коммутируют. В любом кольце (в данном случае End(End V)) сумма и разность коммутирующих нильпотентов снова нильпотентны (почему?). Поэтому отображение ad $x = \lambda_x - \rho_x$ нильпотентно. □

Короткое предупреждение: матрица в $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ легко может оказаться ad-нильпотентной, не будучи нильпотентной (пример — единичная матрица). Читателю постоянно следует держать в уме два противоположных типа нильпотентных линейных алгебр Ли: $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ и $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$.

3.3. Доказательство теоремы Энгеля. Теорема Энгеля может быть выведена из следующего результата, который интересен и сам по себе. Напомним, что нильпотентное линейное преобразование всегда имеет хотя бы один собственный вектор, отвечающий его единственному собственному значению 0. Это в точности случай $\dim L = 1$ следующей теоремы.

Теорема. *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если L состоит из нильпотентных эндоморфизмов и $V \neq 0$, то существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $L \cdot v = 0$.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности алгебры L. Случай $\dim L = 0$ (и $\dim L = 1$) очевиден. Пусть $K \neq L$ — некоторая подалгебра в L. Согласно лемме 3.2 подалгебра K действует (посредством оператора ad) как алгебра Ли нильпотентных линейных преобразований на векторном пространстве L, а как следствие и на факторпространстве L/K. Поскольку $\dim K < \dim L$, по предположению индукции в пространстве L/K существует вектор $x + K \neq K$, аннулируемый образом подалгебры K в $\mathfrak{gl}(L/K)$. Это в точности означает, что $[y, x] \in K$ при всех $y \in K$, тогда как $x \notin K$. Другими словами, подалгебра K не совпадает со своим нормализатором $N_L(K)$ (см. п. 2.1).

Пусть теперь K — максимальная собственная подалгебра в L. Из предыдущего следует, что $N_L(K) = L$, т. е. K является идеалом в L. Если $\dim L/K > 1$, то прообраз в L одномерной подалгебры из L/K (которая всегда существует) будет собственной подалгеброй, строго включающей K, что противоречит предположению. Поэтому K имеет коразмерность 1. Это позволяет нам записать $L = K + \mathsf{F}z$ с произвольным вектором $z \in L \setminus K$.

По предположению индукции пространство $W = \{v \in V : K \cdot v = 0\}$ ненулевое. Так как K является идеалом, пространство W инвариантно относительно L: если $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$, то $yx \cdot w = xy \cdot w - [x, y] \cdot w = 0$. Выберем вектор $z \in L \setminus K$, как выше. Тогда нильпотентный эндоморфизм z (действующий теперь на подпространстве W) имеет собственный вектор, т. е. существует такой ненулевой вектор $v \in W$, что $z \cdot v = 0$. В итоге $L \cdot v = 0$, что и требовалось. □

Доказательство теоремы Энгеля. По условию все элементы алгебры L являются ad-нильпотентными. Поэтому алгебра $\mathrm{ad}\, L \subset \mathfrak{gl}(L)$ удовлетворяет условию теоремы 3.3. (Можно считать, что $L \neq 0$.) Следовательно, в алгебре L существует такой вектор $x \neq 0$, что $[L, x] = 0$, т. е. $Z(L) \neq 0$. При этом алгебра $L/Z(L)$, очевидно, состоит из ad-нильпотентных элементов и имеет меньшую размерность, чем L. Индукция по размерности алгебры L показывает, что алгебра $L/Z(L)$ нильпотентна. Тогда ввиду утверждения (b) предложения 3.2 нильпотентна и алгебра L. □

Имеется полезное следствие (на самом деле равносильный вариант) теоремы 3.3, который показывает «типичность» алгебры $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$. Сначала дадим одно определение. Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\dim V = n$. *Флаг* в пространстве V — это цепочка подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, $\dim V_i = i$. Пусть $x \in \mathrm{End}\, V$. Будем говорить, что x оставляет инвариантным этот флаг, если $x \cdot V_i \subset V_i$ при всех i.

Следствие. *Если предположения теоремы выполнены, то в пространстве V существует флаг (V_i), инвариантный относительно L, причем $x \cdot V_i \subset V_{i-1}$ для всех i. Другими словами, в пространстве V существует базис, в котором все матрицы из алгебры L принадлежат $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$.*

Доказательство. Возьмем ненулевой вектор $v \in V$, аннулируемый алгеброй L (он существует по теореме Энгеля). Положим $V_1 = \mathsf{F}v$. Заметим, что индуцированное действие алгебры L на пространстве $W = V/V_1$ также состоит из нильпотентных эндоморфизмов. Индукцией по $\dim V$ получаем, что в пространстве W существует флаг, инвариантный относительно L. Его прообраз в пространстве V и есть искомый флаг. □

Закончим этот параграф типичным приложением теоремы 3.3, которое нам потребуется позже.

Лемма. *Пусть L — нильпотентная алгебра Ли, K — идеал в L. Тогда если $K \neq 0$, то $K \cap Z(L) \neq 0$. (Как следствие, $Z(L) \neq 0$; см. утверждение* (c) *предложения* 3.2).

Доказательство. Посредством присоединенного представления алгебра L действует на K, и из теоремы 3.3 вытекает существование такого ненулевого вектора $x \in K$, что $[L, x] = 0$, т. е. $x \in K \cap Z(L)$. □

Упражнения

1. Пусть I — идеал алгебры L. Тогда каждый член производного ряда или убывающего центрального ряда для I также является идеалом в L.

2. Докажите, что алгебра L разрешима, если и только если существует цепочка подалгебр $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_k = 0$, в которой L_{i+1} является идеалом в L_i, а факторалгебры L_i/L_{i+1} абелевы.

3. Пусть char $\mathsf{F}=2$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ нильпотентна.

4. Докажите, что алгебра L разрешима (соответственно, нильпотентна), если и только если разрешима (соответственно, нильпотентна) алгебра ad L.

5. Докажите, что неабелева двумерная алгебра, построенная в п. 1.4, разрешима, но не нильпотентна. То же для алгебры из упражнения 1.2.

6. Докажите, что сумма двух нильпотентных идеалов алгебры Ли L также является нильпотентным идеалом. Как следствие, алгебра L имеет единственный максимальный нильпотентный идеал. Найдите этот идеал для каждой алгебры из упражнения 5.

7. Пусть алгебра L нильпотентна, K — ее собственная подалгебра. Докажите, что $N_L(K)$ строго включает K.

8. Пусть алгебра ненулевая алгебра L нильпотентна. Докажите, что в ней имеется идеал коразмерности 1.

9. Докажите, что любая ненулевая нильпотентная алгебра Ли L имеет внешнее дифференцирование (см. п. 1.3) следующего вида. Представим L в виде $L=K+\mathsf{F}x$, где K — некоторый идеал коразмерности 1 (см. упражнение 8). Тогда $C_L(K)\neq 0$ (почему?). Выберем n так, что $C_L(K)\subset L^n$, $C_L(K)\not\subset L^{n=1}$, и пусть $z\in C_L(K)\setminus L^{n+1}$. Тогда линейное отображение δ, переводящее K в 0, а x в z, и является внешним дифференцированием.

10. Пусть L — алгебра Ли, а K — такой идеал в ней, что алгебра L/K нильпотентна и при всех $x\in L$ нильпотентно отображение ad $x|_K$. Докажите, что алгебра L нильпотентна.

Глава II

Полупростые алгебры Ли

В главе I мы рассматривали алгебры Ли над произвольным полем F. Помимо введения основных понятий и примеров, нам удалось доказать лишь одну существенную теорему (теорему Энгеля). Фактически вся теория, развиваемая далее в этой книге, требует предположения, что F имеет характеристику 0. (В некоторых упражнениях показано, как возникают контрпримеры в простой характеристике.) Более того, чтобы располагать собственными значениями оператора $\operatorname{ad} x$ для произвольного x (а не только для нильпотентного оператора $\operatorname{ad} x$), мы будем считать поле F алгебраически замкнутым, если не оговорено противное. Можно работать и с несколько меньшим ограничением на поле F (см. Jacobson [1] с. 107), но здесь мы не будем этого делать.

§4. *Теоремы Ли и Картана*

4.1. Теорема Ли. Суть теоремы Энгеля для нильпотентных алгебр Ли заключается в существовании общего собственного вектора для алгебры Ли нильпотентных эндоморфизмов (теорема 3.3). Следующее утверждение похоже по своему характеру, но требует алгебраической замкнутости: тогда поле F содержит все нужные собственные значения. Требование $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$ также оказывается необходимым (упражнение 3).

Теорема. *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если $V \neq 0$, то V содержит общий собственный вектор для всех эндоморфизмов из L.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности L. Случай $\dim L = 0$ тривиален. Мы попытаемся воспроизвести доказательство теоремы 3.3 (рекомендуем освежить его в памяти). Идея заключается в следующем: (1) найти идеал K коразмерности один; (2) получить по предположению индукции, что для K существуют общие собственные векторы; (3) проверить, что L сохраняет пространство, состоящее из таких векторов; (4) найти в этом пространстве собственный вектор для одного элемента $z \in L$, удовлетворяющего равенству $L = K + \mathsf{F}z$.

Шаг (1) прост. Так как подалгебра L разрешима и ее размерность положительна, L строго включает $[L, L]$. В алгебре $L/[L, L]$ любое подпространство автоматически является идеалом в силу ее абелевости. Возьмем в ней подпространство коразмерности 1, тогда его прообраз K — идеал коразмерности 1 в L (содержащий $[L, L]$).

На шаге (2) по предположению существует общий собственный вектор $v \in V$ для K (разумеется, идеал K разрешим; если $K = 0$, то алгебра L — абелева размерности 1 и любой собственный вектор для базисного элемента из L позволяет завершить доказательство). Это означает, что для $x \in K$ будет выполняться равенство $x \cdot v = \lambda(x)v$, где $\lambda\colon K \to \mathsf{F}$ — некоторая линейная функция. Зафиксируем λ и обозначим через W (ненулевое) подпространство

$$\{w \in W\colon x \cdot w = \lambda(x)w \quad \text{для всех } x \in K\}.$$

Шаг (3) состоит в доказательстве инвариантности подпространства W при действии подалгебры L. Предположим на время, что это сделано, и перейдем к шагу (4): записав $L = K + \mathsf{F}z$ и используя алгебраическую замкнутость поля F, найдем собственный вектор $v_0 \in W$ для z (отвечающий некоторому его собственному значению). Тогда v_0, очевидно, является собственным вектором для всей алгебры L (и λ можно продолжить до линейной функции на L с условием $x \cdot v_0 = \lambda(x)v_0$, $x \in L$).

Осталось показать, что L сохраняет W. Пусть $w \in W$, $x \in L$. Чтобы проверить, лежит ли $x \cdot w$ в W, нужно взять произвольный элемент $y \in K$ и рассмотреть выражение $yx \cdot w = xy \cdot w - [x, y] \cdot w = \lambda(y)x \cdot w - \lambda([x, y])w$. Таким образом, *мы должны доказать, что* $\lambda([x, y]) = 0$. Для этого зафиксируем $w \in W$, $x \in L$. Пусть $n > 0$ — наименьшее целое число, для которого $w, x \cdot w, \ldots, x^n \cdot w$ линейно независимы. Далее, пусть W_i — подпространство в V, порожденное элементами $w, x \cdot w, \ldots, x^{i-1} \cdot w$ (мы полагаем $W_0 = 0$), так что $\dim W_n = n$, $W_n = W_{n+i}$ $(i \geqslant 0)$ и x отображает W_n в W_n. Легко проверить, что любой элемент $y \in K$ оставляет каждое подпространство W_i инвариантным. Мы утверждаем, что в базисе $w, x \cdot w, \ldots, x^{n-1} \cdot w$ пространства W_n элемент $y \in K$ представляется верхнетреугольной матрицей с $\lambda(y)$ на диагонали. Это немедленно следует из сравнения

$$yx^i \cdot w \equiv \lambda(y)x^i \cdot w \pmod{W_i}, \tag{$*$}$$

которое мы докажем индукцией по i. Случай $i = 0$ очевиден. Мы имеем $yx^i \cdot w = yxx^{i-1} \cdot w = xyx^{i-1} \cdot w - [x, y]x^{i-1} \cdot w$. По предположению индукции $yx^{i-1} \cdot w = \lambda(y)x^{i-1} \cdot w + w'$ $(w' \in W_{i-1})$; так как x отображает W_{i-1} в W_i (по построению), сравнение $(*)$ выполнено для всех i.

Согласно определению действия элемента $y \in K$ на пространстве W_n, мы имеем $\mathrm{Tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$. В частности, это верно для элементов из K вида $[x, y]$ (элемент x такой же, как выше, $y \in K$). Но как x, так и y сохраняют W_n, поэтому $[x, y]$ действует на W_n как к о м м у т а т о р двух его эндоморфизмов; значит, его след равен нулю. Отсюда следует, что $n\lambda([x, y]) = 0$. Так как $\mathrm{char}\, \mathsf{F} = 0$, мы с необходимостью получаем $\lambda([x,y]) = 0$, что и требовалось. $\square$

Следствие A (Теорема Ли). *Пусть L — разрешимая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n < \infty$. *Тогда L отображает в себя некоторый флаг в пространстве V (другими словами, в некотором его базисе матрицы элементов из L верхнетреугольны*).

Доказательство. Применим предыдущую теорему и индукцию по $\dim V$. □

Более общо, пусть L — произвольная разрешимая алгебра Ли, $\varphi: L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное представление. Тогда алгебра $\varphi(L)$ разрешима в силу предложения 3.1(a) и потому сохраняет некоторый флаг (следствие A). Например, если φ — присоединенное представление, то флаг подпространств, инвариантных относительно L, — это цепочка идеалов в L, каждый из которых имеет коразмерность один в следующем. Тем самым доказано

Следствие B. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда существует такая цепь идеалов L, $0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$, что* $\dim L_i = i$.

Следствие C. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда из того, что $x \in [L, L]$, следует, что отображение $\mathrm{ad}_L\, x$ нильпотентно. Как следствие, подалгебра $[L, L]$ нильпотентна.*

Доказательство. Выберем флаг идеалов, как в следствии B. В базисе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в L, в котором элементы $(x_1, \ldots, x_i)$ порождают L_i, матрицы из $\mathrm{ad}\, L$ принадлежат $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$. Поэтому матрицы из $[\mathrm{ad}\, L, \mathrm{ad}\, L] = \mathrm{ad}_L[L, L]$ лежат в $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, т. е. производной алгебре для $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$. Значит, эндоморфизм $\mathrm{ad}_L\, x$ нильпотентен при $x \in [L, L]$; эндоморфизм $\mathrm{ad}_{[L,L]}\, x$ тем более нильпотентен, так что алгебра $[L, L]$ нильпотентна по теореме Энгеля. □

4.2. Разложение Жордана—Шевалле. *Только в этом пункте характеристика поля F может быть произвольной.* Мы сделали это исключение, чтобы ввести очень полезное средство изучения линейных преобразований. Читатель, может быть, помнит, что жорданова каноническая форма для отдельного эндоморфизма x над алгебраически замкнутым полем дает представление x в матричном виде как сумму блоков вида

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $\mathrm{diag}(a, \ldots, a)$ коммутирует с нильпотентной матрицей, все ненулевые элементы которой — единицы непосредственно над диагональю, эндоморфизм x является суммой диагональной и нильпотентной матриц, коммутирующих между собой. Мы можем уточнить это разложение следующим образом.

Назовем элемент $x \in \mathrm{End}\, V$ (V конечномерно) *полупростым*, если все корни его минимального многочлена над F различны. Эквивалентно, можно сказать (для алгебраически замкнутого поля F), что элемент x полупрост, если и только если он диагонализуем. Заметим, что два коммутирующих полупростых эндоморфизма можно диагонализовать одновременно; поэтому их сумма и разность снова полупросты (упражнение 5). Кроме того, если элемент x полупрост и отображает подпространство $W \subset V$ в себя, то очевидно, что ограничение отображения x на W полупросто.

Предложение. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над F, $x \in \operatorname{End} V$.*

(a) *Существуют единственные элементы x_s, $x_n \in \operatorname{End} V$, удовлетворяющие следующим условиям: $x = x_s + x_n$, где x_s полупрост, x_n нильпотентен, а x_s и x_n коммутируют.*

(b) *Существуют такие многочлены $p(T)$, $q(T)$ от одного переменного без свободного члена, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Как следствие, x_s и x_n коммутируют с любым эндоморфизмом, коммутирующим с x.*

(c) *Если $A \subset B \subset V$ — некоторые подпространства и x отображает B в A, то x_s и x_n также отображают B в A.*

Разложение $x = x_s + x_n$ называется (аддитивным) *разложением Жордана—Шевалле* эндоморфизма x или просто *разложением Жордана* (*жордановым разложением*); x_s и x_n называются, соответственно, *полупростой* и *нильпотентной* частями эндоморфизма x.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ (с кратностями $m_1, \ldots, m_k$) — различные собственные значения отображения x, так что характеристический многочлен равен $\prod (T - a_i)^{m_i}$. Если $V_i = \operatorname{Ker}(x - a_i \cdot 1)^{m_i}$, то V является прямой суммой подпространств $V_1, \ldots, V_k$, каждое из которых инвариантно относительно x. Ясно, что характеристический многочлен для x на V_i равен $(T - a_i)^{m_i}$. Применив китайскую теорему об остатках (для кольца $\mathsf{F}[T]$), найдем многочлен $p(T)$, удовлетворяющий следующим сравнениям по попарно взаимно простым модулям: $p(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{m_i}}$, $p(T) \equiv 0 \pmod{T}$. (Заметим, что последнее сравнение лишнее, если 0 является собственным значением для x; в противном случае многочлен T взаимно прост с остальными модулями.) Положим $q(T) = T - p(T)$. Очевидно, что у многочленов $q(T)$ и $p(T)$ нулевой свободный член, так как $p(T) \equiv 0 \pmod{T}$.

Положим $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Поскольку эти эндоморфизмы являются многочленами от x, они коммутируют друг с другом, равно как и со всеми эндоморфизмами, коммутирующими с x. Они также оставляют инвариантными все подпространства в V, которые инвариантны относительно x, и в частности V_i. Сравнение $p(T) \equiv a_i \pmod{(T - a_i)^{m_i}}$ показывает, что ограничение отображения $x_s - a_i \cdot 1$ на V_i равно нулю при всех i. Следовательно, x_s действует диагонально на V_i с единственным собственным значением a_i. По определению $x_n = x - x_s$, откуда ясно, что элемент x_n нильпотентен. Так как $p(T)$, $q(T)$ не имеют свободного члена, утверждение (c) становится очевидным.

Осталось лишь доказать утверждение о единственности в (а). Пусть $x = s + n$ — другое такое разложение, так что $x_s - s = n - x_n$. Из утверждения (b) следует, что все эндоморфизмы в этом равенстве коммутируют. Суммы коммутирующих полупростых (соответственно нильпотентных) эндоморфизмов снова полупросты (соответственно нильпотентны), тогда как полупростым и нильпотентным одновременно может быть лишь нулевой эндоморфизм. Отсюда с необходимостью следует, что $s = x_s$, $n = x_n$. □

Чтобы показать полезность разложения Жордана, рассмотрим один частный случай. Возьмем присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если элемент $x \in \mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то тем же свойством обладает и $\operatorname{ad} x$ (лемма 3.2). Аналогично, *если элемент x полупрост, то полупрост и элемент* $\operatorname{ad} x$. Мы проверим это таким образом: выберем базис $(v_1, \ldots, v_n)$ в V, в котором матрица x имеет вид $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\{e_{ij}\}$ — стандартный базис в $\mathfrak{gl}(V)$, который соответствует $(v_1, \ldots, v_n)$ (см. п. 1.2): $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$. Тогда простое вычисление (см. формулу (∗) в п. 1.2) показывает, что $\operatorname{ad} x(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$. Таким образом, матрица $\operatorname{ad} x$ диагональна в выбранном базисе для $\mathfrak{gl}(V)$.

Лемма А. *Пусть $x \in \operatorname{End} V$ $(\dim V < \infty)$, $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана. Тогда $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ — разложение Жордана для $\operatorname{ad} x$ (в $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$).*

Доказательство. Мы видели, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x_s$ полупрост, а эндоморфизм $\operatorname{ad} x_n$ нильпотентен; они коммутируют, так как $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$. Теперь применим часть (а) предыдущего предложения. □

Вот еще один полезный факт:

Лемма В. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная F-алгебра. Тогда $\operatorname{Der} \mathfrak{A}$ содержит полупростые и нильпотентные части (в $\operatorname{End} \mathfrak{A}$) всех своих элементов.*

Доказательство. Пусть $\sigma, \nu \in \mathfrak{A}$ — полупростая и нильпотентная части элемента $\delta \in \operatorname{Der} \mathfrak{A}$ соответственно. Достаточно показать, что $\sigma \in \operatorname{Der} \mathfrak{A}$. Если $a \in \mathsf{F}$, то положим $\mathfrak{A}_a = \{x \in \mathfrak{A}\colon (\delta - a \cdot 1)^k x = 0$ для некоторого k (зависящего от x)$\}$.

Тогда $\mathfrak{A}$ — прямая сумма подалгебр $\mathfrak{A}_a$, отвечающих собственным значениям эндоморфизма δ (и σ), причем σ действует на $\mathfrak{A}_a$ как скалярное умножение на a. Для любых $a, b \in \mathsf{F}$ можно проверить, что $\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b \subset \mathfrak{A}_{a+b}$, с помощью общей формулы:

$$(\delta - (a+b)\cdot 1)^n (xy) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} ((\delta - a\cdot 1)^{n-i} x) \cdot ((\delta - b \cdot 1)^i y) \quad \text{для } x, y \in \mathfrak{A}. \qquad (*)$$

(Эта формула легко проверяется индукцией по n.) Если теперь $x \in \mathfrak{A}_a$, $y \in \mathfrak{A}_b$, то $\sigma(xy) = (a+b)xy$, так как $xy \in \mathfrak{A}_{a+b}$ (возможно, равняясь нулю); с другой стороны, $(\sigma x)y + x(\sigma y) = (a+b)xy$. Поскольку сумма $\mathfrak{A} = \coprod \mathfrak{A}_a$

($\coprod$ обозначает прямую сумму векторных пространств) прямая, σ является дифференцированием, что и требовалось. $\square$

4.3. Критерий Картана. Теперь мы готовы к тому, чтобы получить мощный критерий разрешимости алгебры Ли L в терминах следов некоторых ее эндоморфизмов. Очевидно, что L будет разрешима, если алгебра $[L, L]$ нильпотентна (это обратное утверждение к следствию 4.1С). В свою очередь, теорема Энгеля утверждает, что алгебра $[L, L]$ нильпотентна, если (и только если) все операторы $\mathrm{ad}_{[L,L]}\, x$, $x \in [L, L]$, нильпотентны. Поэтому сначала мы выведем критерий нильпотентности эндоморфизма в терминах следов.

Лемма. *Пусть $A \subset B$ — два подпространства в $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < \infty$. Положим $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V)\colon [x, B] \subset A\}$. Предположим, что для некоторого $x \in M$ выполнено свойство $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ при всех $y \in M$. Тогда элемент x нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $x = s + n$ $(s = x_s,\ n = x_n)$ — разложение Жордана для x. Выберем базис $v_1, \ldots, v_m$ в V, в котором s имеет матрицу $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$. Пусть E — векторное подпространство F (над простым полем $\mathbb{Q}$), порожденное собственными значениями $a_1, \ldots, a_m$. Нам надо показать, что $s = 0$, что равносильно равенству $E = 0$. Поскольку пространство E конечномерно над $\mathbb{Q}$ (по построению), достаточно показать, что двойственное пространство E^* — нулевое, т. е. что любая линейная функция $f\colon E \to \mathbb{Q}$ нулевая.

Для данной функции f пусть y — тот элемент в $\mathfrak{gl}(V)$, матрица которого в выбранном базисе равна $\mathrm{diag}(f(a_1), \ldots, f(a_m))$. Если $\{e_{ij}\}$ — соответствующий базис в $\mathfrak{gl}(V)$, то, как мы видели в п. 4.2, $\mathrm{ad}\, s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$, $\mathrm{ad}\, y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$. Теперь пусть $r(T) \in \mathsf{F}(T)$ — многочлен без свободного члена, удовлетворяющий условиям $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ для всех пар i, j. Существование такого многочлена следует из интерполяционной теоремы Лагранжа; неоднозначности в заданных значениях нет, поскольку из равенства $a_i - a_j = a_k - a_l$ следует (ввиду линейности f), что $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$. Ясно, что $\mathrm{ad}\, y = r(\mathrm{ad}\, s)$.

Согласно лемме 4.2А, элемент $\mathrm{ad}\, s$ — полупростая часть элемента $\mathrm{ad}\, x$, и ее можно представить как многочлен от $\mathrm{ad}\, x$ без свободного члена (предложение 4.2). Поэтому $\mathrm{ad}\, y$ тоже является многочленом от $\mathrm{ad}\, x$ без свободного члена. По предположению $\mathrm{ad}\, x$ отображает B в A, откуда следует, что $\mathrm{ad}\, y(B) \subset A$, т. е. $y \in M$. Используя предположение $\mathrm{Tr}(xy) = 0$, получаем $\sum a_i f(a_i) = 0$. Левая часть равенства — это $\mathbb{Q}$-линейная комбинация элементов из E; применяя f, получаем $\sum f(a_i)^2 = 0$. Так как $f(a_i)$ — рациональные числа, отсюда вытекает их равенство нулю. Поскольку a_i порождают E, функция f должна быть тождественным нулем. $\square$

Перед тем как сформулировать наш критерий разрешимости, приведем одно полезное тождество: если x, y, z — эндоморфизмы конечномерного векторного пространства, то

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z]). \qquad (*)$$

Чтобы его проверить, воспользуемся равенствами $[x, y]z = xyz - yxz$, $x[y, z] = xyz - xzy$ и свойством следа $\mathrm{Tr}(y(xz)) = \mathrm{Tr}((xz)y)$.

Теорема (Критерий Картана). *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ при всех $x \in [L, L]$, $y \in L$. Тогда L разрешима.*

Доказательство. Как отмечено в начале п. 4.3, достаточно доказать, что алгебра $[L, L]$ нильпотентна, или, равносильно, что все $x \in [L, L]$ — нильпотентные эндоморфизмы (лемма 3.2 и теорема Энгеля). Для этого применим предыдущую лемму к нашему случаю: пространство V — из условия теоремы, $A = [L, L]$, $B = L$, тогда $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V): [x, L] \subset [L, L]\}$. Ясно, что $L \subset M$. По нашему предположению $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ при $x \in [L, L]$, $y \in L$. Но чтобы вывести из леммы нильпотентность любого элемента $x \in [L, L]$, нам требуется более сильное утверждение: $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ при $x \in [L, L]$, $y \in M$.

Если теперь $[x, y]$ — один из образующих в $[L, L]$, а $z \in M$, то вышеприведенное тождество $(*)$ показывает, что $\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z]) = \mathrm{Tr}([y, z]x)$. По определению множества M мы имеем $[y, z] \in [L, L]$, и правая часть равна нулю по предположению. $\square$

Следствие. *Пусть L — такая алгебра Ли, такая $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y) = 0$ для всех $x \in [L, L]$, $y \in L$. Тогда алгебра L разрешима.*

Доказательство. Применяя теорему к присоединенному представлению алгебры L, получаем, что алгебра $\mathrm{ad}\, L$ разрешима. Поскольку $\mathrm{Ker\, ad} = Z(L)$ разрешима, и L разрешима (предложение 3.1). $\square$

Упражнения

1. Пусть $L = \mathfrak{sl}(V)$. Используя теорему Ли, докажите, что $\mathrm{Rad}\, L = Z(L)$; выведите отсюда, что алгебра L полупроста (см. упражнение 2.3). [Нужно заметить, что $\mathrm{Rad}\, L$ лежит в любой максимальной разрешимой подалгебре B алгебры L. Выберите такой базис в V, что $B = L \cap \mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$, и заметьте, что матрицы, транспонированные к матрицам из B, также составляют максимальную разрешимую подалгебру в L. Выведите отсюда, что $\mathrm{Rad}\, L \subset L \cap \mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$, а затем — что $\mathrm{Rad}\, L = Z(L)$].

2. Покажите, что доказательство теоремы 4.1 проходит в ненулевой характеристике при условии, что $\dim V < \mathrm{char}\, \mathsf{F}$.

3. Это упражнение показывает, что теорема Ли может быть неверна в случае ненулевой характеристики. Рассмотрим $p \times p$-матрицы

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \mathrm{diag}(0, 1, 2, 3, \ldots, p-1).$$

Проверьте, что $[x, y] = x$, т. е. x и y порождают двумерную разрешимую подалгебру L в $\mathfrak{gl}(p, \mathsf{F})$. Проверьте, что у x, y нет общего собственного вектора.

4. При $p = 2$ упражнение 3 показывает, что у разрешимой алгебры Ли эндоморфизмов над полем ненулевой характеристики производная алгебра не обязательно состоит из нильпотентных эндоморфизмов (см. следствие 4.1C). Для произвольного p постройте контрпример к следствию C следующим образом: возьмите $L \in \mathfrak{gl}(p, \mathsf{F})$, как в упражнении 3. Постройте прямую сумму векторных пространств $M = L + \mathsf{F}^p$ и превратите ее в алгебру Ли, где F^p — абелева подалгебра, умножение в L — обычное и действие подалгебры L на F^p задано. Проверьте, что алгебра M разрешима, но ее производная алгебра $(= \mathsf{F}x + \mathsf{F}^p)$ не нильпотентна.

5. Пусть эндоморфизмы $x, y \in \operatorname{End} V$ коммутируют. Докажите, что $(x+y)_s = x_s + y_s$ и $(x+y)_n = x_n + y_n$. Покажите на примере, что это может быть неверно, если x, y не коммутируют. [Сначала покажите, что из полупростоты (соответственно нильпотентности) эндоморфизмов x, y следует полупростота (соответственно нильпотентность) суммы $x + y$.]

6. Проверьте формулу $(*)$ в конце п. 4.2.

7. Докажите теорему, обратную к теореме 4.3.

8. Заметим, что предположение теоремы 4.3 (и ее следствия) достаточно проверить для x, y, пробегающих базисы алгебры $[L, L]$ и L соответственно. Для примера из упражнения 1.2 проверьте разрешимость с помощью критерия Картана.

Замечания

Доказательства здесь следуют книге Serre [1]. Систематическое использование разложения Жордана в линейных алгебраических группах восходит к книге Chevalley [1]; см. также Borel [1], где существенное внимание уделяется аддитивному разложению Жордана в алгебрах Ли.

§5. *Форма Киллинга*

5.1. Критерий полупростоты. Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим $\varkappa(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$. Тогда $\varkappa$ — симметрическая билинейная форма на L, которая называется *формой Киллинга*. Форма $\varkappa$ также *ассоциативна* в том смысле, что $\varkappa([x, y], z) = \varkappa(x, [y, z])$. Это следует из тождества, приведенного в п. 4.3: $\operatorname{Tr}([x, y]z) = \operatorname{Tr}(x[y, z])$ для эндоморфизмов x, y, z конечномерного векторного пространства.

Следующая лемма пригодится нам позже.

Лемма. *Пусть I — идеал в L. Если $\varkappa$ — форма Киллинга на L, а $\varkappa_I$ — форма Киллинга на идеале I (рассматриваемом как алгебра Ли), то $\varkappa_I = \varkappa|_{I \times I}$.*

Доказательство. Во-первых, вспомним простой факт из линейной алгебры: если W — подпространство конечномерного векторного пространства V, а φ — эндоморфизм, отображающий V в W, то $\operatorname{Tr}\varphi = \operatorname{Tr}(\varphi|_W)$. (Чтобы убедиться в этом, дополним базис пространства W до базиса в V и посмотрим на получившуюся матрицу φ.) Если теперь $x, y \in I$, то $(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ — эндоморфизм пространства L, отображающий L в I, поэтому его след $\varkappa(x, y)$ совпадает со следом $\varkappa_I(x, y)$ эндоморфизма $(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)|_I = (\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y)$. □

В общем случае симметрическая билинейная форма $\beta(x, y)$ называется *невырожденной*, если ее *радикал* S равен нулю, где $S = \{x \in L\colon \beta(x, y) = 0$ для всех $y \in L\}$. Из ассоциативности формы Киллинга следует, что ее радикал — не просто подпространство: S является идеалом алгебры L. Как известно из линейной алгебры, невырожденность формы можно проверить таким образом: выберем базис $x_1, \ldots, x_n$ в L. Тогда форма $\varkappa$ невырожденна, если и только если $n \times n$-матрица с элементом $\varkappa(x_i, x_j)$ в позиции (i, j) имеет ненулевой определитель.

В качестве примера вычислим форму Киллинга для алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, используя стандартный базис из примера 2.1, который мы упорядочим как (x, h, y). Соответствующие матрицы выглядят так:

$$\operatorname{ad} h = \operatorname{diag}(2, 0, -2), \quad \operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица формы $\varkappa$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а ее определитель равен -128, и, следовательно, форма $\varkappa$ невырожденна. (Это остается верным, если $\operatorname{char} \mathsf{F} \neq 2$.)

Напомним, что (ненулевая) алгебра Ли называется полупростой, если $\operatorname{Rad} L = 0$. Это равносильно требованию, что у L нет ненулевых абелевых идеалов: действительно, любой такой идеал должен лежать в радикале, и обратно, радикал (если он ненулевой) содержит такой идеал, а именно последний ненулевой член производного ряда для $\operatorname{Rad} L$ (см. упражнение 3.1).

Теорема. *Пусть L — (ненулевая) алгебра Ли. Тогда L полупроста, если и только если ее форма Киллинга невырожденна.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\operatorname{Rad} L = 0$. Пусть S — радикал формы $\varkappa$. По определению $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ при всех $x \in S$, $y \in L$ (в частности, при $y \in [S, S]$). По критерию Картана (п. 4.3) подалгебра $\operatorname{ad}_L S$ разрешима, поэтому и алгебра S разрешима. Но мы заметили выше, что S — идеал в L, поэтому $S \subset \operatorname{Rad} L = 0$ и форма $\varkappa$ невырожденна.

Обратно, пусть $S = 0$. Чтобы доказать полупростоту алгебры L, достаточно установить, что любой абелев идеал I в L содержится в S.

Предположим, что $x \in I$, $y \in L$. Тогда композиция $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ задает отображение $L \to L \to I$ и $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^2$ отображает L в $[I, I] = 0$. Это означает, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ нильпотентен, откуда следует, что $0 = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \varkappa(x, y)$, т. е. $I \subset S = 0$. (Эта часть доказательства остается верной и в ненулевой характеристике (упражнение 6).) □

Из доказательства следует, что всегда $S \subset \operatorname{Rad} L$; однако обратное включение не всегда верно (упражнение 4).

5.2. Простые идеалы алгебры L. Сначала дадим определение. Алгебра Ли называется *прямой суммой* идеалов $I_1, \ldots, I_t$, если $L = I_1 + \ldots + I_t$ (прямая сумма подпространств). Из этого условия вытекает, что $[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0$ при $i \neq j$ (так что алгебру L можно считать полученной из алгебр I_i путем задания лиевых произведений покомпонентно на внешней прямой сумме векторных пространств I_i). Мы будем писать $L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_t$.

Теорема. *Пусть алгебра L полупроста. Тогда в ней существуют такие простые идеалы $L_1, \ldots, L_t$, что $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$. Любой простой идеал алгебры L совпадает с одним из L_i. При этом форма Киллинга на L_i является ограничением формы $\varkappa$ на $L_i \times L_i$.*

Доказательство. Вначале пусть I — произвольный идеал в L. Тогда множество $I^\perp = \{x \in L\colon \varkappa(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in L\}$ также является идеалом ввиду ассоциативности формы $\varkappa$. Критерий Картана, примененный к алгебре Ли I, показывает, что идеал $I \cap I^\perp$ алгебры L разрешим (следовательно, нулевой). Так как $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$, мы получаем $L = I \oplus I^\perp$.

Теперь проведем индукцию по размерности $\dim L$, чтобы получить искомое разложение алгебры L в прямую сумму простых идеалов. Если у L нет ненулевых собственных идеалов, то L уже проста и доказательство закончено. В противном случае пусть L_1 — минимальный ненулевой идеал; согласно предыдущему абзацу $L = L_1 \oplus L_1^\perp$. Как следствие, любой идеал в L_1 является идеалом и в L, поэтому алгебра L_1 полупроста (а тогда и проста ввиду минимальности). По той же причине алгебра $L_1^\perp$ полупроста; по предположению индукции она распадается в прямую сумму простых идеалов, являющихся идеалами и в L. Отсюда получаем разложение для L.

Теперь мы должны показать, что это разложение единственно. Если I — любой простой идеал в L, то $[I, L]$ — идеал в I, ненулевой ввиду условия $Z(L) = 0$; отсюда вытекает, что $[I, L] = I$. С другой стороны, $[I, L] = [I, L_1] \oplus \ldots \oplus [I, L_t]$, поэтому все слагаемые, кроме одного, должны равняться нулю. Пусть $[I, L_i] = I$. Тогда $I \subset L_i$ и $I = L_i$ (поскольку подалгебра L_i проста).

Последнее утверждение теоремы следует из леммы 5.1. □

Следствие. *Если L алгебра полупроста, то $L = [L, L]$ и все идеалы и гомоморфные образы алгебры L полупросты (или равны нулю). При этом каждый идеал в алгебре L является суммой некоторых ее простых идеалов.*

5.3. Внутренние дифференцирования. Невырожденность формы Киллинга имеет еще одно важное следствие. Перед тем как его сформулировать, напомним результат упражнения 2.1: $\mathrm{ad}\, L$ является идеалом в $\mathrm{Der}\, L$ (для любой алгебры Ли L). Доказательство основано на простом наблюдении:

$$[\delta, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(\delta x), \quad x \in L, \quad \delta \in \mathrm{Der}\, L. \tag{$*$}$$

Теорема. *Если алгебра L полупроста, то* $\mathrm{ad}\, L = \mathrm{Der}\, L$ (*т. е. любое дифференцирование в ней является внутренним*).

Доказательство. Поскольку L полупроста, $Z(L) = 0$. Поэтому $L \to \mathrm{ad}\, L$ — изоморфизм алгебр Ли. В частности, $M = \mathrm{ad}\, L$ обладает невырожденной формой Киллинга (теорема 5.1). Если $D = \mathrm{Der}\, L$, то, как мы только что отметили, $[D, M] \subset M$. Отсюда следует (по лемме 5.1), что $\varkappa_M$ является ограничением формы Киллинга $\varkappa_D$ алгебры D на $M \times M$. В частности, если $I = M^{\perp}$ — подпространство в D, ортогональное к M относительно формы $\varkappa_D$, то из невырожденности формы $\varkappa_M$ следует, что $I \cap M = 0$. Как I, так и M являются идеалами в D, а значит, $[I, M] = 0$. Если теперь $\delta \in I$, то с учетом $(*)$ мы получаем $\mathrm{ad}(\delta x) = 0$ для всех $x \in L$, что в свою очередь влечет равенство $\delta x = 0$ $(x \in L)$, так как отображение ad взаимно однозначно. Следовательно, $\delta = 0$. Отсюда заключаем, что $I = 0$, $\mathrm{Der}\, L = M = \mathrm{ad}\, L$. □

5.4. Абстрактное разложение Жордана. С помощью теоремы 5.3 можно ввести абстрактное разложение Жордана в произвольной полупростой алгебре Ли L. Напомним (лемма 4.2B), что если $\mathfrak{A}$ — любая F-алгебра конечной размерности, то $\mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$ содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов при разложении в $\mathrm{End}\, \mathfrak{A}$. Как следствие, поскольку $\mathrm{Der}\, L$ совпадает с $\mathrm{ad}\, L$ (см. п. 5.3), а отображение $L \to \mathrm{ad}\, L$ взаимно однозначно, по каждому элементу $x \in L$ однозначно восстанавливаются такие элементы $s, n \in L$, что $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, s + \mathrm{ad}\, n$ — обычное разложение Жордана элемента $\mathrm{ad}\, x$ в $\mathrm{End}\, L$. Это означает, что $x = s + n$, где $[s, n] = 0$, элемент s является ad-*полупростым* (т. е. $\mathrm{ad}\, s$ полупрост), а элемент n является ad-нильпотентен. Будем писать $s = x_s$, $n = x_n$ и (в виде некоторой вольности языка) назовем s и n *полупростой и нильпотентной частями* элемента x.

Внимательный читатель возразит здесь, что обозначение x_s, x_n двусмысленно в случае, когда L — линейная алгебра Ли. В пункте 6.4 мы покажем, что только что полученное абстрактное разложение элемента x на самом деле согласовано во всех таких случаях с обычным разложением Жордана. Пока же мы удовлетворимся замечанием, что это верно в частном случае $L = \mathfrak{sl}(V)$ (пространство V конечномерно). Действительно, пусть $x = x_s + x_n$ в $\mathrm{End}\, V$ (обычное разложение Жордана), $x \in L$. Поскольку x_n — нильпотентный эндоморфизм, его след равен нулю, и потому $x_n \in L$. Отсюда вытекает, что x_s также имеет нулевой след, и потому $x_s \in L$. Далее, элемент

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s$ полупрост (лемма 4.2A), поэтому $\mathrm{ad}_L\, x_s$ тем более полупрост; аналогично $\mathrm{ad}_L\, x_n$ нильпотентен, и $[\mathrm{ad}_L\, x_s, \mathrm{ad}_L\, x_n] = \mathrm{ad}_L[x_s, x_n] = 0$. Остается использовать единственность абстрактного разложения Жордана в L.

Упражнения

1. Докажите, что если алгебра L нильпотентна, то ее форма Киллинга тождественно равна нулю.

2. Докажите, что алгебра L разрешима, если и только если $[L, L]$ лежит в радикале формы Киллинга.

3. Пусть L — двумерная неабелева разрешимая алгебра Ли (см. п. 1.4). Докажите, что ее форма Киллинга не является тождественным нулем.

4. Пусть L — трехмерная разрешимая алгебра Ли из упражнения 1.2. Вычислите радикал ее формы Киллинга.

5. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Вычислите базис алгебры L, двойственный к стандартному относительно формы Киллинга.

6. Пусть $\operatorname{char} \mathsf{F} = p \neq 0$. Докажите, что алгебра L полупроста, если ее форма Киллинга невырожденна. Покажите на примере, что обратное неверно. [Профакторизуйте алгебру $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ по модулю ее центра при $\operatorname{char} \mathsf{F} = 3$.]

7. Вычислите детерминант формы $\varkappa$ для $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ в стандартном базисе. На какие простые числа он делится?

8. Пусть $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ — разложение полупростой алгебры Ли L в сумму ее простых идеалов. Покажите, что полупростая и нильпотентная части элемента $x \in L$ — это суммы полупростых и нильпотентных частей его компонент в идеалах L_i.

Замечания

Даже в простой характеристике из невырожденности формы Киллинга вытекают весьма сильные утверждения о структуре алгебры Ли. См. Seligman [1], Pollack [1], Kaplansky [1].

§6. *Полная приводимость представлений*

В этом параграфе все представления конечномерны, если не оговорено противное.

Мы намереваемся изучать полупростую алгебру Ли L с помощью ее присоединенного представления (см. §8). Оказывается, алгебра L построена из экземпляров алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$; чтобы изучить присоединенное действие этой трехмерной подалгебры, нам потребуется точная информация о ее представлениях, которая и будет дана ниже в §7. Вначале мы докажем важную общую теорему (принадлежащую Вейлю) о представлениях произвольной полупростой алгебры Ли.

6.1. Модули. Пусть L — некоторая алгебра Ли. Часто бывает удобно использовать язык модулей наряду с (эквивалентным) языком представлений. Как и в других алгебраических теориях, здесь имеется естественное определение. Векторное пространство V с дополнительной операцией $L \times V \to V$ (обозначаемой $(x, v) \mapsto x \cdot v$ или просто xv), называется *L-модулем*, если выполнены следующие условия:

(M1) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,

(M2) $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$,

(M3) $[xy] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$ ($x, y \in L$; $v, w \in V$; $a, b \in F$).

Например, если $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры L, то V можно рассматривать как L-модуль с операцией $x \cdot v = \varphi(x)(v)$. Обратно, для данного L-модуля V это уравнение определяет представление $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Гомоморфизм L-модулей — это такое линейное отображение $\varphi \colon V \to W$, что $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$. Ядро такого гомоморфизма будет L-подмодулем в V (и все стандартные теоремы о гомоморфизмах устанавливаются без труда). Если φ является изоморфизмом векторных пространств, мы называем его *изоморфизмом* L-модулей; в этом случае говорят, что два модуля соответствуют *эквивалентным* представлениям алгебры L. *Неприводимым* называется такой L-модуль V, у которого имеется ровно два L-подмодуля (он сам и 0); как следствие, *мы не рассматриваем нульмерное векторное пространство как неприводимый L-модуль.* Однако мы относим к неприводимым одномерное пространство, на котором действует L (быть может, тривиально). Модуль V называется *вполне приводимым*, если он является прямой суммой неприводимых L-подмодулей, или, что равносильно (упражнение 2), если каждый L-подмодуль W в V имеет дополнение W (т. е. такой L-подмодуль, для которого $V = W \oplus W'$). Разумеется, прямую сумму произвольных L-модулей W, W' можно очевидным образом превратить в L-модуль, положив $x \cdot (w, w') = (x \cdot w, x \cdot w')$. Все эти понятия хорошо известны; они применимы и при $\dim V = \infty$. Разумеется, термины «неприводимые» и «вполне приводимые» с равным успехом можно применять и к представлениям алгебры L.

Пусть дано представление $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$. Ассоциативная алгебра (с единицей), которую $\varphi(L)$ порождает в $\operatorname{End} V$, оставляет инвариантными те же подпространства, что и L. Поэтому все обычные утверждения о модулях над ассоциативными кольцами (например, теорема Жордана—Гёльдера) выполняются и для L. Для применения в дальнейшем напомним хорошо известную лемму Шура.

Лемма (Шур). *Пусть представление $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ неприводимо. Тогда среди эндоморфизмов пространства V только скаляры коммутируют со всеми отображениями $\varphi(x)$ ($x \in L$).*

Сама алгебра L является L-модулем (он соответствует присоединенному представлению). Его L-подмодули — это в точности идеалы; поэтому если алгебра L проста, то она неприводима как L-модуль, а если полупроста, то вполне приводима (теорема 5.2).

Приведем ряд стандартных способов изготовления одних L-модулей из других (это пригодится нам ниже). Пусть V — некоторый L-модуль. Тогда двойственное векторное пространство V^* можно превратить в L-модуль (называемый *двойственным* или *сопряженным*), если при $f \in V^*$, $v \in V$, $x \in L$ положить $(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v)$. Аксиомы (M1), (M2) почти очевидны, так что проверим лишь (M3):

$$([x, y] \cdot f)(v) = -f([x \cdot y] \cdot v) = -f(x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v) = -f(x \cdot y \cdot v) + f(y \cdot x \cdot v) = \\ = (x \cdot f)(y \cdot v) - (y \cdot f)(x \cdot v) = -(y \cdot x \cdot f)(v) + (x \cdot y \cdot f)(v) = ((x \cdot y - y \cdot x) \cdot f)(v).$$

Если V, W — два L-модуля, то пусть $V \otimes W$ — тензорное произведение над F соответствующих векторных пространств. Напомним, что если пространства V и W имеют базисы соответственно $(v_1, \ldots, v_m)$ и $(w_1, \ldots, w_n)$, то в пространстве $V \otimes W$ имеется базис, состоящий из mn векторов $v_i \otimes w_j$. Возможно, читатель знает, как вводится структура модуля на тензорном произведении двух модулей над группой G: для образующих $v \otimes w$ нужно положить $g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$. «Дифференцируя» это равенство, получаем корректное определение для случая алгебр Ли: $x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w$. Как и выше, решающее значение имеет проверка аксиомы (M3):

$$[x, y] \cdot (v \otimes w) = [x, y] \cdot v \otimes w + v \otimes [x, y] \cdot w = \\ = (x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot y \cdot w - y \cdot x \cdot w) = \\ = (x \cdot y \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot y \cdot w) - (y \cdot x \cdot v \otimes w + v \otimes y \cdot x \cdot w).$$

К тому же результату приводит разложение $(x \cdot y - y \cdot x) \cdot (v \otimes w)$.

Пусть V — векторное пространство над F. Существует стандартный (и очень полезный) изоморфизм векторных пространств $V^* \otimes V \to \operatorname{End} V$, при котором образующему вида $f \otimes v$ ($f \in V^*$, $v \in V$) соответствует эндоморфизм, отображающий $w \in V$ в $f(w)v$. Стандартное рассуждение (с использованием двойственных базисов) показывает, что мы определили эпиморфизм $V^* \otimes V \to \operatorname{End} V$, а так как оба пространства имеют размерность n^2 ($n = \dim V$), он обязан быть изоморфизмом.

Если теперь V (а тогда и V^*) является L-модулем, то способ, изложенный выше, превращает и $V^* \otimes V$ в L-модуль. В силу описанного изоморфизма пространство $\operatorname{End} V$ также можно рассматривать как L-модуль. Соответствующее действие алгебры L на $\operatorname{End} V$ можно описать и непосредственно: $(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$, $x \in L$, $f \in \operatorname{End} V$, $v \in V$ (проверьте!). Более общо, если даны два L-модуля V и W, то L действует естественным образом на пространстве $\operatorname{Hom}(V, W)$ линейных отображений по правилу

$(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$. (Это действие возникает из изоморфизма между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $V^* \otimes W$.)

6.2. Элемент Казимира представления. В §5 с помощью критерия разрешимости Картана (в терминах следа) мы доказали, что полупростая алгебра Ли L имеет невырожденную форму Киллинга. Более общо, пусть алгебра L полупроста, а $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее *точное* (т. е. взаимно однозначное) представление. Определим на алгебре L симметрическую билинейную форму $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$. Форма β ассоциативна благодаря тождеству $(*)$ из п. 4.3, и, как следствие, ее радикал S является идеалом в L. Кроме того, форма β невырожденна: действительно, ввиду теоремы 4.3 алгебра $\varphi(S) \cong S$ разрешима, и потому $S = 0$. (В частном случае $\varphi = \mathrm{ad}$ форма β совпадает с формой Киллинга.)

Пусть теперь алгебра L полупроста, β — любая невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма на L. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — базис в L, то существует однозначно определенный двойственный базис $(y_1, \ldots, y_n)$ относительно формы β, удовлетворяющий условию $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Если $x \in L$, то можно записать $[x, x_i] = \sum\limits_j a_{ij} x_j$ и $[x, y_i] = \sum\limits_j b_{ij} y_j$. С учетом ассоциативности формы β получаем $a_{ik} = \sum\limits_j a_{ij}\beta(x_j, y_k) = \beta([x, x_i], y_k) = \beta(-[x_i, x], y_k) = \beta(x_i, -[x, y_k]) = -\sum\limits_j b_{kj}\beta(x_i, y_j) = -b_{ki}$.

Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — некоторое представление алгебры L. Положим $c_\varphi(\beta) = \sum\limits_i \varphi(x_i)\varphi(y_i) \in \mathrm{End}\, V$ (как и выше, x_i, y_i пробегают двойственные базисы относительно формы β). Используя тождество (в $\mathrm{End}\, V$) $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$ и тот факт, что $a_{ik} = -b_{ki}$ (как и выше, $x \in L$), получаем

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x), c_\varphi(\beta)] &= \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)]\varphi(y_i) + \sum_i \varphi(x_i)[\varphi(x), \varphi(y_i)] = \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}\varphi(x_j)\varphi(y_i) + \sum_{i,j} b_{ij}\varphi(x_i)\varphi(y_j) = 0.
\end{aligned}
$$

Другими словами, $c_{\varphi(\beta)}$ *является эндоморфизмом пространства V, коммутирующим с $\varphi(L)$.*

Подытожим предыдущие замечания. Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — точное представление с (невырожденной!) формой следа $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$. В этом случае, зафиксировав в алгебре L базис $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначим $c_\varphi(\beta)$ просто через c_φ и назовем его *элементом Казимира для φ*. Его след равен $\sum\limits_i \mathrm{Tr}(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum\limits_i \beta(x_i, y_i) = \dim L \neq 0$. Если при этом представление φ неприводимо, то в силу леммы Шура из п. 6.1 элемент c_φ является скаляром (равным $\dim L / \dim V$, что вытекает из предыдущей фразы); мы видим, что в этом случае c_φ не зависит от выбранного нами базиса в пространстве L.

Пример. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $V = \mathsf{F}^2$, φ — тождественное отображение $L \to \mathfrak{gl}(V)$. Пусть, далее, (x, h, y) — стандартный базис в L (см. п. 2.1). Легко видеть, что двойственный базис относительно формы следа имеет вид $(y, h/2, x)$, так что $c_\varphi = xy + 1/2h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$. Отметим, что $3/2 = \dim Z/\dim V$.

Если представление φ более не предполагается точным, то требуется небольшая модификация. Будучи идеалом в L, $\operatorname{Ker} \varphi$ является суммой простых идеалов (следствие 5.2). Пусть L' обозначает сумму остальных простых идеалов (теорема 5.2). Тогда ограничение представления φ на L' является точным представлением, и мы можем выполнить предыдущее построение (используя двойственные базисы в L'); полученный элемент пространства $\operatorname{End} V$ также называется элементом Казимира для φ и обозначается c_φ. Ясно, что он коммутирует с $\varphi(L) = \varphi(L')$ и т. д.

Замечание напоследок: часто удобно считать, что мы работаем с точным представлением алгебры L, что равнозначно изучению представлений ее (полупростых) идеалов. Если алгебра L проста, точными будут все модули, кроме одномерного (на котором L действует тривиально) и нулевого.

6.3. Теорема Вейля.

Лемма. *Пусть φ: $L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление полупростой алгебры Ли L. Тогда $\varphi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$. В частности, L действует тривиально на любом одномерном L-модуле.*

Доказательство. Используем равенство $L = [L, L]$ (см. п. 5.2), а также тот факт, что $\mathfrak{sl}(V)$ — производная алгебра для $\mathfrak{gl}(V)$. □

Теорема (Вейль). *Пусть φ: $L \to \mathfrak{gl}(V)$ — (конечномерное) представление полупростой алгебры Ли, $V \neq 0$. Тогда представление φ вполне приводимо.*

Доказательство. Начнем с частного случая, когда в V имеется L-подмодуль W коразмерности один. Поскольку согласно лемме алгебра L тривиально действует на V/W, можно обозначить этот модуль через F, не опасаясь путаницы. Получаем точную последовательность $0 \to W \to V \to \mathsf{F} \to 0$. Индукцией по $\dim W$ можно свести теорему к случаю неприводимого L-модуля W. А именно, пусть W' — собственный ненулевой подмодуль в W. Тогда имеется точная последовательность $0 \to W/W' \to V/W' \to \mathsf{F} \to 0$. По предположению индукции эта последовательность «расщепляется», т. е. в V/W' существует одномерный L-подмодуль (скажем, $\tilde{W}/W'$), дополнительный к W/W'. Отсюда получаем другую точную последовательность: $0 \to W' \to \tilde{W} \to \mathsf{F} \to 0$. Ситуация аналогична исходной с тем различием, что $\dim W' < \dim W$. По индукции получаем (одномерный) подмодуль X, дополнительный к W' в $\tilde{W}$: $\tilde{W} = W' \oplus X$. Но $V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W'$. Следовательно, $V = W \oplus X$, поскольку сумма размерностей слагаемых равна $\dim V$ и при этом $W \cap X = 0$.

Теперь мы можем считать модуль W неприводимым. (Без потери общности можно также принять, что L действует на V точно.) Пусть $c = c_\varphi$ — элемент Казимира для φ (см. п. 6.2). Поскольку c коммутирует с $\varphi(L)$, *c в действительности является эндоморфизмом L-модуля V*; в частности, $c(W) \subset W$ и $\operatorname{Ker} c$ является L-подмодулем в V. Поскольку L действует на V/W тривиально (т. е. $\varphi(L)$ отображает V в W), это верно и для c (как линейной комбинации произведений элементов из $\varphi(x)$). Поэтому c имеет нулевой след на V/W. С другой стороны, по лемме Шура c действует как скаляр на неприводимом L-подмодуле W; этот скаляр не равен 0, иначе выполнялось бы равенство $\operatorname{Tr}_V(c) = 0$, вопреки доказанному в п. 6.2. Как следствие, $\operatorname{Ker} c$ является одномерным L-подмодулем в V и имеет тривиальное пересечение с W. Мы получили искомое дополнение к W.

Теперь мы готовы взяться за общий случай. Пусть W — произвольный ненулевой подмодуль в V: $0 \to W \to V \to V/W \to 0$. Далее, пусть $(\operatorname{Hom}(P, W))$ — пространство линейных отображений $V \to W$, рассматриваемое как L-модуль (см. п. 6.1). Обозначим через $\mathscr{V}$ подпространство в $\operatorname{Hom}(V, W)$, состоящее из тех отображений, которые действуют на W как умножение на скаляр. Оно является L-подмодулем: если $f|_W = a \cdot 1_W$, то при $x \in L$, $w \in W$ мы имеем $(x \cdot f)(w) = x \cdot f(w) - f(x \cdot w) = a(x \cdot w) - a(x \cdot w) = 0$, а значит $x \cdot f|_W = 0$. Пусть теперь $\mathscr{W}$ — подпространство в $\mathscr{V}$, состоящее из тех f, которые аннулируют W. Из предыдущих выкладок следует, что $\mathscr{W}$ также является L-подмодулем, причем L отображает $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. При этом $\mathscr{V}/\mathscr{W}$ имеет размерность 1, поскольку $f \in \mathscr{V}$ определяется (по модулю $\mathscr{W}$) скаляром $f|_W$. Мы приходим к ситуации $0 \to \mathscr{W} \to \mathscr{V} \to \mathsf{F} \to 0$, уже разобранной выше.

В соответствии с первой частью доказательства, $\mathscr{V}$ имеет одномерный подмодуль, дополнительный к $\mathscr{W}$. Пусть его порождает отображение $f\colon V \to W$. После умножения на ненулевой скаляр можно считать, что $f_W = 1_W$. Алгебра L аннулирует f, если и только если $0 = (x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$, т. е. f является L-гомоморфизмом. Тогда $\operatorname{Ker} f$ — подмодуль в V. Так как f отображает V в W, а на W действует как 1_W, мы получаем, что $V = W \oplus \operatorname{Ker} f$, что и требовалось. □

6.4. Сохранение разложения Жордана. Теорема Вейля, разумеется, играет решающую роль при изучении представлений полупростой алгебры Ли L. Здесь мы дадим ей более непосредственное применение, показав с ее помощью, что абстрактное разложение Жордана (см. п. 5.4) согласовано со всевозможными линейными представлениями алгебры L.

Теорема. *Пусть $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ — полупростая линейная алгебра Ли (пространство V конечномерно). Тогда L содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов при разложении в $\mathfrak{gl}(V)$. Как следствие, абстрактное и обычное разложения Жордана в L совпадают.*

Доказательство. Второе утверждение вытекает из первого, поскольку разложение Жордана каждого типа единственно (см. пп. 4.2, 5.4).

Возьмем произвольный элемент $x \in L$ с разложением Жордана $x = x_s + x_n$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Нужно показать, что x_s, x_n лежат в L. Поскольку $\operatorname{ad} x(L) \subset L$, ввиду предложения 4.2C мы получаем, что $\operatorname{ad} x_s(L) \subset L$ и $\operatorname{ad} x_n(L) \subset L$, где $\operatorname{ad} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$. Другими словами, $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = N$. Это подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, в которой L является идеалом. Нам было бы достаточно показать, что $N = L$, но это, к сожалению, неверно: например, скаляры лежат в N, но не в L, поскольку $L \subset \mathfrak{sl}(V)$ (лемма 6.3). Поэтому нужно заключить x_s, x_n в некоторую подалгебру, меньшую чем N, а затем показать, что она совпадает с L. Если W — произвольный L-подмодуль в V, положим $L_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V) : y(W) \subset W$ и $\operatorname{Tr}(y|_W) = 0\}$. Например, $L_V = \mathfrak{sl}(V)$. Поскольку $L = [L, L]$, алгебра L заведомо содержится во всех таких L_W. Пусть L' — пересечение подалгебры N со всеми подпространствами L_W. Очевидно, L' — подалгебра в N, содержащая L как идеал (но, отметим, не содержащая скаляров). Можно утверждать и больше: если $x \in L$, то элементы x_s, x_n также содержатся в L_W, а потому и в L'.

Осталось доказать, что $L = L'$. Так как L' — конечномерный L-модуль, в силу теоремы Вейля (см. п. 6.3) можно записать $L' = L + M$ для некоторого L-подмодуля M, где сумма прямая. Но $[L, L'] \subset L$ (поскольку $L' \subset N$), поэтому действие алгебры L на M тривиально. Пусть W — произвольный неприводимый L-подмодуль в V. Если $y \in M$, то $[L, y] = 0$, и в силу леммы Шура y действует на W как скаляр. С другой стороны, $\operatorname{Tr}(y|_W) = 0$, так как $y \in L_W$. Поэтому y отображает W в 0. По теореме Вейля V является прямой суммой неприводимых L-подмодулей, так что на самом деле $y = 0$. Это означает, что $M = 0$, $L = L'$. □

Следствие. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее (конечномерное) представление. Если $x = s + n$ — абстрактное разложение Жордана элемента $x \in L$, то $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — обычное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$.*

Доказательство. Алгебра $\varphi(L)$ порождается собственными векторами отображения $\operatorname{ad}_{\varphi(L)} \varphi(s)$, поскольку это верно для L по отношению к $\operatorname{ad} s$; следовательно, элемент $\operatorname{ad}_{\varphi(L)} \varphi(s)$ полупрост. Аналогично элемент $\operatorname{ad}_{\varphi(L)} \varphi(n)$ нильпотентен и коммутирует с $\operatorname{ad}_{\varphi(L)} \varphi(s)$. Соответственно $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — абстрактное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$ в полупростой алгебре Ли $\varphi(L)$ (см. п. 5.4). Применив предыдущую теорему, получаем искомый результат. □

Упражнения

1. Выразите элемент Казимира присоединенного представления алгебры $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ через ее стандартный базис (см. упражнение 5.5). Сделайте то же для стандартного (трехмерного) представления алгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$,

предварительно вычислив двойственные базисы относительно формы следа.

2. Пусть V — некоторый L-модуль. Докажите, что V является прямой суммой неприводимых подмодулей, если и только если каждый его L-подмодуль имеет дополнение.

3. Докажите, что если алгебра L разрешима, то каждое ее неприводимое представление одномерно.

4. С помощью теоремы Вейля дайте другое доказательство равенства $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$ для полупростой алгебры L (теорема 5.3). [Для $\delta \in \operatorname{Der} L$ превратите прямую сумму $\mathsf{F} + L$ в L-модуль по правилу $x \cdot (a, y) = (0, a\delta(x) + [x, y])$. Затем рассмотрите дополнение к подмодулю L.]

5. Алгебра Ли L, для которой $\operatorname{Rad} L = Z(L)$, называется *редуктивной*. (Примеры: абелевы алгебры, полупростые алгебры, $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$.) Докажите следующие утверждения.

(a) Если алгебра L редуктивна, то L вполне приводима как $\operatorname{ad} L$-модуль. [Если $\operatorname{ad} L \neq 0$, воспользуйтесь теоремой Вейля.] Как следствие, L равна прямой сумме подалгебр $Z(L)$ и $[LL]$, где алгебра $[LL]$ полупроста.

(b) Если L — классическая линейная алгебра Ли (см. п. 1.2), то L полупроста. [См. упражнение 1.9.]

(c) Если алгебра L вполне приводима как $\operatorname{ad} L$-модуль, то она редуктивна.

(d) Если алгебра L редуктивна, то вполне приводимы все ее конечномерные представления, в которых образ центра состоит из полупростых эндоморфизмов.

6. Пусть L — простая алгебра Ли, а $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ — две симметрические ассоциативные билинейные формы на L. Докажите, что если формы β и γ невырожденны, то они пропорциональны. [Примените лемму Шура.]

7. Позже мы увидим, что алгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ в действительности п р о с т а. С помощью этого факта и упражнения 6 докажите, что форма Киллинга $\varkappa$ на $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ связана с обычной формой следа по формуле $\varkappa(x, y) = 2n \operatorname{Tr}(xy)$.

8. Произвольная алгебра Ли L действует (посредством ad) на алгебре $(L \otimes L)^*$, которую можно отождествить с пространством всех билинейных форм β на L. Докажите, что форма β ассоциативна, если и только если $L \cdot \beta = 0$.

9. Пусть L' — полупростая подалгебра в полупростой алгебре Ли L. Если $x \in L'$, то разложение Жордана элемента x в L' совпадает с его разложением Жордана в L.

Замечания

Доказательство теоремы Вейля основано на работе Brauer [1]. Первоначальное доказательство было совершенно иным и использовало интегрирование по компактным группам Ли, см. Freudenthal, de Vries [1]. В теореме 6.4 мы следовали Bourbaki [1].

§7. *Представления алгебры* $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$

В этом параграфе (*как и в* §6) *все модули предполагаются конечномерными над* F. Через L обозначается алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(пример 2.1). Тогда $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = h$.

7.1. Веса и старшие векторы. Пусть V — произвольный L-модуль. Поскольку элемент h полупрост, в силу следствия 6.4 он действует на V диагонально. (Так как поле F предполагается алгебраически замкнутым, все соответствующие собственные значения принадлежат F.) Отсюда возникает разложение модуля V в прямую сумму собственных подпространств $V_\lambda = \{v \in V\colon h \cdot v = \lambda v\}$, $\lambda \in \mathsf{F}$. Конечно, подпространство V_λ можно определить (как нулевое) и когда λ не является собственным значением эндоморфизма, представляющего h. В случае когда $V_\lambda \neq 0$, мы называем λ *весом* элемента h в пространстве V, а V_λ — *весовым подпространством*.

Лемма. *Если* $v \in V_\lambda$, *то* $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ *и* $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.

Доказательство. Мы имеем $h \cdot (x \cdot v) = [h, x] \cdot v + x \cdot h \cdot v = 2x \cdot v + \lambda x \cdot v = (\lambda + 2) x \cdot v$, и аналогично для y. ☐

Замечание. Из леммы вытекает, что элементы x, y представляются нильпотентными эндоморфизмами модуля V; но это следует уже из теоремы 6.4.

Поскольку $\dim V < \infty$, а сумма $V = \coprod_{\lambda \in \mathsf{F}} V_\lambda$ — прямая, должно существовать такое подпространство $V_\lambda \neq 0$, что $V_{\lambda+2} = 0$. (Согласно лемме тогда $x \cdot v = 0$ при всех $v \in V_\lambda$.) Любой ненулевой вектор в V_λ с таким λ называется *старшим вектором* веса λ.

7.2. Классификация неприводимых модулей. Предположим теперь, что V — неприводимый L-модуль. Выберем старший вектор, скажем $v_0 \in V_\lambda$; положим $v_{-1} = 0$, $v_i = (1/i!) y^i \cdot v_0$ $(i \geqslant 0)$.

Лемма. *Справедливы равенства:*

(a) $h \cdot v_i = (\lambda - 2i) v_i$,

(b) $y \cdot v_i = (i + 1) v_{i+1}$,

(c) $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$ $(i \geqslant 0)$.

Доказательство. Равенство (a) вытекает из повторного применения леммы 7.1, тогда как (b) верно по определению. Чтобы доказать (c), применим индукцию по i. Случай $i = 0$ очевиден (так как мы положили

$v_{-1}=0$). Заметим, что

$$
\begin{aligned}
ix\cdot v_i = x\cdot y\cdot v_{i-1} = & && \text{(по определению)}\\
=[x, y]\cdot v_{i-1}+y\cdot x\cdot v_{i-1} = h\cdot v_{i-1}+y\cdot x\cdot v_{i-1} = & &&\\
=(\lambda-2(i-1))v_{i-1}+(\lambda-i+2)y\cdot v_{i-2} = & && \text{(ввиду (a) и предпо-}\\
& && \text{ложения индукции)}\\
=(\lambda-2i+2)v_{i-1}+(i-1)(\lambda-i+2)v_{i-1} = & && \text{(ввиду (b))}\\
=i(\lambda-i+1)v_{i-1}. & &&
\end{aligned}
$$

Теперь разделим обе части равенства на i. □

В силу формулы (a) все ненулевые элементы v_i линейно независимы. Но $\dim V<\infty$. Пусть m — наименьшее целое число, для которого $v_m\neq 0$, $v_{m+1}=0$; ясно, что $v_{m+i}=0$ при всех $i>0$. Вместе формулы (a)—(c) показывают, что подпространство в V с базисом $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ является ненулевым L-подмодулем. Поскольку модуль V неприводим, это подпространство совпадает с V. При этом в упорядоченном базисе $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ можно в явном виде выписать матрицы эндоморфизмов, представляющих x, y, h; отметим, что h представляется диагональной матрицей, а x и y — соответственно верхней и нижней треугольными нильпотентными матрицами.

При внимательном взгляде на формулу (c) открывается неожиданный факт: при $i=m+1$ левая часть равна 0, а правая — $(\lambda-m)v_m$. Поскольку $v_m\neq 0$, то мы заключаем, что $\lambda=m$. Другими словами, *вес старшего вектора равен неотрицательному целому числу* (на единицу меньше, чем $\dim V$). Назовем его *старшим весом* для V. При этом в силу формулы (a) каждый вес μ имеет кратность 1 (т. е. $\dim V_\mu=1$, если $V_\mu\neq 0$); как следствие, поскольку V однозначно определяет λ ($\lambda=\dim V-1$), старший вектор v_0 единствен в V (с точностью до ненулевого скалярного множителя). В итоге доказана

Теорема. *Пусть V — неприводимый модуль над $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$.*

(a) *Относительно h модуль V является прямой суммой весовых подпространств V_μ, $\mu=m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, где $m+1=\dim V$ и $\dim V_\mu=1$ для каждого μ.*

(b) *В V имеется (с точностью до ненулевого скалярного множителя) единственный старший вектор, вес которого (называемый старшим весом для V) равен m.*

(c) *Действие алгебры L на V выражается приведенными формулами, если базис выбран как выше. Как следствие, существует (с точностью до изоморфизма) не более одного неприводимого L-модуля каждой возможной размерности $m+1$, $m\geqslant 0$.* □

Следствие. *Пусть V — произвольный (конечномерный) L-модуль, $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Тогда все собственные значения эндоморфизма h на V целые, и каждое встречается с той же кратностью, что и проти-*

воположное. При этом в любом разложении модуля V в прямую сумму неприводимых подмодулей число слагаемых равно $\dim V_0 + \dim V_1$.

Доказательство. При $V=0$ доказательство не требуется. В остальных случаях запишем V с помощью теоремы Вейля (п. 6.3) как прямую сумму неприводимых подмодулей. Последние описаны в предыдущей теореме, и первое утверждение следствия очевидно. Для доказательства второго заметим, что каждый неприводимый L-модуль встречается ровно один раз, причем с весом 0 или 1 (но не с обоими). □

Для целей этой главы доказанная теорема и ее следствие вполне достаточны. Однако было бы неразумно закрывать эту тему, не выяснив, существуют ли неприводимые $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$-модули со всеми возможными старшими весами $m=0, 1, 2, \ldots$ Конечно, мы уже знаем, как строить соответствующие модули в малых размерностях: тривиальный модуль (размерность 1), естественное представление (размерность 2), присоединенное представление (размерность 3). Для произвольного $m \geqslant 0$ с помощью формул (a)—(c) из леммы 7.2 можно определить неприводимое представление алгебры L на $(m+1)$-мерном векторном пространстве над F с базисом $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$, которое обозначается $V(m)$. Как обычно, (легкая) проверка этого утверждения предоставляется читателю (упражнение 3). (Общую теорему существования см. ниже в п. 20.3.)

Еще одно замечание: симметрию в структуре пространства $V(m)$ можно сделать более очевидной, применив сказанное об экспоненциальных отображениях в п. 2.3. Пусть $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V(m))$ — неприводимое представление со старшим весом m. Тогда $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ — нильпотентные эндоморфизмы (ввиду предыдущих формул), и мы можем определить автоморфизм пространства $V(m)$, положив $\tau = \exp \varphi(x) \exp \varphi(-y) \exp \varphi(x)$. Мы вправе считать, что $m > 0$, так что представление точное (поскольку алгебра L проста). Из п. 2.3 видно, что трансформирование эндоморфизма $\varphi(h)$ посредством τ равнозначно применению к $\varphi(h)$ отображения $\exp(\operatorname{ad} \varphi(x)) \exp(\operatorname{ad} \varphi(-y)) \exp(\operatorname{ad} \varphi(x))$. Но алгебра $\varphi(L)$ изоморфна L, поэтому можно провести вычисление, как в п. 2.3. Вывод: $\tau\varphi(h)\tau^{-1} = -\varphi(h)$, или $\tau\varphi(h) = -\varphi(h)\tau$. Мы сразу видим, что τ отображает базисный вектор v_i веса $m-2i$ в базисный вектор v_{m-i} веса $-(m-2i)$. (В п. 2.3 мы ограничились частным случаем $m=1$.) Более общо, если V — любой конечномерный L-модуль, то τ переставляет его положительные и отрицательные весовые подпространства.

Упражнения

В этих упражнениях $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$.

1. С помощью теоремы Ли докажите существование старшего вектора в произвольном конечномерном L-модуле. [Рассмотрите подалгебру B, которую порождают h и x.]

2. Алгебра $M = \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ содержит L в виде подалгебры матриц, у которых последняя строка и последний столбец нулевые. Представьте M как прямую сумму неприводимых L-модулей (рассматривая M как L-модуль, соответствующий присоединенному представлению):

$$V(0) \oplus V(1) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

3. Проверьте, что формулы (a)—(c) из леммы 7.2 на самом деле определяют неприводимое представление алгебры L. [Чтобы показать, что они определяют представление, достаточно показать, что структурные уравнения для x, y, h выполнены и для соответствующих им матриц.]

4. Неприводимое представление алгебры L старшего веса m допускает следующую «естественную» реализацию. Пусть X, Y — базис двумерного векторного пространства F^2, на котором L действует обычным образом. Далее, пусть $\mathbb{R} = F[X, Y]$ — алгебра многочленов от двух переменных. Распространим действие алгебры L на $\mathbb{R}$ по правилу дифференцирования: $z \cdot fg = (z \cdot f)g + f(z \cdot g)$ при $z \in L$; f, $g \in \mathbb{R}$. Покажите, что такое определение корректно, причем $\mathbb{R}$ превращается в L-модуль. Затем покажите, что подпространство однородных многочленов степени m с базисом X^m, $X,^{m-1}$ $Y, \ldots, XY^{m-1}$, Y^m инвариантно при действии алгебры L и неприводимо со старшим весом m.

5. Пусть $\operatorname{char} \mathsf{F} = p > 0$, $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Докажите, что представление $V(m)$ алгебры L, построенное как в упражнениях 3 и 4, неприводимо, пока старший вес m строго меньше p, но приводимо при $m = p$.

6. Разложите тензорное произведение L-модулей $V(3)$, $V(7)$ в сумму неприводимых подмодулей

$$V(4) \oplus V(6) \oplus V(8) \oplus V(10).$$

Попробуйте вывести общую формулу для разложения произведения $V(m) \otimes V(n)$.

7. В этом упражнении мы построим некоторые б е с к о н е ч н о м е р н ы е L-модули. Пусть $\lambda \in \mathsf{F}$ — произвольный скаляр, а $Z(\lambda)$ — векторное пространство над F с бесконечным счетным базисом $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$.

(a) Докажите, что формулы (a)—(c) из леммы 7.2 определяют на $Z(\lambda)$ структуру L-модуля и каждый его ненулевой L-подмодуль содержит хотя бы один старший вектор.

(b) Пусть $\lambda + 1 = i$ — неотрицательное целое число. Докажите, что v_i — старший вектор (например, для $\lambda = -1$, $i = 0$). Отсюда возникает гомоморфизм L-модулей $Z(\mu) \xrightarrow{\varphi} Z(\lambda)$, $\mu = \lambda - 2i$, отображающий v_0 в v_i. Покажите, что φ является мономорфизмом, причем оба L-модуля $\operatorname{Im} \varphi$, $Z(\lambda)/\operatorname{Im} \varphi$ неприводимы (но $Z(\lambda)$ не будет вполне приводимым при $i > 0$).

(c) Пусть $\lambda + 1$ не является неотрицательным целым числом. Докажите, что модуль $Z(\lambda)$ неприводим.

§8. Разложение на корневые подпространства

В этом параграфе L обозначает полупростую алгебру Ли. Мы намереваемся подробно изучить ее строение с помощью присоединенного представления. Нашими основными инструментами будут форма Киллинга и теоремы из пп. 6.4, 7.2 (которые существенно опираются на теорему Вейля). Читателю полезно иметь в виду для наглядности частный случай $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ (и вообще $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$).

8.1. Максимальные торические подалгебры и корни. Если алгебра L состоит только из нильпотентных (т.е. ad-нильпотентных) элементов, то она и сама нильпотентна (теорема Энгеля). В противном случае можно найти элемент $x \in L$ с ненулевой полупростой частью x_s в абстрактном разложении Жордана (см. п. 5.4). Это показывает, что в L имеется ненулевая подалгебра, состоящая из полупростых элементов (например, натянутая на x). Назовем такую подалгебру *торической*. Следующая лемма имеет некоторое сходство с теоремой Энгеля.

Лемма. *Любая торическая подалгебра в L абелева.*

Доказательство. Пусть T — некоторая торическая подалгебра. Нужно показать, что $\operatorname{ad}_T x = 0$ для всех $x \in T$. Поскольку отображение $\operatorname{ad} x$ диагонализуемо ($\operatorname{ad} x$ полупросто, а F алгебраически замкнуто), фактически нужно показать, что у $\operatorname{ad}_T x$ нет ненулевых собственных значений. Предположим противное: пусть $[x, y] = ay$ ($a \neq 0$) для некоторого ненулевого элемента $y \in T$. Тогда сам элемент $\operatorname{ad}_T y(x) = -ay$ будет собственным вектором для $\operatorname{ad}_T y$ с собственным значением 0. С другой стороны, можно записать x как линейную комбинацию собственных векторов отображения $\operatorname{ad}_T y$ (при этом элемент y также полупрост); после применения $\operatorname{ad}_T y$ к x может остаться лишь комбинация собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям. Но это противоречило бы предыдущему выводу. □

Зафиксируем *максимальную торическую подалгебру* H в L, т.е. такую, которая не содержится ни в какой большей торической подалгебре. (Обозначение H не так естественно, как T, но более традиционно.) Например, если $L = \mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$, то легко проверить (упражнение 1), что в качестве H можно взять множество диагональных матриц (со следом 0).

Поскольку подалгебра H абелева (по предыдущей лемме), $\operatorname{ad}_L H$ представляет собой коммутирующее семейство полупростых эндоморфизмов алгебры L. Согласно известному результату из линейной алгебры *их можно одновременно диагонализовать*. Другими словами, L является прямой суммой подпространств $L_\alpha = \{x \in L : [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\}$, где α пробегает H^*. Отметим, что L_0 — это просто $C_L(H)$, централизатор подалгебры H; он содержит H согласно лемме. Множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается Φ; его элементы называются *корнями* алгебры L относительно H (и их количество конечно). В этих обозначениях мы получаем *разложение на корневые подпространства* (или *разложение Картана*):

$$L = C_L(H) \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \qquad (*)$$

Например, если $L = \mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$, то читатель заметит, что $(*)$ соответствует разложению алгебры L по стандартному базису (см. п. 1.2). Далее мы намерены, во-первых, доказать, что $H = C_L(H)$, затем подробнее описать множество корней и, наконец, показать, что Φ полностью описывает L.

Начнем с нескольких простых замечаний о разложении на корневые подпространства.

Предложение. *Для любых $\alpha, \beta \in H^*$ выполняется включение $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Если $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, то оператор* ad x *нильпотентен. Если $\alpha, \beta \in H^*$ и $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространство L_α ортогонально к L_β относительно формы Киллинга $\varkappa$ на L.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из тождества Якоби: если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, $h \in H$, то $\operatorname{ad} h([x, y]) = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y]$. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого.

Чтобы доказать оставшееся утверждение, найдем элемент $h \in H$, для которого $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$. Тогда если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, то ввиду ассоциативности формы Киллинга $\varkappa([h, x], y) = -\varkappa([x, h], y) = -\varkappa(x, [h, y])$, а значит $\alpha(h)\varkappa(x, y) = -\beta(h)\varkappa(x, y)$ и $(\alpha+\beta)(h)\varkappa(x, y) = 0$. Как следствие, $\varkappa(x, y) = 0$. □

Следствие. *Ограничение формы Киллинга на $L_0 = C_L(H)$ невырожденно.*

Доказательство. Из теоремы 5.1 мы знаем, что форма $\varkappa$ невырожденна. С другой стороны, согласно предложению алгебра L_0 ортогональна ко всем L_α $(\alpha \in \Phi)$. Если элемент $z \in L_0$ также ортогонален к L_0, то $\varkappa(z, L) = 0$, откуда $z = 0$. □

8.2. Централизатор подалгебры *H*. Нам потребуется следующий факт из линейной алгебры, доказываемый тривиально.

Лемма. *Если x, y — коммутирующие эндоморфизмы конечномерного векторного пространства, причем эндоморфизм y нильпотентен, то и xy нильпотентен*; *в частности,* $\operatorname{Tr}(xy) = 0$.

Предложение. *Пусть H — максимальная торическая подалгебра в L. Тогда $H = C_L(H)$.*

Доказательство разобьем на шаги. Положим $C = C_L(H)$.

1. *Алгебра C содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов.* Сказать, что x принадлежит $C_L(H)$ — означает сказать, что ad x отображает подпространство H алгебры L в 0. Согласно

предложению 4.2, операторы $(\mathrm{ad}\, x)_s$ и $(\mathrm{ad}\, x)_n$ также обладают этим свойством. Но согласно п. 5.4, $(\mathrm{ad}\, x)_s = \mathrm{ad}\, x_s$ и $(\mathrm{ad}\, x)_n = \mathrm{ad}\, x_n$.

2. *Все полупростые элементы из C лежат в H.* Если элемент x полупрост и коммутирует с H, то $H + \mathsf{F}x$ (ясно, что это абелева подалгебра в L) является торической подалгеброй: сумма коммутирующих полупростых элементов снова полупроста (см. п. 4.2). Так как H — максимальная торическая подалгебра, $H + \mathsf{F}x = H$, и потому $x \in H$.

3. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.* Пусть $\varkappa(h, H) = 0$ для некоторого $h \in H$; нужно показать, что $h = 0$. Если элемент $x \in C$ нильпотентен, то из равенства $[x, H] = 0$ и нильпотентности отображения $\mathrm{ad}\, x$ вытекает (ввиду предыдущей леммы), что $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y) = 0$ при всех $y \in H$, т. е. $\varkappa(x, H) = 0$. Но тогда из утверждений 1 и 2 следует, что $\varkappa(h, C) = 0$, а значит, $h = 0$ (согласно следствию из предложения 8.1 ограничение формы $\varkappa$ на C невырожденно).

4. *Алгебра C нильпотентна.* Если элемент $x \in C$ полупрост, то $x \in H$ ввиду утверждения 2 и оператор $\mathrm{ad}_C\, x$ $(=0)$ заведомо нильпотентен. С другой стороны, если $x \in C$ нильпотентен, то оператор $\mathrm{ad}_C\, x$ тем более нильпотентен. Пусть теперь $x \in C$ произволен, $x = x_s + x_n$. Поскольку x_s, x_n лежат в C ввиду утверждения 1, оператор $\mathrm{ad}_C\, x$ равен сумме коммутирующих нильпотентных операторов и потому сам нильпотентен. По теореме Энгеля алгебра C нильпотентна.

5. Выполнено равенство $H \cap [C, C] = 0$. Поскольку форма $\varkappa$ ассоциативна и $[H, C] = 0$, то $\varkappa(H, [C, C]) = 0$. Теперь применим утверждение 3).

6. *Алгебра C абелева.* В противном случае $[C, C] \neq 0$. Ввиду утверждения 4 C нильпотентна, и по лемме 3.3 мы имеем $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$. Пусть $z \neq 0$ лежит в этом пересечении. Ввиду утверждений 2 и 5 элемент z не может быть полупростым. Поэтому его нильпотентная часть n не равна 0 и ввиду утверждения 1 лежит в C, а потому и в $Z(C)$ согласно предложению 4.2. Но тогда из нашей леммы следует, что $\varkappa(n, C) = 0$, вопреки следствию 8.1.

7. Выполнено равенство $C = H$. В противном случае C содержит ненулевой нильпотентный элемент x ввиду утверждений 1 и 2. Согласно лемме и шагу 6 мы имеем $\varkappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y) = 0$ при всех $y \in C$, что противоречит следствию 8.1. $\square$

Следствие. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.*

Это следствие позволяет нам отождествить H с H^*: элементу $\varphi \in H^*$ отвечает (единственный) такой элемент $t_\varphi \in H$, что $\varphi(h) = \varkappa(t_\varphi, h)$ для всех $h \in H$. Тогда Φ отвечает подмножеству $\{t_\alpha;\ \alpha \in \Phi\}$ в H.

8.3. Свойства ортогональности. В этом пункте с помощью формы Киллинга мы получим более точную информацию о разложении на корневые подпространства. Мы уже видели (предложение 8.1), что $\varkappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha+\beta \neq 0$; в частности, $\varkappa(H, L_\alpha)=0$ для всех $\alpha \in \Phi$, так что (предложение 8.2) форма $\varkappa$ имеет невырожденное ограничение на H.

Предложение. (a) *Множество Φ порождает H^*.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$.*

(c) *Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Тогда $[x, y]=\varkappa(x, y)t_\alpha$ (где t_α таково, как в п. 8.2).*

(d) *Если $\alpha \in \Phi$, то пространство $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ одномерно с образующим t_α.*

(e) *Справедливо соотношение $\alpha(t_\alpha)=\varkappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in \Phi$.*

(f) *Если $\alpha \in \Phi$, а x_α — любой ненулевой элемент в L_α, то существует такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что элементы x_α, y_α, $h_\alpha=[x_\alpha, y_\alpha]$ порождают трехмерную простую подалгебру в L. Ее изоморфизм с $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ задают формулы $x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.*

(g) *Справедливы равенства $h_\alpha=\dfrac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}$; $h_\alpha=-h_{-\alpha}$.*

Доказательство. (a) Если Φ не порождает H^*, то (по двойственности) существует такой ненулевой элемент $h \in H$, что $\alpha(h)=0$ для всех $\alpha \in \Phi$. Но это означает, что $[h, L_\alpha]=0$ при всех $\alpha \in \Phi$. Поскольку $[h, H]=0$, отсюда в свою очередь следует, что $[h, L]=0$, т. е. $h \in Z(L)=0$, что невозможно.

(b) Пусть $\alpha \in \Phi$. Если $-\alpha \notin \Phi$ (т. е. $L_{-\alpha}=0$), то $\varkappa(L_\alpha, L_\beta)=0$ при всех $\beta \in H^*$ (предложение 8.1). Поэтому $\varkappa(L_\alpha, L)=0$, вопреки невырожденности формы $\varkappa$.

(c) Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Возьмем произвольный элемент $h \in H$. Поскольку форма $\varkappa$ ассоциативна, $\varkappa(h, [x, y])=\varkappa([h, x], y)=\alpha(h)\varkappa(x, y)=$ $=\varkappa(t_\alpha, h)\varkappa(x, y)=\varkappa(\varkappa(x, y)t_\alpha, h)=\varkappa(h, \varkappa(x, y)t_\alpha)$. Это означает, что подалгебра H ортогональна к $[x, y]-\varkappa(x, y)t_\alpha$, а значит $[x, y]=\varkappa(x, y)t_\alpha$ (следствие 8.2).

(d) Шаг (c) показывает, что t_α порождает подалгебру $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, если она ненулевая. Пусть $0 \neq x \in L$. Если $\varkappa(x, L_{-\alpha})=0$, то $\varkappa(x, L)=0$ (см. шаг (b), что невозможно, поскольку форма $\varkappa$ невырожденна. Поэтому найдется $0 \neq y \in L_{-\alpha}$, для которого $\varkappa(x, y) \neq 0$. Ввиду шага (c) мы получаем, что $[x, y] \neq 0$.

(e) Пусть $\alpha(t_\alpha)=0$, так что $[t_\alpha, x]=0=[t_\alpha, y]$ при всех $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Как и на шаге (d), можно при этом выбрать x, y так, что $\varkappa(x, y)=0$. После умножения одного из этих элементов на скаляр можно считать, что $\varkappa(x, y)=1$. Тогда $[x, y]=t_\alpha$ ввиду утверждения (c). Следовательно, подпространство S в L, натянутое на x, y, t_α, является трехмерной разрешимой алгеброй, $S \cong \operatorname{ad}_L S \subset \mathfrak{gl}(L)$. Как следствие, отображение $\operatorname{ad}_L s$ нильпотентно при всех $s \in [S, S]$ (следствие 4.1A), поэтому отображение $\operatorname{ad}_L t_\alpha$ одновременно полупросто и нильпотентно, т. е. $\operatorname{ad}_L t_\alpha=0$. Это означает, что $t_\alpha \in Z(L)=0$, вопреки выбору t_α.

(f) Для данного элемента x_α $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, найдем такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что $\varkappa(x_\alpha, y_\alpha) = \dfrac{2}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}$. Это возможно ввиду утверждения (e) и того факта, что $\varkappa(x_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$. Положим $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}$. Тогда $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ ввиду утверждения (c). При этом $[h_\alpha, x_\alpha] = \dfrac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = \dfrac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)} x_\alpha = 2x_\alpha$ и аналогично $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Таким образом, элементы x_α, y_α, h_α порождают трехмерную подалгебру в L с той же таблицей умножения, что и в $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ (пример 2.1).

(g). Напомним, что t_α определяется условием $\varkappa(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ $(h \in H)$. Это показывает, что $t_\alpha = -t_{-\alpha}$, и наше утверждение вытекает из способа определения h_α. □

8.4. Свойства целочисленности. Для данной пары корней α, $-\alpha$ (предложение 8.3(b)) пусть $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ — подалгебра в L, построенная, как в предложении 8.3(f). Благодаря теореме Вейля и теореме 7.2 у нас есть полное описание всех (конечномерных) S_α-модулей, что позволяет описать и $\operatorname{ad}_L S_\alpha$.

Фиксируем $\alpha \in \Phi$. Вначале рассмотрим подпространство M в L, порожденное подалгеброй H вместе со всеми корневыми подпространствами вида $L_{c\alpha}$ $(c \in F^*)$. В силу предложения 8.1 это S_α-подмодуль в L. Ввиду теоремы 7.2 веса элемента h_α на M целочисленны, а именно, равны 0 и $2c = c\alpha(h_\alpha)$ (для таких ненулевых значений c, что $L_{c\alpha} \neq 0$). Как следствие, все значения c здесь кратны $1/2$. При этом S_α действует тривиально на $\operatorname{Ker} \alpha$, а $\operatorname{Ker} \alpha$ — подпространство коразмерности 1 в H, дополнительное к $\mathsf{F}h_\alpha$. С другой стороны, сама подалгебра S_α является неприводимым S_α-подмодулем в M. Вес 0 для h_α появляется только в подпространствах $\operatorname{Ker} \alpha$ и S_α. Следовательно, все четные веса, встречающиеся в M, равны 0 и ± 2. Это показывает, что 2α — не корень, т. е. *удвоенный корень никогда не является корнем*. Но тогда и $(1/2)\alpha$ не может быть корнем, поэтому 1 не является весом для h_α в M. Ввиду следствия 7.2 мы имеем $M = H + S_\alpha$, а значит, $\dim L_\alpha = 1$ (таким образом, S_α однозначно определяется как подалгебра, которую L_α и $L_{-\alpha}$ порождают в L) и *среди кратных корня* α *корнями являются лишь* $\pm\alpha$.

Теперь изучим действие подалгебры S_α на корневых подпространствах L_β, $\beta \neq \pm\alpha$. Положим $K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}$. Согласно предыдущему абзацу каждое корневое подпространство одномерно и ни одно из значений $\beta + i\alpha$ не равно 0; поэтому K является S_α-подмодулем в L с одномерными корневыми подпространствами для различных целочисленных весов $\beta(h_\alpha) + 2i$ (где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $\beta + i\alpha \in \Phi$). Ясно, что 0 и 1 не могут одновременно быть весами такого вида, и ввиду следствия 7.2 модуль K неприводим. Старший (соответственно младший) вес должен равняться $\beta(h_\alpha) + 2q$ (соответственно $\beta(h_\alpha) - 2r$), где q (соответственно r) — наибольшее целое число, для которого $\beta + q\alpha$ (соответственно $\beta - r\alpha$) является корнем. При этом веса модуля K образуют арифметическую прогрессию с разностью 2 (теорема 7.2), и поэтому корни $\beta + i\alpha$ образуют серию (*α-серию, порожденную корнем* β) $\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha$. Отметим также, что $(\beta - r\alpha)(h_\alpha) = -(\beta + q\alpha)(h_\alpha)$, или $\beta(h_\alpha) = r - q$. Наконец, заметим, что если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то $\operatorname{ad} L_\alpha$ отображает L_β на $L_{\alpha+\beta}$ (лемма 7.2), т. е. $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

В итоге получаем

Предложение. (a) *Если $\alpha \in \Phi$, то* $\dim L_\alpha = 1$. *Как следствие, $S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha (H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}])$, и для данного ненулевого элемента $x_\alpha \in L_\alpha$ существует единственный такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то среди произведений корня на скаляры являются корнями только α и $-\alpha$.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ и $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.* (Числа $\beta(h_\alpha)$ называются *числами Картана*.)

(d) *Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.*

(e) *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$. Далее, пусть r, q — наибольшие целые числа, для которых $\beta - r\alpha$, $\beta + q\alpha$ соответственно являются корнями. Тогда $\beta + i\alpha \in \Phi$ при $-r \leqslant i \leqslant q$ и $\beta(h_\alpha) = r - q$.*

(f) *Алгебра Ли L порождается корневыми подпространствами L_α.*

8.5. Свойства рациональности. Выводы. В этом пункте L — полупростая алгебра Ли (над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0), H — ее максимальная торическая подалгебра, $\Phi \subset H^*$ — множество корней в L (относительно H), $L = H + \coprod_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ — разложение на корневые подпространства.

Так как ограничение формы Киллинга на H невырожденно (следствие 8.2), мы можем перенести ее на H^*, положив $(\gamma, \delta) = \varkappa(t_\gamma, t_\delta)$ при всех $\gamma, \delta \in H^*$. Мы знаем, что Φ порождает H^* (предложение 8.3(a)), поэтому в H^* можно выбрать базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, состоящий из корней. Любой корень $\beta \in \Phi$ можно единственным образом представить в виде $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$, где $c_i \in \mathsf{F}$. Мы утверждаем, что на самом деле $c_i \in \mathbb{Q}$. Чтобы убедиться в этом, потребуются некоторые факты из линейной алгебры. Для каждого $j = 1, \ldots, \ell$ мы имеем $(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\alpha_i, \alpha_j)$ и после умножения обеих частей на $\dfrac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ получаем $\dfrac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} \dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} c_i$. Это равенство можно считать системой ℓ уравнений от ℓ неизвестных c_i с целыми (тем самым и рациональными) коэффициентами (ввиду предложения 8.4(c)). Поскольку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — базис в H^*, а форма невырожденна, невырожденна и матрица (α_i, α_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant \ell)$; тогда это верно и для матрицы коэффициентов нашей системы уравнений. Мы заключаем, что система имеет единственное решение в $\mathbb{Q}$, что и доказывает наше утверждение.

Итак, мы показали, что $\mathbb{Q}$-подпространство $\mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$ в H^*, натянутое на все корни, имеет $\mathbb{Q}$-размерность $\ell = \dim_{\mathsf{F}} H^*$. Верно даже большее: напомним, что если $\lambda, \mu \in H^*$, то $(\lambda, \mu) = \varkappa(t_\lambda, t_\mu) = \sum \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum(\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$, где сумма взята по $\alpha \in \Phi$. В частности, для $\beta \in \Phi$ мы имеем $(\beta, \beta) = \sum(\alpha, \beta)^2$. Разделив на $(\beta, \beta)^2$, получаем $\dfrac{1}{(\beta, \beta)} = \sum \dfrac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}$. Правая часть этого равенства принадлежит множеству $\mathbb{Q}$, так как $\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$ по предложению 8.4(c). Следовательно, $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$, а тогда и $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Как следствие, все скалярные произведения векторов в $\mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$ рациональны, и мы получаем невырожденную форму на $\mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$. Как и выше, $(\lambda, \lambda) = \sum(\alpha, \lambda)^2$, поэтому величина (λ, λ) при $\lambda \in \mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$ является суммой квадратов рациональных чисел и, значит, положительна (кроме случая $\lambda = 0$). Таким образом, полученная форма на $\mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$ положительно определенна.

Пусть теперь E — вещественное векторное пространство, получаемое при замене основного поля $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$: $\mathsf{E} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathsf{E}_{\mathbb{Q}}$. Форма продолжается на E естественным образом и остается положительно определенной в силу предыдущих замечаний, т. е. E превращается в евклидово пространство. В множестве Φ содержится его базис, и $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{E} = \ell$. Основные факты о множестве Φ собраны в следующей теореме: см. предложения 8.3(a), (b) и 8.4(b), (c).

Теорема. *Пусть L, H, Φ, E таковы, как выше. Тогда*

(a) *Множество Φ порождает E и не содержит* 0.

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$, но никакое другое произведение скаляра на α не является корнем.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то* $\beta - \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi$.

(d) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то* $\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$.

В терминах гл. III теорема утверждает, что Φ является *системой корней* в вещественном евклидовом пространстве E. Таким образом, мы установили соответствие $(L, H) \mapsto (\Phi, \mathsf{E})$. Полная классификация пар (Φ, E) дана в гл. III. Позже (в гл. IV и V) мы увидим, что на самом деле соответствие взаимно однозначно, а видимая зависимость множества Φ от выбора подалгебры H несущественна.

Упражнения

1. Пусть $\mathbb{Z}$ — классическая линейная алгебра Ли типа A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ или D_ℓ (см. п. 1.2). Докажите, что множество всех диагональных матриц в L явля-

ется максимальной торической подалгеброй размерности ℓ. (Ср. упражнение 2.8.)

2. Для каждой алгебры из упражнения 1 найдите корни и корневые подпространства. Как записываются всевозможные элементы h_α в базисе для H, приведенном в п. 1.2?

3. Пусть L — одна из классических алгебр. Вычислите в явном виде ограничение формы Киллинга на максимальную торическую подалгебру, описанную в упражнении 1.

4. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Докажите, что каждая максимальная торическая подалгебра в L одномерна.

5. Пусть алгебра L полупроста, H — ее максимальная торическая подалгебра. Докажите, что подалгебра H самонормализуема (т. е. $H = N_L(H)$).

6. Найдите базис в $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$, двойственный к стандартному (относительно формы Киллинга). (Ср. упражнение 5.5.)

7. Пусть алгебра L полупроста, H — ее максимальная торическая подалгебра, $h \in H$. Покажите, что подалгебра $C_L(h)$ редуктивна (в смысле упражнения 6.5) и в H содержатся элементы h, для которых $C_L(h) = H$. Для каких h в $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ это справедливо?

8. Для $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ (и других классических алгебр) вычислите в явном виде системы корней и числа Картана. В частности, докажите, что все числа Картана $\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$, $\alpha \neq \pm\beta$, для $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ равны 0 или ± 1.

9. Докажите, что все трехмерные полупростые алгебры Ли имеют ту же систему корней, что и $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, и как следствие изоморфны ей.

10. Докажите, что не существует полупростых алгебр Ли размерностей 4, 5 и 7.

11. Пусть $(\alpha, \beta) > 0$. Докажите, что $\alpha - \beta \in \Phi$ $(\alpha, \beta \in \Phi)$. Верно ли обратное?

Замечания

Использование максимальных торических подалгебр вместо более традиционных (но эквивалентных) картановских подсказано параллельной теорией полупростых алгебраических групп: см. Borel [1], Seligman [2], Winter [1].

Глава III

Системы корней

§9. *Аксиоматика*

9.1. Отражения в евклидовом пространстве. На протяжении этой главы мы работаем в фиксированном евклидовом пространстве E, т. е. конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$, наделенном положительно определенной симметрической билинейной формой (α, β). *Отражение* в пространстве E геометрически представляет собой обратимое линейное преобразование, которое оставляет на месте точки некоторой *гиперплоскости* (подпространства коразмерности 1) и отображает каждый ортогональный ей вектор в противоположный. Ясно, что отражение ортогонально, т. е. сохраняет скалярное произведение в E. Каждый ненулевой вектор α определяет отражение σ_α с *плоскостью отражения* $P_\alpha = \{\beta \in \mathsf{E}\colon (\beta, \alpha) = 0\}$. Разумеется, ненулевые векторы, пропорциональные α, порождают то же отражение. Для него легко выписать явную формулу: $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$. (Действительно, тогда α отображается в $-\alpha$, а все точки из P_α остаются на месте.) Поскольку число $\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ будет часто встречаться, мы обозначим его $\langle\beta, \alpha\rangle$. Отметим, что функция $\langle\beta, \alpha\rangle$ линейна лишь по первому переменному.

Отметим следующий факт, который будет полезен в дальнейшем.

Лемма. *Пусть конечное множество Φ порождает пространство E, причем все отражения σ_α $(\alpha \in \Phi)$ переводит Φ в себя. Тогда если отражение $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathsf{E})$ переводит Φ в себя и оставляет на месте все точки некоторой гиперплоскости P в E, а некоторый ненулевой вектор $\alpha \in \Phi$ отображает в противоположный, то $\sigma = \sigma_\alpha$ (и $P = P_\alpha$).*

Доказательство. Пусть $\tau = \sigma\sigma_\alpha (= \sigma\sigma_\alpha^{-1})$. Тогда $\tau(\Phi) = \Phi$, $\tau(\alpha) = \alpha$ и τ действует тождественно на подпространстве $\mathbb{R}\alpha$, так же как и на факторпространстве $\mathsf{E}/\mathbb{R}\alpha$. Поэтому все собственные значения отображения τ равны 1 и его минимальный многочлен делит $(T-1)^\ell$ $(\ell = \dim \mathsf{E})$. С другой стороны, поскольку множество Φ конечно, векторы $\beta, \tau(\beta), \ldots, \tau^k(\beta)$ $(\beta \in \Phi$, $k \geqslant \mathrm{Card}\,\Phi)$ не могут быть все различны. Поэтому некоторая степень отображения τ оставляет β на месте. Выберем k настолько большим, что τ^k оставляет на месте все $\beta \in \Phi$. Так как Φ порождает E, мы получаем, что $\tau^k = 1$; поэтому минимальный многочлен отображения τ делит $T^k - 1$. В сочетании с предыдущим шагом это показывает, что τ имеет минимальный многочлен $T-1=\text{НОД}(T^k-1,\ (T-1)^\ell)$, т. е. $\tau=1$. $\square$

9.2. Системы корней. Подмножество Φ евклидова пространства E называется *системой корней* в E, если выполнены следующие аксиомы.

(R1) Множество Φ конечно, порождает E и не содержит 0.

(R2) Если $\alpha\in\Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся только $\pm\alpha$.

(R3) Если $\alpha\in\Phi$, то отражение σ_α оставляет множество Φ инвариантным.

(R4) Если $\alpha,\ \beta\in\Phi$, то $\langle\beta,\ \alpha\rangle\in\mathbb{Z}$.

Эти аксиомы несколько избыточны: так, равенство $\Phi=-\Phi$ вытекает как из аксиомы (R2), так и из (R3). В литературе иногда опускают аксиому (R2), и множество, которое мы назвали «системой корней», тогда упоминается как «приведенная система корней» (см. упражнение 9). Отметим, что замена скалярного произведения в E на кратное ему с положительным коэффициентом не затрагивает аксиомы, поскольку в них входят только о т н о ш е н и я скалярных произведений.

Пусть Φ — система корней в E. Обозначим через $\mathscr{W}$ подгруппу в $\mathrm{GL}(\mathsf{E})$, порожденную отражениями σ_α $(\alpha\in\Phi)$. Согласно (R3) подгруппа $\mathscr{W}$ переставляет элементы множества Φ, которое согласно (R1) конечно и порождает E. Это позволяет нам отождествить $\mathscr{W}$ с подгруппой симметрической группы на Φ; в частности, группа $\mathscr{W}$ конечна. Она называется *группой Вейля* для Φ и играет исключительно важную роль в последующем изложении. Следующая лемма описывает ее трансформирование некоторыми автоморфизмами пространства E.

Лемма. *Пусть Φ — система корней в E с группой Вейля $\mathscr{W}$. Если $\sigma\in\mathrm{GL}(\mathsf{E})$ оставляет множество Φ инвариантным, то $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$ для всех $\alpha\in\Phi$, причем $\langle\beta,\ \alpha\rangle=\langle\sigma(\beta),\ \sigma(\alpha)\rangle$ для всех $\alpha,\ \beta\in\Phi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$, мы получаем, что $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))=\sigma\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$. Но тогда $\sigma(\beta-\langle\beta,\ \alpha\rangle\alpha)=\sigma(\beta)-\langle\beta,\ \alpha\rangle\sigma(\alpha)$. Так как $\sigma(\beta)$ пробегает Φ вместе с β, отображение $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ оставляет Φ инвариантным, при этом оставляя на месте точки гиперплоскости $\sigma(P_\alpha)$ и отображая $\sigma(\alpha)$ в $-\sigma(\alpha)$. По лемме 9.1 справедливо равенство $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$. Но тогда, сравнив предыдущее уравнение с уравнением $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-\langle\sigma(\beta),\ \sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$, мы получаем и второе утверждение леммы. $\square$

Имеется естественное определение изоморфизма между системами корней Φ, Φ' в соответствующих евклидовых пространствах E, E': назовем $(\Phi,\ \mathsf{E})$ и $(\Phi',\ \mathsf{E}')$ *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств (который может не быть изометрией) $\varphi\colon\mathsf{E}\to\mathsf{E}'$, отображающий Φ на Φ', причем $\langle\varphi(\beta),\ \varphi(\alpha)\rangle$ для каждой пары корней $\alpha,\ \beta\in\Phi$. Отсюда сразу следует, что $\sigma_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta))=\varphi(\sigma_\alpha(\beta))$. Таким образом, изоморфизм систем корней индуцирует естественный изоморфизм групп Вейля: $\sigma\mapsto\varphi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}$. Ввиду предыдущей леммы автоморфизм системы Φ — то же самое, что автоморфизм пространства E, оставляющий множество Φ инвариантным. В частности, можно рассматривать $\mathscr{W}$ как подгруппу в $\operatorname{Aut}\Phi$ (см. упражнение 6).

Полезно использовать не только α, но и $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$. Назовем $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee;\ \alpha\in\Phi\}$ *двойственной* (или *обратной*) системой для Φ. Это действительно система корней в E, причем ее группа Вейля канонически изоморфна группе $\mathscr{W}$ (упражнение 2). (Возвращаясь к § 8, мы видим, что α соответствует t_α, а $\alpha^\vee$ соответствует h_α при отождествлении H с H^* с помощью формы Киллинга.)

9.3. Примеры. Назовем $\ell = \dim \mathsf{E}$ *рангом* системы корней Φ. При $\ell \leqslant 2$ можно просто изобразить Φ на рисунке. При $\ell = 1$ ввиду (R2) имеется лишь один вариант, обозначаемый A_1:

Разумеется, это действительно система корней (с группой Вейля порядка 2); в теории алгебр Ли она соответствует алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$.

Ранг 2 предлагает больше возможностей. Четыре из них изображены на рис. 1 (на самом деле других возможностей нет). В каждом случае читателю следует непосредственно проверить выполнение аксиом и определить $\mathscr{W}$.

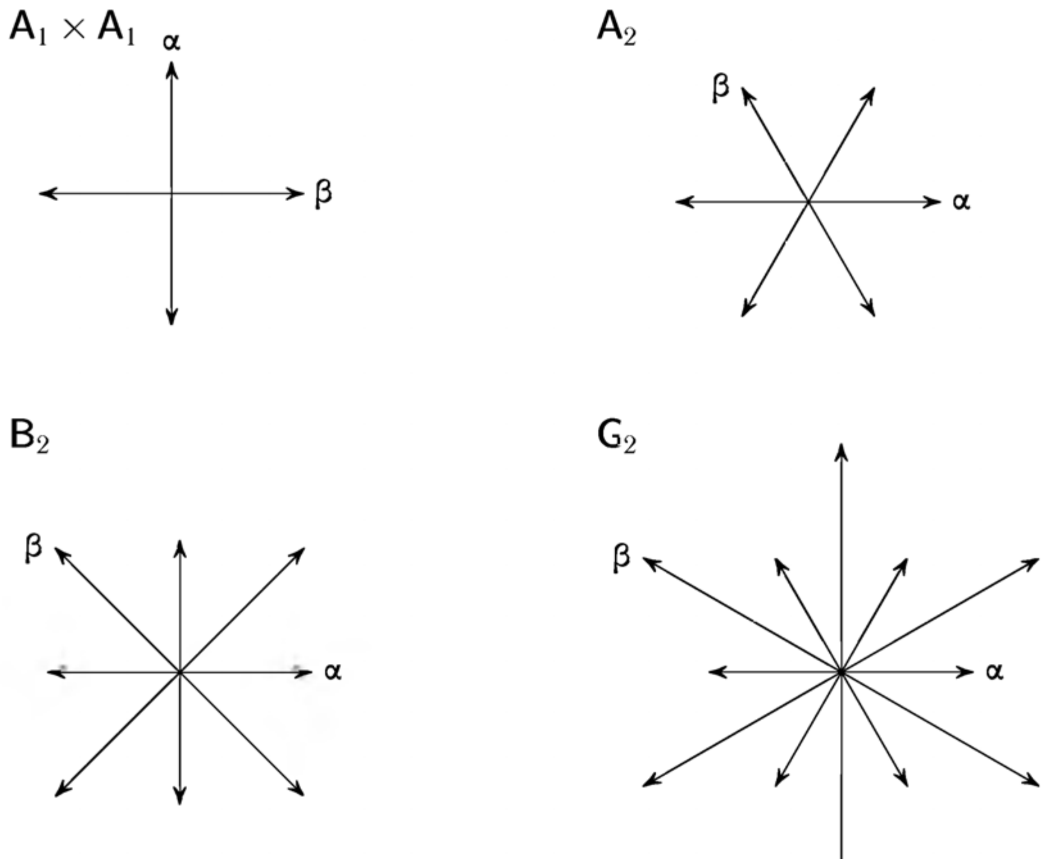


Рис. 1

9.4. Пары корней. Аксиома (R4) резко ограничивает возможные углы между парами корней. Напомним, что косинус угла θ между векторами $\alpha, \beta \in \mathsf{E}$ определяется формулой $\|\alpha\|\|\beta\| \cos\theta = (\alpha, \beta)$. Следовательно, $\langle\beta, \alpha\rangle = \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\dfrac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta$ и $\langle\alpha, \beta\rangle\langle\beta, \alpha\rangle = 4\cos^2\theta$. Последнее выражение равно неотрицательному целому числу; но $0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1$ и $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\beta, \alpha\rangle$ имеют одинаковый знак, поэтому все возможности при $\alpha \neq \pm\beta$ и $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$ исчерпываются следующей таблицей 1.

Таблица 1

$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\langle\beta, \alpha\rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	не опр.
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Читатель заметит, что как раз эти углы и отношения длин изображены на рис. 1. (В случае $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$ можно изменить масштаб на одной оси, обеспечив равенство $\|\alpha\| = \|\beta\|$.) Из таблицы 1 усматривается следующий простой, но очень полезный критерий.

Лемма. *Пусть* α, β — *корни, не пропорциональные друг другу. Если* $(\alpha, \beta) > 0$ (*т. е. угол между* α *и* β *острый*), *то* $\alpha - \beta$ *является корнем. Если* $(\alpha, \beta) < 0$, *то* $\alpha + \beta$ *является корнем.*

Доказательство. Второе утверждение вытекает из первого (примененного к $-\beta$ вместо β). Поскольку значение (α, β) положительно тогда же, когда и $\langle\alpha, \beta\rangle$, из таблицы 1 видно, что одна из величин $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\beta, \alpha\rangle$ равна 1. Если $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$, то $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ в силу (R3); аналогично, если $\langle\beta, \alpha\rangle = 1$, то $\beta - \alpha \in \Phi$ и потому $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. □

В качестве приложения возьмем пару не пропорциональных друг другу корней α, β. Рассмотрим α-*серию, порожденную корнем* β, которая состоит из всех корней вида $\beta + i\alpha$ ($i \in \mathbb{Z}$). Пусть $r, q \in \mathbb{Z}^+$ — наибольшие целые числа, для которых $\beta - r\alpha \in \Phi$, $\beta + q\alpha \in \Phi$ соответственно. Если $\beta + i\alpha \notin \Phi$ при некотором $i \in [-r, q]$, то в этом отрезке найдутся такие числа p, s, $p < s$, что $\beta + p\alpha \in \Phi$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + s\alpha \in \Phi$. Но тогда из леммы следует, что одновременно выполняются неравенства $(\alpha, \beta + p\alpha) \geqslant 0$, $(\alpha, \beta + s\alpha) \leqslant 0$. Это невозможно, поскольку $p < s$ и $(\alpha, \alpha) > 0$. Как следствие, α-*серия, порожденная корнем* β, *не прерывается от* $\beta - r\alpha$ *до* $\beta + q\alpha$. Поскольку σ_α прибавляет или вычитает из каждого корня вектор, кратный α, α-серия инвариантна относительно σ_α. Геометрически очевидно, что σ_α просто переворачивает строку (читатель без труда найдет алгебраическое доказательство). В частности, $\sigma_\alpha(\beta+q\alpha)=\beta-r\alpha$. Левая часть равна $\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha-q\alpha$, и в итоге мы получаем $r-q=\langle\beta,\alpha\rangle$ (см. предложение 8.4(e)). Отсюда немедленно следует, что *длина серий корней не превосходит* 4.

Упражнения

Если не оговорено противное, Φ *обозначает систему корней в* E *с группой Вейля* $\mathscr{W}$.

1. Пусть E' — подпространство в E. Докажите, что если отражение σ_α оставляет E' инвариантным, то либо $\alpha\in\mathsf{E}'$, либо $\mathsf{E}'\subset P_\alpha$.

2. Докажите, что $\Phi^\vee$ — система корней в пространстве E с группой Вейля, естественно изоморфной группе $\mathscr{W}$; покажите также, что $\langle\alpha^\vee,\beta^\vee\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$, и изобразите $\Phi^\vee$ на чертеже для случаев A_1, A_2, B_2, G_2.

3. Покажите, что в таблице 1 порядок элемента $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ в группе $\mathscr{W}$ равен соответственно 2, 3, 4, 6 при $\theta=\pi/2$, $\pi/3$ (или $2\pi/3$), $\pi/4$ (или $3\pi/4$), $\pi/6$ (или $5\pi/6$). [Заметьте, что $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ — поворот на угол 2θ.]

4. Докажите, что группы Вейля для $\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_1$, A_2, B_2, G_2 — группы диэдра порядков 4, 6, 8, 12 соответственно. Докажите также, что если Φ — любая система корней ранга 2, то ее группа Вейля совпадает с одной из перечисленных.

5. Покажите на примере, что $\alpha-\beta$ может быть корнем даже при $(\alpha,\beta)\leqslant 0$ (см. лемму 9.4).

6. Докажите, что $\mathscr{W}$ — нормальная подгруппа в $\operatorname{Aut}\Phi$ (группе всех автоморфизмов системы Φ).

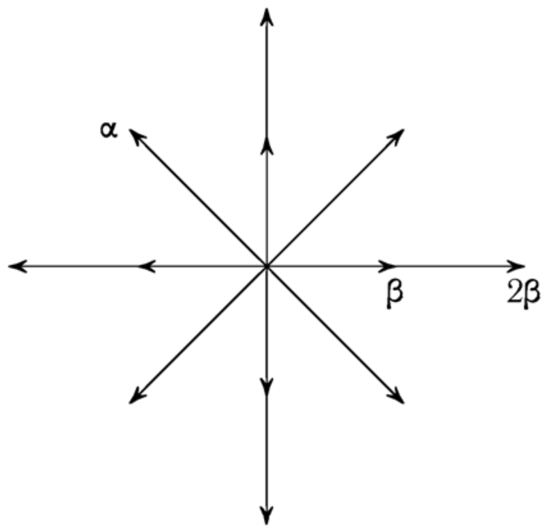


Рис. 2

7. Пусть α,β порождают подпространство E' в E. Докажите, что $\mathsf{E}'\cap\Phi$ — система корней в E'. Аналогично докажите, что $\Phi\cap(\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta)$ — система корней в E' (должна ли она совпадать с $\mathsf{E}'\cap\Phi$?). Более общо, пусть Φ' — непустое подмножество в Φ, причем $\Phi'=-\Phi'$ и если $\alpha,\beta\in\Phi'$, $\alpha+\beta\in\Phi$, то $\alpha+\beta\in\Phi'$. Докажите, что Φ' — система корней в подпространстве, которое оно порождает в E. [Используйте таблицу 1.]

8. Найдя серии корней в G_2, проверьте соотношение $r-q=\langle\beta,\alpha\rangle$.

9. Пусть Φ — множество векторов в евклидовом пространстве E, удовлетворяющее лишь аксиомам (R1), (R3), (R4). Докажите, что векторы, пропорциональные корню $\alpha\in\Phi$ и принадлежащие Φ, могут равняться лишь $\pm 1/2\alpha$, $\pm\alpha$, $\pm 2\alpha$. Проверьте, что $\{\alpha\in\Phi\colon 2\alpha\notin\Phi\}$ — система корней. Пример такой системы см. рис. 2.

10. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, причем α-серия, порожденная корнем β, имеет вид $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$, а β-серия, порожденная корнем α, имеет вид $\alpha - r'\beta, \ldots, \alpha + q'\beta$. Докажите, что $q(r+1)/(\beta, \beta) = q'(r'+1)/(a, a)$.

11. Пусть c — положительное вещественное число. Если в Φ имеются корни, квадрат длины которых равен c, то все они составляют систему корней в натянутом на них подпространстве. Опишите варианты, возникающие на рис. 2.

Замечания

Преимущество аксиоматического подхода к системам корней (см. Serre [2], Bourbaki [2]) состоит в том, что его результаты применимы одновременно к алгебрам Ли, группам Ли и линейным алгебраическим группам. Исторические замечания см. в Bourbaki [2].

§ 10. *Простые корни и группа Вейля*

В этом параграфе Φ *обозначает систему корней ранга* ℓ *в евклидовом пространстве* E *с группой Вейля* $\mathscr{W}$.

10.1. Базисы и камеры Вейля. Подмножество Δ в Φ называется *базисом*, если

(B1) Δ является базисом в E,

(B2) каждый корень β можно записать в виде $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, где коэффициенты k_α целые, все одновременно неотрицательные или неположительные.

Корни из Δ тогда называются *простыми*. Ввиду (B1) мы имеем $\operatorname{Card} \Delta = \ell$ и выражение для β в (B2) единственно. Это позволяет нам определить *высоту* корня (относительно Δ) равенством $\operatorname{ht} \beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$. Если все коэффициенты k_α неотрицательны (соответственно все k_α неположительны), то мы называем корень β *положительным* (соответственно *отрицательным*) и пишем $\beta \succ 0$ (соответственно $\beta \prec 0$). Множества положительных и отрицательных корней (относительно Δ) будут обозначаться соответственно Φ^+ и Φ^- (очевидно, $\Phi^- = -\Phi^+$). Если α и β — положительные корни, причем $\alpha + \beta$ является корнем, то $\alpha + \beta$, очевидно, положителен. На самом деле Δ определяет частичный порядок в пространстве E, согласованный с обозначением $\alpha \succ 0$: будем считать, что $\mu \prec \lambda$, если и только если $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней (или, что равносильно, простых корней), или $\mu = \lambda$.

Единственный изъян в определении базиса — отсутствие гарантии его существования. Во всех примерах 9.3 корни, обозначенные через α и β, составляют базис (проверьте!). Заметим, что угол между α и β тупой [либо прямой], т. е. $(\alpha, \beta) \leqslant 0$. Это не случайно.

Лемма. *Если* Δ *является базисом для* Φ *и* $\alpha, \beta \in \Delta$, *причем* $\alpha \neq \beta$, *то* $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ *и* $\alpha - \beta$ *не является корнем.*

Доказательство. Пусть $(\alpha, \beta) > 0$. Так как по предположению $\alpha \neq \beta$ и заведомо $\alpha \neq -\beta$, разность $\alpha - \beta$ является корнем согласно лемме 9.4. Но это противоречит условию (B2). □

Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Система корней Φ имеет базис.*

На самом деле, доказательство даст конкретный метод построения всех возможных базисов. Для каждого вектора $\gamma \in \mathsf{E}$ пусть $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi: (\gamma, \alpha) > 0\}$ — множество всех корней, лежащих с «положительной» стороны от гиперплоскости, ортогональной к γ. Объединение конечного множества гиперплоскостей P_α $(\alpha \in \Phi)$ не может заполнить E (это элементарный факт из евклидовой геометрии; предоставляем читателю сформулировать строгое доказательство). Назовем вектор $\gamma \in \mathsf{E}$ *регулярным*, если $\gamma \in \mathsf{E} - \bigcup\limits_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, и *сингулярным* в противном случае. Для регулярного вектора γ очевидно, что $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. Исследуем этот случай. Назовем корень $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ *разложимым*, если $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ для некоторых $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$, и *неразложимым* в противном случае. Теперь достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема′. *Пусть вектор $\gamma \in \mathsf{E}$ регулярен. Тогда множество $\Delta(\gamma)$ всех неразложимых корней из $\Phi^+(\gamma)$ является базисом в Φ, и все базисы получаются таким способом.*

Доказательство состоит из ряда шагов.

1. *Каждый корень в $\Phi^+(\gamma)$ является неотрицательной $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией корней из $\Delta(\gamma)$.* Допустим, что некоторый корень $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ нельзя записать в таком виде; выберем α так, чтобы значение (γ, α) было наименьшим возможным. Ясно, что сам корень α не может принадлежать множеству $\Delta(\gamma)$, поэтому $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ $(\beta_i \in \Phi^+(\gamma))$, откуда следует, что $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Но каждая из величин (γ, β_i) положительна, поэтому β_1 и β_2 являются неотрицательными $\mathbb{Z}$-линейными комбинациями корней из $\Delta(\gamma)$ (иначе получаем противоречие с минимальностью величины (γ, α)), а тогда это верно и для α. Это противоречие доказывает исходное утверждение.

2. *Если $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ и $\alpha \neq \beta$, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.* В противном случае α и β заведомо не пропорциональны и по лемме 9.4 разность $\alpha - \beta$ является корнем. Как следствие, $\alpha - \beta$ или $\beta - \alpha$ принадлежит $\Phi^+(\gamma)$. В первом случае $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, откуда вытекает разложимость вектора α; во втором случае разложим вектор $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$. Это противоречит предположению.

3. *Множество $\Delta(\gamma)$ линейно независимо.* Пусть $\sum r_\alpha \alpha = 0$ $(\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbb{R})$. Разделяя индексы α, соответствующие положительным и отрицательным значениям r_α, мы можем записать $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ $(s_\alpha, t_\beta > 0$, α и β пробегают непересекающиеся множества). Положим $\varepsilon = \sum s_\alpha \alpha$. Тогда $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum\limits_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leqslant 0$ согласно шагу 2, а значит, $\varepsilon = 0$. Поэтому

$0=(\gamma, \varepsilon)=\sum s_\alpha(\gamma, \alpha)$, и как следствие, все s_α равны нулю. Аналогично все t_β равны нулю. (В действительности это рассуждение показывает, что *любое множество векторов, лежащих строго с одной стороны от некоторой гиперплоскости в* E *и попарно образующих тупые углы, обязано быть линейно независимым*.)

4. *Множество* $\Delta(\gamma)$ *является базисом для* Φ. Так как $\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup \cup -\Phi^+(\gamma)$, условие (B2) выполнено ввиду шага 1. Мы также получаем, что $\Delta(\gamma)$ порождает E, откуда с учетом шага 3 вытекает утверждение (B1).

5. *Каждый базис* Δ *системы* Φ *имеет вид* $\Delta(\gamma)$ *для некоторого регулярного вектора* $\gamma\in\mathsf{E}$. Для данного базиса Δ найдем такой вектор $\gamma\in\mathsf{E}$, что $(\gamma, \alpha)>0$ при всех $\alpha\in\Delta$. (Это возможно, поскольку пересечение «положительных» открытых полупространств, соответствующих произвольному базису в E, непусто (упражнение 7).) Ввиду утверждения (B2) вектор γ регулярен и $\Phi^+\subset\Phi^+(\gamma)$, $\Phi^-\subset-\Phi^+(\gamma)$ (поэтому в обоих случаях имеет место равенство). Так как $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$, множество Δ состоит из неразложимых элементов, т.е. $\Delta\subset\Delta(\gamma)$. Но $\operatorname{Card}\Delta=\operatorname{Card}\Delta(\gamma)=\ell$, а значит, $\Delta=\Delta(\gamma)$. □

Теперь полезно ввести некоторые термины. Гиперплоскости P_α $(\alpha\in\Phi)$ разбивают E на конечное множество областей; связные компоненты дополнения $\mathsf{E}-\bigcup\limits_\alpha P_\alpha$ называются (открытыми) *камерами Вейля* в E. Как следствие, каждый регулярный вектор $\gamma\in\mathsf{E}$ принадлежит ровно одной камере Вейля, обозначаемой $\mathfrak{C}(\gamma)$. Равенство $\mathfrak{C}(\gamma)=\mathfrak{C}(\gamma')$ в точности означает, что γ, γ' лежат по одну сторону от каждой из гиперплоскостей P_α $(\alpha\in\Phi)$, т.е. что $\Phi^+(\gamma)=\Phi^+(\gamma')$ или $\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$. Это показывает, что *камеры Вейля находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с базисами*. Положим $\mathfrak{C}(\Delta)=\mathfrak{C}(\gamma)$ при $\Delta=\Delta(\gamma)$ и назовем $\mathfrak{C}(\Delta)$ *фундаментальной камерой Вейля относительно* Δ. Множество $\mathfrak{C}(\Delta)$ открыто, выпукло (как пересечение открытых полупространств) и состоит из всех векторов $\gamma\in\mathsf{E}$, удовлетворяющих неравенствам $(\gamma, \alpha)>0$ $(\alpha\in\Delta)$. В случае ранга 2 легко нарисовать соответствующую картинку; на рис. 3 это сделано для типа A_2. Здесь имеется шесть камер; заштрихованная камера является фундаментальной относительно базиса $\{\alpha, \beta\}$.

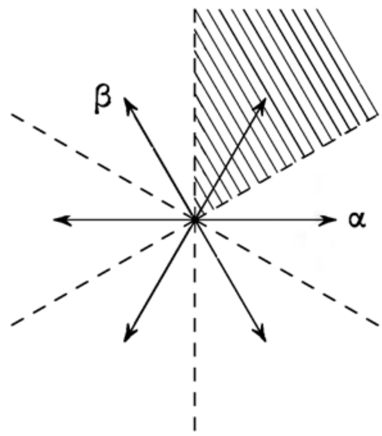


Рис. 3

Ясно, что группа Вейля отображает одну камеру Вейля в другую; а именно, $\sigma(\mathfrak{C}(\gamma))=\mathfrak{C}(\sigma\gamma)$, если $\sigma\in\mathscr{W}$ и вектор γ регулярен. С другой стороны, $\mathscr{W}$ переставляет базисы: σ отображает Δ в множество $\sigma(\Delta)$, которое снова является базисом (почему?). Эти два действия группы $\mathscr{W}$ в действительности согласованы с указанным выше соответствием между камерами Вейля и базисами; выполнено равенство $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma\gamma)$, поскольку $(\sigma\gamma, \sigma\alpha) = (\gamma, \alpha)$.

10.2. Леммы о простых корнях. Пусть Δ — фиксированный базис в Φ. Докажем несколько очень полезных лемм о поведении простых корней.

Лемма А. *Если корень α положительный, но не простой, то при некотором $\beta \in \Delta$ вектор $\alpha - \beta$ является корнем (обязательно положительным).*

Доказательство. Если $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ при всех $\beta \in \Delta$, то можно применить замечание в скобках из шага 3 п. 10.1. Получаем, что множество $\Delta \cup \{\alpha\}$ линейно независимо, но это невозможно, поскольку Δ уже является базисом в E. Поэтому $(\alpha, \beta) > 0$ для некоторого $\beta \in \Delta$, и тогда $\alpha - \beta \in \Phi$ по лемме 9.4 (ее можно применить, так как β и α не могут быть пропорциональными). Положим $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ (все k_γ неотрицательны, некоторое k_γ положительно при $\gamma \neq \beta$). Вычитая β из α, получим $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию простых корней, в которой хотя бы один коэффициент положителен. Тогда и все коэффициенты положительны в силу единственности выражения из условия (B2). $\square$

Следствие. *Каждый корень $\beta \in \Phi^+$ можно записать в виде $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ ($\alpha_i \in \Delta$ не обязательно различны), где каждая частичная сумма $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ является корнем.*

Доказательство. Применим лемму и индукцию по $\operatorname{ht} \beta$. $\square$

Лемма В. *Пусть α — простой корень. Тогда σ_α переставляет положительные корни, отличные от α.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ ($k_\gamma \in \mathbb{Z}^+$). Ясно, что β и α не пропорциональны. Поэтому $k_\gamma \neq 0$ для некоторого $\gamma \neq \alpha$. Но коэффициент при γ в выражении $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ равен именно k_γ. Другими словами, вектор $\sigma_\alpha(\beta)$ имеет хотя бы один положительный коэффициент (относительно Δ) и потому положителен. При этом $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, поскольку α является образом вектора $-\alpha$. $\square$

Следствие. *Положим* $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \beta$. *Тогда* $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ *при всех* $\alpha \in \Delta$.

Доказательство. Утверждение очевидно из леммы. $\square$

Лемма С. *Пусть векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ принадлежат Δ (и не обязательно различны). Положим $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Если корень $\sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ отрицателен, то для некоторого индекса $1 \leqslant s < t$ выполнено равенство* $\sigma_1 \ldots \sigma_t = \sigma_1 \ldots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \ldots \sigma_{t-1}$.

Доказательство. Положим $\beta_i = \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, $0 \leqslant i \leqslant t-2$, $\beta_{t-1} = \alpha_t$. Поскольку $\beta_0 \prec 0$ и $\beta_{t-1} \succ 0$, можно найти наименьший индекс s, для которого $\beta_s \succ 0$. Тогда $\sigma_\alpha(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$, и ввиду леммы В мы имеем $\beta_s = \alpha_s$. В общем случае (лемма 9.2) если $\sigma \in \mathscr{W}$, то $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$; поэтому, в частности, $\sigma_s=(\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1}\ldots\sigma_{s+1})$, откуда вытекает утверждение леммы. □

Следствие. *Если $\sigma=\sigma_1\ldots\sigma_t$ — выражение элемента $\sigma\in\mathscr{W}$ через отражения, отвечающие простым корням, причем t минимально возможное, то $\sigma(\alpha_t)\prec 0$.*

10.3. Группа Вейля. Теперь мы готовы доказать, что $\mathscr{W}$ осуществляет просто транзитивную перестановку базисов системы Φ (или, что равносильно, камер Вейля) и порождается «простыми отражениями» относительно любого базиса Δ (т. е. отражениями σ_α, $\alpha\in\Delta$).

Теорема. *Пусть Δ — базис системы Φ.*

(a) *Если вектор $\gamma\in\mathsf{E}$ регулярен, то существует такой элемент $\sigma\in\mathscr{W}$, что $(\sigma(\gamma),\alpha)>0$ для всех $\alpha\in\Delta$ (т. е. $\mathscr{W}$ действует транзитивно на множестве камер Вейля).*

(b) *Если Δ' — другой базис для Φ, то $\sigma(\Delta')=\Delta$ для некоторого $\sigma\in\mathscr{W}$ (т. е. $\mathscr{W}$ действует транзитивно на множестве базисов).*

(c) *Если α — произвольный корень, то существует такой элемент $\sigma\in\mathscr{W}$, что $\sigma(\alpha)\in\Delta$.*

(d) *Группа $\mathscr{W}$ порождается отражениями σ_α $(\alpha\in\Delta)$*

(e) *Если $\sigma(\Delta)=\Delta$, $\sigma\in\mathscr{W}$, то $\sigma=1$ (т. е. $\mathscr{W}$ действует на множестве базисов просто транзитивно).*

Доказательство. Пусть $\mathscr{W}'$ — подгруппа в $\mathscr{W}$, порожденная всеми σ_α $(\alpha\in\Delta)$. Докажем для $\mathscr{W}'$ утверждения (a)—(c), а затем покажем, что $\mathscr{W}'=\mathscr{W}$.

(a) Положим $\delta=\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\succ 0}\alpha$ и возьмем $\sigma\in\mathscr{W}'$ с наибольшим возможным значением $(\sigma(\gamma),\delta)$. Если корень α простой, то, разумеется, $\sigma_\alpha\sigma\in\mathscr{W}'$, и ввиду выбора σ мы имеем

$$(\sigma(\gamma),\delta)\geqslant(\sigma_\alpha\sigma(\gamma),\delta)=(\sigma(\gamma),\sigma_\alpha(\delta))=(\sigma(\gamma),\delta-\alpha)=(\sigma(\gamma),\delta)-(\sigma(\gamma),\alpha)$$

(следствие из леммы 10.2B). Поэтому $(\sigma(\gamma),\alpha)\geqslant 0$ при всех $\alpha\in\Delta$. Так как вектор γ регулярен, равенство $(\sigma(\gamma),\alpha)=0$ не может выполняться ни при каком α, поскольку тогда γ был бы ортогонален к $\sigma^{-1}\alpha$. Поэтому все неравенства строгие. Значит, $\sigma(\gamma)$ лежит в фундаментальной камере Вейля $\mathfrak{C}(\Delta)$, и σ отображает $\mathfrak{C}(\gamma)$ в $\mathfrak{C}(\Delta)$, что и требовалось.

(b) Поскольку группа $\mathscr{W}'$ согласно шагу (a) переставляет камеры Вейля, она (транзитивно) переставляет и базисы системы Φ.

(c) Ввиду утверждения b достаточно доказать, что каждый корень принадлежит хотя бы одному базису. Так как корни, пропорциональные α, равны $\pm\alpha$, гиперплоскости P_β $(\beta\neq\pm\alpha)$ отличны от P_α. Поэтому существует вектор $\gamma\in P_\alpha$, $\gamma\notin P_\beta$ для всех $\beta\neq\pm\alpha$ (почему?). Выберем γ' достаточно близко к γ, чтобы выполнялись условия $(\gamma',\alpha)=\varepsilon>0$ и $|(\gamma',\beta)|>\varepsilon$ для всех $\beta\neq\pm\alpha$. Очевидно, что тогда α принадлежит базису $\Delta(\gamma')$.

(d) Чтобы установить равенство $\mathscr{W}'=\mathscr{W}$, достаточно показать, что $\mathscr{W}'$ содержит все отражения $\sigma_\alpha (\alpha\in\Phi)$. Используя шаг (c), найдем такой элемент $\sigma\in\mathscr{W}'$, что $\beta=\sigma(\alpha)\in\Delta$. Тогда $\sigma_\beta=\sigma_{\sigma(\alpha)}=\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, а значит, $\sigma_\alpha=\sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma\in\mathscr{W}'$.

(e) Пусть $\sigma(\Delta)=\Delta$, но $\sigma\neq 1$. Если записать σ как произведение минимального числа простых отражений (что возможно согласно утверждению (d)), то получаем противоречие со следствием из леммы 10.2C. □

Леммы 10.2 позволят нам более подробно выяснить смысл того факта, что $\mathscr{W}$ порождается простыми отражениями.

Если элемент $\sigma\in\mathscr{W}$ выражен как $\sigma_{\alpha_1}\ldots\sigma_{\alpha_t} (\alpha_i\in\Delta)$ с минимальным t, то назовем такое выражение *приведенным* и положим $\ell(\sigma)=t$: это *длина* элемента σ относительно базиса Δ. По определению $\ell(1)=0$. Длину можно определить и другим способом. А именно, пусть $n(\sigma)$ — количество положительных корней α, для которых $\sigma(\alpha)\prec 0$.

Лемма A. *Для всех $\sigma\in\mathscr{W}$ справедливо равенство $\ell(\sigma)=n(\sigma)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $\ell(\sigma)$. Случай $\ell(\sigma)=0$ тривиален: тогда $\sigma=1$ и $n(\sigma)=0$. Пусть лемма верна для всех таких $\tau\in\mathscr{W}$, что $\ell(\tau)<\ell(\sigma)$. Запишем σ в приведенной форме как $\sigma=\sigma_{\alpha_1}\ldots\sigma_{\alpha_t}$ и положим $\alpha=\alpha_t$. Согласно следствию из леммы 10.2C мы имеем $\sigma(\alpha)\prec 0$. Тогда ввиду леммы 10.2B справедливо равенство $n(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1$. С другой стороны, $\ell(\sigma\sigma_\alpha)=\ell(\sigma)-1<\ell(\sigma)$, и по предположению индукции $\ell(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma\sigma_\alpha)$. Соединив эти утверждения, получаем $\ell(\sigma)=n(\sigma)$. □

Теперь посмотрим более внимательно на просто транзитивное действие группы $\mathscr{W}$ на множестве камер Вейля (утверждения (a) и (e) теоремы). Следующая лемма показывает, что замыкание $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ фундаментальной камеры Вейля относительно Δ является *фундаментальной областью* для действия группы $\mathscr{W}$ на пространстве E, т. е. каждый вектор из E эквивалентен относительно $\mathscr{W}$ ровно одному вектору из этого множества (см. упражнение 14).

Лемма B. *Пусть $\lambda, \mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Если $\sigma\lambda=\mu$ для некоторого $\sigma\in\mathscr{W}$, то σ является произведением простых отражений, оставляющих на месте λ; как следствие, $\lambda=\mu$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $\ell(\sigma)$. Случай $\ell(\sigma)=0$ очевиден. Пусть $\ell(\sigma)>0$. По лемме A отображение σ должно переводить некоторый положительный корень в отрицательный; значит, σ не может перевести все простые корни в положительные. Пусть $\sigma\alpha\prec 0$ $(\alpha\in\Delta)$. Тогда $0\geqslant(\mu, \sigma\alpha)=(\sigma^{-1}\mu, \alpha)=(\lambda, \mu)\geqslant 0$, поскольку $\lambda, \mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Как следствие, $(\lambda, \mu)=0$, $\sigma_\alpha\lambda=\lambda$, $(\sigma\sigma_\alpha)\lambda=\mu$. Ввиду леммы 10.2B (и леммы A) мы имеем $\ell(\sigma\sigma_\alpha)=\ell(\sigma)-1$, поэтому можно применить предположение индукции. □

10.4. Неприводимые системы корней. Система Φ называется *неприводимой*, если ее нельзя разбить на две подсистемы так, что каждый корень из одной подсистемы ортогонален каждому корню из другой.

(В п. 9.3 системы A_1, A_2, B_2, G_2 неприводимы, а система $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$ — нет.) Пусть Δ — базис системы Φ. Мы утверждаем, что *система Φ неприводима, если и только если Δ нельзя разбить указанным образом.* С одной стороны, пусть $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Если базис системы Δ не содержится целиком в Φ_1 или Φ_2, то мы получаем ее искомое разбиение; но из включения $\Delta \subset \Phi_1$ следует, что $(\Delta, \Phi_2) = 0$ и $(\mathsf{E}, \Phi_2) = 0$, поскольку Δ порождает E. Значит, условие «если» выполняется. Обратно, пусть система Φ неприводима, но $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Каждый корень эквивалентен простому (теорема 10.3(c)), поэтому $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_i — множество корней, имеющих эквивалентный корень в Δ_i. Напомним, что из равенства $(\alpha, \beta) = 0$ следует, что $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$. Поскольку элементы σ_α $(\alpha \in \Delta)$ порождают $\mathscr{W}$, из формулы для отражения видно, что каждый корень из Φ_i получается из некоторого корня, лежащего в Δ_i, путем прибавления и вычитания элементов из Δ_i. Поэтому Φ_i лежит в подпространстве E_i, порожденном множеством Δ_i, и мы видим, что $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Как следствие, $\Phi_1 = \varnothing$ либо $\Phi_2 = \varnothing$, а значит $\Delta_1 = \varnothing$ либо $\Delta_2 = \varnothing$.

Лемма A. *Пусть система Φ неприводима. При частичном упорядочении $\prec$ имеется единственный максимальный корень β (при этом если $\alpha \neq \beta$, то $\operatorname{ht} \alpha < \operatorname{ht} \beta$, и $(\beta, \alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Delta$). Если $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, то все коэффициенты k_α положительны.*

Доказательство. Пусть корень $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ максимален относительно указанного упорядочения; ясно, что $\beta \succ 0$. Рассмотрим разбиение $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta \colon k_\alpha > 0\}$ и $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta \colon k_\alpha = 0\}$. Пусть множество Δ_2 непусто. Тогда $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для любого $\alpha \in \Delta_2$ (лемма 10.1); поскольку система Φ неприводима, по крайней мере один корень $\alpha \in \Delta_2$ не ортогонален множеству Δ_1, а значит $(\alpha, \alpha') < 0$ для некоторого $\alpha' \in \Delta_1$. Тогда $(\alpha, \beta) < 0$. Как следствие, $\beta + \alpha$ является корнем (лемма 9.4), вопреки тому, что корень β максимальный. Значит, множество Δ_2 пусто и все k_α положительны. Наше рассуждение показывает также, что $(\alpha, \beta) \geqslant 0$ при всех $\alpha \in \Delta$ (причем $(\alpha, \beta) > 0$ хотя бы для одного α, так как Δ порождает E). Пусть теперь β' — другой максимальный корень. К нему можно применить предыдущее рассуждение; получаем, что выражение для β' включает (с положительным коэффициентом) хотя бы один корень $\alpha \in \Delta$, для которого $(\alpha, \beta) > 0$. Отсюда $(\beta', \beta) > 0$, и $\beta - \beta'$ является корнем (лемма 9.4), если только $\beta' \neq \beta$. Но если $\beta - \beta'$ — корень, то либо $\beta \prec \beta'$, либо $\beta' \prec \beta$, что невозможно. Значит, корень β единствен. □

Лемма B. *Пусть система Φ неприводима. Тогда $\mathscr{W}$ действует на пространстве E неприводимо. В частности, $\mathscr{W}$-орбита произвольного корня α порождает E.*

Доказательство. Орбита произвольного корня порождает (ненулевое) $\mathscr{W}$-инвариантное подпространство, так что второе утверждение вытекает из первого. Что касается первого, то пусть E' — ненулевое подпространство в E, инвариантное относительно $\mathscr{W}$. Его ортогональное дополнение E'' также $\mathscr{W}$-инвариантно. Тривиально проверяется, что если $\alpha \in \Phi$, то либо $\alpha \in \mathsf{E}'$, либо $\mathsf{E}' \subset P_\alpha$, поскольку $\sigma_\alpha(\mathsf{E}') = \mathsf{E}'$ (упражнение 9.1). Таким образом, из условия $\alpha \notin \mathsf{E}'$ вытекает, что $\alpha \in \mathsf{E}''$, т.е. каждый корень лежит в одном из этих подпространств. В результате Φ разбивается на ортогональные подмножества, и одно из них обязано быть пустым. Так как Φ порождает E, $\mathsf{E}' = \mathsf{E}$. □

Лемма C. *Пусть система Φ неприводима. Тогда в ней встречается не более двух длин корней, причем все корни одинаковой длины эквивалентны относительно $\mathscr{W}$.*

Доказательство. Если α, β — произвольные корни, то не все элементы $\sigma(\alpha)$ $(\sigma \in \mathscr{W})$ ортогональны к β, поскольку $\sigma(\alpha)$ порождают E (лемма B). Пусть $(\alpha, \beta) \neq 0$. Мы знаем (см. п. 9.4), что возможные отношения квадратов длин корней α и β суть 1, 2, 3, 1/2, 1/3. Из этих двух замечаний легко следует первое утверждение леммы, поскольку при наличии трех длин корней появилось бы и отношение 3/2. Пусть теперь корни α, β имеют равную длину. Заменив один из них на $\mathscr{W}$-эквивалентный (как выше), можно считать их не ортогональными (и различными: иначе все доказано!). Согласно п. 9.4, отсюда в свою очередь вытекает, что $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle = \pm 1$. Заменив β (если нужно) на $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$, можно считать, что $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$. Следовательно, $(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta) = \sigma_\alpha\sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$. □

В случае неприводимой системы Φ с двумя различными длинами корней будем говорить о *длинных* и *коротких корнях*. (Если все корни равной длины, то принято все их считать длинными.)

Лемма D. *Пусть система Φ неприводима, с двумя различными длинами корней. Тогда максимальный корень β из леммы* A *длинный.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Phi$. Достаточно показать, что $(\beta, \beta) \geqslant (\alpha, \alpha)$. Для этого заменим вектор α на $\mathscr{W}$-эквивалентный, лежащий в замыкании фундаментальной камеры Вейля (относительно Δ). Поскольку $\beta - \alpha \succ 0$ (лемма A), мы заключаем, что $(\gamma, \beta - \alpha) \geqslant 0$ для любого $\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Применив этот результат к случаям $\gamma = \beta$ (см. лемму A) и $\gamma = \alpha$, получаем $(\beta, \beta) \geqslant (\beta, \alpha) \geqslant (\alpha, \alpha)$. □

Упражнения

1. Пусть $\Phi^\vee$ — двойственная система к Φ, $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee;\ \alpha \in \Delta\}$. Докажите, что $\Delta^\vee$ — базис для $\Phi^\vee$. [Рассмотрите камеры Вейля для Φ и $\Phi^\vee$.]

2. Пусть Δ — базис для Φ. Докажите, что множество $\{\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \cap \Phi$ $(\alpha \neq \beta$ в $\Delta)$ является системой корней ранга 2 в подпространстве, которое α, β порождают в E (ср. упражнение 9.7). Обобщите результат на произвольное подмножество в Δ.

3. Докажите, что каждая система корней ранга 2 изоморфна одной из перечисленных в п. 9.3.

4. Непосредственно проверьте следствие из леммы 10.2A для случая G_2.

5. Пусть $\sigma \in \mathscr{W}$ можно записать как произведение t простых отражений. Докажите, что t имеет такую же четность, что и $\ell(\sigma)$.

6. Определим функцию $\mathrm{sn}\colon \mathscr{W} \to \{\pm 1\}$, положив $\mathrm{sn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Докажите, что sn является гомоморфизмом (ср. случай A_2, где группа $\mathscr{W}$ изоморфна симметрической группе $\mathscr{S}_3$).

7. Докажите, что пересечение «положительных» открытых полупространств, соответствующих произвольному базису $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ в E, непусто. [Пусть δ_i — проекция вектора γ_i на ортогональное дополнение подпространства, порожденного остальными векторами из базиса. Рассмотрите $\gamma = \sum r_i\delta_i$, где все $r_i > 0$.]

8. Пусть Δ — базис системы Φ, $\alpha \neq \beta$ — простые корни, $\Phi_{\alpha\beta}$ — система корней ранга 2 в $\mathsf{E}_{\alpha\beta} = \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$ (см. упражнение 2 выше). Группа Вейля $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ для $\Phi_{\alpha\beta}$ порождается ограничениями τ_α, τ_β отражений σ_α, σ_β на $\mathsf{E}_{\alpha\beta}$ и может рассматриваться как подгруппа в $\mathscr{W}$. Докажите, что «длина» элемента группы $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ (относительно τ_α, τ_β) совпадает с длиной соответствующего элемента группы $\mathscr{W}$.

9. Докажите, что в $\mathscr{W}$ имеется единственный элемент σ, отображающий Φ^+ в Φ^- (относительно Δ). Докажите, что любое приведенное выражение для σ должно включать все σ_α $(\alpha \in \Delta)$. Исследуйте $\ell(\sigma)$.

10. Пусть дан базис $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ в Φ. Положим $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{\ell} k_i\alpha_i$ ($k_i \in \mathbb{Z}$, все k_i неотрицательны или все k_i неположительны). Докажите, что либо вектор λ кратен корню (возможно, равен 0), либо существует такой элемент $\sigma \in \mathscr{W}$, что $\sigma\lambda = \sum\limits_{i=1}^{\ell} k_i'\alpha_i$, где среди коэффициентов k_i' имеются и положительные, и отрицательные. [Набросок доказательства: если вектор λ не кратен корню, то ортогональная ему гиперплоскость P_λ не содержится в $\bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Возьмем $\mu \in \mathscr{P}_\lambda - \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Затем найдем $\sigma \in \mathscr{W}$, для которого все значения $(\alpha_i, \sigma\mu)$ положительны. Тогда $0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu) = \sum k(\alpha_i, \sigma\mu)$.]

11. Пусть система Φ неприводима. Докажите, что система $\Phi^\vee$ также неприводима. Если длина всех корней в системе Φ одинакова, то это верно и для $\Phi^\vee$ (и тогда системы Φ и $\Phi^\vee$ изоморфны). С другой стороны, если в системе Φ имеются две длины корней, то это верно и для $\Phi^\vee$; но если корень α длинный, то $\alpha^\vee$ короткий (и наоборот). С помощью этого факта докажите, что Φ имеет единственный максимальный короткий корень (относительно частичного порядка $\prec$, определяемого базисом Δ).

12. Пусть $\lambda \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$, причем $\sigma\lambda = \lambda$ для некоторого $\sigma \in \mathscr{W}$. Докажите, что $\sigma = 1$.

13. Докажите, что все отражения в группе $\mathscr{W}$ имеют вид $\sigma_\alpha (\alpha \in \Phi)$. [Если вектор в гиперплоскости отражения не ортогонален никакому корню, то в группе $\mathscr{W}$ его оставляет на месте лишь тождественное отображение.]

14. Докажите, что в пространстве E каждая точка $\mathscr{W}$-эквивалентна некоторой точке в замыкании фундаментальной камеры Вейля относительно базиса Δ. [Продолжите частичный порядок на E, положив $\mu \prec \lambda$ в случае, если $\lambda - \mu$ является неотрицательной $\mathbb{R}$-линейной комбинацией простых корней. Пусть $\mu \in \mathsf{E}$; рассмотрите отображение $\sigma \in \mathscr{W}$, для которого $\lambda = \sigma\mu$ относительно этого частичного порядка.]

Замечания

Здесь дан расширенный вариант изложения, содержащегося в Serre [2].

§ 11. *Классификация*

В этом параграфе Φ обозначает систему корней ранга ℓ, $\mathscr{W}$ — ее группу Вейля, Δ — базис системы Φ.

11.1. Матрица Картана для Φ. Фиксируем упорядочение простых корней $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$. Матрица $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ тогда называется *матрицей Картана* системы Φ. Ее коэффициенты называются *числами Картана.*

Примеры. Для систем ранга 2 матрицы Картана имеют вид

$$\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1 \colon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{A}_2 \colon \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{B}_2 \colon \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{G}_2 \colon \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Конечно, матрица зависит от выбранного упорядочения, но это не очень существенно. Важно то, что матрица Картана не зависит от выбора базиса Δ благодаря тому факту (теорема 10.3(b)), что на совокупности базисов группа $\mathscr{W}$ действует транзитивно. Матрица Картана невырожденна, как и в п. 8.5, поскольку Δ является базисом пространства E. Оказывается, она полностью характеризует систему Φ.

Предложение. *Пусть $\Phi' \subset \mathsf{E}'$ — другая система корней с базисом $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\}$. Если $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ при $1 \leqslant i, j \leqslant \ell$, то биекция $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ продолжается (единственным образом) до изоморфизма $\varphi \colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$, отображающего Φ на Φ' и удовлетворяющего условию $\langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ для всех $\alpha, \beta \in \Phi$. Как следствие, матрица Картана определяет систему Φ с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Поскольку Δ (соответственно Δ') является базисом в пространстве E (соответственно E'), существует единственный изоморфизм векторных пространств $\varphi \colon \mathsf{E} \to \mathsf{E}'$, отображающий α_i в α'_i $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, то из нашего предположения следует, что $\sigma_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \sigma_{\alpha'}(\beta') = \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle \alpha' = \varphi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi(\alpha) = \varphi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \varphi(\sigma_\alpha(\beta))$. Другими словами, для каждого $\alpha \in \Delta$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_\alpha"'] & \mathsf{E}' \arrow[d, "\sigma_{\varphi(\alpha)}"] \\ \mathsf{E} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathsf{E}' \end{tikzcd}$$

Соответствующие группы Вейля $\mathscr{W}$, $\mathscr{W}'$ порождаются простыми отражениями (теорема 10.3(d)), поэтому отображение $\sigma \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ является изоморфизмом группы $\mathscr{W}$ на $\mathscr{W}'$, причем σ_α отображается в $\sigma_{\varphi(\alpha)}$ $(\alpha \in \Delta)$. Но каждый корень $\beta \in \Phi$ эквивалентен относительно группы $\mathscr{W}$ простому корню (теорема 10.3(c)), скажем, $\beta = \sigma(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta)$. Отсюда в свою очередь $\varphi(\beta) = (\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1})(\varphi(\alpha)) \in \Phi'$. Как следствие, φ отображает Φ на Φ'; при этом формула отражения показывает, что φ сохраняет все числа Картана. $\square$

Это предложение показывает, что в принципе возможно восстановить систему Φ по ее числам Картана. На самом деле не слишком трудно составить практический алгоритм для определения всех корней (или только положительных корней). Возможно, наиболее удачный подход — рассмотреть серии корней (см. п. 9.4). Начнем с корней высоты 1, т. е. простых корней, и рассмотрим пару различных простых корней α_i, α_j. В α_j-серии, порожденной корнем α_i, число r равно 0 ($\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем ввиду леммы 10.1), поэтому число q равно $-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Это, в частности, позволяет нам выписать все корни α высоты 2, а тогда и все числа $\langle \alpha, \alpha_j \rangle$. Для каждого корня α высоты 2 можно легко найти число r в α_j-серии, порожденной корнем α, поскольку α_j можно вычесть не более одного раза (почему?). Тогда определяется и q, так как мы знаем величину разности $r - q = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Повторив этот процесс достаточное число раз, мы в итоге получим все положительные корни, как показывает следствие из леммы 10.2A.

11.2. Графы Кокстера и схемы Дынкина. Если α, β — различные положительные корни, то, как мы знаем, $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0$, 1, 2 или 3 (см. п. 9.4). Назовем *графом Кокстера* системы Φ граф с ℓ вершинами, в котором i-я и j-я вершины $(i \neq j)$ соединены $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ ребрами[1]. *Примеры*:

$\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$: 

A_2: 

B_2: 

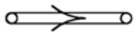
G_2: 

---

[1]Обычно граф Кокстера определяется несколько иначе. А именно, число ребер, соединяющих i-ю вершину с j-й, равно $m-2$, где m — порядок произведения $\sigma_{\alpha_i}\sigma_{\alpha_j}$. Это приводит к тому, что при $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 3$ число ребер равно 4, а не 3, как у автора. Однако схема Дынкина определяется всегда так же, как у автора. (*Прим. ред.*)

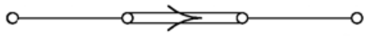
Если все корни — равной длины, то граф Кокстера однозначно определяет числа $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$, поскольку в этом случае $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$. При наличии разных длин корней (например, в случае B_2 или G_2) граф Кокстера не говорит нам, какая из двух вершин соответствует короткому простому корню, а какая длинному, если эти вершины соединены двумя или тремя ребрами. (Однако можно показать, что граф Кокстера полностью определяет группу Вейля: суть в том, что он определяет порядки произведений ее образующих, см. упражнение 9.3.)

Когда в графе Коксгера для Φ встречается двойное или тройное ребро, мы можем добавить стрелку, указывающую на более короткий из двух корней. Эта дополнительная информация позволяет восстановить числа Картана; полученная фигура называется *схемой Дынкина* для Φ. (Как и граф Коксгера, она зависит от нумерации простых корней.) Например:

B_2 

G_2 

Другой пример: если дана схема



(которая в действительности соответствует системе корней F_4), то читатель легко восстановит матрицу Картана

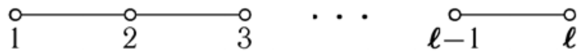
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

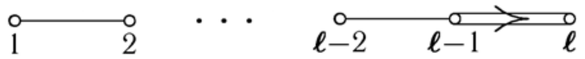
11.3. Неприводимые компоненты. Напомним (см. п. 10.4), что система Φ неприводима, если и только если Φ (или, что равносильно, Δ) не разбивается на два собственных ортогональных подмножества. Ясно, что *система Φ неприводима, если и только если ее граф Коксгера связен* (в обычном смысле). В общем случае граф Коксгера имеет несколько связных компонент; пусть $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_t$ — соответствующее разбиение базиса Δ на взаимно ортогональные подмножества. Если Δ_i порождает подпространство E_i, то ясно, что E равно ортогональной прямой сумме $\mathsf{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{E}_t$. При этом очевидно, что $\mathbb{Z}$-линейные комбинации элементов из Δ_i, являющиеся корнями (обозначим их множество через Φ_i), образуют систему корней в E_i; ее группа Вейля — это ограничение на E_i подгруппы в $\mathscr{W}$, порожденной всеми элементами σ_α $(\alpha \in \Delta_i)$. Наконец, каждое из подпространств E_i инвариантно относительно $\mathscr{W}$ (так как если $\alpha \notin \Delta_i$, то σ_α действует на E_i тривиально). Поэтому (простое) рассуждение, которое потребовалось в упражнении 9.1, немедленно показывает, что каждый корень лежит в одном из E_i, т. е. $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$.

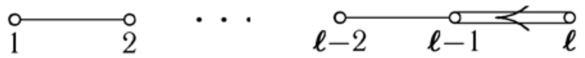
Предложение. *Система Φ распадается (единственным образом) в объединение неприводимых систем корней Φ_i (в подпространствах E_i пространства E), причем $\mathsf{E} = \mathsf{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{E}_t$ (ортогональная прямая сумма).*

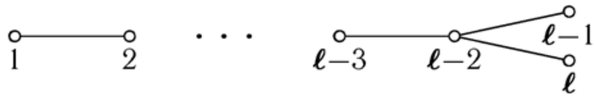
11.4. Теорема классификации. Из п. 11.3 мы видим, что достаточно классифицировать неприводимые системы корней или, что равносильно, связные схемы Дынкина (см. предложение 11.1).

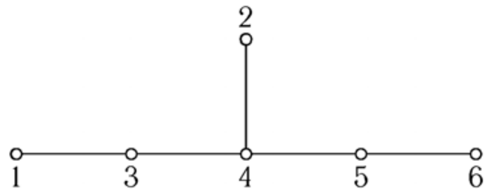
Теорема. *Пусть Φ — неприводимая система корней ранга ℓ. Тогда ее схема Дынкина — одна из следующих (во всех случаях количество вершин равно ℓ):*

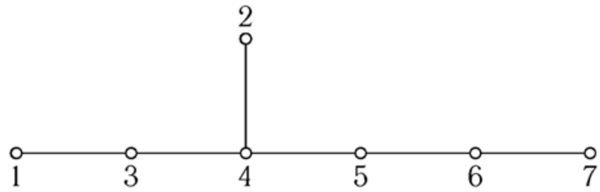
A_ℓ $(\ell \geqslant 1)$


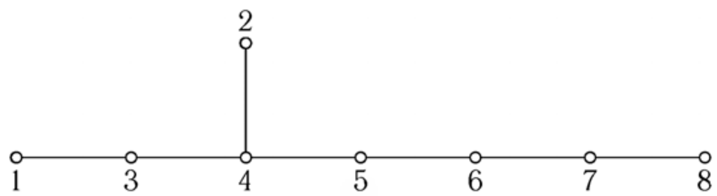
B_ℓ $(\ell \geqslant 2)$


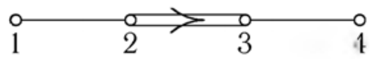
C_ℓ $(\ell \geqslant 3)$


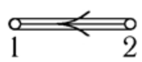
D_ℓ $(\ell \geqslant 4)$


E_6


E_7


E_8


F_4


G_2


В случае типов A_ℓ—D_ℓ на ℓ наложены ограничения, чтобы избежать повторений. В таблице 2 представлены матрицы Картана, соответствующие указанной нумерации простых корней. Из вышеприведенных схем видно, что схема Дынкина восстанавливается по графу Кокстера во всех случаях, кроме B_ℓ и C_ℓ. Напротив, системы B_ℓ и C_ℓ имеют один и тот же граф

Коксетера и различаются относительным количеством коротких и длинных простых корней. (На самом деле эти системы корней двойственны друг другу, см. упражнение 5.)

Таблица 2. Матрицы Картана

$$\mathsf{A}_\ell:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{B}_\ell:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{C}_\ell:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{D}_\ell:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{E}_6:\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{E}_7:\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{E}_8:\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{F}_4:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{G}_2:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы. Идея доказательства состоит в том, чтобы сначала классифицировать возможные графы Коксетера (независимо от относительных длин корней), а затем посмотреть, какие схемы Дынкина при этом получаются. Поэтому мы просто применим элементарную евклидову геометрию к конечным множествам векторов с попарными углами, предписанными графом Коксетера. Так как нас не интересуют длины, здесь удобнее работать с множествами единичных векторов. Для большей гибкости ограничимся лишь следующими допущениями: E — евклидово пространство (произвольной размерности), $\mathfrak{A} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ — множество из n линейно независимых единичных векторов, причем $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leqslant 0$ $(i \neq j)$ и $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = 0, 1, 2$ или 3 $(i \neq j)$. Такое множество векторов будем называть (для краткости) *допустимым*. (*Пример*: элементы базиса системы корней, разделенные на их длины.) Сопоставим множеству $\mathfrak{A}$ граф $\mathbf{\Gamma}$ точно так же, как мы сделали это в случае простых векторов из системы корней, т. е. соединим вершины i и j ($i \neq j$) посредством $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ ребер. Наша ближайшая задача — найти все связные графы, соответствующие допустимым множествам векторов (в их числе — все связные графы Коксетера). Разобьем наше рассуждение на шаги, первый из которых очевиден. (Граф $\mathbf{\Gamma}$ не предполагается связным, пока не будет указано противное.)

1. *Если удалить некоторые из векторов ε_i, то оставшиеся векторы также образуют допустимое множество. Его граф получается из $\mathbf{\Gamma}$ удалением соответствующих вершин и всех инцидентных им ребер.*

2. *Число пар вершин в графе $\mathbf{\Gamma}$, соединенных хотя бы одним ребром, строго меньше чем n.* Положим $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Поскольку векторы ε_i линейно независимы, $\varepsilon \neq 0$. Поэтому $0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum\limits_{i<j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Пусть i, j — пара (различных) индексов, для которых $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ (т. е. вершины i и j соединены). Тогда $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = 1$, 2 или 3; как следствие, $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leqslant -1$. Ввиду предыдущего неравенства число таких пар не может превосходить $n - 1$.

3. *Граф $\mathbf{\Gamma}$ не содержит циклов.* Цикл являлся бы графом $\mathbf{\Gamma}'$ допустимого подмножества $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{A}$ (см. шаг 1), что противоречило бы свойству из шага 2 после замены n на $\operatorname{Card} \mathfrak{A}'$.

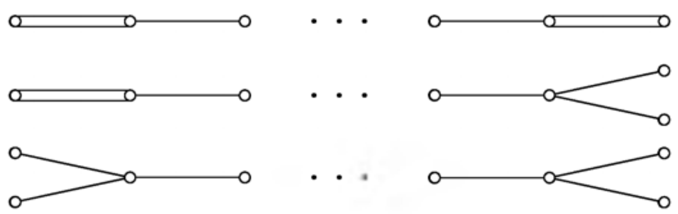
4. *В заданной вершине графа $\mathbf{\Gamma}$ может начинаться не более трех ребер.* Пусть $\varepsilon \in \mathfrak{A}$, а (различные) векторы $\eta_1, \ldots, \eta_k$ связаны с этой вершиной (одним, двумя или тремя ребрами), т. е. $(\varepsilon, \eta_i) < 0$. Ввиду шага 3 никакие два вектора η_i, η_j не соединены между собой, поэтому $(\eta_i, \eta_j) = 0$ при $i \neq j$. Поскольку множество $\mathfrak{A}$ линейно независимо, в линейной оболочке векторов $\varepsilon, \eta_1, \ldots, \eta_k$ имеется единичный вектор η_0, ортогональный к $\eta_1, \ldots, \eta_k$; очевидно, что $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$. Так как $\varepsilon = \sum\limits_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i$, мы заключаем, что $1 = (\varepsilon, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2$. Как следствие, $\sum\limits_{i=1}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2 < 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} 4(\varepsilon, \eta_i)^2 < 4$. Но значение $4(\varepsilon, \eta_i)^2$ равно количеству ребер, соединяющих ε с η_i в графе $\mathbf{\Gamma}$.

5. *Единственный связный граф $\mathbf{\Gamma}$ допустимого множества $\mathfrak{A}$, содержащий тройное ребро, имеет вид* $\circ\!\equiv\!\circ$ (*граф Коксетера* G_2). Это непосредственно вытекает из шага 4.

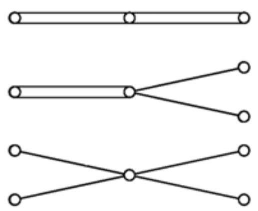
6. *Пусть подмножеству $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} \subset \mathfrak{A}$ соответствует подграф в $\mathbf{\Gamma}$ вида* $\circ\!-\!\circ \cdots \circ\!-\!\circ$ (*простая цепь*). *Если $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}) \cup \cup \{\varepsilon\}$, $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i$, то множество $\mathfrak{A}'$ допустимо.* (Его граф получается из $\mathbf{\Gamma}$ сжатием простой цепи в точку.) Линейная независимость

множества $\mathfrak{A}'$ очевидна. По предположению $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, так что $(\varepsilon, \varepsilon) = k + 2\sum\limits_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k - (k-1) = 1$, т. е. ε — единичный вектор. Любой вектор $\eta \in \mathfrak{A} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ соединен не более чем с одним из векторов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ (согласно шагу 3), поэтому $(\eta, \varepsilon) = 0$ либо $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant k$. В любом случае $4(\eta, \varepsilon)^2 = 0$, 1, 2 или 3.

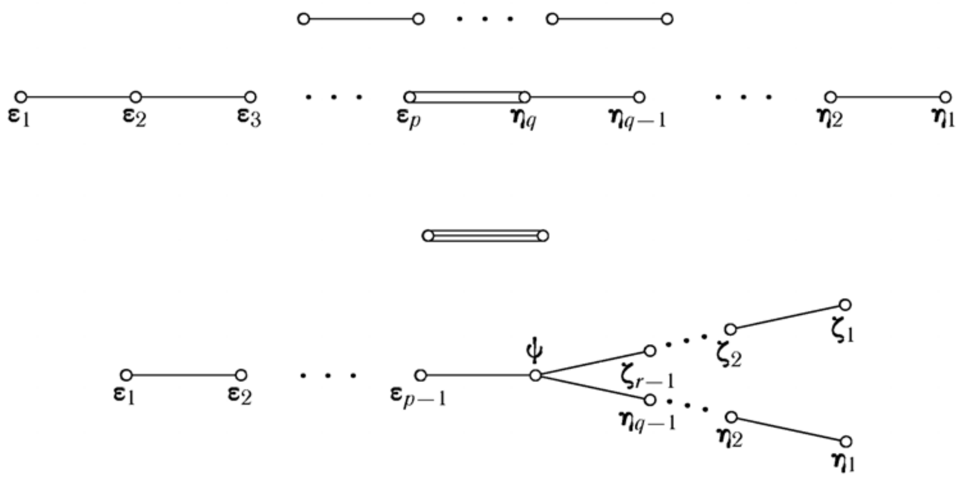
7. *Граф* $\mathbf{\Gamma}$ *не содержит подграфов вида*



Допустим, что какой-то из этих подграфов содержится в $\mathbf{\Gamma}$; согласно шагу 1 он является графом допустимого множества. Но шаг 6 позволяет нам в любом случае заменить простую цепь на вершину, получая (соответственно) следующие графы, невозможные ввиду шага 4:

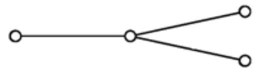


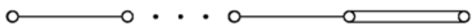
8. *Связный граф* $\mathbf{\Gamma}$ *любого допустимого множества совпадает с одним из следующих*:

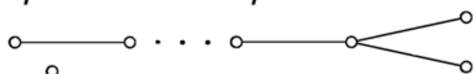
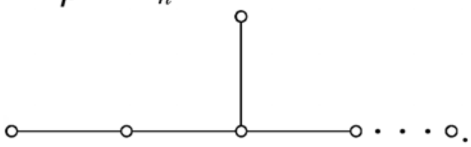


Действительно, ввиду шага 5 тройное ребро имеется лишь в графе  Связный граф с более чем одним двойным ребром содержит подграф

запрещенный ввиду шага 7. Таким образом, может встретиться только одно двойное ребро. Кроме того, если двойное ребро присутствует, то граф $\mathbf{\Gamma}$

не может содержать «вилку» (точку разветвления):  (снова ввиду шага 7), и остается единственная возможность — второй из нарисованных графов (циклы запрещены согласно п. 3). Пусть, наконец, граф Γ имеет только простые ребра; если нет вилок, то Γ является простой цепью (опять-таки ввиду невозможности циклов). Вилок может быть не более одной (см. шаг 7), и единственная оставшаяся возможность — это четвертый из изображенных графов.

9. *Единственными связными графами второго типа из шага 8 являются граф Кокстера* F_4  *и граф Кокстера* $\mathsf{B}_n (= \mathsf{C}_n)$ . Положим $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{q} i\eta_i$. По предположению $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$. Остальные пары ортогональны, поэтому $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}$, $(\eta, \eta) = \frac{q(q+1)}{2}$. Кроме того, поскольку $4(\varepsilon_p, \varepsilon_q)^2 = 2$, $(\varepsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\varepsilon_p, \varepsilon_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$. Из неравенства Шварца вытекает (поскольку ε, η заведомо линейно независимы), что $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$ и $\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$, а значит $(p-1)(q-1) < 2$. Имеются следующие возможности: $p = q = 2$ (что приводит к F_4), $p = 1$ (q произвольно), $q = 1$ (p произвольно).

10. *Единственными связными графами четвертого типа из шага 8 являются граф Кокстера* D_n  *и граф Кокстера* E_n *($n = 6, 7$ или 8)* . Положим $\varepsilon = \sum i\varepsilon_i$, $\eta = \sum i\eta_i$, $\zeta = \sum i\zeta_i$. Ясно, что векторы ε, η, ζ линейно независимы и взаимно ортогональны, причем ψ не лежит в их линейной оболочке. Как и на шаге 4, получаем отсюда, что $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$, где θ_1, θ_2, θ_3 — углы между ψ и ε, η, ζ соответственно. Аналогично шагу 9, после замены p на $p-1$ получаем, что $(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{p(p-1)}{2}$; такие же равенства справедливы для η, ζ. Отсюда $\cos^2\theta_1 = \frac{(\varepsilon, \psi)^2}{(\varepsilon, \varepsilon)}$, $(\psi, \psi) = \frac{(p-1)^2(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2}{(\varepsilon, \varepsilon)} = \frac{1}{4}\left(\frac{2(p-1)^2}{p(p-1)}\right) = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Аналогичные выкладки можно проделать и для θ_2, θ_3. Суммируя, получаем неравенство $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1$, или

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \qquad (*)$$

(Это неравенство, кстати, имеет долгую историю в математике.) Поменяв обозначения, можно считать, что $1/p \leqslant 1/q \leqslant 1/r$ ($\leqslant 1/2$; если p, q или r равняется 1, то мы возвращаемся к типу A_n). С учетом неравенства $(*)$ получаем, что $3/2 \geqslant 3/r > 1$, а значит $r = 2$. Тогда $1/p + 1/q > 1/2$, $2/q > 1/2$ и $2 \leqslant q < 4$. Если $q = 3$, то $1/p > 1/6$ и $p < 6$. Поэтому остаются следующие возможные тройки (p, q, r): $(p, 2, 2) = \mathsf{D}_n$; $(3, 3, 2) = \mathsf{E}_6$; $(4, 3, 2) = \mathsf{E}_7$; $(5, 3, 2) = \mathsf{E}_8$.

Изложенное рассуждение показывает, что все связные графы допустимых множеств векторов в евклидовом пространстве можно найти среди графов Коксера типов A—G. В частности, к одному из этих типов должен принадлежать и граф Коксера системы корней. Но во всех случаях, кроме B_ℓ, C_ℓ, граф Коксера однозначно определяет схему Дынкина, как отмечено вначале. Теорема доказана. $\square$

Упражнения

1. Проверьте матрицы Картана из таблицы 2.

2. Вычислите определители матриц Картана (в случае типов A_ℓ—D_ℓ примените индукцию по ℓ). Правильный ответ:

$$\mathsf{A}_\ell : \ell + 1; \quad \mathsf{B}_\ell : 2; \quad \mathsf{C}_\ell : 2; \quad \mathsf{D}_\ell : 4; \quad \mathsf{E}_6 : 3; \quad \mathsf{E}_7 : 2; \quad \mathsf{E}_8,\ \mathsf{F}_4 \text{ и } \mathsf{G}_2 : 1.$$

3. С помощью алгоритма из п. 11.1 найдите все корни системы G_2. Сделайте то же для $\mathsf{C}_3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Докажите, что группа Вейля системы корней Φ изоморфна прямому произведению групп Вейля ее неприводимых компонент.

5. Докажите, что каждая неприводимая система корней изоморфна своей двойственной, с тем исключением, что B_ℓ и C_ℓ двойственны друг другу.

6. Докажите, что если одна схема Дынкина содержится в другой (например, E_6 в E_7 или E_7 в E_8), то это верно и для соответствующих систем корней.

Замечания

Наше доказательство теоремы о классификации следует книге Jacobson [1]. Несколько иной подход см. в Carter [1]. В Bourbaki [2] сделан упор на классификацию групп Коксера, важным примером которых служат группы Вейля систем корней.

§ 12. *Построение систем корней и автоморфизмов*

В § 11 были найдены все возможные (связные) схемы Дынкина (неприводимых) систем корней. Остается показать, что каждая схема типов A—G действительно принадлежит некоторой системе корней Φ. После этого мы вкратце рассмотрим группу Aut Φ. Для классических линейных алгебр Ли (см. п. 1.2) проверяется, что они имеют системы корней типов A_ℓ—D_ℓ, чем и устанавливается существование таких систем; разумеется, предварительно нужно доказать полупростоту этих алгебр (см. § 19). Но прямое построение системы корней также не представляет труда, причем выясняется и структура ее группы Вейля.

12.1. Построение типов A—G. Нам предстоит работать во всевозможных пространствах $\mathbb{R}^n$ с обычным скалярным произведением. Через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ будем обозначать ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Целочисленную линейную оболочку этого базиса назовем (по определению) *решеткой* и обозначим I. В качестве E всегда будем брать пространство $\mathbb{R}^n$ (или его подходящее подпространство с индуцированным скалярным произведением), а в качестве Φ — множество всех векторов заданной длины (или длин) в решетке I или тесно связанной с ней подгруппе J в E.

Поскольку группа I (и J) дискретна в обычной топологии пространства $\mathbb{R}^n$, а множество векторов одной или двух заданных длин компактно (замкнуто и ограниченно), множество Φ заведомо конечно. Будем считать, что оно не содержит 0. В каждом случае будет очевидно, что Φ порождает E (фактически будет указан в явном виде базис для Φ). Отсюда следует свойство (R1). Выбор длин сделает очевидным и условие (R2). Для проверки (R3) достаточно убедиться, что отражение σ_α ($\alpha \in \Phi$) отображает Φ снова в J, поскольку тогда $\sigma_\alpha(\Phi)$ автоматически состоит из векторов заданных длин и (R3) вытекает из (R4). Что касается свойства (R4), то обычно бывает достаточно выбрать длины так, чтобы их квадраты делили 2, поскольку $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ при всех $\alpha, \beta \in I$.

После этих предварительных замечаний рассмотрим по отдельности случаи A—G. Проверив свойства (R1)—(R4) намеченным выше способом, читатель должен убедиться, что полученная матрица Картана совпадает с приведенной в таблице 1 (см. п. 1.14).

Случай A_ℓ ($\ell \geqslant 1$): пусть E обозначает ℓ-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{\ell+1}$, ортогональное вектору $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{\ell+1}$. Положим $I' = I \cap \mathsf{E}$, а в качестве Φ возьмем множество всех таких векторов $\alpha \in I'$, что $(\alpha, \alpha) = 2$. Очевидно, что $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i \neq j\}$. Векторы $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ ($1 \leqslant i \leqslant \ell$) линейно независимы, причем $\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \ldots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)$ при $i < j$, откуда видно, что они составляют базис в Φ. Ясно, что мы получаем матрицу Картана A_ℓ. Наконец, заметим, что отражение относительно α_i переставляет индексы i, $i+1$, а прочие оставляет на месте. Таким образом, σ_{α_i} отвечает транспозиции $(i,\ i+1)$ в симметрической группе $\mathscr{S}_{\ell+1}$; она порождается такими транспозициями, и мы получаем естественный изоморфизм между $\mathscr{W}$ и $\mathscr{S}_{\ell+1}$.

Случай B_ℓ: пусть $\mathsf{E} = \mathbb{R}^\ell$, $\Phi = \{\alpha \in I\colon (\alpha, \alpha) = 1$ или $2\}$. Легко проверить, что система Φ состоит из векторов $\pm\varepsilon_i$ (с квадратом длины, равным 1) и $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, $i \neq j$ (с квадратом длины, равным 2). Множество из ℓ векторов

$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\ell-1}-\varepsilon_\ell,\ \varepsilon_\ell$ линейно независимо; короткий корень равен $\varepsilon_i=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2})+\ldots+(\varepsilon_{\ell-1}-\varepsilon_\ell)+\varepsilon_\ell$. Аналогичное выражение получаем для длинного корня $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ или $\varepsilon_i+\varepsilon_j$. Ясно, что матрица Картана для этого (упорядоченного) базиса имеет вид B_ℓ. На множестве $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$ группа $\mathscr{W}$ действует как группа всех перестановок и перемен знака, поэтому она изоморфна полупрямому произведению групп $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ и $\mathscr{S}_\ell$ (где вторая группа действует на первой).

Случай C_ℓ ($\ell\geqslant 3$): при $\ell\geqslant 2$ систему корней C_ℓ наиболее удобно рассматривать в качестве двойственной к B_ℓ (причем $\mathsf{B}_2=\mathsf{C}_2$), см. упражнение 11.5. Читатель может непосредственно проверить, что в пространстве $\mathsf{E}=\mathbb{R}^\ell$ множество всех векторов $\pm 2\varepsilon_i$ и всех векторов $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$, образует систему корней типа C_ℓ с базисом $\{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\ell-1}-\varepsilon_\ell, 2\varepsilon_\ell\}$. Разумеется, группа Вейля здесь изоморфна группе Вейля системы B_ℓ.

Случай $\mathsf{D}_\ell(\ell\geqslant 4)$: пусть $\mathsf{E}=\mathbb{R}^\ell$, $\Phi=\{\alpha\in I\colon (\alpha, \alpha)=2\}=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), i\neq j\}$. В качестве базиса возьмем ℓ линейно независимых векторов $\varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_{\ell-1}-\varepsilon_\ell, \varepsilon_{\ell-1}+\varepsilon_\ell$ (получая систему D_ℓ). Группа Вейля здесь — это группа перестановок и *перемен знака в четном количестве позиций* на множестве $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$. Поэтому группа $\mathscr{W}$ изоморфна полупрямому произведению групп $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}$ и $\mathscr{S}_\ell$.

Случаи E_6, E_7, E_8: мы знаем, что E_6 и E_7 можно канонически отождествить с подсистемами в E_8 (упражнение 6 из § 11), поэтому достаточно построить E_8. Это не совсем просто. Пусть $\mathsf{E}=\mathbb{R}^8$, $I'=I+\mathbb{Z}\Big(\dfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_8)\Big)$, I'' — подгруппа в I', состоящая из всех элементов вида $\sum c_i\varepsilon_i+\dfrac{c}{2}(\varepsilon_1+\ldots$ $\ldots+\varepsilon_8)$, таких что число $\sum c_i$ *четно*. (Проверьте, что это подгруппа!) Положим $\Phi=\{\alpha\in I''\colon (\alpha, \alpha)=2\}$. Легко видеть, что Φ содержит (очевидно) векторы $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$, а также (менее очевидно) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}\varepsilon_i$ (где $k(i)=0, 1$ по модулю 2). Можно проверить, что все скалярные произведения здесь принадлежат $\mathbb{Z}$ (это нужно проверять, поскольку мы работаем в большей решетке, чем I). В качестве базиса возьмем $\Big\{\dfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_8-(\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_7)), \varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_3-\varepsilon_2, \varepsilon_4-\varepsilon_3, \varepsilon_5-\varepsilon_4, \varepsilon_6-\varepsilon_5, \varepsilon_7-\varepsilon_6\Big\}$. (Его упорядочение соответствует матрице Картана для E_8 из таблицы 1 (см. п. 11.4).) Приглашаем читателя наглядно представить себе действие группы Вейля, порядок которой, как можно показать, равен $2^{14}3^5 5^2 7$.

Случай F_4: пусть $\mathsf{E}=\mathbb{R}^4$, $I'=I+\mathbb{Z}\Big(\dfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\Big)$, $\Phi=\{\alpha\in I'\colon$ $(\alpha, \alpha)=1$ или $2\}$. Тогда Φ состоит из всех векторов $\pm\varepsilon_i$, всех векторов $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)$, $i\neq j$, а также всех векторов $\pm\dfrac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)$, где знаки можно выбирать независимо. Можно проверить, что все числа $\langle\alpha, \beta\rangle$ целые.

В качестве базиса возьмем $\left\{\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \varepsilon_3-\varepsilon_4,\ \varepsilon_4,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\right\}$. Здесь группа $\mathscr{W}$ имеет порядок 1152.

Случай G_2: мы уже построили G_2 в явном виде в § 9. При абстрактном подходе можно взять в качестве E подпространство в $\mathbb{R}^3$, ортогональное к $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, и положить $I'=I\cap\mathsf{E}$, $\Phi=\{\alpha\in I'\colon (\alpha,\alpha)=2 \text{ или } 6\}$. Таким образом, $\Phi=\pm\{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2\}$. В качестве базиса возьмем $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $-2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$. (Как действует группа $\mathscr{W}$?)

Теорема. *Для каждой схемы Дынкина (и матрицы Картана) типов* A—G *существует неприводимая система корней с такой схемой.*

12.2. Автоморфизмы системы Φ. Мы намереваемся дать полное описание группы $\operatorname{Aut}\Phi$ для каждой системы корней Φ. Напомним, что ввиду леммы 9.2 группа $\mathscr{W}$ является нормальной подгруппой в $\operatorname{Aut}\Phi$ (упражнение 9.6). Пусть $\Gamma=\{\sigma\in\operatorname{Aut}\Phi\colon \sigma(\Delta)=\Delta\}$, где Δ — фиксированный базис в Φ. Очевидно, Γ является подгруппой в $\operatorname{Aut}\Phi$. Если $\tau\in\Gamma\cap\mathscr{W}$, то $\tau=1$ ввиду простой транзитивности группы $\mathscr{W}$ (теорема 10.3(e)). Далее, если τ — произвольный элемент из $\operatorname{Aut}\Phi$, то, очевидно, $\tau(\Delta)$ также является базисом для Φ. Поэтому существует элемент $\sigma\in\mathscr{W}$, для которого $\sigma\tau(\Delta)=\Delta$ (теорема 10.3(b)), и, значит, $\tau\in\Gamma\mathscr{W}$. Как следствие, $\operatorname{Aut}\Phi$ *является полупрямым произведением групп* Γ *и* $\mathscr{W}$.

Для всех $\tau\in\operatorname{Aut}\Phi$ и всех $\alpha,\beta\in\Phi$ мы имеем $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\tau(\alpha),\tau(\beta)\rangle$. Поэтому каждый элемент $\tau\in\Gamma$ определяет автоморфизм (в очевидном смысле) схемы Дынкина системы Φ. Если τ действует на схеме тривиально, то $\tau=1$ (так как Δ порождает E). С другой стороны, каждый автоморфизм схемы Дынкина очевидным образом определяет автоморфизм системы Φ (см. предложение 11.1). Таким образом, *можно отождествить* Γ *с группой автоморфизмов схемы Дынкина*. Описание групп Γ очевидно при взгляде на список схем Дынкина из п. 11.4; вместе с другими полезными сведениями о неприводимых системах Φ оно собрано в таблице 3.

Таблица 3

Тип	Количество положительных корней	Порядок группы $\mathscr{W}$	Строение группы $\mathscr{W}$	Γ
A_ℓ	$\binom{\ell+1}{2}$	$(\ell+1)!$	$\mathscr{S}_{\ell+1}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $(\ell\geqslant 2)$
B_ℓ, C_ℓ	ℓ^2	$2^\ell\ell!$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell\rtimes\mathscr{S}_\ell$	1
D_ℓ	$\ell^2-\ell$	$2^{\ell-1}\ell!$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}\rtimes\mathscr{S}_\ell$	$\begin{cases}\mathscr{S}_3 & (\ell=4)\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (\ell>4)\end{cases}$
E_6	36	$2^7 3^4 5$		$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
E_7	63	$2^{10}3^4 5\cdot 7$		1
E_8	120	$2^{14}3^5 5^2 7$		1
F_4	24	$2^7 3^2$		1
G_2	6	$2^2 3$	$\mathscr{D}_6$	1

(Нетождественные автоморфизмы схемы существуют лишь в случае единственной длины корней, когда схема Дынкина совпадает с графом Кокстера, поэтому здесь можно использовать и термин *автоморфизм графа*[1].)

Упражнения

1. Проверьте детали построений из п. 12.1.
2. Проверьте таблицу 4.

Таблица 4. Максимальные длинные и короткие корни

Тип	Длинный корень	Короткий корень
A_ℓ	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\ell$	
B_ℓ	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+2\alpha_\ell$	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\ell$
C_ℓ	$2\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2a_{\ell-1}+\alpha_\ell$	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell$
D_ℓ	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{\ell-2}+\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell$	
E_6	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$	
E_7	$2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$	
E_8	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$	
F_4	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$
G_2	$3\alpha_1+2\alpha_2$	$2\alpha_1+\alpha_2$

3. Пусть система $\Phi\subset\mathsf{E}$ удовлетворяет условиям (R1), (R3), (R4), но не (R2), см. упражнение 9.9. Пусть при этом система Φ неприводима в смысле § 11. Докажите, что Φ является объединением систем корней типов B_n, C_n в E ($n=\dim\mathsf{E}$, $n>1$), причем длинные корни из B_n являются короткими корнями в C_n. (В литературе это называется *неприведенной системой корней* типа BC_n.)

4. Докажите, что длинные корни из G_2 образуют систему корней в E типа A_2.

5. Допустимо ли при построении C_ℓ определить Φ как множество всех векторов из I с квадратом длины 2 или 4? Ответ объясните.

6. Докажите, что отображение $\alpha\mapsto-\alpha$ является автоморфизмом системы Φ. Попробуйте определить, для каких неприводимых систем Φ оно принадлежит группе Вейля.

7. Опишите группу $\operatorname{Aut}\Phi$ для случая, когда система Φ не является неприводимой.

Замечания

Изложение здесь следует Serre [2]. Дополнительные сведения о конкретных системах корней можно найти в книге Bourbaki [2].

[1] Однако в случаях $\mathsf{B}_2(=\mathsf{C}_2)$, F_4 и G_2 нетривиальный автоморфизм графа не является автоморфизмом схемы Дынкина, так как он меняет ориентацию кратных ребер. (*Прим. ред.*)

§ 13. *Абстрактная теория весов*

В этом параграфе излагается та часть теории представлений полупростых алгебр Ли, которая использует только систему корней. (Все это не потребуется до гл. VI.) Здесь Φ — система корней в евклидовом пространстве E с группой Вейля $\mathscr{W}$.

13.1. Веса. Пусть Λ — множество всех таких элементов $\lambda \in \mathsf{E}$, что $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ $(\alpha \in \Phi)$. Назовем его элементы *весами*. Поскольку $\langle \lambda, \alpha \rangle = \dfrac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ линейно зависит от λ, множество Λ является подгруппой в E, содержащей Φ. Обозначим через Λ_r *решетку корней* (т. е. подгруппу в Λ, которую порождает система Φ). Она является решеткой в E в стандартном смысле: это целочисленная линейная оболочка некоторого $\mathbb{R}$-базиса в E (а именно, любого множества простых корней). Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$ и назовем вес $\lambda \in \Lambda$ *доминантным*, если все числа $\langle \lambda, \alpha \rangle$ $(\alpha \in \Delta)$ неотрицательны, и *строго доминантным*, если они положительны. Пусть Λ^+ — множество всех доминантных весов. На языке п. 10.1 это означает, что Λ^+ — множество всех весов, лежащих в замыкании фундаментальной камеры Вейля $\mathfrak{C}(\Delta)$, а $\Lambda \cap \mathfrak{C}(\Delta)$ — это множество строго доминантных весов.

Пусть $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Тогда векторы $\dfrac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ также образуют базис в E. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ — двойственный базис (относительно скалярного произведения в E): $\dfrac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$. Поскольку все значения $\langle \lambda_i, \alpha \rangle$ $(\alpha \in \Delta)$ неотрицательные целые, λ_i являются доминантными весами. Назовем их *фундаментальными доминантными весами* (*относительно* Δ). Заметим, что $\sigma_i \lambda_j = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$. Для произвольного $\lambda \in \mathsf{E}$ (например, для любого веса) положим $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$. Тогда $0 = \langle \lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha \rangle$ для любого простого корня α, а значит $(\lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha) = 0$ и $\lambda = \sum m_i \lambda_i$. Следовательно, Λ *является решеткой с базисом* $(\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell)$, *причем* $\lambda \in \Lambda^+$, *если и только если все* m_i *неотрицательны*. (См. рис. 4, тип A_2.)

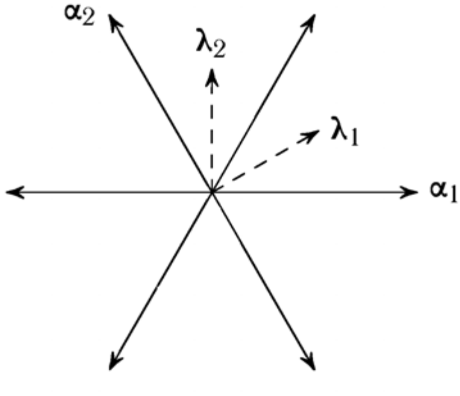


Рис. 4

Из элементарных свойств решеток следует, что Λ/Λ_r — конечная группа (она называется *фундаментальной группой* системы Φ). Это можно непосредственно увидеть следующим образом. Пусть $\alpha_i = \sum\limits_j m_{ij}\lambda_j$ $(m_{ij} \in \mathbb{Z})$. Тогда $\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum\limits_j m_{ij} \langle \lambda_j, \alpha_k \rangle = m_{ik}$. Другими словами, матрица Картана описывает преобразование базиса. Чтобы выразить λ_j через α_i, нужно лишь обратить матрицу Картана; определитель последней — целое число (см. упражнение 11.2), и он измеряет индекс подгруппы Λ_r в Λ. Например, для типа A_1 имеем $\alpha_1 = 2\lambda_1$. (Это единственный случай, когда простой корень доминантен, — по причинам, которые станут понятны позже.) Для типа A_2 матрица Картана равна $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому $\alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2$ и $\alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2$. После обращения получаем $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, следовательно $\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)$ и $\lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)$. Вычисляя определители матриц Картана, получаем следующий набор порядков фундаментальных групп Λ/Λ_r для неприводимых систем:

$$\mathsf{A}_\ell : \ell + 1; \quad \mathsf{B}_\ell,\ \mathsf{C}_\ell,\ \mathsf{E}_7 : 2; \quad \mathsf{D}_\ell : 4; \quad \mathsf{E}_6 : 3; \quad \mathsf{E}_8,\ \mathsf{F}_4,\ \mathsf{G}_2 : 1.$$

После некоторой дополнительной работы удается явно выразить λ_i через α_j. Для удобства читателя эти сведения собраны в таблице 5, хотя, строго говоря, в дальнейшем они не понадобятся. Точную структуру фундаментальной группы можно найти путем вычисления элементарных делителей или вывести из таблицы 5, коль скоро последняя известна (упражнение 4).

Таблица 5

A_ℓ:
$$\lambda_i = \frac{1}{\ell+1}[(\ell - i + 1)\alpha_1 + 2(\ell - i + 1)\alpha_2 + \ldots + (i-1)(\ell - i + 1)\alpha_{i-1} + \\ + i(\ell - i + 1)\alpha_i + i(\ell - i)\alpha_{i+1} + \ldots + i\alpha_\ell]$$

B_ℓ:
$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_\ell) \quad (i < \ell)$$
$$\lambda_\ell = 1/2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \ell\alpha_\ell)$$

C_ℓ:
$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{\ell-1} + 1/2\alpha_\ell)$$

D_ℓ:
$$\lambda_i = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \ldots + \alpha_{\ell-2} + 1/2(\ell-2)\alpha_\ell)$$
$$\lambda_{\ell-1} = 1/2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (\ell-2)\alpha_{\ell-2} + 1/2\ell\alpha_{\ell-1} + 1/2(\ell-2)\alpha_\ell)$$
$$\lambda_\ell = 1/2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (\ell-2)\alpha_{\ell-2} + 1/2(\ell-2)\alpha_{\ell-1} + 1/2\ell\alpha_\ell)$$

(Ниже $\sum q_i\alpha_i$ сокращенно обозначается через $(q_1, \ldots, q_\ell)$.)

E_6: $\lambda_1 = 1/3(4, 3, 5, 6, 4, 2)$; $\lambda_2 = (1, 2, 2, 3, 2, 1)$;
$\lambda_3 = 1/3(5, 6, 10, 12, 8, 4)$; $\lambda_4 = (2, 3, 4, 6, 4, 2)$;
$\lambda_5 = 1/3(4, 6, 8, 12, 10, 5)$; $\lambda_6 = 1/3(2, 3, 4, 6, 5, 4)$

E_7: $\lambda_1 = (2, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$; $\lambda_2 = 1/2(4, 7, 8, 12, 9, 6, 3)$;
$\lambda_3 = (3, 4, 6, 8, 6, 4, 2)$; $\lambda_4 = (4, 6, 8, 12, 9, 6, 3)$;
$\lambda_5 = 1/2(6, 9, 12, 18, 15, 10, 5)$; $\lambda_6 = (2, 3, 4, 6, 5, 4, 2)$;
$\lambda_7 = 1/2(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3)$

E_8:	$\lambda_1=(4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2)$; $\lambda_2=(5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3)$; $\lambda_3=(7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4)$; $\lambda_4=(10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 24,\ 18,\ 12,\ 6)$; $\lambda_5=(8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 20,\ 15,\ 10,\ 5)$; $\lambda_6=(6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 15,\ 12,\ 8,\ 4)$; $\lambda_7=(4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 3)$; $\lambda_8=(2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2)$
F_4:	$\lambda_1=(2,\ 3,\ 4,\ 2)$; $\lambda_2=(3,\ 6,\ 8,\ 4)$; $\lambda_3=(2,\ 4,\ 6,\ 3)$; $\lambda_4=(1,\ 2,\ 3,\ 2)$
G_2:	$\lambda_1=(2,\ 1)$; $\lambda_2=(3,\ 2)$

13.2. Доминантные веса. Группа Вейля $\mathscr{W}$ системы Φ сохраняет скалярное произведение в E и потому оставляет множество Λ инвариантным. (На самом деле мы уже сделали более точное наблюдение: $\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i$.) При изучении представлений часто встречаются орбиты весов при действии группы $\mathscr{W}$. Ввиду леммы 10.3В и упражнения 10.14 можно утверждать следующее.

Лемма А. *Каждый вес эквивалентен относительно $\mathscr{W}$ ровно одному доминантному весу. Если вес λ доминантен, то $\sigma\lambda\prec\lambda$ для всех $\sigma\in\mathscr{W}$, а если он строго доминантен, то $\sigma\lambda=\lambda$ лишь при $\sigma=1$.*

Как подмножество в E, Λ частично упорядочивается отношением $\lambda\succ\mu$, означающим, что $\lambda-\mu$ является суммой положительных корней (см. п. 10.1). К сожалению, это упорядочение не очень тесно связано со свойством доминантности; легко построить пример, когда корень μ доминантен, $\mu\prec\lambda$, но корень λ не доминантен (упражнение 2). Однако следующая лемма показывает, что доминантные веса *не очень* плохо себя ведут по отношению к $\prec$.

Лемма В. *Пусть $\lambda\in\Lambda^+$. Тогда количество доминантных весов $\mu\prec\lambda$ конечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\lambda+\mu\in\Lambda^+$, а $\lambda-\mu$ является суммой положительных корней, $0\leqslant(\lambda+\mu,\ \lambda-\mu)=(\lambda,\ \lambda)-(\mu,\ \mu)$. Как следствие, μ лежит в *компактном* множестве $\{x\in\mathsf{E}\colon (x,\ x)\leqslant(\lambda,\ \lambda)\}$, пересечение которого с *дискретным* множеством Λ^+ конечно. □

13.3. Вес δ. Напомним (следствие из леммы 10.2В), что $\delta=\frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\succ 0}\alpha$ и $\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i$ $(1\leqslant i\leqslant\ell)$. Разумеется, δ может и не принадлежать решетке корней Λ_r (см. тип A_1), но δ всегда лежит в Λ. Более точно, справедлива

Лемма А. *Выполняется равенство $\delta=\sum\limits_{j=1}^{\ell}\lambda_j$, так что δ является (строго) доминантным весом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i=\delta-\langle\delta,\ \alpha_i\rangle\alpha_i$, то $\langle\delta,\ \alpha_i\rangle=1$ $(1\leqslant i\leqslant\ell)$. Но $\delta=\sum_i\langle\delta,\ \alpha_i\rangle\lambda_i$ (ср. п. 13.1), и лемма доказана. □

Следующий вспомогательный результат потребуется в п. 13.4.

Лемма B. *Пусть* $\mu \in \Lambda^+$, $\nu = \sigma^{-1}\mu$ $(\sigma \in \mathscr{W})$. *Тогда* $(\nu+\delta, \nu+\delta) \leqslant \leqslant (\mu+\delta, \mu+\delta)$, *причем равенство достигается лишь при* $\nu = \mu$.

Доказательство. Мы имеем: $(\nu+\delta, \nu+\delta) = (\sigma(\nu+\delta), \sigma(\nu+\delta)) = = (\mu+\sigma\delta, \mu+\sigma\delta) = (\mu+\delta, \mu+\delta) - 2(\mu, \delta - \sigma\delta)$. Поскольку $\mu \in \Lambda^+$, а $\delta - \sigma\delta$ является суммой положительных корней (см. леммы 13.2A и 13.3B), правая часть не превосходит $(\mu+\delta, \mu+\delta)$, причем равенство достигается лишь при $(\mu, \delta - \sigma\delta) = 0$. Тогда $(\mu, \delta) = (\mu, \sigma\delta) = (\nu, \delta)$ и $(\mu - \nu, \delta) = 0$. Но $\mu - \nu$ является суммой положительных корней (см. лемму 13.2A), а корень δ строго доминантен, поэтому $\mu = \nu$. □

13.4. Насыщенные множества весов. Особую роль в теории представлений играют некоторые конечные множества весов, инвариантные относительно $\mathscr{W}$. Назовем подмножество Π в Λ *насыщенным*, если для всех $\lambda \in \Pi$, $\alpha \in \Phi$ и для всех i между 0 и $\langle \lambda, \alpha \rangle$ вес $\lambda - i\alpha$ также лежит в Π. Прежде всего заметим, что каждое насыщенное множество автоматически инвариантно относительно $\mathscr{W}$, поскольку $\sigma_\alpha \lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$, а $\mathscr{W}$ порождается отражениями. Мы говорим, что насыщенное множество Π имеет *старший вес* λ $(\lambda \in \Lambda^+)$, если $\lambda \in \Pi$ и $\mu \prec \lambda$ при всех $\mu \in \Pi$.

Примеры. (1) множество, состоящее только из 0, является насыщенным и имеет старший вес 0; (2) множество Φ всех корней полупростой алгебры Ли с добавлением нуля также является насыщенным.

В случае неприводимой системы Φ ввиду леммы 10.4A имеется единственный максимальный корень (относительно фиксированного базиса Δ), так что этот корень является старшим весом для Π (почему?)

Лемма A. *Насыщенное множество весов, имеющее старший вес* λ, *обязательно конечно.*

Доказательство. Применим лемму 13.2B. □

Лемма B. *Пусть множество* Π *насыщенно и имеет старший вес* λ. *Если* $\mu \in \Lambda^+$ *и* $\mu \prec \lambda$, *то* $\mu \in \Pi$.

Доказательство. Пусть $\mu' = \mu + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Pi$ $(k_\alpha \in \mathbb{Z}^+)$. (*Важное замечание*: мы не предполагаем, что вес μ' доминантен.) Покажем, что можно уменьшить одно из значений k_α на единицу, оставаясь в множестве Π (отсюда в конечном счете вытекает, что $\mu \in \Pi$). Разумеется, мы начнем с того, что вес λ сам имеет вид такого μ'. Пусть теперь $\mu \neq \mu'$, так что некоторое значение k_α положительно. Из неравенства $\left(\sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha\right) > 0$ получаем, что $\left(\sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \beta\right) > 0$ для некоторого β, удовлетворяющего условию $\beta \in \Delta$ с $k_\beta > 0$. Как следствие, величина $\left\langle \sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \beta \right\rangle$ положительна. Так как вес μ доминантен, значение $\langle \mu, \beta \rangle$ неотрицательно, и потому $\langle \mu', \beta \rangle > 0$. В силу определения насыщенного множества теперь можно вычесть β из μ', оставаясь в множестве Π. Тем самым k_β уменьшается на единицу. □

Из леммы B очень четко вырисовывается строение насыщенного множества Π со старшим весом λ: Π состоит из всех доминантных весов, меньших либо равных λ в смысле частичного упорядочения, а также эквивалентных им относительно $\mathscr{W}$. В частности, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ существует не более одного такого Π. Обратно, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ можно определить Π просто как множество всех доминантных весов, меньших либо равных λ, вместе с эквивалентными им относительно $\mathscr{W}$. Из инвариантности множества Π при действии группы $\mathscr{W}$ можно вывести, что оно насыщенно (упражнение 10), и ввиду леммы 13.2A его старший вес равен λ.

В заключение этого параграфа докажем неравенство, существенное для применения формулы Фрейденталя (§ 22).

Лемма C. *Пусть Множество Π насыщенно и имеет старший вес λ. Если $\mu \in \Pi$, то $(\mu+\delta, \mu+\delta) \leqslant (\lambda+\delta, \lambda+\delta)$, причем равенство достигается лишь при $\mu = \lambda$.*

Доказательство. Ввиду леммы 13.3B достаточно рассмотреть случай доминантного веса μ. Положим $\mu = \lambda - \pi$, где π является суммой положительных корней. Тогда $(\lambda+\delta, \lambda+\delta) - (\mu+\delta, \mu+\delta) = (\lambda+\delta, \lambda+\delta) - (\lambda+\delta-\pi, \lambda+\delta-\pi) = (\lambda+\delta, \pi) + (\pi, \mu+\delta) \geqslant (\lambda+\delta, \pi) \geqslant 0$, где неравенства вытекают из доминантности корней $\mu+\delta$ и $\lambda+\delta$. Равенство выполнено лишь при $\pi = 0$, поскольку вес $\lambda+\delta$ строго доминантен. □

Упражнения

1. Пусть $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_e$ — разложение множества Φ на неприводимые компоненты, причем $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_e$. Докажите, что Λ распадается в прямую сумму $\Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_e$; что можно сказать о Λ^+?

2. Покажите на примере (скажем, для A_2), что возможен случай $\lambda \notin \Lambda^+$, $\alpha \in \Delta$, $\lambda - \alpha \in \Lambda^+$.

3. Проверьте некоторые данные из таблицы 5 — например, для F_4.

4. С помощью таблицы 5 покажите, что фундаментальная группа в случае A_ℓ — циклическая порядка $\ell+1$, а в случае D_ℓ изоморфна группе $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ при нечетном ℓ и группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при четном ℓ. (Легко запомнить, к какому случаю что относится, поскольку $\mathsf{A}_3 = \mathsf{D}_3$.)

5. Пусть Λ' — любая подгруппа в Λ, содержащая Λ_r. Докажите, что подгруппа Λ' инвариантна при действии группы $\mathscr{W}$. Тем самым мы получаем гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{Aut}\ \Phi/\mathscr{W} \to \mathrm{Aut}(\Lambda/\Lambda_r)$. Докажите его инъективность, а затем покажите, что $-1 \in \mathscr{W}$, если и только если $\Lambda_r \supset 2\Lambda$ (см. упражнение 12.6). Покажите также, что $-1 \in \mathscr{W}$ в точности для следующих (неприводимых) систем корней: A_1, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ (ℓ четно), E_7, E_8, F_4, G_2.

6. Докажите, что корень, принадлежащий неприводимой системе Φ, доминантен, если и только если это старший корень либо (при наличии корней разной длины) максимальный короткий корень (см. п. 10.4 и упражнение 10.11).

7. Докажите, что если $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$ — *тупоугольный* базис в евклидовом пространстве E (т. е. все величины $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ неположительны при $i \neq j$), то двойственный базис будет *остроугольным* (т. е. все величины $(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*)$ неотрицательны при $i \neq j$). [Сведите ситуацию к случаю $\ell = 2$.]

8. Пусть система Φ неприводима. Не используя данных из таблицы 1, докажите, что каждый вес λ_i имеет вид $\sum\limits_j q_{ij}\alpha_j$, где все q_{ij} — *положительные* рациональные числа. [Выведите из упражнения 7, что все q_{ij} неотрицательны. Из неравенства $(\lambda_i, \lambda_i) > 0$ получите, что $q_{ii} > 0$. Затем покажите, что если $q_{ij} > 0$ и $(\alpha_j, \alpha_k) < 0$, то $q_{ik} > 0$.]

9. Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите, что корень $\sigma(\lambda + \delta) - \delta$ доминантен только при $\sigma = 1$.

10. Докажите, что если $\lambda \in \Lambda^+$, то множество Π, состоящее из всех доминантных весов $\mu \prec \lambda$ и $\mathscr{W}$-эквивалентных им, является насыщенным, как утверждается в п. 13.4.

11. Докажите, что каждое подмножество из Λ содержится в единственном минимальном насыщенном множестве, конечном, если данное подмножество конечно.

12. Для системы корней типа A_2 выпишите действие каждого элемента группы Вейля на λ_1 и λ_2. С помощью этих данных определите, какие веса принадлежат насыщенному множеству, имеющему старший вес $\lambda_1 + 3\lambda_2$. Сделайте то же самое для типа G_2 и старшего веса $\lambda_1 + 2\lambda_2$.

13. Назовем вес $\lambda \in \Lambda^+$ *минимальным*[1], если из условий $\mu \in \Lambda^+$, $\mu \prec \lambda$ следует, что $\mu = \lambda$. Покажите, что каждый смежный класс по Λ_r в Λ содержит ровно один минимальный вес. Докажите, что вес λ минимален, если и только если его $\mathscr{W}$-орбита насыщена (со старшим весом λ), а также если и только если $\lambda \in \Lambda^+$ и $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0,\ 1,\ -1$ для *всех* корней α. Определите (с помощью таблицы 5) ненулевые минимальные веса для каждой из неприводимых систем Φ. Ответ дается следующей таблицей:

A_ℓ:	$\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$	B_ℓ:	λ_ℓ
C_ℓ:	λ_1	D_ℓ:	$\lambda_1, \lambda_{\ell-1}, \lambda_\ell$
E_6:	λ_1, λ_6	E_7:	λ_7

Замечания

Материал этого параграфа частично взят из текста и упражнений в книге Bourbaki [2], гл. VI, § 1, No. 9—10 (и упражнение 23). Но мы сделали несколько больше, чем делается обычно, вне рамок теории представлений, чтобы подчеркнуть роль системы корней[2].

---

[1] В русской литературе это называется *микровесом*. (*Прим. ред.*)

[2] Имеется в виду абстрактная теория весов, развитая в этом параграфе. (*Прим. ред.*)

Глава IV

Теоремы об изоморфизме и сопряженности

§14. *Теорема об изоморфизме*

Вернемся в ситуацию гл. II: L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, H — ее максимальная торическая подалгебра, $\Phi \subset H^*$ — множество всех корней алгебры L относительно H. В пункте 8.5 мы показали, что рациональная оболочка системы Φ в H^* имеет размерность $\ell = \dim_{\mathsf{F}} H^*$ над $\mathbb{Q}$. Расширив основное поле от $\mathbb{Q}$ до $\mathbb{R}$, получаем ℓ-мерное вещественное векторное пространство E, натянутое на Φ. При этом симметрическая билинейная форма, двойственная к форме Киллинга, продолжается на E, превращая его в евклидово пространство. Тогда теорема 8.5 утверждает, что Φ — система корней в E.

Наша цель в этом параграфе — доказать, что две полупростые алгебры Ли с одинаковой системой корней изоморфны. Фактически мы сможем доказать более точное утверждение, позволяющее построить и конкретные изоморфизмы.

14.1. Редукция к случаю простой алгебры.

Предложение. *Пусть L — простая алгебра Ли, подалгебра H и система Φ такие же, как выше. Тогда Φ — неприводимая система корней в смысле п.* 10.4.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 ортогональны. Если $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$, то $(\alpha+\beta, \alpha) \neq 0$, $(\alpha+\beta, \beta) \neq 0$, поэтому $\alpha+\beta$ не может быть корнем и $[L_\alpha, L_\beta] = 0$. Следовательно, подалгебра K в L, порожденная всеми L_α $(\alpha \in \Phi_1)$, поэлементно коммутирует со всеми L_β $(\beta \in \Phi_2)$; как следствие, K — собственная подалгебра в L, поскольку $Z(L) = 0$. Далее, в нормализаторе подалгебры K содержатся все L_α $(\alpha \in \Phi_1)$, тогда и все L_α $(\alpha \in \Phi)$, а значит и L (предложение 8.4(f)). Следовательно, K — собственный ненулевой идеал в алгебре L, что противоречит ее простоте. □

Пусть теперь L — произвольная полупростая алгебра Ли. Тогда L представляется единственным образом как прямая сумма простых идеалов $L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ (теорема 5.2). Если H — максимальная торическая подалгебра в L, то $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_t$, где $H_i = L_i \cap H$ (см. упражнение 5.8). Очевидно, что H_i — торическая подалгебра в L_i при любом i, в действительности макс и м а л ь н а я: любая бо́льшая торическая подалгебра в L_i автоматически будет торической в L, при этом она поэлементно коммутирует с H_j $(j \neq i)$ и вместе с ними порождает торическую подалгебру в L, бо́льшую чем H. Пусть Φ_i обозначает систему корней алгебры L_i относительно H_i в вещественном векторном пространстве E_i. Если $\alpha \in \Phi_i$, то мы вправе считать α линейной функцией на H, положив $\alpha(H_j) = 0$ при $j \neq i$. Очевидно, что тогда α — корень алгебры L относительно H, причем $L_\alpha \subset L_i$. Обратно, если $\alpha \in \Phi$, то $[H_i, L_\alpha] \neq 0$ при некотором i (иначе H поэлементно коммутирует с L_α), поэтому $L_\alpha \subset L_i$ и $\alpha|_{H_i}$ — корень алгебры L_i относительно H. Изложенное показывает, что Φ можно представить в виде $\Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$, и соответственно $\mathsf{E} \cong \mathsf{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{E}_t$ (см. п. 11.3). Из предыдущего предложения получаем

Следствие. *Пусть L — полупростая алгебра Ли с максимальной торической подалгеброй H и системой корней Φ. Если $L = L_1 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus L_t$ — ее разложение на простые идеалы, то $H_i = H \cap L_i$ является максимальной торической подалгеброй в L_i, а соответствующая (неприводимая) система корней Φ_i имеет естественное вложение в Φ, причем $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$ является разложением системы Φ на неприводимые компоненты.*

Проблема характеризации полупростой алгебры Ли посредством ее системы корней сводится ввиду этого следствия к случаю простой алгебры (и неприводимой системы корней).

14.2. Теорема об изоморфизме. Вначале выберем достаточно малое множество образующих в L.

Предложение. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее максимальная торическая подалгебра, Φ — система корней в L относительно H. Зафиксируем в Φ базис Δ* (*см. п.* 10.1). *Тогда L порождается* (*как алгебра Ли*) *корневыми подпространствами L_α, $L_{-\alpha}$* $(\alpha \in \Delta)$; *или, эквивалентно, L порождается произвольными ненулевыми корневыми векторами $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$* $(\alpha \in \Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть β — произвольный положительный корень (относительно Δ). Согласно следствию леммы 10.2A корень β можно записать в виде $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$, где $\alpha_i \in \Delta$ и каждая частичная сумма $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ является корнем. Мы знаем также (предложение 8.4(d)), что если γ, δ, $\gamma + \delta \in \Phi$, то $[L_\gamma, L_\delta] = L_{\gamma+\delta}$. С помощью индукции по s легко убедиться, что L_β лежит в подалгебре, порожденной в L всеми подалгебрами L_α $(\alpha \in \Delta)$. Точно так же, если β отрицательно, то L_β лежит в подалгебре, порожденной в L всеми $L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$. Но $L = H + \coprod_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ и $H = \sum_{\alpha \in \Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$, откуда и следует наше утверждение. □

Если $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, $0 \neq y_\alpha \in L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$ и $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, то будем называть $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ или $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ *стандартным множеством образующих* для L. Напомним, что h_α — единственный элемент в $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, на котором α принимает значение 2.

Пусть каждая из пар (L, H) и (L', H') состоит из простой алгебры Ли и ее максимальной торической подалгебры. Мы хотим доказать, что изоморфизм соответствующих (неприводимых) систем корней Φ, Φ' индуцирует изоморфизм между L и L', отображающий H на H'. По определению изоморфизм $\Phi \to \Phi'$ индуцирован изоморфизмом $\mathsf{E} \to \mathsf{E}'$ соответствующих евклидовых пространств, который не обязательно является изометрией. Однако аксиомы систем корней остаются справедливыми при умножении скалярного произведения в E или E' на положительное вещественное число. Поэтому *мы вправе считать, что изоморфизм* $\Phi \to \Phi'$ *порожден изометрией евклидовых пространств*. Теперь заметим, что изоморфизм $\Phi \to \Phi'$ единственным образом продолжается до изоморфизма векторных пространств $\psi\colon H^* \to H'^*$ (поскольку Φ порождает H^*, а Φ' порождает H'^*). В свою очередь ψ индуцирует изоморфизм $\pi\colon H \to H'$, если с помощью формы Киллинга отождествить пространства H, H' с двойственными. Более конкретно, если $\alpha \mapsto \alpha'$ обозначает данное отображение $\Phi \to \Phi'$, то $\pi(t_\alpha) = t'_{\alpha'}$, где t_α и $t'_{\alpha'}$ с помощью формы Киллинга отождествлены с α, α'. Поскольку данный изоморфизм между Φ и Φ' порождается изометрией между соответствующими евклидовыми пространствами, из соотношения $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$ следует также, что $\pi(h_\alpha) = h'_{\alpha'}$.

Так как H, H' — абелевы алгебры Ли, π можно даже рассматривать как изоморфизм алгебр Ли. Хотелось бы продолжить его до изоморфизма $L \to L'$ (который мы также обозначим π). Если такое продолжение существует, то нетрудно понять, что подалгебра L_α д о л ж н а отображаться на L'_α при всех $\alpha \in \Phi$. Тогда возникает вопрос: насколько возможно определить заранее элемент из L'_α, в который отображается данный $x_\alpha \in L_\alpha$? Ясно, что выбор всевозможных $x'_{\alpha'}$ $(\alpha' \in \Phi')$ не вполне произволен: а именно, если x_α, x_β, $x_{\alpha+\beta}$ удовлетворяют условию $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, то должно выполняться равенство $[x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = x'_{\alpha'+\beta'}$. Это приводит к мысли, что нужно сосредоточиться на п р о с т ы х корнях, где выбор можно делать независимо.

Теорема. *Пусть* L, L' *— простые алгебры Ли над* F *с максимальными торическими подалгебрами* H, H' *и системами корней* Φ, Φ' *соответственно. Предположим, что существует изоморфизм между* Φ *и* Φ' (*обозначаемый* $\alpha \mapsto \alpha'$), *который индуцирует изоморфизм* $\pi\colon H \to H'$. *Зафиксируем базис* $\Delta \subset \Phi$, *тогда* $\Delta' = \{\alpha';\, \alpha \in \Delta\}$ *будет базисом в* Φ'. *Для каждого* $\alpha \in \Delta$ *выберем произвольные* (*ненулевые*) $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (*т. е. выберем произвольный изоморфизм алгебр Ли* $\pi_\alpha\colon L_\alpha \to L'_{\alpha'}$). *Тогда существует единственный изоморфизм* $\pi\colon L \to L'$, *продолжающий* $\pi\colon H \to H'$ *и все* π_α $(\alpha \in \Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность изоморфизма π (если он существует) устанавливается немедленно: x_α $(\alpha \in \Delta)$ определяет единственный элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, а ввиду предыдущего предложения алгебра L порождается совокупностью всех x_α, y_α $(\alpha \in \Delta)$.

Идея доказательства существования несложна. Если алгебры L и L' по существу одинаковы, то их прямая сумма $L \oplus L'$ (полупростая алгебра Ли с двумя простыми идеалами L, L') должна включать подалгебру D, которая напоминает «диагональную» подалгебру $\{(x, x);\ x \in L\}$ в $L \oplus L$ и изоморфно отображается на L при проектировании на каждое из прямых слагаемых. Такую подалгебру D в $L \oplus L'$ легко построить: пусть, как и выше, x_α ($\alpha \in \Delta$) определяет единственный элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, и, аналогично, $x'_{\alpha'}$ ($\alpha' \in \Delta'$) определяет $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$. Пусть D порождается элементами $\bar{x}_\alpha = (x_\alpha, x'_{\alpha'})$, $\bar{y}_\alpha = (y_\alpha, y'_{\alpha'})$, $\bar{h}_\alpha = (h_\alpha, h'_{\alpha'})$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Главная трудность состоит в том, чтобы показать, что D — с о б с т в е н н а я подалгебра; могло бы оказаться, что она содержит элементы вида $(x_\alpha, x'_{\alpha'})$ и $(x_\alpha, 2x'_{\alpha'})$, где $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L_{\alpha'}$ для каких-то корней α, α'. Тогда подалгебра D целиком содержала бы L' и L, а следовательно, и $L \oplus L'$ (читатель легко может это проверить). Невозможность такой ситуации трудно усмотреть непосредственно, поэтому изберем окольный путь.

Поскольку идеалы L, L' просты, системы Φ, Φ' неприводимы (предложение 14.1). Поэтому в системах Φ, Φ' имеются однозначно определенные максимальные корни β, β' (относительно Δ, Δ'). Эти корни, разумеется, соответствуют друг другу при данном изоморфизме $\Phi \to \Phi'$ (лемма 10.4A). Возьмем произвольные ненулевые элементы $x \in L_\beta$, $x' \in L'_{\beta'}$ и положим $\bar{x} = (x, x') \in L \oplus L'$. Пусть подпространство M в $L \oplus L'$ натянуто на все элементы вида

$$\operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_1} \operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_2} \ldots \operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_m}(\bar{x}), \tag{$*$}$$

где $\alpha_i \in \Delta$ (повторения допускаются). Очевидно, что элемент $(*)$ лежит в $L_{\beta - \sum \alpha_i} \oplus L'_{\beta' - \sum \alpha'_i}$; поэтому подпространство $M \cap (L_\beta \oplus L'_{\beta'})$ одномерно, и значит, M — с о б с т в е н н о е подпространство в $L \oplus L'$.

Мы утверждаем, что *подалгебра D оставляет подпространство M инвариантным.* Нужно проверить это для ее образующих. Элемент $\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) оставляет M инвариантным по определению. Это верно и для $\operatorname{ad} \bar{h}_\alpha$, как показывает несложная индукция, основанная на том факте, что $[h, y_\alpha]$ и y_α пропорциональны. С другой стороны, в случае простого α мы знаем, что $\operatorname{ad} x_\alpha$ коммутирует с $\operatorname{ad} y_\gamma$ при всех простых γ, кроме случая $\gamma = \alpha$, поскольку $\alpha - \gamma$ не является корнем при $\gamma \neq \alpha$ (лемма 10.1). Поэтому, применяя $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ к $(*)$, мы можем переставить его со всеми $\operatorname{ad} \bar{y}_\gamma$, кроме $\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha$. В последнем случае появляется дополнительное слагаемое (содержащее $\operatorname{ad} \bar{h}_\alpha$). Но мы уже учли слагаемые такого рода. Поскольку $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha(\bar{x}) = 0$ при всех $\alpha \in \Delta$ ($\alpha + \beta \notin \Phi$, так как β — старший корень), в итоге получаем, что M инвариантно относительно $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$.

Теперь очевидно, что D — с о б с т в е н н а я п о д а л г е б р а: иначе подпространство M оказалось бы собственным ненулевым идеалом в $L \oplus L'$, но такими являются лишь идеалы L, L' (теорема 5.2), заведомо не совпадающие с M.

Мы утверждаем, что *проектирования подалгебры D на первое и второе слагаемое в $L \oplus L'$ являются изоморфизмами алгебр Ли.* Из общих соображений эти проектирования являются гомоморфизмами алгебр Ли, и они сюръективны ввиду предыдущего предложения и способа определения подалгебры D. С другой стороны, пусть D имеет ненулевое пересечение с подалгеброй L (т.е. с ядром проектирования на второе слагаемое). Это означает, что D содержит такой элемент $(w, 0)$, что $w \neq 0$; тогда D содержит и все элементы $(\operatorname{ad} z_{\alpha_1} \ldots \operatorname{ad} z_{\alpha_s}(w), 0)$, $\alpha_i \in \Delta$, $z_\alpha = x_\alpha$ или y_α. Эти элементы образуют ненулевой идеал в L (согласно предложению), который должен совпадать с L (так как алгебра L проста). Как следствие, D содержит L. По симметрии D содержит L', а тогда и $L \oplus L'$, что неверно.

Наконец заметим, что изоморфизм $L \to L'$, построенный с помощью D, отображает x_α в $x'_{\alpha'}$ $(\alpha \in \Delta)$ и h_α в $h'_{\alpha'}$, а потому совпадает с π на H. Это и было обещано. □

Теорема легко распространяется на полупростые алгебры (упражнение 1). Отметим, что есть и иной, более результативный подход к доказательству теоремы об изоморфизме, основанный на предыдущем предложении. А именно, зададим L в явном виде о б р а з у ю щ и м и x_α, y_α, h_α и с о о т н о ш е н и я м и, выбранными так, что все их коэффициенты зависят только от системы корней Φ. Тогда любая другая простая алгебра L' с изоморфной системой корней автоматически будет изоморфна алгебре L. Это доказательство будет действительно дано позже (§ 18), после некоторой подготовки; оно не столь элементарно, но имеет то преимущество, что одновременно приводит и к теореме существования для полупростых алгебр Ли.

14.3. Автоморфизмы. Теорема об изоморфизме оказывается весьма полезной при доказательстве существования автоморфизмов полупростой алгебры Ли L (здесь H, Φ таковы, как раньше): каждый автоморфизм системы Φ определяет автоморфизм подалгебры H, который можно продолжить на L. В качестве полезного примера возьмем отображение, меняющее знак каждого корня. Оно заведомо лежит в $\operatorname{Aut} \Phi$ (см. упражнение 12.6), и индуцированное отображение $\sigma\colon H \to H$ переводит h в $-h$. В частности, $\sigma(h_\alpha) = -(h_\alpha)$, а этот элемент согласно предложению 8.3(g) совпадает с $h_{-\alpha}$. Чтобы применить теорему 14.2, потребуем, чтобы элемент x_α отображался в $-y_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. (Отметим, что единственный элемент $z \in L_\alpha$, для которого $[-y_\alpha, z] = h_{-\alpha}$, равен $-x_\alpha$.) Согласно теореме σ продолжается до автоморфизма алгебры L, отображающего x_α в $-y_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. Из предыдущего замечания в скобках тогда вытекает, что y_α отображается в $-x_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. При этом σ имеет порядок 2, поскольку σ^2 оставляет на месте образующие алгебры L. В итоге получаем

Предложение. *Пусть алгебра L такова, как в теореме* 14.2, *но не обязательно проста. Зафиксируем (ненулевой) элемент $x_\alpha \in L_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, и пусть $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ удовлетворяет условию $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Тогда L обладает таким автоморфизмом σ порядка 2, что $\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha$, $\sigma(y_\alpha) = -x_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, $\sigma(h) = -h$ $(h \in H)$.*

Для случая $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ автоморфизм σ уже был рассмотрен в п. 2.3. Группа Вейля $\mathscr{W}$ системы Φ отвечает за большинство ее автоморфизмов (см. п. 12.2). Теорема 14.2 обеспечивает наличие соответствующих автоморфизмов алгебры L, продолжающих действие группы $\mathscr{W}$ на H. Ясно, что продолжение автоморфизма $\sigma \in \mathscr{W}$ на L должно отображать L_β в $L_{\sigma\beta}$. (Разумеется, соответствующие скалярные множители можно задать разными способами.) Мы можем дать и прямое построение такого автоморфизма алгебры L, основанное на рассмотрениях п. 2.3 и не зависящее от теоремы 14.2. Достаточно сделать это для отражения σ_α $(\alpha \in \Phi)$. Поскольку элемент ad x_β $(\beta \in \Phi)$ нильпотентен, корректно определен внутренний автоморфизм $\tau_\alpha = \exp \operatorname{ad} x_\alpha \cdot \exp \operatorname{ad}(-y_\alpha) \cdot \exp \operatorname{ad} x_\alpha$. Здесь, как обычно, $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Как действует τ_α на H? Положим $H = \operatorname{Ker} \alpha \oplus \oplus \mathsf{F} h_\alpha$. Очевидно, что $\tau_\alpha(h) = h$ для всех $h \in \operatorname{Ker} \alpha$, тогда как $\tau_\alpha(h_\alpha) = -h_\alpha$ (см. п. 2.3). Поэтому τ_α и σ_α совпадают на H. Как следствие, τ_α отображает L_β в $L_{\sigma_\alpha\beta}$.

Такой способ представления отражений (а тем самым и произвольных элементов из $\mathscr{W}$) посредством элементов из $\operatorname{Int} L$ имеет один неустранимый недостаток: в общем случае он не делает $\mathscr{W}$ подгруппой в $\operatorname{Int} L$ (см. упражнение 5).

Упражнения

1. Обобщите теорему 14.2 на случай полупростой алгебры L.

2. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, а H, H' — любые две максимальных торических подалгебры. Докажите, что L обладает автоморфизмом, отображающим H на H'.

3. Докажите, что подпространство M в $L \oplus L'$, введенное при доказательстве теоремы 14.2, в действительности совпадает с D при подходящем выборе элементов x и x'.

4. Пусть автоморфизм σ таков, как в предложении 14.3. Всегда ли верно, что $\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha$, если $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, но корень α не обязательно простой?

5. Рассмотрим простую алгебру $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ типа A_2. Покажите, что подгруппа в $\operatorname{Int} L$, порожденная автоморфизмами τ_α из п. 14.3, строго больше, чем группа Вейля (в данном случае $\mathscr{S}_3$). [Рассмотрите $\operatorname{Int} L$ как группу матриц и вычислите в явном виде τ_α^2.]

6. С помощью теоремы 14.2 постройте подгруппу $\Gamma(L)$ в $\operatorname{Aut} L$, изоморфную группе всех автоморфизмов схемы Дынкина системы Φ (см. п. 12.2).

7. Для каждой из классических алгебр (см. п. 1.2) покажите, как выбрать элементы $h_\alpha \in H$, отвечающие базису системы Φ (см. упражнение 8.2).

Замечания

Доказательство теоремы 14.2 взято из книги Winter [1]. Автоморфизм σ из п. 14.3 потребуется в §25 для построения «базиса Шевалле» алгебры L (см. также упражнение 25.7).

§15. *Подалгебры Картана*

В §14 мы доказали, что пара (L, H), состоящая из полупростой алгебры и ее максимальной торической подалгебры, с точностью до изоморфизма определяется системой корней Φ. Однако могло бы оказаться, что другая максимальная торическая подалгебра H' соответствует совершенно иной системе Φ'. (Конечно, во многих случаях это исключается с помощью классификации из §11, поскольку $\dim L = \operatorname{rank} \Phi + \operatorname{Card} \Phi$. Однако типы B_ℓ, C_ℓ в этом отношении неразличимы!)

Покажем, что алгебра L уже определяет систему Φ. Для этого, разумеется, достаточно показать, что все максимальные торические подалгебры в L сопряжены относительно $\operatorname{Aut} L$. Это будет сделано в §16, причем в более общем случае произвольной алгебры Ли L, когда аналогом торической становится *картановская подалгебра*. Этот более широкий контекст на самом деле упрощает доказательство, позволяя использовать специфические свойства разрешимых алгебр Ли. В настоящем параграфе мы подготовим необходимый аппарат; *здесь поле* F *может иметь произвольную характеристику, если не оговорено противное*. Ради технического удобства *мы все же предполагаем алгебраическую замкнутость поля* F, но и это условие можно ослабить: основные результаты требуют лишь, чтобы значение $\operatorname{Card} \mathsf{F}$ было «не слишком мало» по сравнению с $\dim L$.

15.1. Разложение алгебры L относительно $\operatorname{ad} x$. Напомним, что (см. п. 4.2) если $t \in \operatorname{End} V$ (где V — конечномерное векторное пространство), то V является прямой суммой всех подпространств $V_a = \operatorname{Ker}(t - a \cdot 1)^m$, где m — кратность корня a в характеристическом многочлене для t. Каждое V_a инвариантно относительно эндоморфизма t, а ограничение последнего на V_a равно сумме скаляра a и нильпотентного эндоморфизма.

В частности, это относится к действию элемента x в присоединенном представлении алгебры Ли L. Положим $L = \coprod_{a \in \mathsf{F}} L_a(\operatorname{ad} x) = L_0(\operatorname{ad} x) \oplus$ $\oplus L_*(\operatorname{ad} x)$, где $L_*(\operatorname{ad} x)$ обозначает сумму тех $L_a(\operatorname{ad} x)$, для которых $a \neq 0$. Более общо, если K — подалгебра в L, инвариантная относительно $\operatorname{ad} x$, то можно записать $K = K_0(\operatorname{ad} x) \oplus K_*(\operatorname{ad} x)$, даже если $x \notin K$.

Лемма. *Если* $a, b \in \mathsf{F}$, *то* $[L_a(\operatorname{ad} x), L_b(\operatorname{ad} x)] \subset L_{a+b}(\operatorname{ad} x)$. *Как следствие,* $L_0(\operatorname{ad} x)$ *является подалгеброй в* L, *и если* $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$, $a \neq 0$, *то каждый элемент в* $L_a(\operatorname{ad} x)$ *является* ad-*нильпотентным.*

Доказательство. Мы применим частный случай формулы из доказательства леммы 4.2В:

$$(\operatorname{ad} x - a - b)^m [y, z] = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [(\operatorname{ad} x - a)^i(y), (\operatorname{ad} x - b)^{m-i}(z)].$$

Как следствие, если $y \in L_a(\operatorname{ad} x)$, $z \in L_b(\operatorname{ad} x)$, то при достаточно больших m все слагаемые в правой части равны 0. □

15.2. Подалгебры Энгеля. Согласно лемме 15.1 подпространство $L_0(\operatorname{ad} x)$, где $x \in L$, является подалгеброй в L. Следуя Барнсу (D. W. Barnes), назовем ее *подалгеброй Энгеля*. Следующие две леммы сыграют главную роль в нашем исследовании картановских подалгебр.

Лемма А. *Пусть* K — *подалгебра в* L, *а элемент* $z \in K$ *таков, что подалгебра* $L_0(\operatorname{ad} z)$ *минимальна в множестве всех* $L_0(\operatorname{ad} x)$, $x \in K$. *Пусть* $K \subset L_0(\operatorname{ad} z)$. *Тогда* $L_0(\operatorname{ad} z) \subset L_0(\operatorname{ad} x)$ *для всех* $x \in K$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $x \in K$ и рассмотрим семейство $\{\operatorname{ad}(z + cx);\, c \in \mathsf{F}\}$ эндоморфизмов алгебры L. Поскольку подалгебра $K_0 = L_0(\operatorname{ad} z)$ содержит K, она инвариантна относительно этих эндоморфизмов, поэтому они индуцируют эндоморфизмы факторпространства L/K_0. Как следствие, характеристический многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad}(z + cx)$ можно представить как произведение $f(T, c)g(T, c)$ его характеристических многочленов на K_0 и L/K_0 соответственно (с переменным T). Если $r = \dim K_0$, $n = \dim L$, то можно записать $f(T, c) = T^r + f_1(c)T^{r-1} + \ldots + f_r(c)$, $g(T, c) = T^{n-r} + g_1(c)T^{n-r-1} + \ldots + g_{n-r}(c)$. Перейдя на матричный язык, читатель увидит, что коэффициенты $f_i(c)$, $g_i(c)$ являются многочленами от c степени не выше i.

Нулевое собственное значение эндоморфизма $\operatorname{ad} z$ по определению встречается только в подпространстве K_0. Положив $c = 0$, видим, что g_{n-r} не является тождественным нулем на F. Поэтому можно найти сколько угодно различных скаляров, не являющихся корнями для g_{n-r}; пусть $c_1, \ldots, c_{r+1}$ обладают этим свойством. Сказать, что $g_{n-r}(c) \neq 0$, — означает потребовать, чтобы 0 не был собственным значением для $\operatorname{ad}(z + cx)$ на факторпространстве; в этом случае $L_0(\operatorname{ad}(z + cx))$ лежит в подпространстве K_0. Но последнее минимально по условию, и поэтому $L_0(\operatorname{ad} z) = L_0(\operatorname{ad}(z + c_i x))$ при $1 \leqslant i \leqslant r + 1$. Это в свою очередь означает, что $\operatorname{ad}(z + c_i x)$ имеет на $L_0(\operatorname{ad} z)$ лишь нулевое собственное значение, т. е. что $f(T, c_i) = T^r$. Поэтому каждый из многочленов $f_1, \ldots, f_r$ (степени не выше r) имеет $r + 1$ различных нулей $c_1, \ldots, c_{r+1}$. Как следствие, все эти многочлены тождественно равны 0.

Итак, мы показали, что $L_0(\operatorname{ad}(z+cx)) \supset K_0$ при всех $c \in \mathsf{F}$. Поскольку элемент x произволен, теперь можно заменить его на $x-z$ и положить $c=1$, получив в результате $L_0(\operatorname{ad} x) \supset L_0(\operatorname{ad} z)$. □

Лемма B. *Если подалгебра K в L содержит подалгебру Энгеля, то $N_L(K)=K$. В частности, подалгебры Энгеля самонормализуемы.*

Доказательство. Пусть $K \supset L_0(\operatorname{ad} x)$. Тогда $\operatorname{ad} x$ при действии на $N_L(K)/K$ не имеет нулевого собственного значения. С другой стороны, это действие тривиально, поскольку из того, что $x \in K$, следует включение $[N_L(K), x] \subset K$. Вместе это означает, что $K = N_L(K)$. □

15.3. Картановские подалгебры. *Картановская подалгебра* алгебры Ли L — это нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором в L. Недостаток этого определения в том, что оно не гарантирует существования таких подалгебр (и действительно, над конечными полями этот вопрос до сих пор не выяснен полностью). Если алгебра L полупроста и $\operatorname{char} \mathsf{F}=0$, то максимальная торическая подалгебра H абелева (и, значит, нильпотентна). При этом $N_L(H)=H$, так как

$$L = H + \coprod_{\alpha\in\Phi} L_\alpha,$$

где $[H, L_\alpha]=L_\alpha$ при $\alpha\in\Phi$. Таким образом, в этом случае картановские подалгебры действительно существуют (и играют важную роль). Справедлива и более общая

Теорема. *Пусть H — подалгебра алгебры Ли L. Тогда H — картановская подалгебра, если и только если она является минимальной подалгеброй Энгеля (как следствие, картановская подалгебра всегда существует).*

Доказательство. Вначале предположим, что $H = L_0(\operatorname{ad} z)$ является подалгеброй Энгеля в L; она самонормализуема по лемме 15.2B. Если при этом H не включает строго никакую другую подалгебру Энгеля, то выполнены предположения леммы 15.2A при $H=K$, а значит $H = L_0(\operatorname{ad} z) \subset \subset L_0(\operatorname{ad} x)$ для всех $x \in H$. В частности, тогда элемент $\operatorname{ad}_H x$ нильпотентен. По теореме Энгеля алгебра H нильпотентна. Обратно, пусть H — картановская подалгебра в L. Так как она нильпотентна, $H \subset L_0(\operatorname{ad} x)$ при всех $x\in H$. Мы хотим, чтобы при каком-то x выполнялось равенство. Предположим противное и рассмотрим минимально возможную подалгебру $L_0(\operatorname{ad} z)$, $z \in H$. Снова можно применить лемму 15.2A, и мы получим $L_0(\operatorname{ad} x) \supset \supset L_0(\operatorname{ad} z)$ при всех $x \in H$. Это означает, что в индуцированном представлении подалгебры H на ненулевом векторном пространстве $L_0(\operatorname{ad} z)/H$ все ее элементы действуют как нильпотентные эндоморфизмы. Как следствие (см. п. 3.3), H аннулирует некоторый ненулевой вектор $y+H$; другими словами, существует элемент $y \notin H$, для которого $[H, y] \subset H$. Это противоречит предположению об самонормализуемости подалгебры H. □

Следствие. *Пусть алгебра L полупроста* (char $\mathsf{F}=0$). *Тогда картановские подалгебры в L — это в точности ее максимальные торические подалгебры.*

Доказательство. Перед формулировкой теоремы мы отметили, что все максимальные торические подалгебры являются картановскими подалгебрами. Обратно, пусть H — картановская подалгебра. Заметим, что если $x=x_s+x_n$ — разложение Жордана элемента $x\in L$, то $L_0(\operatorname{ad} x_s)\subset L_0(\operatorname{ad} x)$: если элемент y аннулируется некоторой степенью оператора $\operatorname{ad} x_s$, то он аннулируется и степенью оператора $\operatorname{ad} x$, поскольку $\operatorname{ad} x_n$ нильпотентен и коммутирует со всеми $\operatorname{ad} x_s$. Заметим также, что если элемент $x\in L$ полупрост, то оператор $\operatorname{ad} x$ диагонализуем и $L_0(\operatorname{ad} x)=C_L(x)$. Согласно теореме картановская подалгебра H является минимальной подалгеброй Энгеля и имеет вид $L_0(\operatorname{ad} x)$. Ввиду ее минимальности и предыдущих замечаний $H=L_0(\operatorname{ad} x_s)=C_L(x_s)$. Но очевидно, что $C_L(x_s)$ содержит максимальную торическую подалгебру. Мы уже знаем, что она является картановской подалгеброй, а тогда, в свою очередь, и минимальной подалгеброй Энгеля. Как следствие, H является максимальной торической подалгеброй. □

В качестве следствия из доказательства отметим, что *максимальная торическая подалгебра в полупростой алгебре Ли* (char $\mathsf{F}=0$) *имеет вид $C_L(s)$ для некоторого полупростого элемента s* (см. упражнение 8.7). Такой элемент s называется *регулярным полупростым*.

15.4. Функториальные свойства.

Лемма А. *Пусть $\varphi\colon L\to L'$ — эпиморфизм алгебр Ли. Тогда если H — картановская подалгебра в L, то $\varphi(H)$ — картановская подалгебра в L'.*

Доказательство. Ясно, что подалгебра $\varphi(H)$ нильпотентна. Положим $A=\operatorname{Ker}\varphi$ и отождествим L' с L/A. Если $x+A$ лежит в нормализаторе подалгебры $H+A$, то $x\in N_L(H+A)$. Но $H+A$ содержит картановскую подалгебру (а тем самым, по теореме 15.3, и минимальную подалгебру Энгеля), поэтому $H+A$ самонормализуема (лемма 15.2B). Следовательно, $x\in H+A$, т. е. подалгебра $\varphi(H)$ самонормализуема. □

Лемма В. *Пусть $\varphi\colon L\to L'$ — эпиморфизм алгебр Ли, H' — картановская подалгебра в L', $K=\varphi^{-1}(H')$. Тогда любая картановская подалгебра H в K является картановской подалгеброй и в L.*

Доказательство. По предположению подалгебра H нильпотентна. Согласно предыдущей лемме $\varphi(H)$ является картановской подалгеброй в $\varphi(K)=H'$, поэтому $\varphi(H)=H'$ (поскольку картановская подалгебра является минимальной подалгеброй Энгеля). Если элемент $x\in L$ лежит в нормализаторе подалгебры H, то $\varphi(x)$ лежит в нормализаторе подалгебры $\varphi(H)$, а значит $\varphi(x)\in\varphi(H)$ и $x\in H+\operatorname{Ker}\varphi$. Но $\operatorname{Ker}\varphi\subset K$ (по построению), поэтому $x\in H+K\subset K$. Тогда $x\in N_K(H)=H$, поскольку H — картановская подалгебра в K. □

Упражнения

1. Докажите, что полупростой элемент в $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ регулярен, если и только если все его собственные значения различны (т. е. его минимальный многочлен совпадает с характеристическим).

2. Пусть алгебра L полупроста ($\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$). Докажите с помощью упражнения 8.7, что все разрешимые подалгебры Энгеля в L картановские.

3. Пусть алгебра L полупроста ($\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$) и элемент $x \in L$ полупрост. Докажите, что элемент x регулярен, если и только если x лежит ровно в одной картановской подалгебре.

4. Пусть H — картановская подалгебра в алгебре Ли L. Докажите, что H — максимальная нильпотентная подалгебра в L, т. е. она не содержится ни в какой другой нильпотентной подалгебре. Покажите, что обратное неверно.

5. Покажите, как провести доказательство леммы 15.2A, если о поле F известно лишь, что его мощность превышает $\dim L$.

6. Пусть алгебра L и ее подалгебра L' полупросты ($\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$). Докажите, что каждая картановская подалгебра алгебры L' лежит в некоторой картановской подалгебре алгебры L. [См. упражнение 6.9.]

Замечания

Изложенный подход к картановским подалгебрам восходит главным образом к работе Barnes [1], где введено понятие подалгебры Энгеля. См. также Winter [1].

§ 16. *Теоремы о сопряженности*

В этом параграфе F *предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики* 0. Мы намереваемся доказать, что в произвольной алгебре Ли L над полем F все картановские подалгебры сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} L$ (порожденной всеми отображениями $\exp \operatorname{ad} x$, где элемент $x \in L$ является ad-нильпотентным). В случае полупростой алгебры L это означает, что все максимальные торические подалгебры сопряжены; как следствие, L однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) своей системой корней относительно любой максимальной торической подалгебры[1]. В качестве вспомогательного шага мы докажем также, что все максимальные разрешимые подалгебры в L сопряжены.

16.1. Группа $\mathscr{E}(L)$. Пусть L — алгебра Ли. Назовем элемент $x \in L$ *строго* ad-*нильпотентным*, если $x \in L_a(\operatorname{ad} y)$, где $y \in L$ и a — ненулевое

[1] Вероятно, автор хотел сказать, что L однозначно определяется системой корней. (То, что L определяет систему корней, было доказано в п. 14.2.) (*Прим. ред.*)

собственное значение отображения ad y. Этот термин оправдан тем, что такой элемент x должен быть ad-нильпотентен (см. п. 15.1). Пусть $\mathcal{N}(L)$ обозначает множество всех строго ad-нильпотентных элементов в L, а $\mathcal{E}(L)$ — подгруппу в Int L, порожденную всеми операторами exp ad x, $x \in \mathcal{N}(L)$. (Отметим, что множество $\mathcal{N}(L)$ инвариантно относительно Aut L; поэтому подгруппа $\mathcal{E}(L)$ *нормальна* в Aut L.)

Нам удобнее работать с $\mathcal{E}(L)$, а не со всей группой Int L, поскольку подгруппа $\mathcal{E}(L)$ имеет более хорошие функторные свойства. (На самом деле для полупростой алгебры L в итоге окажется, что $\mathcal{E}(L) = \text{Int } L$; см. п. 16.5). Например, если K — подалгебра в L, то заведомо $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(L)$. Это позволяет определить подгруппу $\mathcal{E}(L;\, K)$ в $\mathcal{E}(L)$, порожденную всеми операторами exp $\text{ad}_L\, x$, $x \in \mathcal{N}(K)$. Тогда $\mathcal{E}(K)$ получается просто как ограничение $\mathcal{E}(L;\, K)$ на K. Напротив, между Int K и Int L такой прямой связи нет, поскольку для элемента $x \in K$ с нильпотентным оператором $\text{ad}_K\, x$ мы не можем ничего сказать об $\text{ad}_L\, x$.

Ясно, что если $\varphi\colon L \to L'$ — эпиморфизм и $y \in L$, то $\varphi(L_a(\text{ad } y)) = L'_a(\text{ad } \varphi(y))$. Отсюда $\varphi(\mathcal{N}(L)) = \mathcal{N}(L')$.

Лемма. *Пусть дан эпиморфизм* $\varphi\colon L \to L'$. *Если* $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$, *то существует оператор* $\sigma \in \mathcal{E}(L)$, *для которого следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & L' \arrow[d, "\sigma'"] \\ L \arrow[r, "\varphi"'] & L'. \end{tikzcd}$$

Доказательство. Достаточно доказать это в случае $\sigma' = \exp \text{ad}_{L'}\, x'$, $x' \in \mathcal{N}(L')$. Ввиду предыдущего замечания $x' = \varphi(x)$ хотя бы для одного $x \in \mathcal{N}(L)$. Для произвольного $z \in L$ имеем

$$(\varphi \circ \exp \text{ad}_L\, x)(z) = \varphi\Big(z + [x,\, z] + \frac{1}{2}[x,\, [x,\, z]] + \ldots\Big) =$$
$$= \varphi(z) + \Big(x',\, \varphi(z) + \frac{1}{2}[x',\, [x',\, \varphi(z)]] + \ldots\Big) = (\exp \text{ad}_{L'}\, x' \circ \varphi)(z).$$

Другими словами, наша диаграмма коммутативна. □

16.2. Сопряженность картановских подалгебр (разрешимый случай).

Теорема. *Пусть алгебра* L *разрешима и* $\mathcal{E}(L)$ *— группа, определенная в п.* 16.1. *Тогда любые две картановские подалгебры* H_1, H_2 *в* L *сопряжены относительно* $\mathcal{E}(L)$.

Доказательство. Применим индукцию по dim L. Если dim $L = 1$ (или алгебра L нильпотентна), то утверждение тривиально. Пусть алгебра L не нильпотентна. Так как она разрешима, в ней имеются ненулевые абелевы идеалы (например, последний ненулевой член производного ряда); пусть A — один из них, с наименьшей возможной размерностью. Положим $L' = L/A$, а каноническое отображение $\varphi\colon L \to L/A$ обозначим $x \mapsto x'$. Согласно лемме 15.4А подалгебры H'_1 и H'_2 будут картановскими подалгебрами в (разрешимой) алгебре L'. По предположению индукции существует оператор $\sigma' \in \mathscr{E}(L')$, отображающий H'_1 на H'_2. Тогда диаграмма из леммы 16.1 будет коммутативна при некотором $\sigma \in \mathscr{E}(L)$. Это значит, что σ отображает $K_1 = \varphi^{-1}(H'_1)$ на $K_2 = \varphi^{-1}(H'_2)$. Но тогда H_2 и $\sigma(H_1)$ являются картановскими подалгебрами в K_2. Если K_2 не совпадает с L, то в силу предположения индукции найдется такой оператор $\tau' \in \mathscr{E}'(K_2)$, что $\tau'\sigma(H_1) = H_2$. Но $\mathscr{E}(K_2)$ состоит из ограничений элементов из $\mathscr{E}(L;\, K_2) \subset \mathscr{E}(L)$ на K_2; поэтому если $\tau \in \mathscr{E}(L)$ при ограничении на K_2 дает τ', то $\tau\sigma(H_1) = H_2$, что и требуется.

Если же $L = K_2 = \sigma(K_1)$, то в действительности $K_1 = K_2$ и $L = H_2 + A = H_1 + A$. В этом случае мы должны явно построить автоморфизм алгебры L (что требуется только в этом месте доказательства!). Ввиду теоремы 15.3 картановская подалгебра H_2 имеет вид $L_0(\operatorname{ad} x)$ для подходящего элемента $x \in L$. Поскольку идеал A инвариантен относительно $\operatorname{ad} x$, то $A = A_0(\operatorname{ad} x) \oplus A_*(\operatorname{ad} x)$ (см. п. 15.1), причем каждое слагаемое инвариантно относительно действия $L = H_2 + A$. Ввиду минимальности идеала A либо $A = A_0(\operatorname{ad} x)$, либо $A = A_*(\operatorname{ad} x)$. В первом случае мы получили бы $A \subset H_2$, $L = H_2$, что невозможно, поскольку алгебра L не нильпотентна. Поэтому $A = A_*(\operatorname{ad} x)$, откуда очевидным образом следует, что $A = L_*(\operatorname{ad} x)$.

Поскольку $L = H_1 + A$, можно записать $x = y + z$, где $y \in H_1$, $z \in L_*(\operatorname{ad} x)$. В свою очередь положим $z = [x,\, z']$, $z' \in L_*(\operatorname{ad} x)$, используя обратимость оператора $\operatorname{ad} x$ на $L_*(\operatorname{ad} x)$. Так как идеал A абелев, $(\operatorname{ad} z')^2 = 0$, поэтому $\exp \operatorname{ad} z' = 1_L + \operatorname{ad} z'$; применительно к x это приводит к равенству $x - z = y$. Поэтому подалгебра $H = L_0(\operatorname{ad} y)$ также должна быть картановской в L. Поскольку $y \in H_1$, мы заключаем, что $H \supset H_1$, а значит $H = H_1$ (так как это минимальные подалгебры Энгеля). Поэтому подалгебра H_1 сопряжена с H_2 посредством $\exp \operatorname{ad} z'$.

Остается заметить, что $\exp \operatorname{ad} z'$ не лежит в $\mathscr{E}(L)$: действительно, z' можно записать как сумму строго ad-нильпотентных элементов z_i из $A = L_*(\operatorname{ad} x)$, но последние «коммутируют» (идеал A абелев), поэтому $\exp \operatorname{ad} z' = \prod\limits_i \exp \operatorname{ad} z_i \in \mathscr{E}(L)$. □

16.3. Борелевские подалгебры. Для перехода от разрешимого случая к общему мы используем *борелевские подалгебры* алгебры Ли L, т. е. — по определению — ее максимальные разрешимые подалгебры. Если мы сумеем показать, что любые две борелевские подалгебры в L сопряжены относительно $\mathscr{E}(L)$, то ввиду теоремы 16.2 будут сопряжены и все картановские подалгебры в L.

Лемма А. *Пусть B — борелевская подалгебра в L. Тогда $B = N_L(B)$.*

Доказательство. Пусть $x \in N_L(B)$. Тогда $B + \mathsf{F}x$ — подалгебра в L, причем разрешимая, так как $[B+\mathsf{F}x, B+\mathsf{F}x] \subset B$. Поскольку подалгебра B максимальна, $x \in B$. $\square$

Лемма В. *Если* $\operatorname{Rad} L \neq L$, *то борелевские подалгебры в L и в полупростой алгебре Ли $L/\operatorname{Rad} L$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Rad} L$ — разрешимый идеал в L, мы заключаем, что $B + \operatorname{Rad} L$ — разрешимая подалгебра для любой борелевской подалгебры B, и поэтому $\operatorname{Rad} L \subset B$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. $\square$

Из леммы В вытекает, что существен лишь случай полупростой алгебры L. В этой ситуации пусть H — картановская подалгебра, Φ — система корней в L относительно H. Фиксируем базис Δ, а вместе с ним и множество положительных корней. Положим $N(\Delta) = \coprod_{\alpha \succ 0} L_\alpha$, $B(\Delta) = H + N(\Delta)$. Мы знаем, что тогда $B(\Delta)$ будет подалгеброй в L с производной алгеброй $N(\Delta)$. При этом алгебра $N(\Delta)$ нильпотентна: если $x \in L_\alpha$ ($\alpha \succ 0$), то для корней положительной высоты (относительно Δ) применение $\operatorname{ad} x$ к корневым векторам увеличивает высоту не менее чем на единицу; это заставляет убывающий центральный ряд сходиться к нулю. Как следствие, подалгебра $B(\Delta)$ разрешима. На самом деле мы утверждаем, что $B(\Delta)$ — борелевская подалгебра: действительно, пусть K — произвольная подалгебра в L, строго включающая $B(\Delta)$. Тогда подалгебра K, будучи инвариантной относительно $\operatorname{ad} H$, должна включать L_α при некотором $\alpha \prec 0$. Но тогда K включает и простую алгебру S_α; как следствие, K не может быть разрешимой.

Лемма С. *Пусть алгебра L полупроста, с картановской подалгеброй H и системой корней Φ. Для каждого базиса $\Delta \subset \Phi$ подалгебра $B(\Delta)$ является борелевской в L* (и называется *стандартной* относительно H). *Все такие подалгебры сопряжены относительно $\mathscr{E}(L)$.*

Доказательство. Осталось доказать лишь второе утверждение. Напомним (см. п. 14.3), что отражение σ_α, действующее на H, можно продолжить до внутреннего автоморфизма τ_α на L, который (по построению) принадлежит $\mathscr{E}(L)$. Ясно, что этот автоморфизм отображает $B(\Delta)$ в $B(\sigma_\alpha\Delta)$. Учитывая, что группа Вейля порождается отражениями и действует на базисах транзитивно, мы видим, что $\mathscr{E}(L)$ транзитивно действует на борелевских подалгебрах, стандартных относительно H. $\square$

16.4. Сопряженность борелевских подалгебр.

Теорема. *Все борелевские подалгебры произвольной алгебры Ли L сопряжены относительно $\mathscr{E}(L)$.*

Следствие. *Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли L сопряжены относительно $\mathscr{E}(L)$.*

Доказательство следствия. Пусть H, H' — две картановские подалгебры в L. Каждая из них, будучи нильпотентной (а потому и разрешимой), лежит хотя бы в одной борелевской подалгебре, скажем в B и B' соответственно. По теореме существует такой оператор $\sigma \in \mathscr{E}(L)$, что $\sigma(B) = B'$. Так как $\sigma(H)$ и H' являются картановскими подалгебрами в разрешимой алгебре B', по теореме 16.2 существует оператор $\tau' \in \mathscr{E}(B')$, для которого $\tau'\sigma(H) = H'$. Но τ' является ограничением на B' некоторого оператора $\tau \in \mathscr{E}(L;\, B') \subset \mathscr{E}(L)$ (см. п. 16.1), так что в итоге $\tau\sigma(H) = H'$, $\tau\sigma \in \mathscr{E}(L)$. □

Доказательство теоремы. Проведем индукцию по $\dim L$. Случай $\dim L = 1$ тривиален. Ввиду леммы 16.1 и леммы 16.3В с учетом предположения индукции *можно считать, что алгебра L полупроста*. Фиксируем некоторую стандартную борелевскую подалгебру B (относительно некоторой картановской подалгебры). Достаточно показать, что любая другая борелевская подалгебра B' сопряжена B относительно $\mathscr{E}(L)$. Если $B \cap B' = B$, то доказывать нечего (так как тогда $B' = B$ по свойству максимальности). Поэтому, используя спуск по $\dim(B \cap B')$, будем считать, что если пересечение борелевской подалгебры с B (или с подалгеброй, сопряженной B) имеет бо́льшую размерность, то эта борелевская подалгебра сопряжена B.

1. Вначале предположим, что $B \cap B' \neq 0$. Возможны два случая.

Случай (i): *множество N' нильпотентных элементов в $B \cap B'$ состоит не только из нуля*. Поскольку алгебра B стандартна, N' является подпространством и производная алгебра для $B \cap B'$ состоит из нильпотентных элементов. В свою очередь, отсюда следует, что N' является идеалом в $B \cap B'$. Разумеется, N' не является идеалом в L, поэтому его нормализатор K — собственная подалгебра в L.

Теперь покажем, что $B \cap B'$ строго содержится и в $B \cap K$, и в $B' \cap K$. В самом деле, рассмотрим действие множества N' на $B/(B \cap B')$, индуцированное отображением ad. Каждый элемент $x \in N'$ действует на этом векторном пространстве нильпотентно, и по теореме 3.3 найдется ненулевой смежный класс $y + (B \cap B')$, который они все аннулируют, т. е. такой, что $[x,\, y] \in B \cap B'$, $y \notin B \cap B'$. Но элемент $[x,\, y]$ лежит и в $[B,\, B]$, поэтому он нильпотентен; как следствие, $[x,\, y] \in N'$ и $y \in N_B(N') = B \cap K$, тогда как $y \notin B \cap B'$. Аналогично $B \cap B'$ строго содержится в $B' \cap K$.

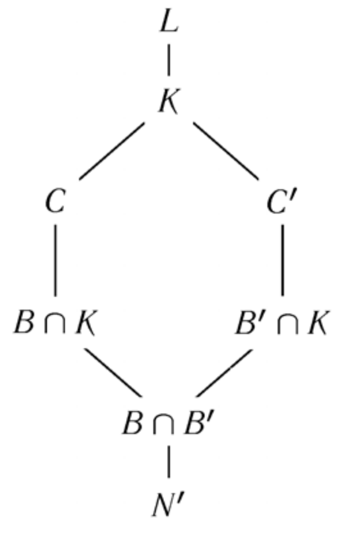


Рис. 5

С другой стороны, $B \cap K$ и $B' \cap K$ — разрешимые подалгебры в K. Пусть соответственно C, C' — содержащие их борелевские подалгебры в K (рис. 5). Поскольку $K \neq L$, ввиду предположения индукции существует такой автоморфизм $\sigma \in \mathscr{E}(L; K) \subset \mathscr{E}(L)$, что $\sigma(C') = C$. Так как $B \cap B'$ — собственная (ненулевая) подалгебра как в C, так и в C', второе индуктивное предположение обеспечивает существование такого $\tau \in \mathscr{E}(L)$, что $\tau\sigma(C') \subset \subset B$ (т. е. τ отображает на B борелевскую подалгебру из L, содержащую $\sigma(C') = C$). Наконец, $B \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(C') \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(B' \cap K) \supsetneq \tau\sigma(B \cap B')$, так что размерность алгебры $B \cap B'$ меньше, чем размерность алгебры $B \cap \cap \tau\sigma(B')$. Снова применяя второе индуктивное предположение, мы видим, что алгебра B сопряжена $\tau\sigma(B')$ относительно $\mathscr{E}(L)$, и случай (i) разобран.

Случай (ii): *в алгебре $B \cap B'$ нет ненулевых нильпотентных элементов*. Заметим, что любая борелевская подалгебра в L содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов ввиду предложения 4.2(c) и леммы 16.3A. Это сразу показывает, что $B \cap B' = T$ является торической подалгеброй. Теперь используем тот факт, что B — стандартная борелевская подалгебра, скажем $B = B(\Delta)$, $N = N(\Delta)$, $B = H + N$. Поскольку $[B, B] = N$ и $T \cap N = 0$, мы получаем, что $N_B(T) = C_B(T)$. Пусть C — некоторая картановская подалгебра в $C_B(T)$; тогда, в частности, C нильпотентна и $T \subset N_{C_B(T)}(C) = C$. Если $n \in N_B(C)$, $t \in T \subset C$, то $(\operatorname{ad} t)^k n = 0$ для некоторого k, поскольку подалгебра C нильпотентна. Но эндоморфизм $\operatorname{ad} t$ полупрост, поэтому $k = 1$ и $n \in C_B(T)$. Таким образом, $N_B(C) = N_{C_B(T)}(C) = C$. Будучи нильпотентной и самонормализуемой в B, подалгебра C является картановской (и содержит T). Благодаря теореме 16.2 мы знаем, что C — максимальная торическая подалгебра в L, сопряженная H относительно $\mathscr{E}(B)$ (а тем самым и относительно $\mathscr{E}(L)$). Поэтому без потери общности *можно теперь считать, что $T \subset H$*.

Предположим, что $T = H$. Ясно, что $B' \supsetneq H$, поэтому B' содержит хотя бы одно подпространство L_α, где $\alpha \prec 0$ относительно Δ. При отображении τ_α (см. лемму 16.3C) B' переходит в борелевскую подалгебру B'', пересечение которой с B содержит $H + L_{-\alpha}$; поэтому из второго индуктивного предположения вытекает, что подалгебра B'' сопряжена B, что нам и требуется.

Пусть теперь T строго содержится в H. Либо B' содержится в $C_L(T)$, либо нет. В первом случае можно применить первое индуктивное предположение, поскольку $\dim C_L(T) < \dim L$ ($T \neq 0$ и $Z(L) = 0$). А именно, поскольку $H \subset C_L(T)$, в $C_L(T)$ существует борелевская подалгебра B'', содержащая H. Ввиду предположения индукции найдется эндоморфизм $\sigma \in \mathscr{E}(L; C_L(T)) \subset \mathscr{E}(L)$, отображающий B' на B''. Как следствие, B'' является борелевской подалгеброй в L, включающей H, и ввиду второго индуктивного предположения сопряжена B относительно $\mathscr{E}(L)$.

Осталось рассмотреть случай $B' \not\subset C_L(T)$. Тогда $\operatorname{ad} T$ имеет общий собственный вектор $x \in B'$ и существует элемент $t \in T$, для которого $[t, x] = ax$, где число a рационально и положительно. Положим $S = H + \coprod L_\alpha$, где $\alpha \in \Phi$ пробегает те корни, для которых $\alpha(t)$ рационально и положительно. Ясно, что S является подалгеброй в L (и $x \in S$). Кроме того, легко видеть, что подалгебра S разрешима (см. доказательство леммы 16.3C). Пусть B'' — борелевская подалгебра в L, которая включает S. Поскольку $B''\cap B'\supset T+\mathsf{F}x\supsetneq T=B'\cap B$, мы получаем, что $\dim(B''\cap B')>\dim(B\cap B')$. Аналогично $B''\cap B\supset H\supsetneq T$, поэтому $\dim(B''\cap B)>\dim(B'\cap B)$. Применив к последнему неравенству второе индуктивное предположение, мы видим, что подалгебра B'' сопряжена B. (В частности, очевидно, что подалгебра B'' стандартна относительно картановской подалгебры, сопряженной H.) Теперь можно применить второе индуктивное предположение к первому неравенству (поскольку подалгебра B'' стандартна), и мы получаем, что подалгебра B'' сопряжена B'. Тогда и подалгебра B сопряжена B'.

2. Мы разобрали все случаи, когда $B\cap B'\neq 0$. Теперь посмотрим, что случится, если $B\cap B'=0$. Тогда $\dim L\geqslant \dim B+\dim B'$; так как подалгебра B стандартна, как мы знаем, $\dim B>(1/2)\dim L$, так что подалгебра B' должна быть «достаточно малой». Более конкретно, пусть T — максимальная торическая подалгебра в B'. Если $T=0$, то подалгебра B' состоит из нильпотентных элементов; следовательно, B' нильпотентна (теорема Энгеля), а также самонормализуема (лемма 16.3A), т. е. B' — картановская подалгебра. Но это невозможно, так как мы знаем из следствия 15.3, что все картановские подалгебры в L являются торическими. Поэтому $T\neq 0$. Если H_0 — максимальная торическая подалгебра в L, содержащая T, то B' имеет ненулевое пересечение с любой стандартной борелевской подалгеброй B'' относительно H_0. Следовательно, согласно первой части доказательства подалгебра B' сопряжена B'' и $\dim B'=\dim B''>(1/2)\dim L$, вопреки «малости» подалгебры B'. □

Следствие 16.4 позволяет приписать произвольной алгебре Ли L над F численный инвариант $\operatorname{rank} L$ (называемый *рангом*), а именно, размерность картановской подалгебры в L. Если алгебра L полупроста, то $\operatorname{rank} L$ совпадает с $\operatorname{rank}\Phi$, где Φ — система корней в L относительно любой максимальной торической (т. е. картановской) подалгебры.

Полезно отметить одно побочное следствие теоремы о сопряженности борелевских подалгебр. Пусть алгебра L полупроста и имеет картановскую подалгебру H и систему корней Φ. Мы утверждаем, что *любая борелевская подалгебра B в L, содержащая H, стандартна*. Действительно, пусть $\sigma(B(\Delta))=B$, где Δ — некоторый базис в Φ, $\sigma\in\mathscr{E}(L)$. Поскольку H и $\sigma(H)$ — картановские подалгебры в B, они сопряжены относительно $\mathscr{E}(L;B)\subset\mathscr{E}(L)$ (теорема 16.2) и можно считать, что $\sigma(H)=H$. Тогда ясно, что если $\alpha\succ 0$, то $\sigma\alpha$ является корнем и $\sigma(L_\alpha)=L_{\sigma\alpha}$. При этом перестановка корней под действием σ сохраняет суммы, так что $\sigma(\Delta)=\Delta'$ снова является базисом в Φ и подалгебра $B=B(\Delta')$ стандартна.

16.5. Группы автоморфизмов. Пусть алгебра L полупроста, H — ее картановская подалгебра с системой корней Φ и фиксированным базисом Δ. Если τ — автоморфизм алгебры L, а $B=B(\Delta)$, то, разумеется, $\tau(B)$

также является борелевской подалгеброй в L, поэтому при некотором автоморфизме $\sigma_1 \in \mathscr{E}(L)$ она возвращается в B (теорема 16.4). Поскольку H и $\sigma_1\tau(H)$ — картановские подалгебры в L (следовательно, и в B), в силу теоремы 16.2 найдется автоморфизм $\sigma_2 \in \mathscr{E}(L;\, B) \subset \mathscr{E}(L)$, отображающий $\sigma_1\tau(H)$ в H и сохраняющий B. Так как автоморфизм $\sigma_2\sigma_1\tau$ сохраняет и H, и B, он индуцирует автоморфизм системы Φ, сохраняющий Δ. Все такие автоморфизмы известны нам из п. 12.2: нетождественные возникают из нетождественных автоморфизмов схемы Дынкина, которые существуют (для неприводимой системы Φ) лишь в случаях A_ℓ $(\ell > 1)$, D_ℓ, E_6. Пусть ρ — соответствующий автоморфизм алгебры L (см. упражнение 14.6). Поскольку ρ не совсем единствен, можно подобрать скаляры c_α так, чтобы автоморфизм $\rho\sigma_2\sigma_1\tau$ отображал x_α в $c_\alpha x_\alpha$ $(\alpha \succ 0)$, y_α в $c_\alpha^{-1} y_\alpha$ и как следствие h_α в h_α (а тогда и все элементы h в себя)[1]. В итоге получаем, что τ отличается от элемента группы $\mathscr{E}(L) \cdot \Gamma(L)$ (где $\Gamma(L)$ — группа *схемных автоморфизмов* алгебры L) лишь на *диагональный автоморфизм*, т. е. тождественный на H и скалярный на каждом корневом подпространстве L_α.

Можно доказать (см. Jacobson [1], с. 278), что диагональный автоморфизм всегда внутренний; его фактическое построение показывает, что он лежит в $\mathscr{E}(L)$. При этом произведение $\operatorname{Aut} L = \operatorname{Int}(L) \cdot \Gamma(L)$ оказывается полупрямым (Jacobson [1], гл. IX, упражнения), и как следствие, $\mathscr{E}(L) = \operatorname{Int}(L)$. Кроме того, в книге Джекобсона читатель найдет подробное описание групп автоморфизмов различных простых алгебр Ли.

Упражнения

1. Докажите, что группа $\mathscr{E}(L)$ тривиальна, если и только если алгебра L нильпотентна.

2. Пусть алгебра L полупроста, H — ее картановская подалгебра, Δ — базис системы корней Φ. Докажите, что любая подалгебра в L, состоящая из нильпотентных элементов и максимальная с этим свойством, сопряжена относительно $\mathscr{E}(L)$ подалгебре $N(\Delta)$, производной алгебре для $B(\Delta)$.

3. Пусть Ψ — *замкнутое* множество корней (в том смысле, что из того, что $\alpha, \beta \in \Psi$, $\alpha + \beta \in \Phi$ следует, что $\alpha + \beta \in \Psi$), причем $\Psi \cap (-\Psi) = \varnothing$. Докажите, что Ψ содержится в множестве положительных корней относительно некоторого базиса в Φ. [Используйте упражнение 2.] (Это упражнение относится к теории систем корней, но проще выполняется с помощью алгебр Ли.)

4. Покажите, как можно упростить доказательство теоремы 16.4 в случае $L = \mathfrak{sl}(2,\, \mathsf{F})$.

---

[1] Поскольку числа c_α не указаны, эти условия выполнены при любом выборе ρ. (*Прим. ред.*)

5. Пусть алгебра L полупроста. Если ее полупростой элемент регулярен, то он принадлежит лишь конечному множеству борелевских подалгебр. (Обратное также верно, но доказывается труднее и требует определения регулярности не только для полупростых элементов из L.)

6. Пусть алгебра L полупроста, $L = H + \coprod L_\alpha$. Подалгебра P в L называется *параболической*, если она содержит некоторую борелевскую подалгебру. (В этом случае подалгебра P самонормализуема в силу леммы 15.2B.) Фиксируем базис $\Delta \subset \Phi$ и положим $B = B(\Delta)$. Для каждого подмножества $\Delta' \subset \Delta$ пусть $P(\Delta')$ — подалгебра в L, порожденная всеми L_α ($\alpha \in \Delta$ или $-\alpha \in \Delta$) вместе с H.

(a) Докажите, что $P(\Delta')$ — параболическая подалгебра в L (которая называется *стандартной* относительно Δ).

(b) Проверьте, что каждая параболическая подалгебра в L, содержащая $B(\Delta)$, имеет вид $P(\Delta')$ для некоторого $\Delta' \subset \Delta$. [Используйте следствие из леммы 10.2A и предложение 8.4(d).]

(c) Докажите, что каждая параболическая подалгебра в L сопряжена относительно $\mathscr{E}(L)$ одной из подалгебр $P(\Delta')$.

7. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом (x, h, y). При $c \in \mathsf{F}$ пусть $x(c) = \exp \operatorname{ad}(cx)$, $y(c) = \exp \operatorname{ad}(cy)$. При $c \neq 0$ определим внутренние автоморфизмы $w(c) = x(c)y(-c^{-1})x(c)$, $h(c) = w(c)w(1)^{-1}$ $(= w(c)w(-1))$. Вычислите матрицы автоморфизмов $w(c)$, $h(c)$ в указанном базисе и покажите, что все диагональные автоморфизмы (см. п. 16.5) в L внутренние. Отсюда получите, что $\operatorname{Aut} L = \operatorname{Int} L = \mathscr{E}(L)$.

8. Пусть алгебра L полупроста. Докажите, что пересечение двух борелевских подалгебр B, B' в L всегда содержит картановскую подалгебру. Доказательство достаточно трудное; вот одна из возможных схем.

(a) Пусть N, N' — идеалы нильпотентных элементов в B, B' соответственно. Тогда $N = B^\perp$, $N' = B'^\perp$, где $\perp$ обозначает ортогональное дополнение относительно формы Киллинга на L.

(b) Следовательно, $B = N^\perp = (N + (N \cap N'))^\perp = (N + (B \cap N'))^\perp = N^\perp \cap \cap (B^\perp + N'^\perp) = B \cap (N + B') = N + (B \cap B')$.

(c) Заметим, что алгебра $A = B \cap B'$ содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов.

(d) Пусть T — максимальная торическая подалгебра в A. Найдем T-инвариантное дополнение A' к $A \cap N$ в A. Тогда A' состоит из полупростых элементов. Так как алгебра B/N абелева, $[T, A'] = 0$ и как следствие, $A' = T$.

(e) Соединив (b) и (d), получаем $B = N + T$; значит, T — максимальная торическая подалгебра в L.]

Замечания

Доказательство теоремы 16.4 содержится в книге Winter [1] (и отчасти следует идее Дж. Д. Мостова); см. также Barnes [1]. Большинство прежних доказательств использовало аналитические методы (для $\mathsf{F}=\mathbb{C}$) или же сведения из алгебраической геометрии: см. Bourbaki [3], гл. VII, Chevalley [2], Jacobson [1], Séminaire «Sophus Lie» [1], Serre [2]. Подробное рассмотрение групп автоморфизмов можно найти в Jacobson [1], Seligman [1].

Глава V

Теоремы существования

§ 17. *Универсальные обертывающие алгебры*

В этом параграфе F *может быть произвольным полем* (*если не оговорено противное*). Мы сопоставим каждой алгебре Ли L над F ассоциативную алгебру с единицей (вообще говоря, бесконечномерную), которую L порождает настолько «свободно», насколько возможно при сохранении соотношений коммутирования в L. Эта *универсальная обертывающая алгебра* служит основным орудием теории представлений. Хотя ее можно было ввести уже в первой главе, мы это до сих пор откладывали, избегая неблагодарной задачи: доказать теорему Пуанкаре—Биркгофа—Витта. Но сейчас это стало действительно необходимым. Читателю рекомендуется временно забыть всю специальную теорию полупростых алгебр Ли.

17.1. Тензорные и симметрические алгебры. Вначале введем ряд алгебр, определяемых универсальными свойствами. (Более подробно см. Ленг [1], гл. XVI.) Фиксируем конечномерное векторное пространство V над F. Пусть $T^0V = \mathsf{F}$, $T^1V = V$, $T^2V = V \otimes V$, $\ldots$, $T^mV = V \otimes \ldots \otimes V$ (m экземпляров) $\ldots$ Положим $\mathfrak{T}(V) = \coprod_{i=0}^{\infty} T^iV$ и введем ассоциативное произведение, которое определено на однородных образующих пространства $\mathfrak{T}(V)$ очевидным правилом $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m \in T^{k+m}V$. Тогда $\mathfrak{T}(V)$ превращается в градуированную ассоциативную алгебру с единицей, которую порождает (вместе с единицей) произвольный базис в V. Назовем ее *тензорной алгеброй* на V. Она является универсальной ассоциативной алгеброй с n образующими ($n = \dim V$) в следующем смысле: для каждого F-линейного отображения $\varphi\colon V \to \mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей над F) существует такой единственный гомоморфизм F-алгебр $\psi\colon \mathfrak{T}(V) \to \mathfrak{A}$, что $\psi(1) = 1$ и следующая диаграмма коммутативна (i — включение):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathfrak{T}(V) \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

Пусть теперь I — (двусторонний) идеал в $\mathfrak{T}(V)$, порожденный всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in V)$. Назовем $\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{T}(V)/I$ *симметрической алгеброй* на V; каноническое отображение обозначим $\sigma: \mathfrak{T}(V) \to \mathfrak{S}(V)$. Заметим, что образующие идеала I лежат в T^2V; отсюда очевидно, что $I = (I \cap T^2V) \oplus (I \cap T^3V) \oplus \ldots$ Следовательно, отображение σ инъективно на $T^0V = \mathsf{F}$, $T^1V = V$ (что позволяет отождествить V с подпространством в $\mathfrak{S}(V)$), и $\mathfrak{S}(V)$ наследует градуировку из $\mathfrak{T}(V)$: $\mathfrak{S}(V) = \coprod_{i=0}^{\infty} S^iV$. Цель факторизации по I именно в том, чтобы заставить элементы из V коммутировать; в результате алгебра $\mathfrak{S}(V)$ оказывается универсальной (в определенном выше смысле) по отношению к линейным отображениям из V в коммутативные ассоциативные F-алгебры с единицей. Если при этом $(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный базис в V, то алгебра $\mathfrak{S}(V)$ канонически изоморфна алгебре многочленов от n переменных над F с базисом, состоящим из единицы и всех мономов $x_{i(1)} \ldots x_{i(t)}$, $t \geqslant 1$, $1 \leqslant i(1) \leqslant \ldots \leqslant i(t) \leqslant n$.

Читатель легко проверит, что описанные построения выполнимы даже для бесконечномерного пространства V.

Для случая $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$ отметим один частный факт, который понадобится много позже (в § 23). Симметрическая группа $\mathscr{S}_m$ действует на T^mV путем перестановки индексов в тензорах $v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$ $(v_i \in V)$. Элемент из T^mV, инвариантный относительно действия $\mathscr{S}_m$, называется *однородным симметрическим тензором порядка* m. Например, тензор $x \otimes y + y \otimes x$ имеет порядок 2. Далее зафиксируем базис $(x_1, \ldots, x_n)$ в V, тогда произведения $x_{i(1)} \otimes \ldots \otimes x_{i(m)}$ $(1 \leqslant i(j) \leqslant n)$ образуют базис в T^mV. Для каждой упорядоченной последовательности $1 \leqslant i(1) \leqslant i(2) \leqslant \ldots \leqslant i(m) \leqslant n$ определим симметрический тензор

$$\frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \mathscr{S}_m} x_{i(\pi(1))} \otimes \ldots \otimes x_{i(\pi(m))} \tag{$*$}$$

(определение корректно, поскольку $m! \neq 0$ в F). Образы таких тензоров в S^mV не равны 0 и, очевидно, образуют там базис, поэтому тензоры вида $(*)$ в свою очередь должны порождать дополнение к $I \cap T^mV$ в T^mV. С другой стороны, тензоры вида $(*)$, очевидно, порождают пространство всех симметрических тензоров порядка m (обозначим его $\tilde{S}^mV \subset T^mV$). Мы заключаем, что σ определяет изоморфизм между векторными пространствами $\tilde{S}^mV$ и S^mV, а тогда и между пространством всех симметрических тензоров $\tilde{\mathfrak{S}}(V)$ и $\mathfrak{S}(V)$.

17.2. Построение алгебры $\mathfrak{U}(L)$. Вначале дадим абстрактное определение для случая произвольной алгебры Ли L (которая может быть и бесконечномерной, в противоположность нашему обычному соглашению). *Универсальная обертывающая алгебра* для L — это пара $(\mathfrak{U}, i)$, где $\mathfrak{U}$ — ассоциативная алгебра с единицей над F, а $i: L \to \mathfrak{U}$ — линейное отображение, удовлетворяющее условию

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \qquad (*)$$

при $x, y \in L$, причем выполнено следующее: для любой ассоциативной F-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей и любого линейного отображения $j\colon L \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию $(*)$, существует такой единственный гомоморфизм алгебр с единицей $\varphi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$.

Легко доказывается *единственность* такой пары $(\mathfrak{U}, i)$. Если другая пара $(\mathfrak{B}, i')$ удовлетворяет тем же условиям, то имеются гомоморфизмы $\varphi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$, $\psi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$. В силу определения существует единственное отображение (показанное штрихами), которое делает диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \arrow[dd, dashed] \\ L \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

Но для этого годится и $1_{\mathfrak{U}}$, и $\psi \circ \varphi$, поэтому $\psi \circ \varphi = 1_{\mathfrak{U}}$. Аналогично $\varphi \circ \psi = 1_{\mathfrak{B}}$.

Нетрудно установить и *существование* нужной пары $(\mathfrak{U}, i)$. Пусть $\mathfrak{T}(L)$ — тензорная алгебра над L, а J — двусторонний идеал в $\mathfrak{T}(L)$, порожденный всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x, y \in L)$. Положим $\mathfrak{U}(L) = \mathfrak{T}(L)/J$, и пусть $\pi\colon \mathfrak{T}(L) \to \mathfrak{A}(L)$ — канонический гомоморфизм. Заметим, что $J \subset \coprod\limits_{i>0} T^i L$, поэтому π изоморфно отображает $T^0 L = \mathsf{F}$ в $\mathfrak{U}(L)$ (как следствие, $\mathfrak{U}(L)$ во всяком случае содержит скаляры). Совсем не очевидно, что π отображает $T^1 L = L$ в $\mathfrak{U}(L)$ изоморфно; это будет доказано позже. Как бы то ни было, мы утверждаем, что $(\mathfrak{U}(L), i)$ — универсальная обертывающая алгебра для L, где $i\colon L \to \mathfrak{U}(L)$ — ограничение отображения π на L. Действительно, пусть отображение $j\colon L \to \mathfrak{A}$ таково, как в определении. В силу универсального свойства алгебры $\mathfrak{T}(L)$ существует гомоморфизм алгебр $\varphi'\colon \mathfrak{T}(L) \to \mathfrak{A}$, который продолжает j и отображает 1 в 1. Поскольку j обладает свойством $(*)$, все элементы вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ лежат в $\operatorname{Ker} \varphi'$, поэтому φ' индуцирует такой гомоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$. Его единственность очевидна, поскольку 1 и $\operatorname{Im} i$ вместе порождают $\mathfrak{U}(L)$.

Пример. Пусть алгебра L *абелева*. Тогда упомянутый идеал J порождается всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ и потому совпадает с идеалом I из п. 17.1. Это означает, что $\mathfrak{U}(L)$ совпадает с симметрической алгеброй $\mathfrak{S}(L)$. (Поэтому отображение $i\colon L \to \mathfrak{U}(L)$ в этом случае инъективно.)

17.3. Теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта и ее следствия. До сих пор мы узнали очень мало о строении алгебры $\mathfrak{U}(L)$, а именно, что она содержит скаляры. Для краткости положим $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(L)$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(L)$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(L)$;

аналогично, будем писать T^m, S^m. Определим фильтрацию на $\mathfrak{T}$, положив $T_m = T^0 \oplus T^1 \oplus \ldots \oplus T^m$, и пусть $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1} = 0$. Ясно, что $U_m U_p \subset U_{m+p}$ и $U_m \subset U_{m+1}$. Положим $G^m = U_m / U_{m-1}$ в смысле векторных пространств; тогда умножение в $\mathfrak{U}$ определяет билинейное отображение $G^m \times G^p \to G^{m+p}$. (Такое определение корректно; почему?) Оно очевидным образом продолжается до билинейного отображения $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \coprod\limits_{m=0}^{\infty} G^m$, превращая $\mathfrak{G}$ в градуированную ассоциативную алгебру с единицей.

Так как π отображает T^m в U_m, определена композиция линейных отображений $\varphi_m \colon T^m \to U_m \to G^m = U_m / U_{m-1}$. Она сюръективна, поскольку $\pi(T_m - T_{m-1}) = U_m - U_{m-1}$. Как следствие, отображения φ_m вместе определяют сюръективное линейное отображение $\varphi \colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$ (переводящее 1 в 1).

Лемма. *Отображение $\varphi \colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$ является гомоморфизмом алгебр. При этом $\varphi(I) = 0$, так что φ индуцирует гомоморфизм ω алгебры $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}/I$ на $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $x \in T^m$, $y \in T^p$ — однородные тензоры. По определению произведения в $\mathfrak{G}$ имеем $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, поэтому отображение φ мультипликативно на $\mathfrak{T}$. Пусть $x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in L)$ — типичный образующий в I. Тогда $\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$ по определению. С другой стороны, $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1$, а значит, $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_1 / U_1 = 0$. Как следствие, $I \subset \operatorname{Ker} \varphi$. □

Основной результат об алгебре $\mathfrak{U}(L)$ заключается в следующей теореме; она (а также ее следствие С) называется *теоремой Пуанкаре—Биркгофа—Витта* (или теоремой ПБВ). Ее доказательство будет приведено в п. 17.4.

Теорема. *Гомоморфизм $\omega \colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ является изоморфизмом алгебр.*

Следствие А. *Пусть W — некоторое подпространство в T^m, причем каноническое отображение $T^m \to S^m$ индуцирует изоморфизм между W и S^m. Тогда $\pi(W)$ является дополнением для U_{m-1} в U_m.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (все отображения канонические)

$$\begin{tikzcd} & U_m \arrow[dr] & \\ T^m \arrow[ur] \arrow[dr] & & G^m \\ & S^m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

В силу предыдущей леммы (и определений) она коммутативна. Так как отображение $\omega \colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ является изоморфизмом (согласно теореме), нижняя последовательность стрелок отображает $W \subset T^m$ изоморфно на G^m. Переходя к верхней последовательности, получаем искомый результат. □

Следствие B. *Каноническое отображение* $L \to \mathfrak{U}(L)$ *инъективно (так что* L *можно отождествить с* $i(L)$*).*

Доказательство. Это частный случай $W = T^1 (= L)$ следствия A. □

Мы допустим, что алгебра L может быть бесконечномерной. Практически для наших целей достаточно рассматривать алгебры со счетным базисом.

Следствие C. *Пусть* $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ *— любой упорядоченный базис в* L*. Тогда элементы* $x_{i(1)} \dots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes \dots \otimes x_{i(m)})$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $i(1) \leqslant i(2) \leqslant \dots \leqslant i(m)$, *вместе с единицей составляют базис в* $\mathfrak{U}(L)$.

Доказательство. Пусть W — подпространство в T^m, натянутое на все элементы вида $x_{i(1)} \otimes \dots \otimes x_{i(m)}$, $i(1) \leqslant \dots \leqslant i(m)$. Очевидно, что W изоморфно отображается на S^m, и ввиду следствия A подпространство $\pi(W)$ является дополнением к U_{m-1} в U_m. □

Базис построенного вида в $\mathfrak{U}(L)$ будем кратко называть *ПБВ-базисом*.

Следствие D. *Пусть* H *— подалгебра в* L*, и ее упорядоченный базис* $(h_1, h_2, \dots)$ *содержится в упорядоченном базисе* $(h_1, \dots, x_1, \dots)$ *алгебры* L*. Тогда гомоморфизм* $\mathfrak{U}(H) \to \mathfrak{U}(L)$*, индуцированный вложением* $H \to L \to \mathfrak{U}(L)$*, сам является вложением, причем* $\mathfrak{U}(L)$ *является свободным* $\mathfrak{U}(H)$*-модулем со свободным базисом, состоящим из всех элементов вида* $x_{i(1)} \dots x_{i(m)}$, $i(1) \leqslant i(2) \leqslant \dots \leqslant i(m)$, *вместе с* 1.

Доказательство очевидно из следствия C. □

Отметим один частный факт, который понадобится много позже.

Следствие E. *Пусть* $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$. *В обозначениях п. 17.1 композиция канонических отображений* $S^m \to \tilde{S}^m L \to U_m$ *является (линейным) изоморфизмом между* $S^m L$ *и дополнением подпространства* U_{m-1} *в* U_m.

Доказательство. Применим следствие A при $W = \tilde{S}^m$. □

17.4. Доказательство теоремы ПБВ. Фиксируем в L упорядоченный базис $(x_\lambda;\, \lambda \in \Omega)$. Это позволяет отождествить $\mathfrak{S}$ с алгеброй многочленов от переменных z_λ $(\lambda \in \Omega)$. Для каждой последовательности индексов $\Sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (m называется ее длиной) положим $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_m} \in S^m$ и $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m$. Назовем последовательность Σ возрастающей, если $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_m$ при данном упорядочении в Ω; будем считать, что пустая последовательность $\varnothing$ возрастающая, причем $z_\varnothing = 1$. Тогда множество $\{z_\Sigma \colon \Sigma \text{ возрастает}\}$ является базисом в $\mathfrak{S}$. Градуировке $\mathfrak{S} = \coprod S^m$ соответствует фильтрация $S_m = S^0 \oplus \dots \oplus S^m$. В последующих леммах запись $\lambda \leqslant \Sigma$ означает, что $\lambda \leqslant \mu$ для всех $\mu \in \Sigma$.

Лемма A. *Для каждого* $m \in \mathbb{Z}^+$ *существует единственное такое линейное отображение* $f_m \colon L \oplus S_m \to \mathfrak{S}$, *что*

(A_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$ *при* $\lambda \leqslant \Sigma$, $z_\Sigma \in S_m$;

(B_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k$ *при* $k \leqslant m$, $z_\Sigma \in S_k$;

(C_m) $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T)$ *при всех* $z_T \in S_{m-1}$.

При этом ограничение отображения f_m на $L\otimes S_{m-1}$ совпадает с f_{m-1}.

Доказательство. Заметим, что если доказано условие (B_m), то все слагаемые в (C_m) корректно определены. Заметим также, что ограничение отображения f_m на $L\otimes S_{m-1}$ автоматически удовлетворяет условиям (A_{m-1}), (B_{m-1}), (C_{m-1}) и в силу утверждаемой единственности должно совпадать с f_{m-1}. Существование и единственность отображения f_m мы докажем индукцией по m. При $m=0$ имеем $z_{\boldsymbol\Sigma}=1$; поэтому можно положить $f_0(x_\lambda\otimes 1)=z_\lambda$ (и продолжить линейно на $L\otimes S_0$). Ясно, что условия (A_0), (B_0), (C_0) выполнены, причем из (A_0) видно, что наш выбор f_0 — единственно возможный.

Предположив существование единственного отображения f_{m-1}, удовлетворяющего условиям (A_{m-1}), (B_{m-1}), (C_{m-1}), покажем, как продолжить f_{m-1} до f_m. Для этого достаточно определить $f_m(x_\lambda\otimes z_{\boldsymbol\Sigma})$ для возрастающих последовательностей $\boldsymbol\Sigma$ длины m.

В случае $\lambda\leqslant\boldsymbol\Sigma$ условие (A_m) будет выполнено, лишь если мы положим $f_m(x_\lambda\otimes z_{\boldsymbol\Sigma})=z_\lambda z_{\boldsymbol\Sigma}$. Если неравенство $\lambda\leqslant\boldsymbol\Sigma$ не выполнено, то первый индекс μ в $\boldsymbol\Sigma$ строго меньше чем λ, поэтому $\boldsymbol\Sigma=(\mu,\,T)$, где, разумеется, $\mu\leqslant T$ и T имеет длину $m-1$. Ввиду условия (A_{m-1}) мы имеем $z_{\boldsymbol\Sigma}=z_\mu z_T=$ $=f_{m-1}(x_\mu\otimes z_T)$. Поскольку $\mu\leqslant T$, то $f_m(x_\mu\otimes z_T)=z_\mu z_T$ уже определено, так что левая часть соотношения (C_m) принимает вид $f_m(x_\lambda\otimes z_{\boldsymbol\Sigma})$. С другой стороны, из (B_{m-1}) следует, что $f_m(x_\lambda\otimes z_T)=f_{m-1}(x_\lambda\otimes z_T)\equiv z_\lambda z_T \pmod{S_{m-1}}$. Это означает, что правая часть соотношения (C_m) уже определена:

$$z_\mu z_\lambda z_T+f_{m-1}(x_\mu\otimes y)+f_{m-1}([x_\lambda,\,x_\mu]\otimes z_T),\qquad y\in S_{m-1}.$$

Предыдущие замечания показывают, что определить отображение f_m можно, и только одним способом. При этом условия (A_m) и (B_m) очевидным образом выполняются, так же как и (C_m) при $\mu<\lambda$, $\mu\leqslant T$. Но $[x_\mu,\,x_\lambda]=-[x_\lambda,\,x_\mu]$, так что условие (C_m) выполнено и при $\lambda<\mu$, $\lambda\leqslant T$. Оно справедливо и при $\lambda=\mu$. Остается рассмотреть случай, когда условия $\lambda\leqslant T$ и $\mu\leqslant T$ не выполнены. Положим $T=(\nu,\,\Psi)$, где $\nu\leqslant\Psi$, $\nu<\lambda$, $\nu<\mu$. Для удобства обозначений будем писать xz вместо $f_m(x\otimes z)$ при $x\in L$, $z\in S_m$.

Из предположения индукции следует, что $x_\mu z_T=x_\mu(x_\nu z_\Psi)=x_\nu(x_\mu z_\Psi)+$ $+[x_\mu,\,x_\nu]z_\Psi$, и при этом $x_\mu z_\Psi=z_\mu z_\Psi+w$ $(w\in S_{m-2})$ ввиду условия (B_{m-2}). Так как $\nu\leqslant\Psi$ и $\nu<\mu$, мы получаем, что (C_m) можно применить уже к $x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_\Psi))$. По предположению индукции можно также применить (C_m) к $x_\lambda(x_\nu w)$, а тогда и к $x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_\Psi))$. В итоге

$$x_\lambda(x_\mu z_T)=x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi))+[x_\lambda,\,x_\nu](x_\mu z_\Psi)+[x_\mu,\,x_\nu](x_\lambda z_\Psi)+[x_\lambda,[x_\mu,\,x_\nu]]z_\Psi.\quad (*)$$

Вспомним, что λ и μ в этом рассуждении не менялись местами. Если переставить их в $(*)$ и вычесть полученное уравнение из исходного, то мы получим (с помощью тождества Якоби):

$$x_\lambda(x_\mu z_T) - x_\mu(x_\lambda z_T) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) - x_\nu(x_\mu(x_\lambda z_\Psi)) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]]z_\Psi -$$
$$- [x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]]z_\Psi = x_\nu([x_\lambda, x_\mu]z_\Psi) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]]z_\Psi + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]z_\Psi =$$
$$= [x_\lambda, x_\mu](x_\nu z_\Psi) + ([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]])z_\Psi = [x_\lambda, x_\mu]z_T.$$

Этим доказано соотношение (C_m), а тогда и вся лемма. □

Лемма В. *Существует представление* ρ: $L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$, *удовлетворяющее условиям*

(a) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ *при* $\lambda \leqslant \Sigma$;

(b) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma \equiv z_\lambda z_\Sigma \pmod{S_m}$, *если* Σ *имеет длину* m.

Доказательство. Согласно лемме А найдется линейное отображение f: $L \otimes \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, удовлетворяющее условиям (A_m), (B_m), (C_m) при всех m (поскольку f_m ввиду единственности совпадает с f_{m-1} на $L \otimes S_{m-1}$). Другими словами, $\mathfrak{S}$ превращается в L-модуль (условие (C_m)), который в силу условий (A_m) и (B_m) имеет представление ρ со свойствами (a) и (b). □

Лемма С. *Пусть* $t \in T_m \cap J = \operatorname{Ker} \pi$, *где* π: $\mathfrak{T} \to \mathfrak{U}$ — *каноническое отображение. Тогда однородная компонента* t_m *степени* m *в* t *лежит в ядре* I *канонического отображения* $\mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$.

Доказательство. Запишем t_m как линейную комбинацию базисных элементов $x_{\Sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, где каждая последовательность $\Sigma(i)$ имеет длину m. Гомоморфизм алгебр Ли ρ: $L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$, построенный в лемме В, в силу универсального свойства алгебры $\mathfrak{U}$ продолжается до гомоморфизма алгебр (который мы также обозначим ρ) $\mathfrak{T} \to \operatorname{End} \mathfrak{S}$, причем $J \subset \operatorname{Ker} \rho$. Поэтому $\rho(t) = 0$. Но единица под действием гомоморфизма $\rho(t)$ отображается в многочлен, старший член которого ввиду леммы В является линейной комбинацией элементов $z_{\Sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Значит, эта линейная комбинация равна 0 в $\mathfrak{S}$, и $t_m \in I$, что и требовалось. □

Доказательство теоремы ПБВ. Пусть $t \in T^m$, π: $\mathfrak{T} \to \mathfrak{U}$ — каноническое отображение. Нужно показать, что из условия $\pi(t) \in U_{m-1}$ вытекает, что $t \in I$. Но если $t \in T^m$, $\pi(t) \in U_{m-1}$, то $\pi(t) = \pi(t')$ для некоторого $t' \in \in T_{m-1}$; следовательно, $t - t' \in J$. Применим лемму С к тензору $t - t' \in T_m \cap J$: однородная компонента степени m равна t, и мы получаем $t \in I$. □

17.5. Свободные алгебры Ли. Возможно, читателю знаком способ задания групп образующими и соотношениями. В § 18 мы применим аналогичный метод для построения полупростых алгебр Ли. Здесь потребуется понятие свободной алгебры Ли.

Пусть L — алгебра Ли над F, порожденная множеством X. Скажем, что алгебра L *свободна над* X, если любое отображение φ множества X в алгебру Ли M продолжается единственным образом до гомоморфизма ψ: $L \to M$. Читатель легко проверит единственность такой алгебры L (с точностью до единственного изоморфизма). Что касается существования, то возьмем векторное пространство V с базисом X, построим тензорную алгебру $\mathfrak{T}(V)$ (рассматриваемую как алгебра Ли относительно скобки), и пусть L — подалгебра Ли в $\mathfrak{T}(V)$, натянутая на X. Если дано произвольное отображение $\varphi\colon X \to M$, то сначала продолжим его до линейного отображения $V \to M \subset \mathfrak{U}(M)$, затем (канонически) до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\mathfrak{T}(V) \to \mathfrak{U}(M)$, который является и гомоморфизмом алгебр Ли (его ограничение на L будет искомым гомоморфизмом $\psi\colon L \to M$, поскольку ψ отображает порождающее множество X в M).

Заметим, что если алгебра L свободна над множеством X, то векторное пространство V можно превратить в L-модуль, просто сопоставив каждому элементу $x \in X$ элемент алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и канонически продолжив это отображение.

Наконец, если алгебра L свободна над X, а R — идеал в L, порожденный элементами f_j (где j пробегает некоторое множество индексов), то назовем L/R алгеброй Ли с *образующими* x_i и *определяющими соотношениями* $f_j = 0$, где x_i — образы в L/R элементов из X.

Упражнения

1. Докажите, что если $\dim L < \infty$, то $\mathfrak{U}(L)$ не имеет делителей нуля. [Указание: используйте тот факт, что соответствующая градуированная алгебра $\mathfrak{G}$ изоморфна алгебре многочленов.]

2. Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли (см. п. 1.4), причем $[x, y] = x$. Получите прямое доказательство инъективности отображения $i\colon L \to \mathfrak{U}(L)$ (т. е. покажите, что $J \cap L = 0$).

3. Пусть $x \in L$. Продолжим $\operatorname{ad} x$ до эндоморфизма алгебры $\mathfrak{U}(L)$, положив $\operatorname{ad} x(y) = xy - yx$ ($y \in \mathfrak{U}(L)$). Докажите, что если $\dim L < \infty$, то каждый элемент алгебры $\mathfrak{U}(L)$ лежит в конечномерном L-подмодуле. [Проверьте, что если $x, x_1, \ldots, x_m \in L$, то $\operatorname{ad} x(x_1 \ldots x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_1 x_2 \ldots \operatorname{ad} x(x_i) \ldots x_m$.]

4. Пусть L — свободная алгебра Ли над множеством X. Докажите, что алгебра $\mathfrak{U}(L)$ изоморфна тензорной алгебре на векторном пространстве с базисом X.

5. Опишите свободную алгебру Ли над множеством $X = \{x\}$.

6. Как используется теорема ПБВ при построении свободных алгебр Ли?

Замечания

При изложении теоремы ПБВ мы следовали книге Bourbaki [1]. Другой подход см. в Jacobson [1].

§ 18. *Образующие и соотношения*

Теперь мы можем продолжить изучение полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Наша цель — получить представление алгебры L образующими и соотношениями, зависящими только от системы корней Φ, тем самым доказав и существование, и единственность полупростой алгебры Ли с данной системой корней. В этом параграфе, вопреки нашему обычному соглашению, *алгебры Ли могут быть и бесконечномерными.*

18.1. Определяющие соотношения в L. Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Φ — соответствующая система корней, $\Delta=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ — ее фиксированный базис. Напомним, что $\langle j\rangle=2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)=\alpha_i(h_j)$ $(h_j=h_{\alpha_j})$. Фиксируем такое множество образующих $x_i\in L_{\alpha_i}$, $y_i\in L_{-\alpha_i}$, что $[x_i, y_i]=h_i$.

Предложение. *Во введенных обозначениях алгебра L порождается множеством образующих $\{x_i, y_i, h_i\colon 1\leqslant i\leqslant\ell\}$, которые удовлетворяют по крайней мере следующим соотношениям:*

(S1) $[h_i, h_j]=0$ $(1\leqslant i, j\leqslant\ell)$;

(S2) $[x_i, y_i]=h_i$, $[x_i, y_j]=0$ *при* $i\neq j$;

(S3) $[h_i, x_j]=\langle i\rangle x_j$, $[h_i, y_j]=-\langle i\rangle y_j$;

(S_{ij}^{+}) $(\mathrm{ad}\, x_i)^{-\langle i\rangle+1}(x_j)=0$ $(i\neq j)$;

(S_{ij}^{-}) $(\mathrm{ad}\, y_i)^{-\langle i\rangle+1}(y_j)=0$ $(i\neq j)$.

Доказательство. Из предложения 14.2 вытекает, что L порождается уже элементами x_i и y_j. Соотношение (S1) очевидно, так же как и (S2), поскольку $\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi$ при $i\neq j$ (лемма 10.1). Соотношение (S3) очевидно. Рассмотрим теперь (S_{ij}^{+}); для (S_{ij}^{-})рассуждение аналогичное. Так как $i\neq j$, вектор $\alpha_j-\alpha_i$ не является корнем и α_i-серия, порожденная корнем α_j, состоит из элементов α_j, $\alpha_j+\alpha_i$, $\ldots$, $\alpha_j+q\alpha_i$, где $-q=\langle i\rangle$ (см. п. 9.4 или предложение 8.4(e)). Поскольку $\mathrm{ad}\, x_i$ последовательно отображает x_j в корневые подпространства для $\alpha_j+\alpha_i$, $\alpha_j+2\alpha_i$, $\ldots$, мы получаем (S_{ij}^{+}). $\square$

Отметим, что соотношения из этого предложения содержат константы, зависящие только от системы корней. Серр доказал, что они составляют полную систему определяющих соотношений для L (теорема 18.3, см. ниже). В качестве первого шага к доказательству теоремы Серра мы изучим алгебру Ли (возможно, бесконечномерную), которая определяется лишь соотношениями (S1)—(S3).

18.2. Следствия из соотношений (S1)—(S3). Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Число Картана $\langle j\rangle$ будем кратко обозначать c_{ij}. Возьмем свободную алгебру Ли $\hat{L}$ (см. п. 17.4) с 3ℓ образующими $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i\colon 1\leqslant i\leqslant\ell\}$. Пусть $\hat{K}$ — идеал в $\hat{L}$, порожденный следующими элементами: $[\hat{h}_i, \hat{h}_j]$, $[\hat{x}_i, \hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i$, $[\hat{h}_i, \hat{x}_j]-c_{ij}\hat{x}_j$, $[\hat{h}_i, \hat{y}_j]+c_{ij}\hat{y}_j$. Положим $L_o=\hat{L}/\hat{K}$, и пусть образующие переходят при факторизации в элементы x_i, y_i, h_i. (В общем случае $\dim L_o=\infty$.)

Проблема в том, что алгебра L_o определена чересчур абстрактно (из сказанного не видно, например, что она не тривиальна). Чтобы изучить L_o более конкретно, попробуем построить для нее подходящее представление. Для этого мы применим прообраз той конструкции, которая сыграет важнейшую роль в гл. VI, так что рекомендуем читателю внимательно следить за последующим рассуждением.

Как было отмечено в п. 17.5, модуль над алгеброй $\hat{L}$ строится без труда: нужно лишь сопоставить каждому из 3ℓ ее образующих некоторое линейное преобразование. Пусть V — тензорная алгебра (т. е. свободная ассоциативная алгебра) над векторным пространством с базисом $(v_1, \ldots, v_\ell)$. Забудем об умножении и для простоты обозначений будем писать $v_{i_1}\ldots v_{i_t}$ вместо $v_{i_1}\otimes\ldots\otimes v_{i_t}$. Эти тензоры (вместе с 1) образуют в V базис над F. Далее, определим следующие эндоморфизмы пространства V:

$$\begin{cases} \hat{h}_j\cdot 1=0, \\ \hat{h}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=-(c_{i_1j}+\ldots+c_{i_tj})v_{i_1}\ldots v_{i_t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}_j\cdot 1=v_j, \\ \hat{y}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=v_jv_{i_1}\ldots v_{i_t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_j\cdot 1=0=\hat{x}_j\cdot v_i, \\ \hat{x}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=v_{i_1}(\hat{x}_j\cdot v_{i_2}\ldots v_{i_t})-\delta_{i_1j}(c_{i_2j}+\ldots+c_{i_tj})v_{i_2}\ldots v_{i_t}. \end{cases}$$

Это действие продолжается (единственным образом) на всю алгебру $\hat{L}$ и дает ее представление $\hat{\varphi}\colon \hat{L}\to\mathfrak{gl}(V)$.

Предложение. *Пусть $\hat{K}_o=\operatorname{Ker}\hat{\varphi}$. Тогда $\hat{K}\subset\hat{K}_o$, т. е. $\hat{\varphi}$ пропускается через L_o, тем самым превращая V в L_o-модуль.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что $\hat{h}_j$ действует на V диагонально (в выбранном базисе), так что $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ и $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ коммутируют, т. е. $[\hat{h}_i, \hat{h}_j]\in\hat{K}_o$. С другой стороны, $\hat{\varphi}(\hat{y}_j)$ — это просто левое умножение на v_j. (Всю сложность вносит лишь $\hat{x}_j$.)

Положив в формулах для действия $j=i_1$, получаем $\hat{x}_i\cdot\hat{y}_j\cdot v_{i_2}\ldots v_{i_t}-\hat{y}_j\cdot\hat{x}_i\cdot v_{i_2}\ldots v_{i_t}=-\delta_{ji}(c_{i_2i}+\ldots+c_{i_ti})v_{i_2}\ldots v_{i_t}=\delta_{ji}\hat{h}_i\cdot v_{i_2}\ldots v_{i_t}$. Кроме того, $(\hat{x}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{x}_i)\cdot 1=0=\delta_{ij}\hat{h}_i\cdot 1$. Следовательно, $[\hat{x}_i, \hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i\in\hat{K}_o$.

Далее, $(\hat{h}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{h}_i)\cdot 1=\hat{h}_i\cdot v_j=-c_{ji}v_j=-c_{ji}\hat{y}_j\cdot 1$. Аналогично $(\hat{h}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{h}_i)\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=\hat{h}_i\cdot v_jv_{i_1}\ldots v_{i_t}+(c_{i_1i}+\ldots+c_{i_ti})v_jv_{i_1}\ldots v_{i_t}=-c_{ji}\hat{y}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}$. Следовательно, $[\hat{h}_i, \hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j\in\hat{K}_o$.

Переходя к последнему шагу, предварительно заметим, что

$$\hat{h}_i\cdot\hat{x}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=-(c_{i_1i}+\ldots+c_{i_ti}-c_{ji})\hat{x}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}. \qquad (*)$$

Это доказывается индукцией по t. При $t=0$ мы считаем, что $v_{i_1}\ldots v_{i_t}=1$, и обе части обращаются в нуль. Предположение индукции означает, что $\hat{x}_j\cdot v_{i_2}\ldots v_{i_t}$ является собственным вектором для $\hat{h}_i$ с собственным значением $-(c_{i_2i}+\ldots+c_{i_ti}-c_{ji})$. Ясно, что при умножении этого вектора слева на v_i мы получим другой собственный вектор для $\hat{h}_i$, с собственным значением $-(c_{i_1i}+\ldots+c_{i_ti}-c_{ji})$. Отсюда и из определений легко следует соотношение (*).

С помощью $(*)$ получаем $(\hat{h}_i\hat{x}_j-\hat{x}_j\hat{h}_i)\cdot 1=0$, $(\hat{h}_i\hat{x}_j-\hat{x}_j\hat{h}_i)\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=$ $=(-(c_{i_1i}+\ldots+c_{i_ti}-c_{ji})+(c_{i_1i}+\ldots+c_{i_ti}))\hat{x}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}=c_{ji}\hat{x}_j\cdot v_{i_1}\ldots v_{i_t}$. Таким образом, $[\hat{h}_i,\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j\in\hat{K}_o$. В итоге $\hat{K}\subset\hat{K}_o$. □

Теорема. *Пусть Φ — система корней с базисом $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$, а L_o — алгебра Ли с образующими $\{x_i, y_i, h_i\colon 1\leqslant i\leqslant\ell\}$ и соотношениями* (S1)—(S3). *Тогда элементы h_i составляют базис ℓ-мерной абелевой подалгебры $H\subset L_o$, причем $L_o=Y+H+X$ (прямая сумма подпространств), где Y (соответственно X) — подалгебра в L_o, порожденная элементами y_i (соответственно x_i).*

Доказательство разобьем на шаги, используя построенное выше представление $\varphi\colon L_o\to\mathfrak{gl}(V)$: если x — образ в L_o элемента $\hat{x}\in\hat{L}$, то $\varphi(x)=\hat{\varphi}(\hat{x})$.

1. $\sum \mathsf{F}\hat{h}_j\cap\operatorname{Ker}\hat{\varphi}=0$. Если $\hat{h}=\sum\limits_{j=1}^{\ell}a_j\hat{h}_j$ и $\hat{\varphi}(\hat{h})=0$, то и собственные значения $-\sum\limits_j a_jc_{ij}$ $(1\leqslant i\leqslant\ell)$ этого отображения равны 0. Но матрица Картана (c_{ij}) системы Φ невырожденна, поэтому все a_j равны нулю, т. е. $\hat{h}=0$.

2. *Каноническое отображение $\hat{L}\to L_o$ является изоморфизмом между $\sum\mathsf{F}\hat{h}_j$ и $\sum\mathsf{F}h_j$.* Это непосредственно вытекает из шага 1.

3. *Подпространство $\sum\mathsf{F}\hat{x}_j+\sum\mathsf{F}\hat{y}_j+\sum\mathsf{F}\hat{h}_j$ в $\hat{L}$ изоморфно отображается в L_o.* Фиксируем i. Ввиду соотношений (S1)—(S3) мы имеем $[x_i,y_i]=h_i$, $[h_i,x_i]=2x_i$, $[h_i,y_i]=-2y_i$; поэтому $\mathsf{F}x_i+\mathsf{F}y_i+\mathsf{F}h_i$ — гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$. Но последняя проста, и при этом $h_i\neq 0$ (шаг 2). Значит, алгебра $\mathsf{F}x_i+\mathsf{F}y_i+\mathsf{F}h_i$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$. Далее, множество $\{x_j, y_j, h_j\colon 1\leqslant j\leqslant\ell\}$ линейно независимо, так как его элементы не равны нулю и удовлетворяют соотношениям (S1)—(S3) (см. собственные значения отображения $\operatorname{ad} h_j$). Это доказывает свойство 3.

4. *Подпространство $H=\sum\mathsf{F}h_j$ является ℓ-мерной абелевой подалгеброй в L_o.* Это вытекает из шага 2 и соотношения (S1).

5. *Если $[x_{i_1}\ldots x_{i_t}]$ обозначает $[x_{i_1},[x_{i_2},\ldots[x_{i_{t-1}},x_{i_t}]\ldots]]$, то $[h_j,[x_{i_1}\ldots$ $\ldots x_{i_t}]]=(c_{i_1j}+\ldots+c_{i_tj})[x_{i_1}\ldots x_{i_t}]$, и равенство сохраняется при замене x_i на y_i и c_{ij} на $-c_{ij}$.* При $t=1$ это соотношение (S3). Общий случай легко доказывается по индукции с помощью тождества Якоби.

6. *Если $t\geqslant 2$, то $[y_i,[x_{i_1}\ldots x_{i_t}]]\in X$, и аналогично для Y.* Ввиду соотношения (S2) мы имеем $[y_i,x_i]=-\delta_{ij}h_i$, и случай $t=2$ очевиден из (S3) и тождества Якоби. Легко проводится и индукция по t.

7. *Подпространство $Y+H+X$ является подалгеброй в L_o и потому совпадает с L_o.* Это подалгебра ввиду шагов 4, 5 и 6. Но в ней содержится множество образующих для L_o, и потому $Y+H+X$ совпадает с L_o.

8. *Сумма $L_o=Y+H+X$ прямая.* Действительно, из шага 5 видно, как разложить L_o в сумму собственных подпространств отображения $\operatorname{ad} H$; с учетом шагов 1 и 2 эта сумма прямая. □

Разложение $L_o = Y + H + X$ удобно описывать в терминах «весов» (если использовать язык § 20). При $\lambda \in H^*$ положим $(L_o)_\lambda = \{t \in L_o : [h, t] = \lambda(h)t$ при всех $h \in H\}$. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что $H = (L_o)_o$. При этом все ненулевые векторы λ с ненулевым $(L_o)_\lambda$ имеют вид $\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$ $(k_i \in \mathbb{Z})$, где либо все k_i неотрицательны (в этом случае пишем $\lambda \succ 0$), либо все k_i неположительны (пишем $\lambda \prec 0$). Тогда $X = \sum_{\lambda \succ 0} (L_o)_\lambda$ и $Y = \sum_{\lambda \prec 0} (L_o)_\lambda$.

18.3. Теорема Серра. В п. 18.2 мы изучили строение алгебры Ли L_o, определяющие соотношения которой сводятся к (S1)—(S3). Теперь спросим, что произойдет, если наложить условия «конечности» (S^+_{ij}), (S^-_{ij}) из п. 18.1. Положим $x_{ij} = (\operatorname{ad} x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j)$, $y_{ij} = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j)$ $(i \neq j)$. (Подразумеваются элементы из L_o.)

Лемма. *В алгебре L_o из п. 18.2 выполнены равенства* $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$ *при любых $i \neq j$.*

Доказательство. *Случай* (a): $k \neq i$. Тогда $[x_k, y_i] = 0$ ввиду соотношения (S2), так что $\operatorname{ad} x_k$ и $\operatorname{ad} y_i$ коммутируют. Следовательно, $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1} \operatorname{ad} x_k(y_j)$. Если $k = j$, то этот элемент равен $(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j)$. Но ввиду (S3) мы имеем $\operatorname{ad} y_i(h_j) = c_{ij} y_i$. Если этот элемент не равен нулю, то и c_{ji} не равно нулю (и отрицательно, поскольку $i \neq j$), но тогда $-c_{ji} + 1 \geqslant 2$. Как следствие, $(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) = 0$. Если же $k \neq j$, то $[x_k, y_j] = 0$ в соответствии с соотношением (S2), и мы получаем тот же результат.

Случай (b): $k = i$. Из доказательства теоремы 18.2 мы знаем, что $S = \mathsf{F}x_i + \mathsf{F}y_i + \mathsf{F}h_i$ — подалгебра в L_o, изоморфная $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Поэтому можно сказать кое-что о присоединенном действии подалгебры S на L_o. Хотя размерность алгебры L_o может оказаться бесконечной, здесь можно непосредственно применить некоторые рассуждения из § 7. В частности, поскольку $j \neq i$, мы заключаем, что $[x_i, y_j] = 0$, так что y_j — «старший вектор» для S «веса» $m = -c_{ji}$ (поскольку $[h_i, y_j] = -c_{ji} y_j$). Нетрудная индукция по t показывает, что $\operatorname{ad} x_i (\operatorname{ad} y_i)^t (y_j) = t(m - t + 1)(\operatorname{ad} y_i)^{t-1}(y_j)$. Поэтому при $t = -c_{ji} + 1$ правая часть обращается в 0. $\square$

Прежде чем формулировать теорему Серра, упомянем об одной полезной конструкции. Назовем эндоморфизм x бесконечномерного векторного пространства V *локально нильпотентным*, если каждый элемент из V аннулируется некоторой его степенью. В этом случае x нильпотентен на каждом конечномерном подпространстве W в V, так что можно определить $\exp(x|_W)$. Ясно, что $\exp(x|_W)$ и $\exp(x|_{W'})$ совпадают на $W \cap W'$, так что мы можем «сшить» все такие отображения, получив автоморфизм «$\exp x$» пространства V.

Теорема (Серр). *Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная 3ℓ элементами*

$\{x_i, y_i, h_i\colon 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$, которые подчинены соотношениям (S1), (S2), (S3), (S_{ij}^+), (S_{ij}^-) *из п. 18.1. Тогда L является (конечномерной) полупростой алгеброй с системой корней Φ, причем картановская подалгебра порождается элементами h_i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на шаги. По определению $L = L_o/K$, где алгебра L_o такова, как в п. 18.2, а K — идеал, порожденный всеми элементами x_{ij}, y_{ij} ($i \neq j$). Ради простоты обозначений вначале мы будем работать в L_o. Пусть I (соответственно J) — идеал в X (соответственно в Y), порожденный всеми элементами x_{ij} (соответственно y_{ij}). (Таким образом, K включает идеалы I, J.)

1. *Множества I и J являются идеалами в L_o.* Достаточно рассмотреть J (случай I аналогичен). С одной стороны, y_{ij} — собственный вектор для $\operatorname{ad} h_k (1 \leqslant k \leqslant \ell)$ с собственным значением $-c_{jk} + (c_{ji} - 1)c_{ik}$. Поскольку $\operatorname{ad} h_k(Y) \subset Y$, ввиду тождества Якоби $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$. С другой стороны, согласно предыдущей лемме $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$. Ясно, что $\operatorname{ad} x_k$ отображает Y в $Y + H$ (см. п. 18.2); соединив это утверждение с тождеством Якоби и тем фактом, что $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$, получаем, что $\operatorname{ad} x_k(J) \subset J$. Наконец, $\operatorname{ad} L_o(J) \subset J$, снова ввиду тождества Якоби (так как x_k, y_k порождают L_o).

2. Справедливо соотношение $K = I + J$. По определению $I + J \subset K$. Но ввиду шага 1 $I + J$ — идеал в L_o, содержащий все элементы x_{ij}, y_{ij}, а K — наименьший такой идеал.

3. Справедливо соотношение $L = N^- + H + N$ (*прямая сумма подпространств*), *где $N^- = Y/J$, $N = X/I$, а подпространство H отождествлено со своим образом при каноническом отображении $L_o \to L$.* Применим шаг 2 и разложение в прямую сумму $L_o = Y + H + X$ (теорема 18.2).

4. Подпространство $\sum \mathsf{F}x_i + \sum \mathsf{F}h_i + \sum \mathsf{F}y_i$ *отображается в L изоморфно.* Это доказывается аналогично шагу 3 доказательства теоремы 18.2, поскольку H отображается в L изоморфно (см. предыдущий шаг). Как следствие, можно отождествить x_i, y_i, h_i с элементами из L (которые порождают L).

5. *Если $\lambda \in H^*$, то пусть $L_\lambda = \{x \in L\colon [h, x] = \lambda(h)x$ при всех $h \in H\}$. Тогда $H = L_o$, $N = \sum\limits_{\lambda \succ 0} L_\lambda$, $N^- = \sum\limits_{\lambda \prec 0} L_\ell$ (см. замечания в конце п. 18.2), причем все пространства L_λ конечномерны.* Это ясно из шагов 3 и 4.

6. *При $1 \leqslant i \leqslant \ell$ эндоморфизмы* $\operatorname{ad} x_i$ *и* $\operatorname{ad} y_i$ *локально нильпотентны в L.* Достаточно рассмотреть $\operatorname{ad} x_i$ при фиксированном i (в силу симметрии). Пусть M — подпространство в L, состоящее из всех элементов, которые аннулируются какой-либо степенью отображения $\operatorname{ad} x_i$. Если элемент $x \in M$ (соответственно $y \in M$) аннулируется отображением $(\operatorname{ad} x_i)^r$ (соответственно $(\operatorname{ad} x_i)^s$), то $(\operatorname{ad} x_i)^{r+s}$ аннулирует элемент $[x, y]$ (см. лемму 15.1). Значит, в действительности M — подалгебра в L. Но при всех k

мы имеем $x_k \in M$ (ввиду соотношений ($S_{ij}^{\dagger}$)) и $y_k \in M$ (ввиду (S2), (S3)). Эти элементы порождают L, поэтому $M = L$, что и требовалось.

7. Оператор $\tau_i = \exp(\operatorname{ad} x_i)\exp(\operatorname{ad}(-y_i))\exp(\operatorname{ad} x_i)$ *(при* $1 \leqslant i \leqslant \ell$) *— корректно определенный автоморфизм алгебры* L. Это вытекает из шага 6 и замечаний перед теоремой.

8. *Если* $\lambda, \mu \in H^*$ *и* $\sigma\lambda = \mu$ ($\sigma \in \mathscr{W}$, *где* $\mathscr{W}$ *— группа Вейля для* Φ), *то* $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma = \sigma_{\alpha_i}$ — простое отражение, поскольку $\mathscr{W}$ порождается простыми отражениями (теорема 10.3(d)). Автоморфизм τ_i алгебры L, построенный на шаге 7, на конечномерном пространстве $L_\lambda + L_\mu$ совпадает с обычным произведением экспонент, и мы заключаем (как в конце п. 7.2), что τ_i меняет местами L_λ и L_μ. Как следствие, $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$.

9. *Если* $1 \leqslant i \leqslant \ell$, *то* $\dim L_{\alpha_i} = 1$, *причем* $\dim L_{k\alpha_i} = 0$ *для целых* $k \neq 0, 1, -1$. Это очевидно для L_o, а тогда ввиду шага 4 и для L.

10. *Если* $\alpha \in \Phi$, *то* $\dim L_\alpha = 1$, *но* $L_{k\alpha} = 0$ *при* $k \neq 0, 1, -1$. Каждый корень $\mathscr{W}$-сопряжен простому корню (теорема 10.3(c)), и остается использовать шаги 8 и 9.

11. *Если* $L_\lambda \neq 0$, *то либо* $\lambda \in \Phi$, *либо* $\lambda = 0$. В противном случае λ является ненулевой целочисленной линейной комбинацией простых корней с коэффициентами ± 1 и 0. Ввиду шага 10 вектор λ не кратен простому корню. Согласно упражнению 10.10 некоторый $\mathscr{W}$-сопряженный к нему вектор $\sigma\lambda$ имеет и строго положительный, и строго отрицательный коэффициент. Это означает, что $L_{\sigma\lambda} = 0$ (см. шаг 5), вопреки результату шага 8.

12. Справедливо соотношение $\dim L = \ell + \operatorname{Card}\Phi < \infty$. Ввиду шага 5 это вытекает из шагов 10 и 11.

13. *Алгебра* L *полупроста*. Пусть A — абелев идеал в L; нужно показать, что $A = 0$. Поскольку идеал A инвариантен относительно действия $\operatorname{ad} H$, мы заключаем, что $A = (A \cap H) + \sum\limits_{\alpha\in\Phi} (A \cap L_\alpha)$ $\Bigl($так как $L = H + \sum\limits_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\Bigr)$. Если $L_\alpha \subset A$, то $[L_{-\alpha}, L_\alpha] \subset A$. Тогда $L_{-\alpha} \subset A$, и A содержит экземпляр простой алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ (см. шаг 4). Это невозможно, поэтому на самом деле $A = A \cap H \subset H$, а значит $[L_\alpha, A] = 0$ ($\alpha \in \Phi$) и $A \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Phi} \operatorname{Ker}\alpha = 0$ (элементы α_i порождают H^*).

14. *Подалгебра* H *является картановской, а* Φ *— системой корней для* L. Алгебра H абелева (значит, и нильпотентна) и при этом самонормализуема $\Bigl($ввиду разложения в прямую сумму $L = H + \sum\limits_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\Bigr)$, т. е. H является картановской подалгеброй. Ясно, что Φ — соответствующая система корней. □

18.4. Применение: теоремы существования и единственности. Наши усилия, наконец, вознаграждены.

Теорема. (a) *Пусть Φ — некоторая система корней. Тогда существует полупростая алгебра Ли с системой корней Φ.*

(b) *Пусть L, L' — полупростые алгебры Ли с картановскими подалгебрами H, H' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Пусть также дан изоморфизм $\Phi \to \Phi'$, переводящий данный базис Δ в базис Δ', и ему соответствует изоморфизм $\pi\colon H \to H'$ (см. п. 14.2). Каждому $\alpha \in \Delta$ ($\alpha' \in \Delta'$) сопоставим произвольный ненулевой элемент $x_\alpha \in L_\alpha$ ($x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$). Тогда существует единственный изоморфизм $\pi\colon L \to L'$, продолжающий $\pi\colon H \to H'$ и отображающий x_α в $x'_{\alpha'}$ ($\alpha \in \Delta$)*[1].

Доказательство. Утверждение (a) непосредственно вытекает из теоремы 18.3. Докажем утверждение (b). Ясно, что достаточно рассмотреть алгебру L, построенную в теореме 18.3, взяв в качестве x_α, y_α и $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ выбранные там образующие ($\alpha \in \Delta$). Положим $h'_{\alpha'} = \pi(h_\alpha)$ и возьмем (единственный) элемент $y'_{\alpha'}$, удовлетворяющий соотношениям $[x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}] = h'_{\alpha'}$ при всех $\alpha' \in \Delta'$. Так как $\Phi \cong \Phi'$, то выбранные элементы из L' удовлетворяют соотношениям Серра (см. п. 18.1). В силу теоремы 18.3 существует единственный гомоморфизм $\pi\colon L \to L'$, при котором x_α, y_α, h_α ($\alpha \in \Delta$) переходят в $x'_{\alpha'}$, $y'_{\alpha'}$, $h'_{\alpha'}$ соответственно. Он является продолжением заданного гомоморфизма $\pi\colon H \to H'$. Поскольку $\dim L = \dim H + \operatorname{Card} \Phi = \dim H' + \operatorname{Card} \Phi' = \dim L'$, то $\pi\colon L \to L'$ является изоморфизмом. $\square$

Упражнения

1. Используя представление алгебры L_o на V (предложение 18.2), докажите, что алгебры Ли X, Y из теоремы 18.2 являются свободными над множествами элементов x_i, y_i соответственно.

2. Если $\operatorname{rank} \Phi = 1$, то условия (S^+_{ij}), (S^-_{ij}) бессодержательны, поэтому $L_o = L \cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Найдя подходящий базис для V в п. 18.2, покажите, что пространство V изоморфно модулю $Z(0)$, построенному в упражнении 7.7.

3. Докажите, что идеал K алгебры L_o в п. 18.3 содержится в каждом ее идеале конечной коразмерности (т. е. L — наибольшая конечномерная факторалгебра для L_o).

4. Докажите, что любое отношение включения между схемами Дынкина (например, $\mathsf{E}_6 \subset \mathsf{E}_7 \subset \mathsf{E}_8$) индуцирует естественное отношение включения между соответствующими полупростыми алгебрами Ли.

Замечания

По существу теорему 18.2 доказали (независимо) Шевалле и Хариш-Чандра (см. Harish-Chandra [1]), упрощения принадлежат Джекобсону (см. Jacobson [1]). Теорема Серра, вместе со следствиями относительно

[1] Пункт (b) теоремы уже был доказан (другим способом) в п. 14.2. (*Прим. ред.*)

существования и единственности, содержится в книге Serre [2]. См. также Varadarajan [1].

§ 19. *Простые алгебры*

Как и в § 18, F — *алгебраическое поле характеристики* 0. В этом параграфе собраны различные факты о простых алгебрах Ли над F (многие из них уже упоминались в упражнениях). В соответствии с теоремой классификации существует (с точностью до изоморфизма) ровно одна простая алгебра Ли с каждой из систем корней A_ℓ ($\ell \geqslant 1$), B_ℓ ($\ell \geqslant 2$), C_ℓ ($\ell \geqslant 3$), D_ℓ ($\ell \geqslant 4$), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Мы дадим достаточно полное описание классических типов A—D, так же как и G_2. Что касается остальных *исключительных алгебр*, то нас увели бы далеко в сторону предварительные сведения о йордановых алгебрах и т. п. (см. замечания ниже).

19.1. Критерий полупростоты. Теоретически мы можем проверить алгебру Ли на полупростоту, вычислив ее форму Киллинга (теорема 5.1); на практике это часто можно сделать гораздо проще. Сначала дадим определение (см. упражнение 6.5). Алгебра Ли $L \neq 0$ называется *редуктивной*, если $\operatorname{Rad} L = Z(L)$. Два крайних случая — это абелевы и полупростые алгебры. Промежуточный случай — $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть теперь алгебра L редуктивна, но не абелева, так что алгебра $L' = L/Z(L)$ полупроста. Тогда $\operatorname{ad} L \cong \operatorname{ad} L'$ действует вполне приводимо на L (см. п. 6.3). Положим $L = M \oplus Z(L)$, где M — некоторый идеал. Тогда $[L, L] = [M, M] \subset M$. Но $[L, L]$ при каноническом отображении переходит в L', поэтому $L = [L, L] \oplus Z(L)$. Из этих замечаний вытекает первое утверждение следующего предложения.

Предложение. (a) *Пусть алгебра L редуктивна. Тогда $L = [L, L] \oplus \oplus Z(L)$, причем подалгебра $[L, L]$ либо полупростая, либо нулевая.*

(b) *Пусть $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ (пространство V конечномерно) — ненулевая алгебра Ли, действующая на пространстве V неприводимо. Тогда L редуктивна и $\dim Z(L) \leqslant 1$. Если при этом $L \subset \mathfrak{sl}(V)$, то алгебра L полупроста.*

Доказательство. Нам осталось доказать утверждение (b). Пусть $S = \operatorname{Rad} L$. По теореме Ли все элементы из S имеют общий собственный вектор в V. Пусть, скажем, $s \cdot v = \lambda(s)v$ ($s \in S$). Если $x \in L$, то из условия $[s, x] \in S$ следует, что

$$s \cdot (x \cdot v) = \lambda(s)x \cdot v + \lambda([s, x])v. \qquad (*)$$

Поскольку L действует неприводимо, все векторы из V можно получить, многократно применяя элементы из L к v и составляя линейные комбинации. Поэтому из $(*)$ вытекает, что матрицы всех элементов $s \in S$ (в подходящем базисе пространства V) треугольны, причем на диагонали всюду стоит $\lambda(s)$ [1]. Однако коммутаторы $[S, L] \subset S$ имеют нулевой след, поэтому λ обращается в нуль на $[S, L]$. Возвращаясь к $(*)$, заключаем, что $s \in S$ действует на пространстве V как скаляр $\lambda(s)$. Как следствие, $S = Z(L)$ (так что алгебра L редуктивна) и $\dim S \leqslant 1$. Пусть, наконец, $L \subset \mathfrak{sl}(V)$. Так как $\mathfrak{sl}(V)$ не содержит ненулевых скаляров ($\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$), $S = 0$ и алгебра L полупроста. □

19.2. Классические алгебры. Мы ввели классические алгебры в п. 1.2. Чтобы избежать повторений, мы всегда рассматриваем алгебры A_ℓ при $\ell \geqslant 1$, B_ℓ при $\ell \geqslant 2$, C_ℓ при $\ell \geqslant 3$, D_ℓ при $\ell \geqslant 4$ (см. упражнение 1.10 и классификацию в § 11). Поскольку $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{sl}(V) + (\text{скаляры})$, а $\mathfrak{gl}(V)$ действует на V неприводимо (и даже транзитивно[2]), очевидно, что и $\mathfrak{sl}(V)$ действует неприводимо. Это прототип доказательства полупростоты алгебр B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ, которое мы проведем, используя критерий из предложения 19.1. (Мы уже отметили в п. 1.2, что эти алгебры состоят из эндоморфизмов с нулевым следом, так что нужно проверить только их неприводимость.)

Заметим, что любое подпространство в V, инвариантное относительно подалгебры $L \subset \mathfrak{gl}(V)$, инвариантно также относительно (ассоциативной) подалгебры в $\operatorname{End} V$, которую порождает L вместе с единицей. Поэтому мы докажем, что каждая из алгебр B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ действует неприводимо при естественном представлении, если сумеем получить из 1 и L все эндоморфизмы пространства V посредством сложения, умножения на скаляры и обычного умножения. Скаляры мы получаем из 1. Из диагональных матриц, указанных в п. 1.2, мы тогда получим все возможные диагональные матрицы. Затем, умножая остальные элементы базиса (например, $e_{ij} - e_{ji}$, $i \neq j$) на подходящие матрицы вида $\operatorname{diag}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 в i-й позиции), мы получим, как читатель без труда проверит, все недиагональные матричные единицы e_{ij}.

Изложенное рассуждение показывает, что все классические алгебры полупросты. В каждом случае ясно, что ℓ-мерная подалгебра H, натянутая на диагональные матрицы (см. п. 1.2), является торической и равна своему централизатору в L. Поэтому подалгебра H — максимальная торическая (т. е. картановская). Остальные базисные элементы, описанные в п. 1.2, — это корневые векторы, поэтому легко отыскать соответствующее множество простых корней, тем самым показав, что L — простая алгебра указанного типа.

19.3. Алгебра G_2. В главе VI мы увидим, что простая алгебра типа G_2 имеет (точное) неприводимое представление матрицами 7×7, и это наименьшая возможная степень. Оказывается, представляющие матрицы

[1] Нужно выбрать базис из векторов вида $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot v$, вместе с каждым таким вектором содержащий вектор $x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot v$. (*Прим. ред.*)

[2] Имеется в виду, что $\mathfrak{gl}(V) \cdot v = V$ для любого $v \neq 0$. (*Прим. ред.*)

лежат в $L_o=\mathfrak{o}(7,\,\mathsf{F})$, т. е. простой алгебре типа B_3. Поскольку $\dim L_o=21$, а $\dim \mathsf{G}_2=14$, не очень трудно (используя наши знания о системе корней) представить G_2 непосредственно как подалгебру L в L_o.

Как и в п. 1.2, стандартный базис для L можно выразить через матричные единицы e_{rs} $(1\leqslant r,\, s\leqslant 7)$. Здесь нам будет удобно считать, что индексы $i,\, j,\, k,\, \ldots$ пробегают значения 1, 2, 3. Напомним, что L_o имеет картановскую подалгебру H_o с базисом $(d_1,\, d_2,\, d_3)$, $d_i=e_{i+1,i+1}-e_{i+4,i+4}$. На роль картановской подалгебры в L мы наметим $H=\{\sum a_id_i\colon\ \sum a_i=0\}$. Разумеется, $\dim H=2$.

В алгебре G_2 имеется шесть длинных корней, которые составляют систему типа A_2 (упражнение 12.4). Соответственно выберем в L_o корневые векторы $g_{i,-j}$ $(i\neq j)$ относительно H_o следующим образом:

$$
\begin{aligned}
g_{1,-2}&=g_{2,-1}^t=e_{23}-e_{65},\\
g_{1,-3}&=g_{3,-1}^t=e_{24}-e_{75},\\
g_{2,-3}&=g_{3,-2}^t=e_{34}-e_{76}.
\end{aligned}
$$

В качестве коротких корней в L относительно H возьмем $g_{\pm i}$ $(i=1,\,2,\,3)$:

$$
\begin{aligned}
g_1&=-g_{-1}^t=\sqrt{2}(e_{12}-e_{51})-(e_{37}-e_{46}),\\
g_2&=-g_{-2}^t=\sqrt{2}(e_{13}-e_{61})-(e_{27}-e_{45}),\\
g_3&=-g_{-3}^t=\sqrt{2}(e_{14}-e_{71})-(e_{26}-e_{35}).
\end{aligned}
$$

Заметим, что каждый из двенадцати перечисленных векторов в действительности является общим собственным вектором для $\operatorname{ad} H$ и ни один из них не принадлежит централизатору подалгебры H. Пусть пространство L натянуто на H и эти двенадцать векторов. Из следующих уравнений вытекает, что L замкнуто относительно коммутирования. Их проверка не требует слишком большого труда (количество различных случаев можно сократить, используя транспонирование):

$$
\begin{cases}
[g_{i,-j},\, g_{j,-i}]=d_i-d_j,\\
[g_{i,-j},\, g_{k,-l}]=\delta_{jk}g_{i,-l}-\delta_{il}g_{k,-j},
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$
[g_i,\, g_{-i}]=3d_i-(d_1+d_2+d_3),
\tag{2}
$$

$$
\begin{cases}
[g_{i,-j},\, g_k]=-\delta_{ik}g_j,\\
[g_{i,-j},\, g_{-k}]=\delta_{jk}g_{-i},
\end{cases}
\tag{3}
$$

$$
[g_i,\, g_{-j}]=3g_{j,-i}\qquad (i\neq j),
\tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
[g_i,\, g_j]=\pm 2g_{-k},\\
[g_{-i},\, g_{-j}]=\pm 2g_k
\end{cases}
\qquad (i,\ j,\ k \text{ различны}).
\tag{5}
$$

Знаки в (5) можно определить из уравнений $[g_1, g_2]=2g_{-3}$, $[g_1, g_3]=-2g_{-2}$, $[g_2, g_3]=2g_{-1}$ (и уравнений для транспонированных матриц).

Из сказанного вытекает, что L является 14-мерной алгеброй Ли, H — ее картановской подалгеброй (размерности 2), причем L состоит из матриц с нулевым следом. Из классификационной теоремы ясно, что если алгебра L полупроста, то ее системой корней может быть только G_2. Поэтому ввиду предложения 19.1 остается лишь проверить, что L действует неприводимо на $V=\mathsf{F}^7$. Обозначим канонический упорядоченный базис в V через $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_{-1}, v_{-2}, v_{-3})$. Матрица $\operatorname{diag}(0, 1, 2, -3, -1, -2, 3)$ содержится в H, и все ее собственные значения различны. Поэтому любое подпространство $W\neq 0$ в V, инвариантное относительно L, должно содержать хотя бы один из канонических базисных векторов. Заметим теперь, что $g_{\pm i}$ отображает v_0 в вектор, кратный $v_{\mp i}$, а $v_{\mp j}$ — в вектор, кратный $v_{\pm k}$ (i, j, k различны). Кроме того, $g_{i,-j}\cdot v_j=v_i$, $g_{i,-j}\cdot v_{-i}=-v_{-j}$. Как следствие, W содержит все базисные векторы, а значит $W=V$, что и требовалось.

Интересно также реализовать простую алгебру типа G_2 как алгебру Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{C}$ (см. п. 1.3), где $\mathfrak{C}$ — восьмимерная неассоциативная алгебра (*алгебра Кэли* или *алгебра октав*). Во-первых, необходимо описать $\mathfrak{C}$. Пусть (e_1, e_2, e_3) — обычный ортонормированный базис в пространстве F^3 (наделенном скалярным произведением $v\cdot w$). В этом пространстве имеется также векторное произведение $v\times w=-(w\times v)$, подчиненное правилам $e_i\times e_i=0$ $(i=1, 2, 3)$, $e_1\times e_2=e_3$, $e_2\times e_3=e_1$, $e_3\times e_1=e_2$. Как векторное пространство, $\mathfrak{C}$ является суммой двух экземпляров пространства F^3 и двух экземпляров пространства F. Однако для удобства мы будем записывать элементы из $\mathfrak{C}$ как 2×2-матрицы $\begin{pmatrix} a & w\\ v & b\end{pmatrix}$, где $a, b\in\mathsf{F}$ и $v, w\in\mathsf{F}^3$. Мы складываем их и умножаем на скаляры по правилам для матриц. Однако произведение в $\mathfrak{C}$ определяется более сложным способом:

$$\begin{pmatrix} a & v\\ w & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v'\\ w' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-v\cdot w' & av'+b'v+w\times w'\\ a'w+bw'+v\times v' & bb'-w\cdot v'\end{pmatrix}.$$

Билинейность этой операции очевидна, поскольку умножение скаляров в F, а также скалярное и векторное произведения в F^3 билинейны.

Фиксируем в $\mathfrak{C}$ базис $(c_1, \ldots, c_8)$, где

$$c_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad c_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad c_{2+i}=\begin{pmatrix} 0 & e_i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad c_{5+i}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ e_i & 0\end{pmatrix}\quad (i=1, 2, 3).$$

Легко проверяется таблица умножения для $\mathfrak{C}$ (таблица 6). Заметим, что $c_1+c_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ играет роль единицы алгебры $\mathfrak{C}$. Стандартное вычисление коммутаторов $cc'-c'c$ (с использованием элементов базиса и таблицы 6) показывает, что подпространство $\mathfrak{C}_o$, порожденное всеми коммутаторами, имеет коразмерность 1 и базис (c_1-c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8), являясь дополнением к прямой, проходящей через c_1+c_2. При этом $\mathfrak{C}_o$ совпадает с подпространством всех элементов из $\mathfrak{C}$, имеющих нулевой «след» ($b=-a$). Согласно правилу умножения любое дифференцирование в $\mathfrak{C}$ аннулирует «константы» (кратные вектору c_1+c_2). С другой стороны, дифференцирование, очевидно, оставляет $\mathfrak{C}_o$ инвариантным и потому полностью определяется своим ограничением на $\mathfrak{C}_o$.

Таблица 6

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
c_1	c_1	0	c_3	c_4	c_5	0	0	0
c_2	0	c_2	0	0	0	c_6	c_7	c_8
c_3	0	c_3	0	c_8	$-c_7$	$-c_1$	0	0
c_4	0	c_4	$-c_8$	0	c_6	0	$-c_1$	0
c_5	0	c_5	c_7	$-c_6$	0	0	0	$-c_1$
c_6	c_6	0	$-c_2$	0	0	0	c_5	$-c_4$
c_7	c_7	0	0	$-c_2$	0	$-c_5$	0	c_3
c_8	c_8	0	0	0	$-c_2$	c_4	$-c_3$	0

Положим $L=\operatorname{Der}\mathfrak{C}$. Ввиду предыдущих замечаний L действует на $\mathfrak{C}_o$ точно (а на $\mathsf{F}(c_1+c_2)$ — тривиально). Обозначим через $\varphi\colon L\to\mathfrak{gl}(7,\mathsf{F})$ соответствующее матричное представление (выбрав базис в $\mathfrak{C}_o$, как выше). Теперь главная проблема — показать, что подалгебра L не слишком мала; фактически для этого потребуется найти определенные дифференцирования в $\mathfrak{C}$. Так как в системе корней типа G_2 длинные корни образуют систему типа A_2, подалгебра L должна содержать экземпляр алгебры $\mathfrak{sl}(3,\mathsf{F})$. Для $x\in\mathfrak{sl}(3,\mathsf{F})$ определим эндоморфизм $\delta(x)$ пространства $\mathfrak{C}$ по правилу $\begin{pmatrix} a & w\\ v & b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & -x^t(w)\\ x(v) & 0\end{pmatrix}$ (матрица x^t транспонирована к x). Непосредственно проверяется, что $\delta(x)$ является дифференцированием, а $x\mapsto\delta(x)$ — нетривиальным (следовательно, точным) представлением алгебры $\mathfrak{sl}(3,\mathsf{F})$. Через M обозначим его образ, а через H — образ диагональной подалгебры. (Заметим, что $\varphi(M)$ лежит в $\mathfrak{o}(7,\mathsf{F})$, а $\varphi(H)$ совпадает с прежней картановской подалгеброй в G_2.) Легко проверить, что все матрицы в $\mathfrak{gl}(8,\mathsf{F})$, коммутирующие с H, имеют вид $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, x, a_4, a_5, a_6)$, где $x\in\mathfrak{gl}(2,\mathsf{F})$, и что такая матрица представляет дифференцирование алгебры $\mathfrak{C}$, только если она лежит в H. Следовательно, *H является своим централизатором в L*. Поскольку $Z(M)=0$, мы получаем также, что $Z(L)=0$.

Чтобы доказать, что L — простая алгебра типа G_2, нам нужно найти и другие дифференцирования алгебры $\mathfrak{C}$ (отвечающие коротким корням), а затем, используя их, показать, что L действует на $\mathfrak{C}_o$ неприводимо. На самом деле мы выбрали базис в $\mathfrak{C}_o$ таким образом, что матричное представление φ алгебры L совпадает с рассмотренным ранее (в $\mathfrak{o}(7,\mathsf{F})$). Тот факт, что прежняя алгебра L состоит из образов дифференцирований алгебры $\mathfrak{C}$, допускает прямую (но утомительную!) проверку. Альтернативный подход состоит в том, чтобы определить в терминах самой алгебры $\mathfrak{C}$ некоторые дифференцирования (называемые «внутренними»), а затем показать, что они отвечают матрицам, рассмотренным ранее. Это включено в упражнения (см. упражнение 6).

Упражнения

1. Докажите, что если L — алгебра Ли, причем алгебра $[L, L]$ полупроста, то L редуктивна.

2. Проведите в подробностях рассуждение, намеченное в п. 19.2.

3. Проверьте утверждения, сделанные относительно $\mathfrak{C}_o$ в п. 19.3.

4. Проверьте, что отображение $\delta(x)$, $x \in \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$, которое определено в п. 19.3, является дифференцированием алгебры $\mathfrak{C}$.

5. Проверьте, что алгебра Кэли удовлетворяет «законам альтернативности»: $x^2y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$. Докажите, что в любой алгебре $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей законам альтернативности, эндоморфизм следующего вида в действительности является дифференцированием: $[\lambda_a, \lambda_b] + [\lambda_a, \rho_b] + [\rho_a, \rho_b]$ ($a, b \in \mathfrak{A}$, λ_a — левое умножение на a в $\mathfrak{A}$, ρ_b — правое умножение на b в $\mathfrak{A}$, скобки обозначают обычный коммутатор эндоморфизмов).

6. Детально проведите рассуждение, завершающее п. 19.3.

Замечания

Титс построил пять исключительных алгебр единым способом; детали и ссылки см. в книгах Jacobson [2], Schafer [1][1]. В характеристике p аналоги простых алгебр Ли, рассмотренных здесь, изучались в книге Seligman [1], см. Kaplansky [1], Pollack [1]. Наше построение алгебры G_2 как подалгебры в $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ восходит к Séminaire «Sophus Lie» [1], Exposé 14. (Однако там имеются ошибки в формулах.)

[1]См. также Винберг, Горбацевич, Онищик [1]*. (*Прим. ред.*)

Глава VI

Теория представлений

В этой главе L обозначает полупростую алгебру Ли (над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0), H — фиксированную картановскую подалгебру в L, Φ — систему корней, $\Delta=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ — базис в Φ, $\mathscr{W}$ — группу Вейля. Наша главная цель — изучение конечномерных L-модулей (хотя встретятся и некоторые бесконечномерные). Ввиду теоремы Вейля о полной приводимости ведущую роль в конечномерном случае играют неприводимые модули.

§ 20. *Веса и старшие векторы*

20.1. Весовые подпространства. В случае конечномерного L-модуля V из теоремы 6.4 следует, что H действует на V диагонально: $V=\coprod V_\lambda$, где λ пробегает H^*, а $V_\lambda=\{v\in V\colon h\cdot v=\lambda(h)v$ при всех $h\in H\}$. Подпространство V_λ корректно определено и для произвольного пространства V; если $V_\lambda\neq 0$, мы называем его *весовым подпространством*, а λ — *весом* пространства V (более точно, *весом подалгебры H на V*).

Примеры.

1. Превратив саму алгебру L в L-модуль посредством присоединенного представления, мы видим, что весами являются корни $\alpha\in\Phi$ (с весовым подпространством L_α размерности 1), а также 0 (с весовым подпространством H размерности ℓ).

2. Если $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, то линейная функция λ на H полностью определяется своим значением $\lambda(h)$ на базисном векторе h; так что фактически мы уже использовали веса в § 7. (Рекомендуем читателю снова просмотреть этот параграф.)

Если $\dim V=\infty$, то нет никакой уверенности, что V окажется суммой своих весовых подпространств (упражнение 2). Тем не менее, сумма V' всех весовых подпространств V_λ — всегда прямая: по существу это доказывается так же, как линейная независимость собственных векторов линейного преобразования, отвечающих различным собственным значениям (упражнение 1). При этом V' является L-подмодулем в V, ввиду того что L_α ($\alpha\in\Phi$) переставляет весовые подпространства. А именно, если $x\in L_\alpha$, $v\in V_\lambda$, $h\in H$, то $h\cdot x\cdot v=x\cdot h\cdot v+[h, x]\cdot v=(\lambda(h)+\alpha(h))x\cdot v$, т. е. L_α отображает V_λ в $V_{\lambda+\alpha}$. В итоге установлена

Лемма. *Пусть V — произвольный L-модуль. Тогда*

(a) *L_α отображает V_λ в $V_{\lambda+\alpha}$* ($\lambda \in H^*$, $\alpha \in \Phi$);

(b) *сумма $V' = \sum\limits_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ является прямой, и V' является L-подмодулем в V;*

(c) *если* $\dim V < \infty$, *то* $V = V'$.

20.2. Стандартные циклические модули. По определению *старший вектор* (веса λ) в L-модуле V — это ненулевой вектор $v^+ \in V_\lambda$, который аннулируется всеми подпространствами L_α (для $\alpha \succ 0$, или, что равносильно, для $\alpha \in \Delta$). Разумеется, это понятие зависит от выбора базиса Δ. Например, если алгебра L проста, а β — старший корень в Φ относительно Δ (лемма 10.4A), то любой ненулевой элемент в L_β является старшим вектором присоединенного представления алгебры L; очевидно, что других старших векторов в этом случае нет. Если $\dim V = \infty$, то старший вектор не обязательно существует. Напротив, если $\dim V < \infty$, то борелевская подалгебра (см. п. 16.3) $B(\Delta) = H + \coprod\limits_{\alpha \succ 0} L_\alpha$ имеет общий собственный вектор (который аннулируется всеми подпространствами L_α, $\alpha \succ 0$) благодаря теореме Ли, и он является старшим вектором в указанном смысле.

При изучении конечномерных неприводимых L-модулей полезно рассмотреть вначале более широкий класс L-модулей, порожденных старшим вектором. Если $V = \mathfrak{U}(L) \cdot v^+$ для старшего вектора v^+ (веса λ), то будем кратко говорить, что модуль V является *стандартным циклическим* (веса λ) и называть λ *старшим весом* для V. Строение такого модуля легко описать. Фиксируем ненулевой элемент $x_\alpha \in L_\alpha$ ($\alpha \succ 0$) и возьмем (единственный) элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Нам вновь потребуется частичное упорядочение, введенное в §10 для евклидова пространства E, но вполне применимое и для H^* ($\lambda \succ \mu$, если и только если $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней ($\lambda, \mu \in H^*$)). Утверждение (b) следующей теоремы оправдывает название «старший вес» для λ.

Теорема. *Пусть V — стандартный циклический L-модуль со старшим вектором $v^+ \in V_\lambda$. Пусть при этом $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Тогда*

(a) *V порождается векторами $y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+$ ($i_j \in \mathbb{Z}^+$); как следствие, V является прямой суммой своих весовых подпространств*;

(b) *веса в V имеют вид $\mu = \lambda - \sum\limits_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$ ($k_i \in \mathbb{Z}^+$), т. е. удовлетворяют условию $\mu \prec \lambda$*;

(c) $\dim V_\lambda = 1$, *и если $\mu \in H^*$, то* $\dim V_\mu < \infty$;

(d) *каждый подмодуль в V является прямой суммой своих весовых подпространств*;

(e) *L-модуль V неразложим, имеет единственный максимальный (собственный) подмодуль и соответственно единственный неприводимый фактормодуль*;

(f) *каждый ненулевой гомоморфный образ модуля V также является стандартным циклическим модулем веса λ.*

Доказательство. Мы имеем: $L = N^- + B$, где $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$ и $B = B(\Delta)$. Из теоремы ПБВ (следствия 17.3C и 17.3D) вытекает, что $\mathfrak{U}(L) \cdot v^+ = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B) \cdot v^+ = \mathfrak{U}(N^-) \cdot \mathsf{F}v^+$ (поскольку v^+ — общий собственный вектор для B). Алгебра $\mathfrak{U}(N^-)$ имеет базис, состоящий из мономов $y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m}$, откуда следует утверждение (a).

Вектор

$$y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+ \tag{$*$}$$

имеет вес $\lambda - \sum_j i_j \beta_j$ (лемма 20.1(a)). Выразив каждый корень β_j как неотрицательную $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию простых корней (как в § 10), получаем утверждение (b).

Очевидно, что имеется лишь конечное число векторов вида $(*)$, для которых $\sum i_j \beta_j$ равняется заданному вектору $\sum_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$. Ввиду утверждения (a) они порождают весовое подпространство V_μ, где $\mu = \lambda - \sum k_i \alpha_i$. При этом единственный вектор вида $(*)$ с весом $\mu = \lambda$ — это сам v^+, откуда следует утверждение (c).

Чтобы доказать утверждение (d), возьмем подмодуль W в V и запишем $w \in W$ как сумму векторов $v_i \in V_{\mu_i}$, принадлежащих различным весам. Нужно показать, что все векторы v_i лежат в W. В противном случае возьмем соответствующий вектор $w = v_1 + \ldots + v_n$ с минимальным значением n, $n > 1$; тогда векторы v_i не принадлежат подмодулю W. Найдем элемент $h \in H$, для которого $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$. Тогда вектор $h \cdot w = \sum \mu_i(h) v_i$ лежит в W, так же как и $(h - \mu_1(h) \cdot 1) \cdot w = (\mu_2(h) - \mu_1(h))v_2 + \ldots + (\mu_n(h) - \mu_1(h))v_n \neq 0$. Из выбора элемента w вытекает, что $v_2 \in W$, что невозможно.

Мы заключаем из утверждений (c) и (d), что каждый собственный подмодуль в V лежит в сумме весовых подпространств, отличных от V_λ, так что сумма W всех таких подмодулей по-прежнему не совпадает с V. Как следствие, V имеет единственный максимальный подмодуль и единственный неприводимый фактормодуль. Далее, V не может быть прямой суммой двух собственных подмодулей, так как оба они лежат в W. Этим доказано утверждение (e).

Наконец, утверждение (f) очевидно. □

Следствие. *Пусть L-модуль V таков, как в условии теоремы, и при этом неприводим. Тогда v^+ — единственный старший вектор в V с точностью до ненулевого скалярного множителя.*

Доказательство. Если w^+ — другой старший вектор, то $\mathfrak{U}(L) \cdot w^+ = V$ (поскольку модуль V неприводим). Следовательно, теорема одинаково применима и к v^+, и к w^+. Если вектор w^+ имеет вес λ', то $\lambda' \prec \lambda$ и $\lambda \prec \lambda'$

(ввиду утверждения (b)), а значит $\lambda=\lambda'$. Но тогда (согласно утверждению (c)) вектор w^+ пропорционален v^+. $\square$

20.3. Теоремы существования и единственности. Мы хотим показать, что для каждого $\lambda\in H^*$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) неприводимый стандартный циклический L-модуль старшего веса λ, который может быть и бесконечномерным. Доказать единственность нетрудно (рассуждение аналогично доказательству теоремы 14.2, но менее сложно).

Теорема A. *Пусть V, W — стандартные циклические модули старшего веса λ. Если V и W неприводимы, то они изоморфны.*

Доказательство. Образуем L-модуль $X=V\oplus W$. Если v^+, w^+ — старшие векторы веса λ в V, W соответственно, то пусть $x^+=(v^+, w^+)\in X$, так что x^+ — старший вектор веса λ. Порожденный им (стандартный циклический) L-подмодуль в X обозначим Y, и пусть $p\colon Y\to V$, $p'\colon Y\to W$ — отображения, индуцированные проектированием модуля X на первое и второе слагаемое. Очевидно, что p, p' являются гомоморфизмами L-модулей; поскольку $p(x^+)=v^+$, $p'(x^+)=w^+$, ясно также, что $\operatorname{Im} p=V$, $\operatorname{Im} p'=W$. Согласно теореме 20.2(e), V и W изоморфны как неприводимые фактор-модули стандартного циклического модуля Y. $\square$

Теперь рассмотрим проблему существования. Оставляя в стороне все связанное с неприводимостью, приходим к следующему вопросу: как вообще можно построить стандартный циклический модуль? Усматриваются два пути к его решению, которые приводят к одинаковым результатам.

Во-первых, рассмотрим построение индуцированного модуля (аналогичное приемам, применяемым в теории представлений конечных групп). Оно основывается на наблюдении, что стандартный циклический модуль, рассмотренный как B-модуль (как и выше, $B=B(\Delta)$), содержит одномерный подмодуль, натянутый на данный старший вектор. Соответственно начнем с одномерного векторного подпространства D_λ с базисом v^+ и определим действие алгебры B на D_λ по правилу $\left(h+\sum\limits_{\alpha\succ 0} x_\alpha\right)\cdot v^+ = h\cdot v^+=\lambda(h)v^+$ для фиксированного $\lambda\in H^*$. Читатель может легко убедиться, что эта операция превращает D_λ в B-модуль. Разумеется, D_λ точно так же является и $\mathfrak{U}(B)$-подмодулем, так что можно образовать тензорное произведение $Z(\lambda)=\mathfrak{U}(L)\otimes_{\mathfrak{U}(B)} D_\lambda$, которое становится модулем над алгеброй $\mathfrak{U}(L)$ при ее естественном (левом) действии.

Мы утверждаем, что модуль $Z(\lambda)$ — *стандартный циклический веса* λ. С одной стороны, ясно, что $1\otimes v^+$ порождает $Z(\lambda)$. С другой стороны, этот вектор ненулевой, поскольку $\mathfrak{U}(L)$ является свободным $\mathfrak{U}(B)$-модулем (следствие 17.3D) с базисом, состоящим из 1 и всевозможных мономов $y_{\beta_1}^{i_1}\dots y_{\beta_m}^{i_m}$. Следовательно, $1\otimes v^+$ — старший вектор веса λ. Для краткости обозначим его v^+.

Эта конструкция делает также очевидным, что если $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$, то $Z(\lambda)$ как $\mathfrak{U}(N^-)$-модуль изоморфен $\mathfrak{U}(N^-)$. Точнее, $\mathfrak{U}(L) \cong \mathfrak{U}(N^-) \otimes \mathfrak{U}(B)$ (теорема ПБВ), так что $Z(\lambda) \cong \mathfrak{U}(N^-) \otimes \mathsf{F}$ (как левые $\mathfrak{U}(N^-)$-модули).

Можно также задать $Z(\lambda)$ образующими и соотношениями. Для этого возьмем, как и выше, ненулевые элементы $x_\alpha \in L_\alpha$ $(\alpha \succ 0)$, и пусть $I(\lambda)$ — левый идеал в $\mathfrak{U}(L)$, порожденный всеми x_α $(\alpha \succ 0)$ вместе со всеми $h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1$ $(\alpha \in \Phi)$. Заметим, что эти образующие идеала $I(\lambda)$ аннулируют старший вектор v^+ модуля $Z(\lambda)$. Значит, это верно и для всего $I(\lambda)$, и существует канонический гомоморфизм левых $\mathfrak{U}(L)$-модулей $\mathfrak{U}(L)/I(\lambda) \to Z(\lambda)$, который отображает смежный класс единицы в старший вектор v^+. Снова используя ПБВ-базис в $\mathfrak{U}(L)$, мы видим, что это отображение переводит смежные классы алгебры $\mathfrak{U}(B)$ в одномерный модуль $\mathsf{F}v^+$, откуда следует, что оно взаимно однозначно. Иначе говоря, $\mathfrak{U}(L)$-модули $Z(\lambda)$ и $\mathfrak{U}(\lambda)/I(\lambda)$ изоморфны.

Теорема B. *Пусть $\lambda \in H^*$. Тогда существует неприводимый стандартный циклический модуль $V(\lambda)$ веса λ.*

Доказательство. Модуль $Z(\lambda)$ (построенный выше) является стандартным циклическим веса λ и имеет единственный максимальный подмодуль $Y(\lambda)$ (теорема 20.2(d)). Следовательно, модуль $V(\lambda) = Z(\lambda)/Y(\lambda)$ является неприводимым и стандартным циклическим веса λ (теорема 20.2(e)). □

Остаются две главные проблемы: (1) определить, какие из модулей $V(\lambda)$ конечномерны; (2) для таких $V(\lambda)$ точно определить, какие веса μ в них встречаются и с какими кратностями. Следующие параграфы посвящены решению этих проблем.

Упражнения

1. Докажите, что если V — произвольный L-модуль, то сумма его весовых подпространств — прямая.

2. (a) Пусть неприводимый L-модуль V имеет хотя бы одно (ненулевое) весовое подпространство. Докажите, что V является прямой суммой своих весовых подпространств.

(b) Пусть V — неприводимый L-модуль. Докажите, что V имеет (ненулевое) весовое подпространство, если и только если для всех $v \in V$ подмодуль $\mathfrak{U}(H) \cdot v$ конечномерен, а также если и только если для всех $v \in V$ конечномерен подмодуль $\mathfrak{A} \cdot v$, где $\mathfrak{A}$ — подалгебра с единицей, порожденная в $\mathfrak{U}(H)$ произвольным элементом $h \in H$.

(c) Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом (x, y, h). Покажите, что элемент $1 - x$ необратим в алгебре $\mathfrak{U}(L)$ и потому лежит в каком-то максимальном левом идеале I. Положим $V = \mathfrak{U}(L)/I$, тогда V является неприводимым L-модулем. Докажите, что образы всех элементов $1, h, h^2, \ldots$

линейно независимы в V (так что $\dim V=\infty$). Для этого используйте соотношение

$$(x-1)^r h^s \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I}, & r>s, \\ (-2)^r r!\cdot 1 \pmod{I}, & r=s. \end{cases}$$

Получите как следствие, что V не имеет (ненулевых) весовых подпространств.

3. Опишите веса и старшие векторы естественных представлений линейных алгебр Ли типов $\mathsf{A}_\ell-\mathsf{D}_\ell$, рассмотренных в п. 1.2.

4. Пусть $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $\lambda\in H^*$. Докажите, что модуль $Z(\lambda)$, построенный как в упражнении 7.7, для $\lambda=\lambda(h)$ изоморфен модулю $Z(\lambda)$ из п. 20.3. Докажите, что $\dim V(\lambda)<\infty$, если и только если $\lambda(h)$ — неотрицательное целое число.

5. Для $\mu\in H^*$ пусть $\mathscr{P}(\mu)$ — количество различных множеств неотрицательных целых чисел k_α $(\alpha\succ 0)$, для которых $\mu=\sum\limits_{\alpha\succ 0} k_\alpha\alpha$. Найдя базис для $Z(\lambda)_\mu$, докажите, что $\dim Z(\lambda)_\mu=\mathscr{P}(\lambda-\mu)$.

6. Докажите, что левый идеал $I(\lambda)$, введенный в п. 20.3, порождается уже элементами x_α, $h_\alpha-\lambda(h_\alpha)\cdot 1$ с простыми α.

7. Не используя построение индуцированного модуля в п. 20.3, докажите, что $I(\lambda)\cap\mathfrak{U}(N^-)=0$, откуда следует, что $I(\lambda)$ — собственный идеал в $\mathfrak{U}(L)$. [Покажите, что аналогичный левый идеал $I'(\lambda)$ — собственный в $\mathfrak{U}(B)$ и при этом $I(\lambda)=\mathfrak{U}(N^-)I'(\lambda)$ по теореме ПБВ.]

8. Докажите, что для любого натурального числа d количество различных неприводимых L-модулей $V(\lambda)$ размерности не выше чем d конечно. Отсюда получите, что число неизоморфных L-модулей размерности не выше чем d конечно. [Если $\dim V(\lambda)<\infty$, рассмотрите $V(\lambda)$ как S_α-модуль для каждого $\alpha\succ 0$; заметьте, что $\lambda(h_\alpha)\in\mathbb{Z}$ и что $V(\lambda)$ содержит S_α-подмодуль размерности $\lambda(h_\alpha)+1$.]

9. Проверьте следующее описание единственного максимального подмодуля $Y(\lambda)$ в $Z(\lambda)$ (см. п. 20.3): если $v\in Z(\lambda)_\mu$, $\lambda-\mu=\sum\limits_{\alpha\succ 0} c_\alpha\alpha$ $(c_\alpha\in\mathbb{Z}^+)$, то заметим, что вектор $\prod\limits_{\alpha\succ 0} x_\alpha^{c_\alpha}\cdot v$ имеет вес λ (положительные корни расположены в произвольном фиксированном порядке) и потому отличается от старшего вектора v^+ скалярным множителем. Докажите, что если этот множитель равен 0 при любом возможном выборе чисел c_α (см. упражнение 5), то $v\in Y(\lambda)$. Обратно, докажите, что $Y(\lambda)$ является линейной оболочкой всех таких весовых векторов v для весов $\mu\neq\lambda$.

10. Старший вектор w^+ веса μ в $Z(\lambda)$ индуцирует гомоморфизм L-модулей $\varphi\colon Z(\mu)\to Z(\lambda)$, образ которого им порождается. Докажите, что гомоморфизм φ инъективен.

11. Пусть V — произвольный конечномерный L-модуль, $\lambda \in H^*$. Постройте в L-модуле $W = \mathbb{Z}(\lambda) \otimes V$ цепь подмодулей $W = W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ $\ldots \supset W_{n+1} = 0$ ($n = \dim V$), в которой модуль W_i / W_{i+1} изоморфен $Z(\lambda + \lambda_i)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — веса модуля V в подходящем порядке (взятые с кратностями).

Замечания

Вопрос существования весовых подпространств в бесконечномерных модулях рассмотрен в заметке Lemire [1]; оттуда взято упражнение 2. Модули $Z(\lambda)$ подробно исследуются в работе Verma [1] и позже в работах Бернштейна, И. Гельфанда и С. Гельфанда [1], [2], [3]. Верма, в частности, показал, что пространство L-гомоморфизмов $Z(\mu) \to Z(\lambda)$ имеет размерность над F либо 0, либо 1, и получил достаточное условие для второго случая. Затем указанными выше тремя авторами была доказана (предполагавшаяся) необходимость этого условия. См. Dixmier [1], гл. 7.

§ 21. *Конечномерные модули*

21.1. Необходимое условие конечномерности. Пусть V — конечномерный неприводимый L-модуль. Тогда V имеет хотя бы один старший вектор (однозначно определенного веса λ), который порождает весь модуль V (ввиду неприводимости). Следовательно, модуль V изоморфен $V(\lambda)$ (теоремы A и B из п. 20.3).

Если α_i — простой корень, то пусть S_i $(= S_{\alpha_i})$ — соответствующий экземпляр алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ в L. Тогда V является также (конечномерным) модулем над S_i, а старший вектор относительно L будет старшим и относительно S_i. В частности, имеется старший вектор веса λ; его вес относительно картановской подалгебры $H_i \subset S_i$ полностью определяется скаляром $\lambda(h_i)$, $h_i = h_{\alpha_i}$. Но тогда из теоремы 7.2 следует, что $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число. Доказана

Теорема. *Если V — конечномерный неприводимый L-модуль со старшим весом λ, то $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число* ($1 \leqslant i \leqslant \ell$).

Из п. 7.2 вытекает и более общий факт: если V — любой конечномерный L-модуль, μ — его вес, то $\mu(h_i) = \langle \mu, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}$ при $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Поэтому веса конечномерного модуля являются и «весами» в смысле абстрактной теории, развитой в § 13, так что далее мы можем пользоваться всеми ее результатами. Заметим, что на языке § 13 старший вес λ в конечномерном модуле $V(\lambda)$ называется д о м и н а н т н ы м. Чтобы избежать недоразумений, мы будем и далее называть весами все элементы из H^*, а линейная функция λ, для которой все $\lambda(h_i)$ (а тогда и все $\lambda(h_\alpha)$) целые, будет называться *целочисленной*. Если все $\lambda(h_i)$ — неотрицательные целые числа, то назовем функцию λ *доминантной целочисленной*. Как следствие, множество Λ всех целочисленных линейных функций является решеткой в H^* (или, что равносильно, в вещественном евклидовом пространстве, порожденном корнями) и содержит решетку корней. Как и в § 13, множество доминантных целочисленных линейных функций обозначается Λ^+.

Пригодится и еще одно обозначение: *если V — некоторый L-модуль, то $\Pi(V)$ будет обозначать множество всех его весов.* В случае $V = V(\lambda)$ будем писать $\Pi(\lambda)$.

21.2. Достаточное условие конечномерности.

Теорема. *Если $\lambda \in H^*$ — доминантный целочисленный вес, то неприводимый L-модуль $V = V(\lambda)$ конечномерен и группа $\mathscr{W}$ действует на множестве его весов $\Pi(\lambda)$, причем* $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ *при* $\sigma \in \mathscr{W}$.

Следствие. *Отображение $\lambda \mapsto V(\lambda)$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между Λ^+ и классами изоморфных конечномерных неприводимых L-модулей.*

Доказательство следствия. Вытекает из предыдущей теоремы ввиду теоремы 21.1 и теорем A, B из п. 20.3. □

Доказательство теоремы. Будет удобно начать с некоторых сведений о коммутаторах в $\mathfrak{U}(L)$. Фиксируем в L стандартные образующие $\{x_i, y_i\}$.

Лемма. *В $\mathfrak{U}(L)$ выполняются следующие тождества при $k \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant \ell$:*

(a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$ *при* $i \neq j$;

(b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$;

(c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k\cdot 1 - h_i)$.

Доказательство. Тождество (a) вытекает из того, что $\alpha_j - \alpha_i$ при $i \neq j$ не является корнем (лемма 10.1).

Тождество (b) докажем индукцией по k. В случае $k = 0$ имеем $[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j)y_i$ (см. п. 18.1). В общем случае левая часть равна

$$h_j y_i^{k+1} - y_i^{k+1} h_j = (h_j y_i^k - y_i^k h_j) y_i + y_i^k (h_j y_i - y_i h_j) = \\ = -k\alpha_i(h_j) y_i^k y_i + y_i^k(-\alpha_i(h_j) y_i) = -(k+1)\alpha_i(h_j) y_i^{k+1}$$

с учетом индуктивного предположения для предпоследнего шага.

Докажем тождество (c). Мы имеем $[x_i, y_i^{k+1}] = x_i y_i^{k+1} - y_i^{k+1} x_i = [x_i, y_i] y_i^k + y_i[x_i, y_i^k] = h_i y_i^k + y_i [x_i, y_i^k]$. Теперь применим индукцию по k и формулу (b) (заменив $k+1$ на k). □

Доказательство теоремы разобьем на шаги. Его идея состоит в том, чтобы показать, что группа $\mathscr{W}$ действует транзитивно на множестве весов модуля V, и потому это множество конечно (см. доказательство теоремы 18.3). Для удобства обозначим представление алгебры L, соответствующее модулю V, через $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$. Фиксируем старший вектор v^+ в V (веса λ) и множество $m_i = \lambda(h_i)$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$. По предположению m_i — неотрицательные целые числа.

1. Справедливо равенство $y_i^{m_i+1}\cdot v^+=0$. Пусть $w=y_i^{m_i+1}\cdot v^+$. Согласно утверждению (a) из леммы, $x_j\cdot w=0$ при $i\neq j$. С другой стороны, ввиду утверждений (b) и (c) мы имеем

$$x_iy_i^{m_i+1}\cdot v^+=y_i^{m_i+1}x_i\cdot v^+-(m_i+1)y_i^{m_i}\cdot(m_iv^+-m_iv^+)=0,$$

т.е. $x_i\cdot w=0$. При $w\neq 0$ в V нашелся бы старший вектор веса $\lambda-(m_i+1)\alpha_i\neq\neq\lambda$, вопреки следствию 20.2.

2. *При $1\leqslant i\leqslant\ell$ модуль V содержит ненулевой конечномерный S_i-модуль.* Подпространство, натянутое на v^+, $y_i\cdot v^+$, $y_i^2\cdot v^+$, $\ldots$, $y_i^{m_i}\cdot v^+$, инвариантно относительно y_i согласно шагу 1. Оно также инвариантно относительно h_i, поскольку каждый из этих векторов принадлежит некоторому весовому подпространству; поэтому оно инвариантно и относительно x_i, что вытекает из утверждения (c) (и индукции по индексу k).

3. *Модуль V является суммой конечномерных S_i-подмодулей.* Пусть V' обозначает сумму всех таких подмодулей в V. Тогда $V'\neq 0$ согласно шагу 2. С другой стороны, пусть W — любой конечномерный S_i-подмодуль в V. Линейная оболочка всех подпространств $x_\alpha W$ $(\alpha\in\Phi)$ заведомо конечномерна и при этом S_i-инвариантна. Поэтому подпространство V' инвариантно относительно L, и $V'=V$ ввиду неприводимости V.

4. *При $1\leqslant i\leqslant\ell$ отображения $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ являются локально нильпотентными эндоморфизмами модуля V* (см. п. 18.3). Действительно, если $v\in V$, то ввиду шага 3 v лежит в конечной сумме конечномерных S_i-подмодулей (следовательно, в конечномерном S_i-подмодуле). На таком модуле $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ нильпотентны (см. п. 6.4).

5. *Отображение $s_i=\exp\varphi(x_i)\exp\varphi(-y_i)\exp\Phi(x_i)$ корректно определено и является автоморфизмом модуля V.* Это непосредственно следует из шага 4 (снова см. п. 18.3!)

6. *Если μ — некоторый вес в V, то $s_i(V_\mu)=V_{\sigma_i\mu}$ (σ_i — отражение относительно α_i).* Подпространство V_μ лежит в конечномерном S_i-подмодуле V' (см. шаг 3), а $s_i|_{V'}$ совпадает с автоморфизмом τ, построенным в п. 7.2; наше утверждение следует теперь из сказанного в п. 7.2.

7. *Множество весов $\Pi(\lambda)$ инвариантно относительно $\mathscr{W}$, и $\dim V_\mu=\dim V_{\sigma\mu}$ $(\mu\in\Pi(\lambda),\ \sigma\in\mathscr{W})$.* Так как элементы $\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell$ порождают $\mathscr{W}$ (теорема 10.3(d)), это утверждение вытекает из шага 6.

8. *Множество $\Pi(\lambda)$ конечно.* Из леммы 13.2B очевидна конечность множества функций $\mathscr{W}$-эквивалентных всем доминантным целочисленным линейным функциям $\mu\prec\lambda$. Но это множество включает $\Pi(\lambda)$, что видно из теоремы 20.2 в сочетании с шагом 7.

9. *Размерность модуля V конечна.* Мы знаем из теоремы 20.2, что $\dim V_\mu$ конечно для всех $\mu\in\Pi(\lambda)$. Вместе с шагом 8 это доказывает наше утверждение. $\square$

21.3. Серии и диаграммы весов. Мы остаемся в конечномерной ситуации, $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$. Пусть $\mu \in \Pi(\lambda)$, $\alpha \in \Phi$. Лемма 20.1 показывает, что подпространство W, порожденное в V всеми весовыми подпространствами $V_{\mu+i\alpha}$ $(i \in \mathbb{Z})$, инвариантно относительно S_α. Из п. 7.2 и теоремы Вейля о полной приводимости вытекает, что веса в $\Pi(\lambda)$ вида $\mu + i\alpha$ образуют связную строку (α-*серию, порожденную весом* μ, что обобщает понятие α-серии, порожденной корнем β в присоединенном представлении). При этом отражение σ_α переворачивает эту строку. Если строка состоит из $\mu - r\alpha, \ldots, \mu, \ldots, \mu + q\alpha$, то $r - q = \langle \mu, \alpha \rangle$. Отсюда ввиду п. 13.4 вытекает

Предложение. *Если* $\lambda \in \Lambda^+$, *то множество* $\Pi(\lambda)$ *насыщенно в смысле п.* 13.4. *Как следствие, необходимое и достаточное условие, при котором* $\mu \in \Lambda$ *принадлежит множеству* $\Pi(\lambda)$, *заключается в том, чтобы вес* μ *и все* $\mathscr{W}$*-эквивалентные ему веса были* $\prec \lambda$.

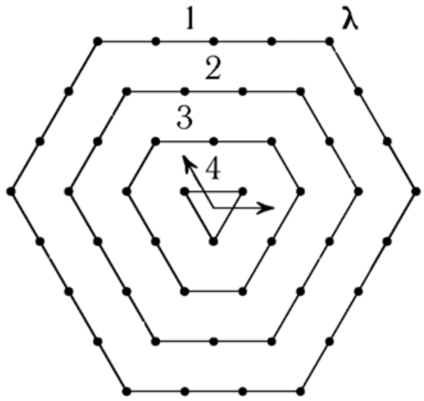


Рис. 6

При rank $\Phi \leqslant 2$ все это легко увидеть, нарисовав диаграмму весов. Например, пусть $L = \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ (тип A_2) с фундаментальными доминантными целочисленными линейными функциями (см. п. 13.2) λ_1, λ_2. На рис. 6 показана диаграмма весов для $V(\lambda)$, $\lambda = 4\lambda_1 + 3\lambda_2$. Точками обозначены веса. Здесь показаны и кратности, которые возрастают от 1 до 4 (кратность $\dim V_\lambda$ возрастает на 1 при переходе от одной «оболочки» к следующей внутренней, пока оболочки не становятся треугольниками, и тогда кратность стабилизируется). Простое поведение кратностей — специфическая черта типа A_2 (Antoine, Speiser [1]). Для других систем корней ситуация может оказаться гораздо сложнее; подробное обсуждение кратностей см. в §22 ниже.

21.4. Образующие и соотношения для $V(\lambda)$. Переход от модуля $Z(\lambda)$ к его гомоморфному образу $V(\lambda)$ можно описать более точно в случае, когда λ — доминантная целочисленная функция. Далее в тексте это не потребуется, но представляет самостоятельный интерес. Фактически мы воспроизведем часть доказательства теоремы 21.2.

Вспомним, что согласно п. 20.3 модуль $Z(\lambda)$ изоморфен $\mathfrak{U}(L)/I(\lambda)$, где $I(\lambda)$ — левый идеал в $\mathfrak{U}(L)$, порожденный всеми элементами x_α $(\alpha \succ 0)$ и всеми $h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1$ $(\alpha \in \Phi)$. Эквивалентно, $I(\lambda)$ является аннулятором старшего вектора в $Z(\lambda)$. Фиксируем теперь доминантную целочисленную линейную функцию λ, и пусть $J(\lambda)$ — левый идеал в $\mathfrak{U}(L)$, который аннулирует старший вектор в $V(\lambda)$. Включение $I(\lambda) \subset J(\lambda)$ индуцирует каноническое отображение $Z(\lambda) = \mathfrak{U}(L)/I(\lambda) \to V(\lambda) \cong \mathfrak{U}(L)/J(\lambda)$. При доказательстве теоремы 21.2 мы видели, что $y_i^{m_i+1} \in J(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, где $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$.

Теорема. *Пусть* $\lambda \in \Lambda^+$, $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$. *Тогда идеал* $I(\lambda)$ *вместе со всеми* $y_i^{m_i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ *порождает* $J(\lambda)$.

Доказательство. Допустим, что мы умеем доказывать конечномерность модуля $V'(\lambda)=\mathfrak{U}(L)/J'(\lambda)$, где $J'(\lambda)$ — левый идеал, натянутый на $I(\lambda)$ и все элементы $y_i^{m_i+1}$. Если модуль $V'(\lambda)$ ненулевой, то он стандартный циклический и потому неприводимый (теорема 20.2(d) с учетом теоремы Вейля о полной приводимости). Но из включения $J'(\lambda)\subset J(\lambda)$ вытекает, что $V(\lambda)$ является гомоморфным образом для $V'(\lambda)$, а значит $V'(\lambda)\cong V(\lambda)$. Как следствие, $J'(\lambda)=J(\lambda)$, что и требовалось.

В свою очередь, конечномерность модуля $V'(\lambda)$ будет доказана, если мы сумеем представить его как сумму конечномерных S_i-подмодулей $(1\leqslant i\leqslant \ell)$, поскольку тогда можно применить доказательство теоремы 21.2. Для этого *достаточно показать, что каждый элемент y_i локально нильпотентен на $V'(\lambda)$* (для x_i это, разумеется, очевидно, поскольку условие $\mu+k\alpha_i\prec\lambda$ не может выполняться при всех $k\geqslant 0$). По предположению смежный класс единицы в $V'(\lambda)$ аннулируется подходящей степенью элемента y_i (а именно, m_i+1). Из теоремы 20.2 мы знаем, что $V'(\lambda)$ порождается смежными классами всех $y_{i_1}\ldots y_{i_t}$ $(1\leqslant i_j\leqslant\ell)$. Из последующей леммы вытекает, что если элемент y_i^k аннулирует (т. е. отображает в $J'(\lambda)$) смежный класс такого монома, то y_i^{k+3} аннулирует смежный класс более длинного монома $y_{i_0}y_{i_1}\ldots y_{i_t}$. После этого локальная нильпотентность элемента y_i доказывается индукцией по длине мономов, начиная с 1.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра над F, и пусть $y, z\in\mathfrak{A}$. Тогда* $[y^k, z]=\binom{k}{1}[y, z]y^{k-1}+\binom{k}{2}[y,[y, z]]y^{k-2}+\ldots+[y,[y,\ldots,[y, z]\ldots]]$.

Доказательство проводится индукцией по k. В случае $k=1$ имеем тождество $[y, z]=[y, z]$. Индуктивный переход не составляет труда и предоставляется читателю. □

Чтобы применить эту лемму, положим $\mathfrak{A}=\mathfrak{U}(L)$, а в качестве y, z возьмем корневые векторы, принадлежащие двум отрицательным корням. Мы знаем, что $(\operatorname{ad} y)^4(z)=0$, поскольку длина серий корней не превосходит 4, и полученное в лемме тождество сводится к соотношению

$$[y^k, z]=k[y, z]y^{k-1}+\binom{k}{2}[y,[y, z]]y^{k-2}+\binom{k}{3}[y,[y,[y, z]]]y^{k-3}. \qquad \square$$

Упражнения

1. Читатель может проверить, что до сих пор мы использовали лишь транзитивность группы $\mathscr{W}$ на базисах системы Φ, но не простую транзитивность (теорема 10.3(e)). С помощью теории представлений проведите другое доказательство, а именно: существует конечномерный неприводимый модуль $V(\lambda)$, для которого все величины $\langle\lambda, \alpha\rangle$ $(\alpha\in\Delta)$ различны и положительны. Если $\sigma\in\mathscr{W}$ сохраняет Δ, то $\sigma\lambda=\lambda$, а значит $\sigma=1$.

2. Нарисуйте диаграмму весов для случая B_2, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ (в обозначениях гл. III).

3. Пусть $\lambda\in\Lambda^+$. Докажите, что 0 является весом модуля $V(\lambda)$, если и только если λ является суммой корней.

4. Вернемся к модулю $Z(\lambda)$, построенному в п. 20.3. С помощью леммы 21.2 найдите некоторые его старшие векторы при $\lambda\in\Lambda$: покажите, что смежный класс элемента $y_i^{m_i+1}$, $m_i=\langle\lambda, \alpha_i\rangle$, является старшим вектором, если значение m_i неотрицательно (см. упражнение 7.7.)

5. Пусть V — т о ч н ы й конечномерный L-модуль, $\Lambda(V)$ — подгруппа в Λ, порожденная его весами. Тогда $\Lambda(V)\supset\Lambda_r$. Покажите, что так получается любая подгруппа в Λ, включающая Λ_r.

6. Пусть $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$. Докажите, что V^* как L-модуль изоморфен $V(-\sigma\lambda)$, где $\sigma\in\mathscr{W}$ — единственный элемент в $\mathscr{W}$, отображающий Δ в $-\Delta$ (упражнение 10.9, а также упражнение 13.5.)

7. Пусть $V=V(\lambda)$, $W=V(\mu)$, где $\lambda, \mu\in\Lambda^+$. Докажите, что $\Pi(V\otimes W)= =\{\nu+\nu';\ \nu\in\Pi(\lambda),\ \nu'\in\Pi(\mu)\}$ и что $\dim(V\otimes W)_{\nu+\nu'}$ равняется

$$\sum_{\pi+\pi'=\nu+\nu'}\dim V_\pi\cdot\dim W_{\pi'}.$$

В частности, $\lambda+\mu$ имеет кратность 1, так что $V(\lambda+\mu)$ входит ровно один раз как прямое слагаемое в $V\otimes W$.

8. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ — фундаментальные доминантные веса для системы корней Φ в L (см. п. 13.1). Покажите, как построить $V(\lambda)$ для произвольного $\lambda\in\Lambda^+$ в виде прямого слагаемого в подходящем тензорном произведении модулей $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_\ell)$ (допускаются повторения).

9. Докажите лемму 21.4 и выведите из нее лемму 21.2.

10. Пусть $L=\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathsf{F})$, причем $H=\mathfrak{d}(\ell+1, \mathsf{F})\cap L$ — картановская подалгебра. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_{\ell+1}$ — координатные функции в H относительно стандартного базиса в $\mathfrak{gl}(\ell+1, \mathsf{F})$. Тогда $\sum\mu_i=0$ и $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ образуют базис в H^*, а элементы $\{\alpha_i=\mu_i-\mu_{i+1};\ 1\leqslant i\leqslant\ell\}$ составляют базис Δ для системы корней Φ. Проверьте, что $\mathscr{W}$ действует на H^*, переставляя элементы μ_i; в частности, отражение относительно α_i переставляет μ_i с μ_{i+1} и оставляет на месте остальные μ_j. Покажите также, что фундаментальные доминантные веса относительно Δ имеют вид $\lambda_k=\mu_1+\ldots+\mu_k$ $(1\leqslant k\leqslant\ell)$.

11. Пусть $V=\mathsf{F}^{\ell+1}$ $L=\mathfrak{sl}(V)$. Возьмем картановскую подалгебру H и базис $\Delta=(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ системы Φ, как в упражнении 10. Цель этого упражнения — построить неприводимые L-модули V_k $(1\leqslant k\leqslant\ell)$ со старшим весом λ_k.

(a) При $k=1$ модуль $V_1=V$ неприводим со старшим весом λ_1.

(b) В тензорном произведении $k\geqslant2$ экземпляров модуля V пусть V_k — подпространство *кососимметрических тензоров*: если $(v_1, \ldots, v_{\ell+1})$ —

канонический базис в V, то базис в V_k состоит из $\binom{\ell+1}{k}$ векторов

$$[v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}] = \sum_{\pi \in \mathscr{S}_k} \operatorname{sn}(\pi) v_{\pi(i_1)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(i_k)}, \tag{$*$}$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Покажите, что вектор $(*)$ имеет вес $\mu_{i_1} + \ldots + \mu_{i_k}$.

(c) Докажите, что L оставляет подпространство V_k инвариантным и что все веса $\mu_{i_1} + \ldots + \mu_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ различны и эквивалентны относительно $\mathscr{W}$. Получите отсюда, что подпространство V_k неприводимо и имеет старший вес λ_k. (См. упражнение 13.13.)

Замечания

Теорема 21.4 более или менее общеизвестна; наше изложение основано на добавлении к работе Verma [1]; см. также Harish-Chandra [1]; диаграммы весов для A_2 появились в работе Antouine, Speiser [1]; см. также Belinfante, Kolman [1] и Samelson [1].

§ 22. *Формула кратностей*

В этом параграфе все модули предполагаются конечномерными.

Пусть $\mu \in H^*$ — целочисленная линейная функция. Положим ее *кратность* в $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, равной $m_\lambda(\mu) = \dim V(\lambda)_\mu$ $(=0$, если μ не является весом для $V(\lambda))$. При фиксированном λ пишем просто $m(\mu)$. Наша цель — вывести рекуррентную формулу Фрейденталя для $m_\lambda(\mu)$, вычислив след элемента Казимира на $V(\lambda)_\mu$; поскольку такой элемент действует на $V(\lambda)$ как ненулевой скаляр, мы можем тогда восстановить $\dim V(\lambda)_\mu$.

22.1. Универсальный элемент Казимира. Вспомним введенное в п. 6.2 понятие элемента Казимира c_φ представления алгебры L, которое использовалось в доказательстве теоремы Вейля о полной приводимости. Имея теперь в распоряжении $\mathfrak{U}(L)$, мы можем осуществить «универсальную» конструкцию такого рода.

Рассмотрим присоединенное представление алгебры L, форма следа которого есть форма Киллинга $\varkappa$. Из § 8 легко усмотреть естественный способ построения двойственных базисов относительно $\varkappa$. Мы знаем, что если α, β — произвольные линейные функции на H, то подпространство L_α ортогонально к L_β, исключая случай $\beta = -\alpha$ (предложение 8.1). Мы знаем также, что ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно. Поэтому можно поступить следующим образом. Выберем в H некоторый базис, например стандартный базис $(h_1, \ldots, h_\ell)$ (относительно Δ), и пусть $(k_1, \ldots, k_\ell)$ — двойственный к нему базис относительно ограничения $\varkappa$ на H. Теперь возьмем в каждом из L_α $(\alpha \in \Phi)$ ненулевой вектор x_α, и пусть z_α — (единственный) элемент в $L_{-\alpha}$, для которого $\varkappa(x_\alpha, z_\alpha) = 1$. Ввиду предыдущих замечаний базисы $(h_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell;\ x_\alpha, \alpha \in \Phi)$ и $(k_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell;\ z_\alpha, \alpha \in \Phi)$ двойственны относительно k. *Предостережение*: не перепутайте x_α, z_α с нашим обычным выбором пары x_α, y_α, при котором $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$. На самом деле здесь $[x_\alpha, z_\alpha]=t_\alpha=[(\alpha, \alpha)/2]h_\alpha$ (предложение 8.3(с)).

По определению, элемент Казимира для ad — это эндоморфизм алгебры L, имеющий вид $c_{\text{ad}}=\sum\limits_{i=1}^{\ell} \operatorname{ad} h_i \operatorname{ad} k_i+\sum\limits_{\alpha\in\Phi} \operatorname{ad} x_\alpha \operatorname{ad} z_\alpha$. Такая конструкция может подсказать читателю, что нужно рассмотреть элемент $c_L=\sum\limits_{i=1}^{\ell} h_i k_i+\sum\limits_{\alpha\in\Phi} x_\alpha z_\alpha\in\mathfrak{U}(L)$. Если отображение ad продолжено (единственным образом) до гомоморфизма ассоциативных алгебр ad: $\mathfrak{U}(L)\to \to \operatorname{End} L$, то ad c_L — не что иное, как c_{ad}. По этой причине мы назовем c_L *универсальным элементом Казимира* для L. Нетрудно видеть, что c_L не зависит от выбора базиса в L (упражнение 2). Рассуждение из п. 6.2 показывает, что для любого представления φ алгебры L оператор $\varphi(c_L)$ коммутирует с $\varphi(L)$ и, как следствие, в случае неприводимого φ действует как скаляр.

Выясним, как оператор $\varphi(c_L)$ связан с элементом Казимира c_φ. Это легко сделать, если алгебра L проста, так что с этого случая мы и начнем (см. упражнение 6.6).

Лемма. *Пусть L — простая алгебра Ли, $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — невырожденные симметрические ассоциативные билинейные формы на L. Тогда найдется такой ненулевой скаляр a, что $f(x, y)=ag(x, y)$ при всех $x, y\in L$.*

Доказательство. Каждая из форм (будучи невырожденной) определяет естественный изоморфизм векторных пространств L и L^* по формуле $x\mapsto s$, где $s(y)=f(x, y)$ или $g(x, y)$. Ассоциативность гарантирует, что в действительности это изоморфизмы L-модулей (вспомним из п. 6.1, как можно превратить L^* в L-модуль). Как следствие, композиция одного из этих отображений и обратного к другому дает изоморфизм L-модулей π: $L\to L$. Но L-модуль L неприводим (ввиду простоты), и ввиду леммы Шура π является умножением на скаляр. Иначе говоря, существует такой элемент $0\neq a\in \mathsf{F}$, что если $f(x, y)=g(z, y)$ при всех $y\in L$, то $z=ax$. $\square$

Пусть φ: $L\to\mathfrak{gl}(V)$ — представление простой алгебры L. Случай $\varphi(L)=0$ тривиален. В противном случае представление φ точное (так как $\operatorname{Ker}\varphi$ — идеал в L), поэтому форма $f(x, y)=\operatorname{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$ на L невырожденна. При этом она ассоциативна, и те же свойства имеет форма Киллинга, поэтому она в силу леммы равна af, где a — ненулевой скаляр. В частности, для данного базиса в L двойственный базис относительно $\varkappa$ получается умножением на $1/a$ векторов базиса, двойственного относительно f. Это показывает, что $\varphi(c_L)=(1/a)c_\varphi$. То есть, *элемент Казимира представления φ — ненулевое кратное образа универсального элемента Казимира.*

Пусть, наконец, алгебра L полупроста. Мы отметили в п. 6.2, что различные простые идеалы в L ортогональны друг другу относительно $\varkappa$. Отсюда ясно, что двойственные базисы в предыдущих рассуждениях можно построить как объединения аналогичных двойственных базисов в простых компонентах алгебры L (относительно их форм Киллинга, являющихся ограничениями формы $\varkappa$). Следовательно, $c_L = c_{L_1} + \ldots + c_{L_t}$ ($L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$), и если φ — представление алгебры L, то каждый элемент $\varphi(c_{L_i})$ пропорционален соответствующему c_{φ_i} ($\varphi_i = \varphi|_{L_i}$), причем представление φ_i при любом i либо тривиально, либо точно. Таким образом, элемент $\varphi(c_L)$ снова очень тесно связан с c_φ, хотя и не обязательно пропорционален ему. В частности, мы снова показали, что $\varphi(c_L)$ коммутирует с $\varphi(L)$. Точное значение скаляра, определяющего $\varphi(c_L)$, для неприводимого представления φ будет определено ниже.

22.2. Следы на весовых подпространствах. Фиксируем неприводимый L-модуль $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, и пусть φ — соответствующее представление. Фиксируем также двойственные базисы в L относительно $\varkappa$, выбранные в п. 22.1. В этом пункте нам предстоит вычислить для каждого веса μ в V след эндоморфизма $\varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)$ на подпространстве V_μ. Он определен корректно, поскольку $\varphi(z_\alpha)$ отображает V_μ в $V_{\mu-\alpha}$, а затем $\varphi(x_\alpha)$ отображает $V_{\mu-\alpha}$ снова в V_μ.

Поскольку мы работаем только с одним корнем α, можно применить теорию представлений алгебры S_α (§ 7). Однако потребуются некоторые модификации, поскольку мы работаем с нестандартным базисом $(x_\alpha, z_\alpha, t_\alpha)$; он связан со стандартным базисом $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)$ по формулам $z_\alpha = [(\alpha, \alpha)/2]y_\alpha$, $t_\alpha = [(\alpha, \alpha)/2]h_\alpha$. Пусть $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ — базис неприводимого S_α-модуля со старшим весом m, использованный в формулах (a)—(c) леммы 7.2. Будет удобно заменить этот базис на $(w_0, \ldots, w_m)$, где $w_i = i![(\alpha, \alpha)^i/2^i]v_i$. После такой подстановки получаем

(a′) $t_\alpha \cdot w_i = (m-2i)[(\alpha, \alpha)/2]w_i$;

(b′) $z_\alpha \cdot w_i = w_{i+1}$ $(w_{m+1} = 0)$;

(c′) $x_\alpha \cdot w_i = i(m-i+1)[(\alpha, \alpha)/2]w_{i-1}$, $(w_{-1} = 0)$.

Следовательно,

$$x_\alpha z_\alpha \cdot w_i = (m-i)(i+1)[(\alpha, \alpha)/2]w_i. \tag{1}$$

Пусть теперь μ — любой такой вес в V, что $\mu+\alpha$ не является весом. Тогда (см. п. 21.3) α-серия, порожденная весом μ, состоит из весов $\mu, \mu-\alpha, \ldots, \mu-m\alpha$, где $m = \langle\mu, \alpha\rangle$. *В последующем рассуждении μ, α, m фиксированы.* Представление алгебры S_α на сумме весовых подпространств $W = V_\mu + V_{\mu-\alpha} + \ldots + V_{\mu-m\alpha}$ является прямой суммой неприводимых представлений (теорема Вейля), каждому из которых соответствует серия весов, инвариантная относительно σ_α. Более точно, пусть n_i $(0 \leqslant i \leqslant [m/2])$ обозначает число таких составляющих со старшим весом $(\mu - i\alpha)(h_\alpha)$. Тогда $(\mu - i\alpha) = n_0 + \ldots + n_i$. В свою очередь, $n_i = m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha)$. Для четного m это схематически показано на рис. 7.

$$\begin{array}{l}
\mu \\
\mu - \alpha \\
\mu - 2\alpha \\
\quad\vdots \\
\mu - \dfrac{m}{2}\alpha \Big\} n_{m/2} \Big\} n_{(m-2)/2} \ \ldots \ \Big\} n_2 \Big\} n_1 \Big\} n_0 \\
\quad\vdots \\
\mu - (m-2)\alpha \\
\mu - (m-1)\alpha \\
\mu - m\alpha
\end{array}$$

Рис. 7 m четно

Для каждого фиксированного k, $0 \leqslant k \leqslant m/2$, мы хотим вычислить след оператора $\varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)$ на $V_{\mu - k\alpha}$. Пусть $0 \leqslant i \leqslant k$. В типичном неприводимом S_α-слагаемом пространства W со старшим весом $m - 2i = (\mu - i\alpha)(h_\alpha)$ вектор w_{k-i} порождает весовое подпространство для веса $\mu - k\alpha$ (в прежних обозначениях). Если в формуле (1) заменить m на $m - 2i$ и i на $k - i$, мы получим:

$$\varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)w_{k-i} = (m - i - k)(k - i + 1)[(\alpha, \alpha)/2]w_{k-i}. \tag{2}$$

Количество S_α-слагаемых со старшим весом $m - 2i$ в пространстве W равно n_i, поэтому матрица отображения $\varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)$ (ограниченного на $V_{k-\mu\alpha}$) в некотором базисе из собственных векторов имеет n_i диагональных элементов вида (2). Меняя i от 0 до k, получим для $\varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)$ диагональную матрицу порядка $m(\mu - k\alpha) = n_0 + \ldots + n_k$ со следом

$$\sum_{i=0}^{k} n_i(m - i - k)(k - i + 1)\frac{(\alpha, \alpha)}{2} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}(m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha))(m - i - k)(k - i + 1)\frac{(\alpha, \alpha)}{2} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} m(\mu - i\alpha)(m - 2i)\frac{(\alpha, \alpha)}{2}. \tag{3}$$

Последнее равенство вытекает из того, что коэффициент при $m(\mu - i\alpha)$ равен величине $(\alpha, \alpha)/2$, умноженной на $(m - i - k)(k - i + 1) - (m - i - k - 1)(k - i) = m - 2i$. (Читателю следует непосредственно проверить крайний случай $i=k$.) Теперь вспомним, что $m/2=(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha)$, так что соотношение (3) принимает вид

$$\operatorname{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}} \varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{k} m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha, \alpha). \tag{4}$$

Получен ответ для весов $\mu-k\alpha$ из верхней половины «лестницы» на рис. 7. Можно ожидать аналогичного поведения и в нижней половине, так как отражение σ_α меняет местами верх и низ; в частности, $m(\mu-i\alpha)=$ $=m(\mu-(m-i)\alpha)$ при $m/2<i\leqslant m$. Воспроизводя предыдущее рассуждение при фиксированном k, $m/2<k\leqslant m$, получаем

$$\operatorname{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}} \varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{m-k-1} m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha, \alpha). \tag{5}$$

(Нужно суммировать до $m-k$, но $\varphi(z_\alpha)$ аннулирует вектор веса $\mu-k\alpha$ в S_α-слагаемом пространства W, имеющем старший вес $\mu-(m-k)\alpha$.)

Заметим, однако, что при $m/2<i\leqslant m$ мы имеем $(\mu-i\alpha, \alpha)+(\mu-$ $-(m-i)\alpha, \alpha)=(2\mu-m\alpha, \alpha)=0$, поскольку $m=2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$. Следовательно,

$$m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha, \alpha)+m(\mu-(m-i)\alpha)(\mu-(m-i)\alpha, \alpha)=0. \tag{6}$$

Отсюда видно, что к (5) можно добавить некоторые пары слагаемых: k и $m-k$, $k+1$ и $m-(k+1)$, $k+2$ и $m-(k+2)$ и т. д. (Заметим, что если $m=2i$, то в силу (6) выполняется равенство $(\mu-i\alpha, \alpha)=0$.) Иначе говоря, *соотношение* (5) *сводится к* (4) *при произвольном* k.

Наконец, если нас интересует произвольный вес ν пространства V, образуем α-серию, порожденную весом ν, и пусть последнее слагаемое $\nu+k\alpha$ играет роль μ в предшествующих формулах. Так как $m(\mu)=0$ в случае $V_\mu=0$, после некоторых ухищрений соотношение (4) принимает следующий вид *для произвольного* $\mu\in\Pi(\lambda)$:

$$\operatorname{Tr}_{V_\mu} \varphi(x_\alpha)\varphi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty} m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha, \alpha). \tag{7}$$

22.3. Формула Фрейденталя. Пусть φ, V таковы, как в п. 22.2, $\dim V>1$. Рассмотрим универсальный элемент Казимира (см. п. 22.1) $c_L=\sum_{i=1}^{\ell} h_i k_i+\sum_{\alpha\in\Phi} x_\alpha z_\alpha$. Поскольку представление φ неприводимо, $\varphi(c_L)$ является умножением на скаляр, скажем c. Фиксируем вес μ в V. Мы хотим вычислить $\operatorname{Tr}_{V_\mu} \varphi(c_L)=cm(\mu)$.

Прежде всего, $\varphi(h_i)$ — это умножение на $\mu(h_i)$ в V_μ, и аналогично для $\varphi(k_i)$. Пусть $t_\mu\in H$ удовлетворяет условиям $\mu(h)=\varkappa(t_\mu, h)$ при всех $h \in H$ (как в § 8). Положим $t_\mu = \sum_i a_i h_i$; тогда по определению $\mu(h_i) = \sum_j a_j \varkappa(h_j, h_i)$ и $\mu(k_i) = \sum_j a_j \varkappa(h_j, k_i)) = a_i$ (в силу двойственности). Следовательно, $(\mu, \mu) = \sum_{i,j} a_i a_j \varkappa(h_j, h_i) = \sum_i \mu(h_i)\mu(k_i)$, а значит

$$\sum_i \mathrm{Tr}_{V_\mu}\, \varphi(h_i)\varphi(k_i) = m(\mu)(\mu, \mu). \tag{8}$$

Вместе с формулой (7) из п. 22.2 это приводит к равенству

$$cm(\mu) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \tag{9}$$

Заметим, что *оба слагаемых $m(\mu)(\mu, \alpha)$ и $m(\mu)(\mu, -\alpha)$ появляются при суммировании (и взаимно уничтожаются), так что можно опустить индекс $i = 0$.*

Мы утверждаем, что формула (9) остается верной при произвольном $\mu \in \Lambda$, $\mu \notin \Pi(\lambda)$. В этом случае она принимает вид

$$0 = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha).$$

Действительно, если $\mu \notin \Pi(\lambda)$, то для любого $\alpha \in \Phi$ веса вида $\mu + i\alpha$ (если они существуют) должны появляться в серии весов при всех положительных или при всех отрицательных i. В последнем случае слагаемое, соответствующее весу α, равно 0; это верно и в первом случае, что можно показать аналогично доказательству формулы (6) из п. 22.2.

Предыдущие рассуждения на самом деле показывают, что при каждом фиксированном $\alpha \in \Phi$ и при любом $\mu \in \Lambda$ мы имеем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) = 0. \tag{10}$$

Как следствие,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu - i\alpha)(\mu - i\alpha, -\alpha) = m(\mu)(\mu, \alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) (суммирование следует начинать с $i = 1$, как отмечено после формулы (9)), получаем в итоге

$$cm(\mu) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha \succ 0} m(\mu)(\mu, \alpha) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \tag{12}$$

Полагая $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ (см. п. 13.3), можно записать это соотношение в виде

$$cm(\mu) = (\mu, \mu + 2\delta)m(\mu) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \qquad (13)$$

Единственный изъян этой формулы в том, что она все еще включает c. Но имеется частный случай, когда $m(\mu)$ известно, а именно $m(\lambda) = 1$. Кроме того, $m(\lambda + i\alpha) = 0$ для всех положительных корней α и всех $i \geqslant 1$. Поэтому из уравнения (13) можно получить, что $c = (\lambda, \lambda + 2\delta) = (\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta)$. (На самом деле нетрудно вычислить c и непосредственно; см. упражнение 23.4.) Эти результаты можно объединить в *формуле Фрейденталя*.

Теорема. *Пусть $V = V(\lambda)$ — неприводимый L-модуль старшего веса λ, $\lambda \in \Lambda^+$. Если $\mu \in \Lambda$, то кратность $m(\mu)$ веса μ в V определяется рекуррентной формулой*

$$((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta))m(\mu) = 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha). \quad (14)$$

Следует еще отметить, что формула Фрейденталя дает эффективный метод вычисления кратностей, начиная с $m(\lambda) = 1$. Лемма 13.4С с учетом предложения 21.3 показывает, что при $\mu \in \Pi(\lambda)$, $\mu \neq \lambda$ величина $(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta)$ не равна 0; поэтому $m(\mu) = 0$, если эта величина равна 0 и $\mu \neq \lambda$. Как следствие, $m(\mu)$ известно, как только известны все $m(\mu + i\lambda)$, $i \geqslant 1$, $\lambda \succ 0$, т. е. как только известны все $m(\nu)$, $\mu \npreceq \nu \prec \lambda$. (Конкретные примеры приведены ниже.)

На практике эффективность применения формулы Фрейденталя можно повысить за счет того, что веса, эквивалентные относительно группы Вейля, имеют одинаковую кратность (теорема 21.2). Существуют компьютерные программы, которые выполняют соответствующие вычисления. Отметим, что нормировка скалярного произведения произвольна, поскольку $m(\mu)$ возникает как частное.

22.4. Примеры. Чтобы применить формулу Фрейденталя в конкретном случае, нам нужно уметь явно вычислять билинейную форму на Λ. Выше использовалась «естественная» форма (двойственная к форме Киллинга), но ввиду предыдущих замечаний ее можно нормировать путем умножения на любой подходящий скаляр. Один популярный способ состоит в том, чтобы сделать квадраты длин всех корней равными 1, 2 и 3, причем наименьший должен равняться 1 (для каждой неприводимой компоненты в Φ). Можно также использовать скалярное произведение, участвовавшее в построении систем корней в § 12.

Пример 1. Пусть $L = \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$, $\Phi = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2$, $\lambda_1 = (1/3)(2\alpha_1 + \alpha_2)$, $\lambda_2 = (1/3)(\alpha_1 + 2\alpha_2)$. Наложим условие $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, так что $(\alpha_1, \alpha_2) = -1/2$, $(\lambda_i, \lambda_i) = 1/3$ и $(\lambda_1, \lambda_2) = 1/6$.

Положим $\lambda = \lambda_1 + 3\lambda_2$. Тогда формула Фрейденталя дает список кратностей, содержащийся в таблице 7. Для удобства читателя приведены и другие сведения. Веса сгруппированы по «уровням»: вычисление величины $m(\mu)$ требует данных лишь более высоких уровней. Читателю следует нарисовать диаграмму весов наподобие рис. 6 из п. 21.3.

Таблица 7

μ	$m(\mu)$	$(\mu+\delta,\ \mu+\delta)$	$\mu = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$
$\{\lambda$	1	28/3	$\lambda_1 + 3\lambda_2$
$\lambda - \alpha_1$	1	25/3	$-\lambda_1 + 4\lambda_2$
$\lambda - \alpha_2$	1	19/3	$2\lambda_1 + \lambda_2$
$\lambda - \alpha_1 - \alpha_2$	2	13/3	$2\lambda_2$
$\lambda - 2\alpha_2$	1	16/3	$3\lambda_1 - \lambda_2$
$\lambda - \alpha_1 - 2\alpha_2$	2	7/3	λ_1
$\lambda - 2\alpha_1 - \alpha_2$	1	13/3	$-2\lambda_1 + 3\lambda_2$
$\lambda - 3\alpha_2$	1	19/3	$4\lambda_1 - 3\lambda_2$
$\lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$	2	4/3	$-\lambda_1 + \lambda_2$
$\lambda - \alpha_1 - 3\alpha_2$	2	7/3	$2\lambda_1 - 2\lambda_2$
$\lambda - \alpha_1 - 4\alpha_2$	1	13/3	$3\lambda_1 - 4\lambda_2$
$\lambda - 2\alpha_1 - 3\alpha_2$	2	1/3	$-\lambda_2$
$\lambda - 3\alpha_1 - 2\alpha_2$	1	7/3	$-3\lambda_1 + 2\lambda_2$
$\lambda - 2\alpha_1 - 4\alpha_2$	1	4/3	$\lambda_1 - 3\lambda_2$
$\lambda - 3\alpha_1 - 3\alpha_2$	2	1/3	$-2\lambda_1$
$\lambda - 3\alpha_1 - 4\alpha_2$	1	1/3	$-\lambda_1 - 2\lambda_2$
$\lambda - 4\alpha_1 - 3\alpha_2$	1	7/3	$-4\lambda_1 + \lambda_2$
$\{\lambda - 4\alpha_1 - 4\alpha_2$	1	4/3	$-3\lambda_1 - \lambda_2$

Пример 2. Пусть L — простая алгебра типа G_2. Ее система корней построена в явном виде в п. 12.1). Напомним, что α_1 — короткий корень, а α_2 — длинный, так что $\lambda_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$. В таблице 8 приведены некоторые сведения, получаемые с помощью формулы Фрейденталя. Вес $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ здесь кратко обозначается через $m_1 m_2$. Строки индексируются старшим весом λ, столбцы — доминантным весом μ, а пересечение строки λ со столбцом μ содержит число $m_\lambda(\mu)$ (если оно не равно нулю). Рекомендуем читателю проверить для себя какую-либо часть таблицы.

Таблица 8

	00	10	01	20	11	30	02	21	40	12	31	50	03	22
00	1													
10	1	1												
01	2	1	1											
20	3	2	1	1										
11	4	4	2	2	1									
30	5	4	3	2	1	1								
02	5	3	3	2	1	1	1							
21	9	8	6	5	3	2	1	1						
40	8	7	5	5	3	2	1	1	1					
12	10	10	7	7	5	3	2	2	1	1				
31	16	14	12	10	7	6	4	3	2	1	1			
50	12	11	9	8	6	5	3	3	2	1	1	1		
03	9	7	7	5	4	4	3	2	1	1	1	0	1	
22	21	19	16	15	11	9	7	6	4	3	2	1	1	1

22.5. Формальные характеры. Пусть $\Lambda \subset H^*$, как и выше, — решетка целочисленных линейных функций, $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$. Рассмотрим формальную сумму весов $\mu \in \Pi(\lambda)$, в которой каждый вес μ появляется $m(\mu)$ раз. Обозначение «$\mu + \nu$», однако, для такой суммы не подходит, поскольку уже имеет конкретный смысл в Λ. Поэтому введем *групповое кольцо* для Λ над $\mathbb{Z}$, которое обозначается $\mathbb{Z}[\Lambda]$. По определению это свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисными элементами $e(\lambda)$, которые взаимно однозначно соответствуют элементам $\lambda \in \Lambda$, и их сложение обозначается $e(\lambda) + e(\mu)$. Этот модуль становится коммутативным кольцом, если положить $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$ и продолжить по линейности. (Это кольцо имеет единицу: $e(0)$.) Группа $\mathscr{W}$ действует на $\mathbb{Z}[\Lambda]$ естественным образом, переставляя $e(\lambda)$: $\sigma e(\lambda) = e(\sigma\lambda)$.

Далее, целесообразно определить *формальный характер* $\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$, или просто ch_λ, модуля $V(\lambda)$ как элемент $\sum\limits_{\mu \in \Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu) e(\mu) \in \mathbb{Z}[\Lambda]$. (Так как $m_\lambda(\mu) = 0$ при $\mu \notin \Pi(\lambda)$, суммирование можно распространить на все $\mu \in \Lambda$.) Например, если $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, то формальный характер модуля $V(\lambda)$ имеет вид $\mathrm{ch}_\lambda = e(\lambda) + e(\lambda - \alpha) + e(\lambda - 2\alpha) + \ldots + e(\lambda - m\alpha)$, $m = \langle \lambda, a \rangle$. Более общо, если V — произвольный (конечномерный) L-модуль, то ввиду теоремы Вейля и классификации из § 21 имеется по существу единственное разложение $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t)$, $\lambda_i \in \Lambda^+$. Поэтому $\mathrm{ch}_V = \sum\limits_{i=1}^{t} \mathrm{ch}_{\lambda_i}$ можно назвать формальным характером модуля V. Отметим, что любой элемент $\sigma \in \mathscr{W}$ оставляет ch_V инвариантным, поскольку переставляет весовые подпространства в каждом неприводимом слагаемом модуля V (теорема 21.2).

Знание характера ch_V в действительности позволяет найти неприводимые составляющие модуля V, как показывает следующее

Предложение А. *Пусть элемент* $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) e(\lambda)$, $c(\lambda) \in \mathbb{Z}$, *инвариантен относительно действия группы* $\mathscr{W}$. *Тогда* f *можно записать единственным образом как* $\mathbb{Z}$*-линейную комбинацию элементов* ch_λ $(\lambda \in \Lambda^+)$.

Доказательство. Ясно, что $f = \sum_{\lambda \in \Lambda^+} c(\lambda) \Big(\sum_{\sigma\lambda} e(\sigma\lambda) \Big)$. Для каждого такого $\lambda \in \Lambda^+$, что $c(\lambda) \neq 0$, множество доминантных весов $\mu \prec \lambda$ конечно (лемма 13.2B). Пусть M_f — совокупность всех таких μ (для всех таких λ), тогда множество M_f также конечно. Пусть элемент $\lambda \in \Lambda^+$ — максимальный со свойством $c(\lambda) \neq 0$. Положим $f' = f - c(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda$; тогда f' заведомо удовлетворяет условиям предложения. Мы знаем, что все доминантные веса μ, фигурирующие в ch_λ, удовлетворяют условию $\mu \prec \lambda$, поэтому все они лежат в M_f. Это показывает, что $M_{f'} \subset M_f$. Включение строгое, так как $\lambda \notin M_{f'}$. Проводя индукцию по $\mathrm{Card}(M_f)$, можно считать, что f' записывается в нужном виде; тогда и f имеет требуемый вид. Чтобы начать индукцию, заметим, что случай $\mathrm{Card}(M_f) = 1$ тривиален: тогда единственный доминантный вес, фигурирующий в f, — это какой-то микровес λ, поэтому $f = c(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda$, где $\mathrm{ch}_\lambda = \sum e(\sigma\lambda)$. Доказательство единственности предоставляется читателю (упражнение 8). □

Умение перемножать формальные характеры приносит пользу, как показывает следующее

Предложение В. *Пусть* V, W — (*конечномерные*) L*-модули. Тогда* $\mathrm{ch}_{V \otimes W} = \mathrm{ch}_V \cdot \mathrm{ch}_W$.

Доказательство. С одной стороны, способ, которым определяется действие алгебры L на $V \otimes W$ (см. п. 6.1), показывает, что веса в $V \otimes W$ имеют вид $\lambda + \mu$ (λ, μ — веса в V, W соответственно), причем каждый вес появляется с кратностью $\sum_{\pi + \pi' = \lambda + \mu} m_V(\pi) m_W(\pi')$ (см. упражнение 21.7). Но то же самое мы получим, формально умножив ch_V на ch_W. □

Упражнения

1. Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите без обращения к формуле Фрейденталя, что $m_\lambda(\lambda - k\alpha) = 1$ при $\alpha \in \Delta$ и $0 \leqslant k \leqslant \langle \lambda, \alpha \rangle$.

2. Докажите, что c_L лежит в центре алгебры $\mathfrak{U}(L)$ (см. п. 23.2). [Воспроизведите выкладку из п. 6.2, опустив φ.] Покажите также, что c_L не зависит от выбора базиса в L.

3. В примере 1 из п. 22.4 найдите $\mathscr{W}$-орбиты весов, тем самым проверив непосредственно, что $\mathscr{W}$-эквивалентные веса имеют одинаковую кратность (см. теорему 21.2). [См. упражнение 13.12.]

4. Проверьте кратности, указанные на рис. 6 в п. 21.3.

5. С помощью формулы Фрейденталя и сведений об A_2 из примера, приведенного в п. 22.4, вычислите кратности весов модуля $V(\lambda)$, $\lambda = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$.

В частности, проверьте, что $\dim V(\lambda) = 27$, причем вес 0 входит с кратностью 3. Нарисуйте диаграмму весов.

6. Пусть алгебра L имеет тип G_2. С помощью таблицы 2 из п. 22.4 определите все веса и их кратности для $V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_2$. Докажите, что $\dim V(\lambda) = 286$. (См. упражнение 13.12.)

7. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. Отождествим $m\lambda_1$ с числом m. С помощью предложений A и B из п. 22.5, а также теоремы 7.2 выведите *формулу Клебша—Гордана*: если $n \leqslant m$, то $V(m) \otimes V(n) \cong V(m+n) \oplus V(m+n-2) \oplus \ldots$ $\ldots \oplus V(m-n)$ (всего $n+1$ слагаемое). (См. упражнение 7.6.)

8. Докажите утверждение о единственности в предложении 22.5A.

Замечания

Доказательство формулы Фрейденталя взято из работы Jacobson [1]; см. также Freudenthal [1] и Freudenthal—de Vries [1]. О вычислительных аспектах см. Agrawala, Belinfante [1], Beck, Kolman [1], Krusemeyer [1], Burgoyne, Williamson [1]. Другой алгоритм показан в статье Demazure [1]. Данные, представленные в таблице 2, взяты из работы Springer [1].

§ 23. *Характеры*

Наша цель — доказать теорему Хариш—Чандры о «характерах», ассоциированных с бесконечномерными модулями $Z(\lambda)$, $\lambda \in H^*$ (см. п. 20.3). С помощью этой теоремы в § 24 будет получено простое алгебраическое доказательство классического результата Вейля о характерах конечномерных модулей. Предварительно мы докажем в п. 23.1 теорему Шевалле о «подъеме» инвариантов (представляющую и самостоятельный интерес). Все эти результаты не зависят от формулы Фрейденталя (см. п. 22.3).

23.1. Инвариантные полиномиальные функции. Если V — конечномерное векторное пространство, то симметрическая алгебра $\mathfrak{S}(V^*)$ (см. п. 17.1) называется алгеброй *полиномиальных функций* на V и обозначается $\mathfrak{P}(V)$. Фиксировав в V^* базис $(f_1, \ldots, f_n)$, можно отождествить $\mathfrak{P}(V)$ с алгеброй многочленов от n переменных $f_1, \ldots, f_n$. В этом пункте мы рассмотрим $\mathfrak{P}(L)$ и $\mathfrak{P}(H)$.

Поскольку решетка весов Λ порождает H^*, многочлены от $\lambda \in \Lambda$ порождают $\mathfrak{P}(H)$. С учетом процедуры поляризации (упражнение 5) для этого достаточно и степеней λ^k ($\lambda \in \Lambda$, $k \in \mathbb{Z}^+$). Теперь рассмотрим группу $\mathscr{W}$, которая действует на H^* и тем самым на $\mathfrak{P}(H)$. Пусть $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ — подалгебра, состоящая из полиномиальных функций, инвариантных относительно всех $\sigma \in \mathscr{W}$; это алгебра *$\mathscr{W}$-инвариантных полиномиальных функций* на H. (Например, если $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, λ — фундаментальный доминантный вес, то $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ как алгебра с единицей порождается элементом λ^2.) Пусть $\operatorname{Sym} f$ обозначает сумму всех различных функций, $\mathscr{W}$-эквивалентных функций

$f \in \mathfrak{P}(H)$. Ясно, что совокупность всех функций $\operatorname{Sym} \lambda^k$ ($\lambda \in \Lambda^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$) порождает $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$, так как каждый из весов $\lambda \in \Lambda$ эквивалентен относительно $\mathscr{W}$ доминантной целочисленной линейной функции (лемма 13.2A).

Пусть теперь $G = \operatorname{Int} L$ — группа, порожденная всеми автоморфизмами вида $\exp \operatorname{ad} x$, где элемент x нильпотентен. Тогда G действует естественным образом на $\mathfrak{P}(L)$ по формуле $(\sigma f)(x) = f(\sigma^{-1}x)$ ($\sigma \in G$, $f \in \mathfrak{P}(L)$). Совокупность инвариантных элементов функции обозначим $\mathfrak{P}(L)^G$. Это *G-инвариантные полиномиальные функции* на L.

Много примеров G-инвариантных полиномиальных функций можно построить с помощью теории представлений следующим образом. Пусть $\varphi: L \to \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимое (конечномерное) представление алгебры L со старшим весом $\lambda \in \Lambda^+$. Далее, пусть $z \in N = \coprod\limits_{\alpha \succ 0} L_\alpha$, $\sigma = \exp \operatorname{ad} z$. Определим новое представление $\varphi^\sigma: L \to \mathfrak{gl}(V)$ по правилу $\varphi^\sigma(x) = \varphi(\sigma(x))$, $x \in L$. (Проверьте, что действительно выполнено условие $\varphi^\sigma([x, y]) = [\varphi^\sigma x, \varphi^\sigma y]$.) Очевидно, что φ^σ также неприводимо. Если $v^+ \in V$ — старший вектор, а β — любой положительный корень, то $\varphi^\sigma(x_\beta)(v^+) - \varphi\Big(\Big(\Big(1 + \operatorname{ad} z + \dfrac{(\operatorname{ad} z)^2}{2!} + \ldots\Big)(x_\beta)\Big)(v^+) = 0$, поскольку элемент в скобках все еще принадлежит множеству N. При этом $\varphi^\sigma(h)(v^+) = \varphi(h + [z, h])(v^+) = \varphi(h)(v^+) = \lambda(h)v^+$, так как $[z, h] \in N$ и $\varphi(N)(v^+) = 0$. Другими словами, v^+ — старший вектор веса λ и для нового представления, так что представления φ и φ^σ эквивалентны (т. е. соответствующие L-модули на V изоморфны (см. п. 20.3)). Пусть $\psi_\sigma: V \to V$ — изоморфизм этих L-модулей, так что $\psi_\sigma(\varphi(x)(v)) = \varphi^\sigma(\psi_\sigma(v))$ для всех $v \in V$. Фактически это просто изменение базиса в V, и последнее уравнение показывает, что матрицы операторов $\varphi(x)$ и $\varphi^\sigma(x) = \varphi(\sigma x)$ (в фиксированном базисе) подобны. В частности, они имеют одинаковый след. Если $k \in \mathbb{Z}^+$, то отсюда вытекает, что функция $x \mapsto \operatorname{Tr}(\varphi(x)^k)$ инвариантна относительно σ. Но это полиномиальная функция: элементы матрицы $\varphi(x)$ — линейные функции на L, элементы матрицы $\varphi(x)^k$ являются многочленами от них, а след матрицы $\varphi(x)^k$ — сумма таких многочленов. Отметим также, что инвариантность функции следа не зависит от первоначального выбора базиса (или положительных корней) и даже от выбора подалгебры H, так что отображение $x \mapsto \operatorname{Tr}(\varphi(x)^k)$ в действительности инвариантно относительно всех образующих группы G (см. упражнение 16.2), а тогда и относительно G.

Теперь мы можем сопоставить $\mathfrak{P}(L)^G$ с $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ (что и составляет цель наших рассуждений). Любая полиномиальная функция на L, будучи ограниченой на H, является полиномиальной функцией на H: это становится очевидным, если базис в H расширить до базиса в L, а f записать как многочлен от элементов двойственного базиса. Если функция f является G-инвариантной, то она, в частности, инвариантна относительно каждого из внутренних автоморфизмов τ_α ($\alpha \in \Phi$), построенных в п. 14.3. Но $\tau_\alpha|_H$ — это отражение σ_α, а такие отражения порождают $\mathscr{W}$, так что $f|_H \in \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. В результате получаем гомоморфизм алгебр $\theta\colon \mathfrak{P}(L)^G \to \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$.

Теорема (Шевалле). *Гомоморфизм* θ *сюръективен.*

Доказательство (Стейнберг). Ввиду предыдущих замечаний достаточно показать, что каждый многочлен $\operatorname{Sym} \lambda^k$ ($\lambda \in \Lambda^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$) лежит в образе гомоморфизма θ. Для этого применим индукцию вверх по частичному упорядочению в Λ^+, начав с минимального веса λ — возможно, с 0. (Напомним, что по лемме 13.2B количество доминантных весов, предшествующих данному, конечно.) Так как вес λ минимален, никакой другой вес $\mu \in \Lambda^+$ не может оказаться весом неприводимого представления φ со старшим весом λ. Ввиду теорем из пп. 20.2, 21.2 все веса представления φ эквивалентны λ относительно $\mathscr{W}$ и имеют кратность 1. Получаем, что $x \mapsto \operatorname{Tr}(\varphi(x)^k)$ является G-инвариантной полиномиальной функцией f, ограничение которой на H равно $\operatorname{Sym} \lambda^k$. Значит, $\operatorname{Sym} \lambda^k = \theta(f)$.

Чтобы провести индуктивный переход, фиксируем $\lambda \in \Lambda^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть φ снова обозначает неприводимое представление старшего веса λ, а f — функцию $x \mapsto \operatorname{Tr}(\varphi(x)^k)$. Тогда $f|_H = \operatorname{Sym} \lambda^k + \sum c(\mu, k) \operatorname{Sym} \mu^k$ (теорема 21.2), где мы суммируем по $\mu \precneqq \lambda$, $\mu \in \Lambda^+$. Все слагаемые, включающие $\mu \precneqq \lambda$, можно поднять в $\mathfrak{P}(L)^G$ по предположению индукции, и в итоге можно поднять и $\operatorname{Sym} \lambda^k$. $\square$

Сделаем еще одно замечание относительно $\mathfrak{P}(L)^G$. Назовем встречавшуюся выше полиномиальную функцию $x \mapsto \operatorname{Tr}(\varphi(x)^k)$ *многочленом следа*. Если $x = x_s + x_n$ — жорданово разложение элемента x, то $\varphi(x) = \varphi(x_s) + \varphi(x_n)$ — (обычное) жорданово разложение элемента $\varphi(x)$ (см. п. 6.4). Поскольку $\varphi(x_s)$ и $\varphi(x_n)$ коммутируют, в биномиальном разложении элемента $(\varphi(x_s) + \varphi(x_n))^k$ все слагаемые, кроме $\varphi(x_s)^k$, нильпотентны и потому имеют след 0. Следовательно, многочлен следа полностью определяется своими значениями на полупростых элементах алгебры L. Доказательство теоремы Шевалле в действительности показывает, что θ отображает подалгебру $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(L)^G$, порожденную многочленами следа, на $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. На самом деле отображение $\theta|_{\mathfrak{T}}$ инъективно, а не только сюръективно: действительно, равенство $\theta(f) = 0$ означает, что $f|_H = 0$. Каждый полупростой элемент из L лежит в некоторой максимальной торической подалгебре и (см. п. 16.4) сопряжен относительно G некоторому элементу из H. Как следствие, f обращается в нуль на всех полупростых элементах из L, а значит $f = 0$ (ввиду предыдущих замечаний).

С помощью элементарных сведений из алгебраической геометрии (см. дополнение на с. 164) можно непосредственно показать, что отображение θ инъективно; как следствие, $\mathfrak{P}(L)^G$ порождается многочленами следа. (Нам, однако, эти факты не потребуются.) В п. 23.3 мы позволим себе явно выписать θ^{-1}, но читатель может легко проверить, что ход рассуждений по существу не зависит от инъективности отображения θ.

23.2. Стандартные циклические модули и характеры. Пусть $\mathfrak{Z}$ — *центр* алгебры $\mathfrak{U}(L)$, т.е. множество элементов, коммутирующих со всеми элементами $x \in \mathfrak{U}(L)$ или, что равносильно, со всеми $x \in L$. Любой автоморфизм $\sigma\colon L \to L$ продолжается единственным образом до автоморфизма алгебры $\mathfrak{U}(L)$; в частности, $G = \operatorname{Int} L$ действует на $\mathfrak{U}(L)$, отображая $\mathfrak{Z}$ на себя. В п. 23.3 потребуется следующая

Лемма. *Подалгебра $\mathfrak{Z}$ совпадает с множеством всех G-инвариантных элементов в $\mathfrak{U}(L)$.*

Доказательство. С одной стороны, $\mathfrak{Z}$ коммутирует со всеми нильпотентными элементами $x \in L$, поэтому $0 = [x, z] = \operatorname{ad} x(z)$ $(z \in \mathfrak{Z})$ и $\exp \operatorname{ad} x(z) = z$. Как следствие, все элементы $\sigma \in G$ оставляют z на месте. Обратно, пусть G оставляет на месте элемент $x \in \mathfrak{U}(L)$. Фиксируем корень $\alpha \in \Phi$ и возьмем $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$. Пусть $n = \operatorname{ad} x_\alpha$. Предположим, что $n^t \neq 0$, но $n^{t+1} = 0$. Тогда возьмем $t+1$ различных скаляров $a_1, \ldots, a_{t+1}$ в F (это возможно, так как множество F бесконечно). По предположению, элемент $1 + a_i n + (a_i^2/2!)n^2 + \ldots + (a_i^t/t!)n^t$ оставляет x на месте $(1 \leqslant i \leqslant t+1)$. Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dfrac{a_1^2}{2!} & \ldots & \dfrac{a_1^t}{t!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{t+1} & \dfrac{a_{t+1}^2}{2!} & \ldots & \dfrac{a_{t+1}^t}{t!} \end{vmatrix}$$

отличается лишь множителем $(2!\,3!\ldots t!)^{-1}$ от определителя Вандермонда $\prod\limits_{i>j}(a_i - a_j) \neq 0$. Поэтому мы можем найти скаляры $b_1, \ldots, b_{t+1}$, удовлетворяющие условию $n = \sum\limits_{i=1}^{t+1} b_i(\exp a_i n)$. (Строго говоря, это следует сделать в пространстве эндоморфизмов (конечномерного) L-подмодуля в $\mathfrak{U}(L)$, порожденного элементом x, см. упражнение 17.3.) В частности, $\operatorname{ad} x_\alpha(x) = \sum b_i \exp(\operatorname{ad} a_i x_\alpha)(x) = (\sum b_i)x$. Поскольку оператор $\operatorname{ad} x_\alpha$ нильпотентен, $\sum b_i = 0$ и, значит, $[x_\alpha, x] = 0$. Но элементы x_α порождают алгебру L, поэтому x коммутирует со всеми элементами из L и, следовательно, $x \in \mathfrak{Z}$, что и требовалось. □

Отметим, что *универсальный элемент Казимира c_L* (см. п. 22.1) *лежит в $\mathfrak{Z}$*: нужно воспроизвести выкладку из п. 6.2, устранив из нее φ.

Спросим теперь, как действует $\mathfrak{Z}$ на бесконечномерном модуле $Z(\lambda)$, $\lambda \in H^*$, который был построен в п. 20.3. Пусть v^+ — старший вектор в $Z(\lambda)$ и $z \in \mathfrak{Z}$. Заметим, что $h \cdot z \cdot v^+ = z \cdot h \cdot v^+ = \lambda(h) z \cdot v^+$ $(h \in H)$, тогда как $x_\alpha \cdot z \cdot v^+ = z \cdot x_\alpha \cdot v^+ = 0$ $(x_\alpha \in L_\alpha,\ \alpha \succ 0)$. Следовательно, $z \cdot v^+$ — другой старший вектор веса λ; согласно теореме 20.2 он должен равняться скалярному кратному вектора v^+, скажем $\chi_\lambda(z)v^+$. Полученная функция

$\chi_\lambda\colon \mathfrak{Z}\to \mathsf{F}$ является гомоморфизмом F-алгебр и называется *характером*, соответствующим весу λ.

Ясно, что множество всех векторов в $Z(\lambda)$, на которые $z\in\mathfrak{Z}$ действует как умножение на $\chi_\lambda(z)$, инвариантно относительно $\mathfrak{U}(L)$ и содержит v^+, следовательно, совпадает со всем $Z(\lambda)$. Значит, элемент $z\in\mathfrak{Z}$ действует как умножение на $\chi_\lambda(z)$ на любом подмодуле в $Z(\lambda)$ (а также на любом гомоморфном образе модуля $Z(\lambda)$).

Оказывается, не все характеры χ_λ ($\lambda\in H^*$) различны. Чтобы найти точные условия равенства характеров, назовем веса $\lambda, \mu\in H^*$ *связанными* (записывается $\lambda\sim\mu$), если $\lambda+\delta$ и $\mu+\delta$ эквивалентны относительно $\mathscr{W}$ (здесь δ — полусумма положительных корней, как в п. 13.3). Ясно, что связанность является отношением эквивалентности. Здесь нам потребуются лишь целочисленные линейные функции (т. е. элементы из Λ). Возьмем такие $x_\alpha\in L_\alpha$ ($\alpha\succ 0$), $y_\alpha\in L_{-\alpha}$, что $[x_\alpha, y_\alpha]=h_\alpha$.

Предложение. *Пусть $\lambda\in\Lambda$, $\alpha\in\Delta$. Если целое число $m=\langle\lambda, \alpha\rangle$ неотрицательно, то смежный класс элемента y_α^{m+1} в $Z(\lambda)$ является старшим вектором веса $\lambda-(m+1)\alpha$.*

Доказательство. Используем формулы из леммы 21.2 и тот факт, что $h_\alpha-\langle\lambda, \alpha\rangle\cdot 1\in I(\lambda)$ (см. п. 20.3). □

Следствие. *Пусть $\lambda\in\Lambda$, $\alpha\in\Delta$, $\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta$. Тогда $\chi_\lambda=\chi_\mu$.*

Доказательство. Поскольку σ_α переставляет положительные корни, отличные от α, и отображает α в $-\alpha$ (лемма 10.2B), $\sigma_\alpha\delta-\delta=-\alpha$. Следовательно, $\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta=\sigma_\alpha\lambda-\alpha=\lambda-(\langle\lambda, \alpha\rangle+1)\alpha$. По предположению $\langle\lambda, \alpha\rangle\in\mathbb{Z}$. Если это число неотрицательно, то предыдущее предложение показывает, что $Z(\lambda)$ содержит гомоморфный образ модуля $Z(\mu)$ (отличный от 0), следовательно $\chi_\lambda=\chi_\mu$ ввиду предыдущих замечаний. Если значение $\langle\lambda, \alpha\rangle$ отрицательно, то $\langle\mu, \alpha\rangle=\langle\lambda, \alpha\rangle-2(\langle\lambda, \alpha\rangle+1)=-\langle\lambda, \alpha\rangle-2$ неотрицательно (кроме случая $\langle\lambda, \alpha\rangle=-1$, когда $\mu=\lambda$ и доказательство не требуется). Поэтому можно применить предложение, заменив λ на μ, и снова $\chi_\lambda=\chi_\mu$. □

Следствие показывает, что две целочисленные линейные функции, связанные простым отражением, определяют один и тот же характер. Поскольку отношение связанности транзитивно, а $\mathscr{W}$ порождается простыми отражениями (теорема 10.3(d)), мы можем усилить доказанное утверждение.

Следствие. *Пусть $\lambda, \mu\in\Lambda$. Если $\lambda\sim\mu$, то $\chi_\lambda=\chi_\mu$.*

Это — легкая половина теоремы Хариш-Чандры (см. п. 23.3)). Мы увидим ниже, как распространить ее на все веса $\lambda, \mu\in H^*$, но фактически в книге потребуется лишь целочисленный случай.

23.3. Теорема Хариш-Чандры.

Теорема (Хариш-Чандра). *Пусть $\lambda, \mu\in H^*$. Если $\chi_\lambda=\chi_\mu$, то $\lambda\sim\mu$.*

Настоящий пункт посвящен доказательству этой теоремы. По существу его идея не очень трудна, но требуется тщательность в работе с многочисленными отображениями. Вначале фиксируем подходящий базис в L, скажем $\{h_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \ell;\ x_\alpha,\ y_\alpha,\ \alpha \succ 0\}$, где $h_i = h_{\alpha_i}$, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Построим ПБВ-базисы для $\mathfrak{U}(L)$ и $\mathfrak{U}(H)$, отвечающие упорядочению, при котором вначале идут элементы y_α, затем h_i, затем x_α. Определим линейное отображение $\xi\colon \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{U}(H)$, отобразив каждый базисный моном от $h_1, \ldots, h_\ell$ в себя, а остальные элементы базиса — в 0.

Пусть v^+ — старший вектор неприводимого модуля $V(\lambda)$, $\lambda \in H^*$. Посмотрим, как на него действует элемент $z \in \mathfrak{Z}$ (выраженный через указанный ПБВ-базис). Если в мономе $\prod\limits_{\alpha\succ 0} y_\alpha^{i_\alpha} \prod\limits_i h_i^{k_i} \prod\limits_{\alpha\succ 0} x_\alpha^{j_\alpha}$ некоторое j_α положительно, то он аннулирует вектор v^+, а если все j_α равны 0, но некоторое i_α положительно, то он отображает вектор v^+ сначала в кратный ему, а затем в вектор меньшего веса. Поэтому в собственное значение $\chi_\lambda(z)$ вносят вклад лишь те мономы, в которых $i_\alpha = 0 = j_\alpha$ для всех α. Отсюда непосредственно вытекает, что (ξ то же, что и выше):

$$\chi_\lambda(z) = \lambda(\xi(z)), \quad z \in \mathfrak{Z}. \tag{$*$}$$

(Отображение $\lambda\colon H \to \mathsf{F}$ канонически продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр[1] $\mathfrak{U}(H) \to \mathsf{F}$.) Отметим, что ограничение отображения ξ на $\mathfrak{Z}$ является гомоморфизмом а л г е б р в силу соотношения $(*)$.

В поле зрения должен когда-то появиться и элемент δ. Это происходит следующим образом. Отобразив каждое h_i в $h_i - 1$, построим линейное отображение $H \to \mathfrak{U}(H)$. Это гомоморфизм алгебр Ли (все лиевы произведения равны 0), поэтому он продолжается до гомоморфизма $\eta\colon \mathfrak{U}(H) \to \mathfrak{U}(H)$. Ясно, что η — автоморфизм (обратный к нему отображает h_i в $h_i + 1$). Пусть $\psi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{U}(H)$ — результирующий гомоморфизм $\eta \circ \xi|_{\mathfrak{Z}}$. Напомним (см. п. 13.3), что $\delta = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ (λ_i — фундаментальные доминантные веса в Λ), поэтому $\delta(h_i) = 1$. Как следствие,

$$(\lambda + \delta)(h_i - 1) = (\lambda + \delta)(h_i) - (\lambda + \delta)(1) = (\lambda(h_i) + 1) - 1 = \lambda(h_i).$$

Поэтому

$$(\lambda + \delta)(\psi(z)) = \lambda(\xi(z)) \quad (z \in \mathfrak{Z},\ \lambda \in H^*). \tag{$**$}$$

В сочетании с соотношением $(*)$ это означает, что $\chi_\lambda(z) = (\lambda + \delta)(\psi(z))$. Пусть теперь функция λ — ц е л о ч и с л е н н а я. Согласно второму следствию из п. 23.2, все эквивалентные веса $\sigma(\lambda + \delta)$ совпадают на $\psi(z)$; это равносильно тому, что $\mu = \lambda + \delta$ принимает одинаковые значения на всех элементах, $\mathscr{W}$-эквивалентных $\psi(z)$. Поскольку это верно для всех $\lambda \in \Lambda$ и

---

[1] Если отождествить $\mathfrak{U}(H) = \mathfrak{S}(H)$ с алгеброй полиномиальных функций на H^*, то $\lambda(\varphi)$ при $\varphi \in \mathfrak{U}(H)$ — это не что иное, как значение функции φ в точке λ. (*Прим. ред.*)

как следствие, для всех $\mu \in \Lambda$, каждая линейная функция принимает одно и то же значение на всех элементах, $\mathscr{W}$-эквивалентных $\psi(z)$. Но тогда $\mathscr{W}$ оставляет $\psi(z)$ $(z \in \mathfrak{Z})$ на месте. Можно заменить здесь $\mathfrak{U}(H)$ симметрической алгеброй $\mathfrak{S}(H)$, поскольку алгебра H абелева (пример 17.2). В итоге заключаем, что ψ отображает $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ (совокупность элементов из $\mathfrak{S}(H)$, инвариантных относительно $\mathscr{W}$).

Мы показали, что если $\lambda \in H^*$, то $\chi_\lambda(z) = (\lambda + \delta)(\psi(z))$, $z \in \mathfrak{Z}$. При этом элемент $\psi(z)$ инвариантен относительно $\mathscr{W}$, поэтому правая часть не изменится, если заменить $\lambda + \delta$ на $\sigma(\lambda + \delta)$. Следовательно, если $\lambda \sim \mu$ (μ связано с λ посредством σ), то $\chi_\lambda(z) = \chi_\mu(z)$. Это показывает, что второе *следствие из п. 23.2, как было там отмечено, можно распространить на все λ, $\mu \in H^*$.*

Мы видели, что $\chi_\lambda(z) = (\lambda + \delta)(\psi(z))$, $\lambda \in H^*$. Предположим, что $\chi_\lambda = \chi_\mu$. Тогда $\lambda + \delta$ и $\mu + \delta$ совпадают на элементе $\psi(\mathfrak{Z})$, лежащем в $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$. Чтобы доказать теорему Хариш-Чандры, нужно показать, что $\lambda + \delta$ и $\mu + \delta$ эквивалентны относительно $\mathscr{W}$. Ввиду нижеследующей леммы достаточно доказать, что $\psi(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$.

Лемма. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in H^*$ принадлежат различным $\mathscr{W}$-орбитам. Тогда λ_1, λ_2 принимают различные значения на некотором элементе в $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ $(= \mathfrak{P}(H^*)^{\mathscr{W}})$.*

Доказательство элементарно и использует лишь конечность группы $\mathscr{W}$. Вначале выберем некоторый многочлен в $\mathfrak{S}(H)$, на котором λ_1 не обращается в 0, но равны нулю все остальные элементы, $\mathscr{W}$-эквивалентные λ_1, так же как и $\mathscr{W}$-эквивалентные λ_2. (Почему такой многочлен существует?) Сложив образы этого многочлена, получим элемент из $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$, на котором обращается в нуль λ_2, но не λ_1.

Осталось доказать, что ψ отображает $\mathfrak{Z}$ на $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$. Введем для этого еще одно отображение. Вспомним, что $\mathfrak{S}(L)$ можно отождествить с пространством симметрических тензоров в $\mathfrak{T}(L)$, которое является дополнением к ядру J канонического отображения $\pi \colon \mathfrak{T}(L) \to \mathfrak{U}(L)$ (следствие 17.3E). Пусть $G = \operatorname{Int} L$, как в п. 23.1; G действует на $\mathfrak{T}(L)$. Очевидно, что $\mathfrak{S}(L)$ и J инвариантны относительно действия группы G, поэтому линейный изоморфизм $\pi \colon \mathfrak{S}(L) \to \mathfrak{U}(L)$ в действительности является изоморфизмом G-модулей. Обозначим через $\mathfrak{S}(L)^G$ подпространство (на самом деле подалгебру) элементов, инвариантных относительно G. Из леммы 23.2 следует, что π отображает $\mathfrak{S}(L)^G$ на $\mathfrak{Z} = \mathfrak{U}(L)^G$. (*Предупреждение*: π является не гомоморфизмом алгебр, а лишь линейным отображением.)

Получаем следующую картину: $\mathfrak{S}(L)^G \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Z} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$. Поразительно ее сходство с предметом изучения в п. 23.1: $\mathfrak{P}(L)^G \xrightarrow{\theta} \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. На самом деле можно даже отождествить (канонически) L с L^*, H с H^* с помощью формы Киллинга (невырожденной на L и на H), причем действие групп G и $\mathscr{W}$ согласовано с такими отождествлениями. В результате получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}(L)^G & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}} \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \mathfrak{P}(L)^G & & \xrightarrow[\theta]{\qquad\qquad} & & \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}. \end{array}$$

К сожалению, она не коммутативна. Чтобы увидеть, как обстоит дело, обратимся к простому примеру.

Пример. Рассмотрим $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом (x, y, h). Двойственный базис (x^*, y^*, h^*) можно с помощью формы Киллинга отождествить с $((1/4)y, (1/4)x, (1/8)h)$ (упражнение 5.5). Если λ — фундаментальный доминантный вес ($\lambda=1/2\alpha$), то λ отождествляется здесь с h^*, причем λ^2 порождает $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. Поскольку λ является старшим весом в обычном представлении алгебры L, нетрудно вычислить (упражнение 1), что многочлен следа $h^{*2}+x^*y^*$ равен $\theta^{-1}(\lambda^2)$. При отождествлении $\mathfrak{P}(L)^G$ с $\mathfrak{S}(L)^G$ он превращается в симметрический тензор $(1/64)(h\otimes h)+$ $+(1/32)(x\otimes y+y\otimes x)$. При отображении π этот элемент переходит в $(1/64)h^2+(1/32)xy+(1/32)yx\in\mathfrak{Z}$. Чтобы затем найти образ этого элемента при действии ψ, выразим его через ПБВ-базис (который соответствует упорядочению y, h, x) как $(1/64)h^2+(2/32)yx+(1/32)h$. Отображение ξ переводит его в $(1/64)(h^2+2h)$, а η — в $\mathscr{W}$-инвариантный элемент $(1/64)(h^2-1)$. В $\mathfrak{P}(P)^{\mathscr{W}}$ получаем $\lambda^2-1/64$. Следовательно, построенная диаграмма не коммутативна. Однако отклонение измеряется инвариантом (в данном случае $1/64$) меньшей «степени», чем исходный элемент.

Этот пример подсказывает, как завершить доказательство сюръективности отображения ψ (для $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ это действительно доказательство!). Во-первых, отождествим $\mathfrak{P}(L)^G$ с $\mathfrak{S}(L)^G$ и $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ с $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$. Далее, очевидно, что если многочлен в $\mathfrak{S}(H)$ инвариантен относительно $\mathscr{W}$, то это верно и для его однородных составляющих. Поэтому достаточно поднять в $\mathfrak{Z}$ однородные многочлены; в частности, можно применить индукцию по степени (константы поднимаются тривиально).

Отображения θ и $\xi\circ\pi$ теперь по существу совпадают (вспомним, как определялось каждое из них); мы лишь должны выразить «симметрический» элемент $\pi(f)$ в ПБВ-базисе, прежде чем применять отображение ξ. При этом появляются новые слагаемые. Однако если f имеет степень k, то $\pi(f)$ является суммой слагаемых вида $x_1\ldots x_k$ в $\mathfrak{U}(L)$ (x_i — элементы фиксированного базиса в L), поэтому ясно, что новые слагаемые, полученные при коммутировании, имеют вид $x_1\ldots x_j$, где $j<k$.

Отображение η (переводящее h_i в h_i-1) не влияет на члены старшей степени в многочленах из $\mathfrak{S}(H)$. Благодаря этому мы можем восстановить исходный однородный элемент в $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ с точностью до членов младших степеней, если обойдем вокруг диаграммы, применив сначала θ^{-1}, затем π, затем ψ. Члены младших степеней лежат в $\psi(\mathfrak{Z})$ по предположению индукции, что и завершает доказательство. □

Дополнение. В этом параграфе один факт остался недоказанным: что *отображение ограничения* $\mathfrak{P}(L)^G \to \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ *инъективно* (см. п. 23.1). Этот факт несуществен для доказательства теоремы Хариш-Чандры, но опустить его доказательство было бы неправильно. Его можно просто сформулировать в терминах плотности в контексте (аффинной) алгебраической геометрии.

Пусть $\mathsf{A}=\mathsf{F}^n$ (*аффинное пространство*); здесь мы игнорируем структуру векторного пространства на A. Далее, пусть $\mathsf{F}[T]=\mathsf{F}[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов от n неизвестных. Если I — идеал в $\mathsf{F}[T]$, то положим $\mathscr{V}(I)=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathsf{A}\colon f(x)=0$ при всех $f\in I\}$. Введем топологию на A, объявив множества вида $\mathscr{V}(I)$ *замкнутыми*; ясно, что $\varnothing$ и A замкнуты, и легко проверить, что замкнуты конечные объединения и произвольные пересечения замкнутых множеств (например, воспользуемся тем, что $\mathscr{V}\left(\sum\limits_{\alpha} I_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha}\mathscr{V}(I_\alpha)$). Эта топология на A называется *топологией Зарисского*. (В случае $\mathsf{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ множество, замкнутое в топологии Зарисского, замкнуто и в обычной топологии на F^n, но обратное неверно.)

Если $f(T)\in\mathsf{F}[T]$, то функция $x\mapsto f(x)$ $(\mathsf{A}\to\mathsf{F})$ называется *полиномиальной функцией* на A. Ясно, что если F наделено топологией Зарисского как одномерное аффинное пространство, то такая функция непрерывна. Хорошо известно, что на A тождественно равен нулю лишь нулевой многочлен (поскольку F бесконечно).

Подмножество в A называется *неприводимым*, если его нельзя покрыть двумя замкнутыми множествами, каждое из которых его не покрывает. (Из неприводимости следует связность, но не обратно.)

Лемма. *Пространство* A *неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{A}=\mathscr{V}(I_1)\cup\mathscr{V}(I_2)$ и оба замкнутых множества собственные. Тогда $I_1\neq 0$, $I_2\neq 0$. Пусть $f\in I_1$, $g\in I_2$ — ненулевые многочлены. Тогда $fg\neq 0$, но fg тождественно обращается в нуль на A, что невозможно. □

Следствие. *Любое непустое открытое множество в* A *плотно.*

Доказательство. Пусть U — непустое открытое множество. Если U не плотно, то в A имеется такое непустое открытое множество V, что $U\cap V=\varnothing$; тогда замкнутые подмножества $\mathsf{A}-U$, $\mathsf{A}-V$ являются собственными и покрывают A, вопреки лемме. □

Теперь вернемся к ситуации § 23: алгебра L полупроста, H — картановская подалгебра и т. д. Фиксируем базис в L, отождествив L с n-мерным аффинным пространством ($n=\dim L$), а $\mathfrak{P}(L)$ — с алгеброй полиномиальных функций в определенном выше смысле. В этом базисе $\operatorname{ad} x$ представляется $n \times n$-матрицей, элементы которой — линейные (а значит, полиномиальные) функции на L. Пусть теперь T — переменное, а $p_x(T) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) T^i$ $(x \in L)$ — характеристический многочлен для $\mathrm{ad}\, x$. Ясно, что все c_i — полиномиальные функции на L.

Назовем ρ-*рангом* алгебры L наименьшее целое число m, для которого c_m не является тождественным нулем, а элемент $x \in L$ назовем ρ-*регулярным*, если $c_m(x) \neq 0$. Иначе говоря: элемент x является ρ-регулярным, если и только если 0 имеет наименьшую возможную кратность как собственное значение отображения $\mathrm{ad}\, x$. Ясно, что элемент x является ρ-регулярным, если и только если таков x_s (поскольку у них один и тот же характеристический многочлен); как следствие, существуют ρ-регулярные полупростые элементы. Ясно, что множество $\mathscr{R}$ всех ρ-регулярных элементов в L открыто; поскольку оно открыто и непусто, оно также плотно (согласно предыдущему следствию).

Если элемент $x \in L$ полупрост, то он лежит в максимальной торической подалгебре и сопряжен относительно G некоторому элементу из H (по теореме сопряженности). Но мы знаем, что если $h \in H$, то $\dim C_L(h) \geqslant \ell = \mathrm{rank}\, L$; мы знаем также, что в H имеются элементы (называемые регулярными), для которых $\dim C_L(h) = \ell$ (см. п. 15.3). Так как ρ-регулярные полупростые элементы существуют, они совпадают с регулярными полупростыми элементами (и $m = \ell$). Но с регулярным полупростым элементом не коммутирует никакой нильпотентный элемент, кроме нуля. С учетом предыдущего абзаца, если элемент x является ρ-регулярным, то $x = x_s$. *Это позволяет нам описать $\mathscr{R}$ как множество всех регулярных полупростых элементов.*

Пусть $f \in \mathfrak{P}(L)^G$, $f|_H = 0$. Тогда, в частности, f обращается в нуль на плотном множестве $\mathscr{R}$, поэтому $f = 0$. Как следствие, отображение $\theta\colon \mathfrak{P}(L)^G \to \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ инъективно.

Упражнения

1. В примере 23.3 проверьте, что многочлен следа определен корректно.

2. Для алгебр типов A_2, B_2, G_2 выразите в явном виде образующие алгебры $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ через фундаментальные доминантные веса λ_1, λ_2. Покажите, как можно поднять некоторые из них в $\mathfrak{Z}$ с помощью алгоритма из этого параграфа. (Отметим, что в каждом случае $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ — алгебра многочленов с $\ell = 2$ образующими.)

3. Покажите, что предложение 23.2 остается верным, когда λ — произвольная линейная функция на H, если только $\langle \lambda, \alpha \rangle$ — целое число.

4. С помощью формулы $(*)$ $\chi_\lambda(z) = \lambda(\xi(z))$ из п. 23.3 непосредственно вычислите значение универсального элемента Казимира c_L (см. п. 22.1) на $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$: $(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\delta, \delta)$. [Вспомните, как связаны t_α и h_α и

соответственно z_α и y_α. Запишите c_L, используя упорядочение ПБВ-базиса, и примените выведенное в п. 22.3 равенство $(\mu, \mu) = \sum_i \mu(h_i)\mu(k_i)$ для произвольного веса μ.]

5. Докажите, что любой многочлен от n переменных над F ($\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$) является линейной комбинацией степеней линейных многочленов. [Примените индукцию по n. Разложите $(T_1 + aT_2)^k$, а затем, используя рассуждение с определителем Вандермонда, покажите, что k-е степени линейных многочленов при $n = 2$ порождают пространство нужной размерности.]

6. Докажите, что если $\lambda \in \Lambda^+$, то все элементы μ, связанные с λ, удовлетворяют условию $\mu \prec \lambda$ и потому появляются в качестве весов в $Z(\lambda)$.

7. Пусть $\mathfrak{D} = [\mathfrak{U}(L), \mathfrak{U}(L)]$ — подпространство в $\mathfrak{U}(L)$, порожденное всеми элементами вида $xy - yx$ ($x, y \in \mathfrak{U}(L)$). Докажите, что $\mathfrak{U}(L)$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{Z}$ (что позволяет продолжить χ_λ на $\mathfrak{U}(L)$, положив его равным 0 на $\mathfrak{D}$). [Вспомним из упражнения 17.3, что $\mathfrak{U}(L)$ является суммой конечномерных L-модулей и, следовательно, вполне приводимым L-модулем, так как алгебра L полупроста. Покажите, что $\mathfrak{Z}$ — сумма всех тривиальных L-подмодулей в $\mathfrak{U}(L)$, а $\mathfrak{D}$ совпадает с пространством всех $\operatorname{ad} x(y)$, $x \in L$, $y \in \mathfrak{U}(L)$, и это последнее дополнительно к $\mathfrak{Z}$.]

8. Докажите, что решетка весов Λ плотна в топологии Зарисского в H^* (см. дополнение), если отождествить H^* с аффинным ℓ-пространством. Получите отсюда другой способ распространить второе следствие из п. 23.2 на все $\lambda, \mu \in H^*$.

9. Покажите, что каждый гомоморфизм F-алгебр $\chi\colon \mathfrak{Z} \to \mathsf{F}$ имеет вид χ_λ для некоторого $\lambda \in H^*$. [Рассмотрите χ как гомоморфизм $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}} \to \mathsf{F}$ и покажите, что его ядро порождает собственный идеал в $\mathfrak{S}(H)$.]

10. Докажите, что отображение $\psi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ не зависит от выбора Δ.

Замечания

Доказательство Стейнберга теоремы Шевалле из п. 23.1 содержится в работах Verma [1] и Varadarajan [1]. Изложение работы Хариш-Чандры о «характерах» см. в Bourbaki [3], Harish-Chandra [1], Séminaire «Sophus Lie» [1], Exposé 19, Varadarajan [1], Verma [1]. В работе Chevalley [5] показано, что $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ — полиномиальная алгебра.

§24. *Формулы Вейля, Костанта и Стейнберга*

Сохраним обозначения из §23. С помощью теоремы Хариш-Чандры (см. п. 23.3) мы получим несколько замечательных формул для характеров и кратностей в конечномерных L-модулях. (Короткий путь, не использующий §23, см. ниже в дополнении.)

24.1. Некоторые функции на H^*. В п. 22.5 для $\lambda \in \Lambda^+$ были введены формальные характеры ch_λ модулей $V(\lambda)$: $\mathrm{ch}_\lambda = \sum\limits_{\mu \in \Lambda} m_\lambda(\mu) e(\mu)$, где элементы $e(\mu)$ образуют базис группового кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Было бы полезно определить формальные характеры и для бесконечномерных модулей $\mathbb{Z}(\lambda)$, но бесконечные формальные суммы неудобны в обращении. Взамен мы введем более разумный формализм. Можно рассматривать $\mathbb{Z}[\Lambda]$ как множество функций из Λ в $\mathbb{Z}$ (равных 0 вне конечного множества); читатель легко проверит, что произведение превращается в *свертку*: $f * g(\lambda) = \sum\limits_{\mu+\nu=\lambda} f(\mu) g(\nu)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство всех функций f из H^* в F, *носитель* которых (множество всех таких $\lambda \in H^*$, что $f(\lambda) \neq 0$) лежит в конечном объединении множеств вида $\left\{\lambda - \sum\limits_{\alpha \succ 0} k_\alpha \alpha,\ k_\alpha \in \mathbb{Z}^+\right\}$. (Разумеется, такое множество состоит из всех весов, встречающихся в модуле $Z(\lambda)$, $\lambda \in H^*$.)

Короткое размышление показывает, что пространство $\mathfrak{X}$ замкнуто относительно свертки; это превращает его в коммутативную ассоциативную F-алгебру, содержащую формальный характер ch_V любого стандартного циклического L-модуля.

Возможно, иногда читателю удобнее представлять $f \in \mathfrak{X}$ как формальную комбинацию (с коэффициентами из F) элементов $\lambda \in H^*$. Что отвечает прежнему элементу $e(\lambda)$? Ясно, что это характеристическая функция $\varepsilon_\lambda(\lambda) = 1$, $\varepsilon_\lambda(\mu) = 0$ при $\mu \neq \lambda$. Заметим, что ε_0 — единица кольца $\mathfrak{X}$ и что $\varepsilon_\lambda * \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\lambda+\mu}$. Группа Вейля $\mathscr{W}$ действует на $\mathbb{Z}(\lambda)$ по формуле $(\sigma^{-1} f)(\lambda) = f(\sigma\lambda)$; в частности, $\sigma(\varepsilon_\lambda) = \varepsilon_{\sigma\lambda}$.

Теперь нужно ввести еще два полезных элемента кольца $\mathfrak{X}$. Во-первых, пусть $p(\lambda)$ — количество множеств неотрицательных целых чисел $\{k_\alpha,\ \alpha \succ 0\}$, для которых $-\lambda = \sum\limits_{\alpha \succ 0} k_\alpha \alpha$. Разумеется, $p(\lambda) = 0$, если λ не лежит в решетке корней. Отметим, что $p = \mathrm{ch}_{Z(0)}$ (упражнение 20.5); в частности, $p \in \mathfrak{X}$. Назовем p *функцией Костанта* (она отличается от функции разбиения Костанта лишь знаком элемента λ). Далее, положим $q = \prod\limits_{\alpha \succ 0} (\varepsilon_{\alpha/2} - \varepsilon_{-\alpha/2})$ (где символ произведения $\prod$ обозначает свертку в $\mathfrak{X}$). Назовем q *функцией Вейля*.

Теперь докажем ряд простых лемм о различных функциях, определенных выше. Для каждого положительного корня α пусть $f_\alpha(-k\alpha) = 1$ при всех $k \in \mathbb{Z}^+$, в остальных случаях $f_\alpha(\lambda) = 0$. (Можно символически представить f_α как $\varepsilon_0 + \varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{-2\alpha} + \ldots$) Ясно, что $f_\alpha \in \mathfrak{X}$.

Лемма A. *Справедливы следующие соотношения*

(a) $p = \prod\limits_{\alpha \succ 0} f_\alpha$;

(b) $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * f_\alpha = \varepsilon_0$;

(c) $q = \varepsilon_\delta * \prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha})$.

Доказательство. Формула (a) непосредственно следует из определения свертки. Для доказательства формулы (b) запишем формально $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * (\varepsilon_0 + \varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{-2\alpha} + \ldots) = \varepsilon_0$, поскольку все остальные слагаемые сокращаются. (Легко доказать это строго.) Докажем формулу (c). Поскольку $\delta = \sum_{\alpha\succ 0} \frac{1}{2}\alpha$, $\varepsilon_\delta = \prod_{\alpha\succ 0} \varepsilon_{\alpha/2}$. Но $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * \varepsilon_{\alpha/2} = \varepsilon_{\alpha/2} - \varepsilon_{-\alpha/2}$, откуда следует нужный результат. □

Лемма B. *Если $\sigma \in \mathscr{W}$, $\ell(\sigma)$ такое, как в п. 10.3, то $\sigma q = (-1)^{\ell(\sigma)} q$.*

Доказательство. Достаточно доказать это равенство для случая, когда $\sigma = \sigma_\alpha$ — простое отражение, т. е. $\ell(\sigma) = 1$. Но σ_α переставляет положительные корни, отличные от α, и отображает α в $-\alpha$ (лемма 10.2B), поэтому $\sigma_\alpha q = -q$. □

Лемма C. *Справедливы соотношения $q * p * \varepsilon_{-\delta} = \varepsilon_0$.*

Доказательство. Соединив три утверждения леммы A, получаем

$$q*p*\varepsilon_{-\delta} = \prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * \varepsilon_\delta * p * \varepsilon_{-\delta} = \prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * p = \prod_{\alpha\succ 0}((\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha}) * f_\alpha) = \varepsilon_0. \quad \square$$

Лемма D. *Справедливы соотношения $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)}(\mu) = p(\mu - \lambda) = (p * \varepsilon_\lambda)(\mu)$.*

Доказательство. Первое равенство очевидно (см. упражнение 20.5), так же как и второе. □

Лемма E. *Справедливы соотношения $q * \mathrm{ch}_{Z(\lambda)} = \varepsilon_{\lambda+\delta}$.*

Доказательство. Соединим леммы C и D. □

Коэффициент $(-1)^{\ell(\sigma)}$ $(\sigma \in \mathscr{W})$, который появляется в лемме B, далее кратко обозначается $\mathrm{sn}(\sigma)$. Напомним, что если алгебра L принадлежит к типу A_ℓ, то группа $\mathscr{W}$ изоморфна симметрической группе $\mathscr{S}_{\ell+1}$ и $\mathrm{sn}(\sigma)$ совпадает со знаком перестановки σ (+ для четных, − для нечетных).

24.2. Формула кратностей Костанта. Теперь попробуем выразить формальный характер ch_λ конечномерного модуля $V(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+)$ как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию некоторых характеров $\mathrm{ch}_{Z(\mu)}$, а затем упростить результат с помощью лемм из предыдущего пункта (а также теоремы Хариш-Чандры).

Пусть $\mathfrak{M}_\lambda$ обозначает совокупность всех L-модулей V, имеющих следующие свойства (для фиксированного $\lambda \in H^*$):

(1) V является прямой суммой весовых подпространств (относительно H);

(2) центр $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{U}(L)$ действует на V как умножение на скаляры $\chi_\lambda(z)$ $(z \in \mathfrak{Z})$;

(3) формальный характер модуля V принадлежит кольцу $\mathfrak{X}$.

Конечно, этим критериям удовлетворяют все стандартные циклические модули веса λ, а также их подмодули (которые, как известно, не всегда являются суммами стандартных циклических подмодулей). В самом деле, множество $\mathfrak{M}_\lambda$ замкнуто относительно взятия подмодулей, гомоморфных образов и (конечных) прямых сумм. Ввиду теоремы Хариш-Чандры (см. п. 23.3) $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\mu$ в точности тогда, когда веса λ и μ связаны.

Лемма. *Пусть $V \in \mathfrak{M}_\lambda$. Тогда V обладает хотя бы одним старшим вектором* (*если* $V \neq 0$).

Доказательство. Если $\alpha \succ 0$, а μ — некоторый вес модуля V, то ввиду свойства (3) элемент $\mu + k\alpha$ не будет весом для V при всех достаточно больших $k \in \mathbb{Z}^+$. Отсюда очевидно, что для некоторого веса μ никакой элемент $\mu + \alpha$ $(\alpha \succ 0)$ не будет весом; тогда максимален любой ненулевой вектор в V_μ. □

Для каждого $\lambda \in H^*$ положим $\theta(\lambda) = \{\mu \in H^* : \mu \prec \lambda \text{ и } \mu \sim \lambda\}$. Напомним (см. п. 23.2), что запись $\mu \sim \lambda$ означает, что $\mu + \delta$ и $\lambda + \delta$ эквивалентны относительно $\mathscr{W}$. В следующем ключевом результате вступает в игру теорема Хариш-Чандры, ограничивая возможные старшие веса композиционных факторов модуля $Z(\lambda)$.

Предложение. *Пусть $\lambda \in H^*$. Тогда*

(a) $Z(\lambda)$ *обладает композиционным рядом*;

(b) *каждый композиционный фактор модуля $Z(\lambda)$ имеет вид $V(\mu)$, где $\mu \in \theta(\lambda)$, а модуль $V(\mu)$ определен как в п.* 20.3);

(c) $V(\lambda)$ *встречается среди композиционных факторов модуля $Z(\lambda)$ лишь один раз.*

Доказательство. (a) Если модуль $Z(\lambda)$ неприводим, то $Z(\lambda) = V(\lambda)$ и доказательство не требуется. В противном случае $Z(\lambda)$ имеет ненулевой собственный подмодуль V, который лежит в $\mathfrak{M}_\lambda$. Поскольку $\dim Z(\lambda)_\lambda = 1$, элемент λ не является весом для V. По предыдущей лемме V имеет старший вектор (скажем, веса $\mu \precneqq \lambda$) и потому содержит ненулевой гомоморфный образ W модуля $Z(\mu)$. В частности, $\chi_\lambda = \chi_\mu$, поэтому $\lambda \sim \mu$ (по теореме Хариш-Чандры) и $\mu \in \theta(\lambda)$. Рассмотрим теперь $Z(\lambda)/W$ и W. Каждый из этих модулей — стандартный циклический (и лежит в $\mathfrak{M}_\lambda$), но либо имеет меньше весов, связанных с λ, чем имел модуль $Z(\lambda)$, либо имеет те же веса, но с меньшими кратностями. Повторяя предыдущее рассуждение для $Z(\lambda)/W$ и W, получаем новые подмодули и гомоморфные образы подмодулей с меньшим количеством весов, связанных с λ, либо с меньшими кратностями этих весов. Очевидно, что после конечного числа шагов процесс закончится, т. е. будет построен композиционный ряд для $Z(\lambda)$.

(b) Каждый композиционный фактор модуля $Z(\lambda)$ лежит в $\mathfrak{M}_\lambda$ и согласно лемме обладает старшим вектором, а потому должен быть стандартным циклическим (ввиду неприводимости). Ввиду п. 20.2 каждый композиционный фактор изоморфен некоторому $V(\mu)$. Мы уже видели, что тогда элемент μ должен принадлежать $\theta(\lambda)$.

(c) Это утверждение очевидно, поскольку $\dim Z(\lambda)_\lambda = 1$. □

Из предложения вытекает равенство $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)} = \mathrm{ch}_{V(\lambda)} + \sum d(\mu)\mathrm{ch}_{V(\mu)}$ ($d(\mu) \in \mathbb{Z}^+$), где сумма берется по $\mu \in \theta(\lambda)$, $\mu \neq \lambda$. По-прежнему считая $\lambda \in H^*$ фиксированным, упорядочим элементы из $\theta(\lambda)$ как $(\mu_1, \ldots, \mu_t)$, наложив лишь условие, что если $\mu_i \prec \mu_j$, то $i \leqslant j$. (В частности, $\lambda = \mu_t$.) Согласно предложению, все характеры $\mathrm{ch}_{Z(\mu_j)}$ в свою очередь можно выразить как $\mathbb{Z}$-линейные комбинации функций $\mathrm{ch}_{V(\mu_i)}$, $i \leqslant j$ (коэффициент при $\mathrm{ch}_{V(\mu_j)}$ равен 1). Поэтому полученная система t уравнений имеет треугольную матрицу (при заданном упорядочении) с единицами на диагонали; в частности, ее определитель равен 1, поэтому она имеет целочисленную обратную и все $\mathrm{ch}_{V(\mu_j)}$ можно выразить как $\mathbb{Z}$-линейные комбинации функций $\mathrm{ch}_{Z(\mu_i)}$, $i \leqslant j$, причем коэффициент при $\mathrm{ch}_{Z(\mu_j)}$ равен 1. (Конечно, теперь некоторые коэффициенты могут быть отрицательными.)

Следствие. *Пусть $\lambda \in H^*$. Тогда $\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией $\sum c(\mu)\mathrm{ch}_{Z(\mu)}$ (сумма по $\mu \in \theta(\lambda)$), причем $c(\lambda) = 1$.*

Применим теперь это следствие к частному случаю, когда λ — доминантная целочисленная функция, $\mathrm{ch}_\lambda = \mathrm{ch}_{V(\lambda)}$. Тогда размерность $\dim V(\lambda)$ конечна и $\sigma(\mathrm{ch}_\lambda) = \mathrm{ch}_\lambda$ для всех $\sigma \in \mathscr{W}$ (теорема 21.2). Как выше, выразим ch_λ в виде $\sum c(\mu)\mathrm{ch}_{Z(\mu)}$ ($\mu \in \theta(\lambda)$), где $c(\lambda) = 1$. По лемме 24.1E мы имеем $q * \mathrm{ch}_\lambda = \sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta}$, а по лемме 24.1B получаем $\sigma(q * \mathrm{ch}_\lambda) = \sigma(q) * \sigma(\mathrm{ch}_\lambda) = \mathrm{sn}(\sigma) q * \mathrm{ch}_\lambda$ ($\sigma \in \mathscr{W}$). С другой стороны, $\sigma(\sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta}) = \sum c(\mu)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$. Так как $\mathscr{W}$ транзитивно переставляет функции $\mu + \delta$ (где μ связано с λ), а $c(\lambda) = 1$, мы непосредственно получаем, что $c(\mu) = \mathrm{sn}(\sigma)$ при $\sigma^{-1}(\mu + \delta) = \lambda + \delta$. Следовательно,

$$q * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}. \tag{$*$}$$

Наконец, применив к этому уравнению лемму 24.1C, получаем $\mathrm{ch}_\lambda = q * p * \varepsilon_{-\delta} * \mathrm{ch}_\lambda = p * \varepsilon_{-\delta} * \Bigl(\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}\Bigr) = p * \Bigl(\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta}\Bigr) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma) p * \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta}$.

Теорема (Костант). *Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Тогда кратности весов модуля $V(\lambda)$ выражаются формулой*

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma) p(\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta)).$$

Достоинством этой формулы является то, что кратности выражены в явном виде. Однако на практике часто бывает проще воспользоваться рекуррентным методом Фрейденталя (§ 22), так как суммирование по группе Вейля в случае высокого ранга становится весьма обременительным.

24.3. Формулы Вейля.

Лемма. *Справедливо соотношение $q = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о легко провести непосредственно, но вместо этого мы применим формулу $(*)$ из п. 24.2. Если $\lambda = 0$, то, разумеется, $\mathrm{ch}_\lambda = \varepsilon_0$ и правая часть соотношения $(*)$ принимает вид $\sum\limits_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$. □

Теорема (Вейль). *Пусть* $\lambda \in \Lambda^+$. *Тогда*

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}\right) * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим формулу $(*)$ из п. 24.2 и предыдущую лемму. □

Формула характеров Вейля фактически говорит, что можно вычислить ch_λ как частное двух простых алгебраических сумм в $\mathbb{Z}(\lambda)$. На практике это «деление» оказывается весьма трудоемким, и метод Фрейденталя (см. §22) обычно быстрее приводит к цели. Однако из формулы Вейля можно вывести чрезвычайно полезную формулу для р а з м е р н о с т и модуля $V(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+)$, обозначаемой далее $\deg(\lambda)$. Ясно, что $\deg(\lambda) = \sum\limits_{\mu \in \prod(\lambda)} m_\lambda(\mu)$, поскольку $V(\lambda)$ — прямая сумма весовых подпространств. Это как раз сумма коэффициентов в формальной сумме $\sum\limits_{\mu} m_\lambda(\mu)e(\mu) \in \mathbb{Z}[\Lambda]$. В терминах функций это с у м м а з н а ч е н и й ф у н к ц и и ch_λ. Теперь рассмотрим подалгебру $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$, порожденную характеристическими функциями ε_λ $(\lambda \in \Lambda)$. Тогда можно определить гомоморфизм $v\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathsf{F}$, сопоставляющий функции $f \in \mathfrak{X}_0$ сумму ее значений. Наша задача — вычислить $v(\mathrm{ch}_\lambda)$ как функцию от λ. К сожалению, применяя v к алгебраической сумме типа $\sum \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\varepsilon\delta}$, мы получаем 0, поэтому нужно действовать окольным путем. Для произвольного $\lambda \in \Lambda^+$ положим ради краткости $\omega(\lambda + \delta) = \sum \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$.

Отображение $\varepsilon \mapsto (\lambda, \alpha)\varepsilon_\lambda$ (для фиксированного корня α) продолжается до эндоморфизма ∂_α алгебры $\mathfrak{X}_0$, который в действительности является дифференцированием. Эндоморфизм $\partial = \prod\limits_{\alpha \succ 0} \partial_\alpha$ в общем случае дифференцированием уже не будет, но может рассматриваться как дифференциальный оператор. Формула Вейля означает, что $\omega(\delta) * \mathrm{ch}_\lambda = \omega(\lambda + \delta)$. Здесь $\omega(\delta)$ — функция Вейля (ранее обозначавшаяся q), которая равна $\varepsilon_{-\delta^*} \prod\limits_{\alpha \succ 0} (\varepsilon_\alpha - 1)$ (см. лемму 24.1А(с)). Умножим это выражение на ch_λ и применим ∂ (используя правило умножения дифференцирований ∂_α), затем v. Большинство слагаемых исчезнет, поскольку $v(\varepsilon_\alpha - 1) = 0$. Останется лишь слагаемое $v(\partial\omega(\delta))v(\mathrm{ch}_\lambda)$, которое по формуле Вейля равно $v(\partial\omega(\lambda + \delta))$. Это позволяет выразить $\deg(\lambda) = v(\mathrm{ch}_\lambda)$ в виде частного.

Короткое размышление показывает, что $v(\partial\varepsilon_\delta) = \prod\limits_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha)$; аналогично $v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta}) = \prod\limits_{\alpha \succ 0} (\sigma\delta, \alpha) = \prod\limits_{\alpha \succ 0} (\delta, \sigma^{-1}\alpha)$. Но вспомним, что количество положительных корней, переходящих в отрицательные под действием σ^{-1}, равно $\ell(\sigma^{-1}) = \ell(\sigma)$ (см. лемму 10.3A), так что полученное выражение равняется $\operatorname{sn}(\sigma) \prod_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha)$, $\operatorname{sn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Иначе говоря, $v(\partial\omega(\delta)) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \operatorname{sn}(\sigma) v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta}) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \operatorname{sn}(\sigma)^2 \prod_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha) = \operatorname{Card}(\mathscr{W}) \prod_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha)$. Такое же рассуждение в случае $\omega(\lambda + \delta)$ приводит к $\operatorname{Card}(\mathscr{W}) \prod_{\alpha \succ 0} (\lambda + \delta, \alpha)$. Образовав частное, получаем следующее

Следствие. *Пусть* $\lambda \in \Lambda^+$. *Тогда* $\deg \lambda = \prod_{\alpha \succ 0} (\lambda + \delta, \alpha) \Big/ \prod_{\alpha \succ 0} (\delta, \alpha)$.

Полезно заметить, что после умножения числителя и знаменателя на $\prod_{\alpha \succ 0} \dfrac{2}{(\alpha, \alpha)}$ мы получаем $\deg(\lambda) = \prod_{\alpha \succ 0} \langle \lambda + \delta, \alpha \rangle \Big/ \prod_{\alpha \succ 0} \langle \delta, \alpha \rangle$ (частное двух целых чисел). Но $\langle \lambda + \delta, \alpha \rangle = (\lambda + \delta, \alpha^\vee)$, где $\alpha^\vee$ — д в о й с т в е н н ы й корень. В свою очередь, так как $\Delta^\vee$ — базис системы $\Phi^\vee$ (упражнение 10.1), можно записать $\alpha^\vee = \sum_i c_i^{(\alpha)} \alpha_i^\vee$, откуда следует, что $\langle \lambda + \delta, \alpha \rangle = \sum_i c_i^{(\alpha)} \langle \lambda + \delta, \alpha_i \rangle = \sum_i c_i^{(\alpha)} (m_i + 1)$ (где $\lambda = \sum_i m_i \lambda_i$). Поэтому нужно лишь вычислить числа $c_i^{(\alpha)}$ (упражнение 7).

Примеры. В случае типа A_1 мы имеем $\lambda_1 = \frac{1}{2}\alpha = \delta$, так что формула принимает вид $\deg(\lambda) = m + 1$, $\lambda = m\lambda_1$, см. теорему 7.2.

Сосредоточимся теперь на случае ранга 2. Пусть $\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$. В случае типа A_2 положительные корни равны $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$. Соответственно знаменатель полученной дроби равен $1 \cdot 1 \cdot 2$, а числитель $(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)$. В случаях B_2 и G_2 вычисления аналогичны (в случае B_2 возьмем короткий корень в качестве α_2, а в случае G_2 — в качестве α_1 в соответствии с § 11). Подведем итог (упражнение 7):

(A_2) $\dfrac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)$,

(B_2) $\dfrac{1}{3!}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(2m_1 + m_2 + 3)$,

(G_2) $\dfrac{1}{5!}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + 2m_2 + 3)(m_1 + 3m_2 + 4)(2m_1 + 3m_2 + 5)$.

В случае G_2 имеем $\deg(\lambda_2) = 14$. Поскольку $\lambda_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ — старший корень, мы опознаем в $V(\lambda_2)$ модуль, отвечающий присоединенному представлению. Далее, $\deg(\lambda_1) = 7$ и $V(\lambda_1)$ — это $\mathfrak{C}_0$ (подпространство элементов со следом 0 в алгебре Кэли (см. п. 19.3)).

24.4. Формула Стейнберга. Соединив формулы Костанта и Вейля, мы сможем получить явную формулу (найденную Стейнбергом) для числа вхождений модуля $V(\lambda)$ в тензорное произведение $V(\lambda') \otimes V(\lambda'')$. Если $\lambda', \lambda'' \in \Lambda^+$, то по теореме Вейля о полной приводимости конечномерных

L-модулей (см. п. 6.3) можно записать $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ как прямую сумму некоторых модулей $V(\lambda)$, каждый из которых появляется $n(\lambda)$ раз (если $V(\lambda)$ совсем не появляется, то положим $n(\lambda)=0$). Как следствие, формальный характер тензорного произведения равен $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^+} n(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda$. С другой стороны, мы доказали в (п. 22.5), что этот формальный характер равен $\mathrm{ch}_{\lambda'}*\mathrm{ch}_{\lambda''}$. Значит,

$$\mathrm{ch}_{\lambda'}*\mathrm{ch}_{\lambda''}=\sum_{\lambda} n(\lambda)\mathrm{ch}_\lambda. \tag{1}$$

Как и раньше, обозначим выражение $\sum\limits_{\sigma\in\mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$ $(\mu\in\Lambda^+)$ через $\omega(\mu+\delta)$. Умножив обе части равенства (1) на $\omega(\delta)$ и применив формулу Вейля (см. п. 24.3) соответственно для λ'', λ, получаем

$$\mathrm{ch}_{\lambda'}*\omega(\lambda''+\delta)=\sum_{\lambda} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta). \tag{2}$$

Теперь запишем $\mathrm{ch}_{\lambda'}$ в виде $\sum\limits_{\mu} m_{\lambda'}(\mu)\varepsilon_\mu$ и заменим $m_{\lambda'}(\mu)$ его значением из формулы Костанта (см. п. 24.2). Уравнение (2) примет вид

$$\sum_{\mu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_\mu*\omega(\lambda''+\delta)=\sum_{\lambda} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta). \tag{3}$$

Используя явное выражение для $\omega(\lambda''+\delta)$, получаем

$$\sum_{\mu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\tau\in\mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma\tau)p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta))\varepsilon_{\tau(\lambda''+\delta)+\mu}=\sum_{\lambda}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} n(\lambda)\mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}. \tag{4}$$

Чтобы сравнить правую часть равенства (4) с левой, сделаем замену переменных. В правой части заменим λ на ν, где $\sigma(\lambda+\delta)=\nu+\delta$ и получим

$$\sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)\varepsilon_{\nu+\delta}. \tag{5}$$

В левой части заменим μ на ν, где $\tau(\lambda''+\delta)+\mu=\nu+\delta$, и придем к выражению

$$\sum_{\nu}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\tau\in\mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma\tau)p(\nu+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta))\varepsilon_{\nu+\delta}. \tag{6}$$

Пусть теперь вес ν доминантный. Тогда вес $\sigma(\nu+\delta)-\delta$ не может быть доминантным, за исключением случая $\sigma=1$ (упражнение 13.9). Поэтому если $\sigma\neq 1$, то $n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)=0$, а это означает, что коэффициент при $\varepsilon_{\nu+\delta}$ в выражении (5) равен $n(\nu)$. Ввиду (6) доказана

Теорема (Стейнберг). *Пусть $\lambda', \lambda'' \in \Lambda^+$. Тогда количество вхождений модуля $V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, в $V(\lambda') \otimes V(\lambda'')$ определяется формулой*

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sum_{\tau\in\mathscr{W}} \operatorname{sn}(\sigma\tau) p(\lambda + 2\delta - \sigma(\lambda' + \delta) - \tau(\lambda'' + \delta)).$$

Эта формула (как и формула Костанта) имеет вполне явный вид, но отнюдь не легка в применении, если группа Вейля велика. В упражнении 9 выведена формула, которая часто оказывается более практичной.

Упражнения

1. Дайте прямое доказательство формулы характеров Вейля (см. п. 24.3) для типа A_1.

2. С помощью формулы размерности Вейля покажите, что точный неприводимый конечномерный L-модуль наименьшей возможной размерности имеет старший вес λ_i при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

3. С помощью формулы Костанта проверьте некоторые из кратностей, указанных в примере 1 п. 22.4, и сравните ch_λ из этого примера с выражением, которое дает формула Вейля.

4. Сравните формулу Стейнберга для частного случая A_1 с формулой Клебша—Гордана (упражнение 22.7).

5. С помощью формулы Стейнберга разложите G_2-модуль $V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_2)$ на неприводимые составляющие. С помощью формулы Вейля проверьте, что сумма их размерностей действительно равна $\dim V(\lambda_1) \cdot \dim V(\lambda_2)$.

6. Пусть $L = \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$. Вес $\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ кратко обозначим (m_1, m_2). С помощью формулы Стейнберга проверьте, что $V(1, 0) \otimes V(0, 1) \cong V(0, 0) \oplus \oplus V(1, 1)$.

7. Проверьте формулы степени в п. 24.3; выведите такую формулу для типа C_3. Как в общем случае можно найти числа $c_i^{(\alpha)}$?

8. Пусть $\lambda \in \Lambda$, причем $\sigma\lambda = \lambda$ для некоторого $\sigma \neq 1$ из $\mathscr{W}$. Докажите, что $\sum_{\sigma(\lambda)=\lambda} \operatorname{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda)} = 0$. [Используя тот факт, что λ лежит в замыкании, но не во внутренности некоторой камеры Вейля, найдите отражение, оставляющее λ на месте, и докажите, что его стабилизатор имеет четный порядок.]

9. Цель этого упражнения — получить новое разложение тензорного произведения, основанное на явном знании весов одного из сомножителей. Как и в п. 24.4, рассмотрим уравнение (2) $\mathrm{ch}_{\lambda'} * \omega(\lambda''+\delta) = \sum_{\lambda\in\Lambda^+} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)$. Замените в левой части $\mathrm{ch}_{\lambda'}$ на $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_{\lambda'}(\lambda)\varepsilon_\lambda$ и приведите ее к виду $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \operatorname{sn}(\sigma) \sum_{\lambda} m_{\lambda'}(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\lambda''+\delta)}$, учитывая, что $\mathscr{W}$ переставляет весовые подпространства в $V(\lambda')$. Затем покажите, что правую часть равенства (2) можно привести к виду $\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \operatorname{sn}(\sigma) \sum_{\lambda\in\Lambda^+} n(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$. Если некоторый элемент

$\sigma \neq 1$ из $\mathscr{W}$ оставляет μ на месте, то пусть $t(\mu) = 0$, а в противном случае $t(\mu) = \operatorname{sn}(\sigma)$, где $\sigma(\mu)$ — доминантный вес. Выведите тогда из упражнения 8, что

$$\operatorname{ch}_{\lambda'} * \operatorname{ch}_{\lambda''} = \sum_{\lambda \in \Pi(\lambda')} m_{\lambda'}(\lambda) t(\lambda + \lambda'' + \delta) \operatorname{ch}_{\{\lambda + \lambda'' + \delta\} - \delta},$$

где фигурные скобки означают единственный доминантный вес, эквивалентный данному.

10. Используя подход из упражнения 9, проработайте еще раз упражнения 5 и 6.

11. Проверьте, что (в обозначениях из упражнения 6) $V(1, 1) \otimes V(1, 2) \cong \cong V(2, 3) \oplus V(3, 1) \oplus V(0, 4) \oplus V(1, 2) \oplus V(1, 2) \oplus V(2, 0) \oplus V(0, 1)$.

12. Используя формулу Стейнберга, покажите, что $V(\lambda)$ может войти как слагаемое в $V(\lambda'_) \otimes V(\lambda'')$ лишь при таких λ, которые имеют вид $\mu + \lambda''$, где $\mu \in \Pi(\lambda')$. Выведите из упражнения 9, что если все такие веса $\mu + \lambda''$ доминантны, то $V(\mu + \lambda'')$ входит в тензорное произведение и его кратность равна $m_{\lambda'}(\mu)$. Используя эти факты, найдите разложение для $V(1, 3) \otimes V(4, 4)$ в случае типа A_2 (см. пример 1 из п. 22.4).

13. Пусть сумма положительных корней равна π. Покажите, что начиная с некоторого n выполняется равенство $m_{n\delta}(n\delta - \pi) = p(-\pi)$.

Замечания

Первоначальные доказательства Вейля использовали интегрирование по компактным группам Ли; позже Фрейденталь нашел более алгебраичное доказательство (но не столь прозрачное); см. Freudenthal, de Vries [1], Jacobson [1], Samelson [1]. Наш подход восходит к работе Verma [1] и близко следует более поздней работе Бернштейн, И. Гельфанд, С. Гельфанд [1]. Первоначальное (довольно сложное) доказательство формулы Костанта см. в Kostant [1], а упрощающие замечания — в Cartier [1]. Формула Стейнберга строго выведена в Steinberg [1]. Подход к тензорным произведениям, намеченный в упражнении 9, восходит к Brauer [2] (ср. Климык [1]), а упражнение 12 основано на Kostant [1].

Дополнение. При доказательстве формул Вейля и Костанта мы использовали результат из § 23 относительно центральных характеров. Видимо, этого нельзя избежать, если доказывать предложение 24.2 для всех $\lambda \in H^*$. Но фактически нам требуется лишь случай целочисленных весов, когда всю необходимую информацию несет не только весь центр алгебры $\mathfrak{U}(L)$, но уже элемент Казимира. Возможность получить отсюда доказательство стала ясной из работы В. Г. Каца [1] о формулах Макдональда (см. Garland, Lepowsky [1]). Однако следует подчеркнуть, что содержание § 23 существенно в некоторых вопросах теории бесконечномерных представлений (например, в работе Хариш-Чандры по дискретным сериям).

Вот подробная схема такого доказательства формулы Вейля.

1. Напомним из п. 22.1 построение элемента Казимира $c=c_L$ в $\mathfrak{U}(L)$: $c=\sum_{i=1}^{\ell} h_i k_i + \sum_{\alpha\in\Phi} x_\alpha z_\alpha$, где базисы в L, двойственные относительно формы Киллинга, выбраны специальным образом. (На самом деле любой их выбор приводит к тому же элементу c.) Как отмечено в п. 23.2, элемент c лежит в центре алгебры $\mathfrak{U}(L)$ и потому действует как скаляр на любом стандартном циклическом модуле.

2. Вычислим скаляр, представляющий элемент c на стандартном циклическом модуле старшего веса $\lambda\in H^*$, порожденном старшим вектором v^+ (см. упражнение 23.4). Если $\alpha\prec 0$, то $z_\alpha\cdot v^+=0$, а если $\alpha\succ 0$, то можно записать $x_\alpha z_\alpha = z_\alpha x_\alpha + t_\alpha$, где $x_\alpha\cdot v^+=0$ и потому $x_\alpha z_\alpha\cdot v^+ = t_\alpha\cdot v^+ = (\lambda, \alpha)v^+$. С другой стороны, в начале п. 22.3 было показано, что $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda(h_i)\lambda(k_i)=(\lambda, \lambda)$. Собрав все это вместе и вспомнив, что $2\delta=\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$, получаем, что c действует на v^+ как скаляр $(\lambda, \lambda)+\sum_{\alpha\succ 0}(\lambda, \alpha)=(\lambda, \lambda)+2(\lambda, \delta)=(\lambda+\delta, \lambda+\delta)-(\delta, \delta)$.

3. Теперь мы можем доказать вариант предложения 24.2. Пусть Z — стандартный циклический модуль старшего веса $\lambda\in\Lambda$. Мы утверждаем, что Z имеет композиционный ряд с композиционными факторами вида $V(\mu)$, где $\mu\prec\lambda$ удовлетворяет условию

$$(\mu+\delta, \mu+\delta)=(\lambda+\delta, \lambda+\delta). \qquad (*)$$

Поскольку решетка Λ дискретна, а множество элементов $\mu\in\mathsf{E}$ с условием $(*)$ компактно, лишь конечное множество весов μ для Z удовлетворяет этому условию. Пусть $d=\sum\dim Z_\mu$ (сумма по всем таким μ); так как весовые подпространства в Z конечномерны, d конечно. Проведем индукцию по d.

Пусть $d=1$. Если модуль Z включает собственный ненулевой подмодуль W, то он является суммой весовых подпространств (см. п. 20.2) и потому обладает старшим вектором некоторого веса $\mu\prec\lambda$, $\mu\neq\lambda$. Согласно шагу 2, элемент c действует на этот старший вектор как скаляр $(\mu+\delta, \mu+\delta)-(\delta, \delta)$, а на Z — как скаляр $(\lambda+\delta, \lambda+\delta)-(\delta, \delta)$. Значит, μ удовлетворяет условию $(*)$ вопреки тому, что $d=1$. Другими словами, модуль Z неприводим, поэтому $Z\cong V(\lambda)$ (см. п. 20.3) и доказательство завершено.

Аналогично проводится индуктивный переход. Если модуль Z приводим, то он содержит собственный подмодуль W, который является стандартным циклическим с некоторым весом $\mu\prec\lambda$, удовлетворяющим условию $(*)$. Применяя индуктивное предположение к стандартным циклическим модулям Z/W и W, получаем композиционные ряды нужного типа, которые вместе дают искомый композиционный ряд для Z.

4. Как и в п. 24.1, с помощью формальных характеров можно представить модуль как «сумму» его композиционных факторов. Сократим обозначение $\mathrm{ch}_{V(\lambda)}$ до ch_λ и $\mathrm{ch}_{Z(\lambda)}$ до ch'_λ. Фиксируем $\lambda \in \Lambda^+$ и рассмотрим (конечное) множество весов $\mu \in \Lambda$, удовлетворяющих условию $(*)$. Можно упорядочить это множество как $(\mu_1, \ldots, \mu_t)$, где из $\mu_i \prec \mu_j$ вытекает $i \leqslant j$. Тогда с учетом шага (3) можно записать: $\mathrm{ch}'_{\mu_j} = \sum\limits_{i \leqslant j} a_{ij}\mathrm{ch}_{\mu_j}$ $(a_{ij} \in \mathbb{Z}^+,\ a_{jj} = 1)$. Если положить $a_{ij} = 0$ при $i > j$, то матрица (a_{ij}) будет верхнетреугольной с единицами на главной диагонали и потому обратимой над $\mathbb{Z}$. Как следствие, все функции ch_{μ_j} можно выразить как $\mathbb{Z}$-линейные комбинации функций ch'_{μ_i}, $i \leqslant j$. Отсюда

$$\mathrm{ch}_\lambda = \sum c(\mu)\mathrm{ch}'_\mu, \qquad (**)$$

где сумма взята по весам $\mu \prec \lambda$, удовлетворяющим условию $(*)$, и мы полагаем $c(\lambda) = 1$.

5. Как и в п. 24.1, можно вывести различные формулы, связывающие функции p, q, ch'_μ. Отметим, что элемент $\sigma \in \mathscr{W}$ оставляет функцию ch_λ инвариантной (теорема 21.2) и при этом $\sigma q = \mathrm{sn}(\sigma) q$ (лемма 24.1B).

6. Чтобы вывести формулу Вейля (или Костанта), начнем с формулы $(**)$ (см. выше). Достаточно показать, что если $c(\mu) \neq 0$, то μ имеет вид $\mu = \sigma(\lambda + \delta) - \delta$ $(\sigma \in \mathscr{W})$, причем $c(\mu) = \mathrm{sn}(\sigma)$. (Тогда доказательство завершается точно так же, как в п. 24.2, 24.3.) Умножив обе части формулы $(**)$ на q и применив лемму 24.1E, получаем $q * \mathrm{ch}_\lambda = \sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta}$. Применим $\sigma \in \mathscr{W}$ к обеим частям этого уравнения. Левая часть умножается на $\mathrm{sn}(\sigma)$, а правая принимает вид $\sum c(\mu)\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$. Как следствие, множество весов $\mu + \delta$, для которых $c(\mu) \neq 0$, инвариантно относительно $\mathscr{W}$, и коэффициенты в заданной орбите отличаются на множитель ± 1. Перепишем уравнение в терминах сумм по $\mathscr{W}$-орбитам и воспользуемся тем, что $c(\lambda) = 1$:

$$q * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \mathrm{sn}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)} + S.$$

Осталось убедиться, что сумма S пуста. Предположим противное. Поскольку каждая $\mathscr{W}$-орбита в Λ пересекает Λ^+ (лемма 13.2A), найдется такой вес $\mu \prec \lambda$, $\mu \neq \lambda$, что $\mu + \delta \in \Lambda^+$, причем выполнено соотношение $(*)$. Но в этой ситуации можно применить д о к а з а т е л ь с т в о леммы 13.4C, получая $\mu = \lambda$, что невозможно.

Глава VII

Алгебры и группы Шевалле

Мы сохраняем обозначения из предыдущих глав: L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, H — картановская подалгебра, Φ — система корней.

В этой главе мы увидим, как построить алгебру L и ее неприводимые представления «над $\mathbb{Z}$», что всегда было более или менее понятно в случае классических алгебр. Фактически мы продвинемся гораздо дальше и сможем построить *группы Шевалле* и их представления над произвольными полями. Это обширная тема, о которой мы сможем дать читателю лишь первоначальные сведения.

§25. *Базис Шевалле в L*

25.1. Пары корней. В п. 25.2 мы докажем, что алгебра L имеет базис, которому отвечают целочисленные структурные константы. Но сначала, имея в виду равенство $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$, мы должны установить ряд фактов о парах корней α, β, для которых $\alpha+\beta$ также является корнем. В следующем предложении фигурирует только система корней Φ (но не L).

Предложение. *Пусть* α, β — *линейно независимые корни, причем* α-*серия, порожденная корнем* b, *имеет вид* $\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha$. *Тогда*

(a) $\langle\beta, \alpha\rangle = r - q$;

(b) *в строке встречаются корни не более двух различных длин*;

(c) *если* $\alpha+\beta \in \Phi$, *то* $r + 1 = \dfrac{q(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta, \beta)}$.

Доказательство. Соотношение (a) было доказано в п. 9.4 (а также в предложении 8.4(e) с помощью представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$).

Докажем утверждение (b): $\Phi' = (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \cap \Phi$ — система корней ранга 2 (в подпространстве, которое порождают в E корни α, β); см. упражнение 9.7. Если система приводима, то она принадлежит к типу $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$, т. е. $\Phi' = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, и доказывать нечего. Если же она неприводима, то $\Phi' = \mathsf{A}_2$, B_2 или G_2, откуда следует наше утверждение (можно также применить лемму 10.4C).

Утверждение (c) можно доказать, рассмотрев системы корней ранга 2 (упражнение 1). Однако имеется геометрическое рассуждение, применимое в общей ситуации. Во-первых, из утверждения (a) вытекает, что

$$(r+1)-\frac{q(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)}{(\beta,\ \beta)}=q+\frac{2(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}+1-\frac{q(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)}{(\beta,\ \beta)}=$$
$$=\frac{2(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}+1-\frac{q(\alpha,\ \alpha)}{(\beta,\ \beta)}-\frac{2q(\alpha,\ \beta)}{(\beta,\ \beta)}=(\langle\beta,\ \alpha\rangle+1)\left(1-\frac{q(\alpha,\ \alpha)}{(\beta,\ \beta)}\right).$$

Множители последнего произведения обозначим через A, B. Нужно показать, что какой-то из них равен 0. Ситуация не симметрична по α, β, поэтому нужно выделить два случая.

Случай (i): $(\alpha,\ \alpha)\geqslant(\beta,\ \beta)$. Тогда $|\langle\beta,\ \alpha\rangle|\leqslant|\langle\alpha,\ \beta\rangle|$. Поскольку α, β независимы, мы знаем (см. п. 9.4), что $\langle\beta,\ \alpha\rangle\langle\alpha,\ \beta\rangle=0$, 1, 2 или 3. Ввиду предыдущего неравенства $\langle\beta,\ \alpha\rangle=-1$, 0 или 1. В первом случае $A=0$, что и требовалось. В противном случае $(\beta,\ \alpha)\geqslant 0$, поэтому $(\beta+\alpha,\ \beta+\alpha)$ строго больше, чем $(\beta,\ \beta)$ и $(\alpha,\ \alpha)$. Поскольку $\alpha+\beta\in\Phi$, из утверждения (b) следует, что $(\alpha,\ \alpha)=(\beta,\ \beta)$. Аналогично $(\beta+2\alpha,\ \beta+2\alpha)>(\beta+\alpha,\ \beta+\alpha)$, и утверждение (b) влечет условие $\beta+2\alpha\notin\Phi$, т. е. $q=1$, а значит $B=0$.

Случай (ii): $(\alpha,\ \alpha)<(\beta,\ \beta)$. Тогда $(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)=(\alpha,\ \alpha)$ или $(\beta,\ \beta)$ (ввиду (b)), откуда в обоих случаях мы получаем $(\alpha,\ \beta)<0$ (и потому $\langle\alpha,\ \beta\rangle<0$). Далее, $(\beta-\alpha,\ \beta-\alpha)>(\beta,\ \beta)>(\alpha,\ \alpha)$, поэтому $\beta-\alpha\notin\Phi$ (снова ввиду (b)), т. е. $r=0$. Как и выше, $\langle\alpha,\ \beta\rangle\langle\beta,\ \alpha\rangle=0$, 1, 2 или 3, однако здесь $|\langle\alpha,\ \beta\rangle|<|\langle\beta,\ \alpha\rangle|$, откуда следует, что $\langle\alpha,\ \beta\rangle=-1$, 0 или 1. Но мы знаем, что $\langle\alpha,\ \beta\rangle<0$, поэтому $\langle\alpha,\ \beta\rangle=-1$. Ввиду утверждения (a) мы имеем $q=-\langle\beta,\ \alpha\rangle=\dfrac{\langle\beta,\ \alpha\rangle}{\langle\alpha,\ \beta\rangle}=\dfrac{\langle\beta,\ \beta\rangle}{\langle\alpha,\ \alpha\rangle}$, а значит $B=0$. □

25.2. Существование базиса Шевалле.

Лемма. *Пусть α,β — независимые корни. Возьмем элементы $x_\alpha\in L_\alpha$, $x_{-\alpha}\in L_{-\alpha}$, для которых $[x_\alpha,\ x_{-\alpha}]=h_\alpha$, и произвольный элемент $x_\beta\in L_\beta$. Тогда если α-серия, порожденная корнем β, имеет вид $\beta-r\alpha,\ \ldots,\ \beta+q\alpha$, то $[x_{-\alpha},[x_\alpha,\ x_\beta]]=q(r+1)x_\beta$.* (Определение элемента h_α см. в предложении 8.3.)

Доказательство. Если $\alpha+\beta\notin\Phi$, то $q=0$ и $[x_\alpha,\ x_\beta]=0$, поэтому обе части рассматриваемого равенства равны 0. В общем случае можно использовать присоединенное представление алгебры S_α ($\cong\mathfrak{sl}(2,\ \mathsf{F})$) на L, подобно тому как использовалось произвольное представление в п. 22.2. А именно, S_α-подмодуль в L, порожденный элементом x_β, имеет размерность $r+q+1$ (число корней в α-серии, порожденной весом β) и старший вес $r+q$. В обозначениях леммы 7.2 элемент x_β является (ненулевым) кратным вектора v_q, и последовательное применение отображений ad x_α и ad $x_{-\alpha}$ умножает v_q (значит, и x_β) на скаляр $q(r+1)$. □

Предложение. *Корневые векторы $x_\alpha\in L_\alpha$ ($\alpha\in\Phi$) можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(a) $[x_\alpha,\ x_{-\alpha}]=h_\alpha$;

(b) *если* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, *то* $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$.

При любом таком выборе корневых векторов скаляры $c_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi)$ *автоматически удовлетворяют условию*

(c) $c_{\alpha\beta}^2 = q(r+1)\dfrac{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta, \beta)}$, *где* $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ *составляют* α-*серию, порожденную корнем* β.

Доказательство. Напомним (предложение 14.3), что алгебра L обладает автоморфизмом σ порядка 2, отображающим L_α в $L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Phi)$ и действующим на H как умножение на -1. Для произвольного ненулевого $x_\alpha \in L_\alpha$ элемент $x_{-\alpha} = -\sigma(x_\alpha) \in L_{-\alpha}$ не равен нулю, причем $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$ ($\varkappa$ — форма Киллинга). При замене x_α на cx_α $(c \in \mathsf{F})$ это значение умножается на c^2. Поскольку поле F алгебраически замкнуто, при подходящем выборе x_α можно получить любое заданное ненулевое значение. Возьмем $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 2/(\alpha, \alpha)$. Согласно предложению 8.3(c) в этом случае $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ $(= 2t_\alpha/(\alpha, \alpha))$. Если для каждой пары корней $\{\alpha, -\alpha\}$ выбрать $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$ таким образом, то условие (a) будет выполнено.

Пусть теперь $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, так что $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$ для некоторого $c_{\alpha\beta} \in \mathsf{F}$. Применив к этому уравнению автоморфизм σ, получаем $[-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}] = -c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}$. С другой стороны, $[x_{-\alpha}, x_{-\beta}] = c_{-\alpha,-\beta} x_{-\alpha-\beta}$, откуда вытекает условие (b).

Выбрав корневые векторы $\{x_\alpha, \alpha \in \Phi\}$, для которых выполняются условия (a) и (b), рассмотрим ситуацию, когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ (как следствие, α и β, а тогда также t_α и t_β (см. п. 8.2), линейно независимы). Поскольку $t_{\alpha+\beta} = t_\alpha + t_\beta$, из условия (a) вытекает, что $[c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}] = c_{\alpha\beta}^2 h_{\alpha+\beta} = \dfrac{2c_{\alpha\beta}^2}{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t_\alpha + t_\beta)$. С другой стороны, ввиду условия (b) левая часть также равняется $-[[x_\alpha, x_\beta], [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]] = -[x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] = [x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\beta}, x_{-\alpha}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]]$. Пусть β-серия, порожденная корнем α, имеет вид $\alpha - r'\beta, \ldots, \alpha + q'\beta$. Тогда к каждому слагаемому можно применить предыдущую лемму (умножив α, β на -1, что не влияет на r, q, r', q'), и мы получим: $q'(r'+1)[x_\alpha, x_{-\alpha}] + q(r+1)[x_\beta, x_{-\beta}] = \dfrac{2q'(r'+1)}{(\alpha, \alpha)} t_\alpha + \dfrac{2q(r+1)}{(\beta, \beta)} t_\beta$. Сопоставив эти коэффициенты с полученными выше, с учетом линейной независимости элементов t_α и t_β получаем условие (c). □

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить *базис Шевалле* для L. По определению это любой базис $\{x_\alpha, \alpha \in \Phi;\ h_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$, в котором элементы x_α удовлетворяют условиям (a) и (b) предыдущего предложения и $h_i = h_{\alpha_i}$ для некоторого базиса $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ системы Φ.

Теорема (Шевалле). *Пусть* $\{x_\alpha, \alpha \in \Phi;\ h_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ — *базис Шевалле в алгебре* L. *Тогда соответствующие структурные константы лежат в* $\mathbb{Z}$. *Более точно,*

(a) $[h_i, h_j]=0$, $1\leqslant i, j\leqslant \ell$;

(b) $[h_i, x_\alpha]=\langle\alpha, \alpha_i\rangle x_\alpha$, $1\leqslant i\leqslant \ell$, $a\in\Phi$;

(c) $[x_\alpha, x_{-\alpha}]=h_\alpha$ *является* $\mathbb{Z}$*-линейной комбинацией векторов* $h_1, \ldots, h_\ell$;

(d) *Если* α, β *— независимые корни,* $\beta-r\alpha, \ldots, \beta+q\alpha$ *составляют* α*-серию, порожденную корнем* β*, то* $[x_\alpha, x_\beta]=0$ *при* $q=0$ *и* $[x_\alpha, x_\beta]=\pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ *при* $\alpha+\beta\in\Phi$.

Доказательство. Утверждение (a) очевидно, а (b) вытекает из того, что $\alpha(h_i)=\langle\alpha, \alpha_i\rangle$. Что касается (c), то вспомним, что двойственные корни $\alpha^\vee=2\alpha/(\alpha, \alpha)$ образуют систему корней с базисом $\Delta^\vee=\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_\ell^\vee\}$ (упражнение 10.1). При отождествлении H и H^* с помощью формы Киллинга элемент t_α соответствует α, а h_α соответствует $\alpha^\vee$. Поскольку каждый корень $\alpha^\vee$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов из $\Delta^\vee$, каждый элемент h_α является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов $h_1, \ldots, h_\ell$. Наконец, утверждение (d) вытекает из утверждения (c) предыдущего предложения в сочетании с утверждением (c) предложения 25.1. □

Читателю может показаться странным, что в определении базиса Шевалле мы потребовали выполнения равенства $c_{\alpha\beta}=-c_{-\alpha,-\beta}$, а не $c_{\alpha\beta}=c_{-\alpha,-\beta}$. Однако эта асимметрия неизбежна. В самом деле, пусть выполнено условие (a) последнего предложения. Можно показать, применяя подходящим образом тождество Якоби, что $c_{\alpha\beta}c_{-\alpha,-\beta}=-(r+1)^2$. Но это означает, что условие (d) теоремы не могло бы выполняться при отсутствии условия (b) предложения. (Таков был первоначальный ход рассуждений Шевалле.) Читателю следует проверить (упражнение 2), что из базисов классических алгебр, приведенных в п. 1.2, можно получить базисы Шевалле. Достоинством теоремы Шевалле является единообразное доказательство существования базисов Шевалле; кроме того, она показывает, каким образом из системы корней возникают структурные константы.

25.3. Вопросы единственности. Единствен ли базис Шевалле? Если базис Δ фиксирован, то элементы h_i полностью определены. С другой стороны, можно варьировать выбор элементов x_α. Например, можно заменить x_α на $\eta(\alpha)x_\alpha$ ($\alpha\in\Phi$). Тогда $[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(-\alpha)x_{-\alpha}]=\eta(\alpha)\eta(-\alpha)h_\alpha$. Чтобы выполнялось условие (a) предложения 25.2, необходимо равенство

$$\eta(\alpha)\eta(-\alpha)=1. \tag{$*$}$$

Если $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$, то $[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(\beta)x_\beta]=\eta(\alpha)\eta(\beta)[x_\alpha, x_\beta]=c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)x_{\alpha+\beta}=c'_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)x_{\alpha+\beta}$, где $c'_{\alpha\beta}=\dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)}{\eta(\alpha+\beta)}$. Аналогичная выкладка с использованием $(*)$ показывает, что для выполнения условия (b) предложения 25.2 мы должны иметь также $c'_{\alpha\beta}=\dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)}{\eta(\alpha)\eta(\beta)}$, т. е.

$$\eta(\alpha)\eta(\beta)=\pm\eta(\alpha+\beta). \tag{$**$}$$

Очевидно и обратное: для изменения элемента x_α можно использовать любую функцию $\eta\colon \Phi \to \mathsf{F}$, удовлетворяющую условиям $(*)$ и $(**)$.

Более тонок вопрос о знаках. Мы имеем $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$), но при выводе этого равенства не был выбран плюс или минус. Это не случайно, в чем читатель может убедиться, заменив в базисе Шевалле для $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: нет причин предпочесть один выбор другому. Существует алгоритм согласованного выбора знаков, основанный на знании лишь системы Φ, и это приводит к новому доказательству теоремы об изоморфизме (см. пп. 14.2, 18.4) (см. замечания к этому параграфу). Конечно, такое доказательство будет содержать логический круг, если не установить независимым образом существование автоморфизма σ!

Отметим, что можно также доказать существование алгебры L (см. п. 18.4), построив таблицу умножения явно и затем проверив тождество Якоби. Такое доказательство было проведено Титсом (см. ниже замечания); хотя по своему характеру оно «элементарно», но весьма длинно по сравнению с доказательством, основанным на теореме Серра (см. п. 18.4).

25.4. Редукция по простому модулю. Целочисленная линейная оболочка $L(\mathbb{Z})$ базиса Шевалле $\{x_\alpha, h_i\}$ — это решетка в L, независимая от выбора базиса Δ. Она даже является алгеброй Ли над $\mathbb{Z}$ (в очевидном смысле) относительно операции коммутирования, унаследованной из L (замкнутость гарантируется теоремой 25.2). Пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — простое поле характеристики p. Тогда определено тензорное произведение $L(\mathbb{F}_p) = L(\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{F}_p$: это векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ с базисом $\{x_\alpha \otimes 1, h_i \otimes 1\}$. Операция коммутирования в $L(\mathbb{Z})$ при этом индуцирует естественную структуру алгебры Ли на $L(\mathbb{F}_p)$. Таблица умножения по существу та же, что и в теореме 25.2, нужно лишь профакторизовать целые числа по модулю p.

Если K — некоторое поле, содержащее $\mathbb{F}_p$, то $L(\mathsf{K}) = L(\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathsf{K} = L(\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathsf{K}$ наследует из $L(\mathbb{F}_p)$ и базис, и структуру алгебры Ли. Таким способом мы сопоставим паре (L, K) алгебру Ли над K, структурно похожую на L. Назовем $L(\mathsf{K})$ *алгеброй Шевалле*. Хотя алгебра $L(\mathbb{Z})$ и зависит от выбора корневых векторов x_α, она, как легко видеть (упражнение 5), определяется алгеброй L с точностью до изоморфизма (над $\mathbb{Z}$); аналогично алгебра $L(\mathsf{K})$ зависит (с точностью до изоморфизма) только от пары (L, K).

Чтобы проиллюстрировать эти замечания, рассмотрим $L = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathsf{F})$. Ясно, что в стандартном базисе (см. п. 1.2) $L(\mathsf{K})$ имеет ту же таблицу умножения, что и $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathsf{K})$. Поэтому $L(\mathsf{K}) \cong \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathsf{K})$. Единственное реальное изменение при переходе от F к K состоит в том, что *алгебра* $L(\mathsf{K})$

может не быть простой: она имеет одномерный центр из скалярных матриц, если char K делит $\ell+1$ (ср. упражнение 2.3 и упражнение 8 ниже).

25.5. Построение групп Шевалле (присоединенный тип).

Предложение. *Пусть* $\alpha\in\Phi$, $m\in\mathbb{Z}^+$. *Тогда* $(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m/m!$ *переводит решетку* $L(\mathbb{Z})$ *в себя.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждый элемент базиса Шевалле отображается снова в $L(\mathbb{Z})$. Мы имеем $(\mathrm{ad}\ x_\alpha)(h_i)=[x_\alpha, h_i]= =-\langle\alpha, \alpha_i\rangle x_\alpha\in L(\mathbb{Z})$ и $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}(h_i)=0$ при всех $m\geqslant 2$. Аналогично $(\mathrm{ad}\ x_\alpha)(x_{-\alpha})=h_\alpha\in L(\mathbb{Z})$. Кроме того, $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^2}{2}(x_{-\alpha})=\dfrac{1}{2}[x_\alpha, h_\alpha]=-x_\alpha\in L(\mathbb{Z})$ и $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}(x_{-\alpha})=0$ при всех $m\geqslant 3$. Разумеется, $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}(x_\alpha)=0$ при $m\geqslant 1$. Остается рассмотреть базисные элементы x_β, $\beta\neq\pm\alpha$. Если $\beta-r\alpha, \ldots, \beta+q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β, то роль числа r для корней $\beta+\alpha$, $\beta+2\alpha$, $\ldots$, $\beta+q\alpha$ играют (соответственно) $r+1$, $r+2$, $\ldots$, $r+q$. Следовательно,

$$\frac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}(x_\beta)=\pm\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+m)}{m!}x_{\beta+m\alpha}\quad (\text{или } 0, \text{ если } \beta+m\alpha\notin\Phi).$$

Коэффициент с точностью до знака совпадает с биномиальным коэффициентом $\dbinom{r+m}{m}$, так что правая часть является целочисленным кратным вектора $x_{\beta+m\alpha}$. □

Значение этого предложения в следующем. Присоединенному представлению алгебры L в качестве модуля соответствует она сама. Решетка $L(\mathbb{Z})$ инвариантна относительно $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}$, а потому и относительно $\exp \mathrm{ad}\ x_\alpha=1+\mathrm{ad}\ x_\alpha+\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^2}{2!}+\ldots$ (сумма конечна, поскольку оператор $\mathrm{ad}\ x_\alpha$ нильпотентен). По отношению к базису Шевалле можно рассматривать $\mathrm{Int}\ L=G$ как группу матриц. Подгруппа, порожденная всеми $\exp \mathrm{ad}\ cx_\alpha$ ($\alpha\in\Phi$, $c\in\mathbb{Z}$), оставляет решетку $L(\mathbb{Z})$ инвариантной и потому состоит из целочисленных матриц (с определителем 1). В частности, если p — простое число, а $\mathbb{F}_p$ — простое поле из p элементов, то редукция всех матричных элементов по модулю p дает группу матриц над $\mathbb{F}_p$, которая действует на алгебре Ли $L(\mathbb{F}_p)$ как группа автоморфизмов и обозначается $G(\mathbb{F}_p)$.

Более общо, пусть T — переменное. Группа, порожденная всеми матрицами вида $\exp \mathrm{ad}\ Tx_\alpha$ ($\alpha\in\Phi$), состоит из матриц с элементами в $\mathbb{Z}[T]$ (и определителем 1). Если T принимает значения в произвольном поле K, содержащем $\mathbb{F}_p$, то мы получаем группу матриц $G(\mathsf{K})$ над K. Такая группа называется *группой Шевалле* (*присоединенного типа*). Для конечного поля K эта группа конечна и (за немногими исключениями) п р о с т а;

доказав это, Шевалле смог предъявить несколько семейств конечных простых групп, неизвестных ранее.

Упражнения

1. Докажите предложение 25.1(c) путем рассмотрения систем корней ранга 2. [Заметьте, что один из корней α, β можно считать простым.]

2. Как получить базисы Шевалле из базисов классических алгебр, указанных в п. 1.2? [См. упражнение 14.7.]

3. С помощью доказательства предложения 25.2 дайте новое доказательство для упражнения 9.10.

4. Докажите, что если в каждой компоненте системы Φ встречаются корни только одной длины (т. е. Φ имеет неприводимые компоненты типов A, D, E), то в теореме 25.2 все элементы $c_{\alpha\beta}$ равны ± 1 (когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$).

5. Докажите, что различный выбор базисов Шевалле для L приводит к изоморфным алгебрам Ли $L(\mathbb{Z})$ над $\mathbb{Z}$. («Изоморфизм над $\mathbb{Z}$» определяется так же, как и над полем.)

6. Пусть положительные корни алгебры типа B_2 обозначены α, β, $\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$. Проверьте, что для базиса Шевалле выполнены следующие равенства (с указанными знаками $+$ и $-$):

$$
\begin{aligned}
&[h_\beta, x_\beta] = 2x_\beta; && [x_\beta, x_\alpha] = x_{\alpha+\beta},\\
&[h_\beta, x_\alpha] = -2x_\alpha; && [x_\beta, x_{\alpha+\beta}] = 2x_{2\beta+\alpha},\\
&[h_\beta, x_{\alpha+\beta}] = 0; && [x_\beta, x_{-\alpha-\beta}] = -2x_{-\alpha},\\
&[h_\beta, x_{2\beta+\alpha}] = 2x_{2\beta+\alpha}; && [x_\beta, x_{-2\beta-\alpha}] = -x_{-\alpha-\beta},\\
&[h_\alpha, x_\beta] = -x_\beta; && [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}] = x_{-\beta},\\
&[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha; && [x_{\alpha+\beta}, x_{-2\beta-\alpha}] = x_{-\beta},\\
&[h_\alpha, x_{\alpha+\beta}] = x_{\alpha+\beta}; && [h_\alpha, x_{2\beta+\alpha}] = 0.
\end{aligned}
$$

7. Пусть $\mathsf{F} = \mathbb{C}$. Фиксируем в L базис Шевалле. Пусть L' обозначает $\mathbb{R}$-подпространство в L, натянутое на элементы $\sqrt{-1}h_i$ ($1 \leqslant i \leqslant \ell$), $x_\alpha - x_{-\alpha}$ и $\sqrt{-1}(x_\alpha + x_{-\alpha})$ ($\alpha \in \Phi^+$). Докажите, что эти элементы составляют базис для L над $\mathbb{C}$ (т. е. $L \cong L' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) и что подпространство L' замкнуто относительно коммутирования (т. е. L' является алгеброй Ли над $\mathbb{R}$). Покажите, что форма Киллинга $\varkappa'$ на L' совпадает с ограничением формы $\varkappa$ и отрицательно определенна. (L' — это «компактная вещественная форма» алгебры L, которая соответствует компактной группе Ли).

8. Пусть $L = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathsf{F})$, а K — любое поле характеристики p. Если $p \nmid (\ell+1)$, то алгебра $L(\mathsf{K})$ проста. Если $p = 2$, $\ell = 1$, то алгебра $L(\mathsf{K})$ разрешима. Если $\ell > 1$, $p \mid (\ell+1)$, то $\operatorname{Rad} L(\mathsf{K}) = Z(L(\mathsf{K}))$ состоит из скалярных матриц.

9. Докажите, что в случае алгебры L типа A_ℓ группа Шевалле присоединенного типа $G(\mathsf{K})$ изоморфна $\mathrm{PSL}(\ell+1, \mathsf{K}) = \mathrm{SL}(\ell+1, \mathsf{K})$ по модулю скаляров (которые являются корнями степени $\ell+1$ из единицы в K).

10. Пусть L — алгебра Ли типа G_2, K — поле характеристики 3. Докажите, что в $L(\mathsf{K})$ имеется семимерный идеал M (рассмотрите короткие корни). Опишите представление алгебры $L(\mathsf{K})$ на $L(\mathsf{K})/M$.

11. Докажите, что группа Шевалле $G(\mathsf{K})$ действует на $L(\mathsf{K})$ как группа автоморфизмов алгебры Ли.

12. Является ли базис алгебры G_2, указанный в п. 19.3, базисом Шевалле?

Замечания

Все идеи этого параграфа выросли из плодотворной статьи Шевалле [3]. Наше изложение следует запискам лекций Стейнберга [2], которые служат лучшим источником по всем вопросам, связанным с группами Шевалле. В работах Carter [1], [2], Curtis [1] рассмотрены конечные группы Шевалле. Алгоритм выбора знаков в базисе Шевалле описан в книге Samelson [1], с. 54. Подход к теореме существования, основанный на детальном (но элементарном) анализе знаков, см. в статье Tits [1].

§ 26. *Теорема Костанта*

Пусть L, H, Φ, Δ таковы, как раньше. Фиксируем в L базис Шевалле $\{x_\alpha, \alpha\in\Phi;\ h_i,\ 1\leqslant i\leqslant \ell\}$.

Чтобы построить группы матриц, отвечающие произвольным представлениям φ алгебры L (а не только присоединенному), мы должны работать в алгебре $\mathfrak{U}(L)$. Идея состоит в том, чтобы в произвольном (конечномерном) L-модуле построить решетку, аналогичную $L(\mathbb{Z})$ и инвариантную относительно всех $\varphi(x_\alpha^m)/m!$. Эта конструкция будет использовать «$\mathbb{Z}$-форму» алгебры $\mathfrak{U}(L)$, которая окажется не чем иным, как подкольцом с единицей в $\mathfrak{U}(L)$, порожденным всеми элементами $x_\alpha^m/m!$ $(\alpha\in\Phi)$.

26.1. Одна комбинаторная лемма. Вспомним формулу для биномиального коэффициента: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. Если здесь заменить n на элемент x коммутативной ассоциативной F-алгебры (с единицей), то полученное выражение снова корректно определено. Его можно обозначить $\binom{x}{k}$, $k\in\mathbb{Z}^+$. Выполняется и известное тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}. \qquad (*)$$

Как обычно, мы полагаем $\binom{n}{0} = 1$ и $\binom{n}{k} = 0$ при отрицательных k.

Лемма. *Пусть $T_1, \ldots, T_\ell$ — переменные, $f = f(T_1, \ldots, T_\ell)$ — такой многочлен над F, что $f(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{Z}$ при всех $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$. Тогда f является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией многочленов $\binom{T_1}{b_1}\binom{T_2}{b_2}\ldots\binom{T_\ell}{b_\ell}$, где $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{Z}^+$ и b_i не превосходит степени f как многочлена от T_i.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что предположение выглядит обоснованным, поскольку

$$\binom{T_i}{b_i} = \frac{T_i(T_i-1)\ldots(T_i-b_i+1)}{b_i!}$$

принимает целочисленное значение, если подставить вместо T_i целое число. Заметим также, что указанные многочлены составляют F-базис для $\mathsf{F}[T_1, \ldots, T_\ell]$.

Доказательство проводится индукцией по ℓ и по степени многочлена f относительно T_ℓ. Если f — константа, то она должна быть целочисленным кратным константы $1 = \binom{T_\ell}{0}$, и доказывать нечего. В общем случае положим $f = \sum\limits_{k=0}^{r} f_k(T_1, \ldots, T_{\ell-1})\binom{T_\ell}{k}$, где r равно степени многочлена f относительно T_ℓ и $f_k(T_1, \ldots, T_{\ell-1}) \in \mathsf{F}[T_1, \ldots, T_{\ell-1}]$. В обеих частях последнего равенства формально заменим T_ℓ на $T_{\ell+1}$ и вычтем одно из другого. Ввиду тождества $(*)$ правая часть полученного равенства равна $\sum\limits_{k=0}^{r} f_k(T_1, \ldots, T_{\ell-1})\binom{T_\ell}{k-1}$, а в левой части стоит многочлен, удовлетворяющий первоначальному предположению относительно f. Повторим этот процесс r раз; тогда все коэффициенты справа обратятся в нуль, кроме коэффициента при $f_r(T_1, \ldots, T_{\ell-1})$, равного $\binom{T_\ell}{r-r} = 1$. Многочлен f_r удовлетворяет предположению относительно f (он принимает целочисленные значения на $\mathbb{Z}^{\ell-1}$), но имеет на одно переменное меньше. По индукции получаем, что f_r можно выразить требуемым образом. При этом $f - f_r(T_1, \ldots, T_{\ell-1})\binom{T_\ell}{r}$ удовлетворяет первоначальному предположению относительно f, но имеет степень меньше чем r относительно T_ℓ, и можно снова применить индукцию, что и завершает доказательство. □

26.2. Частный случай: $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. В этом пункте мы рассмотрим частный случай $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, используя стандартный базис Шевалле x, y, h. Следующая лемма и ее следствие дают в этом случае доказательство теоремы Костанта; позже мы на этой основе рассмотрим общий случай.

Лемма. *Если $a, c \in \mathbb{Z}^+$, то в $\mathfrak{U}(L)$ выполняется следующее равенство:*

$$\frac{x^c}{c!}\frac{y^a}{a!} = \sum_{k=0}^{\min(a,c)} \frac{y^{a-k}}{(a-k)!}\binom{h-a-c+2k}{k}\frac{x^{c-k}}{(c-k)!}.$$

Доказательство. Если $a=0$ (соответственно $c=0$), то правая часть равна $x^c/c!$ (соответственно $y^a/a!$). Если $a=c=1$, то уравнение принимает вид $xy=yx+h$ (равенство верно). Для общего случая проведем индукцию по a и c. Пусть сначала $c=1$; индукцией по a получаем

$$\frac{xy^a}{a!}=\frac{xy^{a-1}}{(a-1)!}\frac{y}{a}=\frac{y^{a-1}}{(a-1)!}\frac{xy}{a}+\frac{y^{a-2}}{(a-2)!}(h-a+2)\frac{y}{a}=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a(a-2)!}-$$
$$-\frac{2y^{a-1}}{a(a-2)!}-\frac{y^{a-1}}{a(a-3)!}=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{(a-1)!}-\frac{y^{a-1}}{(a-2)!}=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}}{(a-1)!}(h-a+1).$$

Теперь применим индукцию по c, используя тождество $(*)$ из п. 26.1 и тот факт, что $xf(h)=f(h-2)x$ для любого многочлена $f(T)$ (проверьте это для многочленов T^m индукцией по m; см. ниже лемму 26.3D). □

Следствие. *Если $b\in\mathbb{Z}^+$, то $\binom{h}{b}$ принадлежит подкольцу в $\mathfrak{U}(L)$, порожденному всеми элементами $x^c/c!$ и $y^a/a!$ ($a,\ c\in\mathbb{Z}^+$).*

Доказательство. Это очевидно при $b=0$, поэтому можно проводить индукцию по b. Возьмем в лемме $a=c=b$, тогда правая часть равна $\binom{h}{b}+\sum\limits_{k=0}^{b-1}\frac{y^{b-k}}{(b-k)!}\binom{h-2b+2k}{k}\frac{x^{b-k}}{(b-k)!}$ (и принадлежит указанному подкольцу в $\mathfrak{U}(L)$). Пусть $k<b$. Ясно, что многочлен $\binom{T-2b+2k}{k}$ от переменного T принимает в целых точках целые значения, и по лемме 26.1 его можно записать как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию многочленов $\binom{T}{j}$, где $j\leqslant k$ $(<b)$. В свою очередь, индукция по b показывает, что $\binom{h}{j}$ принадлежат указанному подкольцу в $\mathfrak{U}(L)$, и как следствие ему принадлежит и $\binom{h}{b}$. □

26.3. Леммы о коммутировании. Вернемся к общему случаю. При любом $\alpha\in\Phi$ в качестве стандартного базиса трехмерной простой подалгебры S_α можно взять часть заданного базиса Шевалле в L. Поэтому результаты п. 26.2 можно свободно применять в ситуациях, где фигурируют лишь $\pm\alpha$. Главную проблему теперь составляют пары линейно независимых корней.

Лемма А. *Пусть V, W — два L-модуля, A, B — подгруппы в них. Если A, B инвариантны относительно всех эндоморфизмов $x_\alpha^t/t!$ ($\alpha\in\Phi$, $t\in\mathbb{Z}^+$), то это верно и для $A\otimes B\subset V\otimes W$.*

Доказательство. Напомним, что $x_\alpha\cdot(v\otimes w)=x_\alpha\cdot v\otimes w+v\otimes x_\alpha\cdot w$. С помощью биномиального разложения получаем, что

$$\frac{x_\alpha^t}{t!}(v\otimes w)=\sum_{k=0}^{t}\left(\frac{x_\alpha^k}{k!}\cdot v\otimes\frac{x_\alpha^{t-k}}{(t-k)!}\cdot w\right).$$

Если $v\in A$, $w\in B$, то каждое слагаемое правой части лежит в $A\otimes B$. □

Следствие. *Пусть* $L(\mathbb{Z})$ (*как и в п.* 25.4) *обозначает* $\mathbb{Z}$*-линейную оболочку базиса Шевалле, выбранного в* L. *Тогда при* $\alpha\in\Phi$, $t\in\mathbb{Z}^+$ *эндоморфизм* $\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^t}{t!}$ *оставляет инвариантным произведение* $L(\mathbb{Z})\otimes\otimes L(\mathbb{Z})\otimes\ldots\otimes L(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Применим предложение 25.5 и лемму A. □

Подмножество Ψ в Φ называется *замкнутым*, если из того, что $\alpha,\beta\in\Psi$, $\alpha+\beta\in\Phi$, следует, что $\alpha+\beta\in\Psi$. *Примеры*: Φ; Φ^+; множество всех элементов $i\alpha+j\beta\in\Phi$, где $i, j\geqslant 0$; α,β — линейно независимые корни.

Лемма B. *Пусть* Ψ — *замкнутое множество корней, причем* $\Psi\cap(-\Psi)=\varnothing$. *Далее, пусть* $\mathfrak{X}$ — *подкольцо с единицей в* $\mathfrak{U}(L)$, *порожденное всеми элементами* $x_\alpha^t/t!$ ($\alpha\in\Psi$, $t\in\mathbb{Z}^+$). *При любом упорядочении множества* Ψ *множество произведений* $\prod_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$ (*взятых в данном порядке*) *составляет базис* $\mathbb{Z}$*-модуля* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Ясно, что F-линейная оболочка всех подпространств L_α ($\alpha\in\Psi$) является подалгеброй X в L; применив теорему ПБВ к $\mathfrak{U}(X)$, мы видим, что указанные произведения составляют базис для $\mathfrak{X}$ над F. Поэтому достаточно показать, что при разложении по базису все коэффициенты лежат в $\mathbb{Z}$. Назовем $\sum_{\alpha\in\Psi} t_\alpha$ степенью произведения $\prod_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$. Если $x\in\mathfrak{X}$ не является скаляром, то $x=c\prod_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}+$(слагаемые степени не выше, чем $\sum t_\alpha$), где $0\neq c\in\mathsf{F}$, причем остальные слагаемые степени $t=\sum t_\alpha$ включают последовательности, отличные от $(\ldots t_\alpha\ldots)$. Посредством присоединенного представления $\mathfrak{X}$ действует на $L\otimes\ldots\otimes L$ (t экземпляров). В частности, рассмотрим $x\cdot(\underbrace{(x_{-\alpha}\otimes\ldots\otimes x_{-\alpha})}_{t_\alpha}\otimes\underbrace{(x_{-\beta}\otimes\ldots\otimes x_{-\beta})}_{t_\beta}\otimes\ldots)$, где $\Psi=(\alpha,\beta,\ldots)$. Какова компонента этого элемента в $H\otimes\ldots\otimes H$ (относительно стандартного ПБВ-базиса)? Непосредственно проверяется, что первое слагаемое в x, а именно $\prod_\alpha\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$, дает $c(\underbrace{(h_\alpha\otimes\ldots\otimes h_\alpha)}_{t_\alpha}\otimes\underbrace{(h_\beta\otimes\ldots\otimes h_\beta)}_{t_\beta}\otimes\ldots)$. Однако остальные слагаемые $\prod\frac{x_\alpha^{u_\alpha}}{u_\alpha!}$ в x, примененные к тому же элементу, не дают ненулевой компоненты в $H\otimes\ldots\otimes H$: либо множителей слишком мало ($\sum u_\alpha<\sum t_\alpha$), либо $\sum u_\alpha=\sum t_\alpha$, но множители «неправильно распределены».

Согласно следствию из леммы A, элемент x сохраняет $L(\mathbb{Z})\otimes\ldots\otimes L(\mathbb{Z})$ (t экземпляров). При этом $L(\mathbb{Z})$ не зависит от выбора базиса Δ, поэтому можно считать, что α (первый элемент в Ψ) — простой корень. Элементы h_β с простыми корнями β составляют базис свободного $\mathbb{Z}$-модуля $H(\mathbb{Z})=L(\mathbb{Z})\cap H$, поэтому их всевозможные тензорные произведения составляют базис свободного $\mathbb{Z}$-модуля $H(\mathbb{Z})\otimes\ldots\otimes H(\mathbb{Z})$. С другой стороны, мы только что показали, что $c((h_\alpha\otimes\ldots\otimes h_\alpha)\otimes(h_\beta\otimes\ldots\otimes h_\beta)\otimes\ldots)\in H(\mathbb{Z})\otimes\ldots$ $\ldots\otimes H(\mathbb{Z})$. Отсюда ясно, что $c\in\mathbb{Z}$. Теперь можно повторить рассуждение для элемента $x-c\prod\limits_\alpha \dfrac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}\in\mathfrak{X}$. Индукция по числу слагаемых завершает доказательство. □

Для удобства любое произведение элементов вида $\dfrac{x_\alpha^t}{t!}$, $\dbinom{h_i-j}{k}$ ($j, k\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{Z}^+$) в $\mathfrak{U}(L)$ будем называть м о н о м о м, а сумму встречающихся в нем чисел t — его в ы с о т о й.

Лемма C. *Пусть* $\alpha,\beta\in\Phi$, $k, m\in\mathbb{Z}^+$. *Тогда* $\dfrac{x_\beta^m}{m!}\dfrac{x_\alpha^k}{k!}$ *является* $\mathbb{Z}$-*линейной комбинацией элементов* $\dfrac{x_\alpha^k}{k!}\dfrac{x_\beta^m}{m!}$ *и мономов высоты меньше чем* $k+m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\alpha=\beta$ доказывать нечего. При $\alpha=-\beta$ наше утверждение вытекает из леммы 26.2. В остальных случаях α и β независимы и можно применить лемму B к множеству корней вида $i\alpha+j\beta$ ($i, j\geqslant 0$), представив данный моном как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию монома $\dfrac{x_\alpha^k}{k!}\dfrac{x_\beta^m}{m!}$ и других мономов. Остается показать, что последние имеют высоту меньше чем $k+m$. Но из теоремы ПБВ (см. п. 17.3) уже вытекает, что $\dfrac{x_\beta^m}{m!}\dfrac{x_\alpha^k}{k!}=\dfrac{x_\alpha^k}{k!}\dfrac{x_\beta^m}{m!}+$ (F-линейная комбинация элементов ПБВ-базиса степени меньше чем $k+m$). Так как мы используем мономы, кратные элементам ПБВ-базиса, доказательство завершено. □

Лемма D. *Пусть* $\alpha,\beta\in\Phi$, $f(T)\in\mathsf{F}[T]$ (T — *переменное*). *Тогда при всех* $k\in\mathbb{Z}^+$ *выполняется равенство* $x_\alpha^k f(h_\beta)=f(h_\beta-k\alpha(h_\beta))x_\alpha^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно (ввиду линейности) разобрать случай, когда f имеет вид T^m; тогда наше утверждение принимает вид

$$x_\alpha^k h_\beta^m=(h_\beta-k\alpha(h_\beta))^m x_\alpha^k. \qquad (*)$$

Если k или m равно 0, то это очевидно. Если $k=m=1$, то $x_\alpha h_\beta=h_\beta x_\alpha-$ $-\alpha(h_\beta)x_\alpha=(h_\beta-\alpha(h_\beta))x_\alpha$, что и требовалось. Проведем индукцию по k и m. При фиксированном k из равенства $(*)$ для всех показателей меньших, чем m, сразу следует это равенство для m. Поэтому $(*)$ верно при $k=1$ и произвольном m. В свою очередь, выполнение равенства $(*)$ для показателей меньших, чем k и произвольного m (или f) влечет его справедливость для данного k и произвольного m. □

26.4. Доказательство теоремы Костанта. Фиксируем упорядочение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ в Φ^+. Будем обозначать наборы из m или ℓ неотрицательных целых чисел через $A=(a_1, \ldots, a_m)$, $B=(b_1, \ldots, b_\ell)$, $C=(c_1, \ldots, c_m)$.

Определим в $\mathfrak{U}(L)$ следующие элементы:

$$f_A = \frac{x_{-\alpha_1}^{a_1}}{a_1!} \ldots \frac{x_{-\alpha_m}^{a_m}}{a_m!}, \quad h_B = \binom{h_1}{b_1} \ldots \binom{h_\ell}{b_\ell}, \quad e_C = \frac{x_{\alpha_1}^{c_1}}{c_1!} \ldots \frac{x_{\alpha_m}^{c_m}}{c_m!}.$$

Отметим, что всевозможные h_B составляют базис над F в $\mathfrak{U}(H)$: по существу этот факт содержится в замечании из п. 26.1 о многочленах. В сочетании с теоремой ПБВ это показывает, что всевозможные элементы $f_A h_B e_C$ составляют F-базис в $\mathfrak{U}(L)$.

Теорема (Костант). *Пусть $\mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$ — подкольцо с единицей в $\mathfrak{U}(L)$, порожденное всеми элементами вида $x_\alpha^t/t!$ ($\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{Z}^+$). Далее, пусть $\mathfrak{B}$ — решетка в $\mathfrak{U}(L)$ с $\mathbb{Z}$-базисом, состоящим из всех элементов вида $f_A h_B e_C$. Тогда $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$.*

Доказательство заключается в соединении предшествующих результатов. Прежде всего, $\binom{h_i}{b_i} \in \mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$ при всех i ввиду следствия из леммы 26.2. Поэтому $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$.

Труднее доказать обратное включение. Достаточно показать, что все «мономы» (в смысле п. 26.3) лежат в $\mathfrak{B}$, так как они порождают $\mathbb{Z}$-модуль $\mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$. Применим для этого индукцию по «высоте». Мономы высоты 0 включают только множители вида $\binom{h_i - j}{k}$ и ввиду леммы 26.1 лежат в $\mathfrak{B}$. В общем случае леммы 26.3C и 26.3D (вместе с индуктивным предположением) позволяют нам записать любой моном как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию других мономов, в которых множители, включающие $x'_{-\alpha}s$, $h's$ и $x'_\alpha s$, идут в предписанном порядке. Далее, из тождества $\frac{T^k}{k!}\frac{T^m}{m!} = \binom{m+k}{m}\frac{T^{k+m}}{(k+m)!}$ вытекает, что каждый элемент $\pm x_\alpha$ появится хотя бы в одном слагаемом каждой такой суммы. Доказательство завершается применением леммы 26.1 и леммы 26.3D. $\square$

Упражнения

1. Пусть $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, а $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ — построенный в п. 7.2 базис неприводимого L-модуля $V(m)$ старшего веса m. Докажите, что $\mathbb{Z}$-оболочка этого базиса инвариантна относительно $\mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$. Пусть $(w_0, w_1, \ldots, w_m)$ — базис в $V(m)$, использованный в п. 22.2. Покажите, что $\mathbb{Z}$-оболочка элемента w_i не инвариантна относительно $\mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}}$.

2. Пусть $\lambda \in \Lambda^+ \subset H^*$ — доминантная целочисленная линейная функция. Рассмотрим модуль $Z(\lambda)$ из п. 20.3 с неприводимым фактормодулем $V(\lambda) = Z(\lambda)/Y(\lambda)$. Покажите, что кратность веса μ в $V(\lambda)$ можно эффективно вычислить с помощью теоремы Костанта следующим образом: если v^+ — старший вектор в $Z(\lambda)$, то всевозможные векторы $f_A \cdot v^+$, для которых $\sum a_i\alpha_i = \lambda - \mu$, составляют F-базис весового подпространства для μ в $Z(\lambda)$. (См. лемму 24.1D.) В свою очередь, если $\sum a_i\alpha_i = \sum c_i\alpha_i$, то вектор

$e_C f_A \cdot v^+$ кратен вектору v^+ с целым коэффициентом n_{CA}. Получаем целочисленную $d \times d$-матрицу (n_{CA}) (где d — кратность веса μ в $Z(\lambda)$), ранг которой равен $m_\lambda(\mu)$ (см. упражнение 20.9)[1]. Чтобы ее вычислить, достаточно знать структурные константы базиса Шевалле. Выполните подобное вычисление для типа A_2, взяв небольшое значение $\lambda - \mu$.

Замечания

Теорема 26.4 появилась в работе Kostant [2]; здесь мы воспроизвели доказательство из Steinberg [2]. О «схематическом» подходе к затронутым вопросам см. Chevalley [4], Borel [2]. Упражнение 2 основано на работе Burgoyne [1].

§27. *Допустимые решетки*

Сохраняются обозначения из §26. С помощью теоремы Костанта мы построим *допустимую* решетку в произвольном конечномерном L-модуле и опишем ее стабилизатор в L. Редукция по простому модулю тогда даст линейные группы и линейные алгебры Ли над полем простой характеристики, что обобщает конструкцию групп и алгебр Шевалле из §25.

27.1. Существование допустимых решеток. Из теоремы Костанта (или предшествующих лемм) вытекает, что если $N^+ = \coprod_{\alpha \succ 0} L_\alpha$, $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$, то каждая из алгебр $\mathfrak{U}(N^-)$, $\mathfrak{U}(H)$, $\mathfrak{U}(N^+)$ имеет «$\mathbb{Z}$-форму», $\mathbb{Z}$-базис которой состоит из всех f_A, h_B, e_C (соответственно). Обозначим эти подкольца через $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}^-$, $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}^0$, $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}^+$. Тогда $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}$ $(=\mathfrak{U}(L)_\mathbb{Z})$ равняется $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}^- \mathfrak{U}_\mathbb{Z}^0 \mathfrak{U}_\mathbb{Z}^+$.

Отметим для дальнейшего, что мы определили р е ш е т к у M в конечномерном векторном пространстве V над F как $\mathbb{Z}$-оболочку базиса в V (над F). Поскольку $\operatorname{char} \mathsf{F} = 0$, конечно порожденный $\mathbb{Z}$-подмодуль в V автоматически является свободным $\mathbb{Z}$-модулем конечного ранга. Следовательно, решетку в V можно охарактеризовать как конечно порожденную подгруппу, которая порождает V над F и имеет $\mathbb{Z}$-ранг, не превосходящий $\dim_\mathsf{F} V$.

Лемма. *Пусть $d \in \mathbb{Z}^\ell$ и $S \subset \mathbb{Z}^\ell$ — конечное множество, не содержащее d. Тогда существует такой многочлен $f(T_1, \ldots, T_\ell)$ над F, что $f(\mathbb{Z}^\ell) \subset \mathbb{Z}$, $f(d) = 1$ и $f(S) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d = (d_1, \ldots, d_\ell)$. Для $k \in \mathbb{Z}^+$ положим $f_k(T_1, \ldots, T_\ell) = \prod_{i=1}^{\ell} \binom{T_i - d_i + k}{k} \binom{-T_i + d_i + k}{k}$, так что $f_k(\mathbb{Z}^\ell) \subset \mathbb{Z}$ (см. лемму 26.1), $f_k(d) = 1$. В «ящике» в $\mathbb{Z}^\ell$ с центром в d и стороной $2k$ функция f_k заведомо равна нулю вне d. Поэтому достаточно выбрать k настолько большим, чтобы этот «ящик» охватил конечное множество S, и взять $f = f_k$. $\square$

[1] Целочисленность (в рассматриваемом случае нулевой характеристики) здесь не нужна.

Теорема. *Пусть V — конечномерный L-модуль. Тогда*

(a) *любая подгруппа в V, инвариантная относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$, является прямой суммой своих пересечений с весовыми подпространствами;*

(b) *модуль V содержит решетку, инвариантную относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$.*

Доказательство. (a) Пусть M — подгруппа в V, инвариантная относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$. Для каждого веса μ в V положим $d(\mu)=(\mu(h_1), \ldots$ $\ldots, \mu(h_\ell))\in\mathbb{Z}^\ell$. Фиксируем в V произвольный вес λ. Согласно предыдущей лемме существует такой многочлен f от ℓ переменных над F, что $f(\mathbb{Z}^\ell)\subset\mathbb{Z}$, $f(d(\lambda))=1$, $f(d(\mu))=0$ для $\mu\neq\lambda$ в $\Pi(V)$. Положим $u=f(h_1, \ldots, h_\ell)$. Ввиду леммы 26.1 мы имеем $u\in\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^0$. Ясно, что u действует на V как проекция на V_λ. В частности, если вектор v лежит в M, то его V_λ-компонента $u\cdot v$ также лежит в M.

(b) Ввиду теоремы Вейля о полной приводимости можно считать, что $V=V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$, т.е. что модуль V неприводим. Пусть $v^+\in V$ — старший вектор (веса λ). Положим $M=\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^-\cdot v^+$. Поскольку v^+ аннулируется всеми элементами $\mathbb{Z}$-базиса $\{e_C\}$ в $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^+$, кроме единицы, $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^+\cdot v^+=\mathbb{Z}v^+$. Кроме того, $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^0\cdot v^+=\mathbb{Z}v^+$, так как $\binom{h_i}{b_i}$ действует на v^+ как умножение на целое число

$$\frac{\lambda(h_i)(\lambda(h_i)-1)\ldots(\lambda(h_i)-b_i+1)}{b_i!}.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}\cdot v^+=\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^-\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^0\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^+\cdot v^+=\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^-\cdot(\mathbb{Z}v^+)=M$, так что подгруппа M инвариантна относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$. Из этого рассуждения видно также, что $M\cap V_\lambda=\mathbb{Z}v^+$. Мы знаем, что все функции f_A, кроме конечного их числа, аннулируют вектор v^+, поэтому подгруппа M конечно порождена. При этом M порождает V над F, так как $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^-$ содержит F-базис для $\mathfrak{U}(N^-)$ и $\mathfrak{U}(N^-)\cdot v^+=V$.

Осталось убедиться, что $\mathbb{Z}$-ранг решетки M не превосходит $\dim_{\mathsf{F}} V$. Предположим противное, и пусть r — наименьшее число, для которого найдутся r векторов в M, линейно независимых над $\mathbb{Z}$ и зависимых над F. Пусть $\sum_{i=1}^r a_iv_i=0$ $(a_i\in\mathsf{F},\ 0\neq v_i\in M)$. Найдется такое $u\in\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$, что вектор $u\cdot v_1$ имеет ненулевую V_λ-компоненту: иначе вектор v_1 порождал бы ненулевой собственный $\mathfrak{U}(L)$-подмодуль неприводимого модуля V. С другой стороны, V_λ-компонента каждого вектора $u\cdot v_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ лежит в M (ввиду утверждения (a)) и потому является целочисленным кратным вектора v^+, скажем m_iv^+ (поскольку $M\cap V_\lambda=\mathbb{Z}v^+$). Таким образом, если $\sum a_iv_i=0$, то $\sum a_i(u\cdot v_i)=0$, а значит $\sum a_im_i=0$ (но $m_1\neq0$). Следовательно, $0=m_1\left(\sum_{i=1}^r a_iv_i\right)-\left(\sum_{i=1}^r a_im_i\right)v_1=\sum_{i=2}^r a_i(m_1v_i-m_iv_1)$. Векторы $m_1v_i-m_iv_1$ $(2\leqslant i\leqslant r)$ лежат в M и, очевидно, независимы над $\mathbb{Z}$, но зависимы над F.

Это противоречит минимальности числа r и доказывает, что решетка M инвариантна относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Решетка M в конечномерном L-модуле V, инвариантная относительно $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$, называется *допустимой*. Она существует согласно утверждению (b) последней теоремы; на самом деле из его доказательства видно, как построить такую решетку (наименьшую возможную среди содержащих данный старший вектор, если модуль V неприводим). Из утверждения (a) вытекает, что $M = \coprod_{\mu \in \Pi(V)} (M \cap V_\mu)$. Разумеется, если V совпадает с L (в случае представления ad), то, как мы уже видели (см. п. 25.5), допустимой решеткой будет $\mathbb{Z}$-оболочка базиса Шевалле.

27.2. Стабилизатор допустимой решетки. Пусть V — конечномерный L-модуль. Чтобы избежать тривиальностей, будем считать его т о ч н ы м (иначе говоря, мы избавляемся от тех простых идеалов в L, которые действуют на V тривиально). Тогда легко видеть, что $\mathbb{Z}$-оболочка множества $\Pi(V)$, которую мы обозначим $\Lambda(V)$, лежит между Λ и решеткой корней Λ_r (упражнение 21.5).

Используя теорему 27.1, выберем в V допустимую решетку M. Пусть L_V — ее стабилизатор в L, $H_V = H \cap L_V$. (Ниже мы покажем, что L_V зависит только от V, но не от выбора решетки M, так что наше обозначение корректно.) Очевидно, что $L(\mathbb{Z}) \subset L_V$ и множество L_V замкнуто относительно операции коммутирования. Элемент $h \in H$ оставляет решетку M инвариантной, если и только если $\lambda(h) \in \mathbb{Z}$ при всех $\lambda \in \Pi(V)$ (или $\Lambda(V)$): это вытекает из утверждения (a) теоремы 27.1. Как следствие, включения $\Lambda \supset \Lambda(V) \supset \Lambda_r$ индуцируют обратные включения $H(\mathbb{Z}) \subset H_V \subset H_0$, где $H_0 = \{h \in H\colon \lambda(h) \in \mathbb{Z}$ при всех $\lambda \in \Lambda_r\}$, а $H(\mathbb{Z}) = H \cap L(\mathbb{Z})$ ($=\mathbb{Z}$-оболочке всех h_α, $\alpha \in \Phi$). Как следствие, H_V является решеткой в H. Наша цель — показать, что L_V — допустимая решетка в L. Первым шагом станет следующая общая лемма. (Ее можно сформулировать как утверждение об ассоциативных алгебрах, но нам требуется лишь частный случай.)

Лемма. *Если $u \in \mathfrak{U}(L)$, $x \in L$, то*

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} u \frac{x^i}{i!}$$

в $\mathfrak{U}(L)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$ равенство принимает вид $\operatorname{ad} x(u) = xu - ux$, что верно по определению. Применим индукцию по n:

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u) = \frac{\operatorname{ad} x}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!} u \frac{x^i}{i!}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-i}}{n(n-1-i)!} u \frac{x^i}{i!}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!} u \frac{x^{i+1}}{i!n}\right).$$

После замены индекса $i \mapsto i-1$ вторая сумма принимает вид

$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} u \frac{x^i}{(i-1)!n}.$$

При $0<i<n$, объединяя i-е слагаемые первой и второй сумм, получаем

$$(-1)^i x^{n-i} u x^i \left(\frac{1}{n(n-1-i)!\,i!} + \frac{1}{n(n-i)!\,(i-1)!}\right).$$

Но величина в скобках равна $\dfrac{1}{(n-1)!\,i!}$. Нулевое и n-е слагаемые равны $\dfrac{x^n}{n!}u$ и $(-1)^n u \dfrac{x^n}{n!}$, как и требовалось. □

Предложение. *Множество L_V является допустимой решеткой в L-модуле L. При этом $L_V = H_V + \coprod\limits_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z}x_\alpha$; как следствие, L_V зависит только от V (фактически от $\Lambda(V)$), но не от выбора решетки M.*

Доказательство. Мы знаем, что $L(\mathbb{Z}) = H(\mathbb{Z}) + \coprod \mathbb{Z}x_\alpha \subset L_V$, и заведомо $H_V \subset L_V$. С другой стороны, предыдущая лемма гарантирует инвариантность множества L_V относительно всех $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^m}{m!}$ (следовательно, относительно $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}$). Это позволяет записать множество L_V как сумму его пересечений с H и L_α (утверждение (a) теоремы 27.1), поэтому $L_V = H_V + \coprod(L_V \cap L_\alpha)$, причем $\mathbb{Z}x_\alpha \subset L_V \cap L_\alpha$. Предложение будет доказано, если мы убедимся, что последнее включение является равенством при всех $\alpha \in \Phi$.

Пусть линейное отображение $\varphi\colon L_\alpha \to H$ задано правилом $x \mapsto [x_{-\alpha}, x]$ (образ кратен h_α). Оно инъективно, поскольку $\dim L_\alpha = 1$ и $[x_{-\alpha}, L_\alpha] \neq 0$. Рассмотрим ограничение отображения φ на $L_V \cap L_\alpha$. Его образ лежит в H_V (так как множество L_V замкнуто относительно коммутирования и $H_V = L_V \cap H$), а тогда и в $\mathsf{F}h_\alpha \cap H_V$. Последняя группа (бесконечная) циклическая, как пересечение решетки в H с прямой. Как следствие, группа $L_V \cap L_\alpha$ также циклическая. Поскольку в ней содержится x_α, найдется образующий вида $\dfrac{1}{n}x_\alpha$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$. Тогда $\dfrac{(\mathrm{ad}\ x_{-\alpha})^2}{2!}\left(\dfrac{x_\alpha}{n}\right) = \dfrac{x_{-\alpha}}{n} \in L_V$ (поскольку множество L_V стабильно относительно $\mathfrak{U}_\mathbb{Z}$), и в свою очередь $-\left(\mathrm{ad}\ \dfrac{x_\alpha}{n}\right)^2\left(\dfrac{x_{-\alpha}}{n}\right) = \dfrac{2x_\alpha}{n^3} \in L_V$ (так как L_V замкнуто относительно коммутирования). Но тогда $\dfrac{2}{n^3} \in \dfrac{1}{n}\mathbb{Z}$, откуда следует, что $n=1$. Это показывает, что $L_V \cap L_\alpha = \mathbb{Z}x_\alpha$, как и требовалось. □

В качестве примера рассмотрим алгебру $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ со стандартным базисом (x, y, h) и ее обычное двумерное представление $V = \mathsf{F}^2$. Очевидно, что базис $\{(1, 0), (0, 1)\}$ порождает допустимую решетку, причем

$L_V = \mathbb{Z}h + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ $(= L(\mathbb{Z}))$. С другой стороны, взяв $L(\mathbb{Z})$ в качестве допустимой решетки в L (для трехмерного представления ad), мы получим $L_V = \mathbb{Z}\left(\frac{h}{2}\right) + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$. Эти крайние случаи соответствуют двум возможным решеткам весов Λ, Λ_r для системы корней A_1 (упражнение 4).

27.3. Изменение допустимой решетки. Пусть $V = V(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+)$ — неприводимый L-модуль. Какими способами можно выбрать в нем допустимую решетку? Ввиду теоремы 27.1(a) такая решетка должна содержать старший вектор v^+, а потому включает допустимую решетку $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}^- \cdot v^+ = \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}} \cdot v^+$, использованную в доказательстве теоремы 27.1(b). Поскольку V определяет вектор v^+ с точностью до скалярного множителя, в наших рассуждениях можно зафиксировать v^+, а минимальную допустимую решетку $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}} \cdot v^+$ обозначить через $M_{\min}$. Теперь нам требуется узнать, *для каких других допустимых решеток пересечение с* V_λ *равно* $\mathbb{Z}v^+$.

Напомним понятие двойственного (или контрагредиентного) модуля: это векторное пространство V^*, двойственное к V, причем L действует по правилу $(x \cdot f)(w) = -f(x \cdot w)$ $(x \in L,\ w \in V,\ f \in V^*)$. Если подпространство X в V^* инвариантно относительно L, то легко видеть, что это верно и для соответствующего подпространства $X^\perp$ в V. Как следствие, модуль V^* также неприводим. На самом деле можно определить его старший вес (упражнение 21.6): пусть $\sigma \in \mathscr{W}$ отображает Δ в $-\Delta$ (а тогда и Φ^+ в Φ^-), и пусть $w \in V$ — ненулевой вектор веса $\sigma\lambda$. Тогда w — это «минимальный вектор», аннулируемый всеми элементами $x_{-\alpha}$. Разумеется, $\dim V_{\sigma\lambda} = \dim V_\lambda = 1$, поэтому вектор w по существу единствен. Возьмем базис в V, состоящий из w и других весовых векторов, и рассмотрим линейную функцию f^+, двойственную к w. Тогда f^+ является старшим вектором в V^* веса $-\sigma\lambda$, и $V^* \cong V(-\sigma\lambda)$.

Пусть теперь M — допустимая решетка в V. Положим $M^* = \{f \in V^* : f(M) \subset \mathbb{Z}\}$. Если M является $\mathbb{Z}$-оболочкой некоторого базиса в V, то ясно, что M^* будет $\mathbb{Z}$-оболочкой двойственного базиса. Значит, это решетка, и даже д о п у с т и м а я: если $v \in M$, $f \in M^*$, то $\left(\left(\frac{x_\alpha^m}{m!}\right) \cdot f\right)(v) = \pm f\left(\left(\frac{x_\alpha^m}{m!}\right) \cdot v\right) \in \mathbb{Z}$. Ясно также, что включение $M_1 \subset M_2$ допустимых решеток в V индуцирует обратное включение $M_1^* \supset M_2^*$.

Зафиксируем, как выше, вектор v^+ (а тем самым и решетку $M_{\min}$). Тогда имеется канонический способ выбрать минимальный вектор в $V_{\sigma\lambda} \cap M_{\min}$. А именно, заметим, что отражения Вейля, построенные на шаге 5 в доказательстве теоремы 21.2, — это преобразования модуля V, представляющие элементы из $\mathfrak{U}(\mathbb{Z})$: в частности, σ отображает $\mathbb{Z}v^+$ на $M_{\min} \cap V_{\sigma\lambda}$. Можно взять в качестве w образ вектора v^+, а затем, как и выше, выбрать $f^+ \in V^*_{-\sigma\lambda}$ (элемент базиса, двойственного к базису в $M_{\min}$). Немедленно получаем, что $M_{\min} \cap V^*_{-\sigma\lambda} = \mathbb{Z}f^+$.

Пусть теперь M — любая допустимая решетка в V, пересечение которой с V_λ равно $\mathbb{Z}v^+$. Предшествующее рассуждение показывает, что $M \cap V_{\sigma\lambda} = \mathbb{Z}w$, а тогда $M^* \cap V^*_{-\sigma\lambda} = \mathbb{Z}f^+$. Значит, если M пробегает совокупность всех допустимых решеток в V указанного типа, то M^* пробегает аналогичную совокупность допустимых решеток в V^*, но включения меняют направление. Это показывает, что множество M^* имеет верхнюю и нижнюю грань, а тогда это верно и для M. (Для ad мы ранее доказали это другим способом, рассматривая двойственные решетки только для H.)

Предложение. *Пусть $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, v^+ — старший вектор, и пересечение некоторой допустимой решетки с V_λ равно $\mathbb{Z}v^+$. Тогда эта решетка*

(a) *включает $M_{\min} = \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}} \cdot v^+$;*

(b) *лежит в решетке $M_{\max}$, которая двойственна подходящей решетке $(M^*)_{\min}$ в V^*.*

27.4. Переход к произвольному полю. Пусть $\mathbb{F}_p$ — простое поле характеристики p, K — его расширение. Если V — точный L-модуль, то его веса порождают решетку между Λ_r и Λ, которую мы обозначили $\Lambda(V)$. Выберем допустимую решетку M в V со стабилизатором $L_V = H_V + \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}x_\alpha$ в L, где $H_V = \{h \in H \colon \lambda(h) \in \mathbb{Z}$ при всех $\lambda \in \Lambda(V)\}$ (см. п. 27.2).

Пусть $V(\mathsf{K}) = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{K}$, $L_V(\mathsf{K}) = L_V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{K}$. Поскольку L_V изоморфно подгруппе в End M (и замкнуто относительно операции коммутирования), $L_V(\mathsf{K})$ можно отождествить с подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(V(\mathsf{K}))$ ($=$End $V(\mathsf{K})$). При этом включение $L(\mathbb{Z}) \to L_V$ индуцирует гомоморфизм алгебр Ли $L(\mathsf{K}) \to L_V(\mathsf{K})$, который инъективен на $\coprod \mathsf{K}x_\alpha$, но может иметь ненулевое ядро в $H(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{K} = H(\mathsf{K})$. Чтобы увидеть, как все это работает, вспомним сказанное об алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ в п. 27.2. Если $p = 2$ и $V = L$ (присоединенное представление), то $h \otimes 1 \in L(\mathsf{K})$ отображается в $2\left(\frac{h}{2} \otimes 1\right) = 0 \in L_V(\mathsf{K})$. При этом умножение в $L(\mathsf{K})$ отличается от умножения в $L_V(\mathsf{K})$: например, в первом случае $[h, x] = 2x = 0$, тогда как во втором $\left[\frac{h}{2}, x\right] = x \neq 0$. С другой стороны, при $p > 2$ отображение $L(\mathsf{K}) \to L_V(\mathsf{K})$ является изоморфизмом (при любом выборе решетки весов $\Lambda(V) = \Lambda$ или Λ_r); см. упражнение 5.

Эти рассуждения показывают, что каждый точный L-модуль V порождает посредством гомоморфизма $L(\mathsf{K}) \to L_V(\mathsf{K})$ модуль $V(\mathsf{K})$ над $L(\mathsf{K})$, который может и не оказаться точным (если некоторый идеал в $L(\mathsf{K})$, обязательно центральный, лежит в $H(\mathsf{K})$). Следует подчеркнуть, что (вопреки обозначениям) *это зависит от выбора допустимой решетки M в V.*

Что здесь является аналогом группы Шевалле $G(\mathsf{K})$, построенной в п. 25.5? Поскольку решетка M инвариантна относительно $\frac{x_\alpha^t}{t!}$ (т. е. относительно $\frac{\varphi(x_\alpha)^t}{t!}$, где φ — рассматриваемое представление алгебры L), определен соответствующий оператор в $V(\mathsf{K})$, который мы обозначим $x_{\alpha,t}$ (где $x_{\alpha,0}=1$). Отметим, что если $t<p$, то $x_{\alpha,t}$ действует как $\frac{(x_\alpha \otimes 1)^t}{t!}$. При $t \geqslant p$ это обозначение не имеет смысла. Во всяком случае, $x_{\alpha,t}=0$ при достаточно больших t, поэтому можно записать $\theta_\alpha(1)=\sum\limits_{t=0}^{\infty} x_{\alpha,t} \in \operatorname{End}(V(\mathsf{K}))$. При этом ясно, что $\theta_\alpha(1)$ имеет определитель 1, т. е. принадлежит группе $\mathrm{SL}(V(\mathsf{K}))$. Более общо, мы можем определить автоморфизмы $\theta_\alpha(c)$ модуля $V(\mathsf{K})$, образовав выражение $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \frac{(Tx_\alpha)^t}{t!}$ и затем приравняв переменное T элементу $c \in \mathsf{K}$. Группа $G_V(\mathsf{K})$, порожденная всеми элементами $\theta_\alpha(c)$ ($\alpha \in \Phi$, $c \in \mathsf{K}$), называется *группой Шевалле типа* $\Lambda(V)$. Этот тип называется *присоединенным* при $\Lambda(V)=\Lambda_r$ и *универсальным* при $\Lambda(V)=\Lambda$. Как и выше, $G_V(\mathsf{K})$ на самом деле зависит от выбора решетки M.

27.5. Обзор родственных результатов. Описанные конструкции порождают много вопросов, и не все они решены. Чтобы дать читателю некоторое представление о нынешней ситуации, перечислим ряд результатов (без доказательства).

1. С точностью до изоморфизма, группы $G_V(\mathsf{K})$ и $L_V(\mathsf{K})$ зависят от решетки весов $\Lambda(V)$, но не от самого модуля V или от выбора решетки M. (Последняя, однако, влияет на то, как *действуют* $G_V(\mathsf{K})$ и $L_V(\mathsf{K})$ на $V(\mathsf{K})$.) Если $\Lambda(V) \supset \Lambda(W)$, то существует канонические гомоморфизмы $G_V(\mathsf{K}) \to G_W(\mathsf{K})$, $L_W(\mathsf{K}) \to L_V(\mathsf{K})$. Как следствие, группы Шевалле универсального типа ($\Lambda(V)=\Lambda$) «накрывают» все остальные, тогда как группы присоединенного типа «накрываются» всеми остальными.

2. Пусть $V=V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, $M=M_{\min}$. Тогда $V(\mathsf{K})$ — циклический модуль над $G_V(\mathsf{K})$, порожденный вектором $v \otimes 1$, $v \in M \cap V_\lambda$. Как следствие, $V(\mathsf{K})$ имеет единственный максимальный $G_V(\mathsf{K})$-подмодуль, а потому и единственный неприводимый гомоморфный образ («старшего веса» λ). С другой стороны, если $M=M_{\max}$, то $V(\mathsf{K})$ имеет единственный неприводимый подмодуль «старшего веса» λ.

3. Если $\lambda \in \Lambda^+$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \lambda(h_i) < p$ ($1 \leqslant i \leqslant \ell$), $p=\operatorname{char}\mathsf{K}$, то утверждения из предыдущего абзаца верны и после замены $G_V(\mathsf{K})$ на $L_V(\mathsf{K})$ (или $L(\mathsf{K})$); полученные p^ℓ неприводимых модулей неэквивалентны и исчерпывают (с точностью до изоморфизма) неприводимые «ограниченные» $L(\mathsf{K})$-модули.

4. Композиционные факторы модуля $V(\mathsf{K})$, рассматриваемого над $G_V(\mathsf{K})$ или $L_V(\mathsf{K})$, не зависят от выбора допустимой решетки.

Упражнения

1. Докажите, что Если M — допустимая решетка в модуле V, то $M \cap V_\mu$ является решеткой в V_μ для каждого веса μ в V.

2. Докажите, что любая допустимая решетка в L, включающая $L(\mathbb{Z})$ и замкнутая относительно коммутирования, имеет вид L_V. [Воспроизведите доказательство предложения 27.1; см. упражнение 21.5.]

3. Если M (соответственно N) — допустимая решетка в V (соответственно в W), то $M \otimes N$ — допустимая решетка в $V \otimes W$ (см. лемму 26.3A). Используя этот факт и отождествив (как L-модули) $V^* \otimes V$ и $\operatorname{End} V$ (см. п. 6.1), докажите (не применяя лемму 27.2), что в предложении 27.2 решетка L_V инвариантна относительно всех $(\operatorname{ad} x_\alpha)^m/m!$.

В следующих упражнениях $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ и веса отождествляются с целыми числами.

4. Пусть $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите, что $L_V = L(\mathbb{Z})$ при нечетном λ и $L_V = \mathbb{Z}\left(\frac{h}{2}\right) + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ при четном λ.

5. Докажите, что если $\operatorname{char} \mathsf{K} > 2$, то $L(\mathsf{K}) \to L_V(\mathsf{K})$ является изоморфизмом при любом выборе модуля V.

6. Пусть $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите, что группа $G_V(\mathsf{K})$ изоморфна $\mathrm{SL}(2, \mathsf{K})$ в случае $\Lambda(V) = \Lambda$ и $\mathrm{PSL}(2, \mathsf{K})$ в случае $\Lambda(V) = \Lambda_r$.

7. Докажите, что если $0 \leqslant \lambda < \operatorname{char} \mathsf{K}$, $V = V(\lambda)$, то $V(\mathsf{K})$ неприводим как $L(\mathsf{K})$-модуль.

8. Фиксируем $\lambda \in \Lambda^+$. Тогда минимальная допустимая решетка $M_{\min}$ в $V(\lambda)$ имеет $\mathbb{Z}$-базис $(v_0, v_1, \ldots, v_\lambda)$, для которого верны формулы из леммы 7.2:

$$\begin{aligned} h \cdot v_i &= (\lambda - 2i)v_i, \\ y \cdot v_i &= (i+1)v_{i+1} \qquad (v_{\lambda+1} = 0), \\ x \cdot v_i &= (\lambda - i + 1)v_{i-1} \qquad (v_{-1} = 0). \end{aligned}$$

Покажите, что соответствующая максимальная допустимая решетка $M_{\max}$ имеет $\mathbb{Z}$-базис $(w_0, \ldots, w_\lambda)$, $w_0 = v_0$, действие на котором имеет вид

$$\begin{aligned} h \cdot w_i &= (\lambda - 2i)w_i, \\ y \cdot w_i &= (\lambda - i)w_{i+1}, \\ x \cdot w_i &= i w_{i-1}. \end{aligned}$$

Получите как следствие, что $v_i = \binom{\lambda}{i} w_i$. Как следствие, $[M_{\max} \colon M_{\min}] = \prod_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i}$.

9. Сохраним обозначения из упражнения 8. Пусть M — любая допустимая решетка, $M_{\max} \supset M \supset M_{\min}$. Тогда M имеет $\mathbb{Z}$-базис $(z_0, z_1, \ldots, z_\lambda)$, где $z_i = a_i w_i$ $(a_i \in \mathbb{Z})$, $a_0 = a_\lambda = 1$. Определим числа b_i, c_i формулами $x_i \cdot z_i = b_i z_{i-1}$ $(b_0 = 1)$, $y \cdot z_i = c_i z_{i+1}$ $(c_\lambda = 1)$. Покажите, что $c_i = \pm b_{\lambda-i}$ и что $\prod b_i = \lambda!$.

10. Сохраним обозначения из упражнения 8. Пусть M — подгруппа в $M_{\max}$, включающая $M_{\min}$, с $\mathbb{Z}$-базисом $(w_0, a_1 w_1, \ldots, a_\lambda w_\lambda)$. Найдите необходимые и достаточные условия на a_i, при которых M является допустимой решеткой. Исследуйте возможные варианты для случая $\lambda = 4$.

Замечания

Значительная часть материала взята из лекций Steinberg [2], см. также Borel [2]. О некоторых недавних работах см. Burgoyne [1], Burgoyne, Williamson [1], Humphreys [1], [2], Jantzen [1], [2], Шаповалов [1], Verma [3], Wong [1]. Упражнения 8—10 предложены М. Элмером (M. Elmer).

Литература

Agrawala V. K. Belinfante J. G. F.

[1] Weight diagrams for Lie group representations: A computer implementation of Freudenthal's algorithm in ALGOL and FORTRAN // BIT **9** (1969). P. 301—314.

Antoine J.-P. Speiser D.

[1] Characters of irreducible representations of the simple groups. I. General Theory // J. Mathematical Physics **5** (1964). P 1226—1234. II. Application to classical groups. Ibid. P. 1560—1572.

Barnes D. W.

[1] On Cartan subalgebras of Lie algebras // Math. Z. **101** (1967). P. 350—355.

Beck R. E., Kolman B.

[1] A computer implementation of Freudenthal's multiplicity formula // Indag. Math. **34** (1972). P. 350—352.

Belinfante J. G. F., Kolman B.

[1] A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computational Methods. Philadelphia: SIAM, 1972.

Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.

[1] Структура представлений, порожденных векторами старшего веса // Функц. анализ и прил. **5** (1971), № 1. С. 1—9.

[2] Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules // Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971). New York: Halsted, 1975. P. 21—64.

[3] Об одной категории $\mathfrak{g}$-модулей // Функц. анализ прил. **10** (1976), № 2. С. 1—8.

Borel A.

[1] Linear Algebraic Groups. New York—Amsterdam: W. A. Benjamin, 1969. (Notes taken by Hyman Bass).
(Имеется перевод: Борель А. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.)

[2] Properties and linear representations of Chevalley groups // Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69). Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math, **131**).

Bourbaki N.

[1] Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1960. Chap. 1.
(Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976. Главы I—III.

[2] Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1968. Chap. 4—6.
(Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. Главы IV—VI.)

[3] Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1975. Chap. 7—8.
(Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1978. Главы VII—VIII.)

Brauer R.

[1] Eine Bedingung für vollstandige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen // Math. Z. **41** (1936). S. 330—339.

[2] Sur la multiplication des caracteristiques des groupes continus et semisimples // C. R. Acad. Sci. Paris, **204** (1937). P. 1784—1786.

Burgoyne N.

[1] Modular representations of some finite groups // Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1970). Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1971. P. 13—17.

Burgoyne N., Williamson C.

[1] Some computations involving simple Lie algebras // Proc. 2nd Symp. Symbolic & Alg. Manipulation, ed. S. R. Petrick. New York: Assn. Computing Machinery, 1971.

Carter R. W.

[1] Simple groups and simple Lie algebras // J. London Math. Soc. **40** (1965). P. 193—240.

[2] Simple Groups of Lie Type. London—New York—Sydney: John Wiley & Sons, 1972.

Cartier P.

[1] On H. Weyl's character formula // Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961). P. 228—230.
(Имеется перевод: Картье П. О формуле характера Вейля // Математика. Сборник переводов **6** (1962), № 5. С. 139—141.)

Chevalley C.

[1] Théorie des groupes de Lie. T. II. Groupes algébriques. Paris: Hermann & Cie, 1951. (Actualités Sci. Ind. № 1152).
(Имеется перевод: Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 2. Алгебраические группы. М.: ИЛ, 1958.)

[2] Théorie des groupes de Lie. T. III. Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie. Paris: Hermann & Cie, 1955. (Actualités Sci. Ind. № 1226).
(Имеется перевод: Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 3. Общая теория алгебр Ли. М.: ИЛ, 1958.)

[3] Sur certains groupes simples // Tôhoku Math. J. (2) **7** (1955). P. 14—66.
(Имеется перевод: Шевалле К. О некоторых простых группах // Математика. Сборник переводов **2** (1958), № 1. С. 3—53.)

[4] Certains schémas de groupes semi-simples // Séminaire Bourbaki **6**. Paris: Soc. Math. France, 1995. P. 219—234.

[5] Invariants of finite groups generated by reflections // Amer. J. Math. **77** (1955). P. 778—782.

Curtis C. W.

[1] Chevalley groups and related topics // Finite simple groups (Proc. Instructional Conf., Oxford, 1969). London: Academic Press, 1971. P. 135—189.

Demazure M.

[1] Une nouvelle formule des caractères // Bull. Sci. Math. (2) **98** (1974). P. 163—172.

Dixmier J.

[1] Algèbres Enveloppantes. Paris—Brussels—Montreal: Gauthier-Villars Éditeurб 1974. — English transiation. Enveloping Algebras. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1977.
(Имеется перевод: Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.)

Freudenthal H.

[1] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. I // Indag. Math. **16** (1954). P. 369—376. II. Ibid. P. 487—491. III. Ibid **18** (1956). P. 511—514.

Freudenthal H., de Vries H.

[1] Linear Lie Groups. New York: Academic Press, 1969. (Pure and Applied Mathematics **35**).

Garland H., Lepowsky J.

[1] Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas // Invent. Math. **34** (1976), № 1. P. 37—76.

Harish-Chandra

[1] Some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra // Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951). P. 28—96.

Humphreys J. E.

[1] Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups // J. Algebra **19** (1971). P. 51—79.

[2] Ordinary and modular representations of Chevalley groups. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.

Jacobson N.
[1] Lie Algebras. New York-London: Interscience Pubblishers, 1962. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, № 10).
(Имеется перевод: Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* М.: Мир, 1964.)
[2] Exceptional Lie Algebras, New York: Marcel Dekker Inc., 1971. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics).

Jantzen J. C.
[1] Zur Charakterformel gewisser Darslellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren // Math. Z. **140** (1974). P. 127—149.
[2] Kontravanante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren // Math. Ann. **226** (1977). P. 53—65.

Кац В. Г.
[1] Бесконечномерные алгебры Ли и η-функция Дедекинда, *Функц. анализ и прил.* **8** (1974), № 1. P. 77—78.

Kaplansky I.
[1] Lie Algebras and Locally Compact Groups, Chicago: University of Chicago Press, 1995. (Chicago Lectures in Mathematics).
(Имеется перевод: Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974.)

Климык А. У.
[1] Разложения прямого произведения неприводимых представлений полупростых алгебр на неприводимые представления // Украинский математический журнал **18** (1966), № 5. С. 19—27.

Kostant B.
[1] A formula for the multiplicity of a weight // Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959). P. 53—73.
(Имеется перевод: Математика. Сборник переводов **6** (1962) № 1. С. 133—152.
[2] Groups over $\mathbb{Z}$ // Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965). Providence: Amer. Math. Soc., 1966. P. 90—98.

Krusemeyer M. I.
[1] Determining multiplicities of dominant weights in irreducible Lie algebra representations using a computer // BIT **11** (1971). P. 310—316.

Lang S.
[1] Algebra. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1965.
(Имеется перевод: Ленг С. Алгебра, М.: Мир, 1968.)

Lemire F. W.
[1] Existence of weight space decompositions for irreducible representations of simple Lie algebras // Canad. Math. Bull. **14** (1971). 113—115.

Pollack R. D.
[1] Introduction to Lie Algebras. Kingston, Ont.: Queen's University, 1969. (Notes by Gordon Edwards. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, № 23).

Samelson H.
[1] Notes on Lie Algebras. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1969. (Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies № 23).

Schafer R. D.
[1] An Introduction to Nonassociative Algebras. New York: Academic Press, 1966. (Pure and Applied Mathematics **22**).

Seligman G. B.
[1] Modular Lie Algebras. New York: Springer-Verlag, 1967. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **40**).
[2] Rational Methods in Lie Algebras // New York: Marcel Dekker, Inc., 1976.

Séminaire «Sophus Lie».
[1] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie. Paris: Ecole Norm. Sup., 1954—55.
(Имеется перевод: Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М.: ИЛ, 1962.)

Serre J.-P.
[1] Lie Algebras and Lie Groups. New York—Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1965. (Lectures given at Harvard University).
[2] Algèbres de Lie semi-simples complexes, New York—Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1966.
(Имеется перевод обеих книг: Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.)

Шаповалов Н. Н.
[1] Об одной билинейной форме на универсальной обертывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли // Функц. анализ и прил. **6** (1972), № 4. С. 65—70.

Springer T. A.
[1] Weyl's character formula for algebraic groups // Invent. Math. **5** (1968). P. 85—105.

Steinberg R.
[1] A general Clebsch-Gordan theorem // Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961). P. 406-407.

[2] Lectures on Chevalley groups, mimeographed lecture notes. New Haven, Conn.: Yale Univ, 1968.
(Имеется перевод: Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.)

Tits J.

[1] Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), №31. P. 21—58.

Varadarajan V. S.

[1] Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1974.

Verma D.-N.

[1] Structure of certain induced representations of complex semi-simple Lie algebras, Yale Univ., dissertation, 1966: cf. *Bull Amer. Math. Soc.* **74**, 160-166 (1968).

[2] Möbius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **4** (1971) P. 393—398.

[3] Role of affine Weyl groups in the representation theory of algebraic Chevalley groups and their Lie algebras // Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971). New York: Halsted, 1975. P. 653—705.

Winter D. J..

[1] *Abstract Lie Algebras*, Cambridge, Mass.—London: M.I.T. Press, 1972.

Wong W. J..

[1] Irreducible modular representations of finite Chevalley groups // J. Algebra **20** (1972). P. 355—367 (1972).

Литература, добавленная при переводе[1]

Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.,

[1] Строение групп и алгебр Ли. *Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр.* ВИНИТИ, 1990. С. 5—253.

[1]Ссылки в тексте на литературу из этого списка помечены звездочкой *.

Послесловие (1994)

Каждое переиздание этой книги давало мне возможность исправлять опечатки и ошибки, отмеченные внимательными читателями. Самое существенное изменение сделано во втором издании, когда было включено дополнение к § 4. Если бы сегодня я начал с чистого листа, то несомненно сделал бы по-другому целый ряд вещей — больших и малых. Если, например, говорить об обозначениях, то сейчас для полусуммы положительных корней чаще используется ρ, чем δ. Но в обращении уже находится много экземпляров прежних изданий, и я счел недопустимым нарушать соответствие с ними.

Если структурная теория, развитая в гл. I—V, мало изменилась за прошедшие 25 лет, то в теории представлений произошел настоящий всплеск новых достижений. Сохранились ее основы, которые изложены в гл. VI с ориентацией в первую очередь на классическую конечномерную теорию Картана и Вейля. Однако по ходу дела я ввел ряд терминов и обозначений, вместо которых уже давно приняты другие. Так, вместо «стандартных циклических модулей» теперь говорят о «модулях старшего веса», причем универсальные модули этого класса называются «модулями Верма». Последние обычно обозначаются $M(\lambda)$, а не $Z(\lambda)$ причем неприводимый фактор обозначается $L(\lambda)$. Конечно, из-за разветвленности теории Ли в ней нередко сталкиваются различные способы обозначения (особенно для систем корней), так что при работе с литературой студенту приходится к ним привыкать.

Данная книга включает наиболее существенный материал по теории полупростых алгебр Ли в чисто алгебраической форме. Эта теория — особенно классификация простых алгебр Ли с помощью схем Дынкина — красива сама по себе, независимо от иных причин для ее изучения. Но читателю полезно знать о выдающихся достижениях последних десятилетий, в чем-то опирающихся на эту теорию. Хотя на одной-двух страницах невозможно по-настоящему осветить эти достижения, краткий обзор был бы полезен. Приведенные ниже ссылки относятся обычно к книгам, а не к многочисленным оригинальным статьям; последние хорошо отражены в ежегодных предметных указателях журнала *Mathematical Reviews*. Принеся извинения за неполноту, перечислим некоторые вопросы, наиболее тесно связанные с алгебрами Ли.

BGG[1]-категория $\mathcal{O}$. Она состоит из конечнопорожденных весовых модулей, на которых данная борелевская подалгебра действует локально конечно. Эта категория включает модули Верма и неприводимые модули старшего веса $L(\lambda)$ для каждого λ, а также проективные и инъективные объекты. С помощью *BGG*-резольвенты конечномерного модуля $L(\lambda)$,

---

[1] Сокращение от I. Bernstein, I. Gelfand, S. Gelfand.

состоящей из модулей Верма, можно придать более содержательный смысл выводу формулы Вейля для характеров, приведенному в этой книге. Кроме того, мы встречаемся с BGG-взаимностью при рассмотрении фильтрации Янцена и формулы суммы. См. J. C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lect. Notes in Math., Vol. 750, Springer-Verlag, 1979.

Гипотезы Каждана—Люстига. Предположительная формула характеров для всех $L(\alpha)$ появилась в основополагающей работе D. A. Kazhdan, G. Lusztig, Representation of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* **53** (1979), 165—184. Вскоре она была (независимо) доказана в работах Бейлинсона—Бернштейна и Брылинского—Кашивары с помощью целого фейерверка технических приемов. В ряде областей теории представлений приобрело исключительное значение применение алгебр Гекке.

Примитивные идеалы в обертывающих алгебрах. Соединив теорию некоммутативных колец и алгебраическую геометрию с теорией представлений полупростых алгебр Ли, удается получить глубокие результаты о строении универсальных обертывающих алгебр. См. J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1964 и J. C. Jantzen, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*, Springer-Verlag, 1983.

Представления групп Ли. Методы теории алгебр Ли, о которых шла речь выше, обеспечили решающее продвижение во многих областях теории представлений полупростых (и редуктивных) групп Ли. См., например, J. C. Vogan, Jr., *Representation of Real Reductive Lie Groups*, Birkhäuser, 1981.

Представления алгебраических групп. Многие факты из теории полупростых алгебр Ли можно перенести на полупростые алгебраические группы произвольной характеристики. Представления в характеристике p имеют нечто общее с бесконечномерными представлениями в характеристике 0. См. J. C. Jantzen, *Representation of Algebraic Groups*, Academic Press, 1987.

Конечные группы типа Ли. Теория Ли существенна для понимания структуры этих групп, а также их обычных и модулярных представлений. См. R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type: Conjugancy Classes and Complex Characters*, Wiley, 1985.

Алгебры Каца—Муди и вершинные операторы. Если в соотношениях Серра из § 18 заменить матрицу Картана на «обобщенную матрицу Картана», то мы получаем новые классы, бесконечномерных алгебр Ли. Эти алгебры и их представления имеют глубокие связи с математической физикой, комбинаторикой, теорией модулярных функций и т. д. См. V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras, Vertex Operator Algebras and the Monster*, Academic Press, 1988.

Квантовые группы. Появившись в пионерской работе Дринфельда и Джимбо в середине 80-х, квантованные обертывающие алгебры ныне вошли в обиход математики и математической физики, См., например, G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser, 1993 и J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1992.

Комбинаторика, геометрия и т. д. Системы корней и корневые решетки, а также соответствующие группы Кокстера (в частности, группы Вейля) играют существенную роль не только в теории алгебр Ли, но и во многих других вопросах, таких как формулы Макдональда, колчаны и представления конечномерных алгебр, теория особенностей, кристаллы и квазикристаллы и т. д. См., например, J. H. Conway, N. J. Sloane, *Sphere Packings, Lattices, and Groups*, Springer-Verlag, 1993.

Предметный указатель

Автоморфизм алгебры Ли, 21
— — — внутренний, 21
— графа, 86
— диагональный, 110
— схемы Дынкина, 85
алгебра, 15
— Кэли, 131
— Ли, 12
— — абелева, 16
— — абстрактная, 16
— — исключительная, 128
— — классическая, 13
— — линейная, 13
— — — полная, 13
— — — специальная, 14
— — нильпотентная, 25
— — ортогональная, 14, 15
— — полупростая, 24
— — производная, 18
— — простая, 18
— — разрешимая, 23
— — редуктивная, 47, 128
— — с образующими и определяющими соотношениями, 120
— — свободная, 119
— — симплектическая, 14
— октав, 131
— симметричная, 114
— тензорная, 113
— универсальная обертывающая, 114
— Шевалле, 182

Базис ПБВ, 117
— системы корней, 65
— Шевалле, 180

Вектор регулярный, 66
— сингулярный, 66
— старший, 48, 135
вес, 48, 87
— доминантный, 87
— минимальный, 92
— старший, 90, 135
— строго доминантный, 87
— фундаментальный доминантный, 87
веса связанные, 160
выражение элемента приведенное, 70
высота корня, 65

Гиперплоскость, 60
гомоморфизм алгебры Ли, 19
— модулей, 41
граф Кокстера, 75
группа автоморфизмов схемы Дынкина, 85
— Вейля, 61
— линейная полная, 13
— — специальная, 14
— фундаментальная системы корней, 87
— Шевалле, 183, 197

Дифференцирование алгебры Ли, 15
— — — внешнее, 16
— — — внутреннее, 16
длина в группе Вейля, 70

Идеал, 18
изоморфизм алгебр Ли, 12, 19
— модулей, 41
— системы корней, 61

Камера Вейля, 67
— — фундаментальная относительно Δ, 67
кольцо групповое, 154
коммутатор, 12
константы структурные, 16
корень, 61

— алгебры Ли, 53
— длинный, 72
— короткий, 72
— неразложимый, 66
— отрицательный, 65
— положительный, 65
— простой, 65
— разложимый, 66
кратность веса, 146
критерий Картана, 35
— полупростоты, 37, 128

Лемма Шура, 41

Матрица верхнетреугольная, 15
— — строго, 15
— диагональная, 15
— Картана, 74
— ортогональная, 23
— скалярная, 17
микровес, 92
многочлен следа, 158
множество векторов допустимое, 79
— весов насыщенное, 90
— замкнутое, 164
— корней замкнутое, 110, 188
— образующих стандартное, 94
модуль (L-модуль), 41
— вполне приводимый, 41
— двойственный, 42
— неприводимый, 41
— сопряженный, 42
— циклический стандартный, 135
мономорфизм алгебр Ли, 19

Нормализатор, 19
носитель, 167

Область фундаментальная, 70
отображение каноническое, 20
отражение, 60

Плоскость отражения, 60
подалгебра, 12
— борелевская, 105
— — стандартная, 106
— картановская, 101
— параболическая, 111
— — стандартная, 111
— самонормализуемая, 19
— торическая, 52
— — максимальная, 52
— Энгеля, 100
подмножество неприводимое, 164
подпространство весовое, 48
представление алгебры Ли, 20
— — — присоединенное, 16
— — — точное, 43
— — — эквивалентное, 41
пространство весовое, 134

Радикал алгебры Ли, 24
— формы билинейной, 37
разложение Жордана, 32
— — абстрактное, 39
— Жордана—Шевалле, 32
— Картана, 53
— на корневые подпространства, 53
ранг алгебры Ли, 109
— системы корней, 62
ρ-ранг, 165
решетка, 83
— допустимая, 193
— корней, 87
ряд нижний центральный, 25
— производный, 23
— убывающий, 25

Свертка, 167
α-серия, порожденная корнем β, 57, 63
— — весом μ, 143
система корней, 58, 61
— — двойственная, 62
— — неприводимая, 70
— — обратная, 62
скобка, 12, 13
след, 13
сумма прямая идеалов, 38
схема Дынкина, 76

Тензор кососимметрический, 145
— симметрический однородный, 114

теорема Вейля, 44, 171
— Костанта, 170, 190
— Ли, 31
— о сопряженности, 104, 106
— об изоморфизме, 95
— Пуанкаре—Биркгофа—Витта, 116
— Серра, 124
— Стейнберга, 174
— Хариш-Чандры, 160
— Шевалле, 158, 180
— Энгеля, 25
теоремы существования и единственности, 127, 137
тождество Якоби, 12
топология Зарисского, 164

Факторалгебра Ли, 19
флаг, 27
форма билинейная ассоциативная, 36
— — невырожденная, 37
— Киллинга, 36
формула Вейля, 171
— Клебша—Гордана, 156
— кратностей Костанта, 170
— Фрейденталя, 152
функция Вейля, 167
— Костанта, 167
— полиномиальная, 156
— — инвариантная, 156, 157
— целочисленная, 140
— — доминантная, 140

Характер, 160
— формальный, 154

Центр алгебры Ли, 18
— универсальной обертывающей алгебры, 159
централизатор, 19

Часть нильпотентная, 39
— полупростая, 39
числа Картана, 57, 74

Элемент нильпотентный, 25
— ρ-регулярный, 165
— Казимира, 43
— — универсальный, 147
— полупростой, 39
— регулярный полупростой, 102
— строго нильпотентный, 103
эндоморфизм локально нильпотентный, 124
— нильпотентная часть, 32
— нильпотентный, 21
— полупростая часть, 32
— полупростой, 31
эпиморфизм алгебр Ли, 19

Список обозначений

$[x, y]$	12
$\mathrm{End}\ V$	13
$\mathfrak{gl}(V)$	13
$\mathrm{GL}(V)$	13
$\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$	13
A_ℓ	13
$\mathfrak{sl}(V)$	13
$\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$	13
Tr	14
$\mathrm{SL}(V)$	14
C_ℓ	14
$\mathfrak{sp}(V)$	14
$\mathfrak{sp}(n, \mathsf{F})$	14
B_ℓ	14
$\mathfrak{o}(V)$	14
$\mathfrak{o}(n, \mathsf{F})$	14
D_ℓ	15
$\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$	15
$\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$	15
$\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$	15
$\mathrm{Der}\ \mathfrak{A}$	15
$Z(L)$	18
$N_L(K)$	19
$C_L(X)$	19
$\mathrm{Int}\ L$	21
$L^{(i)}$	23
$\mathrm{Rad}\ L$	24
L^i	25
$\varkappa(x, y)$	36
c_φ	43
Φ	52
t_α	54
h_α	55
S_α	56
E	58
E	60
P_α	60
$\langle\alpha, \beta\rangle$	60
Φ	60
σ_α	60
$\mathscr{W}$	61
$\alpha^\vee$	62
$\Phi^\vee$	62
G_2	62
Δ	65
$\mathrm{ht}\ \alpha$	65
$\succ$	65
Φ^+	65
Φ^-	65
$\Delta(\gamma)$	66
$\mathfrak{C}(\gamma)$	67
$\mathfrak{C}(\Delta)$	67
δ	68
$\ell(\sigma)$	70
$n(\sigma)$	70
$\mathrm{sn}(\sigma)$	73
$\mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$	77
F_4	77
Γ	85
Λ	87
Λ_r	87
Λ^+	87
λ_i	87
$\Gamma(L)$	98
$L_a(\mathrm{ad}\ x)$	99
$\mathscr{E}(L)$	103
$\mathscr{N}(L)$	104
$\mathscr{E}(L; K)$	104
$N(\Delta)$	106
$B(\Delta)$	106
$\mathfrak{T}(V)$	113
$\mathfrak{S}(V)$	114
$\mathscr{S}_m$	114
$\tilde{\mathfrak{S}}(V)$	114
$\mathfrak{U}(L)$	115
ПБВ	116
$\mathfrak{C}$	131
$\mathfrak{C}_o$	131
V_λ	134
$Z(\lambda)$	137

$I(\lambda)$ 138
$Y(\lambda)$ 138
$V(\lambda)$ 138
$\Pi(V)$ 141
$\Pi(\lambda)$ 141
$m_\lambda(\mu)$ 146
$m(\mu)$ 146
c_L 147
$\mathbb{Z}[\Lambda]$ 154
$e(\lambda)$ 154
ch_λ 154
ch_V 154
$\mathfrak{P}(V)$ 156
$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 156
$\mathfrak{P}(L)^G$ 157
$\mathfrak{Z}$ 159
χ_λ 159
$\lambda \sim \mu$ 160
$\mathscr{R}$ 165
$f * g$ 167
$\mathfrak{X}$ 167
$\varepsilon(\lambda)$ 167
$p(\lambda)$ 167
$q(\lambda)$ 167
$\mathfrak{M}_\lambda$ 168
$\theta(\lambda)$ 169
$\deg(\lambda)$ 171
$c_{\alpha\beta}$ 178
$L(\mathbb{Z})$ 182
$L(\mathsf{K})$ 182
$G(\mathsf{K})$ 183
$\mathfrak{U}(L)_\mathbb{Z}$ 190
$H(\mathbb{Z})$ 193
L_V 193
$M_{\min}$ 195
$M_{\max}$ 196
$L_V(\mathsf{K})$ 196
$G_V(\mathsf{K})$ 197

Джеймс Хамфрис

Введение в теорию алгебр Ли и их представлений

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 01.08.2003 г. Формат 60×90 $1/16$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 13,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

МЦНМО
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано в ФГУП «Полиграфические ресурсы».