

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин Математические модели механики и электродинамики сплошной среды



Математическое моделирование * в технике и в технологии

Математическое моделирование в технике и в технологии

Редакционный совет серии

44

Председатель, главный редактор И.Б. ФЕДОРОВ

Сопредседатели: Ю.П. ПОПОВ В.А. СКИБИН

Заместитель председателя и главного редактора В.С. ЗАРУБИН

Ученый секретарь Г.Н. КУВЫРКИН

Члены редакционного совета: М.П. ГАЛАНИН А.Г. ГРИГОРЬЯНЦ В.Л. ДАНИЛОВ А.В. МАНЖИРОВ И.П. НОРЕНКОВ Ю.М. ТЕМИС В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин

Математические модели механики и электродинамики сплошной среды



Москва 2008

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. Кукуджанов; д-р техн. наук, проф. К.И. Романов

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.

3-35 Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.: ил. (Математическое моделирование в технике и в технологии).

ISBN 978-5-7038-3162-5

В книге изложен материал, определяющий теоретическую, методическую и терминологическую базу серии «Математическое моделирование в технике и в технологии». Основное внимание уделено построению и обоснованию адекватности математических моделей механики и электродинамики сплошной среды, описывающих явления преобразования и переноса таких физических субстанций, как масса, энергия, количество движения и электрический заряд. Эти явления лежат в основе функционирования большинства технических устройств и технологических процессов.

Рассматриваемые в книге модели составляют научный фундамент многих общеинженерных и специальных дисциплин, определяющих уровень подготовки современных инженеров. В отдельных разделах книги использованы материалы лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов старших курсов технических университетов, а также для аспирантов, инженеров, преподавателей и научных работников.

> УДК 517.958(075.8) ББК 22.25

Книга подготовлена при поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.2.5652)

© Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., 2008

О Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2008

44

© Оформление. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008

ISBN 978-5-7038-3162-5

к читателю

В настоящее время математическое моделирование выполняет роль одного из эффективных инструментов в деятельности инженера. Применение методов математического моделирования существенным образом определяет качество и сокращает сроки и стоимость разработки современных технических систем и технологических процессов, обеспечивает возможность детального информационного сопровождения жизненного цикла изделий, анализа их надежности, прогноза отказов и аварийных ситуаций. Уровень развития любой инженерной школы во многом стал зависеть от полноты и адекватности математических моделей, используемых в научной, проектно-конструкторской и педагогической деятельности этой школы.

Учебная и научная литература по математическому моделированию посвящена в основном общим методологическим подходам и этапам реализации этих подходов средствами современной вычислительной техники. Существенно меньше внимания уделяется построению и критическому анализу математических моделей конкретных технических устройств и протекающих в них процессов. Это приводит к тому, что возможности и преимущества математического моделирования при разработке технических устройств и технологических процессов используются еще недостаточно.

В связи с этим Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана совместно с академическими и отраслевыми научными организациями приступает к выпуску серии книг «Математическое моделирование в технике и в технологии» с целью способствовать более широкому и эффективному применению математического моделирования в инженерной практике. За последние годы наш университет накопил определенный опыт подготовки и издания тематических серий учебников и монографий по отдельным дисциплинам и научным направлениям: «Математика в техническом университете», «Механика в техническом университете», «Физика в техническом университете», «Информатика», «Электроника» и др. Планируется, что предлагаемая вниманию читателей новая серия книг учебно-монографического содержания должна носить междисциплинарный характер. В книгах этой серии будет предпринята попытка с единых позиций изложить современные подходы к математическому моделированию технических систем и технологических процессов и проиллюстрировать их на конкретных примерах из различных областей инженерной деятельности. Научную базу перспективных направлений в совгеменном мащиностроении и приборостроении составляют, по существу, упорядоченные совокупности математических моделей соответствующих технических объектов и процессов их производства. Теоретической основой при построении большинства таких моделей служат главным образом механика и электродинамика. В связи с этим первая книга планируемой серии посвящена математическим моделям механики и электродинамики сплошной среды.

Результативность математического моделирования в технике и в технологии во многом зависит от эффективности методов количественного анализа построенных моделей. Поэтому вторая книга серии будет посвящена изложению методов вычислительной математики, ориентированных на использование все увеличивающихся возможностей вычислительной техники. Содержание первых двух книг должно определить уровень изложения материала в остальных книгах серии и упорядочить не всегда однозначную терминологию в таких быстро расширяющихся сферах приложений математического моделирования, какими являются техника и технология.

Предполагается, что издание планируемой серии книг может дать дополнительный импульс к дальнейшему совершенствованию подготовки инженеров и аспирантов, поскольку универсальность математических моделей и их инвариантность по отношению к моделируемым объектам и процессам различной природы должны способствовать укреплению межпредметных связей между циклами естественнонаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и дать возможность избежать излишнего дублирования материала при изучении этих дисциплин.

К подготовке книг по отдельным инженерным направлениям привлечены лидеры ведущих научно-педагогических школ нашего университета, сформировавшихся и продолжающих развиваться в тесном контакте с научными и производственными организациями нашей страны и имеющих активные международные связи. В создании серии примут также участие сотрудники академических и отраслевых научных организаций. Планы такой совместной работы нашли отражение и в составе сформированного редакционного совета этой серии книг.

И.Б. Федоров

Академик РАН, ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана, председатель редакционного совета серии

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое моделирование в настоящее время все глубже проникает во все сферы человеческой деятельности, но в развитии и совершенствовании современных техники и технологии его роль является решающей. С общих позиций математическое моделирование можно рассматривать как интеллектуальное ядро быстро развивающихся информационных технологий [126]. Особенность математического моделирования состоит в том, что абстрактным отражением существующего либо создаваемого технического устройства или технологического процесса является его *математическая модель* (MM), количественный анализ которой позволяет получать новые знания об этом объекте или процессе.

Под математическим моделированием в инженерной практике понимают адекватную замену исследуемого технического устройства или технологического процесса соответствующей ММ и ее последующее изучение методами вычислительной математики с привлечением средств современной вычислительной техники. Такое изучение ММ можно рассматривать как проведение вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Математическое моделирование тесно связано с инженерной практикой, опирается на достижения классической и вычислительной математики, активно использует сведения из естественнонаучных дисциплин, предполагает уверенное владение вычислительной техникой и программированием на ЭВМ. Поэтому для инженера любой специальности математическое моделирование — инструмент, творческое применение которого может способствовать прогрессу в любой отрасли техники.

В этой книге, открывающей серию «Математическое моделирование в технике и в технологии», изложен материал, который определяет теоретическую, методическую и терминологическую базу этой серии. Основное внимание уделено построению и обоснованию адекватности ММ механики и электродинамики сплошной среды, описывающих явления преобразования и переноса таких физических субстанций, как масса, энергия, количество движения и электрический заряд. Эти явления лежат в основе функционирования большинства технических устройств и технологических процессов. В построении ММ выдержан единый подход, опирающийся на использование законов сохранения этих субстанций и уравнений состояния рассматриваемой сплошной среды, не противоречащих второму закону термодинамики.

Рассматриваемые MM составляют научный фундамент многих обцеинженерных и специальных дисциплин и находят применение при разработке современных технических устройств и технологических процессов. Изложение материала ориентировано, прежде всего, на студентов старших курсов технических университетов, освоивших курсы высшей математики, физики и теоретической механики. Книга может быть полезна также аспирантам, инженерам, преподавателям и научным работникам.

Эта книга состоит из двенадцати глав и двух приложений, параграфы в которых имеют двойную нумерацию (например, 4.5 — пятый параграф в четвертой главе или П2.3 — третий параграф во втором приложении); ссылки в тексте на параграфы и главы набраны полужирным шрифтом (например, см. 4.5, см. П2.3 или см. 12). Аналогично пронумерованы формулы и рисунки (например, (2.3) — третья формула в главе 2, рис. 12.1 — первый рисунок в главе 12). Номера библиографических источников, помещенных в конце книги, заключены в квадратные скобки. Также в конце книги приведен предметный указатель, содержащий в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все введенные в книге термины с указанием страницы, на которой термин определен или описан (на этой странице термин можно найти по выделенным полужирным курсивом словам). Выделение термина в начале параграфа светлым курсивом означает, что в этом параграфе он отнесен к ключевым словам и, чтобы понять излагаемый материал, читатель должен знать значение данного термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу, на которой данный термин определен или пояснен. После предисловия помещен список основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны параграфы этой книги, в которых можно найти более подробное их объяснение. Используемые символы и сокращения объяснены в каждом параграфе. Принятая структура справочного аппарата книги позволяет читателю знакомиться с материалом интересующего его отдельно взятого параграфа.

Авторы благодарны профессорам В.Н. Кукуджанову, К.И. Романову и И.В. Станкевичу за полезное обсуждение этой книги и будут признательны всем, кто выскажет свои замечания о ней.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $x \in X$ элемент x принадлежит множеству X (например, $M \in S$ точка M принадлежит поверхности S) 1.6
- $\varsigma = \overline{1, N}$ число $\varsigma \in \mathbb{N}$ принимает последовательно все значения из множества \mathbb{N} натуральных чисел от 1 до N включительно 2.1
- $V \setminus S^*$ разность множеств V и S^* 4.4
- ∪ символ операции объединения множеств 7.2, 7.3
- ∩ символ операции пересечения множеств 7.6
- $S^* \subset V_0$ подмножество S^* включено в множество V_0 (V_0 включает S^*) 12.3, П2.1
- $S_s \subseteq S$ подмножество S_s включено в множество S или совпадает с ним 7.1
- [x] скачок величины x при переходе через поверхность разрыва 4.4
- |·| абсолютное значение числа или модуль вектора П1.1
- (.)^т символ транспонирования 1.6, П1.1
- \sum_{k} символ, означающий «не суммировать по индексу $k \gg \Pi 1.1$
- $a \cdot b$ скалярное произведение векторов a и b П1.1
- $a \times b$ векторное произведение векторов a и b П1.1
- $a \otimes b$ диадное произведение векторов a и b П1.1
- $\widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}$ внешнее произведение тензоров $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ П1.3
- ∇ дифференциальный оператор Гамильтона 1.6, П1.4
- ∇² дифференциальный оператор Лапласа П1.4, П1.5
- ∇² дифференциальный оператор Лапласа, действующий в координатной плоскости 5.2
- ∇⁴ бигармонический дифференциальный оператор 6.5
- ∇⁴₂ бигармонический дифференциальный оператор, действуюций в координатной плоскости 5.2
- grad = ∇ символ дифференциальной операции вычисления градиента П1.4
- div = $\nabla \cdot$ символ дифференциальной операции вычисления дивергенции П1.4

$\operatorname{rot} = \nabla$	× -	— символ дифференциальной операции вычисления ротора П1.4
$A:\mathcal{U}\to$	W	— оператор A отображает множество \mathcal{U} на (или в) множество \mathcal{W} П2.1
$\mathcal{U}{ imes}\mathcal{W}$		декартово произведение множеств U и W П2.1
D(A)		область определения оператора А П2.1
R(A)		область значений оператора А П2.1
Ξ		квантор существования ($\exists x - \ll$ существует такой элемент $x, \forall to \gg$) П2.1
$B \circ A$	—	композиция операторов В и А П2.1
\mathbb{R}		множество действительных чисел (числовая прямая) П2.1
[a, b], (a	, b)	— отрезок и интервал с концами в точках $a, b \in \mathbb{R}$ П2.4
$\langle \cdot, \cdot \rangle$		скалярное произведение элементов гильбертова простран- ства П2.1
·		норма элемента нормированного пространства П2.1
$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}I[\boldsymbol{v}]$		точная верхняя грань функционала $I[v]$ на множестве \mathcal{V} П2.3
$\inf_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}I[\boldsymbol{v}]$	_	точная нижняя грань функционала $I[v]$ на множестве \mathcal{V} П2.3
A	—	массовая плотность свободной энергии 4.3
Α	~	матрица поворота репера П1.1
$lpha_{ij}$		элементы матрицы поворота репера $(i, j = 1, 2, 3)$ П1.1
A_P		работа 2.4
A_r		коэффициент поглощения излучения поверхностью 7.4
a_0		скорость звука 8.2
$a^{(T)}$	—	температуропроводность изотропной среды 5.1
a		радиус-вектор частицы среды в системе материальных ко-
		ординат <i>О</i> а ₁ а ₂ а ₃ 3.1
B		вектор магнитной индукции 12.1
b		вектор плотности объемных сил 3.5 -
b *		вектор Бюргерса 1.7
b_*		модуль вектора Бюргерса 1.7
С	_	матрица коэффициентов упругости 1.6
C_{pq}	_	элементы матрицы С $(p,q=\overline{1,6})$ 1.6
C°	_	жесткость линейной цепочки атомов при растяжении 1.5
$\widehat{\mathbf{C}}$		тензор коэффициентов упругости 1.6, 5.1

C_{klmn}	— компоненты тензора коэффициентов упругости $(k, l, m, n = 1, 2, 3)$ 1.6, 5.1
с	— скорость распространения электромагнитных волн (ско-
	рость света) в вакууме 12.1
c_V	— объемная теплоемкость 1.6, 5.1
c_p	удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении
	9.1
c_v	— удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме
	8.1
c_{ε}	— удельная массовая теплоемкость при постоянной деформа-
	ции 5.1
c_{σ}	— удельная массовая теплоемкость при постоянных напряже-
	ниях 5.1
D	— вектор электрического смещения 12.1
D^*	- вектор скорости перемещения в пространстве точки поверх-
$\mathbf{D}(C)$	ности разрыва 4.4
$D^{(0)}$	— коэффициент концентрационной диффузии 3.3
$D^{(r)}$	коэффициент бародиффузии 3.3
$D^{(2)}$	— коэффициент термодиффузии 5.5
$D_{(ij)}$	- компоненты симметричного тензора второго ранга $(i, j = 1, 2, 3)$ П1.2
$D_{\langle ij \rangle}$	— компоненты антисимметричного тензора второго ранга $(i, j = 1, 2, 3)$ П1.2
E	— модуль продольной упругости (модуль Юнга) 5.1
E^*	— энергия 3.3
E	вектор напряженности электрического поля 3.3
e_{ijk}	— символ Леви-Чивиты $(i,j,k=1,2,3)$ П1.1
e_i	— орты репера ортогональной системы координат $(i = 1, 2, 3)$
	2.2 , Π1.1 , Π1.5
$\{e_i\}$	— репер ортогональной системы координат $(i = 1, 2, 3)$ П1.1, П1.5
\widetilde{F}	— функция напряжений 1.7, 5.2
g	— ускорение свободного падения 8.2
H_i	коэффициенты Ламе $(i = 1, 2, 3)$ П1.5 или проекции векто-
н	ректор изпражениести мариитиоро нона 191
11	- BEATOP HAILPARCHHOUTN MATHITHOLO IIOIN 12.1

12	ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
h	— массовая плотность энтропии 4.3, линейный размер (тол- щина 6.2 или высота 8.2)
ħ	— постоянная Планка 1.5
Ι	— момент инерции площади плоской фигуры 6.1
$I_{1\widehat{\sigma}}$	— первый инвариант тензора напряжений 1.7
$\widehat{\mathbf{I}}_2$	— единичный тензор второго ранга 2.3, П1.2
$\widehat{\mathbf{I}}_4$	— единичный тензор четвертого ранга 1.6, П1.2
I _{klij}	— компоненты единичного тензора четвертого ранга $(k, l, i, j = 1, 2, 3)$ 1.6, П1.2
J_{OA}	момент инерции материальной системы относительно оси ОА 2.3
J^*	— якобиан 3.1
$\mathbf{\widehat{J}}_{O}$	— тензор инерции в точке О 2.3
$oldsymbol{j}^{(e)}$	— вектор плотности электрического тока 3.3
K^*	— кинетическая энергия 2.3
$k_{ m B}$	— постоянная Больцмана 1.2
L_O	— вектор момента количества движения относительно точ- ки О 2.3
M_O	— вектор момента силы относительно точки О 2.4
$M^{(m)}$	— вектор намагниченности 12.1
m	— масса 2.3
N_{κ}	— координационное число кристаллической решетки 1.5
N_A	— число Авогадро 1.1
N_V	— число частиц в единице объема 1.2
$oldsymbol{n},oldsymbol{n}^*$	— единичный вектор нормали к площадке 1.6, 3.5, 5.1
n_i	— проекции (направляющие косинусы) единичного вектора
	нормали на оси Ox_i прямоугольной системы координат $i = 1, 2, 3$) 1.6
O(x)	— символ порядка величины х 8.6
Ox_i	— оси прямоугольной системы координат $(i=1,2,3)$ 1.6
Ρ	— модуль вектора силы 6.1
Ρ	— вектор силы 2.4
$P^{(e)}$	— вектор электрической поляризованности 12.1
p	— давление 1.1
$oldsymbol{p},oldsymbol{p}^{\circ}$	 вектор напряжения 1.6 или вектор плотности поверхност- ных сил 5.1

Q_e	— электрический заряд 3.3
Q_k	— обобщенные силы материальной системы $(k = \overline{1, K})$, имею- щей K степеней свободы 2.4
$oldsymbol{Q}_v$	— вектор количества движения 2.3
$q_k, \dot{q}_k, \dot{q}_k,$	$\ddot{q}_{m k}$ — обобщенные координаты, скорости и ускорения матери-
	альной системы $(k=\overline{1,K})$ с K степенями свободы 2.1
\boldsymbol{q}	— вектор плотности теплового потока 1.6, 3.3
R_{μ}	— универсальная газовая постоянная 1.2
R	— вектор реакции связи 2.3
r	— радиальная координата П1.5
S	— поверхность или ее площадь 3
S^*	— поверхность разрыва 4.4
S	— матрица коэффициентов податливости 1.6
S_{pq}	— элементы матрицы S $(p,q=\overline{1,6})$ 1.6
$oldsymbol{S}$	— вектор Умова — Пойнтинга 12.2
$\widehat{\mathbf{S}}$	— тензор коэффициентов податливости 1.6, 5.1
S_{klmn}	— компоненты тензора коэффициентов податливости $(k, l, m, n = 1, 2, 3)$ 1.6, 5.1
$\operatorname{sgn} x$	— функция знака числа х 11.1
Т	— абсолютная температура 1.1, 4.3
t	— время 1.2
t^*	— время релаксации 1.2
U_e	— электрический потенциал 3.3
u	— массовая плотность внутренней энергии 4.2
u	— вектор перемещения частицы среды 3.1
V	— пространственная область или ее объем 3
V_{π}	— активационный объем 1.8
v	— модуль вектора скорости 1.2
v	— вектор скорости материальной точки 2.1 или частицы среды 3.1
$\hat{\mathbf{v}}$	тензор скоростей 3.1
W_P	— мощность 2.4
w	— вектор ускорения материальной точки 2.1

14	ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
x	— радиус-вектор материальной точки в прямоугольной систе- ме координат Ох ₁ х ₂ х ₃ 2.1 или частицы среды в системе
	пространственных координат 3.1
x_i	— проекция радиус-вектора x на оси Ox_i $(i = 1, 2, 3)$ прямо-
	угольной системы координат 2.1, 3.1
α	— коэффициент теплообмена (теплоотдачи) 5.1
$lpha^{(T)}$	— температурный коэффициент линейного расширения 5.1
$\alpha_V^{(T)}$	— температурный коэффициент объемного расширения 5.1
$\widehat{oldsymbol{lpha}}^{(T)}$	— тензор коэффициентов температурной деформации 5.1
$lpha_{ij}^{(T)}$	— компоненты тензора коэффициентов температурной деформации $(i, j = 1, 2, 3)$ 5.1
β_V	— сжимаемость 1.2
β_i	— криволинейные координаты $(i=1,2,3)$ 6.4, П1.5
γ_p	— пластическая деформация сдвига 1.8
$\dot{\gamma}^{(c)}$	— скорость сдвиговой деформации ползучести 1.8
δ_D	— диссипативная функция 4.3
δ_T	— параметр термоупругой связанности 5.1
δ_{ij}	— символ Кронекера $(i, j = 1, 2, 3)$ 1.6, П1.1
δA_P	— возможная работа 2.4
δυ	 вектор возможного перемещения материальной точки 2.4 или частицы сплошной среды 6.1
ε	— деформация 1.5
ε_0	— постоянная электрическая 12.1
ε^*	— объемная плотность энергии 3.3
εи	— интенсивность деформации 11.4
$\varepsilon^{(e)}$	— проницаемость диэлектрическая 12.1
ε_r	— коэффициент излучения поверхности 7.4
ε_T	— температурная деформация изотропной среды 5.2
ε_V	— объемная деформация 5.1
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}$	— вектор углового ускорения 2.2
$\widehat{m{arepsilon}}$	— тензор малой деформации 1.6, 3.2
ε_{ij}	— компоненты тензора малой деформации $(i, j = 1, 2, 3)$ 3.2
$\widehat{oldsymbol{arepsilon}}^{(T)}$	— тензор температурной деформации 1.6, 5.1
$arepsilon_{ij}^{(T)}$	— компоненты тензора $\widehat{m{arepsilon}}^{(T)}(i,j=1,2,3)$ 1.6, 5.1

κ	— показатель адиабаты 9.2
ĸ	— модуль объемной упругости 1.5, 5.1
λ	— одна из констант Ламе 5.1
$\lambda^{(T)}$	— теплопроводность изотропной среды 3.3
$\lambda_{\scriptscriptstyle \Gamma}^{(T)}$	— теплопроводность газа 1.2
$\widehat{oldsymbol{\lambda}}^{(T)}$	— тензор теплопроводности 1.6, 5.1
$\lambda_{ii}^{(T)}$	— компоненты тензора теплопроводности $(i, j = 1, 2, 3)$ 5.1
μ	— модуль сдвига (одна из констант Ламе) 1.7, 5.1
μ'	— коэффициент упрочнения 1.8
μ_0	— постоянная магнитная 12.1
$u^{(m)}$	— проницаемость магнитная 12.1
μ.	— вязкость газа 1.2
μ _Π	— вязкость динамическая 8.1
ν	— коэффициент Пуассона 1.7. 5.1
νn	— вязкость кинематическая 8.1
П*	— энергия активации 1.3: энергия потенциальная 2.4
П	— поляризационный потенциал (вектор Герца) 12.2
ρ	— плотность среды 3.3
ρ_{π}	— плотность дислокаций 1.7
ρ_e	— объемная плотность электрического заряда 3.3
σ	— напряжение 1.5; нормальное напряжение 3.5
$\sigma_{\scriptscriptstyle \rm BD}$	— предел прочности (временного сопротивления) 11.5
-г <i>σ</i> и	— интенсивность напряжений 11.2
σ_{T}	— предел текучести 11.1
σ_0	— постоянная Стефана — Больцмана 7.4
$\sigma^{(e)}$	
<i>α</i>	
σ_{ii}	— компоненты тензора напряжений $(i, j = 1, 2, 3)$ 1.6, 3.5
au	— касательное напряжение 1.7, 3.5
τ.	— напряжение Пайерлса 1.7
τ_{π}	— касательное напряжение, действующее на лислокацию 1.8
τ_{π}	
• T.	

$\chi^{(e)}$	— восприимчивость диэлектрическая	12.1
Λ.	Boolipilina mboolb guotion pri toonal	

- $\chi^{(m)}$ восприимчивость магнитная 12.1
- ω круговая частота колебаний 1.5, 2.5

ω — вектор угловой скорости 2.2

Единицы измерения физических величин

- А ампер (основная единица измерения силы электрического тока)
 3.3
- К кельвин (основная единица измерения температуры) 1.1, 4.3, 8.5
- кг, м, с килограмм, метр и секунда (основные единицы измерения массы, расстояния и времени) **2.1**, **8.5**

 $B_T = \Pi \mathscr{K}/c = \kappa \Gamma \cdot M^2/c^3$ — ватт (единица измерения мощности) 2.4 $\Pi \mathscr{K} = H \cdot M = \kappa \Gamma \cdot M^2/c^2$ — джоуль (единица измерения энергии и работь) 2.3

 $K_{\pi} = A \cdot c$ — кулон (единица измерения электрического заряда) 3.3 $H = \kappa_{\Gamma} \cdot M/c^2$ — ньютон (единица измерения модуля вектора силы) 2.4

- $O_M = B/A = \kappa_{\Gamma} \cdot M^2/(c^3 \cdot A^2)$ ом (единица измерения электрического сопротивления) 12.1
- $\Pi a = H/M^2 = \kappa r/(M \cdot c^2)$ паскаль (единица измерения давления и механического напряжения) 1.1, 3.5
- $T_{\pi} = B \cdot c/m^2 = \kappa_{\Gamma}/(c^2 \cdot A)$ тесла (единица измерения модуля вектора магнитной индукции) 12.1

ВВЕДЕНИЕ

Совершенство большинства технических устройств определяется главным образом эффективностью преобразования и перемещения ограниченного числа **физических субстанций**: массы, энергии, количества движения и его момента, электрического заряда, а также информации. Эти процессы подчинены фундаментальным законам природы, составляющим предмет изучения механики, физики, химии и других естественнонаучных дисциплин. Не всегда в развитии техники эти законы играли первичную роль. Много примеров изобретения технических устройств, которые, наоборот, натолкнули на открытие или уточнение фундаментальных научных положений. Видимо, такие ситуации возможны и в настоящее время.

Но магистральная линия создания принципиально новых и совершенствования существующих технических устройств и технологий это реализация возможностей, открывающихся при использовании результатов фундаментальных исследований. Этим, в частности, объясняется и современный акцент в инженерном образовании на фундаментальную научную подготовку. Решающую роль при реализации результатов таких исследований играет математическое моделирование.

В.1. Роль математического моделирования в развитии техники и технологии

На пути реализации в технике наиболее перспективных научных открытий и разработок обычно стоят препятствия, связанные с отсутствием или ограниченными возможностями конструкционных или функциональных материалов и с недостаточностью достигнутого технологического уровня. Поэтому процесс реализации научных и технических идей — это процесс поиска разумного компромисса между желаемым и возможным, что доказывает история развития таких быстро развивающихся технических отраслей, как ядерная энергетика, ракетно-космическая техника, ведущие отрасли приборостроения и вычислительная техника.

При создании технических устройств и систем различного назначения обычно рассматривают несколько возможных вариантов проектных решений, ведущих к намеченной цели. Эти варианты принято называть альтернативами. Учет противоречивых требований и поиск компромисса в решении комплекса возникающих при этом взаимосвязанных проблем предполагают наличие достаточно полной и достоверной количественной информации об основных параметрах, которые характеризуют возможные для выбора альтернативы.

В складывавшейся десятилетиями последовательности основных этапов разработки технических устройств в большинстве отраслей машиностроения и приборостроения некоторый начальный объем необходимой информации формировался путем так называемых проектировочных расчетов, степень достоверности которых должна была обеспечивать лишь довольно грубый отбор альтернатив. Основная часть необходимой для принятия окончательного решения количественной информации (как по степени подробности, так и по уровню достоверности) формировалась на стадии экспериментальной отработки технических устройств. По мере их усложнения и удорожания, а также удлинения стадии их экспериментальной отработки значимость проектировочных расчетов стала расти. Возникла необходимость в повышении достоверности таких расчетов. Она должна была обеспечить более обоснованный отбор альтернатив на начальной стадии проектирования и формулировку количественных критериев для структурной и параметрической оптимизации.

Развитие сверхзвуковой авиации, возникновение ракетно-космической техники, ядерной энергетики и ряда других быстро развивающихся наукоемких отраслей современного машиностроения и приборостроения привели к дальнейшему усложнению разрабатываемых и эксплуатируемых технических устройств и систем. Их экспериментальная отработка стала требовать все больших затрат времени и материальных ресурсов, а в ряде случаев ее проведение в полном объеме превратилось в проблему, не имеющую приемлемого решения.

В этих условиях существенно повысилось значение расчетно-теоретического анализа характеристик таких устройств и систем. Этому способствовал и прорыв в совершенствовании вычислительной техники, приведший к появлению современных ЭВМ с большим объемом памяти и высокой скоростью выполнения арифметических операций. В результате возникла материальная база для становления и быстрого развития математического моделирования и появились реальные предпосылки для использования вычислительного эксперимента не только в качестве расчетно-теоретического сопровождения на стадии отработки технического устройства, но и при его проектировании, подборе и оптимизации его эксплуатационных режимов, анализе его надежности и прогнозировании отказов и аварийных ситуаций, а также при оценке возможностей форсирования характеристик и модернизации технического устройства. В равной степени это относится и к разработке, и к внедрению перспективных технологических процессов.

Так, вычислительный эксперимент позволил снизить затраты на проведение натурных аэродинамических испытаний созданного в США аэробуса и добиться уменьшения аэродинамического сопротивления на 20% по сравнению с существовавшими аналогами. Известны примеры математического моделирования условий, возникающих при автомобильных авариях и крупных техногенных катастрофах. На основе *математической модели* (ММ) биосферы Земли [91] составлен прогноз последствий ядерных взрывов при возможном военном конфликте, приводящих к так называемой «ядерной зиме».

Отметим, что определенные предпосылки к широкому применению математического моделирования и вычислительного эксперимента в технике были созданы благодаря разработке методов аналогового моделирования [137]. Основу большинства этих методов составляло использование электрических моделей-аналогов для исследования процессов в механических, тепловых и гидравлических системах. Явления считают математически аналогичными, если их описывают одинаковые по форме уравнения. Математическая аналогия между процессами в электрических цепях и другими физическими явлениями позволлет создать моделирующие установки, которые, по существу, являются специализированными аналоговыми вычислительными машинами (ABM) [142]. Так, на основе электротепловой аналогии были разработаны и изготовлены многочисленные установки для моделирования процессов теплопроводности и теплообмена применительно к различным элементам конструкций и технологического оборудования в машиностроении, энергетике, металлургии, химической промышленности и других отраслях техники [38, 57, 69]. Но, несмотря на простоту проведения вычислительного эксперимента и достаточную для инженерной практики точность получаемых результатов, со временем АВМ были вытеснены более универсальными и производительными ЭВМ. Тем не менее и сейчас при разработке ММ наряду с электротепловой аналогией в методических целях используют электромеханическую и электрогидравлическую аналогии для построения эквивалентных электрических схем проектируемых и исследуемых технических объектов [35,99].

В настоящее время математическое моделирование и вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ стали составными частями общих подходов, характерных для современных информационных технологий. Принципиально важно то, что математическое моделирование позволило объединить формальное и неформальное мышление и естественным образом сочетать способность ЭВМ «во много раз быстрее, точнее и лучше человека делать формальные, арифметические операции, отслеживать логические цепочки с удивительными свойствами человеческого интеллекта — интуицией, способностью к ассоциациям и т. д.» [91]. Не менее важно и то, что современные средства отображения информации дают возможность вести с ЭВМ диалог — анализировать альтернативы, проверять предположения, экспериментировать с ММ.

Практическая реализация возможностей математического моделирования и вычислительного эксперимента существенно повышает эффективность инженерных разработок особенно при создании принципиально новых, не имеющих прототипов машин и приборов, материалов и технологий, что позволяет сократить затраты времени и средств на использование в технике передовых достижений физики, химии, механики и других фундаментальных наук. Отмеченные возможности математического моделирования и вычислительного эксперимента еще далеко не исчерпаны, представляются достаточно перспективными и поэтому заслуживают детального рассмотрения.

В.2. Основные этапы математического моделирования

Для обсуждения и обоснования основных подходов к разработке проблем математического моделирования технических устройств и процессов в них целесообразно предварительно рассмотреть условную схему (рис. В.1), определяющую последовательность проведения отдельных этапов общей процедуры вычислительного эксперимента [35]. Исходной позицией этой схемы служит технический объект (TO), под которым будем понимать конкретное техническое устройство, его агрегат или узел, систему устройств, технологический процесс, физическое явление или отдельную ситуацию в какой-либо системе или устройстве.

На первом этапе осуществляют неформальный переход от рассматриваемого (разрабатываемого или существующего) ТО к его *расчетной схеме* (PC). При этом в зависимости от направленности вычислительного эксперимента и его конечной цели выделяют те свойства, условия работы и особенности ТО, которые вместе с характеризующими их параметрами должны найти отражение в PC, и, наоборот, аргументируют допущения и упрощения, позволяющие не учитывать в PC те качества ТО, влияние которых предполагают в рассматриваемом случае несущественным. Иногда под PC подразумевают содержательную модель [93] ТО, а в некоторых случаях — концептуальную модель.



Рис. В.1

В сложившихся инженерных дисциплинах (например, в сопротивлении материалов, электротехнике и электронике) помимо описательной (вербальной) информации для характеристики PC разработаны специальные приемы и символы наглядного графического изображения. Для ряда новых направлений развития техники подобная символика находится в стадии формирования.

При разработке новых ТО успешное проведение первого этапа в значительной мере зависит от профессионального уровня инженера, его творческого потенциала и интуиции. Полнота и правильность учета в PC свойств ТО, существенных с точки зрения поставленной цели исследования, являются основной предпосылкой получения в дальнейшем достоверных результатов математического моделирования. И наоборот, сильная идеализация ТО ради получения простой PC может обесценить все последующие этапы исследования.

Содержание второго этапа состоит, по существу, в формальном, математическом описании РС. Это описание в виде математических соотношений, устанавливающих связь между параметрами, характеризующими РС ТО, и называют *математической моделью* (MM).

Надо сказать, что для некоторых типовых РС существуют банки ММ, что упрощает проведение второго этапа. Более того, одна и та

же ММ может соответствовать PC из различных предметных областей. Однако при разработке новых TO часто не удается ограничиться применением типовых PC и отвечающих им уже построенных MM. Создание новых MM или модификация существующих должны опираться на достаточно глубокую математическую подготовку и владение математикой как универсальным языком науки.

На третьем этапе проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной ММ. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра PC (пунктирная линия на рис. В.1). Количественные оценки могут дать основания упростить модель, исключив из рассмотрения некоторые параметры, соотношения или их отдельные составляющие, несмотря на то что влияние описываемых ими факторов учтено в PC. В большинстве случаев, принимая дополнительные по отношению к PC допущения, полезно построить такой упрощенный вариант MM, который позволял бы получить или привлечь известное точное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах. Нередко для одного и того же TO удается построить несколько MM, отличающихся различным уровнем упрощения, т.е. *иерархию MM*, что в данном случае означает упорядочение MM по признакам их сложности и полноты.

Построение иерархии MM связано с различной детализацией свойств изучаемого TO. Сравнение результатов исследования различных MM может существенно расширить и обогатить знания об этом TO. Кроме того, такое сравнение позволит оценить достоверность результатов последующего вычислительного эксперимента: если более простая MM правильно отражает некоторые свойства TO, то результаты исследования этих свойств должны быть близки к результатам, полученным при использовании более полной и сложной MM.

Итог анализа на рассматриваемом этапе — это обоснованный выбор рабочей MM TO, которая подлежит в дальнейшем детальному количественному анализу. Успех в проведении третьего этапа зависит, как правило, от глубины понимания связи отдельных составляющих MM со свойствами TO, нашедшими отражение в его PC, что предполагает органическое сочетание владения математикой и инженерными знаниями в конкретной предметной области.

Четвертый этап состоит в обоснованном выборе метода количественного анализа MM, в разработке эффективного алгоритма вычислительного эксперимента, а пятый этап — в создании работоспособной программы, реализующей этот алгоритм средствами вычислительной техники. Для успешного проведения четвертого этапа необходимо владеть арсеналом современных методов вычислительной математики, а при математическом моделировании довольно сложных ТО выполнение пятого этапа требует профессиональной подготовки в области программирования на ЭВМ.

Получаемые на шестом этапе (в итоге работы программы) результаты вычислений должны прежде всего пройти тестирование путем сопоставления с данными количественного анализа упрощенного варианта MM рассматриваемого TO. Тестирование может выявить недочеты как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации и алгоритма, и программы. Анализ результатов вычислений и их инженерная интерпретация могут вызвать необходимость в корректировке PC и соответствующей MM. После устранения всех выявленных недочетов триаду «модель — алгоритм — программа» можно использовать в качестве рабочего инструмента для проведения вычислительного эксперимента и выработки на основе получаемой количественной информации практических рекомендаций, направленных на совершенствование TO, что составляет содержание седьмого, завершающего «технологический цикл» этапа математического моделирования.

Представленная последовательность этапов носит общий и универсальный характер, хотя в некоторых конкретных случаях она может несколько видоизменяться. Если при разработке ТО можно использовать типовые РС и ММ, то отпадает необходимость в выполнении ряда этапов, а при наличии и соответствующего программного комплекса процесс вычислительного эксперимента становится в значительной степени автоматизированным. Однако математическое моделирование ТО, не имеющих близких прототипов, как правило, связано с проведением всех описанных этапов.

Осуществление отдельных этапов математического моделирования требует определенных знаний, навыков и практической подготовки. Если первый, седьмой и частично шестой этапы применительно к моделированию ТО типичны для деятельности инженера, то второй, третий и четвертый этапы предполагают наличие серьезной математической подготовки, а пятый — навыков в разработке и отладке ЭВМ-программ. Поэтому к математическому моделированию сложных ТО приходится привлекать и инженеров, и математиков, и программистов. Однако для координации их усилий необходимы специалисты, способные осуществить каждый из рассмотренных этапов на высоком профессиональном уровне.

Подготовка таких специалистов составляет одну из ключевых проблем, от успешного решения которой зависит эффективное использование возможностей математического моделирования при создании технических устройств и их систем. Решение этой проблемы, вероятно, по силам ряду созданных в последние десятилетия технических университетов.

Успех в решении указанной проблемы в значительной степени зависит от укрепления междисциплинарных связей между курсами высшей математики, физики, теоретической механики, химии, информатики и инженерными дисциплинами. При этом связующим звеном могут быть MM явлений и процессов, являющихся предметом изучения в дисциплинах естественнонаучного цикла и лежащих в основе функционирования TO в конкретных областях техники. Эта связь может обеспечить методическое единство и преемственность циклов математической, естественнонаучной и специальной подготовки будущего инженера.

Такие инженерные дисциплины, как прикладная механика (в частности, сопротивление материалов), гидравлика, теория тепломассообмена, электротехника, электроника и некоторые другие, можно с определенных позиций рассматривать как упорядоченное множество РС и MM соответствующих TO. Прежде всего в инженерных дисциплинах изучают РС и MM так называемых типовых элементов, часто встречающихся в данной отрасли техники. Например, в электротехнике роль простейших типовых элементов играют пассивные электрические двухполюсники: резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Но даже каждому из таких, казалось бы, простых элементов в зависимости от условий его работы соответствуют несколько PC, которым отвечает иерархия MM [35].

В электротехнике и электронике, по существу, сформирован так называемый банк PC и MM типовых элементов, что в сочетании с принятой системой наглядного графического представления связей между этими элементами позволяет строить MM достаточно сложных устройств. Аналогичная ситуация существует в инженерных дисциплинах, предметом изучения которых являются механические, тепловые, пневмогидравлические системы и системы, в которых одновременно протекают процессы различной физической природы. Так, в сопротивлении материалов банк PC построен с учетом формы типовых элементов на основе принятых предположений (гипотез) о распределении перемещений или механических напряжений в этих элементах. Причем каждой PC (стержню, балке, пластине, оболочке [145]) соответствует MM, область применения которой ограничена принятыми гипотезами.

Следует отметить определяющую роль гипотез при формировании РС типовых элементов [14]. При этом целесообразно отдавать предпочтение более простым гипотезам по сравнению с искусственными и обычно трудно проверяемыми. Если простая гипотеза верна, то ее обычно легко аргументировать и подтвердить экспериментально, и, наоборот, если она вызывает сомнение, то ее нетрудно опровергнуть либо на основе контрпримеров и непосредственных наблюдений, либо исходя из соответствующим образом поставленных экспериментов, либо при получении противоречивых результатов уже на стадии количественного анализа MM, построенной с использованием этой гипотезы. Однако принятие простой гипотезы не всегда равносильно построению простых PC и MM изучаемого TO.

Остановимся на особенностях построения ММ в инженерных дисциплинах. Математик-теоретик обычно выбирает для исследования уже построенную ММ, т.е. начинает работу с формулировки математической задачи и затем уже не подвергает сомнению эту формулировку, а лишь обосновывает свои преобразования и этапы решения задачи. При этом в некоторых случаях полученные результаты удается применить непосредственно к конкретному ТО. Но в технике ни одну достаточно сложную задачу нельзя поставить таким образом. Любое формулирование технической задачи является условным. Если некоторое следствие формулировки такой задачи неверно или неприемлемо, то задачу приходится переформулировать, так как любая последовательность математических символов, записанных при построении ММ, является в действительности последовательностью утверждений содержательного характера, связанных с конкретным исследуемым ТО. Поэтому при математическом моделировании ТО необходимо учитывать как математическую, так и содержательную сторону задачи, связывая одну с другой.

Если не принять во внимание относительность соответствия MM реальному TO, то это может привести к ошибкам, связанным с приписыванием TO свойств его MM [93]. В этом отношении характерны слова русского математика, механика и кораблестроителя А.Н. Крылова (1863–1945): «Сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на коих оно основано. Об этом часто забывают, делают вначале какое-нибудь грубое приближенное предположение или допущение, часто даже не оговорив таковое, а затем придают полученной формуле гораздо большее доверие, нежели она заслуживает».

Отмеченные особенности дают повод для того, чтобы еще раз подчеркнуть важность умения согласовывать этап формирования PC с этапом построения MM изучаемого TO (этапы I и II на рис. В.1). Это умение студенты обычно приобретают при выполнении междисциплинарных курсовых работ и проектов, при самостоятельном решении прикладных математических задач, имеющих конкретное техническое содержание. Для формирования таких навыков необходимы специальные учебные пособия, в которых на примерах TO, изучаемых в инженерных дисциплинах, была бы детально и аргументированно раскрыта взаимная связь рассматриваемых этапов. В качестве примера такого пособия можно назвать выдержавшую пять изданий книгу В.И. Феодосьева [144], содержание и методическое значение которой для углубленного понимания особенностей математического моделирования TO существенно шире ее названия.

Акцент на взаимной связи этапов формирования РС и построения ММ исследуемого ТО не противоречит, а дополняет выдвинутый и обоснованный А.А. Самарским и его сотрудниками [126] методологический императив — совершенствование триады «модель — алгоритм — программа» и ее внедрение в современные информационные технологии. В этой триаде основное внимание уделено проблемам анализа построенных ММ методами вычислительной математики при помощи средств вычислительной техники (этапы IV и V на рис. В.1). Подчеркнуто, что изолирование этапов, связанных с построением ММ или разработкой алгоритмов и пакетов программ, как и обучение выполнению этих этапов по отдельности, не гарантирует эффективное использование преимуществ математического моделирования. Наличие современных ЭВМ само по себе еще не решает проблему. Необходимо «интеллектуальное ядро» вычислительной техники, которым является ее математическое обеспечение, составляющее, по оценкам, не менее 80% общей стоимости разработки информационных технологий.

Удобства, предоставляемые программным обеспечением современных ЭВМ их пользователям, часто приводят к стремлению обратиться при количественном анализе ММ к существующим и постоянно совершенствуемым универсальным пакетам типа Mathcad [109], Matlab и т. п. Более того, универсальность ММ и формирование банков типовых ММ позволяют создавать программные комплексы типа NASTRAN или ANSYS, в которые исходная информация вводится даже не в виде MM, а в виде PC изучаемого TO.

Однако метод, который годится для решения многих стандартных задач, часто не является наилучшим при решении конкретной задачи, особенно нестандартной, а нередко и вообще не применим. В инженерной практике решать приходится в основном нестандартные задачи, потому что стандартные почти все решены или могут быть решены без особых творческих усилий. При решении новых и сложных задач, не имеющих близких аналогов, путь формального обращения к универсальным пакетам и программным комплексам может привести к получению результатов, которые не удастся интерпретировать применительно к рассматриваемому ТО. В таких случаях анализ ММ нужно строить на умелом сочетании качественных оценок, аналитических методов и применения ЭВМ, помня, что цель расчетов — не числа, а понимание [150]. Все это говорит о том, что ЭВМ, освобождая нас от многих забот и обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух из них — от необходимости «владеть математикой и творчески мыслить» [143].

В.3. Формы представления математических моделей

При математическом моделировании достаточно сложного *технического объекта* (TO) описать его поведение одной *математической моделью* (MM), как правило, не удается, а если такая MM и была бы построена, то она оказалась бы слишком сложной для количественного анализа. Поэтому к таким TO обычно применяют *принцип декомпозиции*. Он состоит в условном разбиении TO на отдельные более простые блоки и элементы, допускающие их независимое исследование с последующим учетом взаимного влияния блоков и элементов друг на друга. В свою очередь, принцип декомпозиции можно применить и к каждому выделенному блоку вплоть до уровня довольно простых элементов. В таком случае возникает *иерархия MM* связанных между собой блоков и элементов.

Иерархические уровни выделяют и для отдельных типов ММ. Например, среди *структурных ММ* ТО, отображающих связи между составляющими этот объект элементами и его геометрические характеристики, к более высокому уровню иерархии относят топологические MM, а к более низкому уровню, характерному большей детализацией TO, — геометрические MM [99]. Иерархические уровни *функциональных MM*, описывающих происходящие в ТО механические, физические, химические или информационные процессы, отражают степень детализации описания этих процессов. С этой точки зрения обычно выделяют два основных уровня — макро- и микроуровень [99]. Модели первого уровня описывают процессы в системах с сосредоточенными параметрами, т.е. когда расчетная схема ТО представляет собой *дискретную систему*, а модели второго уровня — в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах).

Если состояние дискретной системы изменяется во времени t, то для нее наиболее распространенной **формой** представления **MM** является **дифференциальная**, содержащая обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) или систему таких уравнений в сочетании с заданными начальными условиями, определяющими состояние этой системы в некоторый момент времени t_0 , принимаемый за начальный. Искомыми переменными в таких ММ будут зависящие от t параметры дискретной системы, характеризующие состояние TO (например, перемещения, скорости и ускорения элементов механических устройств, а также приложенные к этим элементам силы и моменты; температура и тепловые потоки в тепловых системах; давление и расход жидкости или газа в гидравлических и газодинамических системах; напряжение и сила тока в электрических цепях и т. п.). В некоторых случаях ММ макроуровня удается представить в интегральной форме, используя один из вариационных принципов (например, принцип Гамильтона — *Остроградского* применительно к механическим системам (см. 2.6)).

Если эволюцию ТО определяет его состояние не только в текущий момент времени t, но и в некоторый предшествующий момент t - t', то ММ макроуровня включает ОДУ вида $\dot{u}(t) = f(t, u(t), u(t - t'))$ или $\dot{u}(t) = f(t, u(t), u(t - t'), \dot{u}(t - t'))$ относительно искомой функции u(t), где $\dot{u} = du/dt$. Такие ОДУ называют уравнениями запаздывающего и нейтрального типа соответственно и относят к *дифференциальнофункциональным уравнениям* (ДФУ) [93] (или к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом). Запаздывающая реакция ТО на изменение своего состояния может определяться более чем одним промежутком времени t - t'. Тогда ДФУ будет включать не одно, а несколько дискретных запаздываний. В более общем случае запаздывание может быть непрерывным во времени, что приводит, например, для линейной ММ к интегро-дифференциальному уравнению (ИДУ) вида

$$\dot{u}(t)=\int\limits_{t_0}^t K(t,t')\,u(t')\,dt'+f(t),\quad t\geqslant t_0.$$

Заданную функцию K(t, t') называют ядром этого ИДУ, а о рассматриваемом ТО говорят, что он обладает памятью, поскольку его эволюция зависит от всей предыстории изменения состояния ТО.

Когда состояние дискретной системы можно считать не изменяющимся во времени, ее ММ будет включать лишь конечное (в общем случае нелинейное) уравнение или систему таких уравнений (в частности, систему линейных алгебраических уравнений — СЛАУ). Если для рассматриваемого ТО удается выделить поддающееся количественной характеристике некоторое важное свойство (надежность, долговечность, массу, стоимость, какой-либо параметр, определяющий качество ТО) или сочетание таких свойств и при помощи действительной функции установить их связь с параметрами, определяющими состояние ТО, то говорят об оптимизации ТО по критерию, выражаемому этой функцией. Ее называют целевой функцией, поскольку ее значения характеризуют меру (или степень) достижения определенной цели совершенствования ТО в соответствии с выбранным критерием. В силу ограниченности располагаемых ресурсов в реальной ситуации имеют смысл лишь те экстремальные значения целевой функции, которые достигаются в области возможного изменения параметров ТО, обычно ограниченной системой неравенств. Эти неравенства вместе с целевой функцией и ММ ТО в виде конечного нелинейного уравнения или систем таких уравнений входят в математическую формулировку задачи оптимизации TO по выбранному критерию, называемой (в общем случае) задачей нелинейного программирования [6]. В частном случае линейной ММ в виде СЛАУ, линейной целевой функции и линейных неравенств говорят о задаче линейного программирования. К таким задачам обычно приходят при рассмотрении проблем технико-экономического содержания. Задачу оптимизации ТО, описываемого ММ, включающей время, относят к классу задач оптимального управления [19].

Дифференциальная форма ММ также характерна и для континуальных систем. В общем случае эта форма включает дифференциальное уравнение с частными производными (или систему таких уравнений) с заданными начальными и граничными условиями (последние определяют условия взаимодействия системы с окружающей средой на границах пространственной области, конфигурация которой соответствует рассматриваемому TO). Начальные и граничные условия объединяют общим термином краевые условия. Эти условия входят в математическую формулировку краевой задачи для дифференциальных уравнений математической физики [85]. Среди ММ микроуровня выделяют одномерные, двумерные и трехмерные ММ, если искомые параметры ТО зависят от одной, двух и трех пространственных координат соответственно. Два последних типа ММ являются многомерными ММ. Одномерную ММ микроуровня, искомые переменные в которой не зависят от времени, можно представить в виде системы ОДУ с заданными граничными условиями (в простейшем случае одного искомого переменного такая ММ включает лишь одно ОДУ и граничные условия).

Так как краевой задаче можно поставить в соответствие интегральную формулировку [21], то и ММ микроуровня также может быть представлена в интегральной форме. При определенных условиях эту форму удается привести к *вариационной форме MM*, содержащей функционал, который допустимо рассматривать на некотором множестве функций, включающем искомую функцию, обращающую в нуль вариацию функционала, т.е. являющуюся его стационарной точкой.

Построение функционала и соответствующей ему вариационной формы MM микроуровня обычно основано на некотором содержательном с физической точки зрения вариационном принципе механики или электродинамики сплошной среды (например, на принципе минимума потенциальной энергии континуальной системы в положении равновесия или на принципе минимума времени прохождения светового луча между двумя точками оптически неоднородной среды). В этом случае стационарная точка функционала соответствует его экстремальному (в частности, минимальному) значению на допустимом множестве функций. Такая форма MM, отвечающая экстремальному вариационному принципу, позволяет, сравнивая значения функционала на любых двух функциях из допустимого множества, оценивать в интегральном смысле близость этих функций к стационарной точке, что важно при качественном анализе MM и при сравнении различных приближенных решений соответствующей краевой задачи [21, 34, 36, 43].

При выполнении некоторых ограничений можно построить *деойственную вариационную форму ММ* микроуровня, включающую пару альтернативных функционалов, достигающих в одной и той же стационарной точке равных между собой альтернативных экстремальных значений (минимума и максимума) [19]. Такая форма ММ дает возможность по разности значений этих функционалов, вычисленных на некоторой функции из допустимого множества, количественно оценить погрешность, возникающую при выборе этой функции в качестве искомой (см. **П2.4**).

В 2 с использованием представлений аналитической механики кратко рассмотрены MM дискретных систем, которые можно считать обобщением и упрощением MM континуальных систем на основе принятых дополнительных предположений. Поэтому основное внимание в книге уделено построению и анализу MM континуальных систем с привлечением фундаментальных положений механики и электродинамики сплошной среды. При изложении выдержан единый подход, базирующийся на применении законов сохранения физических субстанций и не противоречащий второму закону термодинамики уравнений состояния, в которые входят параметры этой среды. В свою очередь, параметры сплощной среды в соответствии с используемым в статистической физике подходом являются характеристиками, усредненными по большому ансамблю микрочастиц [122]. Физические представления о свойствах и взаимодействии микрочастиц кратко изложены в 1. Однако количественный анализ MM, построенных с использованием подходов статистической физики для изучения характеристик и поведения большинства технических устройств и технологических процессов, несмотря на все возрастающие возможности современной вычислительной техники, осуществить трудно. Поэтому в книге при построении MM механических и электродинамических процессов, протекающих в TO, использован так называемый феноменологический подход, который опирается на три основные гипотезы.

Согласно первой гипотезе, все тела, состоящие в действительности из отдельных микрочастиц, которых очень много в существенном для конкретного ТО объеме, рассматриваются как среда, заполняющая предоставленную часть пространства сплошным образом. Такая идеализация позволяет при построении MM использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Вторая гипотеза определяет пространство, в котором рассматривается материальное тело как совокупность точек, задаваемых числами — координатами этих точек в евклидовом пространстве, в котором определено скалярное произведение векторов. В этом пространстве расстояние между двумя любыми точками A и B, положение которых в выбранной системе координат определено радиус-векторами x_A и x_B соответственно, можно представить в виде $\sqrt{(x_A - x_B) \cdot (x_A - x_B)}$.

В соответствии с третьей гипотезой при построении и анализе MM будет использовано абсолютное время, т.е. не будут учитываться релятивистские эффекты, вызванные движением тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Свойства конструкционных и функциональных материалов и рабочих тел, используемых в технике и в технологии и рассматриваемых в инженерной практике как сплошная среда, определяются их микроструктурой и микромеханизмами протекающих в них процессов. Поэтому важно располагать сведениями о физических моделях, описывающих на микроуровне формирование этих свойств, особенно в связи с интенсивным развитием нанотехнологий, оперирующих объектами размерами порядка нанометров (10⁻⁹ м). Значительная часть таких сведений (за исключением моделей, описывающих электрические и магнитные свойства веществ) составляет предмет физической механики.

1.1. Агрегатные состояния вещества

Болышинство известных в природе веществ могут существовать в трех состояниях: газообразном, жидком и твердом, называемых *агрегатными состояниями* [148]. Четвертым агрегатным состоянием нередко считают *плазму* — частично или полностью ионизированный при высокой температуре *газ*, в котором *объемные плотности* положительных и отрицательных электрических зарядов примерно одинаковы, что находит отражение в термине «квазинейтральность плазмы» [113].

Агрегатное состояние вещества зависит главным образом от таких его параметров состояния, как абсолютная температура Tи действующее на вещество внешнее давление p, стандартными единицами измерения которых являются соответственно K (кельвин) и Па (паскаль). Эти параметры являются аргументами уравнения состояния, определяющего плотность вещества при термодинамическом равновесии. От этих параметров также зависит отношение $\overline{\Delta} = \overline{\Pi}^*/\overline{K}^*$ средней потенциальной энергии $\overline{\Pi}^*$ взаимодействия частиц вещества к их средней кинетической энергии \overline{K}^* . В газообразном состоянии $\overline{\Delta} \ll 1$, в твердом — $\overline{\Delta} \gg 1$, а в жидком — $\overline{\Delta} \sim 1$. Переход вещества из газообразного состояния в жидкое и затем в твердое состояние связан со скачкообразным увеличением значения $\overline{\Delta}$ и вызывает существенное изменение его физических свойств. При этом изменяются расстояния между частицами и характер взаимодействия.

Газ состоит из молекул и атомов, расстояния между которыми сравнительно велики, что приводит к относительно слабому взаимо-

действию между этими частицами и достаточно свободному движению в занимаемом ими объеме. В газообразном состоянии взаимодействие между электрически нейтральными частицами определяется силами Ван-дер-Ваальса, имеющими электрическую природу. Притяжение частиц вызвано взаимной поляризацией молекул, а отталкивание частиц — соприкосновением электронных оболочек атомов, входящих в состав молекул. Потенциальная энергия Π_{np}^* сил притяжения пропорциональна r^{-6} (r — расстояние между частицами), а потенциальная энергия Π_{0T}^* сил отталкивания уменьшается существенно быстрее с увеличением r. Это приводит

к немонотонной зависимости $\overline{\Pi}^*(r) = \Pi_{0T}^*(r) - \Pi_{\Pi p}^*(r)$ суммарной энергии взаимодействия от r (рис. 1.1). Абсцисса r_* определяет наименьшее возможное расстояние между неподвижными частицами, абсцисса r_0 — расстояние между их равновесными положениями, а значение Π_0^* — глубину «потенциальной ямы», равную энергии связи частиц и имеющую порядок $10^2 \dots 10^3$ Дж/моль (джоуль является стандартной единицей измерения энергии; он равен кинетической энергии



Рис. 1.1

тела массой 2 кг, имеющего скорость 1 м/с, а моль, численно равный молекулярной массе вещества, определяет его массу в граммах, содержащую количество частиц, равное числу Авогадро $N_A \approx \approx 6,022 \cdot 10^{23}$ /моль). Для одноатомных (в том числе инертных) газов зависимость $\overline{\Pi}^*(r)$ аналогична.

По сравнению с газообразным состоянием в жидком и твердом состояниях молекулы и атомы расположены значительно ближе друг к другу, а энергия связи между частицами имеет порядок 10⁷ Дж/моль [148]. Это приводит к сохранению жидкостями и твердыми телами своего объема. Тепловое движение частиц жидкости представляет собой сочетание их малых колебаний относительно положений равновесия и частых перескоков из одного положения равновесия в другое, что характеризует ближний порядок в расположении частиц. В твердом теле частицы совершают лишь малые колебания относительно положений равновесия, причем в случае кристаллической структуры имеет место как ближний, так и дальний порядок в расположении частиц, определяемый типом кристаллической решетки. В газах отсутствует и дальний, и ближний порядок.

Нарялу с существованием вещества в каком-либо одном агрегатном состоянии при определенных условиях оно может находиться в равновесии в контактирующих пространственных областях, разделенных поверхностями раздела, одновременно в нескольких состояниях, называемых в этом случае **фазами** вещества. При равновесии фаз их температуры и давления в них совпадают. Правило фаз, выведенное в 1876 г. Дж. У. Гиббсом, устанавливает число $\nu_* = n - \varphi + k$ параметров состояния при их общем числе n, которые можно изменять независимо, сохраняя неизменным число φ существующих в равновесии фаз вещества, состоящего из k компонентов. Для однокомпонентного (индивидуального) вещества (k = 1) при n = 2 (температура T и давление p) существует определенное сочетание значений $T_{\tau\tau}$ и $p_{\tau\tau}$ (тройная точка), при котором в равновесии могут находиться три $(\varphi = 3)$ фазы (например, пар, вода, лед). На диаграмме состояния такого вещества (рис. 1.2) из этой точки выходят три кривые, разделяющие области существования каждого состояния. Равновесие двух ($\varphi = 2$) фаз возможно при независимом изменении в определенных пределах лишь одного ($\nu_* = 1$) параметра состояния. При подводе к веществу теплоты точки на кривой 1 соответствуют процессам сублимации (возгонки), на кривой 2 – плавлению твердого тела с кристаллической структурой, а на кривой 3 — испарению жидкости. Эти процессы называют **фазовым** переходом. На кривой 3 отмечена критическая точка с координатами $T_{\rm kt}$ и $p_{\rm kt}$, которая соответствует исчезновению различия в физических свойствах жидкого и газообразного состояния индивидуального вещества. Некоторые индивидуальные вещества имеют несколько равновесных фаз в одном агрегатном состоянии (например, углерод имеет две разновидности кристаллической структуры в виде алмаза и графита). В этом случае может быть несколько тройных точек. Для многокомпонентных веществ вид диаграммы состояния существенно усложняется, поскольку дополнительными аргументами становятся концентрации компонентов.



Рис. 1.2

1.2. Газообразное состояние

Любое вещество можно перевести в газообразное состояние, подобрав соответствующие значения параметров состояния: абсолютной температуры T и давления p (см. рис. 1.2). В связи с тем что область существования газообразного состояния очень общирна, свойства газов при изменении значений T и p меняются в широких пределах. Так, в нормальных условиях (при T = 293 К и атмосферном давлении $p \approx 0,1$ МПа) плотность газа примерно в 1 тыс. раз меньше плотности того же вещества в твердом или жидком состоянии, а при параметрах состояния, соответствующих критической точке; плотность большинства газов возрастает более чем в 100 раз.

Количественно основные свойства газов удается описать при помощи математических моделей (MM) молекулярно-кинетической теории, в соответствии с которой газ рассматривают как совокупность слабо взаимодействующих частиц, находящихся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении (французское слово gaz предположительно происходит от греческого «хаос»). Такие MM дают достаточно надежные результаты в случае, когда среднее расстояние между частицами заметно превосходит (минимум на порядок) радиус области, в которой проявляют себя силы Ван-дер-Ваальса, что характерно для довольно разреженных газов. Тогда объем, занятый газом, превосходит минимум на три порядка тот условный объем, в пределах которого отмечается существенное влияние этих сил. Поэтому можно принять объем частиц газа пренебрежимо малым и рассматривать их как материальные точки, что соответствует MM совершенного газа.

При тепловом равновесии совершенного газа все направления движения его частиц равновероятны, а их скорости подчиняются распределению Максвелла в виде зависимости n/n_{Σ} от скорости v, где

n — число частиц, имеющих скорость v, а n_{Σ} — число всех частиц. Большинство частиц имеют значения скорости, близкие к наиболее вероятному значению $v_{\text{H.B}}$, которое соответствует максимуму этого распределения при фиксированной температуре и для молекул азота (рис. 1.3) при T = 293 К составляет $v'_{\text{H.B}} = 417$ м/с, а при T = 773 К $v''_{\text{H.B}} = 688$ м/с. Однако существует некоторая часть молекул, которые имеют заметно меньшие и бо́льшие значения



Рис. 1.3
скорости. Распределение Максвелла устанавливает связь средней квадратичной скорости $\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$ частицы газа и его температуры в виде зависимости от T средней кинетической энергии одной частицы:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}k_{\rm B}T,\tag{1.1}$$

где m — масса частицы газа; $k_{\rm B} \approx 1,38 \cdot 10^{23} \, \text{Дж/K}$ — постоянная Больцмана. Например, для молекул азота $\overline{v} = 509 \, \text{м/c}$ при $T = 293 \, \text{K}$ и $\overline{v} = 840 \, \text{м/c}$ при $T = 773 \, \text{K}$.

Рассматривая давление газа в сосуде как действие ударов его частиц на стенки сосуда, равное импульсу, передаваемому в единицу времени на единицу площади, можно записать $p = N_V m \overline{v^2}/3$, где N_V — число частиц в единице объема. Отсюда с учетом (1.1) получим уравнение состояния совершенного газа $p = N_V k_{\rm B} T$. Записанное для одного моля, оно известно как уравнение Клапейрона — Менделеева

$$pV_{\mu} = R_{\mu}T,\tag{1.2}$$

где V_{μ} — объем одного моля; $R_{\mu} = k_{\rm B} N_A \approx 8,314 \frac{\Pi_{\rm M}}{K \cdot {}_{\rm MOЛЬ}}$ — универсальная газовая постоянная, N_A — число Авогадро.

Кинетические свойства газа — диффузию, вязкость, теплопроводность — молекулярно-кинетическая теория рассматривает как перенос его частицами массы, количества движения и энергии соответственно. Однако модель совершенного газа непригодна для анализа этих процессов, поскольку в них определяющую роль играют столкновения частиц и их размеры, влияющие на частоту столкновений. Поэтому вводят условный диаметр d частицы, связанный соотношением $\tilde{l} =$ $= (\sqrt{2}N_V \pi d^2)^{-1}$ со средней длиной \tilde{l} ее свободного пробега, т.е. со средним расстоянием, проходимым частицей между двумя ее последовательными столкновениями в условиях термодинамического равновесия газа. Из анализа вероятности столкновения частицы, имеющей скорость v, и частицы с произвольной скоростью следует длина свободного пробега [152]

$$l_{v} = 4\bar{l}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^{2}}{v^{2}}}{\Psi\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{v}{\bar{v}}\right)} = 4\frac{\frac{v^{2}}{\bar{v}^{2}}}{\sqrt{\pi^{3}}d^{2}N_{V}\Psi\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{v}{\bar{v}}\right)},$$
(1.3)

$$\Psi(x) = xe^{-x^2} + (2x+1)\int_0^x e^{-y^2} dy$$

где

Эффект вязкости проявляется при изменении скорости в направлении, перпендикулярном макроскопическому движению, т.е. когда слои газа движутся относительно друг друга. Тогда благодаря хаотическому движению частиц газа между слоями происходит обмен количеством движения: более медленные слои ускоряются, а более быстрые замедляются. Если частицы газа считать упругими сферами диаметром d, скорость v которых определяется лишь их последним столкновением, то для *динамической вязкости* газа можно получить [152]

$$\mu_D = \frac{4\pi N_V m}{3} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty l_v v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Отсюда с учетом (1.3) имеем

$$\mu_D=rac{2m\overline{v}}{3\sqrt{\pi}d^2}\int\limits_0^\infty rac{x^5e^{-x^2}}{\Psi(x)}\,dx$$

Это соотношение не учитывает влияние предыдущих столкновений частиц на процесс переноса количества движения. Более точная модель дает $\mu_D = 0.461 \frac{m\bar{v}}{\sqrt{2\pi d^2}}$. Таким образом, вязкость не зависит от давления p, что верно для достаточно разреженных газов. Если в последнем равенстве d выразить через \bar{l} , то получим

$$\mu_D = 0.461 \frac{m\overline{v}\overline{l}}{N_V} = 0.461 \rho \overline{v}\overline{l}, \qquad (1.4)$$

где $\rho = m/N_V$ — плотность газа.

Аналогично модели, описывающей эффект вязкости газа, можно построить модель, описывающую перенос энергии частицами газа из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой, что приводит к выражению для *теплопроводности газа* $\lambda_{\Gamma}^{(T)} = N_V \bar{v} l_v c'_v$, где c'_v — теплоемкость частицы газа при его постоянном объеме. Эта формула учитывает лишь энергию, связанную с поступательным движением частицы, и не учитывает информацию об обмене энергией между поступательными и вращательными степенями свободы для многоатомных молекул газа. Для таких молекул распределение энергии между вращательными и поступательными степенями свободы происходит довольно быстро, а передача энергии на колебательные степени свободы, число которых зависит от структуры молекул, как правило, заметно запаздывает. Это запаздывание можно приближенно описать уравнением релаксационного типа $t_k^* \frac{de_k}{dt} = \overline{e_k} - e_k$, где t_k^* — время релаксации, характеризующее в данном случае темп перераспределения энергии; e_k — энергия k-й степени свободы молекулы, соответствующая k-й форме ее собственных колебаний; t — время; $\overline{e_k}$ — равновесное значение этой энергии. Отметим, что для поступательных степеней свободы Дж. К. Максвеллом была предложена формула $t_n^* = \mu_r/p$, которая для воздуха при T = 273 К и $\mu_r = 0,00172 \, \Pi a \cdot c$ дает значение $t_n^* = 1,7 \cdot 10^{-10}$ с.

Процесс диффузии в газе без примесей приводит к выравниванию параметров его состояния в занимаемом объеме и носит название самодиффузии. При наличии примесей в газах или при смеси газов диффузия способствует выравниванию в объеме их концентраций. Коэффициент диффузии $D_{\rm r}$ в газе устанавливает связь между средним значением расстояния, проходимого частицей газа при ее хаотическом движении, и временем [148]. В случае самодиффузии при интервале времени t^* между столкновениями для этого расстояния имеем $\bar{l} = \bar{v}t^*$. Поэтому $D_{\rm r} \sim \bar{l}/t^* = \bar{l}\bar{v}$ (более точно $D_{\rm r} = \frac{1}{3}\bar{l}\bar{v}$). Так как $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ и $\bar{l} \sim 1/p$, то $D_{\rm r} \sim \sqrt{T}/p$.

В отличие от совершенного газа в случае *реального газа* силы взаимодействия оказывают существенное влияние. Для описания свойств реального газа применяют различные уравнения состояния [152], отличающиеся от (1.2), например *уравнение Ван-дер-Ваальса*

$$\left(p + a_1/V_{\mu}^2\right)\left(V_{\mu} - b_1\right) = R_{\mu}T, \qquad (1.5)$$

где a_1/V_{μ}^2 — внутреннее давление, обусловленное действием сил притяжения между частицами газа; $b_1 = \frac{2}{3}\pi d^3 N_A$ — поправка на собственный объем частиц, учитывающая действие сил отталкивания между ними. Если известна зависимость энергии $\Pi_{np}^*(x)$ сил притяжения от расстояния x между двумя частицами, то

$$a_1 = -2\pi N_A^2 \int\limits_d^\infty \Pi^*_{\rm np}(x) x^2 \, dx.$$

На практике часто используют полученные экспериментально зависимости *сжимаемости* $\beta_V = -\frac{1}{V_{\mu}} \frac{\Delta V_{\mu}}{\Delta p}$ от *p* и *T*. Для совершенного газа с учетом (1.2) получаем $\beta_V = 1/p$, т.е. β_V не зависит от *T*. Теоретически наиболее обоснованным является *вириальное уравнение состояния* [147] $pV_{\mu} = RT(1 + B/V_{\mu} + C/V_{\mu}^2 + ...)$, в котором коэффициенты соответствуют парным (*B*), тройным (*C*) и более высокого порядка (для последующих коэффициентов) соударениям частиц газа.

1.3. Жидкость

Жидкостью называют агрегатное состояние вещества, промежуточное между газообразным и твердым состояниями: подобно газу она принимает форму заполняемого сосуда и ее свойства при отсутствии внешних воздействий обычно не зависят от направления, т.е. жидкость обладает изотропией, а подобно твердому телу она сохраняет свой объем, образует поверхность раздела с газообразной средой, обладает некоторой прочностью на разрыв [148]. По химическому составу различают однокомпонентные (или чистые) жидкости и многокомпонентные смеси (растворы).

Если при равновесии фаз вещества в жидком и газообразном состояниях, соответствующих точкам на кривой 3 (см. рис. 1.2), структуры молекул жидкости и газа одинаковы, то такую жидкость называют нормальной. Молекулы H₂O (воды) за счет возникновения дополнительных связей объединяются по мере понижения температуры в группы по две, три, а при затвердевании воды — по четыре молекулы [152]. Жидкости с такой особенностью называют ассоциированными. Группы со значительным числом объединенных молекул образуют жидкие кристаллы с зависящими от направления свойствами, т. е. обладающие анизотропией. Наконец, существуют так называемые квантовые жидкости (например, жидкий гелий), которые при низких температурах обладают сверхтекучестью.

У жидкости расстояние между молекулами значительно меньше, чем у газа. Если в (1.5) для реального газа предполагается $b_1 \ll V_{\mu}$, то для жидкости $b_1 \sim V_{\mu}$, а в критической точке $b_1 \approx V_{\mu}/2$ [152]. Поэтому взаимодействие между молекулами жидкости существенно сильнее, что обусловливает наличие у нее поверхностного натяжения на границе раздела с любой другой средой. Даже небольшое уменьшение расстояний между молекулами жидкости приводит к появлению значительных сил взаимного отталкивания, что объясняет ее малую сжимаемость.

В пределах сравнительно малых объемов жидкости существует ближний порядок в расположении соседних молекул, которые совершают тепловые колебания относительно положений равновесия со средним периодом t_0^* , близким к периодам колебаний атомов в кристаллической решетке твердого тела, и с амплитудой, определяемой объемом, предоставляемым молекуле соседними молекулами. Через интервалы времени $t^* \gg t_0^*$ эти положения равновесия скачкообразно и хаотически смещаются на расстояния порядка 10^{-10} м [152]. Такие скачки связаны с преодолением потенциального барьера высотой П*, называемой энергией активации. Продолжительность t^* пребывания молекулы в ее временном положении равновесия уменьшается с ростом температуры T пропорционально величине $\exp\left(\frac{\Pi^*}{k_{\rm B}T}\right)$, где $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана. Для низкомолекулярных жидкостей $t^* \approx 10^{-12} \dots 10^{-11}$ с, а для высокомолекулярных и сильновязких t^* значительно больше. Если характерное время внешнего воздействия велико по сравнению с t^* , то за это время частицы много раз перемещаются из одного положения равновесия в другое, что проявляется в текучести жидкости. Если же характерное время внешнего воздействия или его период изменения малы по сравнению с t^* , то молекулы жидкости не успевают изменить своего положения и жидкость не проявляет свойства текучести.

1.4. Твердое аморфное тело

Твердым телом называют агрегатное состояние вещества, характеризуемое стабильностью формы и тепловым движением атомов, совершающих малые колебания относительно своих положений равновесия. Различают твердые аморфные, не имеющие точки плавления и обычно обладающие изотропией свойств, и твердые кристаллические тела. При повышении температуры вещество в аморфном состоянии размягчается и переходит в жидкое состояние постепенно, что обусловлено отсутствием у него присущей кристаллам строгой периодичности в расположении атомов, ионов, молекул и их групп в объемах, размеры которых велики по сравнению с межатомными расстояниями. Но у вещества в аморфном состоянии существует согласованность в расположении соседних частиц (ближний порядок). С увеличением расстояния между частицами эта согласованность исчезает и на больших расстояниях порядок «размывается», переходит в «беспорядок». Ближний порядок характерен и для жидкостей, но в жидкости соседние частицы интенсивно обмениваются местами. Однако такой обмен затрудняется по мере возрастания вязкости жидкости, поэтому твердое аморфное тело можно рассматривать как переохлажденную жидкость с весьма большой вязкостью. Учитывая это, аморфное состояние некоторых металлов и полупроводников, имеющих в исходном состоянии кристаллическую структуру, можно получить при очень быстром охлаждении расплава этих веществ, как бы «замораживая» неупорядоченное расположение атомов.

Примером твердых тел в аморфном состоянии служат **полимеры**, состоящие из макромолекул, включающих большое число атомов, соединенных между собой химическими связями и образующих, как правило, повторяющиеся сегменты (мономеры). Многократное повторение мономеров в макромолекулах и дало название этому виду материалов. Различают линейные (или цепные) и разветвленные макромолекулы, а также умеренно сшитые (типа резин), когда возникает химическая (ковалентная) связь между атомами, принадлежащими различным макромолекулам. Полимеры с умеренно сшитыми макромолекулами обладают большей жесткостью, чем полимеры с линейными макромолекулами, лишенными поперечных связей. Наряду с неупорядоченным расположением макромолекул полимеры первого типа могут образовывать некоторое подобие кристаллической структуры, стабильность которой мала, поскольку определяется силами Ван-дер-Ваальса.

Число способов упаковки макромолекул в полимере очень велико. Поэтому свойства полимеров весьма разнообразны и существенно зависят от взаимного расположения макромолекул. При внешних тепловых и механических воздействиях структура полимера меняется в результате серии элементарных движений отдельных сегментов, приводящих к изменению конфигурации макромолекул. Растянутая и затем предоставленная самой себе линейная макромолекула за некоторое время порядка t^* , называемое временем структурной релаксации, приобретает наиболее вероятную форму клубка, соответствующую минимуму энергии межатомного взаимодействия. Чтобы растянуть такой клубок, требуется время того же порядка t^* . Подвижность сегментов при их взаимодействии с соседними макромолекулами уменьшается, что вызывает увеличение t^* .

Разнообразие структуры макромолекул и возможных элементарных движений составляющих их сегментов приводит к наличию спектра значений t_i^* , $i = \overline{1, N}$, где N может быть достаточно большим. С увеличением температуры T сегменты становятся более подвижными, поэтому значения t_i^* уменьшаются, причем $t_i^* = B_i \exp\left(\frac{\Pi_i^*}{k_{\rm B}T}\right)$, где B_i — предэкспоненциальный множитель; Π_i^* — энергия активации *i*-го релаксационного процесса, определяющая порог его чувствительности к внешнему механическому воздействию; $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана [8]. Для линейных макромолекул $B_i \approx 10^{-13} \dots 10^{-5}$ с, $\Pi_i^* \approx 30 \dots 125 \frac{\kappa \Pi m}{Montex}$, а $t_i^* \approx 10^{-7} \dots 10^9$ с.

В зависимости от значения температуры полимеры могут находиться в трех основных физических состояниях — стеклообразном, высокоэластичном и вязкотекучем. С каждым из этих состояний связан определенный комплекс физических свойств полимера.

На рис. 1.4 приведены зависимости деформации ε от абсолютной температуры T для полимера с линейными макромолекулами (кривая 1), кристаллической структурой (кривая 2) и умеренно сшитыми макромолекулами (кривая 3), а римские цифры *I*, *II* и *III* соответствуют зонам стеклообразного, высокоэластичного и вязкотекучего состояний.



Рис. 1.4

Эти зависимости получены при нагреве с заданной скоростью образца полимера, нагруженного постоянной растягивающей силой. При низкой температуре все полимеры деформируются подобно обычному упругому твердому телу, причем модуль продольной упругости может находиться в пределах 0,2...5,0 ГПа. Такая деформация связана в первую очередь с изменением средних межатомных и межмолекулярных расстояний в полимере. При температуре выше температуры стеклования Т_{ст} наряду с упругой появляется обратимая высокоэластичная деформация, которая вызвана изменением конфигурации макромолекул за счет относительного поворота сегментов и может превосходить упругую деформацию на три порядка. Повышение температуры текучести Т_{тек} приводит к вязкому течению с накоплением необратимой деформации, связанной с относительным смещением макромолекул (это обстоятельство важно в технологическом отношении, так как позволяет осуществить процесс формования изделий из полимерного материала). Отметим, что при разгрузке образца упругая деформация исчезает практически мгновенно, а высокоэластичная деформация уменьшается постепенно. При этом макромолекулы под действием теплового возбуждения стремятся вернуться в исходное положение и принять энергетически наиболее выгодную конфигурацию, соответствующую минимальному запасу потенциальной энергии.

Кривая 1 на рис. 1.4 свидетельствует о том, что соответствующий полимер с увеличением температуры проходит все физические состояния. Если линейные макромолекулы образуют кристаллическую структуру, то наряду с ней в полимере обычно присутствуют и неупорядоченные макромолекулы, которые при $T > T_{\rm cr}$ переходят в высокоэластичное состояние и вносят свой вклад в полную деформацию, понижая модуль продольной упругости (кривая 2). При $T > T_{\rm кр}$ кристаллическая структура разрушается и в зоне II кривая 2 почти скачкообразно достигает кривой 1. В случае умеренно сшитых макромолекул дополнительные связи препятствуют относительному смещению макромолекул. Поэтому при повышении температуры вязкого течения не наступает. Такой полимер «не замечает» температуры текучести $T_{\text{тек}}$ (кривая 3), и зона высокоэластичного состояния расширяется вплоть до границы химического разложения полимера при температуре T_x .

Следует подчеркнуть, что для полимеров (как типичных представителей твердых аморфных тел) микроструктура и процессы, происходящие на микроуровне, являются определяющими при формировании их механических и теплофизических свойств, проявляемых на макроуровне, т. е. в рамках представлений о материале как о сплошной среде. Поэтому микроструктуру и микромеханизмы протекающих в полимерах процессов необходимо учитывать при построении математических моделей, описывающих поведение таких материалов при внешних воздействиях.

1.5. Твердое кристаллическое тело

Для твердого кристаллического тела характерна пространственная периодичность в расположении равновесных состояний атомов, относительно которых они совершают колебания, и наличие точки плавления — температуры перехода твердого тела в жидкое состояние. Линии, проходящие через равновесные положения атомов, образуют так называемую кристаллическую решетку, для описания которой достаточно задать размещение атомов в ее элементарной ячейке, поскольку параллельным переносом (трансляцией) этой ячейки можно воссоздать любую область решетки. На рис. 1.5 представлены элементарные ячейки некоторых типов кристаллических решеток: а объемноцентрированной кубической (ОЦК); б — гранецентрированной кубической (ГЦК); в — гексагональной плотноупакованной (ГПУ). Характерные размеры элементарной ячейки определяют в системе координат, учитывающей симметрию расположения узлов кристаллической



Рис. 1.5

решетки. Оси такой системы называют кристаллографическими. Для перечисленных типов решеток эти оси образуют прямоугольную систему координат Ox₁x₂x₃.

Структура кристаллической решетки определяется равновесием сил межатомного взаимодействия. Эти силы быстро убывают с увеличением расстояния между атомами, при этом каждый атом взаимодействует в основном с ближайшими соседними атомами. Число $N_{\rm k}$ ближайших соседних атомов (координационное число) для ОЦК- и ГЦК-решеток равно 8 и 12 соответственно, а для ГПУ-решетки $N_{\rm k} = 6$ при $c/a > \sqrt{8/3}$ и $N_{\rm k} = 12$ при $c/a = \sqrt{8/3}$.

Сближению атомов в кристаллической решетке препятствуют силы отталкивания, существенно возрастающие при соприкосновении электронных оболочек атомов. Притяжение между атомами может определяться несколькими типами так называемой межатомной связи. Ковалентная связь возникает в результате обобществления валентных электронов парой соседних атомов. Это повышает вероятность пребывания электронов в промежутке между ядрами атомов, увеличивает плотность «электронного облака», которое как бы стягивает положительно заряженные ядра. Металлическая связь по физической природе сходна с ковалентной. Внешние валентные электроны в атомах металлов сравнительно слабо связаны с ядром и свободно перемещаются в кристаллической решетке, образуя так называемый электронный газ. Атомы при этом превращаются в положительно заряженные ионы, которые электростатически взаимодействуют с электронным газом. Ионная связь обусловлена присоединением одним атомом валентных электронов другого атома и электростатическим взаимодействием образовавшихся при этом разноименно заряженных ионов.

Классификация кристаллов по типам связи условна, поскольку во многих случаях наблюдается комбинация различных типов связи. Например, в интерметаллидах (химических соединениях металлов: Al₂Cu, MgZn₂, Al₂MgCu и др.) одновременно могут действовать валентная и металлическая связи. В присутствии атомов водорода, ядро которого слабо связано с электроном, возникает так называемая водородная связь, имеющая энергию взаимодействия $(1...5) \times$ $\times 10^6$ Дж/моль [148]. Универсальным типом является связь за счет сил *Ван-дер-Ваальса*, которые возникают между электрически нейтральными частицами. В частности, этим типом связи можно объяснить существование так называемых молекулярных кристаллов и кристаллов затвердевших инертных газов. Вследствие малой энергии взаимодействия такие кристаллы имеют сравнительно низкую температуру плавления, большие значения температурного коэффициента линейного расширения, большую сжимаемость и малую твердость.

Тепловое и механическое воздействия на кристалл приводят к изменению расстояний между узлами кристаллической решетки. Так как атомы в решетке взаимодействуют главным образом со своими ближайшими соседями, для выяснения влияния этих воздействий с качественной стороны достаточно рассмотреть взаимодействие лишь одной пары атомов в линейной цепочке.

Зависимость потенциальной энергии П^{*} взаимодействия пары атомов в линейной цепочке от расстояния r между ними имеет характер, изображенный на рис. 1.1, причем значение П^{*}₀ определяет работу, которую необходимо совершить для разрушения этой цепочки, и соответствует расстоянию r_0 , на котором суммарная сила взаимодействия $f(r) = \frac{d\Pi^*(r)}{dr}$ равна нулю (рис. 1.6).



Рис. 1.6

Вследствие асимметрии кривой $\Pi^*(r)$ относительно точки $r = r_0$ при механическом воздействии (растяжении или сжатии цепочки) внешняя сила и отклонение $\Delta r = r - r_0$ атома от положения равновесия связаны нелинейной зависимостью, причем жесткость $C^\circ = df/dr = d^2\Pi^*/dr^2$ связи между атомами уменьшается при растяжении и возрастает при сжатии цепочки по сравнению с жесткостью $C_0^\circ = d^2\Pi^*/dr^2|_{r=r_0}$ в положении равновесия. Это соответствует аналогичному изменению модулей упругости кристаллического твердого тела.

При повышении температуры T увеличиваются кинетическая энергия K_T^* теплового возбуждения атомов и амплитуда их колебаний относительно положений равновесия. В случае симметрии кривой $\Pi^*(r)$ в окрестности положения равновесия (штриховая линия на рис. 1.6) колебания были бы гармоническими и среднее положение атома в кристаллической решетке не зависело бы от температуры. Но вследствие асимметрии кривой $\Pi^*(r)$ колебания атомов ангармоничны и отклонения от положения равновесия $r = r_0$ неодинаковы ($\Delta r' > |\Delta r''|$). Поэтому среднее расстояние \bar{r} между ионами увеличивается, что приводит к температурному расширению кристаллического тела. Жесткость рассматриваемой линейной цепочки $C^{\circ}(\bar{r}) = df/dr|_{r=\bar{r}}$, соответствующая среднему расстоянию \bar{r} , уменьшается с повышением температуры, в связи с чем уменьшаются модули упругости кристаллического тела.

Для количественной оценки влияния теплового и механического воздействий на одномерную модель материала в виде линейной цепочки атомов используют методы классической статистической физики. Эти методы применимы к большинству металлов при температуре $T > T_D = \hbar \omega_D / k_B$, где T_D — характеристическая температура Дебая; $\hbar \approx 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка; $\omega_D = \bar{a}\sqrt[3]{6\pi^2 N_V}$ предельная круговая частота упругих колебаний кристаллической решетки; \bar{a} — усредненная скорость звука в кристаллическом теле; N_V — число атомов в единице объема; k_B — постоянная Больцмана. Такая температура достаточна для возбуждения почти всех возможных форм колебаний атомов в кристаллической решетке, когда справедлив закон Дюлонга — Пти для приходящейся на один атом теплоемкости $c'_v = 3k_B$ при постоянном объеме.

Используя функцию распределения Больцмана частиц по уровням энергии в виде $\psi_{\rm E}(\Delta r) = A_* \exp\left(-\frac{\Pi^*(\Delta r)}{kT}\right)$, где A_* — коэффициент пропорциональности,

$$\Pi^{*}(\Delta r) = -f_{1}\Delta r + \frac{C_{0}^{\circ}}{2}(\Delta r)^{2} - \frac{\gamma_{0}C_{0}^{\circ}}{r_{0}}(\Delta r)^{3} + \dots, \qquad (1.6)$$

 f_1 — внешняя сила, растягивающая линейную цепочку атомов; $6\gamma_0 = -\frac{r_0}{C_0^o} \frac{d^3 \Pi^*}{dr^3} \Big|_{r=r_0}$ (для большинства металлов $\gamma_0 \approx 1, 5...2, 5$), и усредняя отклонения Δr от положения равновесия, для *деформации* линейной цепочки атомов можно получить выражение [36]

$$\varepsilon = \frac{\Delta \overline{r}}{r_0} = \frac{1}{r_0} \frac{(1+6\overline{f}_1)f_1/C_0^\circ + (3+\overline{f}_1^*)^2\gamma_0 k_{\rm B}T/(r_0C_0^\circ)}{1+(3+\overline{f})\overline{f}_1^*},\qquad(1.7)$$

где $\overline{f}_1 = \gamma_0 f_1 / (r_0 C_0^\circ)$ и $\overline{f}_1^* = f_1^2 / (k_{\rm B} T C_0^\circ)$. При $f_1 = 0$ температурный коэффициент линейного расширения

$$\alpha_0^{(T)} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \bigg|_{f_1 = 0} = \frac{3\gamma_0 k_{\rm B}}{r_0^2 C_0^\circ}; \qquad (1.8)$$

для металлов $\alpha_0^{(T)} \sim 10^{-5} \, 1/\mathrm{K}.$

При отсутствии теплового воздействия $(T \to 0)$ предельным переходом из (1.7) для деформации ε цепочки атомов найдем $\varepsilon_0 = \Delta \overline{r}/r_0 = f_1/(r_0 C_0^\circ)$. В случае изотермического сжатия кристалла с кубической решеткой гидростатическим давлением p внешняя сила, действующая на каждую линейную цепочку, $f_1 = -pr_0^2$, а относительное изменение объема V кристалла при малых деформациях $\Delta V/V = 3\varepsilon_0 = -3pr_0/C_0^{\circ}$. Тогда модуль объемной упругости при изотермическом процессе деформирования $\varkappa_0 = -p/(\Delta V/V) = C_0^{\circ}/(3r_0)$ и вместо (1.8) получим

$$\alpha_0^{(T)} = \frac{\gamma_0 k_{\rm B}}{r_0^2 \varkappa_0}.$$
 (1.9)

Таким образом, C_0° и γ_0 можно выразить через макроскопические характеристики кристаллического материала \varkappa_0 и $\alpha_0^{(T)}$, измеряемые экспериментально.

Представим f_1 через условное напряжение $\sigma = f_1/r_0^2$ в цепочке атомов и приведем (1.7) с учетом (1.9) и выражения для \varkappa_0 к виду

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + 2\frac{\gamma_0\sigma}{\varkappa_0}\right)\frac{\sigma}{3\varkappa_0} + \alpha_0^{(T)}T\left(1 + \frac{\gamma_*^2}{27}\right)}{1 + \frac{\gamma_0\sigma}{\varkappa_0}\left(1 + \frac{\gamma_*}{9}\right)},\tag{1.10}$$

где $\gamma_* = \frac{(\sigma/\varkappa_0)^2}{\alpha_0^{(T)}T}$. При $\sigma \neq 0$ из (1.10) следует, что зависимость $\alpha^{(T)} = = \partial \varepsilon / \partial T$ от σ и T довольно слабая, так как величины σ/\varkappa_0 и $\alpha_0^{(T)}T$ одного порядка ($10^{-3}...10^{-2}$), но $\alpha^{(T)}$ с ростом T несколько увеличивается. В линейном приближении $\alpha^{(T)} \approx \alpha_0^{(T)}(1 - \gamma_0 \sigma/\varkappa_0)$, т.е. при растяжении $\alpha^{(T)}$ уменьшается, а при сжатии возрастает. Однако при $|\sigma|/\varkappa_0 < 10^{-2}$ температурную деформацию можно рассматривать независимо от деформации, вызванной механическим воздействием.

Величина, обратная производной $\partial \varepsilon / \partial \sigma$, характеризует относительное изменение жесткости кристаллического материала. Дифференцируя (1.10) по σ , в линейном приближении получим $\varkappa / \varkappa_0 = (\partial \varepsilon / \partial \sigma)^{-1} \approx \approx 1 - 2\gamma_0 \sigma / \varkappa_0 - 3\gamma_0 \alpha_0^{(T)} T$. Таким образом, жесткость материала уменьшается при растяжении и увеличивается при сжатии, но абсолютное изменение $\Delta \varkappa = \varkappa - \varkappa_0 = -2\gamma_0 \sigma$ модуля объемной упругости довольно мало́ по сравнению с \varkappa_0 . Для большинства металлов относительное изменение объема при нагреве от $T \approx 0$ до температуры плавления T_{nn} составляет $\Delta_{nn} = 3\alpha_0^{(T)}T_{nn} \approx (5...7) \cdot 10^{-2}$ [155], т. е. изменение \varkappa / \varkappa_0 во всем интервале $0 < T < T_{nn}$ температур оценивается в 10...15%. Однако модуль сдвига и модуль продольной упругости могут изменяться более существенно, так как с повышением температуры изменяется коэффициент Пуассона ν , роль которого не может быть учтена при рассмотрении взаимодействия атомов в линейной цепочке.

При растяжении цепочки атомов зависимость силы f от расстояния r является немонотонной (см. рис. 1.6). При $f_1 = 0$ из (1.6) следует, что

$$f = \frac{d\Pi^{*}(r)}{dr} = \frac{d\Pi^{*}(\Delta r)}{dr}\Big|_{f_{1}=0} = C_{0}^{\circ}\Delta r - 3\gamma_{0}C_{0}^{\circ}\frac{(\Delta r)^{2}}{r_{0}} = C_{0}^{\circ}r_{0}(1 - 3\gamma_{0}\varepsilon)\varepsilon$$

и $\partial f/\partial \Delta r = C_0^{\circ}(1-6\gamma_0\varepsilon)$, т.е. деформации $\varepsilon_* = r_*/r_0 - 1 = 1/(6\gamma_0)$ соответствует максимальное значение $f_* = C_0^{\circ}r_0/(12\gamma_0)$. Условное напряжение, разрывающее цепочку атомов, $\sigma_* = f_*/r_0^2 = \varkappa_0/(4\gamma_0)$, т.е. его значение примерно на порядок ниже значения \varkappa_0 . Величина $3\gamma_0\varepsilon = \varepsilon/(2\varepsilon_*)$ характеризует отклонение зависимости $f(\varepsilon)$ от линейной. Следовательно, модуль продольной упругости с погрешностью до 1% можно считать постоянным, если $|\varepsilon| \leq 0.01/(3\gamma_0) \approx 10^{-3}$.

Взаимодействие атомов в пространственной кристаллической решетке более сложное, чем в линейной цепочке. В частности, именно пространственным взаимодействием атомов можно объяснить поперечное сужение материала при растяжении. Например, в случае кубической решетки (см. рис. 1.5, a и δ) увеличение расстояния между атомами в направлении растяжения приводит к возникновению сил притяжения не только между атомами в линейных цепочках, но и между диагонально расположенными атомами (рис. 1.7, a и δ). Поэтому в соответствии с условием равновесия каждого атома в поперечном направлении должны возникнуть силы отталкивания, что возможно, когда атомы сближаются в этом направлении, т.е. происходит поперечное сужение материала.



Рис. 1.7

Строгий расчет пространственного взаимодействия атомов в кристаллической решетке возможен в предположении, что силы их взаимодействия центральные, а колебания около положения равновесия гармонические. Первое предположение означает, что силы притяжения и отталкивания между атомами действуют по направлениям, соединяющим точки, которые соответствуют положениям равновесия. Однако для металлов это предположение является довольно грубым. Поэтому результаты расчета часто не отвечают экспериментальным данным.

Учет ангармонизма колебаний атомов и отклонения их от линии, соответствующей положению равновесия, приводит к лучшему согласию между теорией и экспериментом, но соответствующие *математиче*- ские модели существенно усложняются. Практически более целесообразным для описания упругого поведения твердого кристаллического тела при механическом воздействии является экспериментальное определение совокупности необходимых характеристик. Реакцию кристаллического материала на тепловые воздействия также можно описать с помощью экспериментально определенных теплоемкости, температурного коэффициента линейного расширения и теплопроводности.

1.6. Термоупругие и теплофизические свойства кристаллов

Большинство твердых тел с кристаллической структурой являются поликристаллическими, т. е. состоят из множества отдельных хаотически ориентированных мелких кристаллических зерен. Отдельно взятое кристаллическое зерно в твердом поликристаллическом теле можно рассматривать как кристалл с однородной по его объему и определенно ориентированной в пространстве *кристаллической решеткой*. Свойства и ориентация отдельных зерен, их форма и размеры влияют на формирование усредненных характеристик поликристаллического материала (см. **5.4**).

Каждый атом в кристаллической решетке взаимодействует в основном лишь со с ближайшими соседними атомами, расположенными на расстоянии порядка 10^{-10} м. Механика *сплошной среды* (в частности, теория упругости) оперирует заведомо бо́льшими расстояниями. Это дает возможность пренебречь радиусом действия межатомных сил и считать, что силы, действующие на какую-либо часть кристалла со стороны окружающих частей, передаются непосредственно через точки, лежащие на поверхности раздела. Такое допущение позволяет ввести понятие *вектора напряжения* как векторной суммы сил взаимодействия между частями кристалла, приходящейся на единицу площади поверхности раздела.

Если в кристалле выделить поверхность S (штриховая линия на рис. 1.8, a), то через фиксированную точку $M \in S$ (рис. 1.8, δ) на этой поверхности можно провести множество плоскостей, каждой из которых в окрестности данной точки будет соответствовать свой вектор p(M)напряжения. Проекции $p_i(M)$ этого вектора на оси Ox_i прямоугольной системы координат при помощи (3.47) можно выразить через компоненты $\sigma_{ji}(M)$ (i, j = 1, 2, 3) тензора напряжений $\hat{\sigma}$ и направляющие косинусы n_j единичного вектора n нормали к этой площадке.

Механическое воздействие на кристалл вызывает искажение конфигурации кристаллической решетки. При умеренной интенсивности



Рис. 1.8

такого воздействия искажения решетки носят упругий характер, т.е. ее конфигурация восстанавливается после снятия нагрузки. Возникающие искажения в окрестности каждой точки $M \in S$ можно описать при помощи *тензора* $\hat{\epsilon}$ *малой деформации* с компонентами $\epsilon_{ij}(M)$. Тепловое воздействие на кристалл также вызывает искажение решетки, описываемое компонентами $\epsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}^{(T)} \Delta T(M)$ *тензора* $\hat{\epsilon}^{(T)}$ *температурной деформации*, в линейном приближении пропорциональными отклонениям $\Delta T(M) = T(M) - T_0$ температуры T(M) в точке $M \in S$ от температуры T_0 естественного состояния, в котором решетка не имеет искажений, а коэффициентами пропорциональности являются компоненты $\alpha_{ij}^{(T)}$ *тензора* $\hat{\alpha}^{(T)}$ *коэффициентов температурной деформации*.

Благодаря взаимодействию атомов в пространственной кристаллической решетке каждая компонента тензора напряжений может влиять на каждую компоненту тензора деформации, причем связь между компонентами σ_{ij} , ε_{ij} и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ зависит от свойств кристалла и структуры его кристаллической решетки. В предположении линейно-упругого поведения кристалла эту связь представляют в виде, аналогичном (5.2) для линейной анизотропной термоупругой среды, но записанном в кристаллографических осях Ox'_k решетки рассматриваемого кристалла (здесь и далее использовано правило суммирования по одинаковым индексам):

$$\varepsilon_{kl} = S_{klmn}\sigma_{mn} + \alpha_{kl}^{(T)}\Delta T, \quad k, l, m, n = 1, 2, 3,$$
 (1.11)

где S_{klmn} — компоненты *тензора* $\hat{\mathbf{S}}$ *коэффициентов податливости* кристалла. Обратным по отношению к (1.11) является равенство

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} \left(\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}^{(T)} \Delta T \right). \tag{1.12}$$

Здесь C_{klmn} — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{C}}$ коэффициентов упругости кристалла, причем

$$C_{klmn}S_{mnij} = I_{klij} = \frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}), \qquad (1.13)$$

где I_{klij} — компоненты единичного тензора $\widehat{\mathbf{I}}_4$ четвертого ранга; δ_{kl} — символ Кронекера.

Тензоры с компонентами $\alpha_{mn}^{(T)}$ и S_{klmn} (или C_{klmn}) характеризуют термоупругие свойства кристалла. Изменение ΔT температуры кристалла связано с затратами энергии, которая перераспределяется между колеблющимися атомами в кристаллической решетке. Поглощаемая единицей объема энергия равна $c_V \Delta T$, где $c_V - o \delta \varepsilon$ емная теплоемкость, значение которой, строго говоря, зависит от условий механического воздействия на кристалл (см. 5.1). При неоднородном распределении температуры T(M) ($M \in V$) в объеме V кристалла путем обмена энергией между колеблющимися атомами происходит перенос тепловой энергии из областей с более высокой температурой в области с более низкой температурой. Интенсивность этого обмена характеризуют соотношением

$$q_k = -\lambda_{kl}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x'_l},$$
 или $q = -\widehat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T,$ (1.14)

где q_k — проекции на оси Ox'_k вектора q плотности теплового потока; $\lambda_{kl}^{(T)}$ — компоненты **тензора теплопроводности** $\widehat{\lambda}^{(T)}$ кристалла; ∇ — $\partial u \oint \phi$ еренциальный оператор Гамильтона (действие этого оператора на функцию, описывающую распределение температуры, определяет **градиент температуры** ∇T с проекциями $\partial T/\partial x'_k$). Объемная теплоемкость и тензор теплопроводности характеризуют теплофизические свойства кристалла.

Из (3.12) следует симметричность тензора $\hat{\varepsilon}$, что, в свою очередь, согласно (1.11), приводит к симметричности тензора второго ранга $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)}$, который можно привести к главным осям и которому можно поставить в соответствие диагональную матрицу третьего порядка. Некоторые из главных значений тензора $\widehat{\alpha}^{(T)}$ могут быть отрицательными, но равный сумме трех главных значений температурный коэффициент объемного расширения $\alpha_V^{(T)} > 0$. У кристаллов с объемноцентрированной (ОЦК) и гранецентрированной (ГЦК) кубическими кристаллическими решетками или с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой главные оси совпадают с ортогональными кристаллографическими осями (см. рис. 1.5). Для кристаллов с кубической решеткой $\widehat{\alpha}^{(T)}$ является шаровым тензором, поскольку направления вдоль этих осей равноценны. Поэтому кристаллы с ОЦКи ГЦК-решетками обладают изотропией по отношению к температурной деформации. У кристаллов с ГПУ-решеткой главное значение, соответствующее оси Ох'3, в общем случае отлично от двух остальных равных между собой главных значений, что гарантирует изотропию этих кристаллов лишь по отношению к направлениям, параллельным основанию элементарной ячейки. При изменении температуры сфера, выделенная в кристалле, в случае ОЦК- и ГЦК-решеток сохраняет свою форму, а в случае ГПУ-решетки переходит в эллипсоид вращения относительно оси Ox'_3 .

Тензор второго ранга $\widehat{\lambda}^{(T)}$ также является симметричным, так как при сопоставлении этого тензора с матрицей А третьего порядка, используя (1.14) и свойство коммутативности скалярного произведения, для произвольного вектора ∇T можно записать

$$(\nabla T)^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \nabla T = -(\nabla T)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q} = -\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \nabla T = (\mathrm{A} \nabla T)^{\mathrm{T}} \nabla T = (\nabla T)^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \nabla T,$$

где $(\cdot)^{T}$ — символ транспонирования. Сравнивая левую и правую части этого равенства, заключаем, что $A = A^{T}$, т. е. $\lambda_{kl}^{(T)} = \lambda_{lk}^{(T)}$. В главных осях структура тензоров $\widehat{\lambda}^{(T)}$ и $\widehat{\alpha}^{(T)}$ у кристаллов с ОЦК-, ГЦКи ГПУ-решетками одинакова, но все главные значения тензора $\widehat{\lambda}^{(T)}$ положительны в силу второго закона термодинамики (см. 4.3).

Тензоры четвертого ранга $\hat{\mathbf{S}}$ и $\hat{\mathbf{C}}$ имеют по 81 компоненте. Но так как тензоры $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)}$ симметричны, то число независимых компонент каждого из этих тензоров сокращается до 36, поскольку перестановка индексов в первой и второй паре не изменяет значения компоненты. Так, для тензора $\hat{\mathbf{C}}$ имеем $C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm}$, что позволяет сопоставить его с матрицей С шестого порядка с элементами $C_{pq} = C_{ijmn}, p, q = \overline{1, 6}$. Соответствие индексов этих элементов индексам компонент C_{ijmn} определено следующим образом:

іј или тп	11	22	33	23 или 32	13 или 31	12 или 21
р или q	1	2	3	4	5	6

Такому представлению тензора $\widehat{\mathbf{C}}$ отвечает представление тензора $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ в виде вектора $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^{\mathrm{T}}$, тензора $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в виде вектора $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^{\mathrm{T}}$ и тензора $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)}$ в виде вектора $\boldsymbol{\alpha}^{(T)} = (\alpha_{11}^{(T)} \ \alpha_{22}^{(T)} \ \alpha_{33}^{(T)} \ 2\alpha_{23}^{(T)} \ 2\alpha_{31}^{(T)} \ 2\alpha_{12}^{(T)})^{\mathrm{T}}$. Тогда вместо (1.12) запишем в матричной форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}^{(T)} \, \Delta T \right). \tag{1.15}$$

При отсутствии температурной деформации, используя (1.15) и свойства коммутативности скалярного произведения для произвольного вектора ε , можно записать $\varepsilon^{T}C\varepsilon = \varepsilon^{T}\sigma = \sigma^{T}\varepsilon = (C\varepsilon)^{T}\varepsilon = \varepsilon^{T}C^{T}\varepsilon$. Из сопоставления левой и правой частей этого равенства следует, что $C = C^{T}$, т. е. матрица C является симметрической, $C_{pq} = C_{qp}$, или $C_{ijmn} = C_{mnij}$. Таким образом, из 36 элементов этой матрицы лишь 21 элемент независим и соответствует 21 независимой компоненте тензора \hat{C} , характеризующего общий случай анизотропии кристалла по отношению к его упругим свойствам.

Тензор $\hat{\mathbf{S}}$ можно сопоставить с симметрической матрицей S шестого порядка, обратной матрице C. Из (1.15) получим, что $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}^{(T)} \Delta T$. Соответствие между индексами элементов S_{pq} матрицы S и индексами компонент S_{ijmn} тензора $\hat{\mathbf{S}}$ определено выше, но $S_{pq} = S_{ijmn}$ лишь в случае, когда и p, и q равны 1, 2 или 3. Если либо p, либо q равно 4, 5 или 6, то $S_{pq} = 2S_{ijmn}$, а если и p, и q равны 4, 5 или 6, то $S_{pq} = 4S_{ijmn}$.

В кристаллах с кубической решеткой все оси Ox'_k равноправны (см. рис. 1.5, *а* и *б*), и матрица S коэффициентов податливости содержит лишь три отличных от нуля независимых элемента:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}.$$
(1.16)

Такой же вид имеет и матрица С коэффициентов податливости, причем обращение матрицы S дает

$$C_{11} = \frac{S_{11} + S_{12}}{S_{\kappa}}, \quad C_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{\kappa}}, \quad C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, \quad S_{\kappa} = (S_{11} - S_{12})(S_{11} + 2S_{12}).$$

В этих равенствах буквы S и C можно поменять местами. Отличие параметра

$$\overline{S} = 2\frac{S_{11} - S_{12}}{S_{44}} = 2\frac{C_{44}}{C_{11} - C_{12}}$$

от единицы характеризует степень анизотропии упругих свойств кристаллов. Практически изотропными являются кристаллы вольфрама, близки к изотропным кристаллы алюминия.

Кристаллы с ГПУ-решеткой обладают высокой степенью симметрии относительно кристаллографической оси Ox'_3 (см. рис. 1.5, ϵ). Поэтому их упругие свойства в плоскости, перпендикулярной этой оси, являются изотропными, а матрица S коэффициентов упругости включает пять независимых ненулевых элементов:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix},$$
(1.17)

причем $S_{66} = (S_{11} - S_{12})/2$. Для перехода к матрице C, обратной матрице S, используют равенства [94]

$$C_{11} = \frac{S_{33}}{2S_{\rm r}} + \frac{1/2}{S_{11} - S_{12}}, \quad C_{12} = \frac{S_{33}}{2S_{\rm r}} - \frac{1/2}{S_{11} - S_{12}}, \quad C_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{\rm r}}, \quad C_{44} = \frac{1}{S_{44}},$$

где $S_r = (S_{11} + S_{12})S_{33} - 2C_{13}^2$, и обратно, если в этих равенствах буквы S и C поменять местами.

Различие в поведении кристаллов с ОЦК- и ГПУ-решетками проявляется при действии всестороннего давления p, вызывающего в кристалле напряженное состояние с компонентами $\sigma_{kl} = -p\delta_{kl}$, которому, согласно (1.11) при $\Delta T = 0$, соответствуют компоненты $\varepsilon_{kl} = S_{klmn}\sigma_{mn} = -pS_{klmn}\delta_{mn} = -pS_{klmm}$ тензора деформации. Тогда деформация в направлении вектора, заданного в кристаллографических осях направляющими косинусами n_k , будет равна $\varepsilon_{kl}n_kn_l = -pS_{klmm}n_kn_l$, а линейная сжимаемость кристалла в этом направлении —

$$\beta_n = -\frac{\varepsilon_{kl} n_k n_l}{p} = S_{klmn} n_k n_l = \sum_{\nu, \gamma=1}^3 S_{\nu\gamma} n_{\nu}^2,$$

поскольку для рассматриваемых типов кристаллических решеток из всех коэффициентов податливости S_{klmn} с двумя одинаковыми индексами во второй паре отличны от нуля только коэффициенты, имеющие одинаковые индексы и в первой паре (нормальные напряжения не влияют на деформации сдвига, если кристаллографические оси ортогональны). Так как $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, то для кристаллов с кубическими решетками с учетом (1.16) получаем $\beta_n = S_{11} + 2S_{12}$, т.е. линейная сжимаемость не зависит от направления. Для кристаллов с ГПУ-решетками с учетом (1.17) получаем $\beta_n = S_{11} + S_{12} + S_{13} - (S_{11} + S_{12} - S_{13} - S_{33})n_3^2$, т.е. линейная сжимаемость обладает осевой симметрией относительно оси Ox'_3 (см. рис. 1.5, ϵ). Сфера, выделенная в таком кристалле, под действием всестороннего давления переходит в эллипсоид вращения относительно этой оси, тогда как в случае кристаллов с кубическими решетками сфера сохраняет свою форму. Податливость кристаллов с кубическими решетками в направлении действия растягивающей или сжимающей силы равна [36] $S_n = S_{11} - S_{44}(\overline{S}-1)(n_1^2n_2^2 + n_2^2n_3^2 + n_3^2n_1^2)$, т.е. при $\overline{S} = 1$ она не зависит от направления. Вдоль ребра куба $S_n = S_{11}$, вдоль диагонали его грани $S_n = S_{11} - \frac{1}{4}S_{44}(\overline{S}-1)$, а вдоль диагонали куба $S_n = S_{11} - \frac{1}{3}S_{44}(\overline{S}-1)$. Для большинства металлов с ОЦК- и ГЦК-решетками $\overline{S} > 1$, но для кристаллов ванадия, молибдена, ниобия и некоторых других металлов $\overline{S} < 1$. Податливость кристаллов с ГПУ-решетками $S_n = S_{11}(1-n_3^2) + S_{33}n_3^4 + (2S_{13} + S_{44})n_3^2(1-n_3^2)$, т.е. зависит лишь от угла между направлением действия силы и осью Ox'_3 .

1.7. Несовершенства структуры кристаллов

Представление о том, что атомы в кристалле колеблются около строго фиксированных узлов кристаллической решетки, является идеализированным. Такая идеализация не мешает рассматривать свойства *твердых кристаллических тел* при сравнительно низких напряжениях и температурах, когда эти тела упруги. Но с увеличением температуры и напряжений необходимо учитывать наличие несовершенств структуры реальных кристаллов в виде точечных и линейных дефектов и искажений в зоне границ между кристаллическими зернами в поликристаллическом материале.

К точечным дефектам относят **вакансии** (не занятые атомами узлы кристаллической решетки) и внедренные в междоузлия атомы, а также искажения решетки основного вещества атомами примесей в сплавах типа **твердых растворов**. В зоне точечных дефектов возникает поле напряжений с запасом потенциальной энергии.

Относительная концентрация $C_{\rm B} = \exp\left(-\frac{U_{\rm B}}{k_{\rm B}T}\right)$ вакансий и внедренных атомов зависит от температуры T и энергии $U_{\rm B}$, требуемой для образования этих дефектов (здесь $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана). В первом приближении для вакансии $U_{\rm B}$ можно оценить по энергии, необходимой для удаления атома с поверхности кристалла путем разрыва $N_{\rm K}/2$ межатомных связей ($N_{\rm K}$ — координационное число решетки). Если каждая связь имеет энергию Π_0^* (см. 1.5), то $U_{\rm B} = \Pi_0^* N_{\rm K}/2$. Для атомов основного вещества, внедренных в объемноцентрированную (ОЦК) и гранецентрированную (ГЦК) кубические или в гексагональную плотноупакованную (ГПУ) решетки, энергия образования выше, чем для вакансий (например, для меди — в 3–4 раза). Поэтому в кристалле без примесей концентрация внедренных атомов существенно меньше концентрации вакансий.

Благодаря тепловому возбуждению точечные дефекты не остаются в кристалле неподвижными, они дрейфуют по его объему. Дрейф (или диффузия) точечных дефектов может происходить хаотически (самодиффузия) или же направленно в соответствии с градиентами концентрации дефектов, температуры или первого инварианта $I_{1\hat{\sigma}}$ тензора напряжений $\hat{\sigma}$. Вакансии и атомы примесей малых радиусов (по сравнению с радиусами атомов основного вещества) диффундируют в зоны сжатия, а внедренные атомы и атомы примесей больших радиусов — в зоны растяжения.

Скорость диффузии растет с увеличением температуры. При температуре, близкой к *точке плавления*, направленная диффузия вакансий, которую следует рассматривать как перенос вещества в обратном направлении, может заметно повлиять на деформирование материала во времени под нагрузкой, что необходимо учитывать при режимах его технологической обработки.

В отличие от точечных дефектов *дислокация* является линейным дефектом, поскольку искажения кристаллической решетки располагаются вдоль некоторой пространственной линии. Основные характеристики дислокаций рассмотрим применительно к простой кубической решетке.

Возникновение дислокации можно представить как результат частичного сдвига в кристаллической решетке под действием касательного напряжения τ , причем различают краевую (рис. 1.9, *a*) и винтовую (рис. 1.9, *b*) дислокации. Краевая дислокация имеет условное обозначение (рис. 1.10), в котором вертикальная черта указывает расположение лишнего слоя атомов, как бы вдвинутого в кристаллическую решетку, а горизонтальная соответствует расположению плоскости скольжения, в которой произошел частичный сдвиг (она обычно совпадает с плоскостями наиболее плотной упаковки атомов в решетке). Смещение слоев атомов вдали от искажения решетки определяется вектором Бюргерса b_{*}. Для простой кубической решетки модуль b_{*}



Рис. 1.9

вектора Бюргерса краевой дислокации с одним лишним атомным слоем (см. рис. 1.9, *a*) равен одному периоду решетки, а винтовой дислокации — шагу винтовой ломаной, которая образуется, если проследить за расположением атомов в зоне искажения (рис. 1.9, *в*). В общем случае дислокации могут иметь смешанную ориентацию с краевыми и винтовыми составляющими (см. рис. 1.10).



Лишний слой атомов искажает кристал-

лическую решетку в зоне краевой дислокации и создает поле самоуравновещенных внутренних напряжений. Вблизи кромки этого слоя

(ядра дислокации) искажения решетки настолько велики, что расположение атомов можно рассчитать только с учетом их энергии взаимодействия [56]. В области за пределами нескольких межатомных расстояний от ядра дислокации поле напряжений можно найти методами теории упругости. Если считать кристалл неограниченным и упругоизотропным, то функция напряжений, удовлетворяющая бигармоническому уравнению (5.38), записанному в полярных координатах



Рис. 1.11

 φ , r (рис. 1.11) в предположении плоского деформированного состояния ($\varepsilon_{zz} = 0$) будет равна [36] $\widetilde{F} = -Br(\ln r)\sin \varphi$, а компоненты тензора напряжений —

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \varphi^2} \right) = -\frac{B}{r} \sin \varphi,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} = -\frac{B}{r} \sin \varphi,$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = -2 \frac{\nu B}{r} \sin \varphi,$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} \right) = \frac{B}{r} \cos \varphi,$$

(1.18)

где B — коэффициент пропорциональности; ν — коэффициент Пуассона. При обходе вокруг линии краевой дислокации по замкнутому контуру составляющая вектора перемещения при $\varphi = 0$ имеет приращение, равное b_* . В этом случае $B = \frac{\mu b_*}{2\pi(1-\nu)}$, где μ — модуль сдвига.



Согласно (1.18) поле напряжений в окрестности краевой дислокации имеет разграниченные плоскостью скольжения зоны всестороннего сжатия и растяжения (рис. 1.12). Потенциальную энергию этого поля не удается вычислить строго, во-первых, в связи с трудностями установления истинного расположения атомов в ядре дислокации (при $r \rightarrow 0$) и, во-вторых, вследствие неопределенности размеров области, в пределах которой поле на-

пряжений остается невозмущенным другими дислокациями. В первом приближении потенциальную энергию П^{*}, приходящуюся на единицу длины линии краевой дислокации, оценивают значением поряд-



Рис. 1.13

ка μb_{\star}^2 [155].

В окрестности винтовой дислокации, параллельной оси Oz (рис. 1.13), возникают лишь касательные напряжения $\sigma_{\varphi z} =$ $= \sigma_{z\varphi} = \mu b_*/(2\pi r)$, а потенциальная энергия такого поля напряжений в расчете на единицу длины винтовой дислокации также имеет порядок μb_*^2 . Указанные свойства дислокаций качественно справедливы и для анизотропных кристаллов, но количественные соотношения будут зависеть от упругих характеристик кристал-

лов (см. 1.6) и от ориентации дислокации относительно кристаллографических осей.

Как и точечные дефекты, дислокации могут перемещаться в объеме кристалла. Вдоль лишнего слоя атомов краевая дислокация перемещается лишь благодаря диффузии вакансий и внедренных атомов. В зону сжатия (см. рис. 1.12) преимущественно попадают вакансии, а в зону растяжения — внедренные атомы, которые «пристраиваются» к кромке лишнего атомного слоя. Процесс диффузии протекает во времени так, что краевая дислокация как бы переползает из одной плоскости скольжения в другую. В сплавах типа твердых растворов атомы примесей также благодаря диффузии собираются в окрестности дислокаций, образуя «облака» примесей, причем в зоне сжатия располагаются атомы примесей меньших радиусов, а в зоне растяжения — бо́льших.

Если рассматривать точечный дефект как сферическое включение в изотропной упругой среде, то его появление в поле напряжений краевой

дислокации приведет к изменению потенциальной энергии этого поля с учетом (1.18) на величину

$$\Delta \Pi^* = -\frac{\sigma_c}{3} \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\mu b_* \Delta V}{3\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \sin \varphi,$$

где $\sigma_{\rm c} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz} = I_{1\widehat{\sigma}}/3$ — среднее напряжение; ΔV — изменение объема, связанное с наличием точечного дефекта; φ и r полярные координаты этого дефекта относительно ядра дислокации. Действующая на точечный дефект сила $f = -\nabla(\Delta\Pi^*)$ ($\nabla - \partial u\phi\phie$ *ренциальный оператор Гамильтона*) имеет радиальную $f_r = -\frac{\partial\Delta\Pi^*}{\partial r} =$ $= \frac{B_1}{r^2}\sin\varphi$ и тангенциальную $f_{\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta\Pi^*}{\partial\varphi} = -\frac{B_1}{r^2}\cos\varphi$ составляющие, а модуль этой силы $f = \sqrt{f_r^2 + f_{\varphi}^2} = B_1/r^2$. На рис. 1.14 сплошными линиями отмечены эквипотенциальные линии $\Delta\Pi^* = \text{const}$, а штриховыми — ортогональные к ним траектории диффузии точечного дефекта в поле напряжений краевой дислокации. Стрелки указывают направление движения для случая $\Delta V > 0$ (внедренные атомы и атомы примесей больших радиусов). Для вакансий и атомов примесей малых радиусов $\Delta V < 0$, поэтому направление движения будет обратным. Отметим, что взаимодействие краевой дислокации с точечными дефектами аналогично взаимодействию электрического диполя с точечными зарядами.

Для винтовой дислокации в изотропном кристалле $I_{1\hat{\sigma}} = 0$, что приводит к отсутствию взаимодействия с точечными дефектами. Однако



Рис. 1.14

в анизотропном кристалле в окрестности винтовой дислокации $I_{1\hat{\sigma}} \neq 0$, вокруг такой дислокации также образуются «облака» примесей.

Движение краевой дислокации в плоскости скольжения возможно и без влияния диффузии точечных дефектов. При этом дислокация может выйти на поверхность кристалла и образовать ступеньку элементарного сдвига размером b_* . Перемещение дислокации из одного устойчивого положения в другое связано с преодолением определенного энергетического барьера. Поэтому при движении дислокации в плоскости скольжения возникает сила сопротивления, и для ее преодоления необходимо наличие внешнего касательного напряжения (см. рис. 1.10), имеющего для кристалла без примесей порядок $\tau_* \sim \mu \cdot 10^{-4}$ [63] и называемого напряжением Пайерлса. Для кристалла с примесями в начале движения дислокации требуется существенно большее напряжение, так как необходимо преодолеть дополнительное сопротивление, чтобы «вырвать» ее из «облака» примесей.

Винтовая дислокация также способна двигаться, но в направлении, перпендикулярном ее оси, при наличии проекции на эту ось внешнего касательного напряжения (см. рис. 1.10). Две параллельные винтовые дислокации одинаковых знаков (с одинаково направленными векторами Бюргерса) отталкиваются, а обратных знаков — притягиваются, что напоминает взаимодействие параллельных проводников с электрическим током. При слиянии двух дислокаций противоположных знаков искажения кристаллической решетки исчезают, а потенциальная энергия кристалла уменьшается. Для слияния винтовых дислокаций одинаковых знаков необходимо произвести работу по преодолению сил отталкивания, равную разности потенциальных энергий объединенной дислокации с модулем $2b_*$ вектора Бюргерса и двух исходных дислокаций: $\mu(2b_*)^2 - 2\mu b_*^2 = 2\mu b_*^2$. Аналогичный вывод справедлив и для краевых дислокаций, расположенных в одной плоскости скольжения.

Со свободной поверхностью кристалла винтовая или краевая дислокация взаимодействует так же, как и с зеркально расположенной относительно этой поверхности дислокацией противоположного знака (рис. 1.15, *a* и *б*). Именно при таком расположении дислокаций поля напряжений в плоскости антисимметрии полностью компенсируют



Рис. 1.15

друг друга, что соответствует условиям на свободной от напряжений поверхности кристалла. Следовательно, эта поверхность притягивает и винтовую, и краевую дислокации, а после выхода их на поверхность потенциальная энергия кристалла уменьшается.

Краевые дислокации взаимодействуют между собой подобно электрическим диполям. Если одну из дислокаций поместить в начало *прямоугольной системы координат*, то в случае упругоизотропных кристаллов возникают зоны притяжения и отталкивания с границами на биссектрисах координатных углов (рис. 1.16). Для параллельных краевых дислокаций одинаковых знаков точки устойчивого равновесия располагаются в плоскости лишнего атомного слоя, а для дислокаций разных знаков — на биссектрисах координатных углов. В связи с этим под действием теплового возбуждения при нагреве кристалла краевые дислокации собираются в устойчивые конфигурации — дислокационные стенки (рис. 1.17, a и δ), которые являются границами блоков и объясняют мозаичную структуру кристаллических зерен в поликристаллическом материале.



Границы блоков, как и границы кристаллических зерен, можно считать поверхностными дефектами кристаллической решетки. Эти границы также взаимодействуют с дислокациями и препятствуют их движению. Например, если две краевые дислокации одного знака находятся в одной плоскости скольжения и одна из них входит в состав дислокационной стенки (рис. 1.18, *a*), то при их взаимодействии возни-



Рис. 1.18

кает сила отталкивания, обратно пропорциональная расстоянию г. При r > Н к этой силе добавляются проекции сил отталкивания от соседних дислокаций в стенке. При r < H эти проекции меняют знак, что несколько уменьшает силу отталкивания со стороны дислокационной стенки. Если подвижная дислокация находится в плоскости скольжения, проходящей между дислокациями в стенке (рис. 1.18, 6), то сила, действующая на нее от ближайших дислокаций в стенке, обращается в нуль на расстоянии r = H/2. При r > H/2 возникает сила отталкивания, которая достигает максимального значения f^* , а затем стремится к нулю при $r \to \infty$. Значение f^* тем выше, чем меньше H, т. е. чем чаще расположены дислокации в стенке. Внешнее касательное напряжение τ в плоскости скольжения действует на единицу длины линии дислокации с силой $f = \tau b_*$. Если $f > f^*$, то подвижной дислокации удается преодолеть силы отталкивания со стороны дислокационной стенки и она либо занимает место в положении устойчивого равновесия (точка О на рис. 1.15, б), присоединяясь к стенке, либо (при $f \gg f^*$) продолжает движение в плоскости скольжения. В кристалле линии дислокаций расположены произвольным образом и могут пересекаться между собой, образуя пороги, которые тормозят дальнейшее движение дислокаций. Торможение возникает вследствие того, что кинематически возможное направление движения порога не совпадает с направлением движения остальных частей дислокаций, образующих порог при своем пересечении. Таким образом, дислокации как бы цепляются друг за друга, создавая неподвижные узлы. В итоге возникает пространственная сетка дислокаций со средним размером ячейки

$$l \approx \frac{1}{\sqrt{\rho_{\pi}}},\tag{1.19}$$

где $\rho_{\rm m}$ — плотность дислокаций, которую можно представить как длину линий дислокаций, приходящихся на единицу объема кристалла, или как число их линий, пересекающих участок поверхности единичной площади. Если считать, что ячейки дислокационной сетки образуют микрообъемы кубической формы, то ребро такого куба должно быть равно $l \approx \rho_{\rm m} l^3$, откуда и следует (1.19). Например, в отожженных кристаллах металлов $\rho_{\rm m} \approx 10^8 \dots 10^{10} \text{ м}^{-2}$, а после значительного пластического деформирования — $\rho_{\rm m} \approx 10^{14} \dots 10^{16} \text{ м}^{-2}$ [42].

Линии дислокаций между узлами пространственной сетки стремятся выпрямиться, чтобы уменьшить потенциальную энергию, связанную с искажением кристаллической решетки. Поэтому можно говорить о некотором линейном натяжении дислокации, численно равном потенциальной энергии μb_*^2 , приходящейся на единицу ее длины. При действии в плоскости скольжения внешнего касательного напряжения τ между точками A и B закрепления в узлах сетки дислокация выгибается по дуге радиусом $r = \mu b_*^2/(\tau b_*) = \mu b_*/\tau$ (рис. 1.19, a, позиция 1). Минимально возможный радиус дуги l/2 соответствует критическому напряжению

$$\tau_{\rm \kappa p} = 2\frac{\mu b_*}{l}.\tag{1.20}$$

При $\tau > \tau_{\rm kp} + \tau_*$ равновесие линии дислокации становится невозможным и она расширяется в виде двойной спирали, закрепленной в точках A и B (позиции 2-4 на рис. 1.19, a). Краевые составляющие дислокации стремятся двигаться в направлении вектора b_* , а винтовые составляющие дислокации расходятся перпендикулярно к нему. Благодаря закреплению в точках A и B при движении винтовых составляющих возникнут участки дислокаций с ориентацией, соответствующей краевой дислокации обратного знака (сечение 3 на рис. 1.19, b). Эти участки около точек закрепления переходят в винтовые составляющие дислокации, приближающиеся друг к другу (позиция 4 на рис. 1.19, a). В результате образуется замкнутая петля линии дислокации (позиция 5), продолжающая расширяться (сечение 3 на рис. 1.19, b), а оставшийся между точками закрепления участок дислокации повторяет описанную эволюцию, которая характеризует работу генератора петель дислокаций, получившего название источника Франка — Рида.



Рис. 1.19

Если в кристалле нет препятствий движению петель дислокаций, то каждая из них выходит на свободную поверхность, производя элементарный сдвиг. Итогом работы такого генератора петель дислокаций будет разделение кристалла на две части по плоскости скольжения. Но в реальном кристалле имеются препятствия движению дислокаций в виде дислокационной сетки, границ блоков и зерен, включений примесей. Дислокации останавливаются перед препятствиями (рис. 1.20), образуя скопления, в которых возникают направленные навстречу



Рис. 1.20

напряжениям τ *микронапряжения* τ' в плоскости скольжения, блокирующие источник дислокаций при условии

$$\tau - \tau' \leqslant \tau_{\rm KP} + \tau_*. \tag{1.21}$$

Источник дислокаций может активизироваться снова либо при увеличении τ , либо при разрушении препятствия, либо при переползании ча-





сти петель дислокаций вдоль лишнего слоя атомов в другие плоскости скольжения, где нет препятствий движению дислокаций. В последнем случае станет меньше дислокаций в скоплении, уменьшится значение τ' и источник дислокаций продолжит свою работу до тех пор, пока снова не будет выполняться условие (1.21).

В случае наличия в плоскости скольжения препятствий в виде включений примесей (рис. 1.21) дислокации при $\tau >$ > $\tau_{\rm kp} + \tau_*$ могут продавливаться между включениями, оставляя на них кольцевые петли. Эти петли также создают

встречное напряжение в плоскости скольжения и, кроме того, уменьшают эффективное расстояние $l_{3\Phi}$ между включениями, увеличивая $\tau_{\kappa p}$.

Следует отметить, что по сравнению с рассмотренными выше свойствами дефектов кристаллической решетки *математические модели*, описывающие движение и взаимодействие этих дефектов в реальных кристаллах, существенно сложнее [55,75,98,134].

1.8. Микромеханизмы неупругого деформирования кристаллов

Модели источника Франка — Рида и взаимодействия краевых дислокаций с препятствиями (см. 1.7) позволяют подойти к объяснению микромеханизма неупругого деформирования твердых кристаллических тел. **Неупругая** (необратимая, сохраняющаяся после снятия внешней нагрузки) **деформация** (в отличие от **упругой**) кинематически не может появиться при растяжении или сжатии кристаллической решетки и возникает, как правило, при относительном скольжении атомных плоскостей под действием касательного напряжения τ . Это происходит в плоскостях скольжения преимущественно по тем направлениям, в которых расстояния между атомами в решетке являются наименьшими, поскольку напряжение Пайерлса τ_* в таких направлениях наименьшее. Совокупность плоскости и направления скольжения называют системой скольжения.

В простой кубической решетке (см. рис. 1.9, а и б) имеются гри ортогональных плоскости скольжения и по два направления скольжения в каждой из них — всего щесть систем скольжения. Каждое направление лежит одновременно в двух плоскостях скольжения, но оно входит в две независимые системы скольжения, так как значения τ в разных плоскостях могут быть различными. В кристаллах с гранецентрированной кубической (ГЦК) решеткой (см. рис. 1.5, б) можно выделить 12 независимых систем скольжения, которые соответствуют направлениям скольжения вдоль диагоналей граней, лежащих в четырех октаэдрических плоскостях (заштрихованы на рис. 1.22, а) с наиболее плотной упаковкой атомов. В кристаллах с объемноцентрированной кубической (ОЦК) решеткой имеются четыре четко выраженных направления скольжения вдоль диагоналей куба. Но каждому из этих направлений соответствует много различных плоскостей скольжения, поэтому в вопросе о числе систем скольжения в кристаллах с ОЦК-решеткой нет определенности. Для каждой диагонали куба наибольшую плотность упаковки атомов имеют проходящие через его ребра три плоскости (заштрихованы на рис. 1.22, б). Однако скольжение может проходить в любой плоскости, содержащей эту диагональ, если для этой плоскости оказывается наибольшим касательное напряжение. Вероятные плоскости скольжения образуют как бы веер вокруг каждой диагонали куба.





Рис. 1.22



Кристаллы с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой, вытянутые вдоль оси Ox'_3 (см. рис. 1.5, 6) при $c/a > \sqrt{8/3}$, имеют три четко выраженных направления скольжения, лежащих в плоскости основания шестигранной призмы (рис. 1.22, в) и совпадающих с ее диагоналями и сторонами. Для таких кристаллов реализуется так называемое базисное скольжение при трех независимых системах скольжения в плоскости основания. Для идеальной ГПУ-решетки при $c/a = \sqrt{8/3}$ плотность упаковки атомов в основании и гранях пирамиды (заштрихованы на рис. 1.22, 6) одинакова. Поэтому в кристаллах с ГПУ-решеткой, близкой к идеальной, возникает и так называемое пирамидальное скольжение. В «сплющенной» ГПУ-решетке при $c/a < \sqrt{8/3}$ доминирует призматическое скольжение в плоскостях граней призмы [155]. В некоторых случаях неупругое деформирование кристаллов с ГПУ-решеткой происходит путем двойникования (рис. 1.23, а и б), когда в результате потери устойчивости исходной формы равновесия решетка переориентируется в объемах, размеры которых значительно превосходят межатомные расстояния. Двойникование может иметь место и в кристаллах с ГЦК- и ОЦК-решетками [114].



Если все атомы в плоскости скольжения смещаются относительно параллельного слоя атомов одновременно, то касательное напряжение τ должно составлять значение порядка $\mu/10$, что намного превышает экспериментальные значения для *предела текучести* $\tau_{\rm T}$ при сдвиге [155]. При последовательном частичном смещении одной части кристалла относительно другой, происходящем в процессе движения краевой дислокации в плоскости скольжения, требуется существенно меньшее значение τ , лучше согласующееся с экспериментальными данными. Это подтверждает предположение о дислокационном мёханизме неупругого деформирования кристаллических тел.

Для хорошо отожженных кристаллов чистых металлов (без примесей) $\tau_{\rm T} \sim \tau_*$. Примеси создают около ядра дислокации «облака» (см. 1.7), являющиеся одной из причин увеличения $\tau_{\rm T}$, т. е. **упрочнения** кристаллического материала. В этом случае движение дислокации возможно и при $\tau_* \leq \tau \leq \tau_{\rm T}$, когда приложенное внешнее напряжение τ еще не может «вырвать» ее из «облака» и перемещение происходит вместе с «облаком» благодаря диффузии образующих его атомов примесей. В отличие от практически мгновенно возникающей неупругой деформации, называемой *пластической* и соответствующей движению свободных дислокаций, такое перемещение приводит к появлению и развитию во времени *деформации ползучести* и ускоряется с повышением температуры, увеличивающим скорость диффузии. Эти деформации являются количественной характеристикой явлений *пластичности* и *ползучести* соответственно.

Повышение температуры вызывает уменьшение концентрации атомов примесей в каждом «облаке» и более равномерное распределение их по объему кристалла, что уменьшает значение $\tau_{\rm T}$. Однако при резком росте температуры T такое перераспределение атомов примесей не успевает произойти и изменение $\tau_{\rm T}$ запаздывает во времени t по сравнению с установившимся значением $\tau_{\rm T}^{\circ}(T)$, соответствующим длительной выдержке при температуре T. Это запаздывание в первом приближении можно описать уравнением

$$t_{\tau}^* \exp\left(\frac{\Pi_{\tau}^*}{k_{\rm B}T}\right) \frac{d\tau_{\rm T}}{dt} + \tau_{\rm T} = \tau_{\rm T}^{\rm o}(T), \qquad (1.22)$$

где t_{τ}^* — коэффициент, играющий роль постоянной времени процесса диффузии примесей; Π_{τ}^* — энергия активации этого процесса; $k_{\rm B}$ постоянная Больцмана.

Другой причиной повышения предела текучести $\tau_{\rm T}$ по сравнению с напряжением Пайерлса τ_* являются препятствия движению дислокаций в виде узлов пространственной дислокационной сетки (см. 1.7). Для начала движения участка дислокации, концы которого закреплены в узлах этой сетки, необходимо, чтобы с учетом (1.20) касательное напряжение составляло $\tau \ge \tau_{\rm Kp} + \tau_* = 2\mu b_*/l + \tau_*$, где μ — модуль сдвига; b_* — модуль вектора Бюргерса; l — средний размер ячейки сетки. Тогда, согласно (1.19), получим

$$\tau_{\rm T} - \tau_* = 2\frac{\mu b_*}{l} = 2\mu b_* \sqrt{\rho_{\rm H}},\tag{1.23}$$

где $\rho_{\rm d}$ — плотность дислокаций. Значение $\rho_{\rm d}$ можно увеличить в результате предварительного пластического деформирования (наклепа) и соответствующей термической обработки, создав тем самым в кристалле пространственную дислокационную сетку с меньшим средним размером ячейки.

Однако зависимость $\tau_{\rm T}$ от $\rho_{\rm d}$ не является монотонной (рис. 1.24). С уменьшением $\rho_{\rm d}$ значение $\tau_{\rm T}$ сначала понижается, а затем начинает расти, так как строение кристалла приближается к идеально-





му (бездефектному), что характерно, например, для нитевидных кристаллов и некоторых кристаллических структур, полученных методами нанотехнологий. Наличие примесей (легирование) способствует повышению $\tau_{\rm T}$ при одинаковых значениях $\rho_{\rm A}$ (штриховая линия на рис. 1.24).

Повышение $\tau_{\rm T}$ происходит и в процессе неупругого деформирования, так как часть вновь образовавшихся дислокаций присоединяется к дислокационной сетке, увеличивая плотность дислокации $\rho_{\rm d}$ и уменьшая средний размер ее ячеек. После снятия внешней нагрузки эти дислокации не исчезают, а остаются в составе дислокационной сетки. Поэтому при последующем нагружении (независимо от его направления) $\tau_{\rm T}$ возрастает, происходит **изотропное упрочнение** кристаллического материала.

Препятствия движению дислокаций в виде включений примесей или разнородных компонентов многофазного сплава-смеси также приводят к росту $\tau_{\rm T}$. В таком случае, согласно (1.23),

$$\tau_{\rm T} - \tau_* = 2\frac{\mu b_*}{l_{\rm m}},\tag{1.24}$$

где $l_{\rm n}$ — среднее расстояние между включениями в плоскости скольжения.

Влияние температуры в (1.23) и (1.24) непосредственно сказывается лишь через модуль сдвига μ , который изменяется в зависимости от температуры практически мгновенно. Однако изменение T может привести к структурным изменениям в кристалле, которые также влияют на значение $\tau_{\rm T}$. Например, при изменении T меняются размеры включений примесей или фаз в сплавах и величина $l_{\rm n}$. Этот процесс связан со скоростью диффузии и развивается во времени, в связи с чем полное изменение $\tau_{\rm T}$ обычно запаздывает по сравнению с изменением T, причем это запаздывание также можно описать при помощи (1.22).

С повышением *T* дислокации могут преодолевать препятствия своему движению при $\tau < \tau_{\rm T}$. Благодаря тепловому возбуждению атомов дислокации освобождаются от закрепления в узлах пространственной дислокационной сетки или же обходят препятствия в виде включений, что приводит к накоплению во времени деформации ползучести.

В процессе неупругого деформирования кристалла перед препятствиями образуются скопления дислокаций, в которых возникают микронапряжения τ' (см. рис. 1.17), что также приводит к упрочнению кристаллического материала. Для дальнейшего развития мгновенной пластической деформации необходимо увеличивать τ . Зависимость между τ' и пластической деформацией сдвига γ_p в системе скольжения в первом приближении можно принять линейной [114]:

$$\tau' = \mu'(T)\gamma_p,\tag{1.25}$$

где $\mu'(T)$ — зависящий от T коэффициент упрочнения.

После снятия внешней нагрузки ($\tau = 0$), если $\tau' > \tau_{\rm kp} + \tau_*$, то *источник Франка — Рида*, создающий скопление дислокаций в плоскости скольжения, начнет работать под действием напряжения τ' в обратном направлении. При этом дислокации противоположного знака, порождаемые источником дислокаций, и дислокации в скоплении будут взаимно уничтожаться, что приведет к снижению τ' , и при $\tau' \leq \tau_{\rm kp} + \tau_*$ работа источника дислокаций прекратится.

Ситуация, когда $\tau' > \tau_{\rm KD} + \tau_{\star}$, может возникнуть при достаточно большой пластической деформации сдвига γ . При малых значениях γ обычно $\tau' \leq \tau_{\text{KD}} + \tau_*$ и источник дислокаций после снятия внешней нагрузки как бы запирает дислокации в скоплении перед препятствием, фиксируя значения остаточных микронапряжений $\tau'_0 = \tau'$. Это объясняет два важных явления — анизотропное упрочнение кристаллического материала и эффект Баушингера, заключающиеся в том, что после предварительного пластического деформирования значение предела текучести увеличивается при повторном нагружении в том же направлении и уменьщается при повторном нагружении в противоположном направлении. Действительно, в первом случае источник дислокаций начнет работать при условии $\tau' > \tau_{\rm KD} + \tau_* + \tau_0'$, а во втором при $\tau' > \tau_{\kappa p} + \tau_* - \tau'_0$. Таким образом, предел текучести возрастает на величину τ'_0 в направлении предварительного пластического деформирования и на столько же падает в обратном направлении. Можно считать, что при этом проявляется память кристаллического материала. Он как бы помнит свою историю нагружения, причем ячейками памяти являются плоскости скольжения, а носителями информации дислокации в скоплениях перед препятствиями, создающие остаточное напряжение τ'_0 .

С течением времени достигнутое при пластическом деформировании упрочнение материала снижается, происходит процесс частичного восстановления исходной структуры, называемый **возвратом**. Этот процесс ускоряется при повышении температуры. При более высокой температуре, соответствующей процессу **отжига** материала [113], упрочнение полностью исчезает.

Движение дислокаций в плоскости скольжения можно представить при помощи *механического аналога* (рис. 1.25, *a*). Перемещение *и* элемента с сухим трением пропорционально числу дислокаций, поро-



Рис. 1.25

ждаемых источником, что в конечном счете пропорционально пластической деформации сдвига γ_p . Сила P пропорциональна τ , а сила $P_{\rm Tp}$ трения и натяжение P' пружины — значениям $\tau_{\rm T}$ и τ' соответственно. На рис. 1.25, δ приведена диаграмма P - u, аналогичная диаграмме $\tau - \gamma_p$, которая характеризует поведение механического аналога и свойства плоскости скольжения при повторном нагружении в различных направлениях (жесткость пружины в соответствии с (1.25) предполагается постоянной).

При быстром повышении температуры в процессе пластического деформирования число дислокаций в скоплении перед препятствием остается прежним, но значение τ' , как и $\tau_{\rm T}$, понижается пропорционально уменьшению коэффициентов упругости кристалла (для упругоизотропного кристалла — пропорционально уменьшению значения μ). При неизменном значении τ число дислокаций в скоплении растет до тех пор, пока снова не будет выполнено условие

$$\tau \leqslant \tau_{\mathrm{T}}(T) + \tau'(T) = \tau_{\mathrm{T}}(T) + \mu'(T)\gamma_p, \qquad (1.26)$$

учитывающее (1.25).

С течением времени при повышенной температуре процесс выхода дислокаций из скоплений становится существенным вследствие переползания в параллельные плоскости скольжения (см. 1.7). В кристаллах с ГЦК-, ОЦК- и ГПУ-решетками благодаря наличию пересекаюцихся плоскостей скольжения есть и другой путь выхода дислокаций из скоплений и преодоления препятствий. Дислокации в скоплении расщепляются (диссоциируют) и переходят в смежные плоскости скольжения, таким образом покидая скопления и обходя препятствия (рис. 1.26).



Рис. 1.26

Расщепление дислокации (как и ее переползание) связано с тепловым возбуждением атомов, необходимым для преодоления определенного энергетического барьера, который характеризуется энергией активации П^{*}. Вероятность осуществления расщепления или переползания, а значит, и скорость этих процессов пропорциональны $\exp\left(-\frac{\Pi^*}{k_{\rm B}T}\right)$. Но тепловое возбуждение само по себе не может вызвать направленного перемещения дислокаций. Вероятность переползания дислокаций в свободную плоскость скольжения и обратно в скопление под действием только теплового возбуждения одинакова. Также одинакова вероятность расщепления и объединения дислокаций. Преимущественная направленность процесса в таком случае определяется действующим на дислокацию касательным напряжением $\tau_{\rm R}$.

Учесть влияние $\tau_{\rm d}$ можно следующим образом. Когда дислокация благодаря переползанию или расщеплению покидает скопление, его потенциальная энергия уменьшается на величину $\Delta \Pi^* = V_{\rm d} \tau_{\rm d}$, где $V_{\rm d}$ — коэффициент пропорциональности, называемый активационным объемом. Напротив, если дислокация появляется в скоплении, то его потенциальная энергия увеличивается на $\Delta \Pi^*$. Таким образом, вероятность направленного процесса пропорциональна разности

$$\exp\left(-\frac{\Pi^* - \Delta\Pi^*}{k_{\rm B}T}\right) - \exp\left(-\frac{\Pi^* + \Delta\Pi^*}{k_{\rm B}T}\right) = 2\exp\left(-\frac{\Pi^*}{k_{\rm B}T}\right) \operatorname{sh} \frac{V_{\rm a}\tau_{\rm a}}{k_{\rm B}T}.$$
 (1.27)

Этой же величине пропорциональны скорости процессов освобождения дислокаций из скопления и преодоления ими препятствий, связанные в конечном счете со скоростью *деформации ползучести*.

Для дислокации в скоплении значению τ_{d} соответствует напряжение au', а для дислокации перед препятствием в виде пространственной дислокационной сетки или ряда включений — разность $\tau - \tau'$. При $\tau > \tau_{\rm T}$ скорость деформации ползучести определяется, главным образом, скоростью выхода дислокаций из скоплений. Понижение τ' в этом случае компенсируется дислокациями, которые попадают в скопление при возникновении мгновенной пластической деформации сдвига в плоскости скольжения. Если $\tau < \tau_{\rm T}$, то скорость деформации ползучести определяется как процессом обхода дислокациями препятствий и освобождения от закрепления в узлах дислокационной сетки, так и процессом выхода дислокаций из скоплений, поскольку он влияет на значение τ' . В этом случае даже при постоянных во времени t значениях τ и T скорость $\dot{\gamma}^{(c)} = d\gamma/dt$ деформации сдвига при ползучести изменяется до установившегося значения $\dot{\gamma}_{\infty}^{(c)}$, т.е. до тех пор, пока не сравняются скорость обхода дислокациями препятствий и скорость выхода дислокаций из скоплений.
1. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

После снятия внешней нагрузки ($\tau = 0$) при повышенной температуре продолжается движение дислокаций под действием остаточных микронапряжений. Дислокации покидают скопления, что приводит к *релаксации* этих *напряжений* во времени. При этом снимается анизотропное упрочнение кристаллического материала, исчезает эффект Баушингера, материал «забывает» свою историю нагружения, память материала как бы стирается.

Таким образом, при выполнении условия (1.26), когда приращение мгновенной пластической деформации сдвига отсутствует, процессы в плоскости скольжения с учетом (1.27) можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\gamma}^{(c)} = \nu_{\gamma} \exp\left(-\frac{\Pi^{*}}{k_{\rm B}T}\right) \operatorname{sh} \frac{V_{\pi}(\tau - \tau')}{k_{\rm B}T},$$

$$\dot{\gamma}' = \frac{\dot{\tau}'}{\mu'} = \dot{\gamma}^{(c)} - \nu_{\gamma}' \exp\left(-\frac{\Pi^{*}}{k_{\rm B}T}\right) \operatorname{sh} \frac{V_{\pi}\tau'}{k_{\rm B}T},$$
(1.28)

где ν_{γ} и ν'_{γ} — коэффициенты пропорциональности, имеющие порядок наибольшей **частоты колебаний** атомов в кристаллической решетке.



Рис. 1.27

Для отражения описанных процессов, развивающихся во времени в плоскости скольжения, механический аналог, представленный на рис. 1.25, *a*, следует дополнить двумя нелинейными элементами вязкого трения (рис. 1.27). Один из них включен последовательно с пружиной и моделирует процесс выхода дислокаций из скопления, а второй — параллельно элементу сухого трения и моделирует процесс обхода дислокациями препятствий.

1.9. Микромеханизмы разрушения кристаллических тел

Твердые кристаллические тела разделяют на хрупкие и пластичные в зависимости от характера их разрушения и значения пластической деформации, накопленной к моменту разрушения. Но характер разрушения не определяется однозначно свойствами кристаллического материала, а зависит от вида напряженного состояния и от истории нагружения. Например, известны эксперименты, проведенные с образцами из мрамора [119], когда при одноосном сжатии разрушение носило хрупкий характер, а при дополнительном наложении всестороннего давления разрушение происходило после значительного пластического деформирования. В то же время металлы, которые в условиях одноосного растяжения имеют большие удлинения при разрыве, при напряженном состоянии, близком к всестороннему растяжению, разрушаются как хрупкие тела без заметного пластического деформирования.

Если **разрушение** происходит после существенного пластического деформирования, то его называют **вязким** [119]. Такое разрушение растягиваемого образца кристаллического материала связано с уменьшением поперечного сечения и ростом истинных напряжений до тех пор, пока процесс равномерного накопления *неупругой деформации* не перестанет быть устойчивым. Тогда у образца появляется так называемая шейка, в зоне которой возникает напряженное состояние типа всестороннего растяжения, зарождается и развивается трещина и происходит разрыв образца [82]. При распространении трещины в материале пластическая деформация локализована вблизи вершины трещины. Поэтому непосредственно процесс распространения трещины не приводит к заметному пластическому деформированию образца в целом.

Напряженное состояние типа всестороннего растяжения можно создать в растягиваемом образце искусственно, например путем тонкого надреза, имитирующего трещину. Тогда такой образец может разрушиться при наличии лишь локальных пластических деформаций в зоне надреза. Этот вид разрушения следует отнести к *хрупкому*, а точнее — к *квазихрупкому* [119].

При любом виде разрушения кристаллических материалов условия его протекания связаны с процессами образования и развития тре-

щин. Микромеханизм зарождения трещин может быть различным. Одной из причин возникновения микротрещин является образование скоплений вакансий в кристаллической решетке. Этот микромеханизм может действовать даже при отсутствии внешней нагрузки. Вакансии вследствие диффузионного движения стремятся объединиться в дискообразное скопление, которое в частном случае можно представить как замкнутую петлю краевой дислокации (рис. 1.28).



Рис. 1.28

Источником зарождения микротрещин в кристаллах служит также скопление дислокаций в плоскости скольжения перед препятствием (см. 1.7). Каждая отдельно взятая краевая дислокация может рассматриваться как потенциальный источник образования микротрещины. Действительно, лишний слой атомов, вдвинутый в кристаллическую решетку, как бы расклинивает ее, вызывая напряженное состояние типа всестороннего растяжения (см. рис. 1.12), которое способствует разрыву межатомных связей и раскрытию микротрещины. В скоплении перед препятствием (рис. 1.29, *a*) поля *микронапряжений* от всех дислокаций суммируются. При значительном внешнем касательном напряжении τ число дислокаций в скоплении может стать настолько большим, что растягивающее напряжение в зоне перед препятствием превысит прочность межатомных связей и тогда образуется клиновидная микротрещина (рис. 1.29, *б*). При этом дислокации в скоплении получат свободу перемещения и часть их, дойдя до края микротрещины, выйдет на образовавшуюся свободную поверхность, вызвав раскрытие микротрещины в результате сдвига частей кристалла, расположенных выше и ниже плоскости скольжения.



Рис. 1.29

Клиновидная микротрещина будет находиться в равновесии с полем микронапряжений в скоплении, если ее длина $L \approx n^2 b_*$, где n число дислокаций с модулем *вектора Бюргерса* b_* , вошедших в полость микротрещины [89]. Значение n пропорционально общему числу дислокаций в скоплении перед препятствием, которое, в свою очередь, линейно зависит от τ и длины скопления, т.е. от расстояния между препятствиями, тормозящими движение дислокаций. Такими препятствиями могут быть границы кристаллических зерен и блоков, включения примесей и т. п. Поэтому для кристаллических тел с меньшими размерами зерен и частым расположением включений примесей следует ожидать (при прочих равных условиях) зарождения микротрецин с меньшими значениями L.

Наряду с рассмотренными схемами предложено много других схем дислокационного механизма зарождения микротрещины, причем некоторые из них имеют экспериментальное подтверждение [149]. Некоторое увеличение объема кристаллических тел при пластическом деформировании (пластическом разрыхлении) косвенно подтверждает этот механизм, так как само по себе пластическое деформирование кристаллов не вызывает изменения объема. Это увеличение объема исчезает после термической обработки благодаря релаксации остаточных микронапряжений в скоплениях дислокаций (см. 1.8) и захлопыванию микротрещин.

Вершина микротрещины является концентратором напряжений, что может привести к дальнейшему увеличению ее длины. Процесс развития трещины в наиболее простом варианте для линейно-упругого изотропного материала был рассмотрен А. А. Гриффитсом [107]. При одноосном растяжении напряжением σ полосы единичной толщины из материала с модулем продольной упругости Е объемная плотность ее потенциальной энергии будет равна $\frac{\sigma^2}{2E}$. Пусть в полосе перпендикулярно действующему напряжению возникла трещина длиной L, малой по сравнению с шириной полосы (рис. 1.30). Появление трещины приведет к перераспределению напряжений: они увеличатся у ее краев и уменьшатся до нуля на свободной поверхности трещины. Потенциальная энергия полосы в целом понизится. Уменьшение $\Pi^* = \frac{\pi L^2}{4} \frac{\sigma^2}{2E}$ потенциальной энергии можно найти из решения задачи теории упругости о растяжении достаточно широкой полосы с поперечной трещиной [119], т. е. материал полосы в пределах заштрихованной на рис. 1.30 площади круга диаметром L как бы разгружается.



Отсюда следует, что с увеличением L запас потенциальной энергии в полосе быстро уменьшается, т.е. процесс развития трещины мог бы протекать самопроизвольно. Однако образование свободной поверхности трещины связано с затратами энергии U_S на единицу площади этой поверхности. Эта энергия аналогична энергии поверхностного натяжения жидкости. Если длина трещины увеличивается на ΔL , то затрачивается энергия $2U_S \Delta L$. При этом потенциальная энергия полосы уменьшается на $\Delta \Pi^* = \frac{\pi L}{4} \frac{\sigma^2}{E} \Delta L$. При $\Delta \Pi^* > 2U_S \Delta L$ трещина будет самопроизвольно расти. Из условия $\Delta \Pi^* = 2U_S \Delta L$ можно найти критическую длину

$$L_{\rm \kappa p} = 8 \frac{U_S E}{\pi \sigma^2},\tag{1.29}$$

при которой трещина еще может находиться в равновесии при напряжении σ.

Если среди микротрещин в кристаллическом материале есть такие, для которых $L > L_{\rm kp}$, то возникают необходимые условия для их роста и последующего разрушения материала. Рассмотренный подход приводит к понятию масштабного эффекта при разрушении. Вероятность появления микротрещин длиной $L > L_{\rm kp}$ в теле больших размеров выше, чем в теле малых размеров. Поэтому крупные детали при прочих равных условиях обычно разрушаются при меньших напряжениях, чем мелкие. Для кристаллических тел с зернами малых размеров вероятность разрушения меньше, чем для крупнозернистых.

Вся трудность практического приложения теории Гриффитса состоит в определении поверхностной энергии U_S . Эта теория подтверждается экспериментами для стекла и других *твердых аморфных тел*, которые можно рассматривать как весьма вязкие жидкости (см. 1.4). В таких телах, являющихся в обычных условиях хрупкими, развитие трещины не вызывает возникновения пластической деформации вблизи ее вершины. Поэтому в качестве U_S можно принять энергию поверхностного натяжения.

Хорошее совпадение теории с экспериментом имеет место также для тех кристаллических материалов, у которых при распространении трещины происходит расщепление кристаллической решетки без заметного пластического деформирования. К таким материалам относятся кристаллические тела без дефектов (в частности, без дислокаций), а также жаростойкие неметаллы, имеющие кристаллы с ионной или ковалентной связью (например, Al₂O₃, SiC, Si₃N₄). В таких случаях значение U_S можно оценить как работу, затрачиваемую на расщепление кристаллической решетки, т. е. на разрыв межатомных связей. Эта работа пропорциональна энергии взаимодействия атомов в кристаллической решетке в точке перегиба кривой $\Pi^*(r)$ на рис. 1.6, если эту энергию отсчитывать от минимального значения при $r = r_0$.

В кристаллах металлов вблизи вершины трещины существует область, в которой возникает пластическая деформация. Эта область при развитии трещины движется вместе с ее вершиной, поэтому все новые объемы материала пластически деформируются, а затем разгружаются. При этом совершается необратимая работа, которая существенно увеличивает общую поверхностную энергию U_S , но теоретически определить ее значение довольно трудно. Выяснить это можно при проведении эксперимента со стандартными образцами с надрезами и с заранее созданными трещинами фиксированных размеров, в котором значение U_S может быть определено как константа данного материала [119].

С понижением температуры *предел текучести* металлов повышается, а сопротивление кристаллической решетки расщеплению остается практически постоянным. Поэтому развитие трещин в кристаллах металлов при пониженной температуре протекает с менее развитой пластической деформацией, значение U_S уменьшается и при заданном значении σ в соответствии с (1.29) снижается $L_{\rm Kp}$, т.е. могут «ожить» и начать развиваться более мелкие трещины. Даже при одноосном растяжении металлический образец в условиях низких температур может разрушиться (проявить хладноломкость) еще до появления заметных пластических деформаций. В меньшей мере хладноломкости подвержены металлы с гранецентрированной кубической решеткой (например, медь, алюминий и сплавы типа *твердых растворов* на их основе), так как в кристаллах этого типа много систем скольжения, позволяющих этим кристаллам сохранять высокую пластичность и при низких температурах.

С повышением температуры для большинства металлов предел текучести понижается и разрушению растягиваемого образца предшествует значительная пластическая деформация и образование так называемой шейки, поскольку вследствие увеличения U_S лишь для достаточно большого напряжения σ выполняется условие $L > L_{\rm kp}$, которое реализуется только при существенном уменьшении поперечного сечения образца в зоне шейки. Однако для образцов из низкоуглеродистых сталей при температуре 500...650 К удлинение при разрыве заметно снижается. Этот эффект, получивший название синеломкости, связан с особенностями диффузии атомов углерода в кристаллической решетке железа, препятствующих движению дислокаций и повышающих предел текучести, но не влияющих на распространение трещин.

При дальнейшем повышении температуры на разрушение металлов начинает влиять длительность нагружения. Вследствие диффузии дефектов кристаллической решетки (в частности, диффузии вакансий к краям микротрещин и к поверхностям пор на границах кристаллических зерен и включений примесей) трещины и поры, для которых $L < L_{\rm kp}$, растут во времени до тех пор, пока их размер не превысит критический и процесс разрушения не начнет быстро прогрессировать. C ростом температуры скорость диффузионных процессов также растет (см. 1.7) и при постоянной нагрузке время до разрушения образца уменьшается. При заданной температуре бо́льшим значениям σ , согласно (1.29), соответствуют меньшие значения $L_{\rm kp}$, т.е. необходимое условие $L > L_{\rm kp}$ разрушения выполняется за более короткий промежуток времени.

При работе материала в условиях знакопеременных нагрузок возможны образование и рост трещин даже при сравнительно малых напряжениях, что приводит к усталостному разрушению. В силу неоднородности распределения напряжений в поликристаллическом материале в отдельных зернах активизируются наиболее благоприятно расположенные системы скольжения, в которых движение дислокаций происходит при сравнительно низком уровне действующих внешних нагрузок. В таких системах образуются устойчивые полосы скольжения, в которых при знакопеременном и неравномерном по объему зерна сдвиге возникают поры, а также выступы и впадины на границах зерен и включений примесей. Это один из возможных механизмов зарождения микротрещин, которые по мере увеличения числа циклов нагружения постепенно растут до тех пор, пока не будет выполнено необходимое условие $L > L_{\rm KD}$ разрушения или же пока микротрещины не сольются в магистральные трещины, нарушающие целостность образца или детали. На рис. 1.31 [119] приведены зависимости относительной амплитуды σ/σ_{-1} изменения напряжения в алюминиевом образце при симметричном цикле нагружения (σ_{-1} — условный предел выносливости, определенный на базе $2 \cdot 10^7$ циклов) от числа циклов N_{μ} для различных этапов развития усталостного разрушения: 1 — появление первых следов пластической деформации в зернах; 2 — появление первых микротрещин, обнаруживаемых при помощи электронного микроскопа; 3 — начало объединения микротрещин в трещины, видимые под оптическим микроскопом; 4 — появление первой визуально наблюдаемой трещины; 5 — разрушение. Существует так называемый физический предел выносливости (штриховая линия на рис. 1.31), ниже которого при любом N_и не наступает ни один из этапов процесса усталостного разрушения. При определенных условиях в результате упрочнения материала вблизи вершины трещины или торможения распространения трещины у границ зерен и включений примесей рост



Рис. 1.31

трещины может прекратиться или существенно замедлиться, что повышает сопротивляемость усталости и увеличивает долговечность деталей, подверженных знакопеременному нагружению.

Влияние температуры на сопротивление усталости зависит от многих факторов и неоднозначно для различных кристаллических материалов. С повышением температуры на микромеханизм образования и роста усталостных трещин накладываются диффузионные процессы, особенно около границ зерен и включений примесей. Микромеханизм усталостного разрушения существенно усложняется в случае переменных тепловых воздействий (теплосмен), когда взаимодействуют процессы циклического упрочнения материала, повышающие его долговечность, и процессы термического разупрочнения и накопления повреждений при повышенных температурах [29,133].

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Построение математических моделей механических взаимодействия и движения материальных *тел*, которые допустимо считать *абсолютно твердыми*, базируется на основных положениях теоретической механики. В своем классическом варианте, заложенном еще Г. Галилеем и И. Ньютоном, она описывает такие взаимодействие и движение, опираясь на понятие силы, тогда как добавление к описанию энергетических характеристик составляет содержание ее раздела — аналитической механики [72]. Подчинение этих характеристик основным *принципам аналитической механики*, т. е. таким общим утверждениям, из которых остальные положения вытекают как логические следствия, позволяет построить наиболее общие модели поведения (равновесия и движения) механических систем [78].

2.1. Основные понятия и определения

В аналитической механике под *материальной системой* понимают совокупность *материальных точек* — малых частиц, имеющих массу, но не имеющих объема, — положение или движение каждой из которых зависит от положения или движения остальных материальных точек этой совокупности. Основной единицей измерения массы является килограмм (кг).

Говорят, что определена **конфигурация** материальной системы, если установлено соответствие материальных точек системы и точек пространства в выбранной системе координат. Конфигурацию называют начальной, если она определена в начальный момент времени. Конфигурацию, определенную в последующие моменты времени, называют актуальной.

Модель абсолютно твердого тела — это совокупность материальных точек, остающихся на неизменных расстояниях друг от друга. Мысленно эту ситуацию можно обеспечить с помощью лишенных массы нерастяжимых стержней, соединяющих эти точки. В общем случае материальная система может включать как абсолютно твердые тела, так и совокупность материальных точек с изменяющимися между ними расстояниями. Устройства в виде стержней, нитей, шарниров и других тел, накладывающие ограничения на положения и/или скорости материальных точек, называют **связями**. Положение в пространстве в момент времени t материальной точки M_{ς} ($\varsigma = \overline{1, N}$) материальной системы, состоящей из N материальных точек, можно задать *радиус-вектором* $x^{(\varsigma)}(t)$ с проекциями $x_i^{(\varsigma)}(t)$ (i = 1, 2, 3) на оси прямоугольной системы коор*динат* $Ox_1x_2x_3$. Основной единицей измерения модуля радиус-вектора, расстояния между материальными точками, их координат и перемещений является метр (м), а основной единицей измерения времени секунда (с).

При отсутствии связей в материальной системе **число степеней свободы** материальной точки совпадает с числом ее координат $x_i^{(\varsigma)}(t)$, однозначно определяющих ее положение в пространстве. Поэтому для такой системы в целом это число будет равно 3N.

Если при наличии связей накладываемые ими ограничивающие условия на положения материальных точек системы можно привести к виду

$$f_{\upsilon}(\boldsymbol{x}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{x}^{(\varsigma)},\ldots,\boldsymbol{x}^{(N)},t) = 0, \quad \upsilon = \overline{1,N_{\rm c}},\tag{2.1}$$

то говорят о голономных связях, называемых также позиционными или геометрическими. Если равенства (2.1), в которых t считают параметром, не зависят друг от друга, то $N_c \leq 3N$ и число степеней свободы системы $n = 3N - N_c$. Случаю $N_c = 3N$ соответствует движение системы во времени по заранее заданному закону. Неголономные (кинематические) связи, не сводящиеся интегрированием по времени к виду (2.1), выражают зависимости не только между координатами материальных точек системы, но и между их скоростями $v^{(\varsigma)} = dx^{(\varsigma)}/dt = \dot{x}^{(\varsigma)}$. При наличии N'_c неголономных связей $n = 3N - N_c - N'_c$. Голономные связи называют стационарными или склерономными, если время t не входит в (2.1). Зависящие от времени связи называют нестационарными или реономными.

При наличии N_c голономных связей положение в пространстве материальной системы, состоящей из N материальных точек, можно однозначно определить набором из $K = 3N - N_c$ любых независимых величин q_k ($k = \overline{1, K}$), называемых **обобщенными координатами**. Ими могут быть K из 3N координат $x_i^{(\varsigma)}$ материальных точек, если относительно этих K координат удается разрешить систему (2.1), однако такой способ обычно мало пригоден [84]. Более эффективен такой выбор обобщенных координат, который позволяет упростить построение зависимостей вида Подстановка (2.2) в (2.1) должна обращать последние в тождества, и при построении математической модели материальной системы отпадает необходимость использовать (2.1).

При движении материальной системы ее обобщенные координаты изменяются во времени. Величины $\dot{q}_k = dq_k/dt$ и $\ddot{q}_k = d^2q_k/dt^2$ называют обобщенными скоростиями и обобщенными ускорениями соответственно. Далее полагаем функции (2.2) дважды непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. Тогда с учетом правила суммирования по одинаковым латинским индексам, используемого далее без дополнительного упоминания, можно записать

$$\boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad (2.3)$$

а для вектора ускорения материальной точки $M_{\rm c}$ —

$$\boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = \dot{\boldsymbol{v}}^{(\varsigma)} = \ddot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k \partial q_m} \dot{q}_k \dot{q}_m + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k. \quad (2.4)$$

Ясно, что в случае стационарных связей в (2.3) $\partial x^{(\varsigma)}/\partial t = 0$, а в (2.4) $\partial^2 x^{(\varsigma)}/\partial t^2 = 0$ и $\partial^2 x^{(\varsigma)}/(\partial q_k \partial t) = 0$.

Единицами измерения модулей векторов скорости и ускорения являются м/с и м/с² соответственно. Так как в качестве обобщенных координат могут быть выбраны величины, имеющие различный геометрический смысл (расстояния, длины дуг, углы, площади, объемы), а в некоторых случаях и не имеющие непосредственного геометрического толкования, то различны и единицы их измерения, а также единицы измерения обобщенных скоростей и ускорений.

Для материальной системы с голономными связями обобщенные скорости независимы и произвольны, поэтому задание значений обобщенных координат не позволяет предсказать поведение системы в последующие моменты времени. Одновременное задание всех обобщенных координат и обобщенных скоростей системы дает возможность предсказать ее дальнейшее движение.

2.2. Кинематика абсолютно твердого тела

Поведение многих технических устройств можно описать при помощи математических моделей абсолютно твердого тела или систем этих тел. При изучении движения такого тела в пространстве наряду с инерциальной прямоугольной системой координат Ox₁x₂x₃ (неподвижной или движущейся прямолинейно с постоянной скоростью) с репером e_i (i = 1, 2, 3) используют и подвижную систему координат $O'x'_1x'_2x'_3$ (в общем случае неинерциальную), жестко связанную с данным телом, в которой координаты любой точки тела остаются неизменными. Положение последней системы задают *радиус-вектор* $r'(t) = \overrightarrow{OO'}$ и элементы α_{ij} матрицы А поворота penepa, определяющей ориентацию репера $e'_i = \alpha_{ij}e_j$ (i, j = 1, 2, 3) системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ относительно репера системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. П1.1).

В начальном положении тела эти системы координат обычно принимают совпадающими, а переход к текущему положению системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ осуществляют тремя последовательными поворотами ее осей, определяемыми тремя эйлеровыми углами, и затем переносом точки O' в соответствии с вектором r' (см. П1.1). В текущем положении тела введем еще систему координат $O'x_1x_2x_3$, полученную из системы $Ox_1x_2x_3$ ее параллельным переносом в точку O' и поэтому имеющую тот же репер e_i (рис. 2.1).



Рис. 2.1

Положение произвольной точки M тела можно задать либо составляющими x_i радиус-вектора x в системе координат $Ox_1x_2x_3$, либо составляющими x'_i радиус-вектора x' в системе $O'x'_1x'_2x'_3$, либо составляющими r_i радиус-вектора r в системе $O'x_1x_2x_3$, причем, согласно (П1.4), x' = Ar. Связь между этими радиус-векторами определяет соотношение

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{r}' + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}', \qquad (2.5)$$

поскольку $A^{-1} = A^{T}$ (см. П1.1).

Дифференцируя по времени t левую и правую части (2.5) и учитывая, что радиус-вектор x' произвольной точки тела не зависит от t, для вектора скорости v^* этой точки получаем

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}^* = \dot{\boldsymbol{r}}' + \dot{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}' + \dot{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{r}, \qquad (2.6)$$

где $v' = \dot{r}'$ — вектор скорости точки O' относительно точки O. Так как $A^{T}A = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица третьего порядка, то $\dot{A}^{T}A = -A^{T}\dot{A}$. Поскольку $(\dot{A}^{T}A)^{T} = A^{T}\dot{A}$, заключаем, что матрица $\dot{A}^{T}A$ кососимметрическая и для нее можно ввести обозначение

$$\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = egin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\dot{A}^{T}Ar = \omega \times r$ и вместо (2.6) запишем

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad (2.7)$$

где ω — вектор *угловой скорости* вращения тела. Дифференцированием (2.5) по времени *t* можно также получить $v^* = v' + \dot{r}$ и из сопоставления с (2.7) записать

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{2.8}$$

Вектор ускорения произвольной точки тела находим, дифференцируя (2.7) по t и учитывая (2.8): $w^* = \dot{v} = \dot{v}' + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} = w' + \varepsilon^{\circ} \times x + \omega \times (\omega \times r)$, где $w' = \dot{v}'$ — вектор ускорения точки O', $\varepsilon^{\circ} = \dot{\omega}$ — вектор ускорения.

Если материальное тело не является абсолютно твердым, а представляет собой систему *материальных точек* с заданными уравнениями связей, то при движении такой системы радиус-вектор x', определяющий положение некоторой материальной точки в системе координат $O'x'_1x'_2x'_3$, в общем случае будет зависеть от времени t. Теперь с учетом (2.8) запишем

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_{r}, \qquad (2.9)$$

где $v_r = A^T \dot{x}'$ — вектор относительной скорости материальной точки относительно системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$, но с компонентами, определенными в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда вместо (2.7) для вектора v_a абсолютной скорости этой точки получим

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r, \tag{2.10}$$

где $v_e = v' + \omega \times r$ — вектор ее переносной скорости.

Относительную скорость v_r в (2.9) можно рассматривать как локальную производную радиус-вектора x' по времени при условии, что ориентация ортов системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ остается неизменной в пространстве, т.е. матрица \dot{A}^{T} является нулевой. Заменив в (2.9) r на v_r , запишем

$$\dot{\boldsymbol{v}}_r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{w}_r, \qquad (2.11)$$

где $w_r = A^T \ddot{x}'$ — локальная производная вектора v_r по времени, являющаяся вектором *относительного ускорения* материальной точки относительно системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$, но с компонентами, определенными в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Дифференцируя (2.11) по t и учитывая (2.9) и (2.11), находим вектор w_a абсолютного ускорения этой точки:

$$w_{a} = \dot{v}_{a} = \dot{v}' + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} + \dot{v}_{r} = w' + \varepsilon^{\circ} \times r + \omega \times (\omega \times r + v_{r}) + \omega \times v_{r} + w_{r} = w_{e} + w_{r} + w_{c}, \quad (2.12)$$

где $w_e = w^* = w' + \varepsilon^{\circ} \times r + \omega \times (\omega \times r)$ — вектор переносного ускорения этой точки; $w_c = 2\omega \times v_r$ — вектор кориолисова (или поворотного) ускорения этой точки.

Равенства (2.10) и (2.12) выражают теоремы сложения скоростей и ускорений материальной точки.

2.3. Основные динамические величины материальной системы

При изучении движения материальной системы важное значение имеют понятия и величины, характеризующие распределение масс в этой системе. Простейшее из таких понятий — центр инерции (или центр масс) — геометрическая точка, положение которой определяет радиус-вектор

$$\boldsymbol{x}_{C} = \frac{1}{m^{*}} \sum_{i=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}, \qquad (2.13)$$

где $m^* = \sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma}$ — масса системы, состоящей из N материальных точек; m_{ς} — масса материальной точки с номером $\varsigma = \overline{1, N}$; $x^{(\varsigma)}$ радиус-вектор материальной точки в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. При движении системы материальных точек положение центра инерции изменяется не только по отношению к этой системе координат, но и по отношению к материальным точкам этой системы. Для абсолютно твердого тела массой m^*

$$\boldsymbol{x}_{C} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{x}_{C}' = \boldsymbol{r}' + \frac{1}{m^{*}} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{x}'^{(\varsigma)},$$

где r' — радиус-вектор начала системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$, жестко связанной с телом; x'_C — радиус-вектор центра инерции в этой системе

координат, остающийся в ней неизменным; $x'^{(\varsigma)}$ — заданный в системе координат $O'x'_1x'_2x'_3$ радиус-вектор принадлежащей телу материальной точки массой m_{ς} .

Пусть О — начало инерциальной прямоугольной системы координат Ох₁х₂х₃. Момент инерции материальной системы относительно оси ОА, направленной по орту *e*, определяют соотношением

$$J_{OA} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} h_{\varsigma}^{2} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \left(|\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^{2} - (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x}^{(\varsigma)})^{2} \right), \qquad (2.14)$$

где h_{ς} — расстояние материальной точки с номером $\varsigma = \overline{1, N}$ до оси OA. Единицей измерения момента инерции является кг · м².

Учитывая свойства операций умножения векторов (см. П1.1) и равенство $e^{^{\mathrm{T}}} \cdot \widehat{\mathbf{I}}_2 \cdot e = 1$, где $(\cdot)^{^{\mathrm{T}}}$ — символ транспонирования, $\widehat{\mathbf{I}}_2$ — единичный тензор второго ранга, можно записать

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^2 - (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x}^{(\varsigma)})^2 &= \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \cdot |\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^2 \, \widehat{\mathbf{I}}_2 \cdot \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x}^{(\varsigma)})(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}) = \\ &= \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \cdot \left(|\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^2 \, \widehat{\mathbf{I}}_2 - \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \otimes \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \right) \cdot \boldsymbol{e}. \end{aligned}$$

Тогда (2.14) примет вид квадратичной формы $J_{OA} = e^{T} \cdot \hat{J}_{O} \cdot e$, образованной *тензором второго ранга*

$$\widehat{\mathbf{J}}_{O} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \big(|\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^{2} \widehat{\mathbf{I}}_{2} - \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \otimes \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \big), \qquad (2.15)$$

определенным для точки O и называемым *тензором инерции* материальной системы в этой точке.

Тензору $\widehat{\mathbf{J}}_O$ можно сопоставить симметрическую матрицу

$$\begin{pmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{pmatrix}, \quad J_{ij} = J_{ji} = \sum_{\varsigma=1}^N m_\varsigma x_i^{(\varsigma)} x_j^{(\varsigma)}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

диагональные элементы которой

$$J_{1} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \left((x_{2}^{(\varsigma)})^{2} + (x_{3}^{(\varsigma)})^{2} \right), \quad J_{2} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \left((x_{3}^{(\varsigma)})^{2} + (x_{1}^{(\varsigma)})^{2} \right),$$
$$J_{3} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \left((x_{1}^{(\varsigma)})^{2} + (x_{2}^{(\varsigma)})^{2} \right)$$

являются моментами инерции J_i относительно координатных осей Ox_i , а взятые с обратным знаком внедиагональные элементы — центробежными моментами инерции.

При движении системы материальных точек компоненты тензора инерции изменяются вследствие изменения расположения этих точек по отношению к принятой координатной системе и их взаимного расположения. Тензор инерции абсолютно твердого тела, определенный в системе координат, жестко связанной с этим телом, при движении остается неизменным.

Тензор инерции в силу его симметричности можно привести к главным осям инерции. Диагональные компоненты тензора \hat{J} , приведенного к таким осям, называют главными моментами инерции.

Материальная точка массой m_{ς} , двигаясь со скоростью $v^{(\varsigma)}$, имеет кинетическую энергию $K_{\varsigma}^* = (m_{\varsigma}/2)v^{(\varsigma)} \cdot v^{(\varsigma)}$, измеряемую в джоулях (Дж = кг · м²/c²). Система из N материальных точек обладает кинетической энергией

$$K^* = \frac{1}{2} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \frac{1}{2} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} |\boldsymbol{v}^{(\varsigma)}|^2.$$
(2.16)

Если подставить (2.3) в (2.16) и ввести обозначения

$$K_{km} = K_{mk} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_{k}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_{m}}, \quad B_{k} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_{k}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t},$$
$$K_{0}^{*} = \frac{1}{2} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t} \right|^{2}, \quad K_{1}^{*} = B_{k} \dot{q}_{k}, \quad K_{2}^{*} = \frac{1}{2} K_{km} \dot{q}_{k} \dot{q}_{m}, \quad k, m = \overline{1, K},$$

где *К* — число *обобщенных скоростей q*_k системы материальных точек, то получим

$$K^* = K_0^* + K_1^* + K_2^*. (2.17)$$

В случае стационарных связей выбирают обобщенные координаты q_k так, чтобы время t явно не входило в (2.2). Тогда $B_k = 0$ и $K_0^* = 0$ и кинетическая энергия системы, подчиненной стационарным связям, будет являться квадратичной формой обобщенных скоростей в виде $K^* = \frac{1}{2} K_{km} \dot{q}_k \dot{q}_m$.

Как следует из определения (2.16), кинетическая энергия всегда неотрицательна ($K^* = 0$ лишь при условии $v^{(\varsigma)} = 0$, $\varsigma = \overline{1, N}$). Поэтому в случае стационарных связей матрица, образованная из элементов K_{km} , $k, m = \overline{1, K}$, является положительно определенной. Можно показать [78], что в случае нестационарных связей слагаемое K_2^* в (2.17) остается положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей.

Если материальная точка с радиус-вектором $x^{(\varsigma)}$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ принадлежит абсолютно твердому телу, сохраняющему при своем движении точку O неподвижной, то, используя (2.7) при $v' \equiv 0$, с учетом равенства $\omega^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{I}}_2 \cdot \omega = |\omega|^2$, где ω — вектор *угловой скорости* вращения тела, и свойств операций умножения векторов (см. П1.1), запишем

$$\boldsymbol{v}^{(\varsigma)} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}^{(\varsigma)})) =$$

= $|\boldsymbol{\omega}|^2 |\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}^{(\varsigma)})^2 = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot (|\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}|^2 \widehat{\mathbf{I}}_2 - \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \otimes \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$ (2.18)

Подставляя этот результат в (2.16) и учитывая (2.15), для рассматриваемого тела находим кинетическую энергию $K^* = \frac{1}{2} \omega^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_O \cdot \omega$.

В общем случае движения абсолютно твердого тела для принадлежащей ему материальной точки с радиус-вектором $r^{(\varsigma)}$ в системе координат $O'x_1x_2x_3$ (см. рис. 2.1), движущейся вместе с телом со скоростью v', в соответствии с (2.7) и с учетом (2.18) запишем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} &= (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) \cdot (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) = \\ &= |\boldsymbol{v}'|^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) + 2\boldsymbol{r}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) = \\ &= |\boldsymbol{v}'|^2 + 2(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}^{(\varsigma)} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \left(|\boldsymbol{r}^{(\varsigma)}|^2 \widehat{\mathbf{I}}_2 - \boldsymbol{r}^{(\varsigma)} \otimes \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.16) и учитывая (2.13) и (2.15), получаем $K^* = \frac{1}{2} (m^* |v'|^2 + 2M(v' \times \omega) \cdot r_C + \omega^T \cdot \hat{\mathbf{J}}_{O'} \cdot \omega)$, где r_C — радиус-вектор центра инерции тела в системе координат $O'\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$, $\hat{\mathbf{J}}_{O'}$ — тензор инерции тела относительно точки O'.

Если поместить начало системы координат $O'x_1x_2x_3$ (см. рис. 2.1) в центр инерции материальной системы, имеющий в системе координат $Ox_1x_2x_3$ радиус-вектор $\boldsymbol{x}_C = \boldsymbol{r}'$, т. е. $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0}$, то положение материальной точки массой m_{ς} будет определяться радиус-вектором $\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{x}_C + \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}$, а вектор скорости этой точки, согласно (2.10), будет равен $\boldsymbol{v}_a^{(\varsigma)} = \boldsymbol{v}_C + \dot{\boldsymbol{r}}^{(\varsigma)}$, где $\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{x}}_C$ — вектор скорости центра инерции системы. Тогда для кинетической энергии запишем

$$K^* = \frac{1}{2} \sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} |\boldsymbol{v}_a^{(\varsigma)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} (|\boldsymbol{v}_C|^2 + |\dot{\boldsymbol{r}}^{(\varsigma)}|^2) + \boldsymbol{v}_C \left(\sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{r}}^{(\varsigma)} \right).$$

Поскольку

$$\sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{r}}^{(\varsigma)} = \frac{d}{dt} \sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} \boldsymbol{r}^{(\varsigma)} = m^* \boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0},$$

в итоге получим

$$K^* = rac{1}{2}m^*|m{v}_C|^2 + rac{1}{2}\sum_{arsigma=1}^N m_arsigma|\dot{m{r}}^{(arsigma)}|^2.$$

Вектор, равный произведению массы m_{ς} материальной точки и вектора $v^{(\varsigma)}$ ее скорости относительно неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, называют количеством движения этой точки $Q_v^{(\varsigma)} = m_{\varsigma}v^{(\varsigma)}$. Единица измерения модуля этого вектора — кг · м/с. С учетом (2.13) главный вектор количества движения материальной системы

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} = m^* \dot{\boldsymbol{x}}_C = m^* \boldsymbol{v}_C.$$
(2.19)

Момент количества движения материальной точки относительно точки O, называемый также кинетическим моментом, равен $L_O^{(\varsigma)} = x^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} v^{(\varsigma)}$. Единицей измерения модуля этого вектора является кг · м²/с. Определим главный момент количества движения материальной системы в целом с учетом (2.10) и (2.13) и преобразований, аналогичных (2.18):

$$\begin{split} \boldsymbol{L}_{O} &= \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) \times m_{\varsigma} (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_{r}^{(\varsigma)}) = \\ &= \boldsymbol{r}' \times m^{*} (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{C}) + \boldsymbol{r}_{C} \times m^{*} \boldsymbol{v}' + \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{r}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(\varsigma)}) + \\ &+ \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{r}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} \boldsymbol{v}_{r}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q}_{v}^{(e)} + \boldsymbol{r}_{C} \times m^{*} \boldsymbol{v}' + \widehat{\boldsymbol{J}}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{L}_{O'}^{(r)}, \end{split}$$

где $Q_v^{(e)} = m^*(v' + \omega \times r_C)$ — главный вектор переносного количества движения; $L_{O'}^{(r)} = \sum_{\varsigma=1}^N r^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} v_r^{(\varsigma)}$ — главный момент количеств относительного движения материальных точек относительно точки O'; $v_r^{(\varsigma)}$ — относительная скорость материальной точки массой m_{ς} .

Если материальная система является абсолютно твердым телом, а оси системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ (см. рис. 2.1) жестко связаны с ним, то $v_r = 0$, $Q_v = m^*(v' + \omega \times x'_C)$ и $L_O = r' \times Q_v + x'_C \times m^*v' + \hat{\mathbf{J}}_{O'} \cdot \omega$, где x'_C — радиус-вектор центра инерции в этой системе координат.

.د

2.4. Работа и потенциальная энергия материальной системы

Вектор δu любого бесконечно малого перемещения материальной точки, допускаемого наложенными на нее в фиксированный момент времени t связями, называют возможным перемещением. В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ оно совпадает с вариацией δx радиус-вектора этой точки. Используя (2.2), можно записать $\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k$, $k = \overline{1, K}$, где q_k — вариации обобщенных координат q_k , тогда как для элементарного действительного перемещения точки с радиус-вектором x получим $dx = \frac{\partial x}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial x}{\partial t} dt$. В случае голономных стационарных связей время t явно не входит в (2.1) и (2.2). Тогда dx будет одним из возможных перемещений. Вариацию δx при фиксированном t называют изохронной.

Работу $P \cdot \delta x$ силы P на возможном перемещении δx точки ее приложения называют *возможной*. Единицей измерения модуля вектора силы является ньютон (H = кг · м/c²), а для измерения работы (как и любого вида энергии) используют джоуль (Дж) (см. 2.3).

Если в N точках M_{ς} ($\varsigma = \overline{1, N}$) материальной системы приложены силы $P^{(\varsigma)}$, то возможная работа этих сил будет

$$\delta A_P = \sum_{\varsigma=1}^N P^{(\varsigma)} \cdot \delta x^{(\varsigma)},$$

где $\delta x^{(\varsigma)}$ — возможное перемещение точки M_{ς} . Заменив возможные перемещения вариациями δq_k $(k = \overline{1, K})$ обобщенных координат, с учетом правила суммирования по одинаковым индексам запишем

$$\delta A_P = \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \delta q_k = \delta q_k \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} = Q_k \delta q_k, \qquad (2.20)$$

где

$$Q_k = \sum_{\varsigma=1}^{N} \mathbf{P}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \quad - \qquad (2.21)$$

обобщенная сила, отнесенная к обобщенной кординате q_k , называемой в этом случае обобщенным перемещением. Вместо использования (2.21) для нахождения Q_k удобнее вычислить $\delta A_P = \delta A_P^{(k)}$ для такого возможного перемещения, при котором $\delta q_m = 0$ для всех $m = = \overline{1, K}$, кроме m = k, и тогда из (2.20) получим $Q_k = \delta A_P^{(k)} / \delta q_k$. Положение материальной точки M_{ς} при относительном движении материальной системы определяет радиус-вектор $x'^{(\varsigma)}$ в подвижной системе координат $O'x'_1x'_2x'_3$ (см. рис. 2.1), поэтому $x^{(\varsigma)} = r'(t) + x'^{(\varsigma)}$, где r'(t) — заданная функция времени t, определяющая положение точки O' относительно точки O. Тогда $\delta x^{(\varsigma)} = \delta x'^{(\varsigma)}$ и в (2.21) $x^{(\varsigma)}$ следует заменить на $x'^{(\varsigma)}$.

Для точки M_{ς} абсолютно твердого тела $\delta x^{(\varsigma)} = \delta r' + \delta \vartheta \times x'^{(\varsigma)}$, где $\delta r'$ — возможное перемещение начала O' системы координат $O' x'_1 x'_2 x'_3$, жестко связанной с этим телом, а $\delta \vartheta$ — вектор возможного поворота тела. Тогда

$$\delta A_P = \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{r}' + \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot (\delta \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{x}'^{(\varsigma)}) = \boldsymbol{P}^* \cdot \delta \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{M}_{O'}^* \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta},$$

где

$$P^* = \sum_{\varsigma=1}^N P^{(\varsigma)}$$
 и $M^*_{O'} = \sum_{\varsigma=1}^N x'^{(\varsigma)} imes P^{(\varsigma)}$ -

главный вектор системы действующих на тело сил и главный момент этой системы сил относительно точки O' соответственно.

На действительном бесконечно малом перемещении dx точки M приложения силы P элементарная работа этой силы $d'A_P = P \cdot dx$ (символ d' указывает, что правая часть этого равенства не обязательно является полным дифференциалом). При конечном перемещении этой точки из одного положения (1) в другое (2) получим

$$A_P^{12} = \int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{x}.$$
 (2.22)

Этот интеграл можно вычислить при известных законах движения точки M и изменения силы.

Если силу P можно выразить через градиент некоторой скалярной функции $U_P(x,t)$ радиус-вектора x ее точки приложения в инерциальной системе координат и времени t, т.е. $P = \nabla U_P$, где ∇ дифференциальный оператор Гамильтона, то такую силу называют потенциальной, а функцию $U_P(x,t)$, определяемую с точностью до постоянного слагаемого и характеризующую действующее на материальную систему силовое поле, — силовой. В случае, когда эта функция не зависит от t, силовое поле считают стационарным. Тогда с учетом (2.22) получим

$$A_P^{12} = \int_{(1)}^{(2)} \nabla U_P \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{(1)}^{(2)} dU_P = U_P^{(2)} - U_P^{(1)}, \qquad (2.23)$$

т. е. работа не зависит от конкретного пути перехода точки приложения силы из начального положения (1) в конечное (2).

Функцию $\Pi^*(\boldsymbol{x},t) = -U_P(\boldsymbol{x},t)$ называют **потенциальной энерги**ей силового поля. Если ее принять равной нулю в некоторой точке M_0 , то из (2.23) следует, что потенциальная энергия в точке M равна работе потенциальной силы \boldsymbol{P} на перемещении точки приложения этой силы из положения M в положение M_0 .

Если аргументами силовой функции являются радиус-векторы точек приложения системы потенциальных сил $P^{(\varsigma)}$ и, быть может, время t, то $P^{(\varsigma)} = (\partial U_P / \partial x_i^{(\varsigma)}) e_i$, где $x_i^{(\varsigma)}$ — координаты радиус-вектора $x^{(\varsigma)} =$ $= x_i^{(\varsigma)} e_i \ (i = 1, 2, 3)$ точки приложения силы $P^{(\varsigma)}$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ с *репером* e_i . При стационарных голономных связях время tявно не входит в (2.2), и в случае стационарного силового поля можно записать

$$dA_P = \sum_{\varsigma=1}^{N} P^{(\varsigma)} \cdot dx^{(\varsigma)} =$$

= $\sum_{\varsigma=1}^{N} \frac{\partial U_P}{\partial x_i^{(\varsigma)}} e_i \cdot \frac{\partial x_j^{(\varsigma)}}{\partial q_k} e_j dq_k = \sum_{\varsigma=1}^{N} \frac{\partial U_P}{\partial x_i^{(\varsigma)}} \frac{\partial x_j^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \delta_{ij} dq_k = \frac{\partial U_P}{\partial q_k} dq_k =$
= $dU_P = -d\Pi^*, \quad k = \overline{1, K}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.24)$

где δ_{ij} — символ Кронекера, т.е. элементарная работа системы потенциальных сил является полным дифференциалом, а работа не зависит от конкретного пути перехода материальной системы из начального положения в конечное. Из (2.24) для обобщенной силы имеем

$$Q_k = \frac{\partial U_P}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_k}, \qquad (2.25)$$

а признаком потенциальности обобщенных сил является равенство $\partial Q_k/\partial q_m = \partial Q_m/\partial q_k$. Если силовое поле не является стационарным, то $\Pi^* = \Pi^*(q_1, \ldots, q_K, t)$ и по-прежнему $Q_k = -\partial \Pi^*/\partial q_k$, но элементарная работа уже не будет полным дифференциалом силовой функции, поэтому работа системы сил будет, вообще говоря, зависеть от конкретного

пути перехода материальной системы из начального положения в конечное.

Используя (2.3) и (2.21), *мощность* при действительном движении материальной системы можно представить в виде

$$W_P = \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t}\right) = Q_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t},$$

где $v^{(\varsigma)}$ — вектор скорости материальной точки с номером ς . Единицей измерения мощности является ватт (Вт = Дж/с).

Материальная система может двигаться в сопротивляющейся среде, влияние которой механически проявляется в том, что на каждую точку системы действует сила $P_D^{(\varsigma)}$, зависящая от скорости $v^{(\varsigma)}$ этой точки и имеющая направление, противоположное направлению вектора $v^{(\varsigma)}$. При малых скоростях можно считать эту зависимость линейной, т.е. $P_D^{(\varsigma)} = -\mu_D^{(\varsigma)} v^{(\varsigma)}$, где $\mu_D^{(\varsigma)} \ge 0$ —коэффициент сопротивления. Мощность

$$W_D = -\sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}_D^{(\varsigma)} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma=1}^N \mu_D^{(\varsigma)} |\boldsymbol{v}^{(\varsigma)}|^2,$$

расходуемую в этом случае на преодоление сопротивления, называют мощностью диссипации. В случае стационарных голономных связей, используя (2.3) при $\partial x^{(\varsigma)}/\partial t = 0$, можно перейти к обобщенным скоростям \dot{q}_k и для соответствующих им обобщенных сил сопротивления получить

$$Q_k = B_{km} \dot{q}_m, \quad B_{km} = \sum_{\varsigma=1}^N \mu_D^{(\varsigma)} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_m}, \quad k, m = \overline{1, K}.$$
(2.26)

При этом $W_D = Q_k \dot{q}_k = B_{km} \dot{q}_m \dot{q}_k.$

2.5. Уравнения динамики материальной системы

При мысленном освобождении материальной системы от наложенных на нее связей для сохранения поведения этой системы к ее материальным точкам M_{ς} ($\varsigma = \overline{1, N}$) необходимо приложить вполне определенные силы $R^{(\varsigma)}$, называемые **реакциями связей**. Тогда каждую материальную точку можно рассматривать как свободную и уравнение ее движения записать в виде

$$m_{\varsigma}\boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} + \boldsymbol{R}^{(\varsigma)}, \qquad (2.27)$$

где $w^{(\varsigma)}$ — вектор ускорения этой точки; $P^{(\varsigma)}$ — приложенная к ней заданная внешняя сила, которую в отличие от реакции связи обычно называют активной. Говорят, что при записи (2.27) использован принцип освобождения от связей.

Возможная работа реакций связей на возможных перемещениях $\delta x^{(\varsigma)}$ материальных точек рассматриваемой системы имеет вид

$$\delta A'_P = \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{R}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}.$$

Если $\delta A'_{P} = 0$, то связи называют идеальными.

В систему 3N уравнений (2.27) входят 6N неизвестных $w_i^{(\varsigma)}$ и $R_i^{(\varsigma)}$. В случае идеальных голономных связей должны быть заданы еще N_c уравнений вида (2.1), из которых следуют N_c ограничений на вариации $\delta x_i^{(\varsigma)}$ составляющих радиус-вектора $x^{(\varsigma)}$ в форме

$$\sum_{\upsilon=1}^{N_{\rm c}} \frac{\partial f_\upsilon}{\partial x_i^{(\varsigma)}} \, \delta x_i^{(\varsigma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти ограничения при помощи неопределенных множителей Лагранжа λ_v введем в условие $\delta A'_P = 0$ идеальности связей:

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \left(R_{i}^{(\varsigma)} - \sum_{\upsilon=1}^{N_{c}} \lambda_{\upsilon} \frac{\partial f_{\upsilon}}{\partial x_{i}^{(\varsigma)}} \right) \delta x_{i}^{(\varsigma)} = 0.$$

Если выбрать $N_{\rm c}$ значений λ_v так, чтобы обратились в нуль множители при $N_{\rm c}$ вариациях $\delta x_i^{(\varsigma)}$, которые будем считать зависимыми от ограничений, т.е.

$$R_i^{(\varsigma)} - \sum_{\nu=1}^{N_c} \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i^{(\varsigma)}} = 0, \qquad (2.28)$$

то остальные вариации будут произвольными и для них также должно быть справедливо (2.28), что позволяет найти реакции связей. Объединяя (2.27) с (2.28), получаем **уравнения Лагранжа первого рода**

$$m_{\varsigma}\boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} + \sum_{\upsilon=1}^{N_{c}} \lambda_{\upsilon} \frac{\partial f_{\upsilon}}{\partial x_{i}^{(\varsigma)}} \boldsymbol{e}_{i}, \quad \varsigma = \overline{1, N}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.29)$$

где e_i — орты репера прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Эти уравнения совместно с (2.1) описывают движение материальной системы. Реакции связей можно рассматривать как равнодействующие сил взаимодействия между парами материальных точек с номерами ς и μ . Эти силы, согласно третьему закону Ньютона, попарно равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. $\mathbf{R}_{\mu}^{(\varsigma)} = -\mathbf{R}_{\varsigma}^{(\mu)}$. Поэтому сумма всех этих сил равна нулевому вектору, т. е.

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{R}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{0}.$$
 (2.30)

Для момента рассматриваемой пары сил, лежащих на прямой, проходящей через указанные точки с радиус-векторами $x^{(\varsigma)}$ и $x^{(\mu)}$ соответственно, запишем $x^{(\varsigma)} \times R^{(\varsigma)}_{\mu} + x^{(\mu)} \times R^{(\mu)}_{\varsigma} = (x^{(\varsigma)} - x^{(\mu)}) \times R^{(\varsigma)}_{\mu} = 0$, поскольку векторы $x^{(\varsigma)} - x^{(\mu)}$ и $R^{(\varsigma)}_{\mu}$ коллинеарные. Суммируя это равенство по всем парам точек, получаем

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times \boldsymbol{R}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{0}.$$
 (2.31)

Суммируя (2.27) по с и учитывая (2.30), находим

$$\sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{P}^*,$$

где P^* — славный вектор системы активных сил. Отсюда, полагая $m_{\varsigma} = \text{const}$ и принимая во внимание, что $w^{(\varsigma)} = \dot{v}^{(\varsigma)}$, получаем с учетом (2.19) закон сохранения количества движения материальной системы в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{\varsigma=1}^{N}m_{\varsigma}\boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = \frac{d(m^{*}\boldsymbol{v}_{C})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{Q}_{v}}{dt} = \sum_{\varsigma=1}^{N}\boldsymbol{P}^{(\varsigma)} = \boldsymbol{P}^{*}, \qquad (2.32)$$

где m^* и v_C — масса материальной системы и вектор скорости ее центра инерции соответственно; Q_v — главный вектор количества движения этой системы. При $P^* = 0$ из (2.32) следует, что v_C и Q_v будут постоянными векторами.

Умножим левую и правую части (2.27) векторно слева на $x^{(\varsigma)}$ и просуммируем результат по ς :

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)}) = \sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times \boldsymbol{P}^{(\varsigma)}) + \sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times \boldsymbol{R}^{(\varsigma)}).$$

Учитывая (2.31) и равенства $\boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = \ddot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}$ и

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)}) = \frac{d}{dt} \sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}) = \frac{d\boldsymbol{L}_{O}}{dt},$$

где L_O — главный момент количества движения относительно начала системы координат $Ox_1x_2x_3$, приходим в итоге к закону сохранения момента количества движения материальной системы в форме

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \sum_{\varsigma=1}^N (\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \times \boldsymbol{P}^{(\varsigma)}).$$
(2.33)

Умножив левую и правую части (2.27) скалярно на $dx^{(\varsigma)}$ и просуммировав произведение по ς , с учетом равенства $w^{(\varsigma)} \cdot dx^{(\varsigma)} = (1/2)d|v^{(\varsigma)}|^2$ получим

$$dK^* = d\sum_{\varsigma=1}^N \frac{m_{\varsigma}}{2} |\boldsymbol{v}^{(\varsigma)}|^2 = \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot d\boldsymbol{x}^{(\varsigma)} + \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{R}^{(\varsigma)} \cdot d\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}, \qquad (2.34)$$

т.е. дифференциал кинетической энергии материальной системы равен сумме элементарных работ активных сил и реакций связей.

Пусть активные силы являются потенциальными, потенциальная энергия Π^* явно не зависит от времени и на материальную систему наложены идеальные стационарные связи. Тогда $dx^{(\varsigma)}$ будет одним из возможных перемещений (см. 2.4), поэтому для идеальных связей вторая сумма в правой части (2.34) станет равной нулю. Согласно (2.24) первая сумма в правой части (2.34) будет полным дифференциалом, равным $-d\Pi^*$. В итоге (2.34) примет вид $dK^* + d\Pi^* = 0$, или

$$K^* + \Pi^* = \text{const},\tag{2.35}$$

что выражает закон сохранения механической энергии, равной сумме кинетической и потенциальной энергий. Ясно, что (2.35) справедливо, если наряду с потенциальными имеются и такие непотенциальные силы, которые при движении системы не совершают работу. Материальную систему, для которой имеет место (2.35), называют консервативной.

Пусть на материальную систему наложены только идеальные голономные связи. Рассмотрим ее движение относительно инерциальной системы координат Ох₁х₂х₃. Продифференцировав (2.3) по обобщенной скорости \dot{q}_k , для материальной точки с номером $\varsigma = \overline{1, N}$ получим

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial \boldsymbol{q}_k}, \quad k = \overline{1, K}.$$
(2.36)

С учетом (2.2) и (2.3) также запишем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}}{\partial q_k}.$$
(2.37)

Представим возможное перемещение $\delta x^{(\varsigma)}$ через обобщенные координаты q_k в виде $(\partial x^{(\varsigma)}/\partial q_k) \delta q_k$ (см. 2.4), умножим скалярно на него (2.27) и, просуммировав результат по ς , с учетом (2.20) получим

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_{k}} \, \delta q_{k} = \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_{k}} \, \delta q_{k} = Q_{k} \, \delta q_{k}, \quad (2.38)$$

где Q_k — обобщенная сила, отнесенная к обобщенной координате q_k . Приняв во внимание (2.36) и (2.37), преобразуем скалярное произведение векторов в левой части (2.38) к виду

$$\boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} = \ddot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \right) - \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} \right) =$$
$$= \frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}|^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial |\dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}|^2}{\partial q_k}$$

и после подстановки в (2.38) с учетом (2.16) запишем

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial K^*}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0.$$
(2.39)

Вариации δq_k обобщенных координат независимы между собой, поэтому равенство (2.39) будет выполнено при условии равенства нулю множителей при каждой вариации δq_k , т.е. приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K^*}{\partial q_k} = Q_k, \qquad (2.40)$$

называемых уравнениями Лагранжа второго рода. Если выразить K^* и Q_k через q_k и \dot{q}_k , то (2.40) станет системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно K функций $q_k(t)$. Если обобщенные силы Q_k потенциальны, то с учетом (2.25) и в силу независимости потенциальной энергии Π^* от обобщенных скоростей \dot{q}_k (2.40) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad (2.41)$$

где $L = K^* - \Pi^*$ — кинетический потенциал [77] (в аналитической механике часто для L используют термины функция Лагранжа или лагранжиан, которые в математической литературе имеют иной смысл).

В (2.40) и (2.41) не входят наперед неизвестные реакции связей, а число K уравнений в этих системах не зависит от количества материальных точек материальной системы и равно числу ее степеней свободы, что является важным преимуществом по сравнению с уравнениями движения (2.27) в прямоугольной системе координат. Реакции связей можно найти, подставив полученные из решения (2.40) или (2.41) q_k в (2.2) и использовав (2.27) в виде $P^{(\varsigma)} = m_{\varsigma} \ddot{x}^{(\varsigma)} - R^{(\varsigma)}$.

В положении равновесия системы примем потенциальную энергию П* стационарного силового поля равной нулю и $q_k = 0$. В этом положении $Q_k = -\partial \Pi^* / \partial q_k = 0$ (см. 2.6), поэтому представление в его окрестности потенциальной энергии рядом Тейлора будет начинаться с квадратичных слагаемых:

$$\Pi^{*}(q_{1},\ldots,q_{K}) = \frac{1}{2}C_{km}q_{k}q_{m} + \ldots, \quad k, m = \overline{1,K},$$
(2.42)

где $C_{km} = \partial^2 \Pi^* / (\partial q_k \partial q_m)$ — постоянные коэффициенты, поскольку производные вычислены при $q_k = 0$.

Если квадратичная форма в (2.42) положительно-определенная, то при $q_k = 0$ функция П^{*} имеет строгий локальный минимум и в силу *me*оремы Лагранжа положение равновесия устойчиво, т. е. при достаточно малых начальных значениях q_k и \dot{q}_k они будут малыми и в процессе последующего движения. Ограничиваясь в (2.42) лишь квадратичными слагаемыми и представляя в случае стационарных связей кинетическую энергию системы в виде положительно-определенной квадратичной формы $K^* = \frac{1}{2} K_{km} \dot{q}_k \dot{q}_m$ (см. 2.3), из (2.41) получаем однородные уравнения малых колебаний

$$K_{km}\ddot{q}_m + C_{km}q_m = 0 \tag{2.43}$$

относительно устойчивого положения равновесия этой системы.

Производные $\partial x^{(\varsigma)}/\partial q_k$, входящие в выражения для коэффициентов K_{km} , зависят от q_k , но если их вычислить при $q_k = 0$, то эти коэффициенты будут постоянными. Тогда (2.43) станет системой Kлинейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающей гармонические колебания [48] материальной системы, и ее решение можно искать в виде $q_m =$ $= A_m \sin(\omega t + \varphi)$. Это приведет к системе K однородных алгебраических уравнений $A_m(C_{km} - K_{km}\omega^2) = 0$ относительно A_m . Такая система имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(K^{-1}C - E\omega^2) = 0, \qquad (2.44)$$

где К и С — положительно определенные матрицы порядка K с элементами K_{km} и C_{km} соответственно, а Е — единичная матрица порядка K. Так как матрица K^{-1} С также положительно-определенная [151], то все ее собственные значения ω^2 , определяемые из (2.44), положительны. Упорядоченная по мере возрастания последовательность $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots$ $\ldots \leq \omega_K$ образует спектр собственных частот колебаний материальной системы. Каждому значению ω_{α} ($\alpha = \overline{1, K}$) отвечают амплитуда $A_m^{(\alpha)}$ и фаза $\varphi_m^{(\alpha)}$ колебаний обобщенной координаты q_m , и общее решение (2.43) примет вид

$$q_m = \sum_{\alpha=1}^{K} A_m^{(\alpha)} \sin(\omega_{\alpha} t + \varphi_m^{(\alpha)}).$$

Для нахождения $A_m^{(\alpha)}$ и $\varphi_m^{(\alpha)}$ необходимо располагать начальными значениями q_m и \dot{q}_m .

При наличии сопротивления движению материальных точек, используя (2.26) для нахождения обобщенной силы сопротивления, из (2.44) получаем систему K уравнений $K_{km}\ddot{q}_m + B_{km}\dot{q}_m + C_{km}q_m = 0$, решение которой следует искать в виде $q_m = A_m \exp^{\tilde{\lambda}t}$, причем $\tilde{\lambda}$ в общем случае будут комплексными числами [18].

2.6. Основные вариационные принципы аналитической механики

Принципы аналитической механики могут быть не только вариационными. Невариационный принцип представляет собой некоторое общее для всех движений свойство, которое имеет место или для данного момента времени (дифференциальный принцип), или для конечного отрезка времени (интегральный принцип). Например, закон сохранения энергии в виде (2.35) является интегральным невариационным принципом, а второй закон Ньютона в виде (2.27) — дифференциальным невариационным принципом. Вариационный принцип аналитической механики дает признак, по которому отличают действительное поведение (движение или равновесие) материальной системы от любого кинематически возможного при тех же условиях. При таком поведении определенная функция, зависящая от координат и их производных, имеет стационарную точку, которая в некоторых случаях может быть и экстремумом этой функции. Ниже рассмотрим лишь вариационные принципы, сначала дифференциальные, а затем интегральные.

Исторически первым вариационным принципом аналитической механики считают ее «золотое правило» — принцип возможных перемещений, или принцип Лагранжа,

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}_{\Sigma}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} = 0, \qquad (2.45)$$

где $P_{\Sigma}^{(\varsigma)}$ — равнодействующие сил, действующих на материальные точки с номерами $\varsigma = \overline{1, N}$; $\delta x^{(\varsigma)}$ — возможные перемещения этих точек. Этот принцип равносилен условию равновесия материальной системы с голономными стационарными связями. Действительно, в положении равновесия для каждой ее материальной точки $P_{\Sigma}^{(\varsigma)} = 0$, и после умножения этого равенства скалярно на $\delta x^{(\varsigma)}$ получим. что (2.45) — необходимое условие равновесия. Но (2.45) является и достаточным условием равновесия. В самом деле, предположим, что возможная работа (2.45) всех действующих сил равна нулю, но система не находится в равновесии и хотя бы для одной материальной точки $P_{\Sigma}^{(\varsigma)} \neq 0$. Тогда за малый промежуток времени возникнет некоторое действительное перемещение $dx^{(\varsigma)}$, для которого $\mathbf{P}_{\Sigma}^{(\varsigma)} \cdot dx^{(\varsigma)} \neq 0$. В случае голономных стационарных связей действительное перемещение совпадает с одним из возможных (см. 2.4), и поэтому, суммируя по с, получаем отличие возможной работы от нуля, что противоречит исходному предположению.

Если *связи*, наложенные на материальную систему, к тому же еще и *идеальные*, для которых возможная работа *реакций связей* равна нулю, то вместо (2.45) получим

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} = 0, \qquad (2.46)$$

где $P^{(\varsigma)}$ — заданные активные силы. В этом случае нет необходимости рассматривать реакции связей. Поскольку возможную работу, согласно (2.20), можно выразить через обобщенные силы Q_k и вариации обобщенных координат δq_k , то (2.46) примет вид

$$Q_k \,\delta q_k = 0, \quad k = \overline{1, K}. \tag{2.47}$$

Для голономных связей K в (2.47) совпадает с числом степеней свободы материальной системы, δq_k произвольны и поэтому в положении равновесия $Q_k = 0$. В случае стационарного силового поля его потенциальная энергия П^{*} явно не зависит от времени и, следовательно, в положении равновесия такой системы в соответствии с (2.47) $Q_k \, \delta q_k =$ $= -\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_k} \, \delta q_k = \delta \Pi^* = 0$, т.е. П^{*} имеет стационарное значение. Согласно теореме Лагранжа [4], если это стационарное значение соответствует строгому локальному минимуму, то положение равновесия устойчиво.

Обобщением дифференциальных вариационных принципов (2.45) и (2.46) является принцип Даламбера — Лагранжа в виде

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} (\boldsymbol{P}^{(\varsigma)} - m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)}) \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} = 0$$
(2.48)

или с заменой $P^{(\varsigma)}$ на $P_{\Sigma}^{(\varsigma)}$, где m_{ς} и $w^{(\varsigma)}$ — масса и вектор ускорения материальной точки с номером $\varsigma = \overline{1, N}$. Действительное движение материальной системы отличается от кинематически возможных тем, что для него возможная работа сил, включая силы инерции $m_{\varsigma}w^{(\varsigma)}$, равна нулю. Из этого принципа можно вывести уравнения движения системы, когда на нее наложены голономные связи или неголономные, но описываемые линейными соотношениями [78].

Пусть при кинематически возможных движениях каждая материальная точка материальной системы в фиксированный момент времени имеет одинаковые с действительным движением *paduyc-вектор* и вектор скорости, но отличающиеся на $\delta w^{(\varsigma)}$ векторы ускорения. Это за малый промежуток времени Δt с точностью порядка $(\Delta t)^3$ приведет к возможному отличию на $\delta x^{(\varsigma)} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \delta w^{(\varsigma)}$ ее радиус-вектора $x^{(\varsigma)}$. Подставив $\delta x^{(\varsigma)}$ в (2.48) и сократив на $(\Delta t)^2$, получим

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \left(\boldsymbol{P}^{(\varsigma)} - m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} = 0.$$

Отсюда при $m_{\varsigma} = \text{const}$ и в силу независимости $\boldsymbol{P}^{(\varsigma)}$ от $\boldsymbol{w}^{(\varsigma)}$ следует

$$\delta \sum_{\varsigma=1}^{N} \frac{m_{\varsigma}}{2} \left(\frac{\boldsymbol{P}^{(\varsigma)}}{m_{\varsigma}} - \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \right)^2 = \delta Z = 0.$$
 (2.49)

Неотрицательную величину, характеризующую меру отклонения действительного движения системы от сравниваемых с ним возможных движений,

$$Z = \sum_{\varsigma=1}^{N} \frac{m_{\varsigma}}{2} \left(\frac{\boldsymbol{P}^{(\varsigma)}}{m_{\varsigma}} - \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \right)^2 = \sum_{\varsigma=1}^{N} \frac{m_{\varsigma}}{2} \left| \frac{\boldsymbol{P}^{(\varsigma)}}{m_{\varsigma}} - \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \right|^2$$
(2.50)

ввел К. Гаусс и назвал ее *принуждением*. Для действительного движения она принимает наименьшее значение, равное нулю. При этом (2.49) выражает *принцип наименьшего принуждения* (*принцип Гаусса*).

Пусть материальная система с идеальными связями переходит из начального положения, соответствующего моменту времени t_0 , в конечное, соответствующее моменту времени t_1 . При этом материальная точка с номером $\varsigma = \overline{1, N}$ в фиксированный момент времени $t \in (t_0, t_1)$ в своем действительном движении находится в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}(t)$ в прямоугольной системе координат $O_{X_1X_2X_3}$, а при некотором кинематически возможном движении — в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{x}^{(\varsigma)}(t) + \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}(t)$, причем для всех материальных точек этой системы

$$\delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}(t_0) = \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}(t_1) = 0. \tag{2.51}$$

Отличие кинетической энергии этой точки при возможном и действительном движениях с точностью до величин второго порядка малости составит $\frac{1}{2}m_{\varsigma}(\dot{x}^{(\varsigma)} + \delta \dot{x}^{(\varsigma)})^2 - \frac{1}{2}m_{\varsigma}(\dot{x}^{(\varsigma)})^2 \approx m_{\varsigma}\dot{x}^{(\varsigma)} \cdot \delta \dot{x}^{(\varsigma)} = \delta K_{\varsigma}^*$, а для материальной системы в целом

$$\delta K^* = \sum_{\varsigma=1}^N \delta K^*_{\varsigma} = \sum_{\varsigma=1}^N m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)}.$$
(2.52)

В данном случае $\delta \dot{x}^{(\varsigma)}$ — изохронная вариация $\dot{x}^{(\varsigma)}$, для которой операции варьирования и дифференцирования по времени перестановочны. Действительно, $\dot{x}^{(\varsigma)} + \delta \dot{x}^{(\varsigma)} = \frac{d}{dt} \left(x^{(\varsigma)} + \delta x^{(\varsigma)} \right) = \dot{x}^{(\varsigma)} + \frac{d}{dt} \delta x^{(\varsigma)}$, откуда следует

$$\delta \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} = \frac{d\delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)}}{dt}.$$
(2.53)

Преобразуем с учетом (2.53) интеграл по времени от левой части (2.48) интегрированием по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \boldsymbol{w}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} dt =$$
$$= \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varsigma=1}^{N} m_{\varsigma} \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{x}}^{(\varsigma)} dt.$$

Отсюда, учитывая (2.51) и (2.52), получаем интегральный вариационный принцип Гамильтона — Остроградского в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta K^* + \sum_{\varsigma=1}^N \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} \right) dt = 0.$$
 (2.54)

Если (2.54) выполнено для какого-либо кинематически возможного движения, то это движение является действительным, поскольку из (2.54) следует (2.40). В самом деле, так как

$$\sum_{\varsigma=1}^{N} \boldsymbol{P}^{(\varsigma)} \cdot \delta \boldsymbol{x}^{(\varsigma)} = Q_k \, \delta q_k \quad \mathbf{x} \quad \delta K^* = \frac{\partial K^*}{\partial q_k} \, \delta q_k + \frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \, \delta \dot{q}_k, \quad k = \overline{1, K},$$

где Q_k и q_k — обобщенные силы и соответствующие им обобщенные координаты, то вместо (2.54) запишем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \left(\frac{\partial K^*}{\partial q_k} + Q_k \right) \delta q_k \right) dt = 0.$$
 (2.55)

Аналогично (2.51) и (2.53) имеем $\delta q_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0$ и $\delta \dot{q}_k = d(\delta q_k)/dt$. Учитывая эти равенства, интегрированием по частям найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt.$$

Подставляя этот результат в (2.55), получаем

.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K^*}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K^*}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k \, dt = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности подынтегральной функции вытекает (2.39), что равносильно (2.40).

Если $P^{(\varsigma)}$ являются потенциальными силами, то их возможная работа, входящая в (2.54), равна взятой с обратным знаком вариации $\delta \Pi^*$ потенциальной энергии. Тогда вместо (2.54) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K^* - \delta \Pi^*) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt = 0.$$

Здесь $L = K^* - \Pi^*$ — кинетический потенциал, причем δL будет изохронной вариацией, для которой операции варьирования и интегрирования по времени перестановочны [72], что позволяет записать $\delta S_H = 0$, где

$$S_H = \int_{t_0}^{t_1} L \, dt \quad -- \tag{2.56}$$

действие по Гамильтону. Можно показать [84], что среди всех кинематически возможных движений действительному движению системы соответствует минимальное значение S_H, что выражает принцип Гамильтона наименьшего действия.

3. ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Наряду с математическими моделями материальных систем в механике рассматривают модели тел, объем которых заполнен непрерывной материальной средой (так называемой сплошной средой). При изучении свойств сплошной среды слово «точка» часто используют применительно как к точке пространства, так и к частице этой среды. В дальнейшем термин точка будем использовать только для обозначения места в неподвижном пространстве, а термин частица сплошной среды — для обозначения малого элемента сплошной среды.

В любой момент времени t объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью S, занимает некоторую область пространства. Если в выбранной системе координат в этот момент времени установлено соответствие частиц некоторого объема сплошной среды и точек пространства, то это означает, что определена конфигурация сплошной среды. Непрерывный переход от начальной конфигурации в момент времени $t = t_0$ к некоторой последующей (актуальной) конфигурации, сопровождаемый изменением расстояний между частицами, называют процессом деформирования или просто деформированием. При изучении этого процесса учитывают только начальную и конечную конфигурации. Промежуточные состояния, или последовательность конфигураций, через которые происходит деформирование, при этом не рассматривают. Под деформацией понимают изменение формы или размеров области, занятой сплошной средой. Используемый в дальнейшем термин течение служит для обозначения непрерывного (или мгновенного) изменения состояния среды. Изучение истории изменения конфигурации среды является частью исследования течения, для которого задано переменное во времени и в пространстве поле скоростей частиц среды.

3.1. Способы описания движения среды и деформация

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ частица сплошной среды находится в точке P_0 пространства, определяемой радиус-вектором а с проекциями a_I (I = 1, 2, 3) на оси Oa_I прямоугольной системы координат $Oa_1a_2a_3$ (рис. 3.1). Координаты a_I , определяющие положение частицы в начальной конфигурации, называют материальными.



Рис. 3.1

В деформированном состоянии эта частица займет положение P, определяемое радиус-вектором x с проекциями x_k (k = 1, 2, 3) на оси $O'x_k$ в общем случае иной прямоугольной системы координат $O'x_1x_2x_3$. Координаты x_k , задающие положение частицы в актуальной конфигурации, называют пространственными.

Ориентацию осей Oa_I относительно осей $O'x_k$ (см. рис. 3.1) определяют направляющие косинусы $a_{Ik} = a_{kI} = j_I \cdot e_k$, равные скалярным произведениям ортов j_I и e_k , входящих в реперы $\{j_I\}$ и $\{e_k\}$ принятых систем координат. Условия ортогональности осей этих систем координат имеют вид $a_{Ik}a_{kM} = \delta_{IM}$, $a_{kI}a_{Im} = \delta_{km}$, M, m = 1, 2, 3, где δ_{IM}, δ_{km} — символы Кронекера (здесь и далее, как и ранее, при записи формул использовано правило суммирования по одинаковым индексам).

Вектор $u(a_1, a_2, a_3, t)$, соединяющий на рис. 3.1 точки P_0 и P, называют вектором перемещения. Проекции $u_I(a_1, a_2, a_3, t)$ этого вектора в системе координат $Oa_1a_2a_3$ являются функциями материальных координат и времени, причем

$$\boldsymbol{u}(a_1, a_2, a_3, t) = u_I(a_1, a_2, a_3, t) \boldsymbol{j}_I.$$
(3.1)

Этот же вектор в системе координат $O'x_1x_2x_3$ имеет компоненты $U_k(x_1, x_2, x_3, t)$. Обозначив его в этой системе $U(x_1, x_2, x_3, t)$, запишем

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = U_k(x_1, x_2, x_3, t) e_k.$$
(3.2)

Если вектор **b** (см. рис. 3.1) определяет положение начала координат O' относительно точки O, то u = b + x - a. В дальнейшем (без потери общности изложения) будем полагать $b \equiv 0$ и $j_K \equiv e_k$ при K = k = 1, 2, 3,т.е. будем полагать, что системы координат $Oa_1a_2a_3$ и $O'x_1x_2x_3$ совмещены с общим началом в точке O. Тогда

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{U}_k. \tag{3.3}$$

Движение частиц сплошной среды в пространстве можно описать с помощью уравнений вида

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$
 или $x = x(a, t),$ (3.4)

которые задают в пространстве положение частицы, занимавшей в начальной конфигурации положение с материальными координатами a_i . Если в системе пространственных координат задано векторное поле v(x,t) скорости частиц среды с проекциями $v_i(x,t)$, то (3.4) будет решением нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t),$$
 или $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$ (3.5)

при начальном условии $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t_0)$.

Учитывая (3.3), при заданной функции (3.1) находим вектор скорости

$$oldsymbol{v} = rac{doldsymbol{x}}{dt} = rac{doldsymbol{(a+u(a,t))}}{dt} = rac{doldsymbol{u}(a,t)}{dt} = rac{\partialoldsymbol{u}}{\partial t},$$

так как a не зависит от t, а при заданной функции (3.2) —

$$oldsymbol{v} = rac{doldsymbol{x}}{dt} = rac{doldsymbol{(a+U(x,t))}}{dt} = rac{dU(x,t)}{dt} = rac{\partial oldsymbol{U}}{\partial t} + rac{\partial oldsymbol{U}}{\partial x_i}rac{dx_i}{dt},$$

т. е. это равенство задает скорость в неявном виде.

В процессе движения частица среды следует по линии, называемой *траекторией*. В фиксированный момент времени *линией тока* называют кривую, касательная к которой в любой точке этой кривой совпадает по направлению с вектором скорости в этой точке. Движение сплошной среды считают *установившимся* (или *стационарным*), если поле вектора скорости не зависит от времени. При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц.

Для функций $x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$, непрерывно дифференцируемых по материальным координатам, соответствие между векторами x и aбудет в каждый момент времени взаимно однозначным тогда и только тогда, когда отличен от нуля **якобиан**

$$J^{*} = \det\left(\frac{\partial x_{i}}{\partial a_{k}}\right) = \frac{\partial x_{1}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{2}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{3}}{\partial a_{3}} - \frac{\partial x_{1}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{3}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{2}}{\partial a_{3}} + \frac{\partial x_{3}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{1}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{2}}{\partial a_{3}} - \frac{\partial x_{2}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{3}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{3}}{\partial a_{3}} + \frac{\partial x_{2}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{3}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{1}}{\partial a_{3}} - \frac{\partial x_{3}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{2}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{1}}{\partial a_{3}} = e_{ikm}\frac{\partial x_{i}}{\partial a_{1}}\frac{\partial x_{k}}{\partial a_{2}}\frac{\partial x_{m}}{\partial a_{3}} \quad (3.6)$$
системы (3.4). Здесь e_{ikm} — символ Леви-Чивиты. При $J^* \neq 0$ (3.4) можно однозначно разрешить относительно материальных координат:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t),$$
 или $a = a(x, t).$ (3.7)

Описание движения или деформирования сплошной среды при помощи (3.4) называют лагранжевым, а при помощи (3.7) — эйлеровым. При этом материальные и пространственные координаты часто называют лагранжевыми и эйлеровыми соответственно. Лагранжево описание позволяет изучить движение любой фиксированной частицы среды, а эйлерово — поведение среды в любой фиксированной точке пространственной области, занятой этой средой [111]. Эйлерово описание дает возможность найти начальное положение частицы, находящейся в момент времени t в заданной точке пространства.

Если в начальной конфигурации две бесконечно близкие частицы среды имеют материальные координаты a_i и $a_i + \alpha_i$, то в актуальной конфигурации, согласно (3.4), их пространственные координаты будут соответственно $x_i(a,t)$ и $x_i(a + \alpha, t)$, где α — вектор с проекциями α_i , имеющий бесконечно малую длину. Тогда для проекций вектора $\boldsymbol{\xi}$, соединяющего эти частицы в актуальной конфигурации, получим

$$\xi_i = x_i(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\alpha}, t) - x_i(\boldsymbol{a}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \alpha_k + O(|\boldsymbol{\alpha}|^2).$$

Отсюда следует, что при конечных значениях $\partial x_i/\partial a_k$ расстояние $|\alpha|$ между двумя частицами, будучи бесконечно малым в начальной конфигурации, остается бесконечно малым и в актуальной конфигурации.

Продифференцировав первую группу уравнений из (3.4) по материальным координатам a_j , получим тензор второго ранга $\hat{\mathbf{F}}$ с компонентами $F_{ij} = \partial x_i / \partial a_j$, j = 1, 2, 3, называемый материальным градиентом деформации. Если продифференцировать первую группу уравнений из (3.7) по пространственным координатам x_j , то получим тензор второго ранга $\hat{\mathbf{H}}$ с компонентами $H_{ij} = \partial a_i / \partial x_j$, называемый пространственным градиентом деформации. Компоненты тензоров $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ связаны между собой соотношениями $\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} =$ $= \delta_{ij}$, причем $\hat{\mathbf{F}}^{-1} = \hat{\mathbf{H}}$.

Рассмотрим изменение положений двух бесконечно близких частиц, находящихся в начальной конфигурации в точках P_0 и Q_0 (рис. 3.2). Эти частицы в некоторой актуальной конфигурации будут занимать положения P и Q соответственно. Используя (3.7), квадрат расстояния между точками P_0 и Q_0 можно представить в виде

$$|d\boldsymbol{a}|^2 = da_k da_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dx_j = C_{ij} dx_i dx_j, \qquad (3.8)$$



Рис. 3.2

или $|da|^2 = dx^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot dx$. Тензор второго ранга $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}$ с компонентами $C_{ij} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$ называют **тензором** *деформации Коши*. Здесь и далее одна точка между тензорами означает операцию свертки по одному индексу (см. П1.3). Аналогично при помощи (3.4) найдем квадрат расстояния между точками P и Q:

$$|d\boldsymbol{x}|^2 = dx_k dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} da_i \frac{\partial x_k}{\partial a_j} da_j = G_{ij} da_i da_j, \qquad (3.9)$$

или $|d\boldsymbol{x}|^2 = d\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{G}} \cdot d\boldsymbol{a}$. Тензор второго ранга $\widehat{\mathbf{G}} = \widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$ с компонентами $G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j}$ называют *тензором деформации Грина*.

Если сплошная среда совершает перемещение как абсолютно тверdoe тело, то разность $|dx|^2 - |da|^2 \equiv 0$. В общем случае эта разность служит мерой деформации окрестности двух бесконечно близких частиц среды. Используя (3.8) и (3.9), получаем

$$|d\boldsymbol{x}|^2 - |d\boldsymbol{a}|^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i}\frac{\partial x_k}{\partial a_i} - \delta_{ij}\right) da_i da_j = 2L_{ij} da_i da_j, \qquad (3.10)$$

или $|d\boldsymbol{x}|^2 - |d\boldsymbol{a}|^2 = d\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot (\widehat{\mathbf{G}} - \widehat{\mathbf{I}}_2) \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot 2\widehat{\mathbf{L}} \cdot d\boldsymbol{a}$, где $\widehat{\mathbf{I}}_2$ — единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij} . Тензор второго ранга $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{G}} - \widehat{\mathbf{I}}_2$ с компонентами $L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right)$ называют тензором конечной деформации Грина или лагранжевым тензором конечной деформации. Ту же разность при помощи (3.8) и (3.9) представим в виде

$$|d\boldsymbol{x}|^2 - |d\boldsymbol{a}|^2 = \Big(\delta_{ij} - rac{\partial a_k}{\partial x_i} rac{\partial a_k}{\partial x_i}\Big) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j,$$

где $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right)$ — компоненты тензора второго ранга $\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{I}}_2 - \widehat{\mathbf{C}}$, называемого тензором деформации Альманзи или эйлеровым тензором конечной деформации. Ясно, что тензоры $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{G}}$, $\widehat{\mathbf{L}}$ и $\widehat{\mathbf{E}}$ являются симметричными. Учитывая (3.1) и (3.2), компоненты тензоров $\widehat{\mathbf{L}}$ и $\widehat{\mathbf{E}}$ можно выразить через векторы $u(a_1, a_2, a_3, t)$ и $U(x_1, x_2, x_3, t)$ перемещения:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad \mathbf{M} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right).$$

Тензоры с компонентами $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ называют соответственно материальным и пространственным градиентами перемещения.

В фиксированный момент времени составляющие пространственного градиента поля вектора скорости v = v(x,t) с проекциями v_i на оси прямоугольной системы координат $O_{x_1x_2x_3}$ можно представить в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_{ij} + W_{ij}, \qquad (3.11)$$

где $V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты симметричного **тензора ско**ростей $\widehat{\mathbf{V}}$; $W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты антисимметричного **тензора завихренности** $\widehat{\mathbf{W}}$, которому соответствует **вектор** завихренности $W = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = 2e_{ijk}W_{kj}e_i$. Поле вектора скорости является безвихревым, если $W \equiv \mathbf{0}$ во всех точках рассматриваемой области.

3.2. Тензор малой деформации

Если в процессе перехода некоторого объема сплошной среды от начальной конфигурации в момент времени t_0 к актуальной в момент времени t компоненты материального и пространственного градиентов перемещения малы по сравнению с единицей, т. е. $|\partial u_i/\partial a_j| \ll 1$ и $|\partial U_i/\partial x_j| \ll 1$, i, j = 1, 2, 3, то описание деформирования сплошной среды может быть проведено с использованием теории малой деформации. В этом случае вместо лагранжева тензора конечной деформации используют лагранжев тензор малой деформации $\hat{1}$ с компонентами $l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right)$, а вместо тензора деформации Альманзи — эйлеров тензор малой деформации $\hat{\epsilon}$ с компонентами $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$.

Для широкого класса задач механики сплошной среды, а именно для задач механики деформируемого твердого тела, характерна малость не только градиентов перемещения, но и модуля |u| (или|U|) по сравнению с характерным размером тела. В этом случае различие между пространственными и материальными координатами мало́ и лагранжев и эйлеров тензоры малой деформации можно полагать равными, т. е. $\hat{l} = \hat{\epsilon}$, или $l_{ij} = \epsilon_{ij}$. Далее отождествим эти координаты, а симметричный тензор второго ранга $\hat{\epsilon}$ с компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.12}$$

будем называть тензором малой деформации.

Соотношения Коши (3.12) связывают три составляющие вектора перемещения и с шестью (вследствие симметрии) компонентами тензора деформации $\hat{\varepsilon}$. Следовательно, для определения составляющих вектора перемещения необходимо проинтегрировать шесть уравнений (3.12), считая ε_{ij} заданными функциями пространственных координат. Так как число уравнений больше числа неизвестных, то эта задача может иметь решение только при наложении некоторых дополнительных условий на эти функции. То, что между компонентами $\hat{\varepsilon}$ должны существовать зависимости, следует и из физических соображений: если тело разделить на отдельные элементы и каждый элемент деформировать произвольно, то из этих деформированных элементов не удастся вновь составить сплошное тело.

При установлении указанных условий примем, что сплошная среда занимает односвязную область V, в которой компоненты ε_{ij} являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат. Соединим фиксированную точку $M_0 \in V$ с произвольной точкой $M \in V$ кривой, целиком лежащей в области V. Тогда

$$u_i(M) = u_i(M_0) + \int_{M_0M} du_i = u_i(M_0) + \int_{M_0M} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j,$$

причем для однозначного определения $u_i(M)$ криволинейный интеграл не должен зависеть от пути интегрирования. Так как

$$rac{\partial u_i}{\partial x_j} = rac{1}{2} \Big(rac{\partial u_i}{\partial x_j} + rac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) + rac{1}{2} \Big(rac{\partial u_i}{\partial x_j} - rac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) = arepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты **тензора линейного поворота**, характеризующего поворот окрестности *частицы сплошной среды* как единого жесткого целого, то криволинейный интеграл представим в виде

$$\int_{M_0M} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \int_{M_0M} \varepsilon_{ij} dx_j + \int_{M_0M} \omega_{ij} dx_j.$$
(3.13)

Второй интеграл в правой части (3.13) вычислим по частям:

$$\int_{M_0M} \omega_{ij} dx_j = -\int_{M_0M} \omega_{ij} d(x_j(M) - x_j) = -\omega_{ij} (x_j(M) - x_j) \Big|_{x_j(M_0)}^{x_j(M)} + \\ + \int_{M_0M} (x_j(M) - x_j) d\omega_{ij} = \omega_{ij} (M_0) (x_j(M) - x_j(M_0)) + \\ + \int_{M_0M} (x_j(M) - x_j) \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя тождество

$$2\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = 2\left(\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x_i}\right),$$

в итоге с учетом (3.13) можно записать

$$\int_{M_0M} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \omega_{ij}(M_0) \big(x_j(M) - x_j(M_0) \big) + \int_{M_0M} U_{ik} dx_k,$$

где $U_{ik} = \varepsilon_{ik} + (x_j(M) - x_j) \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right)$. Интеграл в правой части последнего равенства не будет зависеть от пути интегрирования, если подынтегральное выражение будет полным дифференциалом, т.е. $\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_m} = \frac{\partial U_{im}}{\partial x_k}, m = 1, 2, 3$. Тогда с учетом симметрии тензора $\hat{\varepsilon}$ получим равенства

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad (3.14)$$

называемые условиями совместности деформаций, из которых лишь шесть являются независимыми: три условия вида $\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ и три — вида $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1}$ (остальные получаем циклической перестановкой индексов).

Если (3.12) подставить в (3.14), то последние обращаются в тождества, поэтому (3.14) иногда называют **тождествами Сен-Ве**нана. При помощи символа Леви-Чивиты e_{ikm} их можно представить в виде условия равенства нулю компонент $S_{ij} = e_{ikm}e_{jrs}\frac{\partial^2 \varepsilon_{ms}}{\partial x_k \partial x_r} =$ = 0 (r, s = 1, 2, 3) тензора $\widehat{\mathbf{S}}$ несовместности деформаций или в инвариантной по отношению к выбору системы координат форме $\nabla_{x} \times (\nabla_{x} \times \widehat{\varepsilon}) = 0$, где нижний индекс x у *дифференциального оператора* Гамильтона ∇ означает, что дифференцирование проведено по пространственным координатам x_k .

Многосвязную область, мысленно проводя необходимые разрезы, можно свести к односвязной. Но для полученной таким образом односвязной области наряду с выполнением (3.14) необходимо потребовать равенство векторов перемещения в противолежащих точках на краях разрезов. Для тензоров конечной деформации условием совместности является обращение в нуль компонент уже не тензора \hat{S} второго ранга, а *тензора четвертого ранга* [59].

Выясним геометрический смысл компонент тензора $\hat{\varepsilon}$. В предположении малой деформации допустимо в (3.10) заменить L_{ij} на ε_{ij} и записать

$$rac{|dm{x}|^2-|dm{a}|^2}{|dm{a}|^2}=(2+e)e=2arepsilon_{ij}rac{da_i}{|dm{a}|}rac{da_j}{|dm{a}|},$$

где $e = (|d\mathbf{x}| - |d\mathbf{a}|)/|d\mathbf{a}|$ — относительное удлинение линейного материального элемента начальной длины $|d\mathbf{a}|$, имевшего направляющие косинусы $n_i = da_i/|d\mathbf{a}|$ относительно осей прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Отсюда, полагая $|e| \ll 1$ и пренебрегая значением eпо сравнению с 2, находим $e = \varepsilon_{ij}n_in_j$. Если принять, например, $n_1 = 1$ и $n_2 = n_3 = 0$, то $e = \varepsilon_{11}$. Следовательно, диагональная компонента тензора $\hat{\varepsilon}$ соответствует относительному удлинению вдоль оси координат бесконечно малого линейного элемента, первоначально параллельного этой оси.

В случае линейного элемента начальной длины $|da^{(1)}|$ при $n_1 = 1$ и $n_2 = n_3 = 0$ разность перемещений его концов в направлении оси Ox_2 составит $\frac{\partial u_2}{\partial a_1} da_1^{(1)}$, а угол его поворота в плоскости x_1Ox_2 будет $\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \frac{da_1^{(1)}}{(1+\varepsilon_{11})da_1^{(1)}} \approx \frac{\partial u_2}{\partial a_1}$. Аналогично угол поворота в этой плоскости линейного элемента начальной длины $|da^{(2)}|$ при $n_2 = 1$ и $n_1 = n_3 = 0$ составит $\gamma_2 \approx \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \frac{da_2^{(2)}}{(1+\varepsilon_{22})da_2^{(2)}} \approx \frac{\partial u_1}{\partial a_2}$. Угол $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ представляет собой изменение первоначально прямого угла между рассматриваемыми линейными элементами. Его называют углом сдвига в указанной плоскости. Отождествляя при малой деформации материальные и пространственные координаты, получаем $\gamma = \partial u_1/\partial x_2 +$ $+ \partial u_2/\partial x_1 = 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$. Таким образом, компонента ε_{ij} тензора $\hat{\varepsilon}$ при $i \neq j$ соответствует половине изменения угла в плоскости x_iOx_j между двумя бесконечно малыми линейными элементами, первоначально параллельными осям Ox_i и Ox_j . Компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ называют *деформациями сдвига*.

Тензор $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в силу его симметрии можно привести к главным осям OX_i . При этом главные значения ε_i этого тензора называют главными деформациями. Элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям, имевший начальный объем $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$, в результате деформирования будет иметь объем $dV = (1 + \varepsilon_1) dX_1 (1 + \varepsilon_2) dX_2 (1 + \varepsilon_3) dX_3$, поэтому относительное изменение объема при малой деформации составит $\varepsilon_V = (dV - dV_0)/dV =$ $= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_{1\widehat{\varepsilon}}$, где $I_{1\widehat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii}$ — первый инвариант тензора $\hat{\varepsilon}$. Отсюда следует, что деформации сдвига не вызывают изменения объема окрестности частицы среды.

3.3. Плотность и перенос физических субстанций сплошной среды

Количественной характеристикой любой физической субстанции является ее объемная плотность, т.е. количество этой субстанции в единице объема тела, занимающего пространственную область Ω . Рассмотрим окрестность точки $M \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеющую объем ΔV и *диаметр* d, равный точной верхней грани расстояний между двумя произвольными точками этой окрестности. Пусть в этом объеме находится масса Δm некоторой сплошной среды. Предел (если он существует)

$$\lim_{d \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho(M) \tag{3.15}$$

называют плотностью среды в той точке M пространства, к которой стягивается рассматриваемая окрестность при $d \to 0$. Основной (стандартной) единицей измерения плотности среды является кг/м³.

Аналогично можно ввести понятие объемной плотности *энергии* как предел

$$\varepsilon^*(M) = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta E^*}{\Delta V},\tag{3.16}$$

где ΔE^* — количество энергии в объеме ΔV . Основной единицей измерения объемной плотности энергии является Дж/м³. Если объем ΔV содержит электрический заряд ΔQ_e , то предел

$$\rho_e(M) = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta Q_e}{\Delta V} \tag{3.17}$$

называют объемной плотностью электрического заряда, основной единицей измерения которой является Кл/м³ (Кл — кулон является единицей измерения электрического заряда). В некоторых случаях вместо объемной плотности физической субстанции φ удобнее рассматривать ее *массовую плотность* $\varphi^{(m)}$, т.е. количество субстанции, приходящееся на единицу массы среды. Ясно, что $\varphi^{(m)} = \varphi/\rho$.

Если функции $\rho(M)$, $\varepsilon^*(M)$ и $\rho_e(M)$ ограничены в ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и непрерывны в Ω всюду, кроме, быть может, некоторого **множества точек объема нуль**, которое можно заключить внутри области сколь угодно малого объема, то эти функции интегрируемы в области Ω . В дальнейшем пространственную область Ω будем обозначать так же, как и ее объем V. Тогда для массы m, энергии E^* и электрического заряда Q_e в этой области можно записать

$$m = \int_{V} \rho(M) \, dV, \quad E^* = \int_{V} \varepsilon^*(M) \, dV, \quad Q_e = \int_{V} \rho_e(M) \, dV. \tag{3.18}$$

Понятие объемной плотности применимо не только к физическим субстанциям, выражаемым скалярными величинами (массе, энергии, заряду), но и к субстанциям, выражаемым векторными величинами. Пусть векторное поле скорости движения среды задано векторной функцией v = v(x,t), зависящей в общем случае от времени t и координат x_i , i = 1, 2, 3, радиус-вектора $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, определяющего положение точки пространства относительно декартовой прямоугольной системы пространственных координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами e_i (рис. 3.3). Тогда произведение ρv будет вектором объемной плотности количества движения сплошной среды. Аналогично векторное произведение $x \times (\rho v)$ является вектором объемной плотности момента количества движения среды относительно начала координат. Модули этих векторов измеряют в $\kappa r/(m^2 \cdot c) = H \cdot c/m^3$ и $\kappa r/(m \cdot c) = = H \cdot c/m^2$ соответственно.



Рис. 3.3

Если ρv — непрерывная функция координат в пространственной области объемом V всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль, то для находящейся в этой области среды

векторы количества движения и момента количества движения можно представить соответственно в виде

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}} = \int_{V} \rho \boldsymbol{v} \, dV, \qquad \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{v}} = \int_{V} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV. \tag{3.19}$$

Большинство процессов в технике и в технологии связано с переносом в пространстве конкретных физических субстанций: массы, энергии, электрического заряда, количества движения или его момента. Интенсивность переноса физической субстанции определяют плотностью потока, равной количеству субстанции, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса. Выделяют перенос субстанции конвективный (или молярный) и диффузионный (или молекулярный).

Конвективный перенос физической субстанции связан с движением сплошной среды, определяемым векторным полем ее скорости v = $= v(M,t), M \in \mathbb{R}^3$, в момент времени t. Для физической субстанции, выражаемой скалярной величиной, плотность потока конвективного переноса является вектором, коллинеарным вектору скорости v и равным произведению v и объемной плотности этой субстанции. Так, направление и интенсивность конвективного переноса массы определяет вектор плотности потока массы ρv , совпадающий с вектором объемной плотности количества движения среды и имеющий одинаковую с ним единицу измерения модуля.

Направление и интенсивность конвективного переноса энергии и заряда определяют соответственно вектором $\varepsilon^* v$ плотности потока энергии и вектором $\rho_e v$ плотности электрического тока. Модули этих векторов измеряют в Bt/m^2 и A/m^2 соответственно (A — ампер является основной единицей измерения силы электрического тока).

Диффузионный перенос физических субстанций может происходить и при отсутствии направленного движения среды (например, при хаотическом молекулярном движении в жидкости, газе или плазме и тепловом движении ионов, атомов и молекул в твердом теле). При неравномерном пространственном распределении в среде некоторой физической субстанции объемной плотностью C хаотическое движение микрочастиц среды постепенно приводит к выравниванию этого распределения. В изотропной среде, свойства которой одинаковы во всех направлениях, диффузионный перенос физической субстанции, вызванный неравномерным пространственным распределением скалярной величины C, происходит в направлении убывания объемной плотности, т.е. в направлении, противоположном направлению *градиента* $\nabla_x C$ *скалярного поля*, задаваемого в пространстве в текущий момент времени t функцией C(x,t).

При построении математических моделей (MM) широко используют эмпирический закон диффузионного переноса

$$\boldsymbol{j}^{(C)} = -K^{(C)} \nabla_{\boldsymbol{x}} C, \qquad (3.20)$$

где $j^{(C)}$ — вектор плотности потока физической субстанции при диффузионном переносе; $K^{(C)}$ — эмпирический коэффициент диффузионного переноса этой субстанции. Функцию C(x,t) обычно предполагают непрерывно дифференцируемой необходимое число раз по всем ее аргументам. Она выполняет роль потенциальной функции по отношению к векторному полю плотности потока этой субстанции при ее диффузионном переносе.

Например, функция C(x,t) может задавать распределение в среде объемной плотности некоторого вещества (примеси в жидкости или газе, ионов в плазме, легирующего элемента в сплаве). В этом случае $C, K^{(C)}$ и $j^{(C)}$ называют соответственно объемной концентрацией вещества, измеряемой в кг/м³, коэффициентом концентрационной диффузии [81], измеряемым в м²/с, и вектором плотности потока данного вещества в этой среде, модуль которого измеряют в кг/(м²·с), а (3.20) выражает закон Фика, описывающий явление концентрационной диффузии. При неоднородном пространственном распределении температуры T(x,t) и давления p(x,t) возникают явления термодиффузии и бародиффузии, в связи с этим (3.20) следует заменить уравнением

$$\boldsymbol{j}^{(C)} = -K^{(C)} \nabla_{\boldsymbol{x}} C - K^{(T)} \frac{C}{T} \nabla_{\boldsymbol{x}} T - K^{(p)} \frac{C}{p} \nabla_{\boldsymbol{x}} p, \qquad (3.21)$$

где $K^{(T)}$ и $K^{(p)}$ — коэффициенты термодиффузии и бародиффузии [135], измеряемые в м²/с.

Интенсивность диффузионного переноса физической субстанции не всегда связывают с градиентом скалярного поля объемной плотности этой субстанции. Так, в ММ процесса теплопроводности — процесса диффузионного переноса в среде теплоты как одной из форм энергии — в качестве потенциальной функции вместо ε^* используют функцию T = T(x,t) распределения в пространстве в текущий момент времени t абсолютной температуры, характеризующей при определенных условиях объемную плотность тепловой энергии среды. Это приводит к эмпирическому закону теплопроводности (закону Био — Φ урье)

$$\boldsymbol{q} = -\lambda^{(T)} \nabla_{\boldsymbol{x}} T, \qquad (3.22)$$

где q — вектор плотности теплового потока, модуль которого измеряют в BT/M^2 ; $\lambda^{(T)}$ — теплопроводность среды, $BT/(M \cdot K)$.

Линейную связь вектора плотности потока физической субстанции с градиентом некоторой потенциальной функции используют и в тех случаях, когда перенос этой субстанции происходит путем движения микрочастиц под действием внешнего поля. Так, электрическое поле, сила действия которого на электрические заряды не зависит от их скорости, вызывает в электропроводящей среде электрический ток, вектор плотности которого равен

$$\boldsymbol{j}^{(e)} = -\sigma^{(e)} \nabla_{\boldsymbol{x}} U_{\boldsymbol{e}},\tag{3.23}$$

где $\sigma^{(e)}$ — электрическая проводимость среды; $U_e = U_e(x,t)$ — электрический потенциал этого поля, В. Если ввести вектор $E = -\nabla_x U_e$ напряженности электрического поля, то из (3.23) получим уравнение

$$\boldsymbol{j}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \boldsymbol{E}, \tag{3.24}$$

обобщающее закон Ома на случай сплошной среды (модули векторов $j^{(e)}$ и E измеряют в A/M^2 и B/M соответственно).

При неравномерном распределении *давления*, заданном функцией p = p(x,t) и измеряемом в Па = $H/M^2 = \kappa r/(M \cdot c^2)$, через пористую среду может просачиваться жидкость или газ. Тогда вектор скорости частиц жидкости или газа подчиняется закону Дарси

$$\boldsymbol{v} = -\varkappa_p \nabla_{\boldsymbol{x}} p, \tag{3.25}$$

где \varkappa_p — коэффициент фильтрации, м²/(с·Па).

Потенциальная функция в (3.20) может зависеть от пространственных распределений нескольких физических величин. Например, в случае многокомпонентной смеси химически реагирующих веществ диффузионный перенос физических субстанций связан с выравниванием неравномерного пространственного распределения так называемого химического потенциала, который зависит от концентраций этих веществ, температуры и давления. В этом случае вектор плотности потока конкретной субстанции можно представить линейной комбинацией векторов, коллинеарных градиентам концентрации, температуры и давления соответственно. Тогда говорят о концентрационной диффузии, термо- и бародиффузии субстанции.

Не затрагивая особенностей различных процессов диффузионного переноса, ограничимся лишь констатацией того, что в большинстве случаев при построении математических моделей вектор $j^{(C)}$ плотности потока конкретной физической субстанции можно считать линейно зависящим от градиента некоторой потенциальной функции $\Phi(x,t)$, которая не всегда совпадает с объемной плотностью C этой субстанции. Эту зависимость можно записать в общей форме

$$\boldsymbol{j}^{(C)} = -K^{(\Phi)} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi, \qquad (3.26)$$

где $K^{(\Phi)}$ — коэффициент пропорциональности. Если среда анизотропна, т. е. ее свойства различны в разных направлениях, то в (3.26) $K^{(\Phi)}$ будет *тензором второго ранга* коэффициентов переноса конкретной субстанции.

Представленные соотношения характерны для диффузионного переноса субстанций, объемная плотность которых является скалярной величиной. Объемные плотности количества движения и момента количества движения являются векторными величинами, что усложняет выражения для плотностей потоков этих субстанций при диффузионном переносе.

3.4. Закон сохранения массы среды

Пусть в начальной конфигурации рассматриваемое тело занимает объем V_0 и ограничено поверхностью S_0 . Тогда при переходе к актуальной конфигурации оно будет занимать объем V, ограниченный поверхностью S. Примем, что в начальной конфигурации объем dV_0 является прямоугольным параллелепипедом с ребрами da_1 , da_2 , da_3 , параллельными осям системы $Oa_1a_2a_3$ материальных координат, т.е. $dV_0 = da_1 da_2 da_3$.

При переходе к актуальной конфигурации элементарный объем сплошной среды не разрушается и в общем случае может быть представлен косоугольным параллелепипедом, проекции ребер которого на оси системы пространственных координат $O_{x_1x_2x_3}$ будут $dx_i^{(1)}$, $dx_i^{(2)}$ и $dx_i^{(3)}$, i = 1, 2, 3 (ребро da_1 элементарного параллелепипеда в начальной конфигурации соответствует ребру $dx^{(1)}$ с проекциями $dx_i^{(1)}$ в актуальной конфигурации и т.п.). Тогда с учетом (3.4) и (3.6) получим

$$dV = \left(d\boldsymbol{x}^{(1)} \times d\boldsymbol{x}^{(2)}\right) \cdot d\boldsymbol{x}^{(3)} = e_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)} = \\ = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_1} da_1 \frac{\partial x_j}{\partial a_2} da_2 \frac{\partial x_k}{\partial a_3} da_3 = J^* dV_0, \quad (3.27)$$

где e_{ijk} (j, k = 1, 2, 3) — символ Леви-Чивиты; J^* — якобиан, определенный в (3.6) и характеризующий изменение элементарного объема

сплошной среды при переходе от начальной конфигурации к актуальной. При таком переходе плотность среды в рассматриваемом элементарном объеме непрерывно изменяется во времени t от $\rho_0(a_1, a_2, a_3) = dm/dV_0$ до $\rho(x_1, x_2, x_3, t) = dm/dV$, где при отсутствии обмена массой между телом и окружающей средой масса тела

$$m = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_V \rho \, dV = \text{const.}$$
(3.28)

Отсюда следует, что $dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV$. Тогда с учетом (3.27) получим уравнение неразрывности

$$\rho_0 = \rho J^* \tag{3.29}$$

в материальных координатах, выражающее в этих координатах закон сохранения массы.

Учитывая (3.5) и правила дифференцирования определителя, производную якобиана (3.6) по времени *t* можно записать в виде

$$\frac{dJ^*}{dt} = e_{ijk} \left(\frac{\partial v_i}{\partial a_1} \frac{\partial x_j}{\partial a_2} \frac{\partial x_k}{\partial a_3} + \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \frac{\partial v_j}{\partial a_2} \frac{\partial x_k}{\partial a_3} + \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \frac{\partial x_j}{\partial a_2} \frac{\partial v_k}{\partial a_3} \right) = \\ = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \frac{\partial x_j}{\partial a_2} \frac{\partial x_k}{\partial a_3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} = J^* \nabla_x \cdot v, \quad (3.30)$$

где v_m (m = 1, 2, 3) — проекции вектора v скорости частиц среды на оси Ox_m системы пространственных координат, а нижний индекс x у $\partial u \phi \phi e penquaльного оператора Гамильтона <math>\nabla_x$ означает дифференцирование по пространственным координатам. Таким образом, дивергенция $\nabla_x \cdot v$ вектора скорости, вычисленная в пространственных координатах, является локальной скоростью относительного изменения элементарного объема среды.

В силу независимости ρ_0 от времени из (3.29) с учетом (3.30) следует соотношение $\frac{d(\rho J^*)}{dt} = J^* \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dJ^*}{dt} = J^* \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_x \cdot v\right) = 0$, где v вектор скорости. Отсюда при $J^* \neq 0$ получаем уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$
 или $\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_{\boldsymbol{i}}} = 0,$ (3.31)

в системе пространственных координат, выражающее в этой системе закон сохранения массы среды. Учитывая выражение для полной производной $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \rho$, это уравнение можно записать в **дивер**гентной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \quad$$
или $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0,$ (3.32)

где $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ — локальное изменение плотности во времени; $\nabla_x \cdot (\rho v) = \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_k}$ — изменение плотности за счет конвективного переноса.

В случае несжимаемой сплошной среды ее плотность неизменна, но неоднородная несжимаемая среда в различных точках пространства и в различные моменты времени может иметь разную плотность, поэтому (3.31) и (3.32) остаются в силе. Если же несжимаемая среда однородная ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), то из (3.31) или (3.32) следует

$$abla_{m{x}} \cdot m{v} = 0,$$
 или $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$ (3.33)

Уравнение неразрывности в виде (3.31) или (3.32) применимо и к смеси *n* разнородных веществ, заполняющих некоторый объем *V*. Для каждого ς -го вещества, $\varsigma = \overline{1, n}$, можно ввести плотность $\rho^{(\varsigma)}$, характеризующую его объемную концентрацию в смеси, а при помощи векторной функции $v^{(\varsigma)}(x,t)$ можно задать векторное поле его скорости. Тогда для плотности смеси получим

$$\rho = \sum_{\varsigma=1}^{n} \rho^{(\varsigma)}, \tag{3.34}$$

а из условия, что вектор ρv плотности потока смеси при конвективном переносе равен сумме векторов $\rho^{(\varsigma)}v^{(\varsigma)}$ плотностей потоков отдельных веществ, найдем вектор средней скорости смеси

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\varsigma=1}^{n} \rho^{(\varsigma)} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)}. \tag{3.35}$$

Пусть в смеси не происходит превращения веществ. Тогда для каждого 5-го вещества справедлив закон сохранения массы в виде (3.31) или (3.32)

$$\frac{d\rho^{(\varsigma)}}{dt} + \rho^{(\varsigma)} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}^{(\varsigma)} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial\rho^{(\varsigma)}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho^{(\varsigma)} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)}\right) = 0.$$
(3.36)

Ясно, что, суммируя по ς вторые равенства (3.36) и учитывая (3.34) и (3.35), получим уравнение неразрывности смеси в виде (3.32).

Если же в смеси происходит превращение веществ за счет химических реакций или ионизации, то для каждого ς -го вещества такие процессы характеризует скорость $\dot{m}_V^{(\varsigma)}$ изменения массы этого вещества в единицу времени в единице объема, причем из условия сохранения массы смеси следует, что

$$\sum_{\varsigma=1}^{n} \dot{m}_{V}^{(\varsigma)} = 0.$$
 (3.37)

В этом случае вместо второго уравнения (3.36) получим выражение, соответствующее закону сохранения массы *ζ*-го вещества:

$$\frac{\partial \rho^{(\varsigma)}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho^{(\varsigma)} \boldsymbol{v}^{(\varsigma)}\right) = \dot{m}_{V}^{(\varsigma)}. \tag{3.38}$$

Суммируя (3.38) по с с учетом (3.34), (3.35) и (3.37), снова получим (3.32).

Величина $\rho^{(\varsigma)}$ и является вектором плотности потока ς -го вещества при конвективном переносе, определяемом движением смеси в целом, а величину $j^{(\varsigma)} = \rho^{(\varsigma)}(v^{(\varsigma)} - v)$ можно рассматривать как вектор плотности потока этого вещества при $\partial u \phi \phi y$ зионном переносе, вызванном отличием скорости ς -го вещества от средней скорости смеси. Тогда (3.38) можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho^{(\varsigma)}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho^{(\varsigma)} \boldsymbol{v}) = \dot{m}_{V}^{(\varsigma)} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{j}^{(\varsigma)}.$$
(3.39)

Принимая во внимание (3.34) и (3.35), нетрудно установить, что сумма по ς всех векторов $j^{(\varsigma)}$ равна нулевому вектору **0**.

Скорости отдельных веществ в смеси обычно не известны. Но для описания концентрационной диффузии ς -го вещества в смеси можно применить закон Фика в виде (3.20), а в общем случае при наличии явлений термодиффузии и бародиффузии использовать (3.21). Тогда, обозначив объемную концентрацию ς -го вещества через C_{ς} , т.е. $C_{\varsigma} = \rho^{(\varsigma)}$, с учетом (3.21) вместо (3.39) можно записать **уравнение пере**носа этого вещества [135]:

$$\left(\frac{\partial C_{\varsigma}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} C_{\varsigma} \right) = \dot{m}_{V}^{(\varsigma)} + + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(D_{\varsigma}^{(C)} \nabla_{\boldsymbol{x}} C_{\varsigma} + D_{\varsigma}^{(T)} \frac{C_{\varsigma}}{T} \nabla_{\boldsymbol{x}} T + D_{\varsigma}^{(p)} \frac{C_{\varsigma}}{p} \nabla_{\boldsymbol{x}} p \right).$$
(3.40)

Здесь T и p — температура и *давление*; $D_{\varsigma}^{(C)}$, $D_{\varsigma}^{(T)}$ и $D_{\varsigma}^{(p)}$ — коэффициенты концентрационной *диффузии*, термодиффузии и бародиффузии ς -го вещества соответственно. Если средняя скорость смеси равна нулю, т.е. v = 0, а явления термодиффузии и бародиффузии не существенны и $D_{\varsigma}^{(C)} = \text{const}$, то из (3.40) следует, что

$$\frac{\partial C_{\varsigma}}{\partial t} = D_{\varsigma}^{(C)} \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 C_{\varsigma} + \dot{m}_V^{(\varsigma)}. \tag{3.41}$$

Для нахождения объемной концентрации $C_{\varsigma}(x,t)$ в объеме V, ограниченном неподвижной поверхностью S, необходимо математическую модель, включающую (3.41), дополнить краевыми условиями. В эти условия должны войти функция $C_{\varsigma}^{\circ}(x) = C_{\varsigma}(x,t_0)$, задающая в объеме V распределение C_{ς} в момент времени t_0 , принимаемый за начальный, т.е. начальные условия, и граничные условия на S.

Если $\dot{m}_V^{(\varsigma)}$ не зависит от C_{ς} или же зависит линейно, то (3.41) является линейным уравнением параболического типа. При установившемся процессе переноса и независимости $\dot{m}_V^{(\varsigma)}$ от C_{ς} из (3.41) следует уравнение Пуассона, которое переходит в уравнение Лапласа, если $\dot{m}_V^{(\varsigma)} \equiv 0$. Подчеркнем, что все эти варианты уравнений вытекают из локальной формы закона сохранения массы некоторого вещества в смеси.

3.5. Внешние силы и тензоры напряжений

В механике сплошной среды различают два типа внешних сил, действующих на тело: распределенные в его объеме и по ограничивающей его поверхности.

Плотность объемных сил характеризует вектор

$$\boldsymbol{b}(M) = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta \boldsymbol{V}},\tag{3.42}$$

где ΔF — вектор силы, распределенной в объеме ΔV среды в окрестности точки M в актуальной конфигурации (предполагается, что предел в (3.42) существует, когда окрестность диаметром d стягивается к точке M). Часто используют также вектор $f(M) = \rho(M)b(M)$ ($\rho(M)$ плотность среды в окрестности точки M), характеризующий плотность массовых сил. Модули этих векторов измеряют в H/m^3 и H/krсоответственно.

Если на элементарную площадку ΔS поверхности S, ограничивающей тело объемом V в актуальной конфигурации, действует сила ΔP с проекциями ΔP_i (i = 1, 2, 3) на оси системы пространственных координат, то плотность поверхностных сил характеризуется вектором

$$\boldsymbol{p}(N) = \lim_{d' \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} \tag{3.43}$$

при условии, что этот предел существует при стягивании окрестности ΔS диаметром d' к точке N. Модуль этого вектора измеряют в Па = H/m^2 . Поверхностные силы вызывают на поверхности тела напряжения $\sigma^{(n)} = p$ (верхний индекс (n) в обозначении вектора напряжения означает, что положение в пространстве площадки dS задано единичным вектором n внешней нормали к этой площадке).

При приведении сил, действующих на элемент ΔV объема или ΔS поверхности, к некоторой точке такого элемента, в общем случае может возникнуть момент ΔM . Примем, что

$$m_V = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = 0, \ M \in V; \ m_S = \lim_{d' \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0, \ N \in S,$$

т.е. отсутствуют моменты, распределенные в объеме и по поверхности тела. Сосредоточенные внешние силы, приложенные в отдельных точках тела, можно рассматривать как предельный случай объемных или поверхностных сил, действующих в окрестности этих точек.

Напряжения возникают не только на площадках в окрестности точек, принадлежащих поверхности тела. Если тело объемом V, находящееся в равновесии под действием заданной системы внешних сил, рассечь на две части произвольно ориентированной плоскостью, проходящей через фиксированную точку $M \in V$ тела и затем одну часть отбросить, то для сохранения равновесия оставшейся части в общем случае необходимо к секущей плоскости приложить систему поверхностных сил. Эти силы заменят действие отброшенной части тела на оставшуюся и вызовут в окрестности точек этой плоскости соответствующие напряжения. Ясно, что вектор $\sigma^{(n)}(M)$ напряжения в окрестности точки M будет зависеть от того, каким образом через эту точку проведена секущая плоскость, т.е. от направления единичного вектора n внешней нормали к этой плоскости. Для точки $M \in V$ совокупность пар векторов $\sigma^{(n)}(M)$ и n определяет напряженное состояние в окрестности этой точки.

Чтобы полностью описать напряженное состояние в окрестности рассматриваемой точки, нет необходимости принимать во внимание все возможные пары векторов $\sigma^{(n)}$ и *n*. Можно доказать, что для этого достаточно задать векторы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, содержащих рассматриваемую точку.

Пусть $\sigma^{(n_1)}$ — вектор напряжения, действующий на площадке с единичной внешней нормалью n_1 . Тогда $\sigma^{(n_1)} = \sigma_1^{(n_1)} n_1 + \sigma_2^{(n_1)} n_2 + \sigma_3^{(n_1)} n_3$, где $\sigma_j^{(n_1)}$, j = 1, 2, 3, — проекции вектора $\sigma^{(n_1)}$ на направления трех взаимно перпендикулярных единичных нормалей n_j , задающих ориентацию элементарных площадок, содержащих рассматриваемую точку $M \in V$. Очевидно, что векторы $\sigma^{(n_2)}$ и $\sigma^{(n_3)}$ могут быть представлены аналогично, и в итоге можно записать

$$\sigma^{(n_i)} = \sigma_j^{(n_i)} n_j, \quad i = 1, 2, 3.$$
 (3.44)

Если в качестве единичных внешних нормалей в (3.44) выбрать орты e_i penepa прямоугольной системы координат $O_{x_1x_2x_3}$, то при эйлеровом описании движения сплошной среды девять компонент $\sigma_j^{(e_i)} =$ $= \sigma_{ji}$ образуют тензор напряжений (тензор напряжений Ko uu) $\hat{\sigma}$, являющийся тензором второго ранга. Этот тензор задает пространственную меру напряженного состояния в точке и зависит от пространственных координат x_1 , x_2 , x_3 и времени t. Компоненты σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , соответствующие проекциям на направления ортов e_i векторов напряжения в площадках, перпендикулярных этим ортам, называют нормальными напряжениями. Компоненты σ_{ij} ($i \neq j$), соответствующие проекциям этих векторов напряжения, лежащим в плоскостях указанных площадок, называют касательными напряжениями.

Заменив в (3.44) $\sigma_j^{(e_i)}$ на σ_{ji} и n_j на $n_j e_i$, где n_j — направляющие косинусы внешней нормали $n = n_i e_i$ произвольно ориентированной площадки, получим вектор напряжения в этой площадке

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} = \sigma_{ji} n_j \boldsymbol{e}_i = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{3.45}$$

Нормальное напряжение в этой площадке равно

$$\sigma_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ji} n_i n_j. \tag{3.46}$$

Если $\sigma_n > 0$, то такое напряжение называют растягивающим напряжением, а если $\sigma_n < 0$ — сжимающим. Силовые граничные условия следуют из (3.45), если рассматривать окрестность точки Nповерхности S с единичным вектором n(N) внешней нормали при заданном векторе p(N) плотности поверхностных сил с проекциями $p_i(N)$ на оси пространственных координат:

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(N) \cdot \boldsymbol{n}(N) = \boldsymbol{p}(N),$$
 или $\sigma_{ji}(N)n_j(N) = p_i(N), N \in S.$ (3.47)

В случае актуальной конфигурации для содержащей рассматриваемую точку (на поверхности тела или внутри его) произвольной элементарной площадки dS, ориентацию которой задает единичный вектор nвнешней нормали с направляющими косинусами n_j , имеем

$$\frac{dP}{dS} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n},$$
 или $\frac{dP_i}{dS} = \sigma_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j,$ (3.48)

где $d\mathbf{P}$ — вектор приложенной к этой площадке элементарной силы с проекциями dP_i на оси пространственных координат. Пусть в начальной конфигурации этой площадке соответствует площадка dS_0 с единичным вектором N внешней нормали, имеющим направляющие косинусы N_J (J = 1, 2, 3) в системе материальных координат. Тогда $T^{(N)} = \frac{dP}{dS_0}$ с проекциями $T_I^{(N)} = \frac{dP_I}{dS_0}$ (I = 1, 2, 3) будет вектором напряжения относительно этой конфигурации, причем

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dS_0} = \boldsymbol{T}^{(\boldsymbol{N})} = \widehat{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{N}, \quad \text{или} \quad \frac{dP_I}{dS_0} = T_I^{(\boldsymbol{N})} = T_{JI}N_J, \quad (3.49)$$

где $\widehat{\mathbf{T}}$ — тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа с компонентами T_{JI} , являющийся материальной мерой напряженного состояния в точке и зависящий от материальных координат a_1 , a_2 , a_3 и времени t; dP_I и $T_I^{(N)}$ — проекции на оси материальных координат векторов dPи $T^{(N)}$ соответственно.

Если переход от начальной конфигурации к актуальной вызван деформированием тела, то $\hat{\sigma}$ иногда называют тензором истинных напряжений, а $\hat{\mathbf{T}}$ — тензором условных напряжений [49]. Установим связь между этими тензорами. Используя (3.48) и (3.49), можно записать $d\mathbf{P} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, dS = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} \, dS_0$, или, учитывая, что $dP_I = \frac{\partial a_I}{\partial x_i} \, dP_i$,

$$dP_I = \frac{\partial a_I}{\partial x_i} \sigma_{ji} n_j \, dS = T_{JI} N_J \, dS_0. \tag{3.50}$$

Для представления вектора n dS в актуальной конфигурации введем два ортогональных ему и неколлинеарных вектора db и db', таких, что их векторное произведение дает $n dS = db' \times db$, или

$$n_j dS = e_{ijk} db_i db'_k, \quad k = 1, 2, 3,$$
(3.51)

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты. Аналогично в случае начальной конфигурации введем два ортогональных вектору N неколлинеарных вектора db_0 и db'_0 , таких, что $N dS_0 = db'_0 \times db_0$, или

$$N_J dS_0 = e_{IJK} db_{0I} db'_{0K}, \quad K = 1, 2, 3.$$
(3.52)

Поскольку $db_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_I} db_{0I}$ и $db'_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_K} db'_{0K}$, то вместо (3.51) запишем

$$n_j dS = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_I} \frac{\partial x_k}{\partial a_K} db_{0I} db'_{0K}.$$
(3.53)

Непосредственным вычислением можно установить, что $e_{IJK} J^* = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_I} \frac{\partial x_j}{\partial a_J} \frac{\partial x_k}{\partial a_K}$, где J^* — якобиан (3.6), поэтому, умножая (3.53) на $\partial x_j/\partial a_J$ и учитывая (3.52), получаем

$$\frac{\partial x_j}{\partial a_J} n_j dS = e_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_I} \frac{\partial x_j}{\partial a_J} \frac{\partial x_k}{\partial a_K} db_{0I} db'_{0K} = J^* N_J dS_0.$$

Выражая отсюда $N_J dS_0$ и подставляя в (3.50), находим

$$\frac{\partial a_I}{\partial x_i}\sigma_{ji}n_j\,dS = \frac{1}{J^*}T_{JI}\frac{\partial x_j}{\partial a_J}n_j\,dS,$$

что дает

$$\sigma_{ji} = \frac{1}{J^*} \frac{\partial x_i}{\partial a_I} \frac{\partial x_j}{\partial a_J} T_{JI}, \quad \text{или} \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J^*} \widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}, \tag{3.54}$$

где $\widehat{\mathbf{F}}$ — материальный градиент деформации. Обратное по отношению к (3.54) соотношение имеет вид

$$T_{JI} = J^* \frac{\partial a_I}{\partial x_i} \frac{\partial a_J}{\partial x_j} \sigma_{ji}, \quad \text{или} \quad \widehat{\mathbf{T}} = J^* \widehat{\mathbf{H}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}, \qquad (3.55)$$

где $\widehat{\mathbf{H}}$ — пространственный градиент деформации.

Если в окрестности произвольной точки сплошной среды пространственный и материальный градиенты деформации удовлетворяют условиям $\frac{\partial x_i}{\partial a_I} = \delta_{iI}$, где δ_{iI} — символ Кронекера, то из (3.54) и (3.55) следует, что $\sigma_{ji} = T_{JI}$, или $\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{T}}$, т.е. тензоры напряжений Коши и Пиолы — Кирхгофа совпадают. Эти условия обычно используют при малой деформации твердого тела.

Ясно, что в случае симметрии тензора $\hat{\sigma}$ его можно привести к главным осям OX_{α} . При этом главные значения σ_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) этого тензора называют главными напряжениями. Площадку, равнонаклоненную к главным осям и имеющую внешнюю нормаль с направляющими косинусами $N_{\alpha} = 1/\sqrt{3}$, называют октаэдрической, а составляющие σ_N и τ_N вектора напряжения $\sigma^{(N)}$ в ней по нормали и в ее плоскости соответственно нормальным и касательным октаэдрическими напряжениями. С учетом (3.46) запишем

$$\sigma_N = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha N_\alpha^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} I_{1\widehat{\sigma}},$$

где $I_{1\widehat{\sigma}}$ — первый инвариант тензора $\widehat{\sigma}$. При помощи (3.45) получим

$$\tau_N = \sqrt{|\boldsymbol{\sigma}^{(N)}|^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{I_{1\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}|I_{2\hat{\boldsymbol{\sigma}}}|}, \quad (3.56)$$

где $I_{2\widehat{\sigma}}$ — второй инвариант тензора $\widehat{\sigma}$.

Для площадки, произвольно ориентированной относительно главных осей,

$$\tau_n^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha^2 n_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha n_\alpha^2\right)^2,\tag{3.57}$$

где n_{α} — направляющие косинусы внешней нормали к этой площадке. В случае не равных между собой всех главных напряжений, когда $\sigma_1 > \sigma_3$, наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ возникает в площадке, параллельной оси OX_2 и равнонаклоненной к двум другим главным осям, т.е. при $n_2 = 0$ и $n_1^2 = n_3^2 = 1/2$. Действительно, при $n_2 = 0$, обозначая $n_1^2 = z$ и учитывая, что в этом случае $n_3^2 = 1 - z$, из (3.57) получаем $\tau_n^2 = \sigma_1^2 z + \sigma_3^2 (1 - z) - (\sigma_1 z + \sigma_3 (1 - z))^2$ и в соответствии с необходимым условием экстремума τ_n^2 по z приходим к указанному результату.

3.6. Законы сохранения количества движения и момента количества движения среды

Обобщая закон сохранения количества движения материальной системы на случай сплошной среды, можно с учетом первого равенства (3.19) записать

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V} \rho \boldsymbol{v} \, dV = \int_{S} \boldsymbol{p} \, dS + \int_{V} \boldsymbol{b} \, dV. \tag{3.58}$$

Левая часть (3.58) соответствует скорости изменения во времени t вектора количества движения Q_v среды, занимающей в актуальной конфигурации область объемом V, ограниченным поверхностью S (ρ и v — плотность среды и вектор скорости ее частиц соответственно). Правая часть (3.58) равна главному вектору системы сил, характеризуемых в данном случае векторами p и b плотности поверхностных и объемных сил соответственно. Необходимо отметить, что (3.58) является основным постулируемым динамическим соотношением механики сплошной среды, аналогичным закону Ньютона в механике материальной точки.

Для средней части (3.58) с учетом (3.27) и (3.29) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho \boldsymbol{v} \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \boldsymbol{v} J^* \, dV_0 = \int_{V_0} \left(\boldsymbol{v} \frac{d(\rho J^*)}{dt} + \rho J^* \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) dV_0 = \int_{V} \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \, dV. \quad (3.59)$$

Отметим, что проведенное преобразование с учетом (3.32) и выражения $d\varphi/dt = \partial \varphi/\partial t + v \cdot \nabla_x \varphi$ полной производной (нижний индекс x у $du \phi \phi e penuuanthoso onepamopa Гамильтона \nabla_x$ означает дифференцирование по пространственным координатам) для любой непрерывно дифференцируемой в области V функции $\varphi(x,t)$ (скалярной, векторной или тензорной) позволяет записать

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho \varphi \, dV = \int_{V} \rho \frac{d\varphi}{dt} \, dV = \int_{V} \left(\frac{\partial (\rho \varphi)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \varphi \boldsymbol{v}) \right) dV. \tag{3.60}$$

Если векторы в (3.58) и (3.59) представить в проекциях на оси прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, заменив, согласно (3.45), проекции p_i вектора $p = \sigma^{(n)}$ на $\sigma_{ji}n_j$, i, j = 1, 2, 3, где σ_{ji} — компоненты тензора $\hat{\sigma}$ напряжений Коши, а n_j — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности S, то, объединив (3.58) и (3.59), с учетом теоремы Остроградского — Гаусса получим

$$\int_{V} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - b_i \right) dV - \int_{S} \sigma_{ji} n_j \, dS = \int_{V} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - b_i \right) dV = 0, \quad (3.61)$$

где v_i и b_i — проекции векторов v и b соответственно. Отсюда следуют уравнения движения среды

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i, \quad$$
или $\rho \frac{dv}{dt} = \nabla_x \cdot \hat{\sigma} + b.$ (3.62)

Эти уравнения выражают локальную формулировку закона сохранения количества движения сплошной среды. Дивергентную форму этих уравнений

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma_{ji} - \rho v_i v_j)}{\partial x_j} + b_i$$
(3.63)

можно получить из (3.62) с учетом выражения для полной производной $\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$. В частном случае неподвижной среды ($v \equiv 0$) из (3.62) и (3.63) следуют ее **уравнения равновесия**.

Для представления уравнений движения в материальных координаmax преобразуем левую часть (3.61) с учетом (3.27), (3.29) и (3.50):

$$\int_{V_0} \left(\rho_0 \frac{dv_i}{dt} - b_i^{\circ} \right) dV_0 - \int_{S_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_I} T_{JI} N_J dS_0 =$$
$$= \int_{V_0} \left(\rho_0 \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} T_{jk} \right) - b_i^{\circ} \right) dV_0 = 0, \quad k, I, J = 1, 2, 3,$$

где ρ_0 и b_i° — плотность среды и проекции вектора $b^\circ = J^* b \cdot \hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$ плотности объемных сил на оси Oa_i системы материальных координат; $\hat{\mathbf{H}}$ пространственный градиент деформации; N_J — проекции на оси Oa_i единичного вектора N внешней нормали к поверхности S_0 , ограничивающей область V_0 , занятую средой в начальной конфигурации; T_{jk} компоненты тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа $\hat{\mathbf{T}}$. Отсюда следует локальная формулировка закона сохранения количества движения в этих координатах:

$$\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} T_{jk} \right) + b_i^{\circ} = 0, \quad \text{или} \quad \rho_0 \frac{dv}{dt} = \nabla_{\boldsymbol{a}} \cdot (\widehat{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}} \cdot \widehat{\mathbf{T}}) + b^{\circ}.$$

Обобщение закона сохранения момента количества движения материальной системы на случай сплошной среды с учетом второго равенства (3.19) дает

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV = \int_{V} (\boldsymbol{m}_{V} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}) \, dV + \int_{S} \boldsymbol{m}_{S} \, dS + \int_{S} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \, dS, \qquad (3.64)$$

где x — радиус-вектор частицы сплошной среды; m_V и m_S — моменты, распределенные по объему V и по поверхности S. Эти моменты учитывают при построении математических моделей сплошной среды, называемых микрополярными. Используя (3.60), интеграл в левой части (3.64) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV = \int_{V} \rho \frac{d(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})}{dt} \, dV =$$
$$= \int_{V} \rho \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) dV = \int_{V} \rho \boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \, dV,$$

поскольку $(dx/dt) \times v = v \times v = 0$. Последний интеграл в правой части (3.64) с использованием (3.47), теоремы Остроградского — Гаусса и

символа Леви-Чивиты e_{ijk} (m = 1, 2, 3) примет вид

$$\int_{S} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \, dS = \int_{S} e_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m \boldsymbol{e}_i \, dS = \int_{V} e_{ijk} \frac{\partial (x_j \sigma_{mk})}{\partial x_m} \boldsymbol{e}_i \, dV =$$
$$= \int_{V} e_{ijk} \Big(\frac{\partial x_j}{\partial x_m} \sigma_{mk} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} \Big) \boldsymbol{e}_i \, dV = \int_{V} e_{ijk} \Big(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} \Big) \boldsymbol{e}_i \, dV,$$

где e_i — орты репера системы координат $O_{x_1x_2x_3}$. Подставив преобразованные интегралы в (3.64), с учетом (3.62) получим интегральную форму закона сохранения момента количества движения сплошной среды

$$\int_{V} (\boldsymbol{m}_{V} + e_{ijk}\sigma_{jk}\boldsymbol{e}_{i}) dV + \int_{S} \boldsymbol{m}_{S} dS = \int_{V} \boldsymbol{x} \times \left(\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{b}\right) dV = \boldsymbol{0}.$$

Отсюда при $m_V = 0$ и $m_S = 0$ следует $e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$, т. е. $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0$, что соответствует симметрии тензора $\hat{\sigma}$, а с учетом (3.55) — и симметрии тензора \hat{T} . При наличии моментов, распределенных по объему и/или по поверхности тела эта симметрия в общем случае отсутствует.

4. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

В современном представлении термодинамика — феноменологическая теория общих закономерностей процессов, протекающих в макроскопических телах и связанных с взаимными превращениями различных видов энергии и других форм движения.

В термодинамике необратимых процессов к настоящему времени наибольшее распространение получили два основных направления. В основу первого направления, являющегося развитием классической термостатики, положен принцип локального *термодинамического равновесия*. Второе направление, называемое рациональной термодинамикой необратимых процессов, характеризуется в первую очередь отказом от принципа локального термодинамического равновесия и иной трактовкой *второго закона термодинамики*, рассматриваемого не как ограничение на протекающие процессы, а как ограничение на вид уравнений, описывающих поведение реальных тел и сред. Именно второе направление использовано далее при построении математических моделей различных сред.

4.1. Основные понятия термодинамики

При исследовании поведения сплошной среды любое тело, занимающее в актуальной конфигурации объем V или любую его часть (конечную или бесконечно малую) и ограниченное поверхностью S, будем рассматривать как термодинамическую систему. Если она обменивается с окружающей средой массой и энергией, то ее называют открытой. Если же происходит обмен с окружающей средой лишь энергией, то систему называют закрытой. В том случае, когда отсутствует обмен и массой, и энергией, систему называют изолированной.

Состояние термодинамической системы в окрестности произвольной точки в любой момент времени характеризуют параметрами термодинамического состояния, которые могут изменяться при взаимодействии системы с окружающей средой. Если при постоянных внешних воздействиях они не изменяются в течение рассматриваемого промежутка времени, то система находится в состоянии термодинамического равновесия. Это равновесие считают устойчивым, если при прекращении любых малых внешних воздействий система возвращается к исходному состоянию. В противном случае термодинамическое равновесие считают *неустойчивым*.

При взаимодействии с окружающей средой термодинамическая система проходит ряд последовательных состояний, совокупность которых называют *термодинамическим процессом*. Термодинамический процесс принято называть *равновесным*, если в любом промежуточном состоянии при фиксированных внешних воздействиях в течение конечного промежутка времени параметры термодинамического состояния системы не изменяются. В противном случае процесс называют *неравновесным*. При заданных внешних воздействиях реальные процессы в термодинамической системе всегда происходят с некоторой конечной скоростью изменения параметров термодинамического состояния и поэтому всегда будут неравновесными. Однако в ряде случаев, когда эти параметры изменяются довольно медленно, процесс приближенно можно считать равновесным.

Равновесный процесс, который и в прямом, и в обратном направлениях проходит через одну и ту же последовательность состояний, носит название обратимого, а в противном случае — необратимого, для которого характерна *диссипация* (рассеяние) энергии.

К параметрам термодинамического состояния в зависимости от необходимости учета различных процессов, протекающих в термодинамической системе, относят, например, плотность, абсолютную температуру, тензор деформации, а также параметры, учитываюцие структуру рассматриваемой среды, которые назвают внутренними параметрами термодинамического состояния. Так как все эти параметры отражают различную физическую природу среды, то вид уравнений, устанавливающих соотношения между ними, может быть разнообразным, но должен удовлетворять и некоторым основным принципам рациональной термодинамики [108]. Суть этих принципов состоит в следующем.

В соответствии с **принципом езаимной сеязи** сплошная среда имеет разные состояния, описываемые известным числом параметров, принимаемых в качестве базисных. Через эти параметры можно выразить все остальные при помощи некоторых определяющих уравнений. Выбор базисных параметров не является однозначным. Среди параметров состояния можно выделить **реактивные переменные**, характеризующие реакцию среды на внешние воздействия, и **активные**, характеризующие процессы, порожденные этими воздействиями [58, 108]. Каждое активное переменное связано с реактивными при помощи определяющего уравнения. При этом также существует и обратная связь, т. е. каждое реактивное переменное зависит от активных переменных. В соответствии с *принципом причинности* любое активное переменное может зависеть от настоящих и прошлых значений реактивных переменных, но не от их значений в будущем.

Согласно **принципу** равноприсутствия, если какая-либо величина входит в одно из определяющих уравнений в качестве независимого переменного, то она может присутствовать и в остальных определяющих уравнениях. **Принцип объективности** требует сохранения вида определяющих уравнений при произвольных вращении и трансляции в пространстве и во времени тела, рассматриваемого как абсолютно твердое. Смысл **принципа локальности** заключается в том, что значения активных переменных и эволюционные уравнения для внутренних параметров состояния системы в окрестности рассматриваемой точки зависят лишь от значений реактивных переменных в окрестности этой точки. Отказ от принципа локальности приводит к более сложным, нелокальным моделям сплошной среды.

Принцип затухающей памяти гласит: более отдаленные в прошлом состояния термодинамической системы слабее влияют на значения активных и реактивных переменных в данный момент времени. Согласно принципу donycmumocmu все допущения, связанные с определяющими уравнениями и уравнениями эволюции внутренних параметров состояния, должны удовлетворять законам сохранения физических субстанций и ограничениям, следующим из второго закона термодинамики. Любая изолированная термодинамическая система имеет по крайней мере одно естественное состояние, в котором может находиться неограничено долго, что составляет суть так называемого нулевого закона термодинамики.

4.2. Закон сохранения энергии

Применительно к произвольному объему V сплошной среды в актуальной конфигурации закон сохранения энергии (или первый закон термодинамики) гласит: скорость изменения во времени tполной энергии E^* термодинамической системы равна сумме мощности W_P действующих на эту систему механических сил и скоростей Q_{α} изменения всех других видов энергии, т.е.

$$\frac{dE^*}{dt} = W_P + \sum_{\alpha} Q_{\alpha}.$$
(4.1)

В общем случае скорости Q_{α} представляют собой мощности тепловой, электромагнитной, химической и других видов энергии, поступающей в данную термодинамическую систему. В прикладных исследованиях часто приходится рассматривать взаимные превращения механической энергии и теплоты, что характерно для так называемого *термомеханического процесса*. Поэтому без потери общности среди всех величин Q_{α} выделим лишь мощность Qтепловой энергии, приобретаемой системой. Тогда (4.1) примет вид

$$\frac{dE^*}{dt} = W_P + Q, \tag{4.2}$$

где

$$Q = \int_{V} q_{V} dV - \int_{S} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_{V} q_{V} dV - \int_{S} q_{i} n_{i} dS, \quad i = 1, 2, 3.$$
(4.3)

Здесь q_V — объемная плотность мощности внутренних источников (или стоков) теплоты, BT/M^3 ; q — вектор плотности теплового потока с проекциями q_i на оси Ox_i прямоугольной системы координат; n_i — проекции на оси Ox_i единичного вектора n внешней нормали к поверхности S, ограничивающей объем V.

Полная энергия термодинамической системы помимо кинетической энергии

$$K^* = \frac{1}{2} \int_V \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \, dV,$$
 или $K^* = \frac{1}{2} \int_V \rho v_j v_j \, dV, \quad j = 1, 2, 3,$ (4.4)

где ρ — плотность среды; v — вектор скорости с проекциями v_j на оси Ox_j , включает зависящую от параметров термодинамического состояния системы внутреннюю энергию

$$U = \int_{V} \rho u \, dV, \tag{4.5}$$

где u — массовая плотность внутренней энергии, Дж/кг. При записи (4.4) не учтен возможный вклад в кинетическую энергию энергии вращения частиц среды, поскольку предполагаем, что моменты, распределенные по объему и по поверхности, отсутствуют.

Для мощности механических сил запишем

$$W_{\vec{P}} = \int_{V} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \, dV + \int_{S} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \, dS = \int_{V} b_{i} v_{i} \, dV + \int_{S} p_{i} v_{i} \, dS, \qquad (4.6)$$

где **b** и p — векторы плотности объемных и поверхностных сил с проекциями b_i и p_i соответственно. Тогда (4.2) с учетом (4.3)-(4.6) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \frac{\rho}{2} v_i v_i \, dV + \frac{d}{dt} \int_{V} \rho u \, dV =$$
$$= \int_{V} b_i v_i \, dV + \int_{S} p_i v_i \, dS + \int_{V} q_V \, dV - \int_{S} q_i n_i \, dS. \quad (4.7)$$

Учитывая (3.60), преобразуем слагаемые в левой части (4.7):

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \frac{\rho}{2} v_i v_i \, dV = \int_{V} \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV, \quad \frac{d}{dt} \int_{V} \rho u \, dV = \int_{V} \rho \frac{du}{dt} \, dV. \tag{4.8}$$

Второе слагаемое в правой части (4.7) преобразуем с учетом (3.11), (3.47) и формулы Остроградского — Гаусса к виду

$$\int_{S} p_{i}v_{i}dS = \int_{S} \sigma_{ji}v_{i}n_{j}dS = \int_{V} \frac{\partial(\sigma_{ji}v_{i})}{\partial x_{j}}dV = \int_{V} \left(v_{i}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_{j}} + \sigma_{ji}\frac{\partial v_{i}}{\partial x_{j}}\right)dV =$$
$$= \int_{V} \left(v_{i}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_{j}} + \sigma_{ji}(V_{ij} + W_{ij})\right)dV = \int_{V} \left(v_{i}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_{j}} + \sigma_{ji}V_{ij}\right)dV, \quad (4.9)$$

поскольку свертка симметричного тензора $\widehat{\sigma}$ с антисимметричным тензором \widehat{W} равна нулю (см. П1.2).

Применив формулу Остроградского — Гаусса к четвертому слагаемому в правой части (4.7) и подставив (4.8) и (4.9) в (4.7), запишем

$$\int_{V} \rho v_{i} \frac{dv_{i}}{dt} dV + \int_{V} \rho \frac{du}{dt} dV =$$

$$= \int_{V} b_{i} v_{i} dV + \int_{V} \left(v_{i} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_{j}} + \sigma_{ji} V_{ij} \right) dV + \int_{V} q_{V} dV - \int_{V} \frac{\partial q_{i}}{\partial x_{i}} dV.$$

Отсюда, учитывая уравнения (3.62) движения среды, получаем интегральную формулировку закона сохранения энергии

$$\int_{V} \left(\rho \frac{du}{dt} - \sigma_{ji} V_{ij} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - q_V \right)^2 dV = 0, \qquad (4.10)$$

а в силу принципа локальности — локальную формулировку этого закона в виде **уравнения переноса энергии**

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ji} V_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \quad \text{или} \quad \rho \frac{du}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q} + q_V, \quad (4.11)$$

где $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x_i} e_i; e_i$ — орты репера системы пространственных координат. К дивергентной форме представления этого закона

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon^* v_j - \sigma_{ji} v_i + q_j)}{\partial x_j} - b_i v_i - q_V = 0, \quad \varepsilon^* = \rho \Big(\frac{v_i v_i}{2} + u \Big), \quad (4.12)$$

или $\frac{\partial \varepsilon^{\star}}{\partial t} + \nabla_{x} \cdot (\varepsilon^{*}v - \hat{\sigma} \cdot v + q) - b \cdot v - q_{V} = 0$, где ε^{*} — объемная плотность **полной энергии**, можно перейти, если использовать (3.32) и (3.63).

В материальных координатах a_i закон сохранения энергии примет вид

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = T_{ji} \frac{dL_{ij}}{dt} - \frac{\partial q_i^{\circ}}{\partial a_i} + q_V^{\circ}, \qquad (4.13)$$

или $\rho_0 \frac{du}{dt} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} - \nabla_a \cdot q^\circ + q_V^\circ$, где ρ_0 — плотность среды в начальной конфигурации; $\hat{\mathbf{T}}$ и $\hat{\mathbf{L}}$ — тензор Пиолы — Кирхгофа и лагранжев тензор конечной деформации с компонентами T_{ji} и L_{ij} соответственно; $\nabla_a = \frac{\partial}{\partial a_i} j_i$; j_i — орты репера системы материальных координат; $q^\circ = J^* q \cdot \hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$ — вектор плотности теплового потока с компонентами q_i° в начальной конфигурации, J^* — якобиан (3.6), $\hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}$ — пространственный градиент деформации; $q_V^\circ = J^* q_V$.

4.3. Второй закон термодинамики

Степень охлаждения или нагрева термодинамической системы характеризуют температурой. В классической термодинамике понятие температуры вводят для состояния термодинамического равновесия системы, постулируя, что две системы, каждая из которых находится в равновесии с третьей системой, находятся в равновесии и между собой. Любая из этих трех систем может играть роль термометра, который определяет температуру в некоторой удобной, но, вообще говоря, произвольной шкале. Все имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при любом масштабе шкалы используемого термометра существует температура, ниже которой никакая термодинамическая система не может быть охлаждена, т.е. температура ограничена снизу. Если точная нижняя грань принята за нуль, то температуру T называют абсолютной. Шкала абсолютной температуры не зависит от свойств материи, причем для любого масштаба этой шкалы T > 0. Основной единицей измерения абсолютной температуры является кельвин (К).

Наряду с абсолютной температурой фундаментальным параметром любой термодинамической системы считают энтропию H — термодинамическую функцию состояния системы, характеризующую меру duccunaции энергии, Дж/К. В классической термостатике приращение энтропии $dH = \delta Q/T$ полагают полным дифференциалом (δQ бесконечно малое количество теплоты, получаемое термодинамической системой при абсолютной температуре T). Тогда для системы, совершающей бесконечно медленно циклический обратимый термодинамический процесс, справедливо равенство

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Понятие энтропии обобщено на необратимый термодинамический процесс, для которого [108]

$$H_B - H_A > \int_A^B \frac{\delta Q}{T},\tag{4.14}$$

причем интегрирование ведется вдоль любого пути, связывающего состояния A и B. Но введенное таким образом понятие энтропии применимо к исследованию ограниченного класса термодинамических явлений, поскольку (4.14) справедливо лишь для квазистатических процессов, т. е. процессов, протекающих бесконечно медленно. Оно дает возможность оценить меру необратимости этих процессов, но не позволяет получить ограничения на определяющие уравнения, описывающие изменения параметров термодинамического состояния.

При использовании понятия энтропии применительно к термодинамической системе полагают, что H — аддитивная функция, присущая любому количеству материи, т.е. энтропия любого тела равна сумме энтропий его частей. Для сплошной среды, занимающей область V и имеющей плотность ρ ,

$$H = \int_{V} \rho h \, dV, \tag{4.15}$$

где *h* — массовая плотность энтропии. Изменение энтропии происходит как вследствие изменений внутри системы, так и в результате взаимодействия системы с окружающей средой. Тогда полное производство энтропии в теле в единицу времени *t* будет

$$\Gamma_H = \frac{dH}{dt} - \int_V \rho s \, dV + \int_S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \qquad (4.16)$$

где $s = \overline{s} + q_V/(\rho T)$ — поступление энтропии за единицу времени на единицу массы от внутренних источников; $\eta = \overline{\eta} + q/T$ — вектор потока энтропии; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты; q — вектор плотности теплового потока; \overline{s} и $\overline{\eta}$ производство и приток энтропии, обусловленные всеми прочими эффектами); n — единичный вектор внешней нормали к ограничивающей тело поверхности S.

Второй закон термодинамики в форме неравенства Клаузиуса — Дюгема постулирует: общее производство энтропии в термодинамической системе всегда неотрицательно ($\Gamma_H \ge 0$), что, согласно (4.16), можно записать в виде

$$\frac{dH}{dt} \ge \int_{V} \rho s \, dV - \int_{S} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{n} \, dS. \tag{4.17}$$

Используя (3.60), (4.15) и формулу Остроградского — Гаусса, вместо (4.17) получаем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho h \, dV = \int_{V} \rho \frac{dh}{dt} \, dV \ge \int_{V} (\rho s - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\eta}) \, dV,$$

откуда в силу принципа локальности следует локальная форма неравенства Клаузиуса — Дюгема $\rho \frac{dh}{dt} \ge -\nabla_x \cdot \eta + \rho s$. Процесс, в котором $\overline{s} \equiv 0$ и $\overline{\eta} \equiv 0$, называют простым термомеханическим, и последнее неравенство принимает вид

$$\rho T \frac{dh}{dt} \ge -\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q} + \frac{1}{T} \boldsymbol{q} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} T + q_V, \qquad (4.18)$$

или в декартовой прямоугольной системе координат Ox₁x₂x₃

$$\rho T \frac{dh}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - q_V \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.19}$$

где q_i — проекции вектора q на оси Ox_i . В *дивергентной форме* вместо (4.18) запишем

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho h \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) - \frac{q_{\boldsymbol{V}}}{T} \ge 0, \qquad (4.20)$$

или $\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho h v_i + \frac{q_i}{T} \right) - \frac{q_V}{T} \ge 0$, где v_i — проекции на оси Ox_i вектора v скорости частиц сплошной среды.

В материальных координатах a_i вместо (4.18) имеем $\rho_0 T \frac{dh}{dt} \ge$ $\ge -\frac{\partial q_i^{\circ}}{\partial a_i} + \frac{q_i^{\circ}}{T} \frac{\partial T}{\partial a_i} + q_V^{\circ}$, где в начальной конфигурации ρ_0 — плотность среды; q_i° — проекции на оси Oa_i вектора $q^{\circ} = J^* q \cdot \hat{\mathbf{H}}^{\mathsf{T}}$ плотности теплового потока; J^* — якобиан (3.6); $\hat{\mathbf{H}}$ — пространственный градиент деформации; $q_V^{\circ} = J^* q_V$.

Для последующего изложения необходимо отметить, что массовая плотность внутренней энергии и, используемая в соотношениях (4.11) и (4.13) закона сохранения энергии, является потенциальной функцией (потенциалом) массовой плотности энтропии h компонент тензора конечной или малой деформации и, возможно, еще некоторого известного количества параметров термодинамического состояния. Естественно стремление иметь в качестве аргументов такие реактивные переменные, которые могут быть определены экспериментально, но h этим свойством не обладает. Поэтому вместо u целесообразно использовать иную термодинамическую функцию, но также потенциальную.

Перейти от *u* к такой функции можно при помощи **преобра**зования **Лежандра**, состоящего в следующем [12]. Рассмотрим в *N*-мерном пространстве \mathbb{R}^N дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(y_1, y_2, ..., y_N)$ и систему *N* нелинейных уравнений $\frac{\partial f}{\partial y_n} = z_n$, $n = \overline{1, N}$, где z_n — заданные числа. Если для некоторых значений z_n решение этой системы есть y_n и в точке пространства \mathbb{R}^N с координатами y_n определитель $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_m}\right) \neq 0$, $m = \overline{1, N}$, то, согласно теореме о неявной функции [52], существует окрестность этой точки, в которой между y_n и z_n имеет место взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие $y_n = y_n(z_1, z_2, ..., z_N)$. Составим функцию $f^*(z_1, z_2, ..., z_N) = z_n y_n - f(y_1, y_2, ..., y_N)$, в которой все y_n выражены через z_n . Эту функцию называют преобразованием Лежандра функции $f(y_1, y_2, ..., y_N)$, причем общее число функций f^* равно $2^{N+1} - 1$ [27].

Преобразование Лежандра дает возможность получить большой набор термодинамических потенциалов. Основными среди них являются: массовая плотность **свободной энергии**

$$A = u - Th \tag{4.21}$$

с аргументами T и ε_{ij} — компонентами тензора малой деформации (j = 1, 2, 3), а также с другими реактивными переменными — аргументами u; массовая плотность термодинамического потенциала Гиббса $G = A - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/\rho$ с аргументами T и σ_{ij} — компонентами тензора напряжений, а также с другими реактивными переменными — аргументами A; массовая плотность тепловой функции $H_Q = G + Th$, одним из аргументов которой (в отличие от G) является h.

Если продифференцировать левую и правую части (4.21) по времени t и полученный результат объединить с (4.11), то закон сохранения энергии примет вид

$$\rho T \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \qquad (4.22)$$

или $\rho T \frac{dh}{dt} = -\nabla_x \cdot q + q_V + \delta_D$, где $\delta_D = \hat{\sigma} \cdot \cdot \hat{\mathbf{V}} - \rho \left(\frac{dA}{dt} + h \frac{dT}{dt} \right) - \partial uccu$ пативная функция, характеризующая рассеяние энергии в термодинамической системе при необратимых процессах. В пространственных координатах $\hat{\sigma} \cdot \cdot \hat{\mathbf{V}} = \sigma_{ji} V_{ij}$, где σ_{ji} и V_{ij} — компоненты тензоров второго ранга напряжений Коши $\hat{\sigma}$ и скоростей $\hat{\mathbf{V}}$ соответственно. В материальных координатах вместо $\hat{\sigma} \cdot \cdot \hat{\mathbf{V}}$ в выражение для δ_D войдет свертка $\hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} = T_{ji} \frac{dL_{ij}}{dt}$, где $\hat{\mathbf{T}}$ и $\hat{\mathbf{L}}$ — тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа и лагранжев тензор конечной деформации с компонентами T_{ji} и L_{ij} соответственно, а значение плотности ρ следует заменить ее исходным значением ρ_0 .

Вычитая (4.22) из (4.18), получаем общее диссипативное неравенство

$$-\frac{q}{T} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} T + \delta_D \ge 0, \quad \text{или} \quad -\frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta_D \ge 0. \tag{4.23}$$

В материальных координатах a_k оно примет вид

$$-\frac{q_i^{\circ}}{T}\frac{\partial T}{\partial a_i} + T_{ji}\frac{dL_{ij}}{dt} - \rho_0\left(\frac{dA}{dt} + h\frac{dT}{dt}\right) \ge 0.$$
(4.24)

Согласно принципам Гиббса, в состоянии термодинамического равновесия энтропия H изолированной термодинамической системы достигает максимального значения во всех возможных состояниях системы с заданным значением внутренней энергии U, а во всех возможных состояниях с заданным значением H минимального значения достигает U. Отсюда следует, что в этом состоянии абсолютная температура T сплошной среды не меняется от точки к точке. Действительно, для неподвижной среды массовая плотность u(h) внутренней энергии зависит лишь от массовой плотности h энтропии, поэтому

$$U = \int_{V} \rho u(h) dV.$$

Используя неопределенный множитель Лагранжа λ_1 для ограничения $H = H_0 = \text{const}$, получаем, что истинное распределение h должно быть стационарной точкой функционала

$$J[h] = \int\limits_V
ho u(h) dV + \lambda_1 igg(\int\limits_V
ho h dV - H_0 igg),$$

которому соответствует уравнение Эйлера $du/dh = \lambda_1$, т.е. в силу (4.21) $T = \lambda_1 = \text{const.}$

Для действительного процесса закон сохранения энергии (*первый* закон термодинамики) можно записать в виде $dE^* = dA^{(e)} + dQ$, где

$$E^* = \int\limits_V
ho\Bigl(rac{1}{2}v_iv_i+u\Bigr)dV \quad -$$

полная энергия термодинамической системы; $A^{(e)}$ — работа действующих на систему механических сил; Q — количество теплоты, полученное термодинамической системой. Если в этом равенстве символ d приращения в действительном процессе заменить символом δ произвольной допустимой вариации, то в общем случае оно не будет справедливым. Обозначая через $\delta\Omega$ соответствующую невязку, получаем

$$\delta E^* = \delta \int\limits_V \rho \left(\frac{1}{2} v_i v_i + u \right) dV = \delta A^{(e)} + \delta Q + \delta \Omega, \tag{4.25}$$

учитывая при этом, что $\delta\Omega = 0$ на действительных вариациях. Если функционалы δE^* , $\delta A^{(e)}$, δQ и $\delta\Omega$ определены, то (4.25) является *вариационной формой* первого закона термодинамики для возможных приращений определяющих функций. При заданных значениях векторов p и b плотности поверхностных и объемных сил с проекциями p_i и b_i на оси пространственных координат

$$\delta A^{(e)} = \int_{S} p_i \,\delta u_i \, dS + \int_{V} b_i \,\delta u_i \, dV, \qquad (4.26)$$

где δu_i — проекции на эти оси допустимой вариации δu вектора перемещения; S — поверхность, ограничивающая область объемом V.

Выражение для δQ в (4.25) можно получить следующим путем. Заменим в (4.22) $\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ на $T \frac{\partial (q_i/T)}{\partial x_i} + \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$. Тогда (4.22) примет вид

$$\rho T \frac{dh}{dt} + \left(T \frac{\partial (q_i/T)}{\partial x_i} - q_V \right) - \left(-\frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta_D \right) = 0.$$

Интегрированием этого равенства по области V получаем

$$dQ = \int\limits_{V} \rho T \, dh \, dV - dQ', \qquad (4.27)$$

где

$$dQ = -\int_{V} \left(T \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\frac{q_{i}}{T} \right) - q_{V} \right) dt dV, \quad dQ' = \int_{V} \left(-\frac{1}{T} q_{i} \frac{\partial T}{\partial x_{i}} + \delta_{D} \right) dt dV,$$

причем dQ' — так называемая некомпенсированная теплота (dQ' = 0 для обратимых процессов и dQ' > 0 для необратимых термодинамических процессов).

В классических моделях сплошной среды при простых термомеханических процессах dQ' линейно зависит от приращений определяющих функций. Поэтому dQ в (4.27) также линейно зависит от этих приращений, так что dQ можно рассматривать как значение функционала

$$\delta Q = \int_{V} \rho T \,\delta h \,dV - \delta Q' \tag{4.28}$$

на действительных приращениях определяющих функций. Этот функционал является вариационной формой второго закона термодинамики, и его следует рассматривать на допустимых вариациях определяющих функций.

Очевидно, что в равенстве (4.25) не все переменные можно задавать независимо. Задают лишь часть из них, а остальные из него находят. Выделим явно задаваемые функции. Для этого зададим $\delta\Omega$ в виде

$$\delta\Omega = \delta \int_{V} \rho v_i v_i \, dV - \frac{d}{dt} \int_{V} \rho v_i \delta x_i \, dV, \qquad (4.29)$$

поскольку на действительных вариациях $\delta x_i = dx_i = v_i dt$. Учитывая равенства $dV = J^* dV_0$ и $d(\rho J^*)/dt = 0$ (см. 3.4), получаем

$$d\Omega = d \int_{V} \rho v_i v_i \, dV - \frac{d}{dt} \int_{V} \rho v_i v_i \, dt \, dV =$$

= $d \int_{V_0} (\rho J^*) v_i v_i \, dV_0 - \frac{d}{dt} \int_{V_0} (\rho J^*) v_i v_i \, dt \, dV_0 \equiv 0.$

Подставляя (4.26), (4.28) и (4.29) в (4.25), находим

$$\delta \int_{V} \rho \left(\frac{1}{2}v_{i}v_{i} - u\right) dV - \frac{d}{dt} \int_{V} \rho v_{i} \,\delta x_{i} \,dV + \int_{V} p_{i} \,\delta u_{i} \,dS + \int_{V} b_{i} \,\delta u_{i} \,dV + \int_{V} \rho T \,\delta h \,dV - \delta Q' = 0. \quad (4.30)$$
Проинтегрировав (4.30) в некотором произвольном интервале времени (t_0, t_1) и введя обозначения

$$S_{H} = \int_{t_{0}}^{t_{1}} dt \int_{V} \rho \left(\frac{v_{i}v_{i}}{2} - u\right) dV, \quad \delta A = -\int_{V} \rho v_{i} \delta x_{i} dV \Big|_{t_{0}}^{t_{1}} + \int_{t_{0}}^{t_{1}} dt \int_{S} p_{i} \delta u_{i} dS,$$
$$\delta A^{*} = \int_{t_{0}}^{t_{1}} \left(\int_{V} \rho T \,\delta h \, dV - \delta Q' + \int_{V} b_{i} \,\delta u_{i} \, dV\right) dt,$$

получим вариационное уравнение Седова [12]

$$\delta S_H + \delta A + \delta A^* = 0, \qquad (4.31)$$

справедливое для произвольных области V и интервала времени (t_0, t_1) . Эта особенность приближает (4.31) к локальной формулировке закона сохранения энергии и позволяет путем вычисления δA из (4.31) установить связь между *реактивными* (аргументами) и *активными* (определяющими функциями) *переменными*, т.е. получить уравнения состояния сплошной среды. Вторая особенность состоит в том, что (4.31) содержит вклады, связанные с необратимыми процессами.

Для качественного анализа важен случай, когда V — весь объем, занятый сплошной средой, а t_0 и t_1 — моменты времени, в которые значения определяющих функций известны. Тогда $\delta x_i = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$. Поэтому δA можно выразить через заданную на S плотность поверхностных сил. В этом случае S_H — *действие по Гамильтону* для всего объема сплошной среды.

4.4. Условия на поверхности разрыва

При установлении законов сохранения массы, энергии, количества движения сплошной среды и ее момента количества движения предполагалась непрерывность рассматриваемых функций и их производных. Однако при построении математических моделей реальных процессов нередко возникает необходимость учитывать возникновение в рассматриваемой пространственной области V так называемых **поверхностей разрыва**, на которых разрывны искомые функции или их производные. Если на такой поверхности разрывны только производные искомых функций либо по координатам, либо по времени, то **разрыв** называют **слабым**. Если же разрывны искомые функции, то разрыв называют **сильным** или **ударной волной**, когда сильный разрыв подвижен, т. е. движение точек $M^* \in S^*$ поверхности разрыва S^* во времени t характеризует вектор скорости $D^*(M^*,t)$ [71]. Условия на поверхности разрыва можно получить с использованием интегральной формулировки законов сохранения физических субстанций (массы, энергии, количества движения и его момента), представленной в актуальной конфигурации в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V \setminus S^*} \rho \Upsilon \, dV + \int_S \Psi \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{V \setminus S^*} \Omega_V \, dV + \int_{S^*} \Omega_{S^*} \, dS, \tag{4.32}$$

где ρ — плотность среды; Υ — массовая плотность субстанции; Ψ плотность ее потока; n — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, ограничивающей изменяющуюся во времени область V; Ω_V — объемная плотность мощности внутренних источников этой субстанции; Ω_{S^*} — поверхностная плотность мощности источников субстанции на поверхности S^* . Применительно к законам сохранения массы и энергии, а также к закону сохранения электрического заряda (см. 12.2) Υ , Ω_V и Ω_{S^*} — скаляры, а Ψ — вектор, но в случае законов сохранения количества движения и момента количества движения Υ , Ω_V и Ω_{S^*} — векторы, а Ψ — тензор второго ранга.

Несложно проверить, что при отсутствии поверхности разрыва из (4.32) следуют рассмотренные ранее интегральные формулировки законов сохранения. Действительно, при $\Upsilon \equiv 1$ и отсутствии потока массы и ее внутренних источников (4.32) переходит в интегральную формулировку закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V\setminus S^{\star}}\rho\,dV=0,$$

равносильную (3.28). При $\Upsilon = \varepsilon^*, \Psi = q - \hat{\sigma} \cdot v$ и $\Omega_V = b \cdot v + q_V$, где $\varepsilon^* = u + |v|^2/2$ — массовая плотность полной энергии; u — массовая плотность внутренней энергии; v — вектор скорости частиц сплошной среды; q — вектор плотности теплового потока; $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты, из (4.32) при помощи формулы Остроградского — Гаусса получаем (4.10). При $\Upsilon = v, \Psi = -\hat{\sigma}$ и $\Omega_V = b$, где b — плотность объемных сил, из (4.32) следует интегральная формулировка закона сохранения количества движения в виде (3.61). Наконец, при $\Upsilon = x \times v, \Psi \cdot n = p \times x - m_S$ и $\Omega_V = m_V + x \times b$, где x — радиус-вектор частицы среды, определенный в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$; $p = \hat{\sigma} \cdot n$ — вектор плотности поверхности S и объему V соответственно, согласно (4.32) приходим к интегральной формулировке (3.64) закона сохранения момента количества движения.

Пусть поверхность разрыва S^* делит область V на две подобласти $V_k, k = 1, 2$, каждая из которых ограничена участком $S_k \subset S$ поверхности S и поверхностью S^* . Тогда непрерывность функций, входящих в (4.32), и их производных в каждой подобласти позволит применить (3.60) и формулу Остроградского — Гаусса, записав

$$\begin{split} \frac{d}{dt} & \int_{V_k} \rho \Upsilon \, dV = \int_{V_k} \frac{\partial (\rho \Upsilon)}{\partial t} \, dV + \int_{S_k} (\rho \Upsilon \otimes \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{S^*} (\rho^{(k)} \Upsilon^{(k)} \otimes \boldsymbol{D}^*) \cdot \boldsymbol{n}^{(k)} \, dS = \\ & = \int_{V_k} \left(\frac{\partial (\rho \Upsilon)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho \Upsilon \otimes \boldsymbol{v}) \right) dV + \int_{S^*} \rho^{(k)} \left(\Upsilon^{(k)} \otimes (\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{v}^{(k)}) \right) \cdot \boldsymbol{n}^{(k)} \, dS, \\ & \int_{S_k} \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{V_k} \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\Psi} \, dV - \int_{S^*} \boldsymbol{\Psi}^{(k)} \cdot \boldsymbol{n}^{(k)} \, dS, \end{split}$$

где \otimes — символ операции диадного умножения векторов; верхним индексом k отмечены значения параметров на поверхности разрыва со стороны подобласти V_k , причем $n^{(k)}$ — единичный вектор внешней по отношению к V_k нормали к S^* , а нижний индекс x у дифференциального оператора Гамильтона ∇_x означает дифференцирование по пространственным координатам. Сумма по k интегралов в левых частях этих равенств равна левой части (4.32). Поэтому вместо (4.32) получаем

$$\int_{V\setminus S^*} \left(\frac{\partial(\rho\Upsilon)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho\Upsilon \otimes v + \Psi) - \Omega_V \right) dV =$$
$$= \int_{S^*} \Omega_{S^*} \, dS - \int_{S^*} \sum_{k=1}^2 (\rho^{(k)}\Upsilon^{(k)} \otimes (D^* - v^{(k)}) - \Psi^{(k)}) \cdot n^{(k)} \, dS$$

Если направление единичного вектора n^* нормали к S^* выбрать из условия $\mathbf{D}^* \cdot n^* \ge 0$ и учесть, что $n^{(2)} = -n^{(1)}$, то в итоге получим

$$\int_{V\setminus S^*} \left(\frac{\partial(\rho\Upsilon)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho\Upsilon \otimes v + \Psi) - \Omega_V \right) dV = \\ = \int_{S^*} \left(\Omega_{S^*} + \left[\rho\Upsilon \otimes (D^* - v) - \Psi \right] \cdot n^* \right) dS,$$

где [·] означает скачок соответствующей величины при переходе через поверхность S^* в выбранном направлении вектора n^* (например, если $n^* = n^{(1)}$, то $[\Psi] = \Psi^{(2)} - \Psi^{(1)}$).

Так как полученное интегральное равенство справедливо для произвольных V и S^* , то из него следуют локальные условия

$$\frac{\partial(\rho\Upsilon)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\Upsilon \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{\Omega}_{V}$$
(4.33)

в любой точке области $V \setminus S^*$ и

$$\left[\rho\Upsilon\otimes(D^*-v)-\Psi\right]\cdot n^*=-\Omega_{S^*} \tag{4.34}$$

в любой точке поверхности разрыва S^* . Если в (4.33) для каждой субстанции конкретизировать функции Υ , Ψ и Ω_V так, как это было сделано применительно к (4.32), то придем к локальным формулировкам в *дивергентной форме* законов сохранения массы (3.32), количества движения (3.63) и энергии (4.12), а из закона сохранения момента количества движения при отсутствии моментов, распределенных по объему и по поверхности, получим установленное в **3.6** свойство симметричности тензора $\hat{\sigma}$. Используя (3.32) и выражение для полной производной по времени, (4.33) можно представить в виде

$$\rho \frac{d\Upsilon}{dt} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Omega}_{V}. \tag{4.35}$$

При отсутствии на поверхности разрыва S^* поверхностных источников массы, количества движения и энергии из (4.34) следует

$$\left[\rho(\boldsymbol{D}^{*} - \boldsymbol{v}) \right] \cdot \boldsymbol{n}^{*} = 0,$$

$$\left[\rho \boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{D}^{*}) \right] \cdot \boldsymbol{n}^{*} = \left[\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right] \cdot \boldsymbol{n}^{*},$$

$$\left[\rho \varepsilon^{*} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{D}^{*}) + \boldsymbol{q} \right] \cdot \boldsymbol{n}^{*} = \left[\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right] \cdot \boldsymbol{n}^{*},$$

$$\left\{ 4.36 \right\}$$

где $(\cdot)^{T}$ — символ транспонирования. Отметим, что поверхностные источники таких субстанций, как объемная плотность электрического заряда, количество движения и энергия, необходимо в общем случае учитывать при взаимодействии сплошной среды с электромагнитным полем (см. 12.5).

Первое равенство (4.36) означает непрерывность проекции вектора $\rho \tilde{v}$ плотности потока массы на направление вектора n^* нормали при переходе через поверхность разрыва, но допускает при этом скачкообразные изменения плотности и вектора скорости частицы среды. Это равенство можно представить в виде $\rho^{(1)}v_n^{(1)} = \rho^{(2)}v_n^{(2)} + D_n^*(\rho^{(1)} - \rho^{(2)}),$ где $v_n^{(1)} = v^{(1)} \cdot n^*, v_n^{(2)} = v^{(2)} \cdot n^*$ и $D_n^* = D^* \cdot n^* \ge 0.$

Второе равенство (4.36) в проекциях на координатные оси Ox_i принимает вид $[\rho v_i(v_j - D_j^*)]n_j^* = [\sigma_{ji}]n_j^*$, i, j = 1, 2, 3, где v_i , D_i^* и n_i^* — проекции на эти оси векторов v, D^* и n^* соответственно, а σ_{ji} — компоненты тензора $\hat{\sigma}$. Умножая последнее равенство на n_i^* и учитывая первое равенство (4.36), получаем

$$|\tilde{v}_{n}^{(1)}| = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}}{\rho^{(1)} - \rho^{(2)}}} \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, \quad |\tilde{v}_{n}^{(2)}| = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}}{\rho^{(1)} - \rho^{(2)}}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}},$$

где $\sigma = \sigma_{ji} n_i^* n_j^*; \ \widetilde{v}_n = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{D}^*) \cdot \boldsymbol{n}^*.$

Неравенству Клаузиуса — Дюгема (4.19), выражающему второй закон термодинамики, при $\Upsilon = h$ и $\Psi = q/T$, где h — массовая плотность энтропии, а T — абсолютная температура, соответствует условие на поверхности разрыва в виде $[\rho h(v - D) + q/T] \cdot n^* \ge 0$.

4.5. Термодинамический подход к построению математических моделей

Основные положения термодинамики позволяют определить общую структуру *математических моделей* (MM) достаточно широкого класса реальных процессов, характерных для современной техники и технологии. Эта структура может быть конкретизирована применительно к сплошной среде с известными или предполагаемыми свойствами.

В прикладных исследованиях обычно используют модели, описывающие структурно-неоднородную многокомпонентную сплошную среду как макроскопически однородную с усредненными характеристиками. Это часто не позволяет отразить существенные особенности поведения такой среды, например, при высокоинтенсивных *термомеханических процессах* с быстро изменяющимися *параметрами термодинамическо-го состояния* [68]. Математические модели таких процессов должны учитывать изменения микроструктуры среды, а также явления запаздывания и перекрестные эффекты при аккумуляции и переносе энергии, массы и количества движения.

Обоснованный учет отмеченных особенностей возможен с привлечением соотношений термодинамики необратимых процессов, причем в рамках термодинамического подхода к построению MM реальных термомеханических процессов можно выделить три основных пути, базирующихся на рассмотрении сред с внутренними параметрами термодинамического состояния, сред с памятью и сред скоростного типа.

Рассмотрим первый путь. Предположим, что состояние сплошной среды в окрестности любой ее частицы можно описать четырьмя термодинамическими функциями, которые выполняют роль активных переменных: массовыми плотностями свободной энергии A и энтропии h, тензором напряжений Пиолы — Кирхгофа $\hat{\mathbf{T}}$ с компонентами T_{ji} (i, j = 1, 2, 3) и вектором q° плотности теплового потока с компонентами q_i° . В качестве аргументов этих функций примем реактивные переменные: лагранжев тензор конечной деформации $\hat{\mathbf{L}}$ с компонентами L_{km} , k, m = 1, 2, 3; абсолютную температуру T; материальный градиент температуры с компонентами $\vartheta_k = \partial T/\partial a_k$, где a_k

материальные координаты рассматриваемой частицы среды, и внутренние параметры термодинамического состояния $\chi^{(\alpha)}$, $\chi^{(\beta)}_k$, $\chi^{(\gamma)}_{km}$ $(\alpha = \overline{1, \alpha_K}, \beta = \overline{1, \beta_M}, \gamma = \overline{1, \gamma_N})$. Физический смысл этих параметров зависит от свойств конкретной сплошной среды и особенностей реального термомеханического процесса. Введение этих параметров дает возможность связать макроскопическое поведение сплошной среды с процессами, протекающими на микроуровне. Например, скалярными параметрами $\chi^{(\alpha)}$ могут быть температуры отдельных структурных элементов среды или концентрации фаз и веществ, входящих в состав среды. Роль векторных внутренних параметров с компонентами $\chi^{(\beta)}_k$ могут выполнять потоки массы, энергии и количества движения, переносимые элементами микроструктуры среды, а тензорных параметров с компонентами $\chi^{(\gamma)}_{km}$ — микронапряжения [40, 41]. Таким образом, в общем случае

$$A = A(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}),$$

$$h = h(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}),$$

$$T_{ji} = T_{ji}(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}),$$

$$q_i^{\circ} = q_i^{\circ}(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}).$$

$$(4.37)$$

Предположим, что скорости изменения внутренних параметров зависят лишь от текущего состояния сплошной среды в окрестности рассматриваемой частицы, т.е.

$$\frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} = \varkappa^{(\alpha)}(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}),
\frac{d\chi^{(\beta)}_i}{dt} = \varkappa^{(\beta)}_i(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}),
\frac{d\chi^{(\gamma)}_{ij}}{dt} = \varkappa^{(\gamma)}_{ij}(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km}).$$
(4.38)

Подставляя в общее диссипативное неравенство (4.24) функцию $A = A(L_{km}, T, \vartheta_k, \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}_k, \chi^{(\gamma)}_{km})$, приходим к неравенству

$$-\left(\rho_{0}\frac{\partial A}{\partial L_{ij}}-T_{ji}\right)\frac{dL_{ij}}{dt}-\rho_{0}\left(\frac{\partial A}{\partial T}+h\right)\frac{dT}{dt}-\rho_{0}\frac{\partial A}{\partial\chi^{(\alpha)}}\frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt}-\\ -\rho_{0}\frac{\partial A}{\partial\chi^{(\beta)}_{i}}\frac{d\chi^{(\beta)}_{i}}{dt}-\rho_{0}\frac{\partial A}{\partial\chi^{(\gamma)}_{ij}}\frac{d\chi^{(\gamma)}_{ij}}{dt}-\rho_{0}\frac{\partial A}{\partial\vartheta_{i}}\frac{d\vartheta_{i}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial a_{i}}\frac{q_{i}^{\circ}}{T} \ge 0,$$

выполнение которого является необходимым условием реализуемости рассматриваемого термомеханического процесса в сплошной среде с

внутренними параметрами состояния. Это неравенство линейно по отношению к скоростям изменения реактивных переменных, которые или не являются определяющими переменными (такие, как dL_{ij}/dt , dT/dt и $d\vartheta_i/dt$), или же заданы при помощи (4.38). Так как *второй* закон термодинамики справедлив для произвольных скоростей процессов, достаточным условием реализуемости рассматриваемого процесса являются равенства

$$T_{ji} = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial L_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0$$
 (4.39)

и неравенство

$$\delta_D = -\rho_0 \left(\frac{\partial A}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(\beta)}} \frac{d\chi_i^{(\beta)}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\gamma)}} \frac{d\chi_{ij}^{(\gamma)}}{dt} \right) \geqslant \frac{q_i^{\circ}}{T} \frac{\partial T}{\partial a_i}, \quad (4.40)$$

где δ_D — *диссипативная функция*. Отсюда следует, что конкретная форма уравнений (4.38) не должна противоречить этому неравенству.

Исключив из (4.13) при помощи (4.21) массовую плотность внутренней энергии и, с учетом (4.39) получим

$$-\rho_0 T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} = \delta_D - \frac{\partial q_i^{\circ}}{\partial a_i} + q_V^{\circ} - \\ -\rho_0 T \left(\frac{\partial h}{\partial L_{ij}} \frac{dL_{ij}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \chi^{(\alpha)}} \frac{d\chi^{(\alpha)}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \chi^{(\beta)}_i} \frac{d\chi^{(\beta)}_i}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \chi^{(\gamma)}_{ij}} \frac{d\chi^{(\gamma)}_{ij}}{dt} \right).$$

Слагаемые, заключенные в скобки в правой части этого равенства, зависят от скорости изменения внутренних параметров состояния среды и характеризуют *термомеханическую связанность* протекающих в ней процессов.

Второй путь построения математических моделей термомеханических процессов основан на использовании интегральной формы соотношений, связывающих активные переменные $(A, h, T_{ji} \ u \ q_i^{\circ})$ и реактивные переменные $(L_{km}, T \ u \ \vartheta_k)$, а в общем случае и внутренние параметры состояния). Такая форма позволяет "учесть предысторию рассматриваемых процессов, т.е. построить MM среды, обладающей свойством памяти и называемой сплошной средой с памятью.

Если текущее состояние частицы среды в момент времени t характеризовать в материальных координатах некоторой векторной функцией, зависящей от текущих значений реактивных переменных, которые, в свою очередь, зависят от t, то ее можно представить в виде $\varphi(t)$.

Тогда влияние состояния этой частицы в момент времени $\tau < t$ на состояние в момент времени t с учетом принципа затухающей памяти можно учесть при помощи функции $\varphi(t,\tau) = \gamma(t-\tau) \cdot \varphi(\tau)$, где $\gamma(s)$ векторная функция, координатные функции которой ограничены при $s = t - \tau > 0$, положительны и монотонно убывают по мере увеличения «срока давности», выполняя роль весовых коэффициентов влияния предшествующих значений реактивных переменных и внутренних параметров состояния. Влияние всей предыстории изменения состояний будет отражать функция

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t,\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \gamma(t-\tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau.$$
(4.41)

Применительно к свободной энергии, зависящей от совокупности значений реактивных переменных в текущий и предшествующие моменты времени, можно записать $A = \widetilde{A}(\widetilde{\Phi}(t))$, а для ее полной производной по времени —

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{\Phi}}\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt} = \frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{\Phi}}\left(\gamma(0)\cdot\varphi(t) + \int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\gamma(t-\tau)}{\partial t}\cdot\varphi(\tau)\,d\tau\right).$$
(4.42)

Тогда вместо (4.24) получим неравенство

$$T_{ji}\frac{dL_{ij}}{dt} - \rho_0 \left(\frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{\Phi}}\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt} + h\frac{dT}{dt}\right) \ge \frac{q_i}{T}\frac{\partial T}{\partial a_i},$$

выполнение которого является необходимым условием реализуемости рассматриваемого термомеханического процесса в сплошной среде с памятью.

Отличие третьего пути применения термодинамического подхода к построению MM термомеханических процессов от первого пути состоит лишь в том, что в качестве аргументов активных переменных дополнительно используют скорости изменения реактивных переменных (например, dL_{km}/dt , dT/dt и т. д.). В этом случае говорят о MM процессов, протекающих в сплошной среде скоростного типа.

Три рассмотренных пути построения ММ представляют большое разнообразие возможностей при моделировании реальных термомеханических процессов, протекающих в сплошной среде. Наиболее широкие возможности обеспечивает использование второго пути, однако его недостаток состоит в том, что за математическим формализмом не всегда ясно видно физическое содержание моделируемых явлений.

Формально можно показать, что первый и третий пути являются более простыми вариантами второго пути, т.е. среды с внутренними параметрами состояния и скоростного типа можно рассматривать как частные случаи среды с памятью. Действительно, если в (4.41) функцию $\gamma(t-\tau)$ заменить функцией $\gamma_0 \delta(t-\tau)$, где вектор γ_0 образован постоянными весовыми коэффициентами влияния реактивных переменных и внутренних параметров состояния, а $\delta(t-\tau)$ — финкция Дирака. то получим $\widetilde{\Phi}(t) \equiv \gamma \cdot \varphi(t)$, что соответствует «нулевой памяти». Тогда аргументом массовой плотности свободной энергии будет функция $\boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(t),$ явно зависящая лишь от текущих значений этих переменных и параметров. Если же принять координатные функции векторной функции $\gamma(s)$ достаточно быстро убывающими при s > 0, то в линейном приближении получим [67] $\gamma(s) = \gamma_0 \delta(s) + \gamma_1 \frac{d\delta(s)}{ds}$, что отвечает «бесконечно короткой памяти». Тогда, согласно (4.41), аргументом массовой плотности свободной энергии будет $\boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\gamma}_1\cdot rac{d\boldsymbol{\varphi}(t)}{dt},$ что соответствует математической модели среды скоростного типа.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Сплошную среду, в которой при внешних механических воздействиях в состоянии покоя наряду с нормальными напряжениями могут возникать и касательные напряжения, в механике принято называть твердым телом. Если эти воздействия не приводят к возникновению деформации, то говорят об абсолютно твердом теле, а в противном случае — о **деформируемом твердом теле**. Среда обладает свойством **упругости**, если она после снятия механического воздействия возвращается в первоначальное состояние (твердое тело полностью восстанавливает свои размеры и форму).

Помимо механического воздействия среда может испытывать и тепловое воздействие, которое приводит к изменению ее температуры, что вследствие теплового расширения вызывает появление *memnepaтурной defopmaции*. В этом случае при сохранении средой свойства упругости принято говорить о *термоупругой сплошной среде*. Ма*тематические модели* такой среды широко используют в инженерных приложениях, поскольку большое количество реальных технических устройств в процессе изготовления, испытаний и эксплуатации подвергается совместным механическим и тепловым воздействиям. При изменении температуры среды во времени процесс ее *деформирования* называют *неизотермическим*.

5.1. Классическая термоупругость

Рассмотрим деформируемое твердое тело — термоупругую сплошную среду, имеющую хотя бы одно естественное состояние, в котором отсутствуют напряжения и деформации, а температура во всех точках одинакова. В этом состоянии тело занимает объем V, ограниченный поверхностью S, а положение любой точки $M \in V$ тела задает радиус-вектор x(M) с координатами $x_i(M)$ (i = 1, 2, 3) в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Пусть в начальный момент времени t = 0 среда в естественном состоянии имеет абсолютную температуру $T_0 = \text{const.}$ При отклонении температуры T(x,t) от значения T_0 в теле возникают температурные деформации, определяемые **тензором температурной деформа**ции $\hat{\varepsilon}^{(T)}$ с компонентами $\varepsilon_{ij}^{(T)}$, i, j = 1, 2, 3. Будем полагать, что связь между этими компонентами и приращением $\Delta T = T({m x},t) - T_0$ линейна и имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}^{(T)} \,\Delta T,\tag{5.1}$$

где $\alpha_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора $\widehat{\alpha}^{(T)}$ второго ранга, называемого тензором коэффициентов температурной деформации. Также линейной будем считать связь между компонентами σ_{ij} тензора $\widehat{\sigma}$ напряжений и компонентами ε_{ij} тензора $\widehat{\varepsilon}$ малой деформации, которую с учетом (5.1) и правила суммирования по одинаковым индексам представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}^{(T)}\Delta T, \quad k, l = 1, 2, 3, \tag{5.2}$$

или $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T$, где S_{ijkl} — компоненты *тензора* $\hat{\mathbf{S}}$ четвертого ранга, называемого **тензором коэффициентов податливости**. При таких предположениях сплошную среду называют линейной **термоупругой**. В изотермических условиях, когда в (5.2) $\Delta T \equiv 0$, сплошную среду считают линейно-упругой. При этом $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ — компоненты **тензора** $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$ упругой деформации. Совокупность значений σ_{ij} и ε_{ij} характеризует напряженно-деформированное состояние такой среды.

Использование тензора малой деформации предполагает, что эйлерово и лагранжево описания движения сплошной среды эквивалентны (см. 3.2). При этом считают, что положения частиц сплошной среды в начальной и актуальной конфигурациях совпадают, т.е. $x_i = a_i$, где a_i — материальные координаты частицы. В этом случае полная производная $d(\cdot)/dt$ по времени t совпадает с частной производной $\partial(\cdot)/\partial t$, а плотность ρ не зависит от t. Эти допущения, иногда объединяемые термином принцип начальных размеров [145], лежат в основе построения математических моделей (MM) так называемой классической термоупругости.

Если при изменении температуры среды в ней не возникает напряжений, то из (5.2) следует, что $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}^{(T)} \Delta T$, т.е. в силу симметрии тензора $\hat{\varepsilon}$ тензор $\hat{\alpha}^{(T)}$ также симметричен. Тензор \hat{C} четвертого ранга с компонентами C_{ijkl} , удовлетворяющими (1.13), называют *тензором* коэффициентов упругости. Умножая обе части (5.2) на компоненты этого тензора, получаем соотношения

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}^{(T)} \Delta T), \quad \text{или} \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T), \quad (5.3)$$

выражающие закон Дюамеля — Неймана.

Тензоры \hat{S} и \hat{C} можно сопоставить с симметрическими матрицами S и C шестого порядка (см. 1.6), имеющими в общем случае по 21 независимому элементу. Поэтому и тензоры \hat{S} и \hat{C} имеют не более 21 независимой компоненты и характеризуют общий случай анизотропной линейной термоупругой сплошной среды. Если при этом температурная деформация отсутствует, то среду называют анизотропной линейно-упругой.

Значения компонент тензора $\widehat{\mathbf{C}}$ (и элементов матрицы C) зависят от ориентации осей выбранной системы координат. Если поворотом системы координат симметрическую матрицу C удается привести к виду

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix},$$
(5.4)

т.е. число ненулевых независимых элементов этой матрицы равно 9, то в этом случае среду называют линейной термоупругой ортотропной, а соответствующие координатные оси — главными осями ортотропии. В частном случае $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ и $C_{44} = C_{55} = C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ имеем линейно-упругую изотропную среду, упругие свойства которой зависят всего от двух независимых параметров, обозначаемых $\lambda = C_{12}$ и $\mu = (C_{11} - C_{12})/2$ и называемых константами Ламе. В этих обозначениях компоненты тензора \hat{C} для изотропной среды принимают вид

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \,\delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl},\tag{5.5}$$

где $I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ — компоненты единичного тензора четвертого ранга; δ_{ij} — символ Кронекера. При отсутствии температурной деформации говорят о линейно-упругой изотропной среде.

В случае изотропной линейной термоупругой среды

$$S_{ijkl} = -\frac{\delta_{ij}\,\delta_{kl}\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}}{4\mu}.$$
(5.6)

В инженерных приложениях μ отождествляют с *модулем сдвига* [113, 148] (*модулем упругости второго рода* [145]): $G = \mu$, а в качестве другого независимого параметра часто используют *модуль продольной упругости* [113,148] (модуль упругости *первого рода* [145], или модуль Юнга) Е. Эти модули и константы Ламе связаны соотношением $E = 2G(1 + \nu) = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\right)$, где ν — коэффициент Пуассона. В некоторых случаях в качестве двух независимых параметров удобно использовать G и модуль объемной упругости [113,148] (модуль всестороннего сжатия) $\varkappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$, вводимый как отношение всестороннего давления p к объемной деформации $\varepsilon_V = \varepsilon_{ii}$, взятое с обратным знаком.

Вместо (5.1) для изотропной линейной термоупругой среды получим $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha^{(T)} \Delta T \, \delta_{ij}$, где $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения. Тогда с учетом температурной деформации обобщенный закон Гука примет вид

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu)\frac{\sigma_{ij}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha^{(T)}\Delta T\,\delta_{ij}.$$
(5.7)

Если подставить (5.3) в уравнения движения (3.62), то с учетом (3.12) и симметрии тензора $\hat{\mathbf{C}}$ получим уравнения движения среды в перемещениях

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_{kl}^{(T)} \Delta T \right) \right) + b_i, \tag{5.8}$$

где u_i и b_i — проекции вектора и перемещения и вектора b плотности объемных сил на оси координат Ox_i . Для изотропной, но неоднородной среды из (5.8) следуют уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \Delta T \right) + b_i,$$

которые в случае однородности изотропной среды переходят в уравнения Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + b_i.$$
(5.9)

В качестве начальных условий для уравнений в перемещениях обычно задают в теле векторные поля перемещений $u^{\circ}(M)$ и скоростей $v^{\circ}(M)$ ($M \in V$) в начальный момент времени t = 0, поэтому

$$u_i(M,0) = u_i^{\circ}(M), \quad \dot{u}_i(M,0) = v_i^{\circ}(M), \quad M \in V.$$
 (5.10)

Поверхность S тела может иметь участки $S_u \subseteq S$, на которых могут быть заданы так называемые кинематические граничные условия

$$u_i(N,t) = \widetilde{u}_i(N,t), \quad N \in S_u, \tag{5.11}$$

где \tilde{u}_i — проекции на оси координат заданной векторной функции u(N,t) перемещения точек поверхности. На остальных участках $S_p = S \setminus S_u$ поверхности тела силовые граничные условия вида (3.47) следует представить при помощи (3.12), (5.1) и (5.3) через перемещения:

$$C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_{kl}^{(T)} \Delta T \right) n_j(N) = p_i^{\circ}(N, t), \quad N \in S_p,$$
(5.12)

где n_j — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности; p_i° — проекции на оси координат заданной векторной функции $p^{\circ}(N,t)$ плотности поверхностных сил. Для изотропной среды (5.12) принимает вид

$$\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\left(\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-(3\lambda+2\mu)\alpha^{(T)}\Delta T\right)\delta_{ij}\right)n_j=p_i^o(N,t).$$

К уравнениям движения в перемещениях необходимо добавить уравнение для нахождения в теле **температурного поля** $T(M,t), M \in V$. Это уравнение следует из закона сохранения энергии (4.22), если массовую плотность энтропии h и диссипативную функцию δ_D выразить при помощи массовой плотности свободной энергии A через абсолютную температуру T.

В разложении функции $A(\varepsilon_{ij}, \Theta)$ свободной энергии, где $\Theta = \frac{T - T_0}{T_0}$, в ряд Тейлора относительно параметров естественного состояния $\varepsilon_{ij} = 0$ и $T = T_0$ ($\Theta = 0$) ограничимся квадратичными слагаемыми:

$$A(\varepsilon_{ij},\Theta) = A(0,0) + \frac{\partial A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial A(0,0)}{\partial \Theta} \Theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \Theta} \varepsilon_{ij} \Theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(0,0)}{\partial \Theta^2} \Theta^2 + \dots \quad (5.13)$$

Такой подход наряду с допущением о малости компонент тензора деформации предполагает и малое отклонение T от T_0 , т.е. $|\Theta| \ll \ll 1$. Возможность не учитывать последнее предположение рассмотрена в [39].

Примем, что в естественном состоянии A(0,0)=0. Согласно второму равенству (4.39), энтропия естественного состояния равна $-\frac{1}{T_0}\frac{\partial A(0,0)}{\partial \Theta}$, ее также можно положить равной нулю. Тогда с учетом (5.1), (5.3) и (5.13) первое равенство (4.39) при принятых выше допущениях можно представить в виде

$$\begin{split} \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}, \Theta)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \rho \frac{\partial A(0, 0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho \frac{\partial^2 A(0, 0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \\ &+ \rho \frac{\partial^2 A(0, 0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \Theta} \Theta = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \Delta T, \end{split}$$

где $\frac{\partial^2 A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{C_{ijkl}}{\rho}$; $\frac{\partial^2 A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \Theta} = -T_0 C_{ijkl} \frac{\alpha_{kl}^{(T)}}{\rho}$ и $\Delta T = T - T_0$, а $\frac{\partial A(0,0)}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$, поскольку в естественном состоянии при $\varepsilon_{kl} = 0$ и $T = T_0$ напряжения отсутствуют. В итоге вместо (5.13) запишем

$$\rho A(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}{2} - C_{ijkl}\alpha_{kl}^{(T)}\varepsilon_{ij}\Delta T + \rho B(T), \qquad (5.14)$$

где B(T) включает все слагаемые, зависящие только от температуры.

С учетом первых двух равенств (4.39) и (5.14) для *диссипативной* функции из (4.22) получим

$$\delta_D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} -
ho \Big(rac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + rac{\partial A}{\partial T} \dot{T} + h \dot{T} \Big) = 0,$$

а (4.22) запишем в виде

$$T\rho c_{\varepsilon} \dot{T} = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \qquad (5.15)$$

где $c_{\varepsilon} = T \frac{d^2 B(T)}{dT^2}$ — удельная массовая теплоемкость среды при постоянной деформации, Дж/(кг·К); q_i — проекции вектора q плотности теплового потока на оси координат Ox_i ; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты.

Так как, согласно (5.3), $C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\sigma}_{ij} + C_{ijkl}\alpha_{kl}^{(T)}\dot{T}$, вместо (5.15) можно записать

$$\rho c_{\sigma} \dot{T} = -T \alpha_{ij}^{(T)} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \qquad (5.16)$$

где $c_{\sigma} = c_{\varepsilon} + TC_{ijkl}\alpha_{kl}^{(T)}\alpha_{ij}^{(T)}/\rho$ — удельная массовая теплоемкость при постоянных напряжениях, которую, как правило, и определяют в теплофизических экспериментах, поскольку ее измеряют у образнов материалов в ненагруженном состоянии. Для изотропной среды $\alpha_{ij}^{(T)} = \alpha^{(T)} \delta_{ij}$ и $c_{\sigma} = c_{\varepsilon} + 3T(3\lambda + 2\mu)(\alpha^{(T)})^2/\rho = c_{\varepsilon}(1 + \gamma_T)$, где $\gamma_T =$ $= T\varkappa(\alpha_V^{(T)})^2/(\rho c_{\varepsilon}), \ \alpha_V^{(T)} = 3\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент объемного расширения. У большинства металлов параметр γ_T при температуре T = 293 К мал (табл. 5.1), что свидетельствует о незначительном различии между c_{σ} и c_{ε} . В большинстве инженерных приложений допустимо считать $c_{\varepsilon} = c_{\sigma}$ и при $\rho = \text{const}$ для деформируемого твердого тела использовать удельную объемную теплоемкость $c_V = c_{\varepsilon}\rho, \ Дж/(m^3 \cdot K).$

Металл	γ_T	Металл	γ_T
Алюминий	0,043	Медь	0,028
Вольфрам	0,006	Молибден	0,007
Железо	0,016	Никель	0,021
Золото	0,038	Серебро	0,040
Кобальт	0,020	Тантал	0,010

Таблица 5.1

В соответствии с принципом равноприсутствия представим последнее соотношение (4.37) без учета внутренних параметров термодинамического состояния в виде линейной функции $q_i = \beta_{ijk}\varepsilon_{jk} - \lambda_{ij}^{(T)}\vartheta_j + \gamma_i(T-T_0) + g_i$ реактивных переменных: компонент ε_{jk} тензора малой деформации, приращения $\Delta T = T - T_0$ температуры и проекций $\vartheta_i = \partial T/\partial x_i$ пространственного градиента температуры ($\beta_{ijk}, \lambda_{ij}^{(T)}, \gamma_i$ и g_i — компоненты тензоров соответственно третьего, второго и первого рангов). В силу неравенства (4.24) при $\delta_D = 0$ эти тензоры следует выбрать так, чтобы общее диссипативное неравенство (4.23) было выполнено при произвольных значениях реактивных переменных, т.е.

$$-q_iartheta_i=-eta_{ijk}arepsilon_{jk}artheta_i+rac{\lambda^{(T)}_{ij}artheta_jartheta_i}{2}+\gamma_i(T-T_0)artheta_i+g_iartheta_i\geqslant 0,$$

Достаточными условиями выполнения этого неравенства являются равенства нулю компонент β_{ijk} , γ_i и g_i ; квадратичная форма $\frac{1}{2}\lambda_{ij}^{(T)}\vartheta_j\vartheta_i$ должна быть неотрицательно определенной. Соотношение

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \vartheta_j = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$
 или $q = -\widehat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T,$ (5.17)

где $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты *тензора* $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{(T)}$ *теплопроводности*, являющиеся элементами неотрицательно определенной симметрической матрицы третьего порядка; ∇ — *дифференциальный оператор Гамильтона*, выражающий закон Био — Фурье для анизотропной среды. Для изотропной среды $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)} \delta_{ij}$, где $\lambda^{(T)}$ — ее *теплопроводность*.

Подставляя (5.17) в (5.15), получаем уравнение теплопроводности

$$\rho c_{\varepsilon} \dot{T} = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V, \qquad (5.18)$$

описывающее нестационарное распределение температуры в анизотропной термоупругой среде с учетом влияния скорости изменения деформации как частного случая термомеханической связанности. В случае однородной изотропной среды при $\lambda^{(T)} = \text{const} (5.18)$ принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T(3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}}{\rho c_{\varepsilon}} \dot{\varepsilon}_{V} + a^{(T)} \frac{\partial^{2} T}{\partial x_{i} \partial x_{i}} + \frac{q_{V}}{\rho c_{\varepsilon}}, \qquad (5.19)$$

где $a^{(T)} = \lambda^{(T)}/(\rho c_{\varepsilon})$ — *температуропроводность* среды, м²/с.

В качестве начального условия для (5.18) или (5.19) должно быть задано распределение температуры $T^{\circ}(M)$ в начальный момент времени t = 0, т.е.

$$T(M,0) = T^{\circ}(M), \quad M \in V,$$
 (5.20)

а линеаризованные граничные условия имеют вид

$$\lambda_{ij}^{(T)}(N)\frac{\partial T(N,t)}{\partial x_j}n_i(N) = \alpha(N,t)\big(T_{\rm c}(N,t) - T(N,t)\big), \ N \in S, \tag{5.21}$$

где n_i — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности S в ее точке N; α и T_c — заданные зависимости коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды соответственно. Если на участках $S_T \subseteq S$ поверхности теплообмен с окружающей средой весьма интенсивен и можно считать, что $\alpha \to \infty$, то вместо (5.21) используют граничные условия первого рода $T(N,t) = T_c(N,t), N \in S_T$. Если же на участках $S_q \subseteq S$ поверхности $T_c(N,t) \gg T(N,t)$, то условия (5.21) переходят в граничные условия второго рода $\lambda_{ij}^{(T)}(N) \frac{\partial T(N,t)}{\partial x_j} n_i = \tilde{q}(N,t), N \in S_q$, где $\tilde{q}(N,t) \approx \alpha(N,t)T_c(N,t)$ — заданная зависимость плотности теплового потока, подводимого к поверхности. В теории теплопроводности общий случай в виде (5.21) называют граничными условиями третьего рода.

Математическая модель, включающая (5.9)-(5.12) и (5.18)-(5.21)характеризует связанную динамическую задачу термоупругости. Можно показать [96], что эта задача имеет единственное решение. Если в (5.9) допустимо пренебречь инерционными членами $\rho \partial^2 u_i / \partial t^2$, то уравнения Ламе переходят в уравнения равновесия в перемещениях

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + b_i = 0, \quad (5.22)$$

отпадает необходимость в начальных условиях (5.10), а соответствующая MM характеризует связанную квазистатическую задачу термоупругости. Когда состояние термоупругой среды остается

неизменным во времени, то имеем *стационарную задачу термоупругости*. При этом температурное поле не зависит от напряжений или деформации.

Если на поверхности S заданы лишь силовые граничные условия вида (3.47), а начальные условия заданы в напряжениях, то целесообразно в ММ перейти от перемещений к напряжениям. Для этого в шесть независимых условий совместности деформаций (3.14) подставим (5.2) и получим

$$\frac{\partial^2 (S_{ikpq}\sigma_{pq} + \alpha_{ik}^{(T)}\Delta T)}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 (S_{jkpq}\sigma_{pq} + \alpha_{jk}^{(T)}\Delta T)}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial^2 (S_{impq}\sigma_{pq} + \alpha_{im}^{(T)}\Delta T)}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 (S_{jmpq}\sigma_{pq} + \alpha_{jm}^{(T)}\Delta T)}{\partial x_i \partial x_k}.$$
 (5.23)

Эти уравнения необходимо рассматривать совместно с уравнениями движения среды (3.62), которые после исключения из них перемещений при помощи (3.12) и (5.2) принимают вид

$$2\rho \frac{\partial^2 (S_{ijpq}\sigma_{pq} + \alpha_{ij}^{(T)}\Delta T)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{ki}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \sigma_{kj}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i}.$$
 (5.24)

В случае изотропной и однородной среды при не зависящих от температуры коэффициентах из (5.23) с учетом (5.6) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu(\lambda+2\mu)} \Big(\frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_m} \,\delta_{ik} - \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_m} \,\delta_{jk} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} \,\delta_{jm} - \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_k} \,\delta_{im} \Big) + \\ &+ \frac{1}{2\mu} \Big(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^2 \sigma_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{im}}{\partial x_j \partial x_k} \Big) + \\ &+ \alpha^{(T)} \Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_m} \,\delta_{ik} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_m} \,\delta_{jk} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \,\delta_{jm} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} \,\delta_{im} \Big) = 0, \end{aligned}$$

и после умножения на δ_{km} и суммирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_j} &+ \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right) + \\ &+ \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} \right) + 2\mu \alpha^{(T)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Для изотропной среды (5.24) можно представить с учетом перемены индексов и соотношений (5.6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right) = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2\lambda \sigma_{ll} \delta_{ik}}{\lambda + 2\mu} + \sigma_{ik} + 2\mu \alpha^{(T)} \delta_{ik} \Delta T \right) - \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}$$

Из двух последних соотношений следуют шесть дифференциальных уравнений волнового типа

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2\lambda \sigma_{ll} \delta_{ik}}{\lambda + 2\mu} + \sigma_{ik} + 2\mu \alpha^{(T)} \delta_{ik} \Delta T \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{2\lambda \delta_{ik}}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_j \partial x_j} +$$

$$+ 2\mu \alpha^{(T)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \frac{\partial b_k}{\partial x_i}, \quad (5.25)$$

которые вместе с (5.16), (5.17) и соответствующими краевыми условиями составляют ММ связанной динамической задачи термоупругости в напряжениях.

Если элементарный объем dV термоупругой среды рассматривать в качестве термодинамической системы, то для простого термомеханического процесса при $q_V - \partial q_i/\partial x_i = 0$ объемная плотность энтропии в таком объеме будет постоянна. В этом случае термодинамический процесс называют изоэнтропическим, а если и $q_V = 0$, и $q_i = 0$ (i = 1, 2, 3) — адиабатическим. Тогда из (5.15) для изотропной среды следует $dT = -\frac{T \varkappa' \alpha_V^{(T)} d\varepsilon'_V}{\rho c_\epsilon}$ и с учетом условия $T = T_0$ при $\varepsilon'_V = 0$ после интегрирования получим $\frac{T}{T_0} = \exp\left(-\frac{\varkappa' \alpha_V^{(T)} \varepsilon'_V}{\rho c_\epsilon}\right)$, где \varkappa' и ε'_V — значения модуля объемной упругости и объемной деформации при изоэнтропическом процессе. Таким образом, увеличение объема ведет к понижению температуры и наоборот, но при одинаковых абсолютных значениях ε'_V рост температуры при сжатии больше, чем ее понижение при расширении. Для малых абсолютных значений показателя экспоненты допустима линеаризация, т.е. при $\Delta T = T - T_0$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \exp\left(-\frac{\varkappa' \alpha_V^{(T)} \varepsilon_V'}{\rho c_{\varepsilon}}\right) - 1 \approx -\frac{\varkappa' \alpha_V^{(T)} \varepsilon_V'}{\rho c_{\varepsilon}}.$$
(5.26)

При всестороннем изоэнтропическом сжатии тела давлением $p = -\varkappa' \varepsilon_V$ из (5.26) получим $\Delta T/T_0 \approx p \alpha_V^{(T)}/(\rho c_{\varepsilon})$. Например, для меди при $T_0 = 1000$ К и сжатии давлением p = 100 МПа прирост температуры составит всего $\Delta T \approx 1,44$ К. И для других металлов взаимосвязь деформированного и температурного состояний при изоэнтропическом процессе достаточно слабая, но, строго говоря, приводит к отличию значения \varkappa' от значения \varkappa при T = const, т.е. в изотермическом процессе деформирования. Действительно, в последнем случае под действием давления p объемная деформация $\varepsilon_V = -p/\varkappa$, а для изоэнтропического процесса с учетом (5.26) $\varepsilon'_V = -p/\varkappa' = -p/\varkappa + \alpha_V^{(T)} \Delta T =$ $= -p/\varkappa - T_0 \varkappa' (\alpha_V^{(T)})^2 \varepsilon'_V / (\rho c_{\varepsilon})$. Отсюда $\varkappa' = \varkappa(1 + \gamma_T)$, поэтому для большинства металлов в силу малости параметра γ_T при температуре $T_0 = 293$ К (см. табл. 5.1) различие между значениями \varkappa' и \varkappa мало́. Это различие возрастает пропорционально увеличению температуры T_0 .

Деформации сдвига не вызывают изменения объема. Поэтому связь между температурной деформацией и касательными напряжениями для изотропной среды отсутствует, а значение модуля сдвига G, если оно не зависит от T, остается одинаковым для любого процесса деформирования (как и значение совпадающей с G константы Ламе μ). Поскольку $\lambda = \varkappa - 2\mu/3$, имеем $\lambda' = \lambda + \gamma_T \varkappa > \lambda$, т.е. значение другой константы Ламе в изоэнтропическом процессе больше, чем в изотермическом. Из приведенных выше выражений, связывающих модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона $\nu \, c \, \varkappa \, u \, \mu$, получим $1 < \frac{E'}{E} = \frac{3(1 + \gamma_T)}{3 + \gamma_T E/\mu} < 1 + \gamma_T$.

При статических способах экспериментального определения упругих характеристик материалов процесс деформирования происходит сравнительно медленно и температура образцов вследствие теплообмена с окружающей средой остается практически неизменной, т.е. процесс является изотермическим. При динамических способах теплообмен с окружающей средой и передача теплоты в объеме образца обычно не существенны и процесс деформирования близок к изоэнтропическому. Поэтому значения упругих характеристик, определяемых в статических и динамических условиях, несколько различаются между собой, хотя это различие часто лежит в пределах точности проводимых измерений. В дальнейшем, если нет специальной оговорки, различия между изоэнтропическими и изотермическими упругими характеристиками не учитываются.

В термоупругой среде могут возникнуть поверхности разрыва значений параметров, определяющих ее состояние. Из второго равенства (4.36) в случае малой деформации получаем связь скачков $[\dot{u}_i]$ скорости перемещения и $[\sigma_{ji}]$ напряжения на поверхности разрыва в виде

$$\rho[\dot{u}_i] D_n^* = -[\sigma_{ji}] n_j^*, \tag{5.27}$$

где D_n^* — нормальная составляющая скорости поверхности разрыва; n_j^* — направляющие косинусы нормали к этой поверхности, а из (3.12) следует, что

$$[\varepsilon_{ij}] D_n^* = \frac{[\dot{u}_i]n_j^* + [\dot{u}_j]n_i^*}{2}.$$
 (5.28)

Если считать отклонения температуры T от значения T_0 малыми и принять в (5.18) коэффициенты постоянными, то получим

$$\rho c_{\varepsilon}[T] D_n^* = T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)}[\varepsilon_{ij}] D_n^* - [q_j] n_j^*.$$

$$(5.29)$$

Наконец, из (5.3) и (5.17) следует, что

$$[\sigma_{ij}] = C_{ijkl}([\varepsilon_{kl}] - \alpha_{kl}^{(T)}[T]), \quad \lambda_{ij}^{(T)}[T]n_j^* = 0.$$
 (5.30)

Последнее равенство (5.30) означает, что [T] = 0, т.е. температурное поле непрерывно, а скорость распространения теплоты бесконечна.

Из (5.27), (5.28) и (5.30) находим $\rho[v_i](D_n^*)^2 - C_{ijkl}n_l^*[v_k]n_j^* = 0$, а так как в общем случае $[v_i] \neq 0$, то значение D_n^* должна удовлетворять условию $\det(\rho(D_n^*)^2 \delta_{ik} - C_{ijkl}n_l^*n_j^*) = 0$. Для частного случая изотропной среды отсюда получим скорости

$$D_1^* = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \mathbf{n} \quad D_2^* = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{5.31}$$

распространения продольных и поперечных волн соответственно в термоупругой среде. Если при решении задачи термоупругости с заданными начальными и граничными условиями определен скачок какой-либо из функций $v_i(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, T(x,y), то скачки остальных функций могут быть найдены из (5.27)-(5.30).

5.2. Температурные напряжения

Если допустимо не учитывать влияние эффекта термомеханической связанности полей температуры T и деформации на процесс теплопроводности, то задачу термоупругости можно рассматривать как нессязанную, т.е. температурное поле находить предварительно и независимо от напряженно-деформированного состояния среды (см. 7). Для оценки влияния этого эффекта продифференцируем левую часть (5.22) по x_i , i = 1, 2, 3, положив $b_i = 0$:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} (T - T_0) \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

а затем после двукратного интегрирования получим

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \varepsilon_V = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}(T - T_0)}{\lambda + 2\mu} + \varphi(x_1, x_2, x_3), \qquad (5.32)$$

где u_j — проекции вектора перемещения на оси Ox_j прямоугольной системы координат; ε_V — объемная деформация; λ , μ и $\alpha^{(T)}$ — константы Ламе и температурный коэффициент линейного расширения

среды соответственно; T_0 — температура естественного состояния среды; $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — гармоническая функция пространственных координат. Подставляя (5.32) в (5.19), получаем

$$(1+\delta_T)\frac{\partial T}{\partial t} = a^{(T)}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{q_V}{\rho c_{\epsilon}},$$
(5.33)

где $\delta_T = T_0 \frac{((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)})^2}{(\lambda + 2\mu)\rho c_{\epsilon}}$ — параметр термоупругой связанности, учитывающий влияние изменения объемной деформации на изменение температуры в окрестности рассматриваемой точки; t — время; $a^{(T)}$, ρ и c_{ϵ} — температуропроводность среды, ее плотность и удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты. Для металлов $\delta_T \ll 1$ и имеет тот же порядок, что и γ_T (см. табл. 5.1), этим параметром можно пренебречь по сравнению с единицей, однако для некоторых полимерных материалов он существенно больше (например, для поливинилбутираля $\delta_T = 0,431$).

Пренебрежение влиянием эффекта термомеханической связанности характерно для математических моделей теории температурных напряжений [15]. Эти модели для пространственной задачи термоупругости следуют из соотношений, приведенных в **5.1**, если пренебречь первым слагаемым в правой части (5.15) или (5.16). Здесь рассмотрим часто встречающуюся в инженерных приложениях плоскую задачу для изотропной однородной термоупругой среды. Этой задаче соответствует задание или в виде линейной функции одной из проекций вектора перемещения и, например в виде $u_3 = u_3^\circ + \varepsilon_{33}^\circ x_3$, причем $u_3^\circ = \text{const}$, $\varepsilon_{33}^\circ = \text{const}$, и в общем случае $u_1(x_1, x_2) \neq 0$, $u_2(x_1, x_2) \neq 0$, или в виде трех компонент тензора напряжений, например $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ и в общем случае $\sigma_{11}(x_1, x_2) \neq 0$, $\sigma_{22}(x_1, x_2) \neq 0$, $\sigma_{12}(x_1, x_2) \neq 0$.

В первом варианте из (3.12) следует, что $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{\circ}$ и $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, а соотношения (5.7) принимают вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu_1 \sigma_{22}}{E_1} + \widetilde{\varepsilon}_T - \widetilde{\varepsilon}_{33}^{\circ}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu_1 \sigma_{11}}{E_1} + \widetilde{\varepsilon}_T - \widetilde{\varepsilon}_{33}^{\circ}, \\ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (\varepsilon_{33}^{\circ} - \varepsilon_T)E, \quad \varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu_1)\sigma_{12}}{E_1},$$

$$(5.34)$$

где $\nu_1 = \nu/(1-\nu); E_1 = E/(1-\nu^2); \tilde{\epsilon}_T = (1+\nu)\epsilon_T; \tilde{\epsilon}_{33}^\circ = \nu \epsilon_{33}^\circ; \nu$ и E — коэффициент Пуассона и модуль продольной упругости; $\epsilon_T =$ $= \alpha^{(T)}(T-T_0)$ — температурная деформация. Отметим, что равенства (5.34) соответствуют плоскому деформированному состоянию, которое может быть реализовано в достаточно длинном цилиндрическом теле. Если же высота цилиндра стремится к нулю, то реализуется второй вариант, соответствующий плоскому напряженному состоянию, при котором

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}}{E} + \varepsilon_T, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}}{E} + \varepsilon_T, \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E} + \varepsilon_T, \quad \varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{12}}{E}.$$

$$(5.35)$$

Решение плоской задачи ищут в двумерной области. В этой области для стационарной задачи термоупругости при отсутствии объемных сил можно тождественно удовлетворить уравнениям равновесия $\frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial x_r} = 0, r, s = 1, 2,$ если компоненты тензора напряжений выразить при помощи функции напряжений (функции Эри) $\tilde{F} = \tilde{F}(x_1, x_2)$ и представить в виде

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$
 (5.36)

Из шести условий совместности деформаций (3.14) для плоской задачи отлично от тождественного нуля лишь одно: $\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$ Подставив в него (5.34), с учетом (5.36) и равенств $E_1 = E/(1-\nu^2)$ и $\tilde{\varepsilon}_T = (1+\nu)\alpha^{(T)}(T-T_0)$ получим

$$\nabla_2^4 \widetilde{F} + \frac{E\alpha^{(T)}}{1-\nu} \nabla_2^2 T = 0, \qquad (5.37)$$

где $\nabla_2^4 = \nabla_2^2 \nabla_2^2$ и $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — бигармонический дифференциальный оператор и дифференциальный оператор Лапласа, определенные в плоскости x_1Ox_2 .

Так как стационарное температурное поле в двумерной области при постоянном значении *теплопроводности среды* $\lambda^{(T)}$ удовлетворяет уравнению $\nabla_2^2 T + q_V / \lambda^{(T)} = 0$, то вместо (5.37) можно написать $\nabla_2^4 \tilde{F} = E \alpha^{(T)} \frac{q_V}{\lambda^{(T)}(1-\nu)}$. При отсутствии внутренних источников теплоты $(q_V \equiv 0)$ получим бигармоническое уравнение

$$\nabla_2^4 \widetilde{F} = 0. \tag{5.38}$$

В случае задания на замкнутом граничном контуре односвязной двумерной области силовых граничных условий в виде $\sigma_{qm}n_q = p_m^\circ, m = 1, 2,$ где n_q — направляющие косинусы вектора внешней нормали к

контуру, а p_m° — проекции на координатные оси Ox_m заданного вектора плотности поверхностных сил, с учетом (5.36) запишем

$$p_{1}^{\circ} = \sigma_{11}n_{1} + \sigma_{21}n_{2} = \frac{\partial^{2}\tilde{F}}{\partial x_{2}^{2}}\frac{dx_{2}}{ds} + \frac{\partial^{2}\tilde{F}}{\partial x_{1}\partial x_{2}}\frac{dx_{1}}{ds} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_{2}}\right),$$
$$p_{2}^{\circ} = \sigma_{12}n_{1} + \sigma_{22}n_{2} = -\frac{\partial^{2}\tilde{F}}{\partial x_{1}\partial x_{2}}\frac{dx_{2}}{ds} - \frac{\partial^{2}\tilde{F}}{\partial x_{1}^{2}}\frac{dx_{1}}{ds} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_{1}}\right),$$

где
 s — длина дуги граничного контура, отсчитываемая от некоторой его точки, в которой приме
м $\widetilde{F}=0.$ Отсюда на этом контуре

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1} &= -P_2(s) + C_1, \quad \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2} = P_1(s) + C_2, \quad P_q(s) = \int_0^s p_q^\circ ds, \\ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial n} &= -\left(P_2(s) - C_1\right) \frac{dx_1}{dn} + \left(P_1(s) + C_2\right) \frac{dx_2}{dn}, \\ \widetilde{F} &= \int_0^s \left(P_1(s) \frac{dx_2}{ds} - P_2(s) \frac{dx_1}{ds}\right) ds + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3. \end{aligned}$$

В случае односвязной области значения постоянных не влияют на распределение компонент тензора напряжений и можно положить $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Сначала находим функцию \tilde{F} , а затем при помощи (5.36) компоненты σ_{11} и σ_{22} . Далее определяем ε_{33}° из условия

$$\int_{S_3} \sigma_{33} \, dS_3 = P, \tag{5.39}$$

где S_3 — площадь торцевого сечения цилиндрического тела, на одном из торцов которого (при $x_3 = 0$) примем $u_3^\circ = 0$; P — равнодействующая сил, приложенных к телу в направлении оси Ox_3 .

В полярных координатах представление компонент тензора напряжений через функцию напряжений $\widetilde{F}(r,\varphi)$ имеет вид

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r \partial \varphi}.$$

При $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \varphi} \equiv 0$ из (5.38) следует уравнение

$$\frac{d^4\tilde{F}}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\tilde{F}}{dr^3} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\tilde{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\tilde{F}}{dr} = 0,$$
(5.40)

общее решение которого $\widetilde{F}(r) = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4$. В этом случае

$$\sigma_{rr} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(1+2\ln r) + 2A_3, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - 2\frac{A_1}{r^2} + 2A_2 \tag{5.41}$$

и $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0$. Непосредственной проверкой нетрудно установить, что уравнения равновесия в полярных координатах

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (5.42)$$

удовлетворяются тождественно при произвольных значениях постоянных A_1 , A_2 и A_3 .

Рассмотрим задачу Ламе для длинной круглой трубы, нагруженной давлением p_a на внутренней поверхности радиусом a и давлением p_b на внешней поверхности радиусом b. В этом случае при плоском деформированном состоянии компоненты тензоров деформации и напряжений зависят лишь от радиальной координаты, причем из (5.34) следует

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{\varphi\varphi}}{E_1} - \nu \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \nu_1 \sigma_{rr}}{E_1} - \nu \varepsilon_{zz}, \quad (5.43)$$

где ε_{zz} — деформация в осевом направлении. Используя (5.41) и интегрируя первое соотношение (5.43) по r, находим

$$E_1 u_r = -(1+\nu_1)\frac{A_1}{r} + 2r(1-\nu_1)(A_3 + A_2\ln r) - -(1+\nu_1)rA_2 - E_1\nu\varepsilon_{zz}r + C \quad (5.44)$$

и после подстановки во второе соотношение (5.43) приходим к равенству $4rA_2/E_1 = C = \text{const}$, из которого следует $A_2 = 0$ и C = 0. После нахождения в (5.41) A_1 и A_3 из граничных условий $\sigma_{rr}|_{r=a} = -p_a$ и $\sigma_{rr}|_{r=b} = -p_b$ получаем

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b b^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b b^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{b^2 - a^2}.$$

Поскольку, согласно (5.7), напряжение в осевой направлении $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) + E\varepsilon_{zz} = 2\nu(p_aa^2 - p_bb^2)/(b^2 - a^2) + E\varepsilon_{zz}$, то $\sigma_{zz} = \text{const}$ при $\varepsilon_{zz} = \text{const.}$ В частности, если осевое перемещение торцов трубы равно нулю, то $\varepsilon_{zz} = 0$ и $\sigma_{zz} = 2\nu(p_aa^2 - p_bb^2)/(b^2 - a^2)$. В этом случае из (5.44) находим

$$u_r^{\circ} = \frac{(1-\nu-2\nu^2)(p_a a^2 - p_b b^2)r^2 + (1+\nu)(p_a - p_b)a^2 b^2}{E(b^2 - a^2)r}.$$

При известном значении P из (5.39) следует $\sigma_{zz} = \frac{P}{\pi(b^2 - a^2)}$, а из (5.44) — $u_r = u_r^\circ - \frac{\nu P r}{E\pi(b^2 - a^2)}$. Ясно, что для трубы со свободными торцами P = 0, а для трубы с днищами $P = \pi(p_a a^2 - p_b b^2)$.

На распределение напряжений от действия давления следует наложить распределение температурных напряжений, которые при осесиметричном температурном поле $T(r) - T_0 = \vartheta(r)$ определяются соотношениями [26]

$$\sigma'_{rr} = \frac{\Theta(b)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \Theta(r)\frac{b^2 - a^2}{r^2}}{1 - \nu}, \quad \Theta(r) = \frac{E\alpha^{(T)}}{b^2 - a^2} \int_a^r \vartheta(r')r' dr',$$
$$\sigma'_{\varphi\varphi} = \frac{\Theta(b) - E\alpha^{(T)}\vartheta(r)}{1 - \nu} - \sigma'_{rr}, \quad \sigma'_{zz} = \frac{\nu\Theta(b) - E\alpha^{(T)}\vartheta(r)}{1 - \nu}.$$

Если известно значение P, то ε_{zz} находят из (5.39) при $\sigma_{33} = \sigma_{zz} + \sigma'_{zz}$.

5.3. Интегральная и вариационная формы моделей термоупругости

Для несвязанной задачи термоупругости один из вариантов интегральной формы математической модели (MM) основан на обобщении принципа возможных перемещений на случай деформируемого тела.

Пусть напряженное состояние тела, занимающего объем V, который ограничен поверхностью S, характеризуют компоненты σ_{ji} (j, i = 1, 2, 3) тензора напряжений, определенные в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. В положении равновесия тела эти компоненты удовлетворяют уравнениям равновесия среды

$$\frac{\partial \sigma_{ji}(M)}{\partial x_j} + b_i(M) = 0, \quad M \in V,$$
(5.45)

которые следуют из уравнений движения среды (3.62), если среда неподвижна относительно выбранной системы координат. В (5.45) b_i проекции на оси Ox_i вектора **b** плотности объемных сил. Умножив (5.45) на проекции $\delta u_i(M)$ вектора $\delta u(M)$ возможного перемещения точки $M \in V$ тела и проинтегрировав по V, запишем

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_{j}} + b_{i} \right) \delta u_{i} dV = \int_{V} \frac{\partial (\sigma_{ji} \delta u_{i})}{\partial x_{j}} dV - \int_{V} \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_{i}}{\partial x_{j}} dV + \int_{V} b_{i} \delta u_{i} dV = 0. \quad (5.46)$$

Используя теорему Остроградского — Гаусса и (3.47), получаем

$$\int_{V} \frac{\partial(\sigma_{ji} \,\delta u_i)}{\partial x_j} \, dV = \int_{S} \sigma_{ji} n_j \,\delta u_i \, dS = \int_{S} p_i \,\delta u_i \, dS,$$

где $n_j(N)$ и $p_i(N)$ — проекции на оси принятой системы координат единичного вектора n(N) внешней нормали к поверхности S и вектора p плотности поверхностных сил в окрестности точки $N \in S$. Тогда вместо (5.46) запишем

$$\int_{V} \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV = \int_{V} b_i \, \delta u_i \, dV + \int_{S} p_i \, \delta u_i \, dS. \tag{5.47}$$

С учетом симметрии тензора напряжений ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) и соотношений Коши (3.12) имеем

$$\sigma_{ji}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\sigma_{ji}}{2} \left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij},\tag{5.48}$$

где ε_{ij} — компоненты *тезора малой деформации*. Подставляя (5.48) в (5.47), получаем обобщение принципа возможных перемещений в виде

$$\int_{V} \sigma_{ij} \,\delta\varepsilon_{ij} \,dV = \int_{V} b_i \,\delta u_i \,dV + \int_{S} p_i \,\delta u_i \,dS. \tag{5.49}$$

Интеграл в левой части (5.49) характеризует работу, совершаемую напряжениями на возможных деформациях. Если к телу в K точках $M_k \in \overline{V} = V \cup S$ $(k = \overline{1, K})$ приложены сосредоточенные силы \mathbf{F}_k , то в правую часть (5.49) следует добавить возможную работу $\mathbf{F}_k \cdot \delta u_k$, где δu_k — возможное перемещение точки M_k .

При использовании (5.49) зависимости $b_i(M)$ $(M \in V)$ и $p_i(N)$ $(N \in S)$ обычно известны. Если на части $S_u \subseteq S$ поверхности S тела заданы кинематические граничные условия вида (5.11), то $\delta u_i(N) = 0$, $N \in S_u$, и в (5.49) S следует заменить на $S_p = S \setminus S_u$.

Поскольку (5.49) получено в результате преобразования уравнений равновесия, то обобщением принципа возможных перемещений является утверждение, что для равновесия деформируемого тела необходимо, чтобы возможная работа всех внешних сил была равна работе, совершаемой напряжениями на возможных деформациях. Можно доказать и достаточность этого принципа для равновесия деформируемого тела. Действительно, если предположить наряду со справедливостью (5.49) отсутствие равновесия, то после преобразований, обратных по отношению к выполненным при получении (5.49), придем к противоречию. Если на деформируемое тело наложены идеальные связи, то (как и в случае абсолютно твердого тела) применение принципа возможных перемещений позволяет не рассматривать реакции таких связей. Важной особенностью этого принципа является его справедливость для произвольного закона деформирования материала тела.

Если для описания деформирования использовать закон Дюамеля — Неймана и выразить в (5.49) σ_{ij} при помощи (5.3), то получим интегральную форму ММ термоупругости для линейной анизотропной термоупругой среды. В этом случае (5.49) можно рассматривать как условие стационарности квадратичного функционала [36]

$$J[u_i] = \Phi[u_i] - \int_V b_i u_i \, dV - \int_{S_p} p_i u_i \, dS, \qquad (5.50)$$

где

$$\Phi[u_i] = \frac{1}{8} \int\limits_{V} C_{ijmn} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\varepsilon_{ij}^{(T)} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - 2\varepsilon_{mn}^{(T)} \right) dV.$$

Здесь C_{ijmn} , m, n = 1, 2, 3, - компоненты тензора коэффициентов упругости материала тела; $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации. В случае линейной изотропной термоупругой среды с учетом (5.5) первое слагаемое правой части (5.50) примет вид

$$\Phi[u_i] = \int\limits_V \left(\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3}\right) \left(\varepsilon_{mm} - 3\varepsilon^{(T)}\right)^2 + \mu e_{ij} e_{ij} \right) dV, \qquad (5.51)$$

где λ и μ — константы Ламе; $\varepsilon^{(T)}$ — температурная деформация; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{mm} \delta_{ij}/3$ — компоненты девиатора деформации, а δ_{ij} символ Кронекера. Подынтегральные функции в функционале Φ определяют объемную плотность потенциальной энергии деформации такой среды.

В частном случае отсутствия температурной деформации (5.50) переходит в **функционал Лагранжа** [30], достигающий на истинном распределении перемещений $u_i^*(M)$ ($M \in V \cup S$) значения, соответствующего минимуму потенциальной энергии в положении равновесия. При наличии температурной деформации $J[u_i]$ также достигает минимума на истинном распределении $u_i^*(M)$. Действительно, для любого возможного распределения $u_i(M) = u_i^*(M) + \delta u_i(M)$ из (5.50) и (5.51) с учетом (3.12) и (5.49) имеем

$$\Delta J[\delta u_i] = J[u_i] - J[u_i^*] = \int\limits_V \left(\varkappa(\delta\varepsilon_{ii})^2 + \mu\,\delta e_{ij}\,\delta e_{ij}\right)dV \ge 0, \qquad (5.52)$$

где $\varkappa = \lambda + 2\mu/3$ — модуль объемной упругости.

Функционал (5.50) в сочетании с его условием стационарности $\delta J[u_i^*] = 0$ составляет вариационную форму ММ термоупругости для линейной термоупругой среды. Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, выполняющим для него роль главных условий. Для анизотропной термоупругой среды из его условия стационарности следуют уравнения равновесия в перемещениях как частный случай (5.8) при отсутствии инерционных сил и силовые граничные условия в виде (5.12), являющиеся для этого функционала естественными условиями.

Вариационная форма ММ термоупругости в случае области V сложной формы позволяет провести приближенный численный анализ при помощи метода конечных элементов [9, 21, 25, 36, 43–45, 61, 100, 102, 124, 128, 132]. При этом значение $\delta u_i(M)$ ($M \in V \cup S_p$) можно рассматривать как локальную погрешность относительно истинного распределения перемещений. Для оценки среднеквадратичной погрешности введем величину

$$Z(\delta u_i) = \int\limits_V \delta u_i \, \delta u_i \, dV$$

и, поделив на нее левую и правую части (5.9), запишем

$$\frac{\Delta J[\delta u_i]}{Z(\delta u_i)} = \frac{\int\limits_V (\varkappa(\delta \varepsilon_{ii})^2 + \mu \, \delta e_{ij} \, \delta e_{ij}) \, dV}{\int\limits_V \delta u_i \, \delta u_i \, dV}.$$

Правая часть этого равенства является функционалом, минимальное значение которого равно наименьшему собственному значению χ_1 oneратора задачи для системы однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_j} \right) + \chi \, \delta u_i = 0$$

с однородными граничными условиями $\delta u_i(N)=0$ при $N\in S_u$ и

$$\left(\mu\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\frac{\partial\delta u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)n_j=0$$

на участках Sp поверхности S. Тогда получим

$$Z(\delta u_i) \leqslant \frac{\Delta J[\delta u_i]}{\chi_1}.$$
(5.53)

Для достоверной оценки сверху значения $Z(u_i)$ достаточно располагать приближенными значениями $\chi'_1 \leq \chi_1$ и $\Delta J'[u_i] \geq \Delta J[u_i]$. Значение χ'_1 можно найти исходя из общих свойств собственных значений (см. **П2.4**), а для определения значения $\Delta J'[u_i]$ построим функционал, альтернативный по отношению к (5.50). С этой целью, используя симметрию тензора напряжений, теорему Остроградского — Гаусса и соотношения Коши (3.12), преобразуем интеграл

$$\int_{V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{V} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_{V} \frac{\partial (\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} dV - \int_{V} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV =$$
$$= \int_{S} \sigma_{ij} n_j u_i dS - \int_{V} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (5.54)$$

В предположении, что напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия (5.45) и силовым граничным условиям (3.47), т.е. являются статически возможными, а перемещения удовлетворяют кинематическим граничным условиям (5.11), из (5.54) с учетом (5.50) получим функционал

$$J[u_i,\sigma_{ij}] = \Phi[u_i] - \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \, dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j\widetilde{u}_i \, dS,$$

что позволяет после представления при помощи (3.12) и (5.2) перемещений и деформаций через напряжения записать функционал

$$I[\sigma_{ij}] = -\Phi_1[\sigma_{ij}] + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \widetilde{u}_i \, dS, \qquad (5.55)$$

в котором

$$\Phi_1[\sigma_{ij}] = \frac{1}{2} \int\limits_V S_{ijmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn} \, dV + \int\limits_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{(T)} \, dV,$$

где S_{ijmn} — компоненты *тензора коэффициентов податливости* материала тела. Для изотропной термоупругой среды с учетом (5.6) в (5.55) получаем

$$\Phi_1[\sigma_{ij}] = -\int\limits_V \left(\frac{(\sigma_{mm})^2}{18\varkappa} + \frac{s_{ij}s_{ij}}{4\mu} + \sigma_{mm}\varepsilon^{(T)} \right) dV, \tag{5.56}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mm} \delta_{ij}/3$ — компоненты девиатора напряжений.

Функционал (5.55) допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений $\sigma_{ij}(M), M \in V \cup S$. В частном случае отсутствия температурной деформации (5.55) переходит в **функ**иионал Кастилиано [30], достигающий максимума на истинном распределении напряжений $\sigma_{ij}^*(M), M \in V \cup S$. При наличии температурной деформации $I[\sigma_{ij}]$ также достигает максимума на распределении $\sigma_{ij}^*(M)$. Действительно, для любого статически возможного распределения $\sigma_{ij}(M) = \sigma_{ij}^*(M) + \delta \sigma_{ij}(M)$ из (5.55) и (5.56) с учетом (3.12), (5.45) и (5.54) получим

$$I[\sigma_{ij}^*] - I[\sigma_{ij}] = \frac{1}{4} \int\limits_V \left(\frac{(\delta \sigma_{ii})^2}{9(\lambda/2 + \mu/3)} + \frac{\delta s_{ij} \, \delta s_{ij}}{\mu} \right) dV \ge 0$$

Из проведенных преобразований следует $J[u_i^*] = I[\sigma_{ij}^*]$, и поэтому справедлива цепочка неравенств

$$J[u_i] \ge J[u_i^*] = I[\sigma_{ij}^*] \ge I[\sigma_{ij}].$$

$$(5.57)$$

Тогда, заменяя в (5.53) χ_1 на χ'_1 и $\Delta J[\delta u_i]$ на $\Delta J' = J[u_i] - I[\sigma_{ij}]$, для среднеквадратичной погрешности получаем

$$Z(\delta u_i) \leqslant \Delta J' / \chi_1'. \tag{5.58}$$

Таким образом, функционалы (5.50) и (5.55) вместе со своими условиями стационарности $\delta J[u_i^*] = 0$ и $\delta I[\sigma_{ij}^*] = 0$ составляют двойственную вариационную форму ММ термоупругости для линейной термоупругой среды. Такая форма позволяет не только провести приближенный численный анализ ММ, но и получить оценку возникающей при этом погрешности.

Второй вариант интегральной формы MM термоупругости основан на обобщении для неравномерно нагретого тела *теоремы Бетти* — *Максвелла* [97].

Пусть в окрестности одной и той же точки тела под действием двух различных систем нагружающих факторов возникают два различных напряженно-деформированных состояния, определяемых тензорами $\hat{\sigma}$, $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\sigma}'$, $\hat{\epsilon}'$ соответственно. Согласно (5.3), для линейной анизотропной термоупругой среды запишем

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}' = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T'),$$

где $\widehat{\mathbf{C}}$ и $\widehat{\alpha}^{(T)}$ — тензоры коэффициентов упругости и температурной деформации соответственно; ΔT и $\Delta T'$ — отклонения температуры в

рассматриваемой точке тела от температуры T_0 естественного состояния для двух систем нагружающих факторов. Проведем свертывание тензоров в первом равенстве с тензором $\hat{\varepsilon}'$, во втором равенстве — с тензором $\hat{\varepsilon}$, а затем вычтем почленно из первого результата второй. Тогда получим

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}}' = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T' - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{(T)} \Delta T,$$

или в записи через компоненты этих тензоров с учетом симметрии тензоров второго ранга

$$\sigma_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon_{ij} = C_{ijmn}\alpha^{(T)}_{mn}(\varepsilon_{ij}\Delta T' - \varepsilon'_{ij}\Delta T), \quad i, j, m, n = 1, 2, 3.$$

Интегрируя это равенство по V и используя (5.54), получаем

$$\int_{V} (\sigma_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}) dV = \int_{S} (\sigma_{ij}n_{j}u'_{i} - \sigma'_{ij}n_{j}u_{i}) dS - \int_{V} \left(u'_{i}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_{j}} - u_{i}\frac{\partial\sigma'_{ji}}{\partial x_{j}} \right) dV = \int_{V} \left(C_{ijmn}\alpha^{(T)}_{mn}(\varepsilon_{ij}\Delta T' - \varepsilon'_{ij}\Delta T) \right).$$

Отсюда с учетом (3.47) и (5.45) приходим к обобщению утверждения теоремы Бетти — Максвелла в виде

$$\int_{S_p} (p_i u'_i - p'_i u_i) dS + \int_V (b_i u'_i - b'_i u_i) dV = \int_V C_{ijmn} \alpha_{mn}^{(T)} (\varepsilon_{ij} \Delta T' - \varepsilon'_{ij} \Delta T),$$

где штрихом отмечены параметры, соответствующие второй системе нагружающих факторов. Для изотропной термоупругой среды вместо последнего равенства с учетом (5.5) получим

$$\int_{S} (p_i u'_i - p'_i u_i) dS + \int_{V} (b_i u'_i - b'_i u_i) dV = \int_{V} 3\varkappa \alpha^{(T)} (\varepsilon_{ii} \Delta T' - \varepsilon'_{ii} \Delta T), \quad (5.59)$$

где $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения материала тела.

Во второй системе нагружающих факторов примем $\Delta T' \equiv 0$ и $b'_i(M) = f_i(M_0)\delta_3(M,M_0)$, где $\delta_3(M,M_0)$ — *дельта-функция*, обладающая в случае функции $f_i(M)$, $M \in \overline{V} = V \cup S$, непрерывной на замыкании \overline{V} области V, свойством

$$\int_{V} f_{i}(M) \delta_{3}(M, M_{0}) dV(M) = \begin{cases} \frac{\Omega(M_{0}) f_{i}(M_{0})}{4\pi}, & M_{0} \in \overline{V}; \\ 0, & M_{0} \notin \overline{V}, \end{cases}$$
(5.60)

где $\Omega(M_0)$ — телесный угол, под которым из точки $M_0 \in \overline{V}$ видна «внутренность» области V (в частности, $\Omega(M_0) = 4\pi$ при $M_0 \in V$ и $\Omega(M_0) = 2\pi$, если точка M_0 лежит на гладком участке поверхности S). Пусть линейно-упругая сплошная среда с константами Ламе λ и μ занимает неограниченную область V_∞ . Примем $f_l(M_0) = 1$, l = 1, 2, 3,т.е. $b'_l(M) = \delta_3(M, M_0)$ является единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке $M_0 \in V_\infty$ в направлении оси Ox_l . Эта сила в точке $M \in \overline{V}$ вызывает перемещения [21,97]

$$u_i^{(l)}(M, M_0) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\delta_{il}}{r(M, M_0)} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2 r(M, M_0)}{\partial x_i \partial x_l} \right), \tag{5.61}$$

. . .

где $r(M, M_0)$ — расстояние между точками M и M_0 , а дифференцирование проводится по координатам точки M.

При помощи (5.61), используя соотношения Коши (3.12) и обобщенного закона Гука, можно найти

$$\begin{split} \varepsilon_{ij}^{(l)}(M,M_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(l)}(M,M_0)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(l)}(M,M_0)}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij}^{(l)}(M,M_0) &= \lambda \varepsilon_{kk}^{(l)}(M,M_0) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(l)}(M,M_0), \end{split}$$

а затем вычислить проекции $p_i^{(l)}(M, M_0) = \sigma_{ij}^{(l)}(M, M_0) n_j(M)$ вектора напряжений на площадку, проходящую через точку M и имеющую направляющие косинусы $n_j(M)$ единичного вектора n(M) нормали к этой площадке. Подставляя в (5.59) $u_i^{(l)}(M, M_0)$ вместо u_i' , $p_i^{(l)}(M, M_0)$ вместо p_i' и $\delta_3(M, M_0)\delta_{il}$ вместо $b_i'(M)$, с учетом указанного выше свойства дельта-функции получаем так называемое **граничное интегральное уравнение**

$$\begin{split} \frac{\Omega(M_0)}{4\pi} u_l(M_0) &= \int_{S} \left(p_i(N) u_i^{(l)}(N, M_0) - u_i(P) p_i^{(l)}(N, M_0) \right) dS(N) + \\ &+ \int_{V} \left(b_i(M) u_i^{(l)}(M, M_0) + (3\lambda + 2\mu) \tilde{\varepsilon}_{kk}^{(l)} \alpha^{(T)} \Delta T \right) dV(M), \end{split}$$

где $M \in V$, $N \in S$ и $M_0 \in \overline{V}$. Отсюда при помощи метода граничных элементов [11, 16, 17, 21, 28, 36, 43, 66, 141] можно найти недостающие значения $u_l(M_0)$ и $p_l(M_0)$ в граничных точках $M_0 \in S$, а затем и значение $u_l(M_0)$ в любой внутренней точке $M_0 \in V$.

5.4. Двусторонние оценки характеристик неоднородных материалов

Реальные материалы по своей структуре являются неоднородными. Металлы и сплавы состоят из кристаллических зерен, в пределах каждого из которых пространственную ориентацию кристаллографических осей можно считать фиксированной. Такие материалы принято называть поликристаллическими. Свойства отдельных зерен и пространственная ориентация их кристаллографических осей определяют характеристики такого поликристаллического материала в целом. К композиционным (или композитам) относят материалы, образованные объемным сочетанием химически разнородных компонентов с четкой границей раздела между ними [113]. Обычно композиты состоят из связующего компонента (матрицы), объединяющего включения в виде порошков, волокон, нитевидных кристаллов, пленок, ткани и т.п. Ясно, что характеристики композита также зависят от свойств матрицы и включений. Наименьший объем V_0 , усреднение по которому свойств компонентов материала дает представление о характеристиках материала в целом, называют представительным.

Двойственная вариационная форма математической модели (MM) линейной анизотропной термоупругой среды позволяет получать оценки термомеханических характеристик неоднородного материала по известным свойствам компонентов, составляющих этот материал. Такие оценки представляют интерес, например, при создании новых материалов путем варьирования их структуры и компонентов.

Сначала рассмотрим поликристаллический материал, состоящий из хаотически ориентированных кристаллических зерен с одинаковыми свойствами. Это может быть металл либо интерметаллид в чистом виде или с однородной концентрацией примесей в виде твердого раствора. Благодаря хаотической ориентации зерен такой материал по отношению к представительному объему V_0 можно считать изотропной линейной термоупругой сплошной средой, т.е. изотропным по отношению к усредненным по V_0 компонентам тензоров напражений и деформации, определенным в прамоугольной системе координат:

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \sigma_{ij} \, dV, \quad \overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \varepsilon_{ij} \, dV, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

причем связь σ_{ij} и ε_{mn} в отдельно взятом зерне устанавливается законом Дюамеля — Неймана (5.3)

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}^{(T)} \Delta T), \quad k, l, m, n = 1, 2, 3.$$
 (5.62)

Здесь ΔT — изменение температуры относительно температуры T_0 естественного состояния, а компоненты C_{klmn} и $\alpha_{mn}^{(T)}$ тензоров коэффициентов упругости и температурной деформации, как и компоненты тензоров напряжений и деформации, определены в соответствии с ориентацией кристаллографических осей $O\xi_k$ этого зерна.

Модули упругости, связывающие эти усредненные компоненты и называемые эффективными, введем из условия равенства объемной плотности потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальном поликристаллическом материале при отсутствии температурной деформации, т.е. с учетом (5.62)

$$\frac{1}{2}C_{ijmn}^{\circ}\overline{\varepsilon}_{mn}\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2V_0}\int\limits_{V_0}\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*\,dV = \frac{1}{2V_0}\int\limits_{V_0}C_{ijmn}\varepsilon_{mn}^*\varepsilon_{ij}^*\,dV,\qquad(5.63)$$

где, согласно (5.5), $C_{ijmn}^{o} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}); \lambda$ и μ — константы Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера; σ_{ij}^{*} и ε_{ij}^{*} — компоненты, соответствующие истинному напряженно-деформированному состоянию, удовлетворяющему условиям равновесия и совместности деформаций. Обратным по отношению к (5.63) будет равенство

$$\frac{1}{2}S_{ijmn}^{\circ}\overline{\sigma}_{mn}\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V_0}\int\limits_{V_0} \sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^* dV = \frac{1}{2V_0}\int\limits_{V_0} S_{ijmn}\sigma_{mn}^*\sigma_{ij}^* dV, \qquad (5.64)$$

где, согласно (5.6), $S_{ijmn}^{\circ} = \delta_{ij} \, \delta_{mn} \frac{\lambda}{\mu(\lambda+2\mu)} + \frac{\delta_{im} \, \delta_{jn} + \delta_{in} \, \delta_{jm}}{4\mu}$, а S_{ijmn} — компоненты *тензора коэффициентов податливости* кристаллических зерен, причем $S_{ijkl}^{\circ}C_{klmn}^{\circ} = S_{ijkl}C_{klmn} = \frac{1}{2} \left(\delta_{im} \, \delta_{jn} + \delta_{in} \, \delta_{jm} \right).$

Пусть на поверхности S_0 , ограничивающей представительный объем V_0 , заданы проекции $u_i^{\circ}(N)$ ($N \in S_0$) вектора перемещения, приводящие к непрерывным распределениям $u_i^{\circ}(M)$, $M \in V_0$, которым соответствуют компоненты $\varepsilon_{ij}^{\circ}(M) = \text{const}$, совпадающие с компонентами $\overline{\varepsilon}_{ij}$. Такие распределения являются допустимыми для функционала (5.50), причем с учетом (5.57), (5.63) и соотношений Коши (3.12) при отсутствии температурной деформации и объемных сил имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} C_{ijmn}\varepsilon_{mn}^{\circ}\varepsilon_{ij}^{\circ}dV \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} C_{ijmn}\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{mn}^*dV = \frac{V_0}{2}C_{ijmn}^{\circ}\overline{\varepsilon}_{mn}\overline{\varepsilon}_{ij}.$$

Отсюда

$$\int_{V_0} (C_{ijmn} - C_{ijmn}^{\circ}) \, dV \ge 0$$

что равносильно неравенствам

$$\int_{V_0} (C_{klmn} - C^{\circ}_{klmn}) \, dV \ge 0,$$

так как компоненты C_{ijmn}° определяют изотропный тензор и сохраняют свои значения при любой ориентации осей координат. Для выполнения последних неравенств необходима, согласно (П1.15), неотрицательность двух линейных инвариантов тензора с компонентами $C_{klmn} - C_{klmn}^{\circ}$, т.е.

$$C_{kkmm} - C^{\circ}_{kkmm} \ge 0, \quad C_{klkl} - C^{\circ}_{klkl} \ge 0.$$
(5.65)

Пусть теперь на поверхности S_0 заданы проекции $p_i^{\circ}(N)$ $(N \in S_0)$ вектора объемной плотности поверхностных сил, вызывающие напряженное состояние с компонентами $\sigma_{ij}^{\circ}(M) = \text{const}, M \in V_0$, совпадающими с компонентами $\overline{\sigma}_{ij}$. Такое распределение напряжений является допустимым для функционала (5.55), поэтому с учетом (5.57) и (5.64) при отсутствии температурной деформации запишем

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} S_{ijmn}\sigma_{mn}^{\circ}\sigma_{ij}^{\circ}\,dV \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} S_{ijmn}\sigma_{ij}^*\sigma_{mn}^*\,dV = -\frac{V_0}{2}S_{ijmn}^{\circ}\overline{\sigma}_{mn}\overline{\sigma}_{ij}$$

Отсюда

$$\int_{V_0} (S_{klmn} - S^{\circ}_{klmn}) \, dV \ge 0,$$

поскольку тензор с компонентами C_{ijmn}^{o} также является изотропным. Для выполнения этих неравенств необходимо, согласно (П1.15), чтобы

$$S_{kkmm} - S^{\circ}_{kkmm} \ge 0, \quad S_{klkl} - S^{\circ}_{klkl} \ge 0.$$
(5.66)

Из (5.65) и (5.66) получаем двусторонние оценки

$$\frac{C_{kkmm}}{9} \geqslant \varkappa \geqslant \frac{1}{S_{kkmm}}, \quad \frac{3C_{klkl} - C_{kkmm}}{30} \geqslant \mu \geqslant \frac{15}{2(3S_{klkl} - S_{kkmm})},$$

где $\varkappa = \lambda + 2\mu/3$ — модуль объемной упругости. Если поликристаллический материал состоит из зерен с кубической кристаллической решеткой, то верхняя и нижняя границы для этого модуля совпадают и $\varkappa = (C_{11} + 2C_{12})/3 = (1/3)/(S_{11} + 2S_{12})$, где C_{pq} и S_{pq} , $p, q = \overline{1, 6}$, элементы матриц шестого порядка, соответствующих тензорам с компонентами C_{klmn} и S_{klmn} (см. 1.6). При этом для модуля сдвига имеем

$$\mu_V = \frac{C_{11} - C_{12} + 3C_{44}}{5} \ge \mu \ge \frac{5}{4S_{11} - 4S_{12} + 3S_{44}} = \mu_R,$$
где индексы $(\cdot)_V$ и $(\cdot)_R$ обозначают верхнюю и нижнюю оценки, полученные в предположениях однородности деформированного состояния В. Фойгтом в 1928 г. и однородности напряженного состояния А. Рейссом в 1929 г. [20, 154]. В случае зерен с гексагональной плотноупакованной кристаллической решеткой $\varkappa_V \ge \varkappa \ge \varkappa_R$ и $\mu_V \ge \mu \ge \mu_R$, где в соответствии с [36]

$$\begin{split} \varkappa_V = \frac{2C_{11}+C_{33}+2C_{12}+4C_{13}}{9}, \quad \varkappa_R = \frac{1}{2S_{11}+S_{33}+2S_{12}+4S_{13}}, \\ \mu_V = \frac{7C_{11}+2C_{33}-5C_{12}-4C_{13}+12C_{44}}{30}, \\ \mu_R = \frac{15}{2(7S_{11}+2S_{33}-5S_{12}-4S_{13}+3S_{44})}. \end{split}$$

Для многофазного сплава-смеси, состоящего из N фаз с хаотической ориентацией разнородных кристаллических зерен, при усреднении свойств зерен необходимо учитывать объемное содержание η_{ν} ($\nu = = \overline{1, N}$) каждой фазы. В этом случае

$$\varkappa_V = \sum_{\nu=1}^N \eta_\nu \varkappa_V^{(\nu)}, \quad \frac{1}{\varkappa_R} = \sum_{\nu=1}^N \frac{\eta_\nu}{\varkappa_R^{(\nu)}}, \quad \mu_V = \sum_{\nu=1}^N \eta_\nu \mu_V^{(\nu)}, \quad \frac{1}{\mu_R} = \sum_{\nu=1}^N \frac{\eta_\nu}{\mu_R^{(\nu)}},$$

причем $\sum_{\nu=1}^{N} \eta_{\nu} = 1$, что соответствует правилу смешивания [67]. Отсюда можно получить двусторонние оценки для модуля продольной упругости $E = 9\varkappa\mu/(3\varkappa + \mu)$ и оценки для коэффициента Пуассона $\nu = E/(2\mu) - 1$. Такой подход применим и для двусторонней оценки характеристик композита. Для материалов с сильно различающимися свойствами фаз (или компонентов композита) эти оценки обычно оказываются довольно грубыми, а в случае пористых материалов нижние оценки становятся некорректными. Это обусловлено тем, что при таком подходе не учитывается взаимодействие между зернами или компонентами композита.

Для оценки характеристик поликристаллического материала можно использовать решение задачи Эшелби [156] о взаимодействии с изотропной линейно-упругой сплошной средой изотропного линейно-упругого сферического или эллипсоидального включения. Заменив включение анизотропным кристаллическим зерном, удается учесть взаимодействие отдельно взятого зерна такой формы с окружающим его материалом [20, 36], причем не только при хаотической ориентации кристаллографических осей зерен. Таким же образом удается учесть взаимодействие включений с матрицей композита [67]. Для оценки упругих характеристик неоднородных материалов с произвольными формой и ориентацией их компонентов, в том числе материалов, структура которых содержит ячейки периодичности [10, 31, 33, 110], можно также использовать статистический подход [20, 154].

Двусторонние оценки удается сблизить, если функционалы в (5.57) рассматривать на допустимых распределениях перемещений и напряжений, соответствующих однородному напряженно-деформированному состоянию отдельно взятого зерна, но отражающих неоднородность этого состояния в объеме материала [67]. На рис. 5.1 штрихпунктирные линии соответствуют таким улучшенным оценкам для сплава карбида вольфрама и кобальта в зависимости от объемного содержания η_1 карбида вольфрама [36]. Каждая фаза принята изотропной, причем для карбида вольфрама $\varkappa^{(1)} = 419$ ГПа, $\mu^{(1)} = 288$ ГПа и для кобальта $\varkappa^{(2)} = 172$ ГПа, $\mu^{(2)} = 79,3$ ГПа. Штриховые линии построены с использованием решения задачи Эшелби, а сплошные — согласно правилу смешивания по формулам

$$\varkappa_{V} = \eta_{1}\varkappa^{(1)} + (1 - \eta_{1})\varkappa^{(2)}, \quad \mu_{V} = \eta_{1}\mu^{(1)} + (1 - \eta_{1})\mu^{(2)}, \quad E_{V} = \frac{9\varkappa_{V}\mu_{V}}{3\varkappa_{V} + \mu_{V}},$$
$$\frac{1}{\varkappa_{R}} = \frac{\eta_{1}}{\varkappa^{(1)}} + \frac{1 - \eta_{1}}{\varkappa^{(2)}}, \quad \frac{1}{\mu_{R}} = \frac{\eta_{1}}{\mu^{(1)}} + \frac{1 - \eta_{1}}{\mu^{(2)}}, \quad E_{R} = \frac{9\varkappa_{R}\mu_{R}}{3\varkappa_{R} + \mu_{R}}.$$

Крестиками отмечены экспериментальные значения модуля Е.

Для двусторонней оценки эффективного значения температурного коэффициента линейного расширения $\alpha^{(T)}$ поликристаллического материала с хаотической ориентацией кристаллографических осей составляющих его однородных зерен рассмотрим представительный объем V_0 , заключенный в абсолютно жесткую оболочку. При однородном по



этому объему изменении ΔT температуры примем, что перемещения $u_i^{\circ}(M) \equiv 0, M \in V_0$. В этом случае $\varepsilon_{ij}^{\circ}(M) \equiv 0$ и функционал (5.50) на таком допустимом для него распределении перемещений будет равен

$$J[u_i^{\circ}] = \frac{(\Delta T)^2}{2} \int_{V_0} C_{ijmn} \alpha_{mn}^{(T)} \alpha_{ij}^{(T)} dV = \frac{V_0 (\Delta T)^2}{2} C_{klmn} \alpha_{mn}^{(T)} \alpha_{kl}^{(T)},$$

поскольку подынтегральное выражение инвариантно относительно поворота кристаллографических осей. Значение $\alpha^{(T)}$ определим из равенства

$$\frac{3V_0}{2}\varkappa\alpha^{(T)}\alpha^{(T)}_V(\Delta T)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} C_{ijmn} \left(\varepsilon_{mn}^* - \alpha_{mn}^{(T)}\Delta T\right) \left(\varepsilon_{ij}^* - \alpha_{ij}^{(T)}\Delta T\right) dV,$$

где $\alpha_V^{(T)} = \alpha_{ii}^{(T)}$ — температурный коэффициент объемного расширения кристаллических зерен. Правая часть этого равенства совпадает с минимальным значением $J[u_i^*]$ функционала (5.50) на истинном распределении перемещений $u_i^*(M)$ ($M \in V_0$) и компонент ε_{ij}^* тензора деформации, соответствующих этому распределению. Для функционала (5.55) допустимым будет однородное распределение напряжений $\sigma_{ij}^{\circ}(M) = -3\varkappa\alpha^{(T)}\delta_{ij}$, на котором он примет вид

$$I[\sigma_{ij}^{\circ}] = -\frac{3}{2}\varkappa\alpha^{(T)}(\Delta T)^2 \int\limits_{V_0} \left(3\varkappa\alpha^{(T)}S_{ijmn}\,\delta_{mn}\,\delta_{ij} - 2\alpha^{ij}\,\delta_{ij}\right)dV.$$

В итоге с учетом (5.57) запишем

$$C_{klmn}\alpha_{mn}^{(T)}\alpha_{kl}^{(T)} \ge 3\varkappa\alpha^{(T)}\alpha_V^{(T)} \ge 3\varkappa\alpha^{(T)} \left(2\alpha_V^{(T)} - 3\varkappa S_{kkmn}\alpha^{(T)}\right).$$

Отсюда следуют верхняя оценка $C_{klmn}\alpha_{mn}^{(T)}\alpha_{kl}^{(T)}/(3\varkappa\alpha_V^{(T)}) \ge \alpha^{(T)}$ и нижняя оценка $\alpha_V^{(T)}/(3\varkappa S_{kkmm}) \le \alpha^{(T)}$. Если кристаллические зерна обладают изотропией упругих характеристик, но сохраняют анизотропию по отношению к температурной деформации, то верхняя и нижняя оценки сопадают и $\alpha^{(T)} = \alpha_V^{(T)}/3$.

5.5. Термоупругая среда с внутренними параметрами состояния

При достаточно быстром изменении температуры *термоупругой* сплошной среды возможно запаздывание во времени t изменения ее свойств. В этом случае математическая модель (MM) такой среды,

характерная для классической термоупругости, требует уточнения. Воспользуемся термодинамическим подходом к построению уточненной модели, связанным с введением внутренних параметров состояния.

Для термоупругой среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, одним из основных реактивных переменных, определяющих ее свободную энергию, является абсолютная температура T. Если же в среде протекает неравновесный термодинамический процесс (или локально неравновесный, т. е. неравновесный в окрестности некоторой частицы сплошной среды), то можно в качестве внутреннего параметра состояния ввести еще и термодинамическую температуру Φ , которая совпадает с абсолютной в том случае, когда скорость изменения Φ равна нулю. Если T служит мерой средней кинетической энергии в равновесном процессе, то Φ — в неравновесном. Для описания процесса переноса теплоты в среде введем векторный внутренний параметр состояния χ , который, например, для кристаллических материалов можно ассоциировать с вектором плотности потока фононов.

Кинетические уравнения, описывающие изменения во времени Φ и χ , примем в линейном приближении в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$t_T^* \dot{\Phi} = \overline{\Phi} - \Phi, \quad t_q^* \dot{\chi}_i = \overline{\chi}_i - \chi_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{5.67}$$

где t_T^* и t_q^* — времена релаксации внутренних параметров состояния, обратно пропорциональные частотам собственных колебаний молекул в неравновесном процессе и частотам взаимодействия фононов соответственно; $\overline{\Phi}$ и $\overline{\chi}_i$ — значения Φ и χ_i в равновесном термодинамическом процессе; χ_i — проекции вектора χ на оси Ox_i системы пространственных координат. Этим ОДУ удовлетворяют функции

$$\Phi = \overline{\Phi} - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{t_{T}^{*}}\right) \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t'} dt', \quad \chi_{i} = \overline{\chi}_{i} - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{t_{q}^{*}}\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{i}}{\partial t'} dt'. \quad (5.68)$$

По аналогии с (5.14) в предположени
и $|\chi| \ll 1$ для массовой плотности свободной энергии запишем

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \Phi, \chi_k) = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + H_{ijkl} \beta_{kl} \beta_{ij} + F_{ij} \chi_j \chi_i \right) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{(T)} + \rho B(T) + \rho B_1(\Phi, T) - D_{ijkl} \beta_{kl} \varepsilon_{ij} - K_{ijk} \chi_k \varepsilon_{ij}, \quad j, k, l = 1, 2, 3, \quad (5.69)$$

где ρ — плотность среды; C_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов упругости $\widehat{\mathbf{C}}$; ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации $\widehat{\varepsilon}$; $\beta_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(\Phi)} - \varepsilon_{ij}^{(T)}$; $\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензоров температурной деформации, определяемые температурами Φ и T соответственно, причем $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$, $|\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}| \ll 1$ и $|\varepsilon_{ij}^{(T)}| \ll 1$. Ясно, что $\beta_{ij} \to 0$ при $\Phi \to T$. При температуре T_0 естественного состояния $B(T_0) = B_1(T_0, T_0) = 0$, т. е. свободная энергия — функция только деформации, а при $\varepsilon_{ij} = 0$ свободная энергия зависит лишь от T, Φ и χ_i .

Поскольку при малой деформации можно отождествить *тензоры* напряжений Коши $\hat{\sigma}$ и Пиолы — Киргофа $\hat{\mathbf{T}}$, из первого равенства (4.39) и из (5.69) следует, что

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - D_{ijkl}\beta_{kl} - K_{ijk}\chi_k, \qquad (5.70)$$

а из второго равенства (4.39) и из (5.69) для массовой плотности энтропии получим

$$h = \frac{C_{ijkl}}{\rho} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{dB}{dT} - \frac{\partial B_1}{\partial T}.$$
 (5.71)

Поскольку при температуре T_0 естественного состояния h = 0 и $\varepsilon_{kl} = 0$, из (5.71) следует, что в этом состоянии $dB/dT + \partial B_1/\partial T = 0$.

Подставив (5.71) в (4.22), придем при условии малости деформации к закону сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности

$$-\rho T\left(\frac{d^2B}{dT^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial T^2}\right)\frac{\partial T}{\partial t} - \rho T\frac{\partial^2 B_1}{\partial T\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + TC_{ijkl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}\alpha_{ij}^{(T)} = \\ = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \quad (5.72)$$

где $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T$. В дальнейшем положим также $\partial \varepsilon_{ij}^{(\Phi)} / \partial \Phi = \alpha_{ij}^{(T)}$. Диссипативная функция для рассматриваемой сплошной среды, как

следует из (4.40) при условии малости деформации, имеет вид

$$\begin{split} \delta_D &= -\rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \left(K_{ijk} \varepsilon_{ij} - F_{kj} \chi_j \right) \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \\ &+ \left(D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij} - H_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \beta_{ij} - \rho \frac{\partial B_1}{\partial \Phi} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{split}$$

Очевидно, что $\delta_D \to 0$ при $\dot{\Phi} \to 0$ и $\dot{\chi}_i \to 0$.

Дальнейшая конкретизация (5.70) и (5.71) связана с выбором вида функций для равновесных значений внутренних параметров состояния и вектора плотности теплового потока. В данном случае примем их в простейшем виде

$$\overline{\Phi} = T, \quad \overline{\chi}_i = -Z_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad q_i = \varphi_{ij} \chi_j, \tag{5.73}$$

не противоречащем принципам рациональной термодинамики. Кроме того, положим $c_{\varepsilon} = -T\left(\frac{d^2B}{dT^2} + \frac{\partial^2B_1}{\partial T^2}\right) = -T\frac{\partial^2B_1}{\partial T\partial\Phi}$. Тогда уравнение (5.72) с учетом (5.68) и (5.73) примет вид

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho c_{\varepsilon}}{t_T^*} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + q_V + \delta_D + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial t'} dt'\right)\right), \quad (5.74)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)} = \varphi_{ik} Z_{kj}$ — компоненты тензора теплопроводности.

Задав выражение для $\overline{\chi}_i$ в виде второго равенства (5.73), с учетом третьего условия (4.39) независимости A от $\partial T/\partial x_i$ получим $F_{kj} \equiv 0$ и $K_{ijk} \equiv 0$. Поэтому после подстановки (5.70) с учетом равенств (5.68) в уравнения движения среды (3.62) получим систему трех интегродифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' \right) + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

которая для изотропного и однородного тела примет вид

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + b_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + (3D_1 + 2D_2) \alpha^{(T)} \int_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial t'} dt' = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (5.75)$$

где D_1 , D_2 — аналоги коэффициентов Ламе λ и μ (тогда $D_{ijkl} = D_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + D_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}))$, учитывающие влияние скорости изменения градиента абсолютной температуры на вектор перемещения u с проекциями u_i на оси Ox_i системы пространственных координат.

Для однозначного решения (5.74) и (5.75) используют начальные условия

$$T(M,0) = T^{\circ}(M), \quad T(M,0) = T^{\circ}(M), u_{i}(M,0) = u_{i}^{\circ}(M), \quad \dot{u}_{i}(M,0) = v_{i}^{\circ}(M), M \in V,$$
(5.76)

где \dot{T}° — известное в начальный момент времени t = 0 значение скорости изменения абсолютной температуры, а остальные функции совпадают с введенными в (5.10). Для (5.75) справедливы граничные условия (5.11), а для (5.74) вместо граничных условий (5.21) имеем

$$\lambda_{ij}^{(T)}(N) \left(\frac{\partial T(N,t)}{\partial x_j} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*} \right) \frac{\partial^2 T(N,t')}{\partial x_j \partial t'} dt' \right) n_i(N) = \\ = \alpha(N,t) \left(T_c(N,t) - T(N,t) \right), \quad N \in S,$$

где n_i — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, ограничивающей рассматриваемую область V; α и T_c — коэффициент теплообмена и температура окружающей среды.

В данном случае справедливы условия (5.27) и (5.28) на поверхности разрыва, а из (5.72) при $\delta_D = 0$ и постоянных коэффициентах следует равенство $\rho c_{\varepsilon} ([T] + [\Phi] + T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)}[\varepsilon_{ij}]) D_n^* = [q_j] n_j^*$, из (5.70) и второго равенства (5.73) получим

$$[\sigma_{ij}] = C_{ijkl} \left([\varepsilon_{kl}] - \alpha_{kl}^{(T)}[T] \right) - D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \left([\Phi] - [T] \right)$$
(5.77)

и $[q_i] = \varphi_{ij}[\chi_j]$, из (5.67) с учетом второго равенства (5.73) — $t_T^*[\Phi]D_n^* = 0$ и $t_q^*[\chi_i]D_n^* = Z_{ij}[T]n_j^*$, где $[\cdot]$ — скачок соответствующего параметра при переходе через поверхность разрыва в направлении вектора n^* нормали с направляющими косинусами n_j^* (см. 4.4), а D_n^* — нормальная составляющая скорости поверхности разрыва.

Последовательно исключая в (5.77) $[\sigma_{ij}]$, $[\varepsilon_{ij}]$, $[\chi_i]$ и $[q_i]$, а также учитывая непрерывность термодинамической температуры ($[\Phi] = 0$ при $t_T^* \neq 0$ и $D_n^* \neq 0$), получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$B_{11}X + B_{12}[T] = 0, \quad B_{21}X + B_T[T] = 0,$$

где В₁₁ — матрица третьего порядка с элементами $B_{11ik} = C_{ijkl}n_j^*n_l^* - \rho(D_n^*)^2 \delta_{ik}$; В₁₂ — матрица-столбец размера 3 × 1 с элементами $B_{12i} = (C_{ijkl} - D_{ijkl}) \alpha_{kl}^{(T)} n_j^* D_n^*$; В₂₁ — матрица-строка размера 1 × 3 с элементами $B_{21i} = T_0 C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} n_j^*$; В_T = $-\rho c_{\varepsilon} (D_n^*)^2 + \lambda_{ij}^{(T)} n_j^* n_i^* / t_q^*$; X — вектор значений скачков $[\dot{u}_i]$. Так как в общем случае $X \neq 0$ и $[T] \neq 0$ одновременно, то скорости распространения скачков $[\dot{u}_i]$ и [T] следуют из условия равенства нулю определителя этой системы, что приводит в общем случае к четырем различным значениям D_n^* . По аналогии с терминологией, принятой для MM классической термоупругости, зна-

чения D_n^* можно назвать скоростями распространения квазиупругой термоупругой волны и скоростью квазитемпературной волны.

Скорости распространения упругих возмущений и теплоты можно получить из условий det(B₁₁) = 0 и $B_T = 0$ соответственно. Для изотропной среды первое условие приводит к (5.31), а из второго условия следует $D_q^* = \sqrt{\lambda^{(T)}/(\rho c_{\varepsilon} t_q^*)}$. Отметим, что (5.74) в отличие от (5.18) описывает процесс теплопроводности с конечной скоростью распространения теплоты, для анизотропной среды равной $D_q^* = \sqrt{\lambda_{ij}^{(T)} n_i^* n_j^* / (\rho c_{\varepsilon} t_q^*)}$. Кроме того, (5.74) учитывает неравновесность процесса аккумуляции теплоты и эффекты связанности полей температуры и деформации. Ясно, что $D_q^* \to \infty$ при $t_q^* \to 0$, что присуще MM класической термоупругости.

5.6. Термоупругая среда с фазовыми переходами

При изменении фазы вещества (при фазовом nepexode) происходит качественное изменение свойств вещества. Рассмотрим фазовые переходы в кристаллическом твердом теле (сплаве), т.е. превращение исходной высокотемпературной фазы, часто называемой аустенитом, в низкотемпературную, называемую мартенситом, а также обратный переход низкотемпературной фазы в высокотемпературную. Превращения такого типа называют фазовыми переходами второго рода (в отличие от фазовых переходов первого рода, когда вещество изменяет свое *агрегатное состояние*), характерным признаком которых является изменение типа кристаллической решетки. Такой фазовый переход может быть инициирован не только охлаждением или нагревом тела, но и приложенными к нему напряжениями.

Характер фазовых переходов при нагреве и охлаждении в общем случае различен. Полагают, что фазовый переход аустенита в мартенсит начинается при температуре M_s и заканчивается при температуре M_f . Обратный переход (мартенсита в аустенит) начинается при температуре A_s и заканчивается при температуре A_f . В общем случае $A_f > M_s > A_s > M_f$ и $M_s - M_f \neq A_f - A_s$. В связи с трудностями при определении последних небольших количеств остаточного мартенсита температуру A_f принимают соответствующей объемной доле мартенсита в сплаве, равной 0,01, а температура M_f — объемной доле аустенита в сплаве, равной 0,01.

При построении математической модели (MM) термомеханических процессов с фазовыми переходами используем соотношения для сплошной среды с внутренними параметрами состояния. Как и в 4.5, состояние среды в окрестности любой точки $M \in V$ в объеме V среды определим четырьмя термодинамическими функциями (активными переменными: массовой плотностью свободной энергии A и энтропии h, тензором напряжений с компонентами $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (i, j = 1, 2, 3) и вектором плотности теплового потока с проекциями q_i на оси Ox_i системы пространственных координат). Аргументами этих функций будут реактивные переменные: тензор малой деформации с компонентами $\vartheta_i = \partial T/\partial x_i$ и внутренний параметр состояния $\chi \in [0, 1]$, равный объемной доле мартенсита в сплаве. Тогда вместо (4.37) запишем

$$A = A(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi), \quad h = h(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi), \sigma_{ji} = \sigma_{ji}(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi), \quad q_i = q_i(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi), k, l = 1, 2, 3.$$

$$(5.78)$$

Использовав преобразование Лежандра u = A + Th, где u — массовая плотность внутренней энергии, с учетом (5.78) приведем уравнение (4.11) закона сохранения энергии к виду

$$\rho \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial A}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i + \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} + \dot{T}h + T\dot{h} \right) - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - q_V = 0, \quad (5.79)$$

где ρ — плотность среды, принятая неизменной в процесе фазовых переходов; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты, $(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t$. Вычитая (5.79) из локальной формы (4.19) неравенства Клаузиуса — Дюгема, получаем

$$-\Big(\rho\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}-\sigma_{ij}\Big)\dot{\varepsilon}_{ij}-\rho\Big(\frac{\partial A}{\partial T}+h\Big)\dot{T}-\rho\frac{\partial A}{\partial\vartheta_{i}}\dot{\vartheta}_{i}-\rho\frac{\partial A}{\partial\chi}\dot{\chi}-\frac{q_{i}}{T}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}\geqslant0.$$

В силу произвольности значений $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{T}$ и $\dot{\vartheta}_i$ отсюда следуют достаточные условия

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0_{\star}$$
(5.80)

реализации фазового перехода как простого термомеханического процесса.

Примем, что малы как полная деформация ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$), так и температурная и фазовая деформации, определенные тензорами с компонентами $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \varepsilon_{ji}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)} = \varepsilon_{ji}^{(\chi)}$ соответственно. Отметим, что $\varepsilon_{ij}^{(T)} = 0$ при температуре T_0 естественного состояния, а $\partial \varepsilon_{ij}^{(\chi)} / \partial t = 0$ при $\dot{\chi} = 0$.

В линейном приближении $\varepsilon_{ij}^{(\chi)} = \alpha_{ij}^{(\chi)} \chi$, где $\alpha_{ij}^{(\chi)}$ — компоненты тензора коэффициентов фазовой деформации.

Представим первое равенство (5.78) в виде

$$\rho A = \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^{(\chi)} \right) + \rho B(T, \chi) - \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(-\varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right) \left(-\varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^{(\chi)} \right), \quad (5.81)$$

где $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ — компоненты *тензора коэффициентов* упругости; $B(T,\chi)$ — часть свободной энергии единицы массы тела, зависящая от T и χ , причем $B(T_0,0) = 0$. Отметим, что при $\varepsilon_{ij} = 0$ из (5.81) следует A = B, т.е. при отсутствии полной деформации свободная энергия тела зависит лишь от T и χ .

Из (5.81) и первого равенства (5.80) дифференцированием получим $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)})$. Отсюда $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)} + \varepsilon_{ij}^{(\chi)}$, где S_{ijkl} — копоненты тензора козффициентов податливости. В случае изотропного материала в этих равенствах следует использовать (5.5) и (5.6).

Подставив (5.80) в (5.79) и отбросив слагаемые, содержащие линейную и квадратичную зависимости h и \dot{h} от ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)}$ и имеющие более высокий порядок малости, получим

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \chi} \dot{\chi} + T C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \frac{\partial \epsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D,$$

где $\delta_D = -\rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi}$ — диссипативная функция. Если принять, что $q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j}$, где $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda_{ij}^{(T)}(T,\chi)$ — компоненты тензора теплопроводности, придем к уравнению теплопроводности в виде

$$\rho c_{\varepsilon} \dot{T} - \rho m_{\varepsilon} \dot{\chi} + T C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V + \delta_D, \qquad (5.82)$$

где $c_{\varepsilon} = -T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; $m_{\varepsilon} = T \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \chi}$ — удельная массовая конфигурационная теплоемкость при постоянной деформации (количество энергии, затрачиваемой на фазовый переход единицы массы в единицу времени при постоянной деформации) [118]. Отметим, что в (5.82) второе слагаемое в левой части и последнее слагаемое в правой части отличны от нуля при $t \in [t_s, t_f]$, где t_s и t_f — моменты времени соответственно начала и окончания фазового перехода. Как следует из (5.82), характер изменения внутреннего параметра состояния χ может существенным образом влиять на *процесс mennoпроводности* в зоне фазового перехода. Для определенности рассмотрим переход мартенсита в аустенит, происходящий при $T \in [A_s, A_f]$. Кинетическое уравнение для определения χ запишем в виде $t_{\chi}^* \dot{\chi} = \bar{\chi} - \chi$, где t_{χ}^* — время релаксации параметра χ , а $\bar{\chi} = \chi_f = 0,01$ — его установившееся значение, равное объемной доле мартенсита в сплаве к моменту окончания фазового перехода при $T = A_f$. Из этого уравнения следует, что

$$\chi(t) = \chi_f - (\chi_f - \chi_s) \exp\left(-\frac{t - t_s}{t_{\chi}^*}\right), \quad t \in [t_s, t_f],$$
(5.83)

где $\chi_s = 0.99$ — объемная доля мартенсита при $t = t_s$.

Влияние абсолютной температуры и скорости ее изменения на развитие фазового перехода можно учесть в явном виде, если принять $\overline{\chi}(M,t) = \frac{T(M,t) - A_f}{A_s - A_f}, M \in V, t \in [t_s, t_f]$. Тогда вместо (5.83) получим

$$\chi(M,t) = \overline{\chi}(M,t) - \int_{t_s}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_{\chi}^*}\right) \frac{\partial \overline{\chi}(M,t')}{\partial t'} dt'.$$
(5.84)

Более сложным вариантом кинетического уравнения, используемым при построении ММ в синергетике и механике разрушения, является уравнение $t_{\chi}^* \dot{\chi} = \chi(\overline{\chi} - \chi)$, решением которого при $\overline{\chi} = \chi_f$ будет

$$\chi(t) = \frac{\chi_f}{1 + \frac{\chi_f}{\chi_s - 1} \exp\left(-\frac{\chi_f(t - t_s)}{t_{\chi}^*}\right)}, \quad t \in [t_s, t_f],$$
(5.85)

а при $\overline{\chi}(M,t) = \frac{T(M,t) - A_f}{A_s - A_f}, M \in V,$ —

$$\chi(M,t) = \left(\frac{1}{\chi_s} + \frac{\exp(-f(M,t))}{t_{\chi}^*} \int_{t_s}^t \exp(f(M,t^*)) dt'\right)^{-1}, \quad (5.86)$$

где

$$f(M,t) = \frac{1}{t_{\chi}^*} \int_{t_s}^t \overline{\chi}(M,t') dt'.$$

Для описания фазового перехода аустенита в мартенсит при $T \in [M_f, M_s]$ необходимо в (5.83) и (5.85) принять $\chi_f = 0.99$ и $\chi_s = 0.01$, а в (5.84) и (5.86) положить $\overline{\chi}(M,t) = (M_s - T(M,t))/(M_s - M_f)$ и $\chi_s = 0.01$. Влияние напряженно-деформированного состояния на процесс фазового перехода в первом приближении можно учесть, если считать температуры M_f , M_s , A_f и A_s зависящими от ε_{ij} .

При помощи (5.83)-(5.86) можно провести анализ кинетики фазовых переходов в сплавах с эффектом памяти формы и оценить влияние этого явления на процесс теплопроводности при $t \in [t_s, t_f]$. Рассмотрим тело с однородной по объему V температурой T и положим $\delta_D = 0$ и $q_V = 0$. Тогда, пренебрегая в левой части (5.82) третьим слагаемым, характеризующим эффект термомеханической связанности, получим

$$\rho c_{\varepsilon} \dot{T} - \rho m_{\varepsilon} \dot{\chi} = \frac{\alpha (T_{\rm c} - T)S}{V}, \quad t \in [t_s, t_f], \tag{5.87}$$

где α — коэффициент теплообмена тела с окружающей средой, имеющей температуру $T_{\rm c}$; S — поверхность тела.

Численное решение с использованием (5.83)-(5.87) позволяет выявить влияние параметра $\bar{t}_{\chi}^* = \frac{t_{\chi}^* \alpha S}{\rho c_e V}$ на зависимость от безразмерного времени $\bar{t} = \frac{t \alpha S}{\rho c_e V}$ безразмерной температуры $\theta = \frac{T-T_0}{T_c-T_0}$ (рис. 5.2) и χ (рис. 5.3). Расчеты проведены при $\frac{c_e(T_c-T_0)}{m_e} = 1$ и значениях $\theta_{A_s} = 0.45$, $\theta_{A_f} = 0.55$. Сплошная кривая на рис. 5.2 соответствует случаю, когда вся поступающая от окружающей среды теплота идет на повышение температуры тела, т. е. в (5.87) опущено второе слагаемое в левой части, а значение c_e увеличено на $\frac{m_e}{A_f - A_s}$. Штриховые линии на рис. 5.2





Рис. 5.3

и рис. 5.3 построены с использованием (5.83), штрихпунктирные — с использованием (5.85), помеченные крестиком — (5.84), кружком — (5.86), кривые 1 построены при $\tilde{t}_{\chi}^* = 10$, а кривые 2 — при $\bar{t}_{\chi}^* = 0,1$. Дополнительный анализ показывает, что при $c_{\varepsilon}(T_{\rm c} - T_0)/m_{\varepsilon} > 1$ уменьшается влияние изменения χ на изменение θ . Это связано с относительным снижением затрат энергии на фазовый переход.

5.7. Термоупругая среда скоростного типа

Одним из возможных вариантов линейной термоупругой сплошной среды является среда, при построении математической модели (MM) которой наряду с такими реактивными переменными, как компоненты ε_{ij} (i, j = 1, 2, 3) тензора малой деформации, абсолютная температура T, проекции ϑ_i ее градиента на оси Ox_i прямоугольной системы координат (аргументы активных переменных), используют скорость $\dot{T} = \partial T/\partial t$ изменения температуры во времени t. При построении MM такой среды введем в рассмотрение термодинамическую температуру Φ , совпадающую с абсолютной температурой, если $\dot{\Phi} \to 0$. Предположим, что в неравенстве Клаузиуса — Дюгема можно заменить T на Φ . Тогда неравенство

$$\rho \Phi \frac{\partial h}{\partial t} + \Phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{\Phi} \right) - q_V \ge 0,$$

где ρ — плотность среды; h — массовая плотность энтропии; q_i — проекции вектора плотности теплового потока на оси Ox_i системы пространственных координат; q_V — объемная плотность мощности

внутренних источников теплоты, при помощи видоизмененного определения массовой плотности свободной энергии $A = u - \Phi h (u - \text{массовая})$ плотность внутренней энергии) с учетом (4.11) представим в виде

$$-\frac{q_i}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \delta_D \ge 0, \tag{5.88}$$

где $\delta_D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{A} + h \dot{\Phi})$ — диссипативная функция; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Положим, что активные переменные A, h, σ_{ij} , q_i и Φ зависят от реактивных переменных ε_{kl} , T, \dot{T} и ϑ_k , k, l = 1, 2, 3. В этом случае (5.88) с учетом равенства

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \vartheta_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}} \dot{\vartheta}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i}$$

примет вид

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho} - h\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{\rho\Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial T}\vartheta_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial T} + h\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)\dot{T} - \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{T}} + h\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}}\right)\ddot{T} - \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} + h\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}}\frac{q_i}{\rho\Phi}\right)\dot{\vartheta}_i \ge 0. \quad (5.89)$$

Так как неравенство (5.89) в рассматриваемом процессе справедливо для произвольных скоростей изменения аргументов ε_{ij} , \dot{T} и ϑ_i , то из него следуют соотношения

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T} + h\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)\dot{T} + \frac{q_{i}}{\rho\Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\varepsilon_{kl}}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial \Phi}{\partial T}\vartheta_{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial\vartheta_{k}}\frac{\partial\vartheta_{k}}{\partial x_{i}}\right) \leq 0,$$

$$\sigma_{ij} = \rho\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}} - \rho h\frac{\partial \Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \frac{\partial A}{\partial\dot{T}} + h\frac{\partial \Phi}{\partial\dot{T}} = 0,$$

$$q_{i} = -\rho\Phi\left(\frac{\partial A}{\partial\vartheta_{i}} + h\frac{\partial \Phi}{\partial\vartheta_{i}}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\dot{T}}\right)^{-1}.$$
(5.90)

Отметим, что в левой части (5.89) множитель при \dot{T} не равен нулю, поскольку \dot{T} — задаваемый аргумент. Из равенств

$$\begin{aligned} q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_{i}} &= \frac{1}{2} \left(q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_{i}} + q_{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_{i}} \right) = \frac{1}{2} \left(q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} + q_{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_{i}} \\ q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{k}} \frac{\partial \vartheta_{k}}{\partial x_{i}} &= \frac{1}{2} \left(q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{k}} \frac{\partial \vartheta_{k}}{\partial x_{i}} + q_{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{i}} \frac{\partial \vartheta_{k}}{\partial x_{i}} \right) = \frac{1}{2} \left(q_{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{k}} + q_{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{i}} \right) \frac{\partial \vartheta_{k}}{\partial x_{i}} \end{aligned}$$

в силу произвольности $\partial \varepsilon_{kl} / \partial x_i$ и $\partial \vartheta_k / \partial x_i$ с учетом неравенства (5.90) получим

$$q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}} + q_l \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ki}} = 0, \quad q_i \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k} + q_k \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} = 0.$$

Поскольку в общем случае $q_i q_i \neq 0$, то отсюда следует $\partial \Phi / \partial \varepsilon_{kl} = 0$ и $\partial \Phi / \partial \vartheta_k = 0$, т.е. термодинамическая температура не должна зависеть от градиента абсолютной температуры и тензора деформации. Тогда (после проделанных выкладок) $\delta_D = -\rho (\partial A / \partial T + h \partial \Phi / \partial T) \dot{T}$ и упрощаются выражения (5.90):

$$\vartheta_{i} \frac{q_{i}}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial T} - \rho \delta_{D} \leqslant 0, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ \frac{\partial A}{\partial \dot{T}} + h \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}} = 0, \quad q_{i} = -\frac{\partial A}{\partial \vartheta_{i}} \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}}\right)^{-1}.$$

$$(5.91)$$

С учетом второго равенства (5.90) и первого равенства (5.91) уравнение (4.11) закона сохранения энергии примет аналогичный (4.22) вид:

$$\rho \Phi \dot{h} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i + \delta_D.$$
(5.92)

Дальнейшая конкретизация MM рассматриваемого варианта термоупругой среды связана с выбором вида функций свободной энергии и термодинамической температуры. Зададим их в следующей форме:

$$\begin{split} \rho A(\varepsilon_{kl},T,\dot{T},\vartheta_k) &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \gamma_{ij}^{(T)} \right) + \\ &+ \frac{\tilde{D}_{ij}\vartheta_j\vartheta_i}{2} + \rho B(T,\dot{T}) + \tilde{E}_i(T,\dot{T})\vartheta_i + F_{ijk} \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \gamma_{ij}^{(T)} \right) \vartheta_k - \\ &- \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij}^{(T)} + \gamma_{kl}^{(T)} \gamma_{ij}^{(T)} + 2\varepsilon_{kl}^{(T)} \gamma_{ij}^{(T)} \right) + F_{ijk} \left(\varepsilon_{ij}^{(T)} + \gamma_{ij}^{(T)} \right) \vartheta_k, \\ \Phi(T,\dot{T}) &= T + \Psi(T,\dot{T}), \end{split}$$

где C_{ijkl} и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора коэффициентов упругости и тензора температурной деформации соответственно; $\gamma_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора, определяемого скоростью изменения абсолютной температуры. Отметим, что $\Psi(T, \dot{T}) = 0$ при $T = T_0$ и $\dot{T} = 0$. Отсюда с учетом первых двух равенств из (5.91) получаем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)} \right) + F_{ijk} \vartheta_k,$$

$$q_i = -\rho \left(\widetilde{D}_{ij} \vartheta_j + \widetilde{E}_i(T, \dot{T}) \right) \left(T + \Psi(T, \dot{T}) \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} \right)^{-1},$$
(5.93)

а при $\varepsilon_{ij} = 0$ имеем $\rho A(0,T,\dot{T},\vartheta_k) = \tilde{D}_{ij}\vartheta_j\vartheta_i/2 + \rho B(T,\dot{T}) + \tilde{E}_i(T,\dot{T})\vartheta_i$. Последнее равенство может быть использовано для описания *процесса теплопроводности* в *абсолютно твердом теле*. От аналогичных по смыслу равенств, следующих при $\varepsilon_{ij} = 0$ из (5.14) и (5.69) соответственно для ММ классической термоупругости и ММ, описывающей релаксационные эффекты при распространении и аккумуляции теплоты, оно отличается учетом скорости \dot{T} изменения абсолютной температуры.

Так как $\sigma_{ij} = 0$ при $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^{(T)} = \gamma_{kl}^{(T)} = 0$, то $F_{ijk} = 0$. Если считать $T \approx T_0$, то можно принять $\tilde{E}_i(T, \dot{T}) = \bar{E}_i(\dot{T}) = \tilde{E}_i^{\circ}\dot{T}$. Кроме того, при линеаризации положим $\frac{|\Psi(T, \dot{T})|}{T} \ll 1$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} = \psi_0 = \text{const.}$ Тогда вместо (5.93) получим

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \gamma_{kl}^{(T)}), \quad q_i = -\lambda_{ij}^{(T)}\vartheta_j - E_i\dot{T}, \quad (5.94)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)} = \frac{\tilde{D}_{ij}T_0}{\psi_0}$ — компоненты *тензора теплопроводности*, а $E_i = \frac{\tilde{E}_i^{\circ}T_0}{\psi_0}$.

Используя (5.94) и принятые при получении этих соотношений допущения вместе с третьим равенством (5.91), запишем

$$\rho \Phi \dot{h} \approx \frac{T_{0}}{\psi_{0}} \left(C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} - \rho \frac{\partial^{2}B}{\partial T \partial \dot{T}} \dot{T} - \rho \frac{\partial^{2}B}{\partial \dot{T}^{2}} \ddot{T} - \tilde{E}_{i}^{\circ} \dot{\vartheta}_{i} \right), \\
\delta_{D} = \left(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \rho \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\rho}{\psi_{0}} \frac{\partial B}{\partial \dot{T}} + \frac{\tilde{E}_{i}^{\circ}}{\psi_{0}} \vartheta_{i} - \frac{C_{ijkl}}{\psi_{0}} \varepsilon_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} \right) \dot{T}, \\
\frac{\partial q_{i}}{\partial x_{i}} = -\frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_{j}} \right) - \frac{\partial (E_{i}\dot{T})}{\partial x_{i}}.$$
(5.95)

Обозначив

$$c_{\varepsilon} = -\frac{T_0}{\psi_0} \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \dot{T}}, \quad t_q^* = -\frac{T_0}{\psi_0 c_{\varepsilon}} \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{T}^2}$$

и подставив (5.95) в (5.92), получим уравнение теплопроводности

$$\rho c_{\varepsilon} (t_{q}^{*} \ddot{T} + \dot{T}) = \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_{j}} \right) + \frac{\partial (E_{i} \dot{T})}{\partial x_{i}} + E_{i} \dot{\vartheta}_{i} - \frac{T_{0}}{\psi_{0}} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} + q_{V} + \left(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} - \frac{1}{\psi_{0}} \frac{\partial \gamma_{ij}^{(T)}}{\partial \dot{T}} \right) - \rho \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{\rho}{\psi_{0}} \frac{\partial B}{\partial \dot{T}} + \frac{E_{i}}{T_{0}} \vartheta_{i} \right) \dot{T}. \quad (5.96)$$

Начальные условия сохраняют вид (5.76), а граничные условия имеют вид (5.21) с добавлением в левую часть слагаемого $E_i T n_i$, где n_i проекции на оси Ox_i единичного вектора внешней нормали к поверхности S, ограничивающей область V, занятую термоупругой средой. Отметим, что (5.96) описывает процесс теплопроводности с конечной скоростью

$$D_q = \sqrt{\frac{\lambda_{ij}^{(T)} \overline{n}_j \overline{n}_i}{\rho c_{\varepsilon} t_q^*}}$$

распространения теплоты в направлении вектора \overline{n} с проекциями \overline{n}_i . Если этот вектор определяет нормаль к поверхности разрыва, т.е. $\overline{n} = n^*$, то D_a совпадает с D_a^* (см. 5.5).

Для рассматриваемой MM уравнения движения линейной анизотропной термоупругой среды в перемещениях следуют из (5.8) при добавлении в правую часть слагаемого $-C_{ijkl}\dot{\vartheta}_j \frac{\partial \gamma_{kl}^{(T)}}{\partial \dot{T}}$, причем сохраняют силу начальные и граничные условия (5.10)–(5.12).

6. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

При решении многих прикладных задач, возникающих в инженерной практике, возможно рациональное упрощение математических моделей (ММ) механики сплошной среды, которое не приводит к потере достоверности результатов количественного анализа, но делает эти результаты более обозримыми и поддающимися более ясной в практическом отношении интерпретации. Такие упрощенные ММ принято относить к разделу механики, обычно называемому прикладной механикой. В частности, к ним относятся ММ, используемые в курсах сопротивления материалов и строительной механики различных типов конструкций и сооружений. При этом один из основных приемов упрощения ММ связан с принятием и обоснованием так называемых кинематических гипотез, устанавливающих определенные ограничения на перемещения, что в сочетании с использованием принципа возможных перемещений и с анализом возможной работы приложенной внешней нагрузки позволяет выявить в расчетной схеме (PC) рассматриваемого технического объекта и его ММ наиболее существенные факторы и пренебречь влиянием менее существенных. Результатом такого упрощения являются широко используемые в прикладной механике РС стержня (тела, одно измерение которого существенно больше двух других) и РС оболочки (тела, толщина которого значительно меньше двух других измерений). Если множество равноотстоящих от поверхностей оболочки точек, называемое срединной поверхностью, лежит в плоскости, то говорят о РС пластины (или пластинки, подчеркивая этим ее малую толщину по сравнению с двумя другими размерами). В этой главе кратко рассмотрим РС и ММ стержня, оболочки, пластинки и мембраны.

6.1. Математические модели стержня

Если вдоль произвольной линии перемещать плоскую фигуру так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна кривой, то контур этой фигуры опишет боковую поверхность *криволинейного стержня*. Эту фигуру называют *поперечным сечением* стержня, которое может быть переменным, если фигура при движении изменяет свою форму и/или размеры. В частном случае перемещения фигуры вдоль прямой получим прямолинейный стержень, а когда перемещение фигуры сопровождается ее вращением около прямой — естественно закрученный стержень (примером такого стержня является спиральное сверло).

В плоскости фигуры площадью F выберем прямоугольную систему координат $O\xi_2\xi_3$. Точку C с координатами

$$\xi_{2C} = \frac{S_{\xi_3}}{F} = \frac{1}{F} \int_F \xi_2 \, dF, \quad \xi_{3C} = \frac{S_{\xi_2}}{F} = \frac{1}{F} \int_F \xi_3 \, dF,$$

где S_{ξ_3} и S_{ξ_2} — статические моменты площади F относительно осей $O\xi_2$ и $O\xi_3$ соответственно, принято называть центром тяжести этой площади, а применительно к поперечному сечению стержня — центром *тяжести сечения* [145]. При этом S_{ξ_3} и S_{ξ_2} называют статическими моментами сечения. Если начало координат совместить с точкой C, то $S_{\xi_3} = S_{\xi_2} = 0$. В этом случае оси координат называют центральными. Если при движении фигуры ее плоскость перпендикулярна кривой и точка C остается на этой кривой, то кривую называют осевой линией стержня.

Пусть оси $O\xi_2$ и $O\xi_3$ являются центральными осями сечения площадью *F*. Центробежный момент инерции сечения

$$I_{\xi_2\xi_3} = \int\limits_F \xi_2\xi_3 \, dF$$

поворотом этих осей на угол $\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{\xi_2\xi_3}}{I_{\xi_3} - I_{\xi_2}},$ где

$$I_{\xi_2} = \int_F \xi_3^2 dF, \quad I_{\xi_3} = \int_F \xi_2^2 dF - -$$

осевые моменты инерции этого сечения относительно осей $O\xi_2$ и $O\xi_3$ соответственно, обращается в нуль [145]. При новом положении осей $O\tilde{\xi}_2$ и $O\tilde{\xi}_3$, которые называют главными, осевые моменты инерции достигают экстремальных значений I_2 и I_3 , называемых главными моментами инерции. Их сумма дает полярный момент инерции сечения I_p , не зависящий от ориентации центральных осей.

При построении математических моделей (MM) стержней в качестве кинематической гипотезы обычно принимают, что множество точек, расположенных в плоскости любого поперечного сечения стержня до его деформирования, после деформирования стержня по-прежнему образует плоскость, перепендикулярную деформированной осевой линии (гипотеза Бернулли). Кроме того, считают размеры поперечного сечения малыми по сравнению с длиной осевой линии и ее радиусом кривизны, пренебрегают относительными удлинениями, перепендикулярными этой линии, и используют принцип Сен-Венана, утверждающий, что различные, но статически эквивалентные нагрузки вызывают в стержне одинаковые напряженные состояния (за исключением зон вблизи точек приложения нагрузки, размеры которых порядка размеров поперечного сечения) [127].

В деформированном состоянии криволинейного стержня с его осевой линией длиной L свяжем penep $\{e_i\}$ подвижной системы координат с правой тройкой базисных векторов (ортов) e_i , i = 1, 2, 3, направив орт e_1 по касательной к осевой линии в сторону возрастания координаты s, отсчитываемой вдоль этой линии (рис. 6.1). В поперечном сечении стержня орт e_1 задает направление оси $\tilde{\xi}_1$, а орты e_2 и e_3 — направления главных осей этого сечения $\tilde{\xi}_2$ и $\tilde{\xi}_3$ соответственно. На стержень действуют распределенные вдоль осевой линии момент $m^{\circ}(s)$ и нагрузка, направление и интенсивность которой определяет векторная функция $q^{\circ}(s)$, причем линии действия этой нагрузки пересекают осевую линию. Кроме того, в сечениях с координатами s_{ϵ} ($\epsilon = \overline{1, N_P}$) приложено N_P сосредоточенных сил $P^{(\epsilon)}$, линии действия которых также пересекают осевую линию, а в сечениях с координатами s_{ς} ($\varsigma = \overline{1, N_M}$) — N_M моментов $M^{(\varsigma)}$. На концах стержня при s = 0 и s = l могут быть заданы силы $P^{(0)}$, $P^{(l)}$ и моменты $M^{(0)}$, $M^{(l)}$.



Рис. 6.1

Рассмотрим поперечное сечение с координатой s, точка осевой линии которого имеет радиус-вектор x(s) в неподвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Если в исходном состоянии стержня положение этой точки определял радиус-вектор $x^{\circ}(s)$, то вектор ее перемещения $u(s) = x(s) - x^{\circ}(s)$. Тогда $du/ds = dx/ds - dx^{\circ}/ds = e_1 - e_1^{\circ}$, где $e_1^{\circ} - opt$, касательный к осевой линии в исходном состоянии стержня и входящий в репер $\{e_i^{\circ}\}$ подвижной системы координат с осями $O\tilde{\xi}_i^{\circ}$, связанной с осевой линией в этом состоянии. Для перехода от этого репера к реперу $\{e_i\}$ помимо вектора u нужно знать углы ϑ_j (j = 1, 2, 3) поворота осей $O\tilde{\xi}_j^{\circ}$ относительно осей $O\tilde{\xi}_i^{\circ}$. От этих углов

зависят в (П1.7) элементы α_{ij} матрицы А поворота penepa (см. П1.1). Используя (П1.9), последнее равенство с учетом правила суммирования по одинаковым индексам можно представить в виде

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{u}_i}{ds}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{u} = (1 - \alpha_{11})\boldsymbol{e}_1 - \alpha_{21}\boldsymbol{e}_2 - \alpha_{31}\boldsymbol{e}_3.$$
(6.1)

Здесь u_i — проекции вектора u на оси системы координат с репером $\{e_i\}$, а κ — вектор, определяющий кривизну и кручение (см. П1.1) осевой линии в деформированном состоянии стержня и связанный с аналогичным вектором $\kappa^\circ = \kappa_j^\circ e_j^\circ$ для его исходного состояния соотношением [87, 127]

$$\boldsymbol{\kappa} = \left(\beta_{ij}\frac{d\vartheta_j}{ds} + \alpha_{ij}\kappa_j^{\circ}\right)\boldsymbol{e}_i,\tag{6.2}$$

где $\beta_{11} = \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3$; $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0$; $\beta_{13} = -\sin \vartheta_2$; $\beta_{21} = -\sin \vartheta_3$; $\beta_{22} = 1$; $\beta_{31} = \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3$; $\beta_{33} = \cos \vartheta_2$.

В качестве возможных перемещений выберем векторы $\delta u = e_i \, \delta u_i$ и $\delta \vartheta = e_i \, \delta \vartheta_i$. При использовании принципа возможных перемещений вариацию потенциальной энергии деформации можно представить как возможную работу внутренних силовых факторов на возможных перемещениях. Для элемента стержня длиной ds при фиксированном поперечном сечении с координатой s приращение такой работы равно $d \delta A_{\sigma} = (\mathbf{Q} + d\mathbf{Q}) \cdot d\delta u + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) \cdot d\delta \vartheta$, где

$$\boldsymbol{Q}(s) = \int_{F(s)} \sigma_{1i} \boldsymbol{e}_i dF, \quad \boldsymbol{M}(s) = \int_{F(s)} e_{ijk} \widetilde{\xi}_i \sigma_{1j} \boldsymbol{e}_k dF \quad - \qquad (6.3)$$

векторы соответственно равнодействующей, приложенной к точке осевой линии, и момента; e_{ijk} . (i, j, k = 1, 2, 3) — символ Леви-Чивиты; σ_{1i} — компоненты тензора напряжений в поперечном сечении стержня. Но в действительности в этом сечении $\delta \vartheta \neq 0$, что приводит к затрате части потенциальной энергии на работу на возможном перемещении $\delta(\vartheta + d\vartheta)$ момента $(-e_1 ds) \times Q$ силы Q относительно точки осевой линии с координатой s + ds. В итоге, пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получаем

$$\delta A_{\sigma} = \int\limits_{0}^{L} \left(oldsymbol{Q} \cdot rac{d\delta oldsymbol{u}}{ds} + oldsymbol{M} \cdot rac{d\delta oldsymbol{artheta}}{ds} - (oldsymbol{e}_1 imes oldsymbol{Q}) \cdot \delta oldsymbol{artheta}
ight) ds$$

и после интегрирования по частям находим

$$\delta A_{\sigma} = \boldsymbol{Q}(L) \cdot \delta \boldsymbol{u}(L) - \boldsymbol{Q}(0) \cdot \delta \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{M}(L) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}(L) - M(0) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}(0) - \int_{0}^{L} \left(\frac{d\boldsymbol{Q}}{ds} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \left(\frac{d\boldsymbol{M}}{ds} + \boldsymbol{e}_{1} \times \boldsymbol{Q} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} \right) ds.$$

Возможная работа заданной внешней нагрузки, действующей на стержень, будет равна

$$\delta A^{\circ} = P^{(0)} \cdot \delta u(0) + P^{(L)} \cdot \delta u(L) + M^{(0)} \cdot \delta \vartheta(0) + M^{(L)} \cdot \delta \vartheta(L) + \int_{0}^{L} \left(q^{\circ} \cdot \delta u + m^{\circ} \cdot \delta \vartheta + \sum_{\epsilon=1}^{N_{P}} P^{(\epsilon)} \cdot \delta u \delta(s - s_{\epsilon}) + \sum_{\epsilon=1}^{N_{M}} M^{(\varsigma)} \cdot \delta \vartheta \delta(s - s_{\varsigma}) \right) ds,$$

где $\delta(s-s_{\epsilon}), \, \delta(s-s_{\varsigma}) - функция Дирака,$ обладающая по отношению к непрерывной функции f(z) свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\delta(z-z_0)\,dz = f(z_0).$$

В соответствии с принципом возможных перемещений в виде $\delta A_{\sigma} = \delta A^{\circ}$ (см. 5.3), объединяя слагаемые при произвольных возможных перемещениях $\delta u(s), \, \delta \vartheta(s), \, s \in (0, l)$, и используя (П1.9), получаем уравнения равновесия

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{ds} = \frac{dQ_{i}}{ds}\boldsymbol{e}_{i} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{q}^{\circ} - \sum_{\epsilon=1}^{N_{P}} \boldsymbol{P}^{(\epsilon)} \,\delta(s - s_{\epsilon}), \\
\frac{dM}{ds} = \frac{dM_{i}}{ds}\boldsymbol{e}_{i} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{M} = -\boldsymbol{e}_{1} \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{m}^{\circ} - \sum_{\varsigma=1}^{N_{M}} \boldsymbol{M}^{(\varsigma)} \,\delta(s - s_{\varsigma}), \\
\end{cases} \tag{6.4}$$

где Q_i и M_i — проекции векторов Q и M на оси $O\widetilde{\xi}_i$, и условия на концах стержня

$$\left(\boldsymbol{Q}(0) + \boldsymbol{P}^{(0)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}, \quad \left(\boldsymbol{M}(0) + \boldsymbol{M}^{(0)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}(0) = \boldsymbol{0}, \\ \left(\boldsymbol{Q}(L) - \boldsymbol{P}^{(L)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{u}(L) = \boldsymbol{0}, \quad \left(\boldsymbol{M}(L) + \boldsymbol{M}^{(L)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}(L) = \boldsymbol{0}.$$

$$(6.5)$$

Если на концах стержня заданы только кинематические граничные условия, т.е. заданы перемещения точек осевой линии и ее углы поворота, то $\delta u = 0$, $\delta \vartheta = 0$ и все равенства (6.5) удовлетворяются автоматически. Наоборот, если торец стержня, например при s = L, не закреплен, то векторы δu , $\delta \vartheta$ произвольны и должны быть заданы силовые граничные условия $Q(L) = P^{(L)}$ и $M(L) = M^{(L)}$. Аналогично на торце при s = 0, но с учетом того, что орт e_1 репера $\{e_i\}$ направлен в сторону возрастания координаты s, а внешняя нормаль к плоскости этого торца — в противоположную сторону, в проекциях на оси $O\tilde{\xi}_i$ имеем $Q_i(l) = |P_i^{(0)}|$ и $M_i(0) = |M_i^{(0)}|$. В общем случае при смешанных граничных условиях из (6.5) следует, что для каждого значения i = 1, 2, 3 может быть задано $u_i(0)$ либо $P_i^{(0)}, u_i(l)$ либо $P_i^{(L)}, \vartheta_i(0)$ либо $M_i^{(0)}, \vartheta_i(L)$ либо $M_i^{(L)}$.

Систему четырех векторных уравнений (6.1), (6.2) и (6.4) с неизвестными u, κ, Q, M и ϑ_j следует дополнить соотношением, связывающим M и вектор $\Delta \kappa$ с проекциями $\Delta \kappa_i = \kappa_i - \kappa_i^{\circ}$ на оси $O\tilde{\xi}_i$. Гипотеза Бернулли и допущение о малости размеров поперечного сечения по сравнению с радиусом кривизны осевой линии позволяют в случае материала стержня, подчиняющегося закону Гука, установить линейную связь между этими векторами. Из второго равенства (6.3) получим

$$M_2 = \int_F \widetilde{\xi}_3 \sigma_{11} dF, \quad M_3 = -\int_F \widetilde{\xi}_2 \sigma_{11} dF, \quad (6.6)$$

где $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ — нормальное напряжение в поперечном сечении; E — модуль продольной упругости материала стержня; $\varepsilon_{11} = du_1/d\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_3\Delta\kappa_2 - \tilde{\xi}_2\Delta\kappa_3$ — относительное удлинение в направлении оси $O\tilde{\xi}_1$. Тогда, учитывая, что оси $O\tilde{\xi}_k$ (k = 2, 3) главные и центральные, согласно (6.6) запишем

$$M_2 = EI_2 \Delta \kappa_2, \quad M_3 = EI_3 \Delta \kappa_3. \tag{6.7}$$

Величину EI_k называют жесткостью при изгибе стержня изгибающим моментом M_k . Для произвольной формы поперечного сечения стержня крутящий момент $M_1 = \mu I_{\kappa} \Delta \kappa_1$, где μ — модуль сдвига материала стержня, а I_{κ} — геометрический параметр сечения, пропорциональный жесткости стержня при его кручении. Для сечения, обладающего центральной симметрией (например, круглого или кольцевого) и сохраняющего ее при деформировании стержня, $I_{\kappa} = I_p$ (см. 6.2). Ясно, что для стержня с переменным поперечным сечением значения I_k и I_{κ} зависят от s.

При малых значениях углов ϑ_j можно принять $\beta_{11} = \beta_{33} = 1$, $\beta_{21} = -\vartheta_3$ и $\beta_{31} = -\beta_{13} = \vartheta_2$, а также $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$, $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \vartheta_3$, $\alpha_{13} = -\alpha_{31} = -\vartheta_2$ и $\alpha_{23} = -\alpha_{32} = \vartheta_1$. При этом будет малым и модуль вектора $\Delta \kappa$, поэтому $\kappa_i \approx \kappa_i^{\circ}$. Тогда выражения для производных векторов u, Q и M по s в (6.1) и (6.4) становятся линейными.

Если осевая линия криволинейного стержня в исходном состоянии является плоской кривой, то $\kappa_1^{\circ} = \kappa_2^{\circ} = 0$ и в случае, когда при деформировании стержня она остается плоской, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Тогда из (6.1)–(6.4)

и (6.7) при отсутствии сосредоточенных сил и моментов следует

$$\frac{du_{1}}{ds} - u_{2}\kappa_{3} + \cos\vartheta_{3} = 1, \quad \frac{du_{2}}{ds} + u_{1}\kappa_{3} - \sin\vartheta_{3} = 0, \\
\kappa_{3} - \frac{d\vartheta_{3}}{ds} = \kappa_{3}^{\circ}, \quad \kappa_{3} - \frac{M_{3}}{EI_{3}} = \kappa_{3}^{\circ}, \quad \frac{Q_{1}}{ds} - Q_{2}\kappa_{3} + q_{1}^{\circ} = 0, \\
\frac{dQ_{2}}{ds} + Q_{1}\kappa_{3} + q_{2}^{\circ} = 0, \quad \frac{dM_{3}}{ds} + Q_{2} + m_{3}^{\circ} = 0.$$
(6.8)

При малом значении угла ϑ_3 уравнения (6.8) становятся линейными, если принять $\cos \vartheta_3 \approx 1$, $\sin \vartheta_3 \approx \vartheta_3$ и $\kappa_3 \approx \kappa_3^\circ$.

Для прямолинейного стержня в (6.2) $\kappa_j^{\circ} = 0$. Если при его деформировании осевая линия остается плоской, то в третьем и четвертом уравнениях системы (6.8) следует положить $\kappa_3^{\circ} = 0$ и, исключив из них κ_3 , записать $d\vartheta_3/ds = M_3/(EI_3)$. При малых значениях угла ϑ_3 можно принять $\sin \vartheta_3 \approx \vartheta_3$ и $ds \approx dx_1$, где x_1 — координата поперечного сечения стержня, отсчитываемая вдоль осевой линии недеформированного прямолинейного стержня. Тогда из второго уравнения (6.8), считая u_1 пренебрежимо малым, находим $du_2/dx_1 \approx \vartheta_3$, поэтому предыдущее равенство можно представить в виде

$$\frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}.$$
(6.9)

Пусть шарнирно закрепленный стержень длиной L сжат силой P, линия действия которой совпадает с осевой линией недеформированного прямолинейного стержня (рис. 6.2). При отклонении этой линии от исходного положения (штриховая линия на рис. 6.2) $M_3 = -Pu_2$ и в случае $EI_3 = {
m const}$ общее решение (6.9) имеет вид $u_2(x_1) = C_1 \sin(k_n x_1) +$ $+C_2\cos(k_nx_1)$, где $k_n=\sqrt{P/(EI_3)}$. Так как $u_2(0)=u_2(L)=0$, то $C_2=0$ и $C_1 \sin(k_n L) = 0$. Отсюда следует, что наряду с сохранением прямолинейного положения равновесия ($C_1 = 0$) возможны положения равновесия, соответствующие значениям $k_n L = n\pi$, что отвечает значениям силы $P_n = n^2 \pi^2 E I_3 / L^2$. Наименьшее значение $P_1 = P_{\text{кр}} = \pi^2 E I_3 / L^2$, для которого существует отличное от прямолинейного положение равновесия стержня, называют первой критической силой или эйлеровой *силой* [145]. При этом n = 1, осевая линия принимает форму полуволны синусоиды и говорят, что произошла потеря устойчивости прямолинейного положения равновесия стержня. В случае $P \in [P_n, P_{n+1})$ возможно равновесие, когда осевая линия принимает форму *n* полуволн синусоиды.

Рассмотренное решение линейного уравнения (6.9) не позволяет при потере устойчивости стержня найти наибольшее отклонение осевой



Рис. 6.2

линии от исходного положения. Найти зависимость этого отклонения от значения силы *P* можно из решения нелинейного уравнения

$$\frac{EI_3 \frac{d^2 u_2}{dx_1^2}}{\left(1 + \left(\frac{du_2}{dx_1}\right)^2\right)^{3/2}} + Pu_2 = 0,$$

учитывающего отличие от единицы знаменателя в выражении для кривизны κ_3 . Решение этого уравнения при различных условиях закрепления и нагружения стержня (в том числе, плоского криволинейного) удается выразить через эллиптические интегралы первого рода [117].

6.2. Кручение прямолинейных стержней

Пусть прямолинейный стержень в виде тонкостенной круглой трубки, которая имеет толщину h, средний радиус R и длину L, на одном из торцов нагружен крутящим моментом M_{κ} , а его противоположный торец жестко закреплен (рис. 6.3). При деформировании трубка будет закручиваться. Тогда каждое ее nonepeuhoe ceuenue (исключая закрепленный торец), оставаясь, согласно гипотезе Бернулли, плоским и перпендикулярным оси трубки, повернется на некоторый угол относительно этой оси. Естественно предположить, что угол φ поворота



Рис. 6.3

любого поперечного сечения пропорционален расстоянию x_1 от закрепленного торца, т.е.

$$\varphi = \frac{x_1}{L}\varphi_L,\tag{6.10}$$

где φ_L — угол поворота торца, к которому приложен крутящий момент.

При деформировании в элементе трубки, заключенном между двумя бесконечно близкими поперечными и продольными сечениями, возникнет *деформация сдвига*, характеризуемая углом γ (рис. 6.4), равным, согласно (6.10),

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{R}{L} \varphi_L, \tag{6.11}$$

а на гранях элемента появятся касательные напряжения τ . В этом случае напряженное состояние принято называть **чистым сдвигом**.

Для тонкостенной трубки при $h/R \ll 1$ эти напряжения можно считать однородными по ее толщине. Из (6.11) следует, что возможная деформация сдвига $\delta \gamma = (R/L) \delta \varphi_L$. Поэтому возможная работа, совершаемая напряжением τ на этой деформации, составит



$$\delta A_ au = 2\pi Rh \int\limits_0 au \delta \gamma \, dx_1 = 2\pi R^2 h au \, \delta arphi_L.$$

L



Приравнивая в соответствии с принципом возможных перемещений δA_{τ} возможной работе $\delta A^{\circ} = M_{\kappa} \, \delta \varphi_L$ приложенного к трубке крутящего момента, при произвольной вариации $\delta \varphi_L$ получаем

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{2\pi R^2 h}.\tag{6.12}$$

Ясно, что (6.12) сразу следует из условия равновесия элемента трубки между ее произвольным поперечным сечением и торцом, к которому приложен крутящий момент. Следует отметить, что при принятых предположениях касательные напряжения во всех поперечных сечениях трубки оказались одинаковыми, не зависящими от расстояния x_1 от закрепленного торца. Однако это справедливо при условии, что на торце при $x_1 = L$ крутящий момент M создан за счет равномерно распределенных по нему касательных напряжений, в точности равных τ . В противном случае в поперечных сечениях трубки, близких к этому торцу, распределение касательных напряжений будет зависеть от особенностей, связанных с приложением этого момента. В соответствии с принципом Сен-Венана эти особенности будут сказываться на расстоянии порядка характерного размера поперечного сечения трубки.

Если материал трубки подчиняется закону Гука и имеет модуль сдвига μ , то

$$\tau = \mu \gamma. \tag{6.13}$$

Тогда из (6.11) и (6.12) следует

$$\varphi_L = \frac{M_{\kappa}L}{\mu I_p},\tag{6.14}$$

где $I_p = 2\pi R^3 h$ — полярный момент инерции сечения трубки. Величина μI_p определяет жесткость при кручении трубки.

Благодаря однородности распределения касательного напряжения в поперечном сечении тонкостенной трубки ее удобно использовать в качестве образца материала при экспериментальном определении модуля μ сдвига и зависимости τ от γ за пределами линейно-упругого деформирования материала. Однако при больших значениях τ возможно искажение формы поперечного сечения трубки вследствие потери устойчивости. Дело в том, что напряженное состояние чистого сдвига эквивалентно *плоскому напряженному состоянию* растяжения-сжатия в направлениях, составляющих угол $\pi/4$ с осью трубки. При потере устойчивости на поверхности трубки возникают складки, расположенные под таким углом к оси.

При кручении прямолинейного стержня в виде толстостенной круглой трубы внешним радиусом R_2 , внутренним радиусом R_1 и длиной L при тех же условиях нагружения и закрепления, что и в случае тонкостенной трубки, каждый кольцевой слой такой трубы, имеющей средний радиус $r \in (R_1, R_2)$ и толщину dr, можно рассматривать как тонкостенную трубку, для которой вместо (6.11) запишем

$$\gamma(r) = r \frac{d\varphi}{dx} = \frac{r}{L} \varphi_L. \tag{6.15}$$

Тогда при $\delta\gamma(r) = (r/L)\delta\varphi_L$ с учетом (6.13) найдем

$$\delta A_{\tau}^{*} = 2\pi \int_{0}^{L} dx_{1} \int_{R_{1}}^{R} \tau(r) \delta \gamma(r) r \, dr = \mu J_{p}^{*} \frac{\varphi_{L}}{L} \delta \varphi_{L},$$

где $J_p^* = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$ — полярный момент инерции сечения трубы. Приравнивая δA_τ^* и $\delta A^\circ = M_{\kappa} \delta \varphi_L$, получаем

аравнивая ∂A_{τ} и $\partial A = M_{\kappa} \partial \varphi_L$, получаем

$$\varphi_L = \frac{M_{\kappa}L}{\mu J_p^*},\tag{6.16}$$

а с учетом (6.13) и (6.15) — $\tau(r) = M_{\kappa}r/J_{p}^{*}$. Значение

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}R_2}{J_p^*} = \frac{M_{\kappa}}{W_p^*},$$
(6.17)

где $W_p^* = J_p^*/R_2$ — полярный момент сопротивления сечения трубы, определяет наибольшее касательное напряжение в трубе при $r = R_2$. Для сплошного круглого стержня, у которого $R_1 = 0$, уравнения (6.15)-(6.17) остаются в силе, но J_p^* и W_p^* следует заменить на $J_p^\circ =$ $= \pi R_2^4/2$ и $W_p^\circ = \pi R_2^3/2$ соответственно.

При увеличении $M_{\rm K}$ значение $\tau_{\rm max}$ увеличивается и, согласно (6.17), при $M_{\rm K} = \tau_{\rm T} W_p^*$ достигает предела текучести $\tau_{\rm T}$ материала трубы при сдвиге. При дальнейшем увеличении $M_{\rm K}$ область пластической деформации будет расти в направлении оси трубы, причем ее граница, согласно (6.13) и (6.15), будет окружностью радиусом $r_{\rm T} = \tau_{\rm T} L/(\mu \varphi_L)$. Если материал соответствует идеальной упругопластической сплошной среде, то из равенства $\delta A^\circ = \delta A_{\tau}$ при произвольной вариации $\delta \varphi_L$ с учетом (6.13) и (6.15) найдем

$$M_{\kappa} = 2\pi \int_{R_{1}}^{r_{T}} \mu \frac{r}{L} \varphi_{L} r^{2} dr + 2\pi \int_{r_{T}}^{R_{2}} \tau_{T} \varphi_{L} r^{2} dr =$$
$$= \frac{2\pi R_{2}^{3} \tau_{T}}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_{T} L}{R_{2} \mu \varphi_{L}} \right)^{3} - \frac{3R_{2} \mu \varphi_{L}}{4L \tau_{T}} \left(\frac{R_{1}}{R_{2}} \right)^{4} \right).$$

Полученная зависимость $M_{\rm k}$ от φ_L справедлива при изменении φ_L от $\tau_{\rm T}L/(R_2\mu)$ до $\tau_{\rm T}L/(R_1\mu)$. При достижении значения $\varphi_L = \tau_{\rm T}L/(R_1\mu)$, соответствующего значению $r_{\rm T} = R_1$, труба воспринимает наибольший крутящий момент $M_{\rm max} = 2\pi\tau_{\rm T}(R_2^3 - R_1^3)/3$. В случае сплошного круглого стержня $(R_1 = 0)$ $M_{\rm max}$ стремится к значению $2\pi\tau_{\rm T}R_2^3/3$ при $\varphi_L \to \infty$. Отметим, что началу пластического деформирования круглого стержня, согласно (6.17), соответствует значение крутящего момента $M_{\rm K} = \tau_{\rm T} W_p^\circ = \tau_{\rm T} \pi R_2^3/2$, т. е. для исчерпания несущей способности круглого стержня из рассматриваемого материала достаточно приложить крутящий момент, на треть больший по сравнению с моментом, вызывающим начало пластического деформирования.

Рассмотренные случаи распределения касательных напряжений в поперечном сечении при кручении стержня качественно можно уподобить распределению скорости вращательного движения идеальной несжимаемой жидкости в замкнутом цилиндрическом сосуде, непроницаемые стенки которого соответствуют контуру поперечного сечения стержня. При этом вектор касательного напряжения соответствует вектору скорости жидкости. На таком качественном уровне можно говорить о *гидромеханической аналогии* между течением жидкости и распределением касательных напряжений при кручении.

Если боковая поверхность стержня с произвольным поперечным сечением свободна от касательных усилий, направленных вдоль его оси, то в любой точке на участках гладкого контура касательное напряжение при кручении стержня вокруг этой оси направлено по касательной к контуру, а в точке контура, являющейся вершиной выступающего угла, равно нулю. Это непосредственно следует из условия парности касательных напряжений и согласуется с гидромеханической аналогией. Строгое обоснование этой аналогии опирается на идентичность уравнений, входящих в математические модели (MM) указанных процессов.

Предположение о том, что поперечные сечения стержня при кручении остаются плоскими, для произвольной формы сечения несправедливо [145]. Искажение первоначально плоского поперечного сечения называют *депланацией*.

Рассмотрим цилиндрический стержень длиной L с произвольным поперечным сечением площадью F в прямоугольной системе коорdunam $Ox_1x_2x_3$ с репером $\{e_i\}$, образованным ортами e_i , i = 1, 2, 3, причем оси Ox_2 и Ox_3 являются главными центральными осями этого сечения. К одному из торцов стержня приложен крутящий момент M_{κ} , а другой торец закреплен так, что он не может поворачиваться относительно продольной оси Ox_1 , но его точки могут перемещаться вдоль этой оси. Угол φ поворота любого поперечного сечения зависит от расстояния x_1 этого сечения от закрепленного торца. При малой деформации примем, что

$$\varphi = \frac{x_1}{L} \varphi_L = \vartheta x_1, \tag{6.18}$$

где ϑ — угол закручивания стержня на единицу длины, а φ_L — угол поворота торца, к которому приложен момент M_{κ} .

Выделим в поперечном сечении с координатой x_1 точку $P(x_1, x_2, x_3)$. В результате деформирования эта точка переместится в новое положение $P'(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$ (на рис. 6.5 показаны точка P и точка P'_1 , являющаяся проекцией точки P' на плоскость сечения с координатой x_1). Если считать угол φ малым, то $O_1P'_1 \approx O_1P = r$, $\cos \varphi \approx 1$ и $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда с учетом (6.18) получим

$$u_{2} = r \cos(\alpha + \varphi) - r \cos \alpha \approx -x_{3}\varphi = -x_{1}x_{3}\vartheta, u_{3} = r \sin(\alpha + \varphi) - r \sin \alpha \approx x_{2}\varphi = x_{1}x_{2}\vartheta.$$

$$(6.19)$$

Полагая, что все поперечные сечения стержня искажаются одинаково, можно принять

$$u_1 = \vartheta \Pi(x_2, x_3), \tag{6.20}$$



Рис. 6.5

где $\Pi(x_2, x_3)$ — пока еще неизвестная **функция депланации**. Теперь следует проверить, удовлетворяют ли перемещения в виде (6.19) и (6.20) трем уравнениям (5.22) равновесия в перемещениях, в данном случае при отсутствии объемных сил и температурных деформаций принимающим вид $\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, i, j = 1, 2, 3, где λ и μ — константы Ламе. Несложно проверить, что эти уравнения удовлетворяются тождественно при i = 2, 3, а при i = 1 — при условии

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_3^2} = 0. \tag{6.21}$$

В соответствии с (6.19), (6.20), законом Гука и соотношениями Коши (3.12) для компонент тензора напряжений находим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \vartheta \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - x_3 \right),$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \vartheta \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} + x_2 \right).$$
(6.22)

От функции депланации П(x₂, x₃) удобнее перейти к **функции каса***тельных напряжений*, определяемой соотношениями

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}.$$
(6.23)

Исключая из (6.21)-(6.23) σ_{12} , σ_{13} и П, получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = -2\mu\vartheta. \tag{6.24}$$

Можно показать [139], что для линейно-упругой сплошной среды (6.24) следует из условий совместности деформаций.

Так как боковая поверхность S_6 стержня свободна от нагрузки, то напряжения (6.22) в любой точке $P \in S_6$ должны удовлетворять силовым граничным условиям (3.47) при $p_i \equiv 0$ в виде $\sigma_{ji}(P)n_j(P) = 0$. Здесь n_j — направляющие косинусы внешней нормали к S_6 , причем $n_1 = dx_1/ds \equiv 0$, $n_2 = dx_3/ds$ и $n_3 = -dx_2/ds$, где s — длина дуги контура Г поперечного сечения, отсчитываемая против хода часовой стрелки (см. рис. 6.5). При i = 2, 3 эти условия удовлетворяются тождественно, а при i = 1 с учетом (6.23) их можно представить в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} = \frac{d\Psi}{ds} = 0, \tag{6.25}$$

т.е. на контуре Γ должно быть $\Psi = \text{const.}$ Для стержней со сплошным (односвязным) поперечным сечением можно принять $\Psi(P) = 0 \ \forall P \in S_6$, а в случае многосвязных сечений на каждом замкнутом контуре функция касательных напряжений должна быть постоянной.

Касательные напряжения в поперечном сечении создают относительно оси Ох₁ момент

$$M_1 = \iint_F (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3) \, dx_2 \, dx_3 = -\iint_F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}x_3\right) dx_2 \, dx_3$$

Для односвязного поперечного сечения интегрированием по частям с учетом нулевого значения функции Ψ на контуре и следующего из условия равновесия отсеченной части стержня равенства $M_1 = M_{\rm K}$ получим

$$M_{\kappa} = 2 \iint_{F} \Psi \, dx \, dy, \tag{6.26}$$

что позволяет выразить ϑ , от которого зависит Ψ , через заданное значение M_{κ} . В силу принципа Сен-Венана на некотором расстоянии от торцов стержня касательные напряжения будут определяться лишь значением момента M_{κ} и практически не будут зависеть от способа задания этого момента на торце при $x_1 = L$ и создания усилий, уравновешивающих его на торце при $x_1 = 0$.

Математической модели, включающей (6.25) и граничное условие $\Psi = 0$ на контуре поперечного сечения стержня, соответствует вариационная форма MM, содержащая функционал

$$J[\Psi] = \frac{1}{2} \int_{F} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 - 4\mu \vartheta \Psi \right) dF,$$

который допустимо рассматривать на непрерывных в области F функциях Ψ , удовлетворяющих граничному условию и имеющих в F кусочно непрерывные производные. На истинном распределении $\Psi^*(x_2, x_3)$ функции Ψ в F этот функционал достигает минимума. Альтернативным по отношению к нему функционалом, достигающим на истинном распределении максимума, будет

$$I[\Psi] = -\frac{1}{2} \int_{F} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right) dF.$$

Его допустимо рассматривать также на непрерывных в области F функциях Ψ , имеющих в F кусочно непрерывные производные и удовлетворяющих (6.26), но не обязательно удовлетворяющих граничному условию. Функционалы $J[\Psi]$ и $I[\Psi]$ составляют двойственную вариационную форму MM цилиндрического стержня при кручении.

Сопоставим ММ кручения цилиндрического стержня с ММ установившегося плоскопараллельного вращательного движения идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде, поперечное сечение которого совпадает с поперечным сечением стержня. В случае движения жидкости параллельно координатной плоскости x₂Ox₃, используя соотношения

$$v_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \quad v_3 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2},$$
 (6.27)

введем скалярную функцию тока $\psi_1(x_2, x_3)$ (здесь v_2 и v_3 — проекции вектора скорости жидкости на оси Ox_2 и Ox_3 соответственно). Тогда для такого движения уравнение неразрывности (3.33) в виде $\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$ удовлетворяется тождественно, а для вращательного движения частиц жидкости с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)$ относительно оси Ox_1 , используя (6.27), получаем уравнение Пуассона $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} = -2\omega_1$, идентичное (6.24) для функции Ψ . На непроницаемых стенках сосуда нормальная составляющая скорости равна нулю, т.е. $d\psi_1/ds = 0$, что идентично граничному условию (6.25). Таким образом, MM совпадают с точностью до обозначений, что обосновывает гидромеханическую аналогию. Линии тока $\psi_1 = \text{const}$, в каждой точке которой вектор скорости жидкости направлен по касательной к этой линии, соответствует при кручении **траектория касательных напряжений** $\Psi = \text{const}$. К этой траектории касателен вектор $\tau = \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3$. Из (П1.18) и (П1.25) для циркуляции вектора $v = v_2 e_2 + v_3 e_3$ по произвольному плоскому замкнутому контуру Γ' при $\omega_1 = \text{const}$ следует

$$\int_{\Gamma'} v_i \, dx_i = \int_{F'} \boldsymbol{e}_1 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, dF = \int_{F'} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dF = 2\omega_1 F',$$

где F' — площадь области, охватываемая контуром Г'. Вместе с тем, интегрируя (6.24) по области F', ограниченной траекторией касательных напряжений $\Psi = \text{const}$ в виде контура Г', в соответствии с *meopeмой Остроградского* — Гаусса и (6.23) получаем

$$\int_{F'} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) dF' = \int_{\Gamma'} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} n_i ds' = -\int_{\Gamma'} \tau_i dx_i = -2\mu \vartheta F', \quad (6.28)$$

т.е. циркуляция вектора τ соответствует циркуляции вектора v.

Помимо гидродинамической аналогии полезно иметь в виду так называемую мембранную (или пленочную) аналогию [139, 145]. Равновесие тонкой пластинки, не имеющей жесткости при изгибе и называемой мембраной, описывается уравнением $N(1/R_1 + 1/R_2) =$ = -p, где N — равномерное натяжение на единицу длины контура мембраны; R_1 и R_2 — радиусы кривизны ее деформированной срединной поверхности под действием давления p. Перемещение точек этой поверхности в направлении нормали к ней в недеформированном состоянии называют прогибом мембраны. Если при малых прогибах $w(x_2, x_3)$ принять $1/R_1 \approx \partial^2 w/\partial x_2^2$ и $1/R_2 \approx \partial^2 w/\partial x_3^2$, то получим уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = -\frac{p}{N},\tag{6.29}$$

идентичное (6.24) для функции Ψ . При закреплении мембраны по плоскому контуру, подобному контуру односвязного поперечного сечения стержня, граничное условие w = 0 на этом контуре будет идентично граничному условию $\Psi = 0$. Линии равных прогибов на поверхности мембраны будут соответствовать траекториям касательных напряжений, а объем, ограниченный срединной поверхностью мембраны и плоскостью ее контура, будет пропорционален крутящему моменту $M_{\rm k}$.

Гидромеханическая и мембранная аналогии позволяют получить на качественном уровне представление об особенностях распределения касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении стержня, нагруженного крутящим моментом. В отличие от стержня с круглым поперечным сечением, когда наибольшие касательные напряжения возникают в наиболее удаленных от оси стержня точках на контуре сечения, в данном случае в наиболее удаленных угловых точках касательные напряжения равны нулю, а наибольших значений достигают в серединах длинных сторон контура. Действительно, скорость вращательного движения жидкости вдоль длинной стороны контура будет больше, чем вдоль короткой, а в углах равна нулю. В мембранной аналогии значение касательного напряжения пропорционально модулю градиента функции w прогиба мембраны. В углах этот модуль равен нулю, а наибольшего значения достигает в серединах длинных сторон контура. Строгое решение задачи о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением [139] подтверждает эти выводы. Такое решение позволяет найти функцию депланации в виде [97]

$$\Pi(x_2, x_3) = x_2 x_3 - \frac{8b_2^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi x_3}{b_2}}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi b_3}{2b_2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x_2}{b_2},$$

где b_2 и b_3 — длины сторон контура вдоль осей Ox_2 и Ox_3 соответственно. На рис. 6.6, а изолиниями перемещения $u_1 = \vartheta \Pi$ изображено отклонение квадратного поперечного сечения ($b_2 = b_3$) от плоского (сплошные линии соответствуют отклонениям от плоскости в одну сторону вдоль продольной оси Ox_1 , а штриховые — в противоположную). Вдоль осей симметрии сечения $u_1 = 0$. На рис. 6.6, б и в представлены изолинии этого перемещения при $b_2/b_3 < 1,4513$ и $b_2/b_3 \ge 1,4513$ соответственно [97].





Рис. 6.6

Пусть в отличие от рассмотренной выше круглой тонкостенной трубки прямолинейный тонкостенный стержень имеет поперечное сечение, ограниченное двумя гладкими замкнутыми кривыми, одна из которых вложена в другую (рис. 6.7), причем толщина h(s) стенки в общем случае является функцией длины з дуги средней линии сечения, отсчитываемой от некоторой выбранной точки. Условия закрепления и нагружения примем такими же, как и в случае тонкостенной трубки, но, полагая касательные напряжения $\tau(s)$ неизменными по толщине стенки, теперь необходимо учитывать их зависимость от s. Следуя гидромеханической аналогии, можно предположить в силу постоянства расхода несжимаемой жидкости в замкнутом канале, соответствующем стенке, что $\tau(s)h(s) = \text{const.}$ Действительно, из рассмотрения элемента АВСД, вырезанного из стержня (см. рис. 6.7), следует, что в силу парности касательных напряжений они равны $\tau = \tau(s)$ на гранях ABB'A', ADD'A' is τ_1 ha rpahax BCC'B', CDD'C'. Ha rpahi ABB'A'действует сила dF = au(s)h(s)dx, а на грань CDD'C' — сила $dF_1 =$ $= au(s)h(s)\,dx+rac{\partial(au(s)h(s)\,dx)}{\partial s}\,ds.$ Проектируя эти силы на продольную ось стержня, из условия равновесия элемента ABCD получаем $\frac{d(F_1 - F)}{dr} =$ $=\frac{d(\tau(s)h(s))}{ds}=0, \ \text{t. e. } \tau(s)h(s)=\text{const}=C_0.$



Рис. 6.7

Для установления связи $\tau(s)$ с действующим на тонкостенный стержень крутящим моментом M_{κ} представим поперечное сечение в виде контура Γ , соответствующего средней линии стенки стержня (рис. 6.8). Сила $dF = \tau(s)h(s) ds = C_0 ds$, приложенная в точке P_s и соответствующая элементу дуги ds, создает относительно произвольной точки Oмомент $dM = C_0 r(s) ds$, где r(s) — плечо этой силы, равное длине перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к средней линии в точке P_s . Но r(s) ds есть удвоенная площадь заштрихованного



Рис. 6.8

на рис. 6.8 треугольника с основанием ds и вершиной в точке O. Обходя весь контур средней линии, находим $M = 2C_0F_0$, где F_0 — площадь, ограниченная этим контуром. Отсюда с учетом равенства $M = M_{\rm K}$ получаем

$$\tau(s) = \frac{M_{\rm K}}{2h(s)\,F_0}.\tag{6.30}$$

Для вычисления угла φ_L поворота сечения, в котором приложен крутящий момент M_{κ} , при линейной связи между M_{κ} и φ_L приравняем работу $M_{\kappa}\varphi_L/2$ к накопленной в стержне потенциальной энергии деформации. Для материала, подчиняющегося закону Гука, плотность этой энергии при чистом сдвиге составляет $\tau^2/(2\mu)$, а полная энергия с учетом (6.30) будет равна

$$L\int\limits_{\Gamma}rac{ au^2}{2\mu}\,ds=rac{M_{\kappa}^2L}{8\mu F_0^2}\int\limits_{\Gamma}rac{ds}{h(s)},$$

Таким образом,

$$\varphi_L = \frac{M_{\kappa}L}{4\mu F_0^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)}.$$

В случае неупругого поведения материала стержня сохраняет силу (6.30), но энергетический подход для нахождения φ_L требует уточнения.

Пусть крутящим моментом $M_{\rm k}$ нагружена полоса длиной L, толщиной h и шириной b (рис. 6.9, a), причем $h \ll b$. Такую полосу можно рассматривать как тонкостенный стержень, но с незамкнутым профилем поперечного сечения. В соответствии с мембранной аналогией можно считать, что в плоскости $x_3 = 0$ касательные напряжения равны нулю, а по толщине полосы они распределены линейно, т. е. $\tau(x_3) = 2\tau_{\rm max}x_3/h$, где $\tau_{\rm max}$ — наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении полосы при $x_3 = h/2$, поскольку между ее близкими сторонами мембрана будет прогибаться практически по параболе (за исключением зон около углов).


Качественная картина траекторий касательных напряжений в поперечном сечении полосы с учетом гидромеханической аналогии показана на рис. 6.9, б. Исходя из этой картины незамкнутый профиль полосы можно условно представить как замкнутый тонкостенный толщиной h/2 с разрезом по плоскости $x_3 = 0$ с нулевыми касательными напряжениями. Выделяя в таком замкнутом профиле тонкостенное кольцо толщиной dx_3 и площадью $F(x_3) = 2bx_3$ и применяя (6.30), запишем вклад этого кольца

$$dM(x_3) = 2F(x_3)\tau(x_3)\,dx_3 = 8bx_3\tau_{\max}\frac{x_3}{h}\,dx_3 = 8\frac{b}{h}\tau_{\max}x_3^2\,dx_3$$

в уравновешивание приложенного крутящего момента. Тогда после интегрирования, положив $M = M_{\kappa}$, получим

$$M_{\kappa} = 8 \frac{b\tau_{\max}}{h} \int_{0}^{h/2} x_{3}^{2} dx_{3} = \frac{bh^{2}\tau_{\max}}{3}.$$
 (6.31)

Такой же результат следует из решения задачи о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением, если $h/b \rightarrow 0$ [139].

Для установления связи между $M_{\rm k}$ и углом $\vartheta = \varphi_L/L$ закручивания полосы на единицу ее длины используем (как и выне) энергетический подход, приравняв работу $M_{\rm k}\varphi_L/2$ к запасенной в полосе потенциальной энергии деформации

$$L\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau^2(x_3)}{2\mu} b \, dx_3 = \frac{4L\tau_{\max}^2 b}{\mu h^2} \int_{0}^{h/2} x_3^2 \, dy = \frac{\tau_{\max}^2 Lbh}{6\mu}$$

В итоге с учетом (6.31) находим

$$\vartheta = 3\frac{M_{\kappa}}{\mu b h^3} = \frac{\tau_{\max}}{\mu h}.$$
(6.32)

Выражение $\mu bh^3/3$ характеризует жесткость полосы при кручении.

Рассмотренный подход и (6.31), (6.32) в первом приближении справедливы для прямолинейного тонкостенного стержня с произвольным незамкнутым профилем поперечного сечения, если этот профиль разбить на n участков постоянной толщиной h_i и длиной b_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда суммарная жесткость при кручении будет равна сумме жесткостей отдельных участков и вместо (6.32) получим

$$\vartheta = \frac{3M_{\kappa}}{\mu \sum_{i=1}^{n} b_i h_i^3}.$$
(6.33)

Из (6.31)-(6.33) следует, что наибольшее касательное напряжение на *i*-м участке будет равно $\tau_{\max,i} = \vartheta \mu h_i$.

Если материал стержня считать идеальным упругопластичным, то при весьма больших углах закручивания касательные напряжения практически по всей площади поперечного сечения будут равны пределу текучести $\tau_{\rm T}$, но их направления будут различными. Для вычисления предельного значения крутящего момента в этом случае можно применить (6.26), предварительно найдя распределение по сечению функции Ψ .

Для стержня с односвязным поперечным сечением рассмотрим две близкие траектории Γ и Γ' касательных напряжений, являющиеся одновременно изолиниями функции напряжений. Если вырезать из стержня объем, заключенный между цилиндрическими поверхностями с направляющими Γ и Γ' , то получим тонкостенный стержень с поперечным сечением замкнутого профиля. Тогда из условия $\tau_{\rm T} \Delta h = {\rm const}$, справедливого для такого стержня, следует, что расстояние Δh между этими траекториями должно быть постоянным. Это означает, что изолинии $\Psi = {\rm const}$ будут эквидистантными, причем контуру поперечного сечения будет соответствовать изолиния $\Psi = 0$. Откладывая от контура по направлению внутренней нормали одинаковое расстояние Δh , перейдем к изолинии $\Psi = \tau_{\rm T} h$ и т. д.

Для многоугольного поперечного сечения изолинии также будут многоугольными, причем их вершины будут лежать на биссектрисах углов контура. Например, для прямоугольного поперечного сечения со сторонами b_2 и $b_3 < b_2$ (рис. 6.10) биссектрисы углов и отрезок прямой между точками их пересечения разбивают площадь этого сечения на



Рис. 6.10

четыре части. Таким образом, поверхность, задаваемая функцией Ψ , в данном случае представляет собой четырехскатную «крышу» с «коньком» высотой $\tau_{\rm r} b_3/2$. В соответствии с (6.26) предельное значение крутящего момента $M_{\rm пред} = \frac{\tau_{\rm r} b_3^2}{2} \left(b_2 - \frac{b_3}{3} \right)$ равно удвоенному объему под этой «крышей».

Характерной особенностью многоскатных «крыш», соответствующих функции Ψ для различных форм поперечного сечения стержня, является одинаковость наклона всех скатов, определяемого значением $\tau_{\rm T}$. Это служит основанием для так называемой **песочной аналогии**, поскольку «крыша» совпадает с поверхностью кучи песка, имеющей основание, одинаковое по форме с поперечным сечением стержня.

6.3. Изгиб стержней и балок

Из рассмотренной в 6.1 математической модели (MM) стержня следует, что если в его произвольном поперечном сечении вектор равнодействующей Q перпендикулярен, а вектор момента M лежит в этом сечении, то в данном сечении возникают лишь нормальные напряжения. Такое напряженное состояние называют одноосным в отличие от общего случая сложного напряженного состояния. Если ось $O\tilde{\xi}_1$ направить по касательной к осевой линии стержня, а оси $O\tilde{\xi}_2$ и $O\tilde{\xi}_3$ совместить с главными и центральными осями произвольного сечения, то тензор напряжений будет иметь лишь одну отличную от нуля компоненту σ_{11} , а $Q = Q_1 e_1$ и $M = M_2 e_2 + M_3 e_3$, где Q_1 и M_k , k = 2, 3, - проекции векторов Q и M на соответствующие оси координат; e_i , i = 1, 2, 3, - орты репера системы координат.

В случае $Q_1 = 0$ относительное удлинение оси стержня также равно нулю и говорят о **чистом изгибе** стержня. При этом, если материал стержня подчиняется закону Гука, имеем линейную зависимость изменения напряжения от координат точки сечения (см. 6.1)

$$\sigma_{11}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3) = \frac{M_2 \tilde{\xi}_3}{I_2} + \frac{M_3 \tilde{\xi}_2}{I_3}, \qquad (6.34)$$

где I_k — осевой момент инерции сечения относительно оси $O\tilde{\xi}_k$. Если одно из значений M_k равно нулю, а другое отлично от нуля, то такой изгиб принято называть прямым [145], а в случае $M_k \neq 0$ — косым. Множество точек поперечного сечения стержня, в которых $\sigma_{11} = 0$, называют нейтральной линией. При прямом изгибе изгибающим моментом M_k такая линия совпадает с осью $O\tilde{\xi}_k$, а, согласно (6.34), наибольшее по абсолютному значению напряжение $|\sigma_{11}^{(k)}|_{\max} = M_k/W_{\tilde{\xi}_k}$, где $W_{\tilde{\xi}_k} = |\tilde{\xi}_j|_{\max}/I_k \ (j \neq k)$ — момент сопротивления сечения при изгибе моментом M_k , $|\tilde{\xi}_j|_{\max}$ — расстояние наиболее удаленной от оси $O\tilde{\xi}_k$ точки поперечного сечения стержня. При косом изгибе нейтральная линия совпадает с направлением вектора M лишь при условии $I_2 =$ $= I_3$ (например, для круглого, кольцевого или квадратного поперечных сечений), а значение $|\sigma_{11}|_{\max}$ соответствует точке сечения, наиболее удаленной от нейтральной линии.

Если в поперечном сечении стержня действие внешней нагрузки приводит к возникновению лишь равнодействующей $P = Pe_1$, приложенной в точке с координатами $\tilde{\xi}_2^*$, $\tilde{\xi}_3^*$, не совпадающей с центром тяжести сечения, то такой изгиб носит название внецентренного растяжения (или сжатия) стержня. Тогда $Q_1 = P$, $M_2 = P\tilde{\xi}_3^*$ и $M_3 = P\tilde{\xi}_2^*$, а (6.34) примет вид

$$\sigma_{11}(\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3) = P\left(\frac{1}{F} + \frac{\tilde{\xi}_3^* \tilde{\xi}_3}{I_2} + \frac{\tilde{\xi}_2^* \tilde{\xi}_2}{I_3}\right),\tag{6.35}$$

где F — площадь поперечного сечения. В этом случае из уравнения $1/F + \tilde{\xi}_3^* \tilde{\xi}_3/I_2 + \tilde{\xi}_2^* \tilde{\xi}_2/I_3 = 0$ нейтральной линии следует, что ее расстояние [50] от центра тяжести сечения $r = (1/F)/\sqrt{(\tilde{\xi}_3^*/I_2)^2 + (\tilde{\xi}_2^*/I_3)^2}$ и увеличивается по мере приближения точки приложения силы P к этому центру, т.е. нейтральная линия может как пересекать поперечное сечение, так и находиться за его пределами [145], причем в последнем случае напряжения во всех точках сечения будут одного знака. При $\tilde{\xi}_2^* = \tilde{\xi}_3^* = 0$ напряжения в сечении распределены равномерно, что соответствует однородному растажению (или сжатию) стержня.

При построении MM стержня в 6.1 предполагалась малость размеров его поперечного сечения по сравнению с радиусом кривизны его осевой линии. Это допущение не является обязательным при построении MM чистого изгиба стержня в рамках *гипотезы Бернулли*, равносильной представлению изгибаемого стержня в виде пучка волокон, каждое из которых может растягиваться или сжиматься напряжением σ_{11} . При построении такой модифицированной MM обычно говорят об изгибе бруса большой кривизны [145]. Пусть осевая линия криволинейного стержня является плоской кривой, лежащей в плоскости $\tilde{\xi}_1 O \tilde{\xi}_2$, и в некотором его поперечном сечении до изгиба имеет кривизну κ_3° . Пока еще неизвестные значения кривизны нейтрального волокна, не испытывающего при изгибе стержня относительного удлинения, до изгиба стержня обозначим κ_0 , а после изгиба моментом $M_3 - \kappa_3$. Тогда относительное удлинение волокна с координатой $\tilde{\xi}_2$ будет равно

$$\varepsilon_{11} = \frac{(\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^\circ) \Delta \kappa}{1 + (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^\circ) \kappa_0},\tag{6.36}$$

где $\Delta \tilde{\xi}_2 = 1/\kappa_3^\circ - 1/\kappa_0$ и $\Delta \kappa = \kappa_3 - \kappa_0$.

Строго говоря, при изгибе форма и размеры поперечного сечения изменяются, однако эти изменения существенны для тонкостенного профиля сечения, а для сплошного сечения ими можно пренебречь [145]. Поэтому значение $\tilde{\xi}_2$ координаты волокна при изгибе допустимо считать неизменным. Для этого волокна напряжение $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$, где E модуль продольной упругости материала стержня. Тогда с учетом (6.36) запишем

$$\begin{split} Q_1 &= \int_F \sigma_{11} dF = E \Delta \kappa \int_F \frac{\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}}{1 + (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}) \kappa_0} dF = 0, \\ M_3 &= \int_F (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}) \sigma_{11} dF = E \Delta \kappa \int_F \frac{(\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ})^2}{1 + (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}) \kappa_0} dF = \\ &= E \frac{\Delta \kappa}{\kappa_0} \int_F (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}) dF - E \frac{\Delta \kappa}{\kappa_0} \int_F \frac{\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}}{1 + (\tilde{\xi}_2 + \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}) \kappa_0} dF = E \frac{\Delta \kappa}{\kappa_0} F \Delta \tilde{\xi}_2^{\circ}, \end{split}$$

поскольку в предпоследней части второго равенства первый интеграл определяет *статический момент сечения* относительно его нейтральной линии. Тогда с использованием (6.36) получим

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = \frac{M_3}{F} \frac{(1+\tilde{\xi}_2/\Delta\tilde{\xi}_2^\circ)\kappa_0}{1+(\tilde{\xi}_2+\Delta\tilde{\xi}_2^\circ)\kappa_0},\tag{6.37}$$

а условие $Q_1 = 0$ представим в виде

$$\int_{F} \sigma_{11} dF = \int_{F} \frac{1/\kappa_{3}^{\circ} - 1/\kappa_{0} + \tilde{\xi}_{2}}{1/\kappa_{3}^{\circ} + \tilde{\xi}_{2}} dF = F - \frac{1}{\kappa_{0}} \int_{F} \frac{dF}{1/\kappa_{3}^{\circ} + \tilde{\xi}_{2}} = 0.$$

Отсюда нетрудно найти κ_0 , затем — $\Delta \tilde{\xi}_2$ и в итоге из (6.37) установить нелинейную зависимость σ_{11} от $\tilde{\xi}_2$.

Пусть при чистом изгибе моментом M_3 криволинейного стержня с осевой линией, лежащей в плоскости $\tilde{\xi}_1 O \tilde{\xi}_2$, и симметричным относительно главной оси $O \tilde{\xi}_2$ поперечным сечением в некотором сечении стержня площадью F изменение кривизны составило $\Delta \kappa_3$. Если при *пластическом деформировании* материала стержня связь между напряжением σ и деформацией ε определяет зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$, то в случае справедливости гипотезы Бернулли и малости размеров сечения по сравнению с радиусом кривизны имеем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{\circ} + \tilde{\xi}_2 \Delta \kappa_3$, где ε_{11}° относительное удлинение осевой линии, и

$$\int_{F} \sigma_{11} dF = \int_{F} f(\varepsilon_{11}) dF = 0, \quad M_3 = \int_{F} \widetilde{\xi}_2 \sigma_{11} dF = \int_{F} \widetilde{\xi}_2 f(\varepsilon_{11}) dF. \quad (6.38)$$

Первое равенство (6.38) позволяет выразить ε_{11}° через $\Delta \kappa_3$, а второе — установить связь $\Delta \kappa_3$ с M_3 и затем найти распределение напряжений σ_{11} в поперечном сечении.

Если при пластическом деформировании материала стержня напряжение по абсолютному значению не превышает σ^* (например, $\sigma^* = \sigma_T$ в случае, когда материал стержня соответствует иdeaльной упругопластической среде с пределом текучести σ_T), то несложно найти предельное значение M_3^* изгибающего момента в сечении. При этом предельное состояние, которое реально не достигается, соответствует наличию в сечении двух областей с напряжениями разных знаков, но по абсолютному значению равных σ^* . Эти области разделяет нейтральная линия, причем площади этих областей в силу первого равенства (6.38) одинаковы и равны F/2. Тогда из второго равенства (6.38) следует $M^* = \sigma^* Sl/2$, где l — расстояние между центрами тяжести площадей упомянутых областей.

Если поперечное сечение стержня симметрично и относительно оси $O\tilde{\xi}_3$, а функция $f(\varepsilon)$ нечетная, т.е. материал одинаково деформируется при растяжении и сжатии, то $\varepsilon_{11}^\circ = 0$ и

$$M_3 = \int_F \widetilde{\xi}_2 f(\varepsilon_{11}) dF = 2 \int_0^{h/2} \widetilde{\xi}_2 f(\widetilde{\xi}_2 \Delta \kappa_3) b(\widetilde{\xi}_2) d\widetilde{\xi}_2, \qquad (6.39)$$

где h — высота сечения в направлении оси $O\tilde{\xi}_2$, а переменная ширина $b(\tilde{\xi}_2)$ сечения является четной функцией координаты $\tilde{\xi}_2$. Например, для стержня из идеального упругопластичного материала в случае

прямоугольного поперечного сечения (b = const) из (6.39) следует $M_3 = \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{T}}W_{\tilde{\xi}_3}(3-\varepsilon_{\mathrm{T}}^2/\varepsilon_{\mathrm{max}}^2)$, где $W_{\tilde{\xi}_3} = bh^2/6$ — момент сопротивления изгибу стержня с прямоугольным сечением; $\varepsilon_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}}/E$, а $\varepsilon_{\mathrm{max}} = \frac{h}{2}\Delta\kappa_3$. При неограниченном возрастании $\Delta\kappa_3$ изгибающий момент стремится к предельному значению $M_{\mathrm{пред}} = \sigma_{\mathrm{T}}bh^2/4$, что в 1,5 раза больше значения $M_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}}bh^2/6$ момента M_3 при условии $\varepsilon_{\mathrm{T}} = \varepsilon_{\mathrm{max}}$, соответствующем началу пластического деформирования.

При чистом изгибе моментом M цилиндрического прямолинейного стержня, осевая линия которого в недеформированном состоянии совпадает с координатной осью Ox_1 , а материал подчиняется закону Гука, из (6.7) следует, что кривизна

$$\kappa_3 = \frac{M}{EI_3} \tag{6.40}$$

изогнутой осевой линии постоянна, т.е. эта линия будет дугой окружности радиусом $r = 1/\kappa_3$. Если перемещение $w(x_1)$ точек этой линии относительно ее исходного положения, называемое **прогибом стержня**, отсчитывать в направлении координатной оси Ox_2 , то торец стержня при $x_1 = L$, к которому приложен момент M, будет иметь прогиб

$$w_L = \frac{1 - \cos \kappa_3 L}{\kappa_3},\tag{6.41}$$

где *L* — длина стержня.

При малых прогибах осевой линии по сравнению с длиной стержня угол ϑ_3 поворота поперечного сечения стержня также мал и $dw/dx_1 =$ = tg $\vartheta_3 \approx \vartheta_3$. Тогда, пренебрегая величиной ϑ_3^2 , малой по сравнению с единицей, получаем

$$\kappa_3 = \frac{d^2 w}{dx_1^2} \left(1 + \left(\frac{dw}{dx_1}\right)^2 \right)^{-3/2} \approx \frac{d^2 w}{dx_1^2}$$
(6.42)

и с учетом (6.40) после интегрирования находим

$$w(x_1) = \frac{Mx_1^2}{2EI_3} + C_1^{\circ}x_1 + C_0^{\circ}.$$

Если торец стержня при x = 0 закреплен жестко, т.е. помимо условия w(0) = 0 имеем $\frac{dw}{dx_1}\Big|_{x_1=0} = 0$, то $C^\circ = C_1^\circ = 0$ и при $x_1 = L$

$$w(L) = \frac{ML^2}{2EI_3}.$$
 (6.43)

Ограничиваясь в разложении $\cos \kappa_3 L$ в ряд первыми тремя членами, вместо (6.41) с учетом (6.40) и (6.43) получаем

$$\frac{w_L}{L} \approx \frac{ML}{2EI_3} - \frac{1}{3} \frac{(ML)^3}{(2EI_3)^3} = \frac{w(L)}{L} - \frac{1}{3} \left(\frac{w(0)}{L}\right)^3,$$

причем в данном случае $w_L < w(L)$. Поскольку при разложении косинуса ряд знакопеременный, относительная погрешность $|w_L - w(L)|/w(L)$ не превышает $w^2(L)/(3L^2)$. Если ограничиться погрешностью в 3%, то (6.43) обеспечивает такую погрешность при $w(L)/L \leq 0.3$. Столь значительные прогибы возможны лишь у сравнительно тонких (по сравнению с длиной) стержней.

При чистом изгибе стержня гипотеза Бернулли справедлива для любого поперечного сечения при условии, что изгибающий момент на торцах стержня создается распределением нормальных напряжений в виде (6.34). При нарушении этого условия, согласно *принципу Сен-Венана*, она справедлива при некотором удалении от торцов. Изгиб стержня под действием сил, перпендикулярных его осевой линии, называют **поперечным**. При таком изгибе гипотеза Бернулли является лишь некоторым приближением. Рассмотрим степеь приближения этой гипотезы на примере поперечного изгиба *прямолинейного стерж*ня, обычно называемого в таком случае **балкой**.

Пусть торец балки при $x_1 = 0$ закреплен жестко, а к торцу при $x_1 = L$ приложена поперечная сила P (рис. 6.11). Такую балку принято называть консольной. В ее поперечном сечении с координатой x_1 возникнет изгибающий момент $M_3(x_1) =$ $= P(L - x_1)$. Тогда в рамках гипотезы Берл



Рис. 6.11

 $= P(L-x_1).$ Тогда в рамках гипотезы Бернулли из (6.34) пр
и $M_2=0$ следует

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{P(L - x_1)x_2}{I_3},\tag{6.44}$$

а с учетом (6.40) и (6.42) уравнение, описывающее перемещение $w(x_1)$ точек осевой линии балки и называемое в данном случае прогибом балки, примет вид $\frac{d^2w}{dx_1^2} = \frac{P(L-x_1)}{EI_3}$. Интегрируя это уравнение и учитывая условия закрепления w(0) = 0 и $\frac{dw}{dx_1}\Big|_{x_1=0} = 0$, находим

$$w(x_1) = \frac{PLx^2}{2EI_3} - \frac{Px^3}{6EI_3}.$$
(6.45)

Проведем сравнение полученных результатов с точным решением задачи об изгибе балки в виде полосы толщиной b, длиной L и высотой h (рис. 6.12). Полоса закреплена одним своим краем (при $x_1 = 0$),



Рис. 6.12

а на другом (при $x_1 = L$) нагружена распределенными касательными усилиями, которые дают результирующую силу P, изгибающую полосу в плоскости x_1Ox_2 . При достаточно малой толщине полосы (при $b/h \ll 1$ и $b/L \ll 1$) ее напряженное состояние можно считать плоским, описываемым уравнениями равновессия $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$ и $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$, где σ_{mn} , $m, n = 1, 2, - \kappa$ компоненты симметричного тензора напряжений. Представление этих компонент через функцию \tilde{F} напряжений соотношениями

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{6.46}$$

позволяет удовлетворить уравнения равновесия тождественно. При этом \tilde{F} удовлетворяет бигармоническому уравнению вида (5.38): $\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$. Этому уравнению и граничным условиям для полосы удовлетворяет решение в виде многочлена $\tilde{F} = (L - x_1)x_2(c_2 + c_4x_2^2)$. Действительно, согласно (6.46) имеем $\sigma_{11} = 6c_4(L - x_1)x_2$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = c_2 + 3c_4x_2^2$. Края полосы при $x_2 = \pm h/2$ свободны от напряжений, т. е. $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Отсюда следует $c_2 = -3c_4h^2/4$. При $x_1 = L$ результирующая касательных усилий, положительное направление которых противоположно направлению оси Ox_2 , равна

$$-b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12}\,dx_2 = 3c_4b\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right)dx_1 = \frac{c_4bh^3}{2} \stackrel{\sim}{=} P.$$

Отсюда находим $c_4 = \frac{2P}{bh^3}$ и напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{12P(L-x_1)x_2}{bh^3}, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -\frac{3P}{2bh} \left(1 - 4\frac{x_2^2}{h^2}\right). \tag{6.47}$$

В сечении с координатой x_1 сила P создает изгибающий момент $M_3(x_1) = P(L-x_1)$. Если учесть, что для полосы $bh^3/12 = I_3$, то первая формула (6.47) полностью согласуется с (6.44).

Наибольшее по абсолютному значению касательное напряжение возникает при $x_2 = 0$ и равно $\tau_{\max} = \sigma_{12}(x_1, 0) = 3P/(2bh)$, а нормальное напряжение — при $x_1 = 0$ и $x_2 = h/2$ и равно $\sigma_{\max} = PL/W_3$. Отношение $\tau_{\max}/\sigma_{\max} = h/(4L)$ уменьшается по мере увеличения L по сравнению с h. Отметим, что это справедливо для любой балки с большим отношением ее длины к высоте ее сечения. Поэтому для таких балок касательные напряжения обычно не учитывают.

Перейдем непосредственно к оценке степени приближения гипотезы Бернулли. Для этого найдем зависимости от координат x_1 и x_2 проекций u_1 и u_2 вектора пермещения на оси Ox_1 и Ox_2 соответственно. Из (6.47), соотношений Коши (3.12) и обобщенного закона Гука в виде (5.35) при $\varepsilon_T = 0$ следует

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = P \frac{L - x_1}{EI_3} x_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu P \frac{L - x_1}{EI_3} x_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -P \frac{h^2 - 4x_2^2}{8\mu I_3}, \quad (6.48)$$

где ν — коэффициент Пуассона, а μ — модуль сдвига материала полосы.

После интегрирования первых двух соотношений (6.48) находим

$$u_1 = -P \frac{(L-x_1)^2}{2EI_3} x_2 + g_1(x_2), \quad u_2 = -\nu P \frac{L-x_1}{2EI_3} x_2^2 + g_2(x_1)$$
(6.49)

и, подставляя в последнее равенство (6.48), получаем

$$-\frac{P(L-x_1)^2}{2EI_3} + \frac{dg_2}{dx_1} + \frac{\nu P x_2^2}{2EI_3} - \frac{P x_2^2}{2\mu I_3} + \frac{dg_1}{dx_2} = -\frac{P h^2}{8\mu I_3}.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{P(L-x_1)^2}{2EI_3} + \frac{dg_2}{dx_1} = C_2 = \text{const}, \quad \frac{\nu P x_2^2}{2EI_3} - \frac{P x_2^2}{2\mu I_3} + \frac{dg_1}{dx_2} = C_1 = \text{const}.$$

Из этих равенств путем интегрирования выражаем функции $g_2(x_1)$, $g_1(x_2)$ и после подстановки в (6.49) получаем

$$u_{1} = -\frac{P(L-x_{1})^{2}x_{2}}{2EI_{3}} - \frac{\nu P x_{2}^{3}}{6EI_{3}} + \frac{P x_{2}^{3}}{6\mu I_{3}} + C_{1}x_{2} + C_{3},$$

$$u_{2} = -\frac{\nu P(L-x_{1})x_{2}^{2}}{2EI_{3}} - \frac{P(L-x_{1})^{3}}{6EI_{3}} + C_{2}x_{1} + C_{4}.$$
(6.50)

Для нахождения постоянных C_l $(l = \overline{1, 4})$ в (6.50) используем очевидное равенство $C_1 + C_2 = -Ph^2/(8\mu I_3)$ и три условия закрепления края полосы при $x_1 = 0$, исключающие ее перемещение в плоскости x_1Ox_2 как абсолютно твердого тела. В точке с координатами $x_1 = x_2 = 0$ положим $u_1 = u_2 = 0$ и запретим в этой точке либо поворот элемента оси Ox_1 , т. е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \tag{6.51}$$

либо поворот нормали к элементарной площадке, т.е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \tag{6.52}$$

Тогда $C_3 = 0$ и $C_4 = \frac{PL^3}{6EI_3}$, но для (6.51) $C_1 = \frac{PL^2}{2EI_3} - \frac{Ph^2}{8\mu I_3}$ и $C_2 = -\frac{PL^2}{2EI_3}$, а для (6.52) $C_1 = \frac{PL^2}{2EI_3}$ и $C_2 = -\frac{PL^2}{2EI_3} - \frac{Ph^2}{8\mu I_3}$. Искажение края полосы (при $x_1 = 0$) после ее нагружения показано на рис. 6.13, а и б. В первом случае действие касательного напряжения $\tau = \sigma_{12} = \frac{3P}{2bh}$ в точке Aприводит к повороту элементарной площадки на угол $\gamma_{12} = \frac{3P}{2\mu bh}$, а углы полосы, где касательные напряжения равны нулю, остаются прямыми. Во втором случае на тот же угол, но по ходу часовой стрелки, поворачивается ось полосы.



Аналогичные формы принимает след поперечного сечения полосы при любом значении $x_1 \in (0, L)$. Нелинейная зависимость u_1 от x_2 в (6.50) означает, что плоское до деформирования поперечное сечение полосы после деформирования уже не остается плоским. Если край полосы при x = 0 жестко закреплен во всех своих точках, то и после ее нагружения он останется плоским. Тогда в силу принципа Сен-Венана полученные результаты будут применимы лишь к поперечным сечениям полосы на некотором удалении от этого края.

Из (6.50) с учетом найденных выражений для C_m получим, что при выполнении (6.51) прогиб осевой линии полосы $w_1(x_1) = u_2(x_1, 0)$ полностью совпадает с (6.45), а прогиб $w_2(x_1) = w_1(x_1) - \frac{3Px_1}{2\mu bh}$ отличается на величину, пропорциональную γ_{12} . При $x_1 = L$ это отличие составляет $\gamma_{12}L$ и по сравнению с $w_1(L)$ имеет порядок h^2/L^2 , что в большинстве практически важных случаев несущественно.

Из приведенных выше соотношений ясно, что для нахождения напряжений в балке и ее прогиба необходимо располагать зависимостью $M_3(x_1)$ изгибающего момента от продольной координаты x_1 . Получение этой зависимости обычно (кроме некоторых элементарных случаев) требует предварительного определения реакций в местах закрепления балки. При шарнирном закреплении конца балки в идеальном случае принимают, что на этом конце изгибающий момент равен нулю и может возникнуть лишь реакция в виде поперечно направленной силы. При жестком закреплении (защемлении) конца балки в общем случае возникают изгибающий момент и поперечная сила.

Рассмотренные ММ кручения и изгиба стержня лежат в основе построения ММ плоских и пространственных *стержневых систем*, представляющих собой совокупность соединенных между собой стержней, нагруженных сосредоточенными и распределенными силами и моментами. Если для определения реакций в местах закрепления стержневой системы достаточно уравнений ее статического равновесия, то систему называют *статически определимой*, в противном случае, когда для определения реакций требуется привлечение дополнительных условий, накладываемых на перемещения и углы поворота поперечных сечений стержней [145], систему называют *статически неопределимой*.

6.4. Математические модели оболочки

Оболочку можно представить как тело, образованное множеством отрезков длиной h, перпендикулярных некоторой поверхности. Если точки пересечения отрезков с этой поверхностью делят их пополам, то она будет срединной поверхностью оболочки. При h = const говорят об оболочке постоянной толщины.

В неподвижной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с peneром $\{e_k^{\circ}\}$ (k = 1, 2, 3) при помощи радиус-вектора $x^{\circ}(\beta_1, \beta_2)$ зададим гладкую срединную поверхность S оболочки с координатными линиями β_i , i = 1, 2, являющимися линиями кривизны этой поверхности. Тогда положение любой точки $M \in S$ на этой поверхности будет однозначно определено ортогональными криволинейными координатами β_i , а векторы $x_i^{\circ} = \partial x^{\circ}/\partial \beta_i$ будут параллельны касательным к соответствующим координатным линиям (см. П1.5). С каждой точкой $M \in S$ свяжем репер $\{e_j\}$ (j = 1, 2, 3) с правой тройкой единичных векторов — ортов $e_1 = x_1/H_1^\circ$, $e_2 = x_2/H_2^\circ$ и $e_3 = e_1 \times e_2$, где $H_i^\circ = |x_i^\circ|$. Обозначим через $\kappa_1(M)$ и $\kappa_2(M)$ главные кривизны поверхности S в точке $M \in S$ и примем характерные для оболочек допущения [101]: $\sigma_{33} = 0$ и $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, где σ_{jk} и ε_{jk} — компоненты симметричных тензоров соответственно напряжений и малой деформации в произвольной точке оболочки в системе криволинейных координат β_j , определяемой репером $\{e_j\}$. Последняя цепочка равенств характеризует гипотезу Кирхгофа — Лява и означает, что прямолинейный элемент оболочки, нормальный к поверхности S, в процессе деформирования оболочки сохраняет свою длину и остается прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности. Это допущение аналогично гипотезе Бернулли, используемой при построении математической модели (MM) стержня (см. 6.1).

Соотношения Коши (3.12) для ненулевых компонент ε_{jk} в криволинейных координатах, согласно (П1.33), (П1.34) и условиям Кодацци, примут вид [112]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial u_{1}}{\partial \beta_{1}} + u_{2} \frac{1}{H_{1}^{\circ} H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} + \kappa_{1} u_{3}}{1 + \kappa_{1} \beta_{3}}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial u_{2}}{\partial \beta_{2}} + u_{1} \frac{1}{H_{1}^{\circ} H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} + \kappa_{2} u_{3}}{1 + \kappa_{2} \beta_{3}}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{\frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial u_{2}}{\partial \beta_{1}} - u_{1} \frac{1}{H_{1}^{\circ} H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}}}{1 + \kappa_{1} \beta_{3}} + \frac{\frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial u_{1}}{\partial \beta_{2}} - u_{2} \frac{1}{H_{1}^{\circ} H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}}}{1 + \kappa_{2} \beta_{3}}, \end{cases}$$

$$(6.53)$$

а для нулевых компонент -

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial \beta_3}, \\ \varepsilon_{13} &= H_1 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \beta_1}, \\ \varepsilon_{23} &= H_2 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \beta_2}, \end{aligned}$$

$$(6.54)$$

где $u_j(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ — проекции вектора перемещения $u = u_j e_j$ на направления ортов e_j ; $H_1 = H_1^{\circ}(1 + \kappa_1\beta_3)$ и $H_2 = H_2^{\circ}(1 + \kappa_2\beta_3)$ — коэффициенты Ламе, выражаемые через производные по β_i координат x_k точки оболочки (см. П1.5). Из (6.54) при $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ интегрированием по β_3 находим

$$u_3 = u_3^{\circ}, \quad u_1 = u_1^{\circ} - \vartheta_1 \beta_3, \quad u_2 = u_2^{\circ} - \vartheta_2 \beta_3,$$
 (6.55)

где $u_j^{\circ} = u_j^{\circ}(\beta_1, \beta_2) = u_j(\beta_1, \beta_2, 0)$ — проекции вектора перемещения $u^{\circ} = u_j^{\circ} e_j$ точки $M \in S$ на направления ортов e_j (проекцию u_3° принято называть прогибом оболочки),

$$\vartheta_1 = \frac{1}{H_1^\circ} \frac{\partial u_3^\circ}{\partial \beta_1} - \kappa_1 u_1^\circ, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{H_2^\circ} \frac{\partial u_3^\circ}{\partial \beta_2} - \kappa_2 u_2^\circ \quad - \tag{6.56}$$

углы поворота (с точностью до малых более высокого порядка) элемента срединной поверхности S вокруг касательных к координатным линиям β_1 и β_2 соответственно, обусловленные ее деформированием.

Подставив (6.55) в (6.53), получим

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1} &= \frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial u_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} + \frac{u_{2}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} + \kappa_{1} u_{3}^{\circ}, \quad \varepsilon_{2} &= \frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial u_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} + \frac{u_{1}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} + \kappa_{2} u_{3}^{\circ}, \\ \Delta \kappa_{1} &= -\frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial \vartheta_{1}}{\partial \beta_{1}} - \frac{\vartheta_{2}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}}, \quad \Delta \kappa_{2} &= -\frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial \vartheta_{2}}{\partial \beta_{2}} - \frac{\vartheta_{1}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}}, \\ \omega_{1} &= \frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial u_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} - \frac{u_{1}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}}, \quad \omega_{2} &= \frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial u_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} - \frac{u_{2}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}}, \\ \varpi_{1} &= -\frac{1}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial \vartheta_{2}}{\partial \beta_{1}} + \frac{\vartheta_{1}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}}, \quad \varpi_{2} &= -\frac{1}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial \vartheta_{1}}{\partial \beta_{2}} + \frac{\vartheta_{2}}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}}. \end{aligned}$$

$$(6.58)$$

Можно показать [112], что при деформировании срединной поверхности ε_i — относительное удлинение в направлении орта e_i , $\Delta \kappa_i$ — изменение значения соответствующей главной кривизны, $\omega_1 + \omega_2 = \gamma_{12}$ — угол сдвига в плоскости ортов e_1 и e_2 , $(\omega_2 - \omega_1)/2 = \vartheta_3$ — угол поворота элемента срединной поверхности вокруг нормали к ней. Величина $\Delta \kappa_{12} = (\varpi_1 + \kappa_1 \omega_2 + \varpi_2 + \kappa_2 \omega_1)/2$ характеризует кручение этой поверхности.

Условия Гаусса и Кодации приводят к трем условиям совместности деформаций срединной поверхности, связывающим шесть величин ε_i , $\Delta \kappa_i$, γ_{12} и $\Delta \kappa_{12}$ [112]:

$$\kappa_{1}\left(\varepsilon_{1}\frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial\beta_{1}}-\frac{\partial(H_{2}^{\circ}\varepsilon_{2})}{\partial\beta_{1}}+\frac{\partial(H_{1}^{\circ}\gamma_{12})}{\partial\beta_{2}}+\frac{\kappa_{2}}{\kappa_{1}}\gamma_{12}\frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial\beta_{2}}\right)+\frac{\partial(H_{2}^{\circ}\Delta\kappa_{2})}{\partial\beta_{1}}-\Delta\kappa_{1}\frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial\beta_{1}}-\frac{\partial(H_{1}^{\circ}\Delta\kappa_{12})}{\partial\beta_{2}}-\Delta\kappa_{12}\frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial\beta_{2}}=0,\quad(6.59)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 \bigg(\varepsilon_2 \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} - \frac{\partial (H_1^{\circ} \varepsilon_1)}{\partial \beta_2} + \frac{\partial (H_2^{\circ} \gamma_{12})}{\partial \beta_1} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \gamma_{12} \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} \bigg) + \\ &+ \frac{\partial (H_1^{\circ} \Delta \kappa_1)}{\partial \beta_2} - \Delta \kappa_2 \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} - \frac{\partial (H_2^{\circ} \Delta \kappa_{12})}{\partial \beta_1} - \Delta \kappa_{12} \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} = 0, \quad (6.60) \\ \kappa_2 \Delta \kappa_1 + \kappa_1 \Delta \kappa_2 - \\ &- \frac{1}{H_1^{\circ} H_2^{\circ}} \bigg(\frac{\partial}{\partial \beta_1} \frac{1}{H_1^{\circ}} \bigg(\varepsilon_1 \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial (H_2^{\circ} \varepsilon_2)}{\partial \beta_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial (H_1^{\circ} \gamma_{12})}{\partial \beta_2} + \frac{\gamma_{12}}{2} \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} \bigg) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta_2} \frac{1}{H_2^{\circ}} \bigg(\varepsilon_2 \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} - \frac{\partial (H_1^{\circ} \varepsilon_1)}{\partial \beta_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial (H_2^{\circ} \gamma_{12})}{\partial \beta_1} + \frac{\gamma_{12}}{2} \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} \bigg) \bigg) = 0. \quad (6.61) \end{aligned}$$

Эти условия записаны в предположении, что деформации срединной поверхности малы, поэтому их влиянием на значения κ_i и H_i° можно пренебречь.

Рассмотрим элемент оболочки постоянной толщины h, занимающий область dV, ограниченную координатными поверхностями $\beta_3 =$



Рис. 6.14

 $=\pm h/2$ и нормальными сечениями срединной поверхности S, касательными к линиям кривизны, проходящим через точки $M, M' \in S$ с криволинейными координатами соответственно $\beta_1^*, \beta_1^* + d\beta_1$ и $\beta_2^*, \beta_2^* + d\beta_2$ (рис. 6.14). Срединная поверхность этого элемента имеет площадь dS = $= H_i^o d\beta_i$ (см. П1.5).

Пусть к этому элементу на поверхности $\beta_3 = h/2$ площадью $dS^+ = H_1^{\circ}(1 + \kappa_1 h/2) d\beta_1 H_2^{\circ}(1 + \kappa_2 h/2) d\beta_2$ приложена нагрузка, определяемая заданным вектором напряжения σ^+ , а на поверхности $\beta_3 = -h/2$ площадью $dS^- = H_1^{\circ}(1 - \kappa_1 h/2) d\beta_1 H_2^{\circ}(1 - \kappa_2 h/2) d\beta_2$ — нагрузка, определяемая заданным вектором напряжения σ^- . Кроме того, на оболочку действуют объемные силы с вектором плотности **b**. Тогда действующие на этот элемент оболочки векторы усилия и момента, отнесенные к единице площади срединной поверхности, будут соответственно равны

$$p = \left(1 + \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \sigma^+ + \left(1 - \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 - \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \sigma^- + \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_1 \beta_3) (1 + \kappa_2 \beta_3) b d\beta_3,$$

$$\boldsymbol{m} = \left(1 + \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \frac{h}{2} \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\sigma}^+ + \left(1 - \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 - \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \frac{h}{2} \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\sigma}^- + \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_1 \beta_3) (1 + \kappa_2 \beta_3) \beta_3 \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{b} d\beta_3.$$

В любом сечении элемента оболочки, перпендикулярном координатной линии β_i , действуют напряжения σ_{ij} , являющиеся проекциями вектора напряжения $\sigma_i = \sigma_{ij}e_j$ на направления ортов e_j . Тогда на единицу длины координатной линии β_m (m = 1, 2, причем здесь и далее $m \neq i$) будут приходиться векторы усилия и момента

$$\boldsymbol{Q}_{i} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_{m}\beta_{3})\boldsymbol{\sigma}_{i}d\beta_{3}, \quad \boldsymbol{M}_{i} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_{m}\beta_{3})\beta_{3}\boldsymbol{e}_{3} \times \boldsymbol{\sigma}_{i}d\beta_{3}.$$

Их можно представить в виде $Q_i = Q_{ij}e_j$, $M_1 = -M_{12}e_1 + M_{11}e_2$ и $M_2 = -M_{22}e_1 + M_{21}e_2$, где

$$Q_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_m \beta_3) \sigma_{ij} d\beta_3, \quad M_{il} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_m \beta_3) \sigma_{il} \beta_3 d\beta_3, \quad l = 1, 2. \quad (6.62)$$

В сечении элемента оболочки, перпендикулярном координатной линии β_i^* , со стороны остальной части оболочки действуют сила $-Q_i H_m^{\circ} d\beta_m$ и момент $-M_i H_m^{\circ} d\beta_m$, а в сечении, перпендикулярном координатной линии $\beta_i^* + d\beta_i$ — сила $Q_i H_m^{\circ} d\beta_m + \frac{\partial Q_i H_m^{\circ}}{\partial \beta_i} d\beta_i d\beta_m$ и момент $M_i H_m^{\circ} d\beta_m + \sum_{i,m} \frac{\partial M_i H_m^{\circ}}{\partial \beta_i} d\beta_i d\beta_m$. Для равновесия элемента оболочки необходимо равенство нулевому вектору **0** главного вектора системы всех действующих на этот элемент сил и главного момента этой системы относительно точки $M \in S$, т. е., пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, получим

$$\begin{split} \left(\frac{\partial(\boldsymbol{Q}_{1}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} + \frac{\partial(\boldsymbol{Q}_{2}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}} + H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}\boldsymbol{p}\right)d\beta_{1}d\beta_{2} &= \mathbf{0},\\ \left(\frac{\partial(\boldsymbol{M}_{1}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} + \frac{\partial(\boldsymbol{M}_{2}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}}\right)d\beta_{1}d\beta_{1} + \\ &+ \left(\boldsymbol{e}_{1}\times\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{e}_{2}\times\boldsymbol{Q}_{2} + \boldsymbol{m}\right)H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}d\beta_{1}d\beta_{1} = \mathbf{0}. \end{split}$$

Отсюда следуют два векторных уравнения равновесия элемента оболочки:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{Q}_{1}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} + \frac{\partial(\boldsymbol{Q}_{2}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}} = -H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}\boldsymbol{p}, \\
\frac{\partial(\boldsymbol{M}_{1}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} + \frac{\partial(\boldsymbol{M}_{2}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}} + (\boldsymbol{e}_{1}\times\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{e}_{2}\times\boldsymbol{Q}_{2})H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ} = -H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}\boldsymbol{m}.$$
(6.63)

От (6.63) несложно перейти к уравнениям движения оболочки путем добавления в правую часть первого уравнения слагаемого $\rho h \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial t^2}$, а в правую часть второго — слагаемого $\frac{\rho h^3}{12} \left(\kappa_1 e_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2} + \kappa_2 e_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2} \right)$, учитывающих влияние сил инерции (здесь ρ — плотность материала оболочки, а t — время).

Подстановка (6.62) в уравнение $Q_{12} - \kappa_2 M_{21} - Q_{21} + \kappa_1 M_{12} = 0$, являющееся проекцией второго уравнения (6.63) на направление орта e_3 , приводит к тождеству, что позволяет ввести обозначение $S_{12} =$ $= Q_{12} - \kappa_2 M_{21} = Q_{21} - \kappa_1 M_{12} = S_{21}$. Если разрешить проекции второго уравнения (6.63) на направления ортов e_1 и e_2 относительно усилий, то получим

$$Q_{13} = \frac{1}{H_1^{\circ}H_2^{\circ}} \left(\frac{\partial (M_{11}H_2^{\circ})}{\partial \beta_1} - M_{22} \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial (M_{21}H_1^{\circ})}{\partial \beta_2} + M_{12} \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} \right) + m_1, \quad (6.64)$$

$$Q_{23} = \frac{1}{H_1^{\circ} H_2^{\circ}} \left(\frac{\partial (M_{22} H_1^{\circ})}{\partial \beta_2} - M_{11} \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial \beta_2} + \frac{\partial (M_{12} H_2^{\circ})}{\partial \beta_1} + M_{21} \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial \beta_1} \right) + m_2, \quad (6.65)$$

где m_i — проекции вектора m на направления этих ортов. Тогда с учетом (6.64), (6.65) проекции первого уравнения (6.63) на направления ортов e_i можно представить в виде

$$\kappa_{1} \left(\frac{\partial (M_{11}H_{2}^{\circ})}{\partial \beta_{1}} - M_{22} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} + 2 \frac{\partial (H_{12}H_{1}^{\circ})}{\partial \beta_{2}} + 2 \frac{\kappa_{2}}{\kappa_{1}} H_{12} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} \right) + \\ + \frac{\partial (Q_{11}H_{2}^{\circ})}{\partial \beta_{1}} - Q_{22} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} + \frac{\partial (S_{12}H_{1}^{\circ})}{\partial \beta_{2}} + S_{12} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} = \\ = -H_{1}^{\circ} H_{2}^{\circ} (p_{1} + \kappa_{1}m_{1}), \quad (6.66)$$

$$\kappa_{2} \left(\frac{\partial (M_{22}H_{1}^{\circ})}{\partial \beta_{2}} - M_{11} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} + 2 \frac{\partial (H_{12}H_{2}^{\circ})}{\partial \beta_{1}} + 2 \frac{\kappa_{1}}{\kappa_{2}} H_{12} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} \right) + \frac{\partial (Q_{22}H_{1}^{\circ})}{\partial \beta_{2}} - Q_{11} \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} + \frac{\partial (S_{12}H_{2}^{\circ})}{\partial \beta_{1}} + S_{12} \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} = -H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}(p_{2} + \kappa_{2}m_{2}), \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} \frac{1}{H_1^\circ} \left(\frac{\partial (M_{11}H_2^\circ)}{\partial \beta_1} - M_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} + \frac{\partial (H_{12}H_1^\circ)}{\partial \beta_2} + H_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta_2} \frac{1}{H_2^\circ} \left(\frac{\partial (M_{22}H_1^\circ)}{\partial \beta_2} - M_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} + \frac{\partial (H_{12}H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + H_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} \right) \right) = \\ &= p_3 + \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left(\frac{\partial (m_1 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial (m_2 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} \right), \quad (6.68) \end{aligned}$$

где $H_{12} = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}); p_j$ — проекции вектора p на направления ортов e_j .

Для замыкания MM оболочки необходимо установить связь между величинами, определяющими деформации срединной поверхности оболочки, и усилиями и моментами. Считая материал оболочки линейной изотропной термоупругой средой, для определения объемной плотности потенциальной энергии деформации оболочки воспользуемся подынтегральной функцией в (5.51). В данном случае с учетом (6.57) эта энергия, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности, составляет [112]

$$W = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1 - \nu)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \gamma_{12}^2/4)}{2(1 - \nu^2)} Eh + \frac{(\Delta \kappa_1 + \Delta \kappa_2)^2 - 2(1 - \nu)(\Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2 - (\Delta \kappa_{12})^2)}{24(1 - \nu^2)} Eh^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Theta_1 - (\Delta \kappa_1 + \Delta \kappa_2)\Theta_2, \quad (6.69)$$

где Е и ν — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$$\Theta_1 = \frac{E\alpha^{(T)}}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(\beta_3) d\beta_3, \quad \Theta_2 = \frac{E\alpha^{(T)}}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(\beta_3) \beta_3 d\beta_3, \quad (6.70)$$

 $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения материала оболочки; $\Delta T(\beta_3) = T - T_0$ — функция, задающая при фиксированных значениях β_i распределение по толщине оболочки отклонения температуры T от температуры T_0 естественного состояния, при которой в оболочке отсутствовали деформации и напряжения. Из (6.69) дифференцированием получим

$$Q_{11} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} = Eh \frac{\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2}{1 - \nu^2} - \Theta_1,$$

$$Q_{22} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} = Eh \frac{\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1}{1 - \nu^2} - \Theta_1,$$

$$S_{12} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{12}} = \frac{Eh \gamma_{12}}{1 + \nu},$$

$$M_{11} = \frac{\partial W}{\partial \Delta \kappa_1} = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta \kappa_1 + \nu \Delta \kappa_2}{1 - \nu^2} - \Theta_2,$$

$$M_{22} = \frac{\partial W}{\partial \Delta \kappa_2} = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta \kappa_2 + \nu \Delta \kappa_1}{1 - \nu^2} - \Theta_2,$$

$$H_{12} = \frac{\partial W}{\partial \Delta \kappa_{12}} = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta \kappa_{12}}{1 + \nu}.$$
(6.71)

Соотношения (6.71) можно свести к трем дифференциальным уравнениям (ДУ) относительно проекций u_j° вектора u° , если через них при помощи (6.56)–(6.58) в (6.71) выразить деформации и изменения кривизны, а затем полученные выражения для усилий и моментов подставить в (6.66)–(6.68). Другой путь связан с возможностью разрешить (6.71) относительно деформаций и изменений кривизны и подставить в (6.59)–(6.61). Тогда (6.59)–(6.61) и (6.66)–(6.68) составят систему шести ДУ относительно усилий и моментов. Выбор того или иного пути зависит от заданных *граничных условий*.

Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой ограничена кусочно гладким замкнутым контуром Γ , к которому приложены усилия $Q_i^{\circ} = Q_{ij}^{\circ} e_j$ и моменты $M_1^{\circ} = -M_{12}^{\circ} e_1 + M_{11}^{\circ} e_2$ и $M_2 = -M_{22}^{\circ} e_1 + M_{21}^{\circ} e_2$. Возможную работу этих силовых факторов можно представить в виде [112]

$$\delta A^{\circ} = \oint_{\Gamma} \left((\boldsymbol{M}_{2}^{\circ} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{Q}_{2}^{\circ} \cdot \delta \boldsymbol{u}) H_{1}^{\circ} d\beta_{1} - (\boldsymbol{M}_{1}^{\circ} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{Q}_{1}^{\circ} \cdot \delta \boldsymbol{u}) H_{2}^{\circ} d\beta_{2} \right) =$$

$$= \oint_{\Gamma} \left((M_{22}^{\circ} \delta \vartheta_{2} + M_{21}^{\circ} \delta \vartheta_{1} - Q_{22}^{\circ} \delta u_{2}^{\circ} - Q_{21}^{\circ} \delta u_{1}^{\circ} - Q_{23}^{\circ} \delta u_{3}^{\circ}) H_{1}^{\circ} d\beta_{1} - (M_{11}^{\circ} \delta \vartheta_{1} + M_{12}^{\circ} \delta \vartheta_{2} - Q_{11}^{\circ} \delta u_{1}^{\circ} - Q_{12}^{\circ} \delta u_{2}^{\circ} - Q_{13}^{\circ} \delta u_{3}^{\circ}) H_{2}^{\circ} d\beta_{2} \right). \quad (6.72)$$

Если вектор внешней нормали к контуру Γ , лежащий в плоскости ортов e_i , составляет с ортом e_1 угол θ , то из рис. 6.15 следует

$$\left. \begin{array}{l} u_{1}^{\circ} = u^{(n)}\cos\theta - u^{(s)}\sin\theta, \quad u_{2}^{\circ} = u^{(n)}\sin\theta + u^{(s)}\cos\theta, \\ \vartheta_{1} = \vartheta^{(n)}\cos\theta - \vartheta^{(s)}\sin\theta, \quad \vartheta_{2} = \vartheta^{(n)}\sin\theta + \vartheta^{(s)}\cos\theta, \\ H_{1}^{\circ}d\beta_{1} = -\sin\theta\,ds, \quad H_{2}^{\circ}d\beta_{2} = \cos\theta\,ds, \end{array} \right\}$$

$$(6.73)$$

где ds — дифференциал длины дуги контура Γ ; $u^{(n)}$, $u^{(s)}$ и $\vartheta^{(n)}$, $\vartheta^{(s)}$ — проекции векторов **и** и ϑ соответственно на направления внешней нормали и касательной к Γ .



Рис. 6.15

Подставляя соотношения (6.73) в (6.72) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}
Q^{(n)} &= Q_{11}^{\circ} \cos^{2} \theta + Q_{22}^{\circ} \sin^{2} \theta + (Q_{12}^{\circ} + Q_{21}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta, \\
Q_{3}^{(n)} &= Q_{13}^{\circ} \cos \theta + Q_{23}^{\circ} \sin \theta, \\
S^{(s)} &= (Q_{22}^{\circ} - Q_{11}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta + Q_{12}^{\circ} \cos^{2} \theta - Q_{21}^{\circ} \sin^{2} \theta, \\
M^{(n)} &= M_{11}^{\circ} \cos^{2} \theta + M_{22}^{\circ} \sin^{2} \theta + (M_{12}^{\circ} + M_{21}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta, \\
M^{(s)} &= (M_{22}^{\circ} - M_{11}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta + M_{12}^{\circ} \cos^{2} \theta - M_{21}^{\circ} \sin^{2} \theta,
\end{aligned}$$
(6.74)

находим

$$\delta A^{\circ} = \oint_{\Gamma} \left(Q^{(n)} \delta u^{(n)} + Q_3^{(n)} \delta u_3^{\circ} + S^{(s)} \delta u^{(s)} - M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)} \right) ds - \delta A_s^{\circ},$$

где с учетом (6.56) и (6.73)

$$\delta A_s^{\circ} = \oint_{\Gamma} M^{(s)} \delta \vartheta^{(s)} ds = \oint_{\Gamma} M^{(s)} (\kappa_1 - \kappa_2) \delta u^{(n)} \sin \theta \cos \theta ds + \\ + \oint_{\Gamma} (\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta) \delta u^{(s)} ds + \oint_{\Gamma} M^{(s)} \frac{\partial \delta u_3^{\circ}}{\partial s} ds.$$

После вычисления последнего интеграла по частям в предположении непрерывности и однозначности $M^{(s)}$ и u_3° на Γ находим

$$\delta A^{\circ} = \oint_{\Gamma} \left(Q^{(n)} - M^{(s)}(\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta \right) \delta u^{(n)} ds + \\ + \oint_{\Gamma} \left(S^{(s)} + M^{(s)}(\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta) \right) \delta u^{(s)} ds + \\ + \oint_{\Gamma} \left(Q^{(n)}_3 + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) \delta u^{\circ}_3 ds - \oint_{\Gamma} M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)} ds. \quad (6.75)$$

Полагая наложенные по Γ связи идеальными, т.е. $\delta A^{\circ} = 0$, на свободных участках контура Γ , не нагруженных усилиями и моментами, из (6.75) получаем четыре силовых граничных условия

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &- M^{(s)}(\kappa_1 - \kappa_2)\sin\theta\cos\theta = 0, \\ S^{(s)} &+ M^{(s)}(\kappa_1\sin^2\theta + \kappa_2\cos^2\theta) = 0, \\ Q^{(n)}_3 &+ \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} = 0, \quad M^{(n)} = 0, \end{aligned}$$

а на участках с жестким закреплением — четыре кинематических граничных условия $u^{(n)} = u^{(s)} = u_3^\circ = 0$ и $\vartheta^{(n)} = 0$. В общем случае в окрестности любой точки $M \in \Gamma$ из каждой пары связанных между собой величин

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(Q^{(n)} - M^{(s)}(\kappa_{1} - \kappa_{2})\sin\theta\cos\theta, \ u^{(n)} \right), \\ \left(S^{(s)} + M^{(s)}(\kappa_{1}\sin^{2}\theta + \kappa_{2}\cos^{2}\theta), \ u^{(s)} \right), \\ \left(Q_{3}^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s}, \ u_{3}^{\circ} \right), \\ \left(M^{(n)}, \ \vartheta^{(n)} \right), \end{array} \right\}$$

$$(6.76)$$

имеющих смысл соответственно *обобщенных сил* и *обобщенных перемещений*, может быть задана лишь одна. При совпадении участка контура Γ с координатной линией β_1 = const имеем θ = 0. Тогда пары величин (6.76) с учетом (6.73) и (6.74) принимают вид

$$(Q_{11}, u_1^{\circ}), \ (Q_{12} + \kappa_2 M_{12}, u_2^{\circ}), \ \left(Q_{13} + \frac{1}{H_2^{\circ}} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta_2}, u_3^{\circ}\right), \ (M_{11}, \vartheta_1), \ (6.77)$$

а при совпадении с координатной линией $\beta_2 = \text{const}$ —

$$(Q_{22}, u_2^{\circ}), \ (-Q_{12} - \kappa_1 M_{21}, u_1^{\circ}), \ \left(Q_{23} - \frac{1}{H_1^{\circ}} \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta_1}, u_3^{\circ}\right), \ (M_{22}, \vartheta_2). \ (6.78)$$

Если контур Γ является замкнутой координатной линией (например, в случае сферического купола), то на таком контуре должны выполняться условия периодичности, т.е. вдоль этой линии обобщенные перемещения должны быть непрерывны и однозначны.

Вариационная форма MM оболочки может быть получена из условия равенства нулю в положении равновесия вариации $\delta W - \delta A_P$ полной энергии оболочки, где δA_P — возможная работа на допустимых обобщенных перемещениях внешних силовых факторов, в том числе заданных на контуре Γ усилий и моментов. При выполнении этого условия на

истинном распределении $u_i^*(M)$ $(M \in S)$ перемещений $u_j^\circ \phi y$ нкционал

$$J[u_j^{\circ}] = \int_{S} \left(W - p_j u_j^{\circ} - m_i \vartheta_i \right) dS - \int_{\Gamma} \left(Q_1^{(n)} - M^{(s)}(\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta \right) u^{(n)} ds - \int_{\Gamma} \left(\left(S^{(s)} + M^{(s)}(\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta) \right) u^{(s)} + \left(Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) u_3^{\circ} - M^{(n)} \vartheta^{(n)} \right) ds$$

достигает минимума, соответствующего минимуму потенциальной энергии оболочки в положении равновесия. Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых распределениях $u_j^{\circ}(M)$ перемещений, удовлетворяющих на Г кинематическим граничным условиям, причем через эти перемещения при помощи (6.56) и (6.73) следует представить обобщенные перемещения $u^{(n)}, u^{(s)}, \vartheta_i$ и $\vartheta^{(n)}, \vartheta^{(s)}$ и с использованием (6.58) выразить $\varepsilon_i, \gamma_{12}, \Delta \kappa_i$ и $\Delta \kappa_{12}$, являющиеся, согласно (6.69), аргументами W. При вычислении интегралов по Г на тех участках контура, где заданы какие-либо кинематические граничные условия, должны быть опущены соответствующие слагаемые.

В результате преобразования функционала $J[u_j^{\circ}]$ можно получить функционал $I[\tilde{F}]$, который на истинном распределении $\tilde{F}^*(M)$ $(M \in S)$ векторной функции напряжений \tilde{F} достигает максимума, значение которого совпадает с минимальным значением $J[u_j^*]$ [1]. Альтернативные функционалы $J[u_j^{\circ}]$ и $I[\tilde{F}]$ входят в двойственную вариационную форму MM оболочки.

С точки зрения рационального использования материала оболочки наиболее целесообразным является ее безмоментное состояния, когда напряжения по ее толщине распределены равномерно. В этом случае при $M_i = 0$ и m = 0 имеем $Q_{12} = Q_{21} = S_{12}$, $H_{12} = 0$ и из (6.64), (6.65) следует $Q_{13} = Q_{23} = 0$, а из (6.66)-(6.68) — три уравнения

$$\frac{\partial(Q_{11}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} - Q_{22}\frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial\beta_{1}} + \frac{\partial(S_{12}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}} + S_{12}\frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial\beta_{2}} = -H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}p_{1}, \\
\frac{\partial(Q_{22}H_{1}^{\circ})}{\partial\beta_{2}} - Q_{11}\frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial\beta_{2}} + \frac{\partial(S_{12}H_{2}^{\circ})}{\partial\beta_{1}} + S_{12}\frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial\beta_{1}} = -H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}p_{2}, \\
\kappa_{1}Q_{11} + \kappa_{2}Q_{22} = p_{3}$$
(6.79)

относительно трех неизвестных Q_{11} , Q_{22} и S_{12} . Теперь вместо (6.75) получим пары обобщенных сил и перемещений в виде $(Q_1^{(n)}, u^{(n)})$ и $(S^{(s)}, u^{(s)})$, а вместо (6.77) и (6.78) — соответственно (Q_{11}, u_1°) , (S_{12}, u_2°) и (Q_{22}, u_2°) , (S_{12}, u_1°) . После решения (6.79) из первых трех равенств (6.71) можно найти ε_1 , ε_2 и γ_{12} , а затем перейти к решению относительно u_j° системы первых двух уравнений (6.58) и уравнения

$$\gamma_{12} = \frac{H_2^{\circ}}{H_1^{\circ}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{u_2^{\circ}}{H_2^{\circ}} \right) + \frac{H_1^{\circ}}{H_2^{\circ}} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{u_1^{\circ}}{H_1^{\circ}} \right),$$

полученного почленным сложением пятого и шестого равенств (6.58).

Для достаточно длинных цилиндрических и конических оболочек пренебрежение всеми моментами не всегда оправдано. В некоторых случаях можно пренебречь лишь частью моментов и воспользоваться так называемой полубезмоментной теорией оболочек. В качестве примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиусом r_0 и толщиной h. Орт e_1 направим по образующей, а орт e_2 — по касательной к срединной поверхности в окружном направлении. Тогда в *цилиндрической системе координат* $\beta_1 = z$, $\beta_2 = \varphi$, а радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности $\mathbf{r} = \beta_1 e_1 + r_0 \beta_2 e_2 + r_0 e_3$, поэтому $H_1^\circ = 1$ и $H_2^\circ = r_0 = \text{const.}$

Положим $M_1 = 0$, m = 0 и $H_{12} = 0$. Так как $\partial H_1^{\circ} / \partial \beta_1 \equiv 0$, то из (6.64) следует $Q_{13} = 0$, а из (6.65) — $r_0 Q_{23} = \partial M_{22} / \partial \varphi$. Тогда уравнения (6.66)–(6.68) примут вид

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi} = -p_1,$$

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{Q_{23}}{r_0} = -p_2,$$

$$\frac{Q_{22}}{r_0} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_{23}}{\partial \varphi} = p_3.$$
(6.80)

При однородной по толцине оболочки температуре $\Theta_2 = 0$ и при $M_{11} = 0$ из четвертого равенства (6.71) получим $\Delta \kappa_1 = \nu \Delta \kappa_2$. Тогда пятое равенство (6.71) примет вид $M_{22} = Eh^3 \Delta \kappa_2/12$, а первые три останутся без изменений. Из (6.58) с учетом (6.56) при $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = 1/r_0$ находим

$$\begin{split} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial z}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} \Big(\frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial \varphi} + u_3^{\circ} \Big), \quad \gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial z}, \\ \Delta \kappa_2 &= \frac{1}{r_0^2} \Big(\frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial \varphi^2} \Big), \end{split}$$

а из (6.59)-(6.61) после исключения $\Delta \kappa_1$ и $\Delta \kappa_{12}$ —

$$r_0^3 \frac{\partial^2 \Delta \kappa_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi^2} + r_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} - r_0 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial z \partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi^2} - r_0 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial z \partial \varphi} = 0.$$

Приведенных соотношений достаточно для нахождения всех неизвестных при условии их непрерывности и однозначности по φ и задании соответствующих граничных условий на торцах оболочки.

Если у оболочки так называемая стрела подъема f (рис. 6.16) мала по сравнению с наименьшим линейным размером проекции оболочки на плоскость, проходящую через ее опорные точки, то говорят о **пологой оболочке** [112]. В этом



Рис. 6.16

случае справедливо неравенство $\kappa_1 \kappa_2 H_1^{\circ} H_2^{\circ} \ll 1$, а при $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ условию Гаусса удовлетворяют коэффициенты $H_1^{\circ} = 1$ и $H^{\circ} = r$ полярной системы координат $\beta_1 = r$, $\beta_2 = \varphi$.

Для пологой оболочки можно пренебречь величинами $\kappa_1 Q_{13}$, $\kappa_2 Q_{23}$ и $\kappa_1 m_1$, $\kappa_2 m_2$. Тогда уравнения (6.66), (6.66) при $p_i \equiv 0$ примут вид

$$\frac{\partial(Q_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - Q_{22}\frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(S_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + S_{12}\frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(Q_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - Q_{11}\frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(S_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + S_{12}\frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} = 0.$$

Им удовлетворяет функция напряжений $\widetilde{F}(\beta_1,\beta_2)$, вводимая соотношениями

$$\begin{aligned} Q_{11}\frac{H_2^{\circ}}{h} &= \frac{\partial}{\partial\beta_2} \Big(\frac{\widetilde{F}_{\beta_2}}{H_2^{\circ}}\Big) + \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial\beta_1} \frac{\widetilde{F}_{\beta_1}}{(H_1^{\circ})^2}, \quad Q_{22}\frac{H_1^{\circ}}{h} &= \frac{\partial}{\partial\beta_1} \Big(\frac{\widetilde{F}_{\beta_1}}{H_1^{\circ}}\Big) + \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial\beta_2} \frac{\widetilde{F}_{\beta_2}}{(H_2^{\circ})^2}, \\ S_{12}\frac{H_1^{\circ}H_2^{\circ}}{h} &= -\frac{\partial\widetilde{F}_{\beta_1}}{\partial\beta_2} + \frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial\beta_1} \frac{\widetilde{F}_{\beta_2}}{H_2^{\circ}} + \frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial\beta_2} \frac{\widetilde{F}_{\beta_1}}{H_1^{\circ}}. \end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{F}_{eta_i} = \partial \widetilde{F} / \partial eta_i$, причем

$$\kappa_1 Q_{11} + \kappa_2 Q_{22} = h \nabla^2_{\beta \kappa} \widetilde{F}, \quad Q_{11} + Q_{22} = h \nabla^2_{\beta} \widetilde{F}, \tag{6.81}$$

где использованы обозначения дифференциальных операторов

$$\nabla^{2}_{\beta\kappa} = \frac{1}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \left(\frac{\partial}{\partial\beta_{1}} \left(\kappa_{2} \frac{H_{2}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial}{\partial\beta_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta_{2}} \left(\kappa_{1} \frac{H_{1}^{\circ}}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial}{\partial\beta_{2}} \right) \right), \\ \nabla^{2}_{\beta} = \frac{1}{H_{1}^{\circ}H_{2}^{\circ}} \left(\frac{\partial}{\partial\beta_{1}} \left(\frac{H_{2}^{\circ}}{H_{1}^{\circ}} \frac{\partial}{\partial\beta_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta_{2}} \left(\frac{H_{1}^{\circ}}{H_{2}^{\circ}} \frac{\partial}{\partial\beta_{2}} \right) \right).$$

$$(6.82)$$

В соотношениях (6.56) допустимо пренебречь слагаемыми $\kappa_1 u_1^{\circ}$ и $\kappa_2 u_2^{\circ}$, в выражении для $\Delta \kappa_{12}$ — слагаемыми $\kappa_1 \omega_2$ и $\kappa_2 \omega_1$, а в уравнениях (6.59), (6.60) — слагаемыми с множителями κ_1 и κ_2 , что упрощает в (6.58) выражения для $\Delta \kappa_i$. Тогда эти упрощенные уравнения тождественно удовлетворяются упрощенными выражениями для $\Delta \kappa_i$ и $\Delta \kappa_{12}$, причем $\Delta \kappa_1 + \Delta \kappa_2 = -\nabla_{\beta}^2 u_3^{\circ}$. Учитывая это равенство и подставляя с использованием упрощенных выражений для $\Delta \kappa_i$ и $\Delta \kappa_{12}$ при $m_i \equiv 0$ в уравнение (6.68) соотношения для моментов из (6.71), можно с учетом (6.81) получить [112]

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^2_{\beta}\nabla^2_{\beta}u_3^\circ + h\nabla^2_{\beta\kappa}\widetilde{F} = p_3 - \nabla^2_{\beta}\Theta_2.$$
(6.83)

Это уравнение отражает условия равновесия элемента пологой оболочки. В нем можно учесть инерционные силы при движении этого элемента в направлении нормали к срединной поверхности, если в левую часть добавить слагаемое $\rho h \partial^2 u_2^o / \partial t^2$. В результате подстановки в уравнение (6.61) соотношений для ε_i из (6.58) и $\gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2$, выраженных через усилия с использованием (6.71), получим с учетом (6.81) уравнение

$$h\nabla_{\beta}^{2}\nabla_{\beta}^{2}\widetilde{F} - Eh\nabla_{\beta\kappa}^{2}u_{3}^{\circ} = -(1-\nu)\nabla_{\beta}^{2}\Theta_{1}, \qquad (6.84)$$

которое вместе с (6.83) входит в ММ пологой оболочки.

Если для пологой оболочки принять $H_i^{\circ} = 1$, что равносильно выбору $\beta_i = x_i$ в координатной плоскости x_1Ox_2 , совпадающей с плоскостью, проходящей через опорные точки оболочки (см. рис. 6.16), то вместо (6.83) и (6.84) будем иметь соответственно [101]

$$\frac{Eh^{3}}{12(1-\nu^{2})}\nabla_{2}^{2}\nabla_{2}^{2}u_{3}^{\circ} + h\left(\kappa_{2}\frac{\partial^{2}\widetilde{F}}{\partial x_{1}^{2}} + \kappa_{1}\frac{\partial^{2}\widetilde{F}}{\partial x_{2}^{2}}\right) = p_{3} - \nabla_{2}^{2}\Theta_{2},$$

$$h\nabla_{2}^{2}\nabla_{2}^{2}\widetilde{F} - Eh\left(\kappa_{2}\frac{\partial^{2}u_{3}^{\circ}}{\partial x_{1}^{2}} + \kappa_{1}\frac{\partial^{2}u_{3}^{\circ}}{\partial x_{2}^{2}}\right) = -(1-\nu)\nabla_{2}^{2}\Theta_{1},$$
(6.85)

где $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа, действующий в плоскости $x_1 O x_2$, а функция напряжений определена соотношениями

$$\frac{Q_{11}}{h} = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_2^2}, \quad \frac{Q_{22}}{h} = \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1^2}, \quad \frac{S_{12}}{h} = -\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$
 (6.86)

Выше при построении MM оболочки предполагалось, что ее прогибы малы по сравнению с толщиной *h.* **Оболочку**, прогибы которой сопоставимы с *h*, обычно называют **гибкой**. В этом случае необходимо учесть нелинейную зависимость деформации срединной поверхности оболочки от перемещения u_3° , записав вместо (6.58) для пологой оболочки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1} &= \frac{\partial u_{1}^{\circ}}{\partial x_{1}} + \kappa_{1} u_{3}^{\circ} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{3}^{\circ}}{\partial x_{1}} \right)^{2}, \quad \varepsilon_{2} &= \frac{\partial u_{2}^{\circ}}{\partial x_{2}} + \kappa_{2} u_{3}^{\circ} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{3}^{\circ}}{\partial x_{2}} \right)^{2}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_{1}^{\circ}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial u_{2}^{\circ}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial u_{3}^{\circ}}{\partial x_{1}} \frac{\partial u_{3}^{\circ}}{\partial x_{2}}, \\ \Delta \kappa_{1} &= -\frac{\partial^{2} u_{3}^{\circ}}{\partial x_{1}^{2}}, \quad \Delta \kappa_{2} &= -\frac{\partial^{2} u_{3}^{\circ}}{\partial x_{2}^{2}}, \quad \Delta \kappa_{12} &= -\frac{\partial^{2} u_{3}^{\circ}}{\partial x_{1} \partial x_{2}}. \end{aligned}$$

$$(6.87)$$

Тогда (6.85) следует заменить уравнениями [101]

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla_2^2\nabla_2^2 u_3^\circ + h\left(\left(\kappa_2 - \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1^2} + \left(\kappa_1 - \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_2^2}\right) + \\ + 2h\frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = p_3 - \nabla_2^2\Theta_2, \quad (6.88)$$

$$h\nabla_2^2 \nabla_2^2 \widetilde{F} - Eh\left(\kappa_2 \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u_3^\circ}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right) = -(1-\nu)\nabla_2^2 \Theta_1. \quad (6.89)$$

При жестком закреплении пологой оболочки по контуру Г, ограничивающему ее срединную поверхность, граничные условия для прогиба u_3° могут быть заданы непосредственно, а для функции напряжений \tilde{F} их следует выразить через равные нулю перемещения u_i° . Например, на участке контура при $x_1 = \text{const}$ в силу (6.87) $\varepsilon_i = 0$ и с учетом (6.71) и (6.86) $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} = \frac{Q_{22}}{h} = -\Theta_1$. При шарнирном закреплении контура могут встретиться несколько вариантов задания граничных условий. Так, в случае, изображенном на рис. 6.17, $a, u_3^{\circ} = 0, M_{11} = 0$ и $Q_{11} = S_{12} = 0$. Последнее равенство, согласно (6.86), равносильно равенству $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, а из условия $M_{11} = 0$ с учетом (6.71) и (6.87) следует, что $-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2}\right) - \Theta_2 = 0$. Поскольку $\frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2} = 0$, получаем $\frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1} = 12(1-\nu^2)\Theta_2$. В случае, представленном на рис. 6.17, $6, u_3^{\circ} = 0$, $\frac{\partial u_3^{\circ}}{\partial x_1} = 0$ и снова $Q_{11} = S_{12} = 0$. На свободном участке контура при $x_1 = \text{const}$ из (6.77) следует, что $Q_{11} = 0, Q_{12} + \kappa_2 M_{12} = 0, Q_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0$ и $M_{11} = 0$.



Необходимо отметить, что при определенных условиях нагружения и закрепления оболочки возможна *потеря устойчивости* ее положения равновесия, соответствующая исходной форме срединной поверхности. *Нагрузку*, при которой происходит изменение положения равновесия, принято называть *критической* [3].

6.5. Математические модели пластинки и мембраны

Срединная поверхность S пластинки в недеформированном состоянии является частью плоскости. Поэтому положение точки $M \in S$ на ней удобно определять в координатной плоскости x_1Ox_2 прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а для круглых и кольцевых пластинок — в полярной системе координат.

Перемещение $w = u_3^{\circ}$ точек срединной поверхности в направлении оси Ox_3 при деформировании пластинки называют прогибом пластинки. Если прогибы пластинки сопоставимы с ее толщиной h, то говорят о гибкой пластинке. В этом случае для построения математической модели (ММ) пластинки в рамках гипотезы Кирхгофа — Лява можно воспользоваться ММ пологой оболочки при значениях главных кривизн $\kappa_i = 0, i = 1, 2$. Тогда уравнения (6.88), (6.89) примут вид

$$D_{u}\nabla_{2}^{2}\nabla_{2}^{2}w - h\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x_{2}^{2}}\frac{\partial^{2}\widetilde{F}}{\partial x_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2}w}{\partial x_{1}^{2}}\frac{\partial^{2}\widetilde{F}}{\partial x_{2}^{2}}\right) + \\ + 2h\frac{\partial^{2}w}{\partial x_{1}\partial x_{2}}\frac{\partial^{2}\widetilde{F}}{\partial x_{1}\partial x_{2}} = p_{3} - \nabla_{2}^{2}\Theta_{2},$$

$$\left. \right\}$$

$$(6.90)$$

$$h\nabla_2^2 \nabla_2^2 \widetilde{F} + Eh \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - Eh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = -(1-\nu) \nabla_2^2 \Theta_1,$$

где $D_{\mu} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — так называемая **цилиндрическая жесткость** пластинки, связывающая изгибающий момент и кривизну срединной поверхности при чистом изгибе длинной прямоугольной пластинки [138]; $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 ; \tilde{F} — функция напряжений, определенная в (6.86); p_3 — распределенная нагрузка в направлении оси Ox_3 , приходящаяся на единицу площади срединной поверхности; Θ_1 и Θ_2 определены в (6.70) с заменой β_3 на x_3 ; E и ν — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

В полярных координатах уравнения (6.90) имеют вид [138]

$$D_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{u}}^2 w - hL(w, \widetilde{F}) = p_3 - \nabla_{\mathbf{u}}^2 \Theta_2,$$

$$h \nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{u}}^2 \widetilde{F} + \frac{Eh}{2} L(w, w) = -(1 - \nu) \nabla_{\mathbf{u}}^2 \Theta_2,$$

где

$$\begin{split} \nabla_{\mathbf{u}}^{2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial \varphi^{2}}; \\ L(w, \widetilde{F}) &= \frac{\partial^{2} w}{\partial r^{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} \widetilde{F}}{\partial \varphi^{2}} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} w}{\partial \varphi^{2}} \right) \frac{\partial^{2} \widetilde{F}}{\partial r^{2}} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \varphi} \right), \end{split}$$

а L(w,w) можно получить заменой \widetilde{F} на w в операторе $L(w,\widetilde{F})$.

Если при деформировании пластинки срединную поверхность можно считать цилиндрической с образующей, параллельной, например, оси Ox_2 , то Θ_2 и прогиб w будут зависеть лишь от x_1 , а $\partial^2 \tilde{F} / \partial x_1^2$ и $\partial^2 \tilde{F} / \partial x_2^2$ при $\Theta_1 \equiv 0$ примут постоянные значения [138]. Тогда второе уравнение (6.90) станет тождеством, а первое перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ) $D_{\mu} \frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \frac{d^2 w}{dx_1^2} = p_3 - \frac{d^2 \Theta_2}{dx^2}$.

Вместо (6.56) для углов поворота нормали к срединной поверхности при деформировании пластинки получим $\vartheta_i = -\partial w/\partial x_i$, а для $\partial e \phi o p$ маций пластинки вместо (6.57) —

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \Delta \kappa_1 x_3, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \Delta \kappa_2 x_3, \quad \varepsilon_{12} = \gamma_{12} + \Delta \kappa_{12} x_3, \quad (6.91)$$

где использованы обозначения (6.87), в которых $\kappa_i = 0$, а u_i° — проекции вектора перемещения и на направления осей Ox_i . При использовании этих обозначений для пластинки остаются справедливыми выражения (6.69) для потенциальной энергии деформации W, приходящейся на единицу площади срединной поверхности, и (6.71) для усилий и моментов при $S_{12} = Q_{12} = Q_{21}$ и $H_{12} = M_{12} = -M_{21}$.

Возможную работу усилий и моментов, приложенных к произвольному кусочно гладкому плоскому замкнутому контуру Γ , ограничивающему срединную поверхность пластинки, с учетом обозначений (6.73) и (6.74), можно, согласно (6.75) при $\kappa_i = 0$, представить в виде

$$\delta A^{\circ} = \oint_{\Gamma} \left(Q_1^{(n)} \delta u^{(n)} + S^{(s)} \delta u^{(s)} \right) ds + \oint_{\Gamma} \left(\left(Q_3^{(n)} + \partial M^{(s)} / \partial s \right) \delta w - M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)} \right) ds, \quad (6.92)$$

где $u^{(n)}$ и $u^{(s)}$ — перемещения точек контура в его плоскости в направлениях n нормали и s касательной к нему; $\vartheta^{(n)} = \partial w / \partial n$. При наложенных по контуру Γ идеальных связях $\delta A^{\circ} = 0$. Поэтому на свободных участках этого контура, не нагруженных усилиями и моментами, при произвольных вариациях перемещений и угла $\vartheta^{(n)}$ из (6.92) следуют четыре силовых граничных условия: $Q^{(n)} = 0$, $S^{(s)} = 0$, $Q_3^{(n)} + \partial M^{(s)} / \partial s = 0$ и $M^{(n)} = 0$, а на участках с жестким закреплением — четыре кинематических граничных условия: $u^{(n)} = u^{(s)} = w = 0$ и $\vartheta^{(n)} = 0$. В общем случае в окрестности любой точки $M \in \Gamma$ из каждой пары связанных между собой обобщенных сил и обобщенных перемещений

$$(Q_1^{(n)}, u^{(n)}), (S^{(s)}, u^{(s)}), (Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s}, w), (M^{(n)}, \vartheta^{(n)})$$
 (6.93)

может быть задана лишь одна из величин. При совпадении участка контура Γ с координатной линией $x_1 = \text{const } \mathbf{B}$ (6.73) и (6.74) $\theta = 0$. Тогда вместо (6.93) получим

$$(Q_{11}, u_1^{\circ}), (S_{12}, u_2^{\circ}), (Q_{13} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2}, w), (M_{11}, \vartheta_1),$$

а при совпадении с координатной линией $x_2 = \text{const}$ —

$$(Q_{22}, u_2^{\circ}), (S_{12}, u_1^{\circ}), (Q_{23} + \frac{\partial H_{21}}{\partial x_1}, w), (M_{22}, \vartheta_2).$$

Если в (6.69) подставить соотношения для деформаций и изменений кривизны срединной поверхности пластинки из (6.87), то потенциальная энергия $W(u_j^{\circ})$ пластинки будет функцией перемещений u_j° (j = 1, 2, 3) точек этой поверхности. Тогда еариационную форму MM пластинки можно получить из условия $\delta W - \delta A_P = 0$, где δA_P — возможная работа на допустимых обобщенных перемещениях внешних силовых факторов, в том числе заданных на контуре Γ усилий и моментов. При выполнении этого условия на истинном распределении $u_j^*(M)$ $(M \in S)$ перемещений функционал

$$J[u_{j}^{\circ}] = \int_{S} (W - p_{3}u_{3}^{\circ}) dS - \int_{\Gamma} \left(Q^{(n)}u^{(n)} + S^{(s)}u^{(s)} + \left(Q_{3}^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) u_{3}^{\circ} - M^{(n)}\vartheta^{(n)} \right) ds \quad (6.94)$$

достигает минимума, соответствующего минимуму потенциальной энергии оболочки в положении равновесия. Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых распределениях $u_j^{\circ}(M)$ перемещений, удовлетворяющих на контуре Γ кинематическим граничным условиям. При вычислении интегралов по Γ на тех участках контура пластинки, где заданы какие-либо кинематические граничные условия, должны быть опущены соответствующие слагаемые.

Путем преобразования функционала $J[u_j^{\circ}]$ можно получить функционал (см. П2.3), достигающий в положении равновесия максимума, значение которого совпадает с минимальным значением $J[u_j^*]$. Эти альтернативные функционалы составят двойственную вариационную форму MM пластинки.

С уменьшением h цилиндрическая жесткость $D_{\rm u}$ пластинки резко уменьшается. При уменьшении жесткости при изгибе становится менее существенным и влияние перепада температуры по толщине пластинки, которое отражает слагаемое Θ_2 . Если в первом уравнении (6.90) положить $D_{\rm u} = 0$ и $\Theta_2 = 0$, то оно перейдет в ДУ с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{p_3}{h} = 0, \quad (6.95)$$

для которого достаточно задать на контуре Г одно граничное условие, т.е. вместо (6.93) для (6.95) и второго ДУ (6.90) получим

$$(Q_1^{(n)}, u^{(n)}), (S^{(s)}, u^{(s)}), (Q_3^{(n)}, w).$$
 (6.96)

В итоге придем к MM *гибкой мембраны*, прогибы которой могут существенно превышать ее толщину *h*. В этом случае для потенциальной энергии деформации, приходящейся на единицу площади мембраны, получим

$$W_{\rm M} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\gamma_{12}^2}{4} \right) \right), \tag{6.97}$$

где ε_i и γ_{12} определены в (6.87), а функционал (6.94) примет вид

$$J[u_j^{\circ}] = \int_{S} \left(W_{\mathsf{M}} - p_3 u_3^{\circ} \right) dS - \int_{\Gamma} \left(Q^{(n)} u^{(n)} + S^{(s)} u^{(s)} + Q_3^{(n)} u_3^{\circ} \right) ds. \quad (6.98)$$

В случае малых по сравнению с *h* прогибах пластинки в левой части второго ДУ (6.90) можно пренебречь нелинейными слагаемыми.

Тогда оно совпадет с линейным ДУ (5.37) для плоского напряженного состояния и может быть решено независимо от первого ДУ (6.90) при граничных условиях, определяемых по первым двум парам величин в (6.93). После его решения станут известными зависящие от \tilde{F} коэффициенты первого ДУ (6.90), которое теперь будет линейным с граничными условиями, устанавливаемыми по двум последним парам величин в (6.93). Таким образом, допущение о малости прогибов равносильно линеаризации ММ пластинки. При этом функционал (6.94) не изменится и для таких аргументов функции W, как $\Delta \kappa_i$ и $\Delta \kappa_{12}$, по-прежнему останутся справедливыми три последних равенства (6.87), но деформации срединной поверхности пластинки, от которых тоже зависит W, примут вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial x_1},$$
(6.99)

соответствующий соотношениям Коши.

При малых прогибах мембраны в ее ММ также можно ограничиться линейными зависимостями (6.99) для деформаций, являющихся, согласно (6.97), аргументами функции $W_{\rm M}$, входящей в функционал (6.98). Как и при малых прогибах пластинки, второе ДУ (6.90) после пренебрежения нелинейными слагаемыми может быть решено независимого от ДУ (6.95) при граничных условиях, следующих из первых двух пар величин в (6.96). После его решения и вычисления зависящих от \tilde{F} коэффициентов в ДУ (6.95) решение последнего при граничных условиях, определяемых последней парой величин в (6.96), даст зависимость $w(x_1, x_2)$ прогиба мембраны от координат точек ее срединной поверхности. Если плоское напряжению во всех направлениях, определяемых напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{N}{h}$, то $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} = \frac{N}{h}$, $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ и (6.95) переходит в уравнение равновесия (6.29) мембраны с равномерным натяжением N и малыми прогибами.

Если условия закрепления пластинки по ее контуру и приложенные к ней нагрузки позволяют определить во всех точках срединной поверхности усилия Q_{11} , Q_{22} и S_{12} , не решая второе ДУ (6.90), то ММ пластинки включает лишь первое ДУ (6.90), которое с учетом (6.86) можно представить в виде

$$D_{\rm II} \nabla_2^2 \nabla_2^2 w - Q_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - Q_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = p_3 - \nabla_2^2 \Theta_2.$$
(6.100)

Граничные условия для этого ДУ следуют из последних двух пар величин в (6.93), а в (6.94) $Q^{(n)}$ и $S^{(s)}$ можно выразить при помощи

(6.74) через известные значения Q_{11} , Q_{22} и S_{12} . Эти значения будут равны нулю, если при $\Theta_1 = \text{const}$ края пластинки могут свободно смещаться в ее плоскости [138]. В этом случае вместо (6.94) и (6.100) получим соответственно

$$J[u_j^{\circ}] = \int_{S} (W - p_3 u_3^{\circ}) dS - \int_{\Gamma} \left(\left(Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) u_3^{\circ} - M^{(n)} \vartheta^{(n)} \right) ds,$$

$$D_{\mathfrak{u}} \nabla_2^2 \nabla_2^2 w = p_3 - \nabla_2^2 \Theta_2.$$
 (6.101)

В рамках последней ММ пластинки из (6.71) и (6.87) следует $M_{11} + M_{22} = -D_{II}(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - 2\Theta_2$. Тогда, используя обозначение $\widetilde{M} = \frac{M_{11} + M_{22}}{1+\nu}$, из второго равенства (6.101) получаем уравнение Пуассона $\nabla_2^2 \widetilde{M} = -p_3 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_2^2 \Theta_2$, которое может быть решено независимо в случае свободно опертой по многоугольному контуру Г пластинки (в частности, прямоугольной пластинки), поскольку в этом случае на контуре определено граничное условие $\widetilde{M} = 0$. Затем для такой пластинки можно решить еще одно уравнения Пуассона $\nabla_2^2 w = -\frac{1}{D_u} \left(\widetilde{M} + \frac{2}{1+\nu} \Theta_2\right)$ с граничным условием w = 0 на контуре Г. Расцепление ДУ с бигармоническим дифференциальным оператором $\nabla_2^4 = \nabla_2^2 \nabla_2^2$ на два последовательно решаемых ДУ второго порядка существенно упрощает количественный анализ рассматриваемой ММ пластинки. Следует отметить, что, как и в случаях нагружения стержней и оболочек, при определенных условиях нагружения и закрепления пластинки возможна *потеря устойчивости* ее положения равновесия [3].

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Выше (см. 5.2) показано, что при определенных условиях в задаче термоупругости можно пренебречь влиянием эффекта термомеханической связанности и рассматривать такую задачу как несвязанную. Это позволяет при построении математических моделей (MM) процессов теплопроводности, протекающих в сплошной среде, не принимать во внимание параметры напряженно-деформированного состояния среды. Данная глава посвящена ММ таких процессов, протекающих в твердом теле, описывающим температурное состояние этого тела; процессы переноса тепловой энергии в жидкостях и газах рассмотрены в 8 и 9.

7.1. Граничные условия и условия сопряжения

Если затраты энергии на деформирование твердого тела малы по сравнению с изменением его внутренней энергии, то дифференциальная форма математической модели (MM) процесса теплопроводности (кондукции) будет включать уравнение теплопроводности (5.18) с отсутствующим первым слагаемым в правой части, а особенности конкретного процесса будут отражать заданные на поверхности S тела граничные условия, описывающие условия его теплообмена с окружающей средой. Когда нахождение распределения температуры в теле неразрывно связано с одновременным определением температурного поля в окружающей среде, в теплоносителях или контактирующих с ним твердых телах, на соответствующих участках поверхности контакта (контактной поверхности) задают условия сопряжения температурных полей. Задачу теплопроводности, в математическую формулировку которой входят такие условия, принято называть сопряженной.

Простейший вариант задания условий сопряжения температурных полей соответствует идеальному тепловому контакту рассматриваемого твердого тела с окружающей средой или соседним твердым телом. В этом случае в любой момент времени t в каждой точке $N \in S_s$ при переходе через контактную поверхность $S_s \subseteq S$ выполняются условия непрерывности распределения температуры и плотности теплового потока:

$$T(N,t) = \widetilde{T}(N,t), \quad \lambda^{(T)} \frac{\partial T(N,t)}{\partial x_i} n_i(N) = \widetilde{\lambda}^{(T)} \frac{\partial \widetilde{T}(N,t)}{\partial x_i} n_i(N),$$

$$N \in S_s, \quad i = 1, 2, 3,$$
(7.1)

где n_i — проекции единичного вектора внешней нормали к поверхности S_s на оси Ox_i системы пространственных координат; T и $\lambda^{(T)}$ — температура и теплопроводность рассматриваемого тела; \widetilde{T} и $\widetilde{\lambda}^{(T)}$ — температура и теплопроводность среды или соседнего тела. В теории теплопроводности условия (7.1) соответствуют граничным условиям четвертого рода [80].

На контактной поверхности могут действовать распределенные источники теплоты с поверхностной мощностью $q_s(N,t)$, $N \in S_s$, измеряемой в $\operatorname{Bt/m^2}$. Тогда в правую часть второго равенства (7.1) следует добавить величину $q_s(N,t)$. Теплота может выделяться вследствие работы сил трения при относительном движении рассматриваемого тела и среды или соседнего твердого тела и в результате физико-химических процессов, протекающих на поверхности S_s , а также может соответствовать потоку результирующего излучения на этой поверхности. В последнем случае **плотность** \overline{q} **потока результирующего излучения** определяет количество теплоты, отдаваемое телом с поверхности единичной площади в единицу времени в процессе теплообмена излучением, т. е. $q_s = -\overline{q}$.

Применяемые в технике материалы твердых тел в большинстве случаев непрозрачны для теплового излучения, однако в общем случае некоторая доля $D_rq_{\rm n}$ падающего на поверхность потока излучения плотностью $q_{\rm n}$ (рис. 7.1) может проходить через нее ($D_r - \kappa o_2 f_0 f_0 uuenm$ пропускания излучения). Оставшаяся доля частично поглощается на поверхности ($A_rq_{\rm n}$) и





частично отражается от нее (R_rq_n) , причем $A_r + D_r + R_r = 1$, где A_r и $R_r - \kappa o \mathfrak{s} \mathfrak{g} \mathfrak{f} \mathfrak{g} \mathfrak{u} \mathfrak{u} \mathfrak{e} \mathfrak{n} \mathfrak{m} \mathfrak{s}$ поверхностью. Отраженное излучения вместе с собственным $\varepsilon_r q^\circ$ и пропускаемым изнутри q' излучениями дает плотность потока $\mathfrak{s} \mathfrak{g}$ - $\mathfrak{g} \mathfrak{g} \mathfrak{k} \mathfrak{m} \mathfrak{s} \mathfrak{s} \mathfrak{g}$ -

$$q^* = R_r q_{\rm n} + \varepsilon_r q^\circ + q', \tag{7.2}$$

где ε_r — коэффициент излучения поверхности (ее «степень черноты»); $q^\circ = \sigma_0 T^4$ — плотность потока излучения абсолютно черного тела с температурой поверхности T; $\sigma_0 \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Br}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ — постоянная Стефана — Больцмана. Из баланса потоков излучения (см. рис. 7.1) следует $\overline{q} = q^* - q_{\pi} = \varepsilon_r q^\circ - A_r q_{\pi} - D_r q_{\pi} + q'$, и в итоге после исключения q_{π} имеем [37]

$$\overline{q} = \frac{\varepsilon_r \sigma_0 T^4 + q' - (1 - R_r)q^*}{R_r}.$$
(7.3)

Для абсолютно черного тела $(A_r = \varepsilon_r = 1, q' = 0, D_r = R_r = 0)$ плотности эффективного и собственного излучений равны. Такой же результат будет и для любого тела с непрозрачной поверхностью $(q' = 0, D_r = 0)$, если с другими излучающими телами оно находится в состоянии температурного равновесия, поскольку в этом случае, согласно закону Кирхгофа [46], $\bar{q} = 0$ и $\varepsilon_r = A_r$. Когда температурное равновесие между телами или участками вогнутой поверхности одного и того же тела отсутствет, $\bar{q} \neq 0$ и возникает необходимость привлечения MM, описывающих теплообмен излучением.

На практике тепловой контакт между соприкасающимися твердыми телами обычно нельзя считать идеальным. Поверхности деталей, находящихся в контакте, являются шероховатыми и имеют отклонения от правильной геометрической формы. При неидеальном тепловом контакте в (7.1) нарушается равенство температур $(T(N,t) \neq \tilde{T}(N,t), N \in S_s)$, поэтому вместо (7.1), опуская аргументы функций, следует записать

$$\lambda^{(T)}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i = \alpha_s(\tilde{T} - T) = \tilde{\lambda}^{(T)}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}n_i, \qquad (7.4)$$

где α_s — коэффициент контактного теплообмена, зависящий от большого числа факторов [34,83,115], поскольку теплота между соприкасающимися поверхностями в общем случае передается теплопроводностью в местах фактического контакта выступающих неровностей, теплопроводностью и конвекцией через среду, заполняющую свободное пространство между поверхностями, и излучением.

Роль теплового излучения зависит от значений температур T и \tilde{T} контактирующих участков поверхностей, от зазора между ними и от значений коэффициентов ε_r , A_r и $\tilde{\varepsilon}_r$, \tilde{A}_r . Если зазор мал по сравнению с расстоянием, на котором заметно изменяются вдоль соприкасающихся участков значения T и \tilde{T} , то в первом приближении можно считать, что эти участки образуют замкнутую систему, причем $q^* = q_{\Pi}$ и $\tilde{q}^* = \tilde{q}_{\Pi}$. Тогда с учетом (7.3) в случае непрозрачных поверхностей получим

$$\widetilde{q}^* - q^* = \widetilde{\overline{q}} = -\overline{q} = \sigma_0 \frac{\frac{\widetilde{\varepsilon}_r \widetilde{T}^4}{\widetilde{A}_r} - \frac{\varepsilon_r T^4}{A_r}}{\frac{1}{\widetilde{A}_r} + \frac{1}{A_r} - 1}$$

Когда обе поверхности обладают свойствами серого тела ($\tilde{\varepsilon}_r = \tilde{A}_r$ и $\varepsilon_r = A_r$) и температуры \tilde{T} и T близки между собой, полученное соотношение можно записать в приближенной форме [34]

$$-\overline{q} \approx \frac{\sigma_0}{2} (\widetilde{T} + T)^3 (\widetilde{T} - T) \left(\frac{1}{\widetilde{A}_r} + \frac{1}{A_r} - 1\right).$$
(7.5)

Механизм передачи теплоты через газ в свободном пространстве между поверхностями зависит от соотношения между средней шириной δ_3 зазора и длиной \overline{l} среднего свободного пробега частиц газа. Если $\delta_3 \gg \overline{l}$, то газ ведет себя как сплошная среда и передача теплоты происходит путем конвективного переноса и теплопроводностью, однако интенсивность конвективного движения в газе при малых значениях δ_3 незначительна. Поэтому плотность теплового потока, передаваемого через газ, можно представить в виде

$$q_{\rm r} = \frac{\lambda_{\rm r}^{(T)}(\tilde{T} - T)}{\delta_{\rm s}},\tag{7.6}$$

где $\lambda_{\Gamma}^{(T)}$ — теплопроводность газа, возрастающая с ростом его средней температуры $(\tilde{T}+T)/2$. С уменьшением давления газа значение \tilde{l} увеличивается и может стать сравнимым с δ_3 . При $\tilde{l} > \delta_3$ газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду, интенсивность теплопередачи через газ резко падает и для нахождения q_{Γ} следует использовать представления молекулярно-кинетической теории (см. 1.2).

Для шероховатых поверхностей площадь фактического контакта выступающих неровностей составляет незначительную долю η_S номинальной площади соприкосновения. Эта доля зависит от шероховатости и геометрического совершенства контактирующих поверхностей, от контактного давления сжатия поверхностей и механических характеристик материалов соприкасающихся твердых тел. В наиболее благоприятных случаях $\eta_S \approx 0,01\ldots 0,02$. В местах фактического контакта выступающие неровности обминаются, образуя контактные пятна. Форма этих пятен близка к кругу, причем в широком диапазоне изменения свойств поверхностей и контактного давления для соприкасающихся металлических деталей радиус r круга меняется незначительно [115]. При возрастании контактного давления увеличение площади поверхности фактического контакта происходит за счет увеличения числа контактных пятен.

Благодаря большой тепловой проводимости контактного пятна при соприкосновении металлических деталей к нему стягиваются линии тока теплового потока (рис. 7.2). Поскольку расстояния между соседними контактными пятнами велики по сравнению с r, взаимное влияние пя-


Рис. 7.2

тен на расположение линий тока можно не учитывать и использовать решение задачи теплопроводности для двух полуограниченных тел, соприкасающихся через круглое пятно радиусом r, а плотность теплового потока, передаваемого в местах фактического контакта, представить в виде

$$q_{\rm T} = \frac{4\eta_S(\bar{T} - T)}{\pi r (1/\tilde{\lambda}^{(T)} + 1/\lambda^{(T)})}.$$
(7.7)

Суммируя вклады за счет всех механизмов передачи теплоты в зоне контакта, согласно (7.5)-(7.7) можно записать

$$\alpha_s = \frac{-\overline{q} + q_{\rm r} + q_{\rm T}}{\widetilde{T} - T} = \frac{\sigma_0 (\widetilde{T} + T)^3}{2\left(\frac{1}{\widetilde{A}_r} + \frac{1}{A_r} - 1\right)} + \frac{\lambda_{\rm r}^{(T)}}{\delta_3} + \frac{4\eta_S}{\pi r \left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}^{(T)}} + \frac{1}{\lambda^{(T)}}\right)}.$$
 (7.8)

При умеренных температурах и атмосферном давлении обычно $|\overline{q}| \ll \ll |q_{\Gamma}|$, поэтому влиянием теплового излучения на значение α_s можно пренебречь, но надо иметь в виду, что с падением давления и увеличением температуры значения $|\overline{q}|$ и $|q_{\Gamma}|$ могут стать сопоставимыми. Значения $|q_{\Gamma}|$ и $|q_{T}|$ оказываются в большинстве случаев одного порядка, причем для мягких металлов обычно $|q_{\Gamma}| < |q_{T}|$, а для более твердых — наоборот.

В реальных конструкциях пятна фактического контакта распределены неравномерно по поверхности соприкосновения деталей. Например, неплоскостность и волнистость поверхностей листового материала и проката приводят к тому, что в соединении образуются зазоры, заметно превышающие высоту выступающих неровностей, что исключает возможность фактического контакта на значительных участках поверхности соприкосновения. При этом существенная часть контактных пятен приходится на зоны, где имеются элементы крепления (сварные точки, заклепки, болты). Следует ожидать, что в зоне сварных точек температуры соединяемых элементов будут весьма близкими, а условия теплового контакта приблизятся к идеальным. Заклепки и болты сами обладают дополнительным *термическим сопротивлением* передаче теплоты, но благодаря большому местному контактному давлению его значение сравнительно мало. Это также приводит к выравниванию температуры элементов, соприкасающихся в зоне заклепок и болтов. В итоге возникает неравномерное распределение температуры по поверхности соединяемых элементов, что, в свою очередь, влияет на механизмы контактного теплообмена излучением и теплопроводностью через газ.

Один из путей выравнивания температуры в зоне контакта и повышения значения α_s состоит в применении тонких прослоек из мягких теплопроводных металлов (алюминия, меди, олова, свинца, кадмия и т.п.) [83, 115]. Такие прослойки могут скомпенсировать влияние геометрических несовершенств соприкасающихся поверхностей и привести к существенному увеличению значения η_S даже при сравнительно невысоких уровнях контактного давления. В этом случае условия сопряжения нестационарных температурных полей в контактирующих элементах можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\lambda}^{(T)} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_i} n_i &= \widetilde{\alpha}_s (\widetilde{T} - T_s), \quad \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = \alpha_s (T_s - T), \\ h_s c_V^{(s)} \frac{dT_s}{dt} &= \widetilde{\alpha}_s (\widetilde{T} - T_s) + \alpha_s (T - T_s) + q_s. \end{aligned} \right\}$$
(7.9)

Здесь $\tilde{\alpha}_s$ и α_s — коэффициенты контактного теплообмена между прослойкой с постоянной по ее толщине h_s температурой T_s и элементами с температурами \tilde{T} и T соответственно; $c_V^{(s)}$ — объемная теплоемкость материала прослойки. При записи последнего равенства (7.9) предполагается, что прослойка достаточно тонкая и передача вдоль нее теплоты теплопроводностью несущественна. Ясно, что при отсутствии прослойки ($h_s = 0$) имеем $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s$ и (7.9) принимает вид (7.4). Отметим, что из (7.4) формальным путем можно получить все три рода граничных условий для несопряженных задач теплопроводности (см. 5.1).

Рассмотрим твердое тело, ограниченное внешней S и внутренней S' поверхностями (рис. 7.3). К этим поверхностям путем конвективного переноса подводятся тепловые потоки плотностью $q_{\kappa}(N) =$ $= \alpha(N) (T_{c}(N') - T(N)), N \in S, и q_{\kappa}(N') = \alpha(N') (T'_{c}(N') - T(N')),$ $N' \in S'$, где α — коэффициент теплообмена со средой, имеющей температуру T_{c} , а также падающие потоки излучения плотностью $q_{\pi}(N)$ и $q_{\pi}(N')$. С поверхностей тела отводятся потоки собственного излучения $\varepsilon_{r}(N)\sigma_{0}T^{4}(N), N \in S$, и $\varepsilon_{r}(N')\sigma_{0}T^{4}(N'), N' \in S'$. Отметим, что α и ε_{r} могут зависеть от температуры поверхности, а T_{c} , α , q_{π} и T могут изменяться во времени t.

Строго говоря, $q_{\Pi}(N)$ нельзя задать независимо от распределения температуры $T(N), N \in S$, если поверхность S имеет вогнутые участ-



ки, как и $q_{\pi}(N')$ независимо от распределения T(N'), $N' \in S'$. Если в полости тела *среда диатермична*, т.е. не излучает, а также не поглощает и не рассеивает излучение, то элементарная площадка dS(P')в окрестности точки $P' \in S'$ (см. рис. 7.3) посылает на единичную площадку в окрестности точки $N' \in S'$ поток излучения плотностью

$$dq_{\pi}(N') = q^{*}(P') d\varphi_{P',N'}, \qquad (7.10)$$

где $d\varphi_{P',N'} = (\cos\beta_{P'}\cos\beta_{N'}) dS(P')/(\pi l_{P',N'}^2)$ — элементарный угловой коэффициент, записанный в предположении, что поверхность обладает диффузными свойствами, т.е. распределение собственного и отраженного излучений по направлениям подчиняется закону Ламберта [46]. Для замкнутой непрозрачной поверхности S' с учетом (7.2) и (7.10) получаем интегральное уравнение

$$q_{\pi}(N') = \int_{S'} \left(R_r(P') q_{\pi}(P') - \sigma_0 \varepsilon_r(P') T^4(P') \right) \frac{\cos \beta_{P'} \cos \beta_{N'}}{\pi l_{P',N'}^2} \, dS(P'). \tag{7.11}$$

В частном случае сферической полости радиусом r_0 (рис. 7.4) $\cos \beta_{P'} = \cos \beta_{N'} = l_{P',N'}^2/(2r_0)$. Тогда из (7.10) следует

$$q_{\mathfrak{n}}(N') = rac{1}{4\pi r_0^2} \int\limits_{S'} q^*(P') \, dS(P') = ext{const}, \quad N', P' \in S',$$

что позволяет получить решение для (7.11) в виде

$$q_{\pi}(N') = \frac{\sigma_0}{4\pi r_0^2 \overline{A}'} \int_{S'} \varepsilon_r(P') T^4(P') dS(P'), \quad \overline{A}' = 1 - \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{S'} R_r(P') dS(P').$$

В общем случае полости произвольной формы $q_n \neq \text{const}$ и (7.11) приходится решать совместно с уравнением теплопроводности в теле, т. е. рассматривать сопряженную задачу радиационно-кондуктивного теплообмена. Решение такой задачи существенно усложняется, если в полости находится поглощающая, излучающая или рассеивающая излучение среда [2,46]. При наличии вогнутых участков на поверхности *S* происходит их взаимное облучение, что также приводит к необходимости построения MM радиационно-кондуктивного теплообмена.

Для произвольной точки обеих поверхностей тела запишем граничное условие

$$\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = \alpha (T_{\rm c} - T) + A_r q_{\rm II} - \varepsilon_r \sigma_0 T^4, \qquad (7.12)$$

которое для последующего анализа удобно привести к безразмерному виду

$$\frac{1}{\mathrm{Bi}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \overline{x}_i} n_i = 1 - \vartheta - \widetilde{N} \vartheta^4.$$
(7.13)

Здесь Ві = $\alpha h/\lambda^{(T)}$; $\overline{x}_i = x_i/h$, h — характерный размер, в качестве которого можно принять толщину тела (в общем случае переменную) в направлении, нормальном к срединной поверхности, одинаково удаленной от внешней и внутренней поверхностей тела и отмеченной на рис. 7.3 штриховой линией; $\vartheta = T/\widetilde{T}$, $\widetilde{T} = T_c + A_r q_n/\alpha$ — приведенная температура, которая позволяет единым выражением представить тепловой поток, подводимый путем конвективного переноса, и поглощаемое поверхностью излучение; $\widetilde{N} = \varepsilon_r \sigma_0 \widetilde{T}^3/\alpha$.

Если в (7.13) $\tilde{N}\vartheta^4 \ll 1 - \vartheta$, то собственное излучение поверхности можно не учитывать. Тогда (7.13) по виду аналогично граничным условиям третьего рода, но в отличие от (5.21) нелинейно относительно температуры T.

Число Био Ві в (7.13) является отношением термического сопротивления $h/\lambda^{(T)}$ тела в направлении нормали к срединной поверхности к термическому сопротивлению $1/\alpha$ при теплообмене путем конвективного переноса между телом и окружающей средой или теплоносителем и характеризует степень неравномерности распределения температуры тела в этом направлении. При Ві $\gg 1$ отводом теплоты внутрь тела за счет теплопроводности можно пренебречь, приравняв правую часть (7.13) нулю, и считать, что на поверхности устанавливается **равновес**ная температура \overline{T} , соответствующая равновесию конвективного и лучистого тепловых потоков в рассматриваемой точке поверхности и удовлетворяющая нелинейному уравнению

$$\overline{N}\,\overline{\vartheta}^4 + \overline{\vartheta} = 1,\tag{7.14}$$

где $\overline{N} = \overline{\varepsilon}_r \sigma_0 \widehat{T}^3 / \overline{\alpha}; \ \overline{\vartheta} = \overline{T} / \widehat{T}; \ \widehat{T} = T_c + \overline{A}_r q_n / \overline{\alpha}$ (черта над параметрами означает, что их значения в случае зависимости от температуры поверхности следует брать при искомой температуре \overline{T}). Зависимость $\overline{\vartheta}$



от \overline{N} представлена на рис. 7.5. Отметим, что случай $\text{Bi} \gg 1$ соответствует граничным условиям первого рода.

При Ві ~ 1 уравнение (7.13) с учетом (7.14) при услови
и $\widetilde{N}\approx\overline{N}$ принимает вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \overline{x}_i} n_i = \operatorname{Bi}(\overline{\vartheta} - \vartheta + \overline{N\vartheta}^4 - \widetilde{N\vartheta}^4) \approx \overline{\operatorname{Bi}}(\overline{\vartheta} - \vartheta), \qquad (7.15)$$

где $\overline{\mathrm{Bi}} = \mathrm{Bi} (1 + \overline{N}(\overline{\vartheta}^3 + \overline{\vartheta}^2 \vartheta + \overline{\vartheta} \vartheta^2 + \vartheta^3))$, что вновь аналогично граничным условиям третьего рода.

7.2. Модель термически тонкого тела

Если в (7.15) $\overline{\text{Bi}} \ll 1$, то термическое сопротивление тела с полостью (см. рис. 7.3) в направлении нормали к его срединной поверхности мало́ по сравнению с суммарным термическим сопротивлением теплообмена на его поверхности. Тогда изменением температуры в этом направлении можно пренебречь по сравнению с разностью $|\overline{T} - T|$ равновесной температуры \overline{T} и температуры поверхности T. Такое допущение характеризует математическую модель (MM) термически тонкого тела (иногда говорят о теле, тонкостенном в тепловом отношении). В этом случае граничные условия, заданные по этому направлению, необходимо объединить с дифференциальным уравнением теллопроводности в одно выражение, исключив в нем производные по указанному направлению. Рассмотрим эту процедуру на примере области V в виде длинной круглой трубы внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 , поперечное сечение которой изображено на рис. 7.6.

Трехмерное температурное поле в стенке трубы удобно представить в *цилиндрической системе координат* Or φ z, причем ось Oz совпадет с



Рис. 7.6

осью трубы. В случае неустановившегося процесса теплопроводности распределение температуры T(M) $(M \in V)$ в стенке трубы описывается уравнением [34]

$$c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda^{(T)} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V,$$

где t — время; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты. Материал стенки трубы будем считать однородным, т. е. его объемная теплоемкость c_V и теплопроводность $\lambda^{(T)}$ не зависят от координат, но могут зависеть от T. Умножим это уравнение на r и проинтегрируем по толщине $h = R_2 - R_1$ стенки трубы:

$$\int_{R_{1}}^{R_{2}} c_{V} \frac{\partial T}{\partial t} r \, dr = \lambda^{(T)} \left(R_{2} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{2}} - R_{1} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{R_{1}}^{R_{2}} \frac{\lambda^{(T)}}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \, dr + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_{1}}^{R_{2}} \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial z} r \, dr + \int_{R_{1}}^{R_{2}} q_{V} r \, dr. \quad (7.16)$$

Граничные условия на каждой из боковых поверхностей трубы примем в виде (7.12), причем $\frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_2}$ на наружной поверхности и $\frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = -\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R_1}$ на внутренней. Кроме того, при выполнении условия $\overline{\text{Bi}} \ll 1$ примем, что T не зависит от r. Тогда вместо (7.16) запишем

$$c_{V}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^{2}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\lambda^{(T)}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)\frac{\ln(R_{2}/R_{1})}{h/R} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^{(T)}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + 2\frac{\overline{\alpha}(\widetilde{T}-T) - \overline{\varepsilon}_{r}\sigma_{0}T^{4}}{h} + \overline{q}_{V}.$$
 (7.17)

Здесь $R = (R_1 + R_2)/2$ — средний радиус трубы (см. рис. 7.6); α — коэффициент теплообмена наружной поверхности трубы со средой, имеющей температуру T_c ; A_r — коэффициент поглощения наружной поверхностью трубы падающего на нее потока излучения плотностью q_{Π} ; ε_r — коэффициент излучения наружной поверхности; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана (параметры, отмеченные штрихом, относятся к внутренней поверхности трубы);

$$\begin{split} \widetilde{T} &= \frac{R_2(\alpha T_{\rm c} + A_r q_{\rm n}) + R_1(\alpha' T_{\rm c}' + A_r' q_{\rm n}')}{2\overline{\alpha}R}, \quad \overline{\alpha} = \frac{R_2 \alpha + R_1 \alpha'}{2R}, \\ \overline{\varepsilon}_r &= \frac{R_2 \varepsilon_r + R_1 \varepsilon_r'}{2R}, \quad \overline{q}_V = \frac{1}{hR} \int_{R_1}^{R_2} q_V r \, dr. \end{split}$$

Отметим, что (7.17) отличается от уравнения для двумерного температурного поля T(y,z) $(y = R\varphi)$ в пластине толщиной h коэффициентом $\frac{R}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{R}{h} \ln \frac{R+h/2}{R-h/2}$ при первом слагаемом в правой части и коэффициентами $\frac{R_2}{R} = 1 + \frac{h}{2R}$ и $\frac{R_1}{R} = 1 - \frac{h}{2R}$ в выражениях для \tilde{T} , $\bar{\alpha}$ и $\bar{\varepsilon}_r$. Первый из этих коэффициентов меньше единицы на величину не более $\left(\frac{h}{2R-h}\right)^2$, т.е. при h/R < 0,1 отличие не превышает 0,5%, что существенно меньше той погрешности, с которой определены теплофизические свойства материалов. Таким образом, при h/R < 0,1 ММ процесса теплопроводности в трубе с однородной по толщине стенки hтемпературой можно заменить ММ этого процесса в пластине той же толщины, но при вычислении параметров \tilde{T} , $\bar{\alpha}$ и $\bar{\varepsilon}_r$ следует учитывать различие площадей наружной и внутренней поверхностей трубы.

Когда тело имеет малое термическое сопротивление во всех направлениях, его температуру T можно считать одинаковой по всему его объему. При этом отдельные участки внутренней поверхности S' тела с полостью (см. рис. 7.3) будут находиться в состоянии температурного равновесия и при наличии в полости *диатермичной среды* $A_r(N')q_{\Pi}(N') \equiv \varepsilon_r(N')\sigma_0 T^4(N'), N' \in S'$ (см. 7.1). В этом случае теплообмен излучением в полости не оказывает влияния на температуру тела. Если внешняя поверхность S тела имеет вогнутые участки, то при $\varepsilon_r = \text{const}$ вместо значения ε_r следует использовать значение $\widehat{\varepsilon}_r = \left(1 + \frac{S_0}{S}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\right)^{-1}$ [38], где S_0 — минимальная по площади невогнутая поверхность, «обтягивающая» такое тело.

В результате интегрирования уравнения теплопроводности по объему V тела с малым термическим сопротивлением получим [34]

$$\frac{C_{\rm T}}{S}\frac{dT}{dt} = \hat{\alpha}(\hat{T} - T) - \hat{\varepsilon}_r \sigma_0 T^4, \qquad (7.18)$$

где $C_{\rm T} = \int\limits_V c_V \, dV$ — полная теплоемкость тела;

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{S} \int_{S \cup S'} \alpha \, dS, \quad \widehat{T} = \frac{1}{\widehat{\alpha}S} \int_{S \cup S'} \alpha T_{c} \, dS + \frac{1}{\widehat{\alpha}S} \int_{S} A_{r} q_{\pi} \, dS + \frac{1}{\widehat{\alpha}S} \int_{V} q_{V} \, dV.$$

Ясно, что в случае сплошного тела $S' = \emptyset$, следовательно, интегралы по внутренней поверхности исчезают.

Когда условия теплообмена постоянны во времени t, т.е. в случае $\widehat{\alpha} = \text{const}$ и $\widehat{T} = \text{const}$, температура T тела при $t \to \infty$ стремится к равновесному значению \overline{T} , определяемому из (7.14) при $\overline{N} = \widehat{\varepsilon}_r \sigma_0 \widehat{T}^3 / \widehat{\alpha}$ и $\overline{\vartheta} = \overline{T} / \widehat{T}$. Если в некоторый момент времени, принимаемый за начальный (t=0), температура тела T_0 отличается от температуры \overline{T} , то связь между t и текущим значением температуры T(t) тела следует из решения (7.18):

$$t = \frac{1}{S} \int_{T_0}^{T(t)} \frac{C_{\mathrm{T}} dT}{\widehat{\alpha}(\widehat{T} - T) - \widehat{\varepsilon}_r \sigma_0 T^4}.$$

При отсутствии теплообмена путем конвективного переноса ($\widehat{\alpha} = 0$) получим $\frac{T(t)}{T_0} = \left(1 + 3\widehat{\varepsilon}_r \sigma_0 T_0^3 \frac{St}{C_r}\right)^{-1/3}$. Наоборот, если собственным излучением с поверхности тела можно пренебречь, то приходим к зависимости

$$T(t) = \widehat{T} - (\widehat{T} - T_0) \exp\left(-\widehat{\alpha} \frac{St}{C_{\mathrm{T}}}\right).$$
(7.19)

Величину $1/(\widehat{\alpha}S)$ можно рассматривать как термическое сопротивление при теплообмене путем конвективного переноса и проводить аналогию этой величины с электрическим сопротивлением резистора. Это позволяет при использовании аналогии между полной теплоемкостью $C_{\rm T}$ и емкостью электрического конденсатора перейти от *расчетной схемы* теплообмена тела (рис. 7.7) к эквивалентной электрической схеме (рис. 7.8). Эта схема представляет собой электрическую цепь, состоящую из источника разности потенциалов $\Delta U = \widehat{U} - U_0$, пропорциональной разности температур $\Delta T = \widehat{T} - T_0$, резистора сопротивлением R_e и конденсатора емкостью C_e . Аналогичными будут и





Рис. 7.8

ММ, описывающие процессы изменения температуры T(t) и напряжения U(t) при зарядке конденсатора, причем тепловой поток Q, передаваемый телу, будет пропорционален силе I_e тока в электрической цепи, а (7.19) будет соответствовать зависимость

$$U(t_e) = \widehat{U} - (\widehat{U} - U_0) \exp\left(-\frac{t_e}{R_e C_e}\right),$$

в которой масштаб для времени t_e в общем случае может отличаться от масштаба для t, но должен удовлетворять условию $t_e/t = R_e C_e \hat{\alpha} S/C_{\rm T}$.

Установленную аналогию между ММ принято называть электротепловой. Она позволяет для сложной тепловой системы построить эквивалентную электрическую схему, включающую резисторы и конденсаторы, относящиеся к пассивным электрическим двухполюсникам, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей для построения ММ тепловой системы.

7.3. Линейные модели теплопроводности

В линейных математических моделях (ММ) процесса теплопроводности в твердом теле теплофизические свойства тела принимают не зависящими от температуры, а условия теплообмена с окружающей средой — зависящими от температуры поверхности тела лишь линейно. В этом случае уравнение теплопроводности и граничные условия будут линейными. Построение и анализ таких ММ в дифференциальной форме подробно рассмотрены в литературе (см., например, [53,54,80]). Эта форма следует из (5.18), (5.20) и (5.21), если пренебречь первым слагаемым в правой части (5.18). Для изотропной среды с теплопроводностью $\lambda^{(T)}$ в (5.18) и (5.21) компоненты тензора теплопроводности следует представить в виде $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)} \delta_{ij}$, i, j = 1, 2, 3, где δ_{ij} символ Кронекера. Интегральную и вариационную формы линейных моделей процесса теплопроводности в однородном теле можно получить как частный случай соответствующих форм нелинейной ММ (см. 7.4). Более сложная ММ для неоднородного тела рассмотрена в 7.6.

Здесь остановимся на построении для процесса теплопроводности в однородном изотропном теле варианта ММ в виде граничного интегрального уравнения. Рассмотрим установившийся процесс теплопроводности в твердом теле объемом V, ограниченном поверхностью S. При $\lambda^{(T)} = \text{const}$ распределение T(M) $(M \in V)$ температуры удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\lambda^{(T)} \nabla^2 T(M) + q_V(M) = 0, \quad M \in V, \tag{7.20}$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты. Граничное условие запишем в виде, аналогичном (5.21):

$$\lambda^{(T)} \frac{\partial T(N)}{\partial x_i} n_i = \alpha(N) \big(T_{\rm c}(N) - T(N) \big), \quad N \in S, \tag{7.21}$$

где n_i — проекции единичного вектора внешней нормали к поверхности S на оси O_{X_i} системы пространственных координат; α — коэффициент теплообмена тела с окружающей средой, имеющей температуру T_c .

Функция

$$w(M, M_0) = \frac{1}{\lambda^{(T)} r(M, M_0)},$$
(7.22)

где $r(M, M_0)$ — расстояние между точками M и M_0 , описывает установившееся распределение температуры в пространстве, когда в фиксированной точке M_0 действует источник теплоты мощностью 4π Вт. Действительно, на поверхности сферы S_1 произвольного радиуса $r_1 = r(N_1, M_0) > 0$ с центром в точке M_0 плотность теплового потока $q_r = -\lambda^{(T)} \partial w(N_1, M_0) / \partial r = 1/r^2(N_1, M_0), N_1 \in S_1$, и суммарный тепловой поток $Q = 4\pi r_1^2 q_r = 4\pi$ равен мощности точечного источника. Следовательно, (7.22) удовлетворяет уравнению

$$\lambda^{(T)} \nabla^2 w(M, M_0) + 4\pi \,\delta_3(M, M_0) = 0, \tag{7.23}$$

где $\delta_3(M, M_0) - deльma-функция, обладающая свойством (5.60).$

Умножим (7.20) на функцию $w(M, M_0)$ $(M \in V)$ и с учетом теоремы Остроградского — Гаусса и известного равенства $w\nabla^2 T = \nabla \cdot (w\nabla T) - (\nabla w) \cdot \nabla T = \nabla \cdot (w\nabla T) - \nabla \cdot (T\nabla w) + T\nabla^2 w$, где $\nabla - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Гамильтона, проинтегрируем по объему тела V:

$$\int_{V} w \left(\lambda^{(T)} \nabla^{2} T + q_{V} \right) dV = \lambda^{(T)} \int_{V} T \nabla^{2} w \, dV + \int_{V} w q_{V} \, dV + \lambda^{(T)} \int_{S} \left(w \frac{\partial T}{\partial x_{i}} - T \frac{\partial w}{\partial x_{i}} \right) n_{i} \, dS = 0.$$

Отсюда, учитывая (5.60) и (7.23), получаем граничное интегральное уравнение (ГИУ)

$$\Omega(M_0)T(M_0) = \int_V q_V(M)w(M, M_0) dV(M) + \lambda^{(T)} \int_S \left(w(N, M_0) \frac{\partial T(N)}{\partial x_i} - T(N) \frac{\partial w(N, M_0)}{\partial x_i} \right) n_i dS(N), \quad (7.24)$$

где $M \in V$, $N \in S$ и $M_0 \in \overline{V}$; $\Omega(M_0) = 4\pi$ при $M_0 \in V$; $\Omega(M_0) = 0$ при $M_0 \notin \overline{V} = V \cup S$; $\Omega(M_0) = 2\pi$, если точка M_0 принадлежит гладкому участку поверхности S; значение $\Omega(M_0)$ равно значению внутреннего телесного угла с вершиной в точке M_0 , если точка M_0 совпадает с угловой точкой на поверхности S (см. 5.3). Из (7.24) с учетом (7.21) методом граничных элементов [11, 16, 17, 21, 34, 43] можно найти значения $T(M_0)$ в граничных точках $M_0 \in S$, а затем и значение $T(M_0)$ в любой внутренней точке $M_0 \in V$.

В случае двумерной области F, ограниченной контуром Γ , вместо (7.22) можно использовать функцию

$$w(M, M_0) = -\frac{1}{\lambda^{(T)}} \ln \frac{r(M, M_0)}{r_0}, \qquad (7.25)$$

где $r_0 = \text{const}$ — некоторый характерный размер области. Эта функция описывает установившееся распределение температуры в плоскости, которое вызвано действием линейного источника теплоты мощностью 2π Вт/м, приходящейся на единицу длины этого источника, пересекающего плоскость в точке M_0 . Действительно, через поверхность S'_1 прямого кругового цилиндра единичной высоты и произвольного радиуса $r_1 = r(N_1, M_0)$, описанную вокруг линейного источника, проходит тепловой поток $Q = -2\pi r_1 \lambda^{(T)} \frac{\partial w(N_1, M_0)}{\partial r} = 2\pi$. Следовательно, эта функция удовлетворяет уравнению $\lambda^{(T)} \nabla^2 w(M, M_0) + 2\pi \delta_2(M, M_0) = 0$ на плоскости, где $\delta_2(M, M_0)$ — дельта-функция, обладающая в случае функции $f(M), M \in \overline{F} = F \cup \Gamma$, непрерывной на замыкании \overline{F} области F, следующим свойством:

$$\int_{F} f(M)\delta_{2}(M,M_{0}) dF(M) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\overline{\Omega}(M_{0}) f(M_{0}), & M_{0} \in \overline{F}; \\ 0, & M_{0} \notin \overline{F}, \end{cases}$$

где $\overline{\Omega}(M_0) = 2\pi$ при $M_0 \in V$; $\overline{\Omega}(M_0) = 0$ при $M_0 \notin \overline{V} = V \cup S$; $\overline{\Omega}(M_0) = \pi$, если точка M_0 принадлежит гладкому участку поверхности S; значение $\overline{\Omega}(M_0)$ равно значению внутреннего угла (в радианах) с вершиной в точке M_0 в плоскости двумерной области, если точка M_0 совпадает с угловой точкой на поверхности S. Тогда после выкладок, аналогичных проведенным при получении (7.24), придем к ГИУ

$$\overline{\Omega}(M_0)T(M_0) = \int_F q_V(M)w(M, M_0) dF(M) + \lambda^{(T)} \int_{\Gamma} \left(w(N, M_0) \frac{\partial T(N)}{\partial x_i} - T(N) \frac{\partial w(N, M_0)}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma(N). \quad (7.26)$$

Для анизотропного тела в трехмерном случае [21,37] следует заменить (7.22) уравнением

$$w(M, M_0) = \sqrt{\frac{\det(r_{kl}^{(T)})}{r_{ij}^{(T)} \Delta x_j(M, M_0) \Delta x_i(M, M_0)}}, \quad k, l = 1, 2, 3$$

а в двумерном случае [36] — (7.25) уравнением

$$w(M, M_0) = -\frac{\sqrt{\det(r_{kl}^{(T)})}}{2} \ln \frac{r_{ij}^{(T)} \Delta x_j(M, M_0) \Delta x_i(M, M_0)}{r_0 \sqrt{\det(r_{mn}^{(T)})}}, \quad m, n = 1, 2,$$

где $r_{ij}^{(T)}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $\lambda_{ij}^{(T)}$; $\Delta x_i(M, M_0)$ — проекции $r(M, M_0)$ на координатные оси Ox_i . При этом вместо (7.24) получим

$$\Omega(M_0)T(M_0) = \int_V q_V(M) w(M, M_0) dV(M) + \int_S \lambda_{ij}^{(T)} \left(w(N, M_0) \frac{\partial T(N)}{\partial x_j} - T(N) \frac{\partial w(N, M_0)}{\partial x_j} \right) n_i dS(N),$$

а вместо (7.26) —

$$\begin{split} \overline{\Omega}(M_0)T(M_0) &= \int_F q_V(M) \, w(M,M_0) \, dF(M) + \\ &+ \int_{\Gamma} \lambda_{ij}^{(T)} \Big(w(N,M_0) \frac{\partial T(N)}{\partial x_j} - T(N) \frac{\partial w(N,M_0)}{\partial x_j} \Big) n_i \, d\Gamma(N). \end{split}$$

Если в точку $M_0 \in V_{\infty}$, принадлежащую неограниченной области V_{∞} , поместить мгновенный источник, выделяющий в момент времени t = t' количество теплоты, численно равное объемной теплоемкости c_V среды, то изменение температуры в точке $M \in V_{\infty}$ при t > t' будет описывать функция [21,54]

$$\overline{w}(M, M_0; t, t') = \frac{1}{8\left(\pi a(t - t')\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r(M, M_0)}{4a^{(T)}(t - r')}\right),\tag{7.27}$$

где $a^{(T)} = \lambda^{(T)}/c_V$ — температуропроводность среды. Используя эту функцию, ММ процесса неустановившейся теплопроводности, дифференциальная форма которой содержит уравнение

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a^{(T)} \nabla^2 T(M,t) + \frac{q_V(M,t)}{c_V}, \quad M \in V,$$

с начальным условием $T(M,0) = T^{\circ}(M)$ $(M \in V)$ и граничным условием вида (7.21)

$$\lambda^{(T)} \frac{\partial T(N,t)}{\partial x_i} n_i = \alpha(N,t) \left(T_{\rm c}(N,t) - T(N,t) \right), \quad N \in S,$$

можно также свести к ГИУ [34]

$$\begin{split} \Omega(M_0)T(M_0,t) &= \int\limits_V T^\circ(M)\overline{w}(M,M_0;t,t') \, dV(M) + \\ &+ a \int\limits_0^t dt' \int\limits_S \Big(\overline{w}(M,M_0;t,t') \frac{\partial T(N,t)}{\partial x_j} - T(N,t) \frac{\partial \overline{w}(M,M_0;t,t')}{\partial x_j} \Big) n_i dS(N) + \\ &+ \int\limits_0^t dt' \int\limits_V \frac{q_V(M,t)}{c_V} \overline{w}(M,M_0;t,t') \, dV(M). \end{split}$$

Для двумерной области F, ограниченной контуром Γ , вместо (7.27) следует использовать функцию

$$\overline{w}(M, M_0; t, t') = \frac{1}{4\pi a(t-t')} \exp\left(-\frac{r(M, M_0)}{4a(t-r')}\right).$$

Тогда получим ГИУ

$$\begin{split} \overline{\Omega}(M_0)T(M_0,t) &= \int_F T^\circ(M)\,\overline{w}(M,M_0;t,t')\,dF(M) + \\ &+ a \int_0^t dt' \int_{\Gamma} \Big(\overline{w}(M,M_0;t,t')\frac{\partial T(N,t)}{\partial x_j} - T(N,t)\frac{\partial \overline{w}(M,M_0;t,t')}{\partial x_j}\Big) n_i d\Gamma(N) + \\ &+ \int_0^t dt' \int_F \frac{q_V(M,t)}{c_V} \overline{w}(M,M_0;t,t')\,dF(M). \end{split}$$

Таким образом, представление MM процесса теплопроводности в виде ГИУ в сочетании с граничным условием позволяет понизить размерность задачи: в случае пространственной области искать неизвестные на ограничивающей поверхности, а в случае двумерной области на ограничивающем ее контуре.

7.4. Нелинейные модели теплопроводности

Необходимость построения нелинейных математических моделей (MM) теплопроводности применительно к процессам, в которых температура T может меняться в достаточно широких пределах, обусловлена зависимостью объемной теплоемкости c_V и теплопроводности материала тела от температуры и нелинейной зависимостью от Tобъемной плотности q_V мощности внутренних источников теплоты. Кроме того, нелинейные эффекты должны быть отражены в граничных условиях в силу нелинейной зависимости плотности теплового потока на поверхности тела от ее температуры. Причиной такой зависимости может быть существенное влияние на температурное состояние тела собственного теплового излучения или же изменение коэффициента теплообмена с окружающей средой при изменении температуры поверхности.

Рассмотрим тело, занимающее область V пространства, ограниченную кусочно гладкой поверхностью S (рис. 7.9). Материал тела считаем в общем случае неоднородным и анизотропным, т.е. его теплофизические характеристики зависят не только от температуры, но и от координат точки $M \in V$, а теплопроводность — еще и от направления осей выбранной прямоугольной системы координат. Тогда в силу закона сохранения энергии, опустив в уравнении теплопроводности (5.18) первое слагаемое в правой части, запишем

$$c_V(M,T) \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)}(M,T) \frac{\partial T(M,t)}{\partial x_j} \right) + q_V(M,t,T), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.28)$$

где t — время; $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты симметричного тензора теплопроводности в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$.



Рис. 7.9

Помимо (7.28) в ММ войдут начальные условия в виде (5.20), задающие распределение температуры $T^{\circ}(M)$ в теле в момент времени t = 0, принимаемый за начальный, и граничные условия

$$\lambda_{ij}^{(T)}(P,T)\frac{\partial T(P,t)}{\partial x_j}n_i(P) = \widehat{f}_2(P,t,T), \quad P \in S_q \subseteq S, \quad t > 0,$$
(7.29)

$$T(P,t) = f_1(P,t), \quad P \in S_T = S \setminus S_q, \quad t > 0,$$
 (7.30)

где $n_i(P)$ — направляющие косинусы единичного вектора n(P) внешней нормали к поверхности тела в точке $P \in S_q$ (см. рис. 7.9); $f_1(P,t)$ и $\widehat{f_2}(P,t,T)$ — заданные функции своих аргументов. Если краевые условия (5.20), (7.29) и (7.30) являются согласованными, т.е. $f_1(P,0) = T^{\circ}(P)$ при $P \in S_T$ и

$$\lambda_{ij}^{(T)}(P, T^{\circ}(P))\frac{\partial T^{\circ}(P)}{\partial x_{j}}n_{i}(P) = \widehat{f}_{2}(P, 0, T^{\circ}(P)), \quad P \in S_{q}$$

то искомое решение T(M,t) должно удовлетворять (7.28) при $t \ge 0$, а в противном случае — при t > 0.

Дифференциальной форме MM (7.28)–(7.30), (5.20) процесса теплопроводности можно поставить в соответствие интегральную форму MM [34, 36, 44]

$$\int_{V} \left(\frac{\partial w(M)}{\partial x_{i}} \lambda_{ij}^{(T)}(M,T) \frac{\partial T(M,t)}{\partial x_{j}} - w(M) \left(q_{V}(M,t,T) - c_{V}(M,T) \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \right) \right) dV(M) - \int_{S_{q}} w(P) \, \hat{f}_{2}(P,t,T) \, dS(P) = 0, \quad (7.31)$$

где w(M) — функция, непрерывная в замкнутой области $\overline{V} = V \cup S$ и имеющая в V кусочно непрерывные производные по пространственным координатам, а в точках $P \in S_T$ равная нулю, т.е. $w(P) = 0, P \in S_T$. Такая форма MM позволяет искать приближенное решение нелинейной задачи теплопроводности в виде

$$T(M,t) = \hat{f}_1(M,t) + \sum_{n=1}^{N_*} a_n(t) w_n(M), \quad t > 0, \quad M \in V,$$
(7.32)

где $\widehat{f}_1(M,t) = f_1(M,t)$ при $M \in S_T$; $a_n(t)$ — искомые функции времени; $w_n(M)$ — система N_* линейно независимых в $V \cup S_T$ функций, причем $w_n(M) = 0$ при $M \in S_T$. Функции $f_1(M,t)$ и $w_n(M)$ должны быть непрерывны в области V и дифференцируемы в ней по пространственным координатам всюду, кроме, может быть, множества точек, образующих линии или поверхности.

Подставляя (7.32) в (7.31) и последовательно полагая $w(M) = w_n(M)$, $n = \overline{1, N_*}$, после интегрирования получаем систему N_* нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно $a_n(t)$. Для решения такой системы в общем случае необходимо привлечь численные методы. Аппроксимация искомого решения способом, характерным для метода конечных элементов [9, 25, 34, 45, 128], в простейшем варианте этого метода также приведет к системе нелинейных ОДУ относительно изменяющихся во времени значений температур в узлах сетки конечных элементов, аппроксимирующей замкнутую область \overline{V} .

Если материал тела изотропен и имеет теплопроводность $\lambda^{(T)}(M,T)$, то в (7.28), (7.29) и (7.31) следует заменить $\lambda_{ij}^{(T)}(M,T)$ на $\lambda^{(T)}(M,T)\delta_{ij}$, $M \in V \cup S_q$, i, j = 1, 2, 3, где δ_{ij} — символ Кронекера. В случае установившегося процесса теплопроводности в анизотропном теле распределение температуры T(M), функции q_V в (7.28), f_1 в (7.30) и \hat{f}_2 в (7.29) не зависят от времени t, а левая часть (7.28) обращается в нуль. При этом вместо (7.31) следует использовать уравнение

$$\int_{V} \left(\frac{\partial w(M)}{\partial x_{i}} \lambda_{ij}^{(T)}(M,T) \frac{\partial T(M)}{\partial x_{j}} - w(M)q_{V}(M,T) \right) dV - \int_{S_{q}} w(P)\hat{f}_{2}(P,T) dS = 0, \quad (7.33)$$

а искомое распределение температуры аппроксимировать соотношением

$$T(M) = \hat{f}_1(M) + \sum_{n=1}^{N_*} a_n w_n(M), \quad M \in V,$$
(7.34)

где $\widehat{f}_1(M) = f_1(M)$ при $M \in S_T$; a_n — искомые коэффициенты. Если материал изотропный, то (7.33) приобретает следующий вид:

$$\int_{V} \left(\frac{\partial w(M)}{\partial x_{i}} \lambda^{(T)}(M,T) \frac{\partial T(M)}{\partial x_{i}} - w(M)q_{V}(M,T) \right) dV - \int_{S_{q}} w(P) \, \hat{f}_{2}(P,T) \, dS = 0. \quad (7.35)$$

Пусть материал тела изотропный и однородный, т.е. его теплопроводность $\lambda^{(T)}(T)$ не зависит явно от положения точки $M \in V \cup S_q$, но

является функцией температуры. Введем функцию

$$\psi(M) = \int_{T_{\star}}^{T(M)} \lambda^{(T)}(T) dT, \qquad (7.36)$$

где T_* — нижняя грань множества ожидаемых значений температуры в теле. Тогда, опуская обозначения аргументов, полагая $w = \delta \psi = \lambda^{(T)} \delta T$ и учитывая, что $\frac{\partial w}{\partial x_i} = \delta \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \ \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial w}{\partial x_i} \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{\delta}{2} \left(\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2$, вместо (7.35) получим равенство $\delta J[T, \delta T] = 0$, где

$$J[T] = \int_{V} \left(\frac{(\lambda^{(T)} \nabla T)^2}{2} - \int_{T_*}^{T} q_V \lambda^{(T)} dT \right) dV - \int_{S_q} dS \int_{T_*}^{T} \widehat{f}_2 \lambda^{(T)} dT. \quad (7.37)$$

Здесь $\nabla - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Гамильтона.

Функционал (7.37) допустимо рассматривать на распределениях температуры T(M), непрерывных в области V и дифференцируемых в ней по пространственным координатам всюду, кроме, может быть, множества точек, образующих линии или поверхности. Нелинейная стационарная задача теплопроводности может не иметь решения, а при наличии решения оно может быть не единственным, но любое решение $T^*(M)$ должно удовлетворять условию стационарности $\delta J[T^*, \delta T] = 0$ функционала J[T], т.е. $T^*(M)$ является стационарной точкой этого функционала.

Функционал (7.37) в сочетании с его условием стационарности составляет вариационную форму MM процесса стационарной теплопроводности. Для выяснения экстремальных свойств этого функционала исследуем его на выпуклость, преобразовав (7.37) с учетом (7.36) к виду

$$J_*[\psi] = \int_V \left(\frac{(\nabla\psi)^2}{2} - \int_0^\psi \overline{q}_V d\psi\right) dV - \int_{S_q} dS \int_0^\psi \overline{f}_2 d\psi, \tag{7.38}$$

где $\overline{q}_V(M,\psi) = q_V(M,T(\psi)); \ \overline{f}_2(P,\psi) = \widehat{f}_2(P,T(\psi)); \ T(\psi)$ — функция, обратная функции $\psi(T)$. Отметим, что функция $T(\psi)$ однозначная, поскольку при $\lambda^{(T)} > 0$ (7.36) определяет строго монотонную функцию $\psi(T)$.

Согласно (7.36) истинному распределению $T^*(M)$ соответствует распределение $\psi^*(M)$, удовлетворяющее условию $\delta J_*[\psi^*, \delta \psi] = 0$ стационарности функционала $J_*[\psi]$. Этот функционал будет строго выпуклым

вниз [34], если при любых допустимых распределениях $\psi'(M) \not\equiv \psi''(M)$ $(M \in V \cup S_q)$ и $\beta \in (0, 1)$ выполнено строгое неравенство

$$\beta J_*[\psi'] + (1 - \beta) J_*[\psi''] - J_*[\psi'''] > 0, \qquad (7.39)$$

где $\psi'''(M) = \beta \psi'(M) + (1 - \beta) \psi''(M), M \in V \cup S_q$. Подставив $J_*[\psi]$ в левую часть (7.39), получим

$$R(\psi',\psi'') = \frac{1-\beta}{2}\beta \int_{V} (\nabla(\psi'-\psi''))^2 dV - \int_{V} \left(\beta \int_{\psi''}^{\psi'} \overline{q}_V d\psi - \int_{\psi''}^{\psi'''} \overline{q}_V d\psi\right) dV - \int_{S_q} \left(\beta \int_{\psi''}^{\psi'} \overline{f}_2 d\psi - \int_{\psi''}^{\psi'''} \overline{f}_2 d\psi\right) dS.$$

Разложим зависимости \overline{q}_V и \overline{f}_2 от ψ в ряд Тейлора относительно распределения $\psi^*(M)$ $(M \in V \cup S_q)$ и, предположив близость $\psi'(M)$ и $\psi''(M)$ к $\psi^*(M)$ и ограничившись в разложении первыми двумя слагаемыми, запишем

$$\overline{q}_V = \overline{q}_V^* + q_V'(\psi - \psi^*), \quad \overline{f}_2 = \overline{f}_2^* + f_2'(\psi - \psi^*), \quad (7.40)$$

где $\overline{q}_V^* = \overline{q}_V(M,\psi^*)$ и $q_V' = \partial \overline{q}_V / \partial \psi \big|_{\psi=\psi^*}, M \in V; \overline{f}_2^* = \overline{f}_2(P,\psi^*)$ и $f_2' = \partial \overline{f}_2 / \partial \psi \big|_{\psi=\psi^*}, P \in S_q$. Подставив (7.40) в выражение для $R(\psi',\psi'')$, получим

$$R(\psi',\psi'') = \frac{1-\beta}{2}\beta \left(\int\limits_{V} \left(\nabla(\psi'-\psi'')\right)^2 dV - \int\limits_{V} \frac{\partial \overline{q}_V}{\partial \psi}\Big|_{\psi=\psi^*} (\psi'-\psi'')^2 dV - \int\limits_{S_q} \frac{\partial \overline{f}_2}{\partial \psi}\Big|_{\psi=\psi^*} (\psi'-\psi'')^2 dS\right).$$

Отсюда следует, что $R(\psi',\psi'')>0,$ если выполнены неравенства

$$\frac{\partial \overline{q}_V}{\partial \psi}\Big|_{\psi=\psi^*} \leqslant 0, \ M \in V; \quad \frac{\partial \overline{f}_2}{\partial \psi}\Big|_{\psi=\psi^*} \leqslant 0, \ P \in S_q, \tag{7.41}$$

или равносильные им неравенства

$$\frac{\partial q_V}{\partial T}\Big|_{T=T^*} \leqslant 0, \ M \in V; \quad \frac{\partial f_2}{\partial T}\Big|_{T=T^*} \leqslant 0, \ P \in S_q.$$
(7.42)

Если неравенства (7.42) верны не только в стационарной точке функционала (7.37), а на всем множестве допустимых функций T(M), то (7.37) будет на этом множестве строго выпуклым вниз функционалом, ограниченным снизу, т.е. будет иметь единственный минимум [12], со-ответствующий единственному решению задачи.

Условия (7.42) могут быть нарушены при наличии в объеме тела или на его поверхности источников теплоты, мощность которых возрастает с повышением температуры T. Такие источники могут быть, например, связаны с протеканием в материале тела экзотермических реакций, скорость которых растет с увеличением T в соответствии с законом Аррениуса пропорционально множителю $\exp(-\Pi_r^*/(k_B T))$, где $\Pi_r^* > 0$ — энергия активации реакции, а k_B — постоянная Больцмана. Аналогичная ситуация возникает при поглощении в объеме тела ионизирующего излучения, когда коэффициент поглощения возрастает с повышением температуры. Для электропроводных тел при постоянной плотности проходящего через них электрического тока мощность объемного энерговыделения пропорциональна удельному электросопротивлению. Она обычно возрастает с увеличением T, что также может стать причиной нарушения первого условия (7.42).

Второе условие (7.42) выполняется для большинства известных законов теплообмена на поверхности тела. Например, при комбинированном теплообмене путем конвективного переноса и излучения (см. 7.1) в случае стационарного процесса теплопроводности правая чась (7.29) имеет вид

$$\widehat{f}_2(P,T) = \alpha(P,T) \big(T_c(P) - T(P) \big) - \varepsilon_r(P,T) \sigma_0 T^4(P) + A_r(P,T) q_{\mathfrak{n}}(P), \ P \in S_q,$$

где α — коэффициент теплообмена с окружающей средой, имеющей температуру T_c ; ε_r и A_r — коэффициенты излучения и поглощения поверхности; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; $q_{\rm n}$ — плотность потока излучения, падающего на поверхность. В этом случае получим

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{\partial \left(\alpha (T_{\rm c} - T)\right)}{\partial T} - 4\varepsilon_r \sigma_0 T^3 - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T} \sigma_0 T^4 + \frac{\partial A_r}{\partial T} q_{\rm n}.$$

Влияние двух последних членов в правой части этого выражения обычно мало́ вследствие слабой зависимости ε_r и A_r от T для реальных материалов. Поэтому заведомо $\partial \hat{f_2}/\partial T \leq 0$, если є повышением температуры T поверхности возрастает плотность $q_{\kappa} = \alpha(T - T_c)$ теплового потока, отводимого от поверхности тела посредством конвекции. Это справедливо для различных режимов конвективного теплообмена, за исключением режима кипения жидкости на поверхности, переходного от пузырькового к пленочному. В этом случае значение $\partial q_{\kappa}/\partial T$ существенно отрицательно [34], что может вызвать нарушение второго условия (7.42). Нарушение условий (7.42) означает, что решение нелинейной задачи теплопроводности может быть не единственным или вообще отсутствовать. В последнем случае функционал не имеет стационарной точки и не достигает экстремальных значений. При нескольких возможных решениях функционал имеет несколько экстремумов, причем устойчивым распределениям температуры соответствуют его минимальные значения, а неустойчивым — максимальные [34].

Если в (7.28) аппроксимировать производную по времени t соотношением $\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \approx \frac{T_k(M) - T_{k-1}(M)}{\Delta t_k}$, $M \in V$, где $T_{k-1}(M)$ и $T_k(M)$ — распределения температуры в теле в моменты времени t_{k-1} и $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ соответственно, т.е. в начале и в конце конечного промежутка времени Δt_k , то обобщением (7.37) на случай нестационарной задачи теплопроводности в изотропном однородном теле будет функционал

$$J_{k}[T_{k}] = \int_{V} \left(\frac{(\lambda_{k}^{(T)} \nabla T_{k})^{2}}{2} - \int_{T_{\star}}^{T_{k}} \widetilde{q}_{V,k} \lambda^{(T)} dT \right) dV - \int_{S_{q}} dS \int_{T_{\star}}^{T_{k}} \widehat{f}_{2,k} \lambda^{(T)} dT, \quad (7.43)$$

где $\tilde{q}_{V,k} = q_V(M, t_k, T) + c_V(M, T) \frac{T_k(M) - T_{k-1}(M)}{\Delta t_k}, M \in V; \quad \hat{f}_{2,k} = \hat{f}_2(P, t_k, T), P \in S_q$, причем для первого промежутка времени (k = 1)в $\tilde{q}_{V,k}(M,T)$ значению $T_{k-1}(M)$ соответствует начальное распределение температуры $T^{\circ}(M), M \in V$.

Функционал (7.43) следует рассматривать на распределениях $T_k(M)$, $M \in V$, удовлетворяющих (7.30) в виде $T_k(P) = f_1(P, t_k)$, $P \in S_T$. В стационарной точке $T_k^*(M)$ он достигает минимума при выполнении условий

$$\frac{\partial \widetilde{q}_{V,k}}{\partial T}\Big|_{T=T_k^*} \leqslant 0, \ M \in V; \quad \frac{\partial \widehat{f}_{2,k}}{\partial T}\Big|_{T=T_k^*} \leqslant 0, \ P \in S_q,$$

которые следуют из (7.42). Благодаря тому, что теплоемкость c_V положительна и она увеличивается при возрастании температуры для большинства веществ, первое из этих условий будет не более жестким, чем первое условие (7.42).

Для неоднородного анизотропного тела построение вариационной формы MM возможно в некоторых частных случаях зависимости компонент $\lambda_{ij}^{(T)}(M,T)$ тензора теплопроводности от координат точки $M \in V$ и температуры T [34]. Например, если $\lambda_{ij}^{(T)}(M,T) = A_{ij}(M)\overline{\lambda}^{(T)}(T)$, где $A_{ij}(M)$ — компоненты симметричного *тензора* $\widehat{\mathbf{A}}(M)$ *второго ран*га, соответствующего положительно определенной матрице третьего порядка (см. П1.2), то, положив в (7.33) $w = \overline{\lambda}^{(T)} \delta T$, вместо (7.37) получим

$$J_{a}[T] = \int_{V} \left(\frac{(\overline{\lambda}^{(T)})^{2}}{2} \frac{\partial T}{\partial x_{i}} A_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_{j}} - \int_{T_{\bullet}}^{T} q_{V} \overline{\lambda}^{(T)} dT \right) dV - \int_{S_{q}} dS \int_{T_{\bullet}}^{T} \widehat{f}_{2} \overline{\lambda}^{(T)} dT. \quad (7.44)$$

Отсюда несложно перейти к функционалу для неустановившегося процесса теплопроводности, аналогичному (7.43). При выполнении условий (7.42) функционал (7.44) сохраняет экстремальные свойства функционала (7.37).

7.5. Двойственная вариационная форма модели

При количественном анализе математических моделей (MM) проиессов теплопроводности приближенными методами первостепенное значение приобретают контроль сходимости последовательных приближений и оценка точности полученных результатов, позволяющая судить о достоверности найденного температурного состояния тела. Осуществить контроль сходимости и получить оценку точности удается на основе двойственной вариационной формы ММ таких процессов, включающей два альтернативных функционала, которые в своих стационарных точках достигают совпадающих значений, но для одного из функционалов оно является минимумом, а для другого — максимумом (см. П2.3). В 7.4 установлено, что функционал (7.37) при определенных условиях является строго выпуклым, т.е. имеет единственный минимум, соответствующий истинному распределению $T^*(M)$ $(M \in V)$ температуры в теле, занимающем область V пространства. Построим альтернативный по отношению к (7.37) функционал, достигающий максимума на истинном решении стационарной задачи теплопроводности.

Расширим область определения функционала (7.37), введя векторную функцию q(M) плотности теплового потока, удовлетворяющую условию

$$\boldsymbol{q}(M) = -\lambda^{(T)} \big(T(M) \big) \nabla T(M), \quad M \in V \cup S_q, \tag{7.45}$$

где $\lambda^{(T)}(T)$ — зависящая от температуры теплопроводность материала тела; ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, а $S_q \subseteq S$ участки поверхности S тела, на которых заданы граничные условия вида (7.29). Тогда вместо (7.37) получим функционал (аргументы функций опущены)

$$I_1[T, q] = \int_V \left(\frac{q^2}{2} - \int_{T_*}^T q_V \lambda^{(T)} dT\right) dV - \int_{S_q} dS \int_{T_*}^T \widehat{f}_2 \lambda^{(T)} dT, \qquad (7.46)$$

где T_* — нижняя грань множества ожидаемых значений температуры в различных точках тела; $q_V(M,T)$ — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты; $\hat{f}_2(P,T)$ — функция, заданная в точках $P \in S_q$ в граничных условиях вида (7.29). Затем при помощи векторного множителя Лагранжа m(M), определенного в точках $M \in V \cup S_q$, введем условие (7.45) в (7.46):

$$I_2[T, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}] = I_1[T, \boldsymbol{q}] - \int\limits_V \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{q} + \lambda^{(T)} \nabla T) \, dV.$$

Равенство нулю вариации этого функционала, преобразованной при помощи формулы Остроградского — Гаусса,

$$\delta I_2[T, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}, \delta T, \delta \boldsymbol{q}, \delta \boldsymbol{m}] = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{m} - q_V) \lambda^{(T)} \delta T dV + \int_V (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{m}) \cdot \delta \boldsymbol{q} dV - \int_V (\boldsymbol{q} + \lambda^{(T)} \nabla T) \cdot \delta \boldsymbol{m} dV - \int_{S_q} (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} + \hat{f}_2) \lambda^{(T)} \delta T dS = 0,$$

где n(P) — единичный вектор внешней нормали в точке $P \in S_q$, дает условия стационарности $\nabla \cdot \boldsymbol{m}(M) = q_V(M, T(M))$ и $\boldsymbol{q}(M) = \boldsymbol{m}(M)$, $M \in V$, а также $\boldsymbol{m}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) = -\hat{f_2}(P, T(P))$, $P \in S_q$, причем (7.45) играет роль дополнительного условия стационарности. Второе условие стационарности означает, что $\boldsymbol{m}(M) = \boldsymbol{q}(M)$, поэтому вместо $I_2[T, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}]$ с учетом (7.46) можно записать

$$I_3[T, q] = J[T] - \frac{1}{2} \int_V (q + \lambda^{(T)} \nabla T)^2 dV, \qquad (7.47)$$

где J[T] соответствует (7.37). Ясно, что $I_3[T, q] \leq J[T]$, а стационарные значения этих функционалов совпадают: $I_3[T^*, q^*] = J[T^*]$, причем, согласно (7.45), $q^*(M) = -\lambda^{(T)}(T^*(M)) \nabla T^*(M)$, $M \in V$.

Используем два оставшихся условия стационарности для $I_2[T, q, m]$, а именно, приняв во внимание, что m(M) = q(M),

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q}(M) = q_V, \ M \in V; \quad \boldsymbol{q}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) = -\hat{f}_2, \ P \in S_q, \tag{7.48}$$

в качестве дополнительных условий стационарности для функционала (7.47) и после его преобразования с учетом (7.37) получим [34]

$$I[T, q] = -\int_{V} \left(\frac{|q(M)|^2}{2} - \int_{T_{\star}}^{T(M)} \frac{\partial q_V(M, T)}{\partial T} dT \int_{T_{\star}}^{T} \lambda^{(T)}(T') dT' \right) dV - \int_{S_T} q(P) \cdot \mathbf{n}(P) f_1(P) dS + \int_{S_q} dS \int_{T_{\star}}^{T(P)} \frac{\partial \widehat{f}_2(P, T)}{\partial T} dT \int_{T_{\star}}^{T} \lambda^{(T)}(T') dT', \quad (7.49)$$

где $f_1(P)$ — функция, заданная в точках $P \in S_T = S \setminus S_q$ в граничных условиях первого рода вида (7.30). Допустимыми для этого функционала будут распределения T(M) и q(M), удовлетворяющие (7.48), причем в его стационарной точке $I[T^*, q^*] = J[T^*]$. Для исследования его экстремальных свойств преобразуем (7.49) с учетом (7.36) к виду

$$I_*[\psi, q] = -\int\limits_V \left(\frac{|q(M)|^2}{2} - \int\limits_0^{\psi(M)} \psi \frac{\partial \overline{q}_V(M, \psi)}{\partial \psi} d\psi\right) dV - \\ -\int\limits_{S_T} q(P) \cdot n(P) f_1(P) dS + \int\limits_{S_q} dS \int\limits_0^{\psi(P)} \psi \frac{\partial \overline{f}_2(P, \psi)}{\partial \psi} d\psi,$$

где $\overline{q}_V(M,\psi) = q_V(M,T(\psi)); \ \overline{f}_2(P,\psi) = \widehat{f}_2(P,T(\psi))$ (см. 7.4).

Функционал $I_*[\psi, q]$ будет строго выпуклым вверх [12, 34], если при любых допустимых распределениях $\psi'(M) \not\equiv \psi''(M)$ $(M \in V \cup S_q)$ и $q'(M) \not\equiv q''(M)$ $(M \in V \cup S_T)$ выполнено строгое неравенство

$$\beta I_*[\psi', \mathbf{q}'] + (1 - \beta) I_*[\psi'', \mathbf{q}''] - I_*[\psi''', \mathbf{q}'''] < 0, \quad \beta \in (0, 1).$$
(7.50)

Здесь $\psi'''(M) = \beta \psi'(M) + (1-\beta) \psi''(M); q'''(M) = \beta q'(M) + (1-\beta) q''(M).$ Подставив $I_*[\psi, q]$ в (7.50), с учетом (7.40) получим, что

$$-\frac{1-\beta}{2}\beta\left(\int\limits_{V}|\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}''|^{2}dV-\int\limits_{V}\frac{\partial\overline{q}_{V}}{\partial\psi}(\psi'-\psi'')^{2}dV-\int\limits_{S_{q}}\frac{\partial\overline{f}_{2}}{\partial\psi}(\psi'-\psi'')^{2}dS\right)<0$$

при условии выполнения (7.41) или равносильных им неравенств (7.42). Если неравенства (7.42) верны не только в стационарной точке функционала (7.49), а на всем множестве допустимых функций T(M), то (7.49) будет на этом множестве строго выпуклым вверх функционалом, ограниченным сверху, т.е. будет иметь единственный максимум [12], соответствующий единственному решению задачи. Таким образом, для функционалов (7.37) и (7.49) и их стационарных значений справедлива цепочка неравенств

$$J[T] \ge J[T^*] = I[T^*, \boldsymbol{q}^*] \ge I[T, \boldsymbol{q}].$$

$$(7.51)$$

Поскольку $J_*[\psi^*] = J[T^*]$, из (7.51) следуют также неравенства

$$J_{*}[\psi] \ge J_{*}[\psi^{*}] = I_{*}[\psi^{*}, q^{*}] \ge I_{*}[\psi, q].$$
(7.52)

Совместное использование альтернативных функционалов (7.37) и (7.49) позволяет оценить точность приближенного решения задачи. Из (7.47) следует, что на допустимых распределениях T(M) и q(M) их разность равна

$$\Delta J[T, \boldsymbol{q}] = J[T] - I[T, \boldsymbol{q}] = \frac{1}{2} \int_{V} |\boldsymbol{q} + \lambda^{(T)} \nabla T|^2 \, dV.$$

Это выражение также является функционалом с единственным условием стационарности (7.45). В стационарной точке он равен нулю и достигает минимального значения. При выполнении неравенств (7.42) для любых допустимых значений T этот минимум единственный. Поэтому значение $\Delta J[T, q]$, совпадающее со среднеквадратичной погрешностью в выполнении условия (7.45), при допустимых распределениях T(M) и q(M) можно рассматривать как критерий, характеризующий степень близости этих распределений к истинному решению нелинейной задачи. По изменению этого значения при последовательных приближениях к истинному решению нетрудно контролировать сходимость итерационного процесса.

Функционал для неустановившегося процесса теплопроводности, альтернативный по отношению к (7.43), следует из (7.49) при замене в нем и в относящихся к нему граничных условиях q_V на $\tilde{q}_{V,k} =$ $= q_V(M, t_k, T) + c_V(M, T)(T_k(M) - T_{k-1}(M))/\Delta t_k (M \in V)$ и \hat{f}_2 на $\hat{f}_{2,k} =$ $= \hat{f}_2(P, t_k, T), P \in S_q$, где $q_V(M, t_k, T)$ и $\hat{f}_2(P, t_k, T)$ — значения в момент времени $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ заданных функций, входящих в (7.28) и (7.29) соответственно; Δt_k — промежуток времени (см. 7.4); c_V — объемная *теплоемкость* материала тела; $T_{k-1}(M)$ — температура в точке $M \in V$ в момент времени t_{k-1} . При этом сам функционал (7.49) и все зависящие от времени величины следует снабдить индексом k, указывающим на то, что рассматривается температурное состояние тела в момент времени t_k .

Альтернативный по отношению к (7.44) функционал в случае неоднородного анизотропного материала нетрудно построить по той же схеме, что и (7.49). Если компоненты тензора теплопроводности можно представить в виде $\lambda_{ij}^{(T)}(M,T) = A_{ij}(M)\overline{\lambda}^{(T)}, \ i,j=1,2,3$ (см. 7.4), то вместо (7.49) получим

$$\begin{split} I_{a}[T,q] &= -\int\limits_{V} \left(\frac{q_{i}(M)B_{ij}(M)q_{j}(M)}{2} - \right. \\ &- \int\limits_{T_{\star}}^{T(M)} \frac{\partial q_{V}(M,T)}{\partial T} dT \int\limits_{T_{\star}}^{T} \overline{\lambda}^{(T)}(T') dT' \right) dV - \\ &- \int\limits_{S_{T}} q_{i}(P)n_{i}(P)f_{1}(P) dS + \int\limits_{S_{q}} dS \int\limits_{T_{\star}}^{T(P)} \frac{\partial \widehat{f}_{2}(P,T)}{\partial T} dT \int\limits_{T_{\star}}^{T} \overline{\lambda}^{(T)}(T') dT', \end{split}$$

где q_i — проекции вектора q на оси Ox_i системы пространственных координат; B_{ij} — элементы матрицы третьего порядка, обратной матрице с элементами A_{ij} ; n_i — направляющие косинусы единичного вектора n. При выполнении условий (7.42) этот функционал на истинном решении достигает максимума. По аналогии с (7.43) этот функционал можно обобщить на случай неустановившегося процесса теплопроводности.

Основная трудность практического использования альтернативных функционалов состоит в сложности построения допустимых распределений $q(M), M \in V \cup S_q$, удовлетворяющих дополнительным условиям (7.48). Эту трудность можно преодолеть путем представления q(M)через функцию тока теплового потока [34].

7.6. Сопряженная задача для неоднородного тела

В инженерной практике нередко возникает необходимость в анализе температурного состояния узлов и агрегатов теплотехнических устройств, состоящих из деталей сложной формы и выполненных из разнородных материалов. Тепловой контакт между этими деталями в общем случае не является идеальным, а на контактных поверхностях могут находиться теплоемкие массы и действовать источники теплоты. В таком случае возникает необходимость в построении математической модели (MM) процесса теплопроводности в неоднородном теле с учетом выполнения условий сопряжения температурных полей на контактных поверхностях соприкасающихся деталей.

Для нелинейной сопряженной задачи теплопроводности в неоднородном теле, когда *теплопроводность среды* зависит и от температуры, и от *пространственных координат*, в общем случае не удается построить функционалы, которые бы имели такие же экстремальные свойства, как и функционалы для нелинейной задачи в однородном теле (см. 7.4 и 7.5). Чтобы и в случае сопряженной задачи использовать преимущество двойственной вариационной формы MM и располагать критерием для оценки сходимости и погрешности приближенных решений, целесообразно учитывать зависимость от температуры теплопроводности материалов, составляющих неоднородное тело, последовательными приближениями через зависимость от пространственных координат. Тогда все остальные нелинейные факторы, связанные с процессом теплопроводности, удается учесть непосредственно.

В каждой части с номером $n = \overline{1, N}$ неоднородного тела, состоящего из N частей, которые занимают области V_n (рис. 7.10), установившееся распределение температуры $T_n(M_n)$ ($M_n \in V_n$) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(n)}(M_n) \frac{\partial T_n(M_n)}{\partial x_j} \right) + q_V^{(n)} \left(M_n, T_n(M_n) \right) = 0, \ i, j = 1, 2, 3,$$
(7.53)

где $\lambda_{ij}^{(n)}$ — компоненты тензора теплопроводности материала этой части в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ (если материал этой части изотропен и имеет теплопроводность $\lambda_n^{(T)}(M_n)$, то $\lambda_{ij}^{(n)} = \lambda_n^{(T)} \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера); $q_V^{(n)}$ — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты в этой части неоднородного тела.



Рис. 7.10

В общем случае поверхность каждой части может включать: участок S_n , на котором заданы нелинейные *граничные условия* вида (7.29)

$$\lambda_{ij}^{(n)}(P_n)\frac{\partial T_n(P_n)}{\partial x_j}n_i(P_n) = f_n\big(N, T_n(P_n)\big), \quad P_n \in S_n,$$
(7.54)

где $n_i(P_n)$ — направляющие косинусы вектора $n(P_n)$ внешней нормали к поверхности S_n в точке P_n ; f_n — известная функция своих аргументов; участок S'_n , на котором задано распределение температуры

$$T_n(P_n) = f'_n(P_n), \quad P_n \in S'_n,$$
 (7.55)

и участки контакта S_{sn}, на которых заданы условия теплообмена

$$\lambda_{ij}^{(n)}(P_n)\frac{\partial T_n(P_n)}{\partial x_j}n_i(P_n) = f_{sn}\left(P_n, T_s(P_s) - T_n(P_n)\right), \ P_n, P_s \in S_{sn}, \ (7.56)$$

с тонкой промежуточной прослойкой, имеющей одинаковую по толщине температуру $T_s(P_s)$. Здесь f'_n и f_{sn} — известные функции своих аргументов. В частном случае $f_{sn}(P_n, T_s(P_s) - T_n(P_n)) = \alpha_{sn}(P_s)(T_s(P_s) - T_n(P_n))$, где α_{sn} — коэффициент контактного теплообмена.

Передача теплоты вдоль прослойки в силу ее малой толщины не учитывается. В прослойке могут действовать источники теплоты, мощность которых имеет поверхностную плотность $q_s(P_s, T(P_s))$, так что в прослойке, разделяющей части неоднородного тела с номерами $m, n = \overline{1, N}$, должно выполняться условие теплового баланса

$$f_{sm}(P_m, T_s(P_s) - T_m(P_m)) + f_{sn}(P_n, T_s(P_s) - T_n(P_n)) = = q_s(P_s, T(P_s)), \quad P_m, P_n, P_s \in S_{sm} \cap S_{sn}.$$
(7.57)

Здесь символ \cap операции пересечения множеств означает, что точки P_m , P_n и P_s принадлежат одновременно участкам S_{sm} и S_{sn} поверхностей контактирующих частей с номерами m и n. Объединим все участки контактных поверхностей и обозначим их S_s , а точки P_m и P_n примем совпадающими с соответствующей точкой $P_s \in S_s$, хотя значения температур $T_m(P_s)$, $T_n(P_s)$ и $T_s(P_s)$ в общем случае не совпадают между собой.

В частном случае прослойка может разделять две части неоднородного тела, выполненые из одинакового материала, но при этом таким частям следует присваивать различные номера. Пусть прослойка лишь частично внедрена в область V_{α} , занятую однородным материалом, заполняя узкую щель или трещину. Тогда индексы m и n в (7.57) дают возможность различать функции $f_{s\alpha}$ и температуры $T_{\alpha}(P_s)$ по разные стороны от такой прослойки. Отметим, "что (7.56) и (7.57) в случае установившегося процесса теплопроводности обобщают условия вида (7.9).

Таким образом, совокупность уравнений (7.53)–(7.57) является $\partial u \phi$ ференциальной формой ММ установившегося процесса теплопроводности в неоднородном теле. Для построения функционала, в стационарной точке которого будут выполнены все эти равенства, умножим (7.53) на вариацию $\delta T_n(M_n)$ $(M_n \in V_n)$ и проинтегрируем по V_n , умножим (7.54) на $\delta T_n(P_n)$ $(P_n \in S_n)$ и проинтегрируем по S_n , а (7.56) и (7.57) умножим соответственно на $\delta T_n(P_s)$ и $\delta T_s(P_s)$ $(P_s \in S_s)$ и проинтегрируем эти произведения по всем контактным поверхностям S_s . После сложения всех интегралов получим (аргументы функций опущены)

$$\sum_{n=1}^{N} \left(-\int_{V_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_j} \right) + q_V^{(n)} \right) \delta T_n \, dV + \right. \\ \left. + \int_{S_n} \left(\lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_j} n_i - f_n \right) \delta T_n \, dS \right) + \int_{S_s} (f_{sm} + f_{sn} - q_s) \, \delta T_s \, dS + \right. \\ \left. + \int_{S_s} \left(\left(\lambda_{ij}^{(m)} \frac{\partial T_m}{\partial x_j} n_i - f_{sm} \right) \delta T_m + \left(\lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_j} n_i - f_{sn} \right) \delta T_n \right) dS = 0.$$

Левую часть этого равенства, преобразовав в ней первый интеграл под знаком суммы при помощи формулы Остроградского — Гаусса и приняв во внимание, что $\delta T_n(P_n) = 0$ при $P_n \in S'_n$, можно представить как вариацию $\delta J_s[T, \delta T]$ функционала

$$J_{s}[T] = \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{V_{n}} \left(\frac{\partial T_{n}}{\partial x_{i}} \frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{2} \frac{\partial T_{n}}{\partial x_{j}} - \int_{T_{\star}}^{T_{n}} q_{V}^{(n)} dT \right) dV - \int_{S_{n}} dS \int_{T_{\star}}^{T_{n}} f_{n} dT \right) - \int_{S_{s}} \left(\int_{0}^{\Delta T_{sm}} f_{sm} d(\Delta T) + \int_{0}^{\Delta T_{sn}} f_{sn} d(\Delta T) + \int_{T_{\star}}^{T_{s}} q_{s} dT \right) dS, \quad (7.58)$$

где T_* — нижняя грань множества ожидаемых значений температуры в различных точках неоднородного тела; $\Delta T_{sm}(P_s) = T_s(P_s) - T_m(P_s)$ и $\Delta T_{sn}(P_s) = T_s(P_s) - T_n(P_s)$, $P_s \in S_s$. Если тепловой контакт между *n*-й частью тела и прослойкой является идеальным, то $\Delta T_{sn} = 0$ в соответствующих точках P_s . Допустимые для (7.58) распределения температуры должны быть непрерывны, кусочно дифференцируемы в V_n и должны удовлетворять условиям (7.55).

Анализ экстремальных свойств функционала $J_s[T]$ показывает [34], что на истинных распределениях температуры T_n^* и T_s^* он достигает минимума при выполнении при $n = \overline{1, N}$ условий

$$\frac{\partial q_V^{(n)}}{\partial T}\Big|_{T=T_n^*} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial T}\Big|_{T=T_n^*} \leqslant 0, \\
\frac{\partial f_{sn}}{\partial \Delta T}\Big|_{\Delta T=T_s^*-T_n^*} \leqslant 0, \quad \frac{\partial q_s}{\partial T}\Big|_{T=T_s^*} \leqslant 0.$$
(7.59)

Если условия (7.59) выполняются не только в стационарной точке, но и для любых допустимых значений температуры в различных точках неоднородного тела, то этот минимум единственный. Это означает единственность решения сопряженной задачи (7.53)-(7.57).

Аналогично функционалу (7.49) можно построить альтернативный по отношению к (7.58) функционал, принимающий вид

$$I_{s}[T,q] = -\sum_{n=1}^{N} \left(\int_{V_{n}} \left(q_{i}^{(n)} \frac{r_{ij}^{(n)}}{2} q_{j}^{(n)} - \int_{T_{\star}}^{T_{n}} (T - T_{\star}) \frac{\partial q_{V}^{(n)}}{\partial T} dT \right) dV - \int_{S_{n}} dS \int_{T_{\star}}^{T_{n}} (T - T_{\star}) \frac{\partial f_{n}}{\partial T} dT + \int_{S_{n}'} (f_{n}' - T_{\star}) q_{i}^{(n)} n_{i} dS \right) - \int_{S_{s}} \left(\int_{0}^{\Delta T_{sm}} \varphi_{m} d(\Delta T) + \int_{0}^{\Delta T_{sn}} \varphi_{n} d(\Delta T) + \int_{T_{\star}}^{T_{s}} (T - T_{\star}) \frac{\partial q_{s}}{\partial T} dT \right) dS, \quad (7.60)$$

где $q_i^{(n)}$ — проекции на оси Ox_i вектора q_n плотности теплового потока в области V_n ; $r_{ij}^{(n)}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $\lambda_{ij}^{(n)}$; $\varphi_n = \Delta T (\partial f_{sn} / \partial (\Delta T))$. Допустимые для (7.60) распределения T_n , q_n и T_s должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\nabla \cdot q_n = q_V^{(n)} \text{ b } V_n, \quad q_i^{(n)} n_i = -f_n \text{ Ha } S_n,$$

$$q_i^{(n)} n_i = -f_{sn} \text{ H } f_{sm} + f_{sn} = q_s \text{ Ha } S_s,$$

$$(7.61)$$

где $\nabla - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Гамильтона.

На истинных распределениях T_n^* и q_n^* функционал (7.60) достигает максимума при выполнении условий (7.59). Если эти условия выполняются не только в стационарной точке, но и для любых допустимых значений температуры в различных точках неоднородного тела, то этот максимум единственный. Для функционалов (7.55) и (7.60) справедлива аналогичная (7.51) цепочка неравенств

$$J_s[T] \ge J_s[T^*] = I_s[T^*, q^*] \ge I_s[T, q].$$

Разность (7.58) и (7.60)

$$\Delta J_s[T,q] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \left(q_i^{(n)} + \lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_j} \right) r_{ij}^{(n)} \left(q_j^{(n)} + \lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_i} \right) dV$$

не зависит от выбора значения Т и по аналогии с нелинейной задачей для однородного тела (см. 7.5) характеризует степень близости рассматриваемых допустимых распределений T_n, T_s и q_n , удовлетворяющих дополнительным условиям (7.55) и (7.61), к истинному решению сопряженной задачи. Обобщение на случай неустановившегося процесса теплопроводности по отношению к (7.58) и (7.60) можно провести аналогично выполненному в 7.4 и 7.5.

7.7. Двусторонние оценки интегральных параметров

Одним из преимуществ двойственной вариационной формы математической модели (ММ) процесса теплопроводности является возможность получения двусторонних оценок некоторых интегральных параметров, характеризующих этот процесс. Пусть в теле, занимаю-

щем область V, ограниченную поверхностью S, действуют внутренние источники теплоты, мощность которых имеет объемную плотность $q_V(M)$, зависящую от пространственных координат точки $M \in V$ (рис. 7.11). Материал тела примем в общем случае анизотропным с компонентами $\lambda_{ij}^{(T)}(M)$ (i, j = 1, 2, 3) тензора теплопроводности в прямоугольной системе координат Ох₁х₂х₃. Тогда установившееся



Рис. 7.11

распределение температуры T(M) будет удовлетворять дифференциальному уравнению вида (7.53)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)}(M) \frac{\partial T(M)}{\partial x_j} \right) + q_V(M) = 0, \quad M \in V.$$
(7.62)

Если материал тела изотропен и имеет *menлonposodнocms* $\lambda^{(T)}(M)$, то в (7.62) $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)} \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Граничные условия на участках $S_q \subseteq S$ и $S_T = S \setminus S_q$ поверхности

тела примем в виде

$$\lambda_{ij}^{(T)}(P)\frac{\partial T(P)}{\partial x_j}n_i(P) + \alpha(P)T(P) = f_2(P), \quad P \in S_q, \tag{7.63}$$

$$T(P) = f_1(P), \quad P \in S_T,$$
 (7.64)

где n_i — направляющие косинусы единичного вектора n внешней нор-щей средой, а $f_1(P)$ и $f_2(P)$ — заданные функции.

Дифференциальной форме (7.62)-(7.64) ММ установившегося процесса теплопроводности соответствует двойственная вариационная форма ММ (аргументы функций опущены), которая следует из (7.58) и (7.60) в частном случае идеального теплового контакта и отсутствия прослоек между частями неоднородного тела (см. 7.6):

$$J[T] = \int_{V} \left(\frac{\partial T}{\partial x_{i}} \frac{\lambda_{ij}^{(T)}}{2} \frac{\partial T}{\partial x_{j}} - q_{V}T\right) dV + \int_{S_{q}} \left(\frac{\alpha}{2}T^{2} - f_{2}T\right) dS, \qquad (7.65)$$

$$I[T, q] = -\int_{V} q_{i} \frac{r_{ij}^{(T)}}{2} q_{j} dV - \int_{S_{T}} f_{1} q \cdot \boldsymbol{n} dS - \int_{S_{q}} \frac{\alpha}{2} T^{2} dS, \qquad (7.66)$$

где $q_i(M), M \in \overline{V} = V \cup S$, — проекции вектора q плотности теплового потока на оси $Ox_i; r_{ij}^{(T)}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $\lambda_{ij}^{(T)}$. Функционал (7.65) допустимо рассматривать на распределениях температуры T(M), непрерывных в замкнутой области \overline{V} , удовлетворяющих (7.64) и имеющих кусочно непрерывные производные в открытой области V, а функционал (7.66) — на непрерывно дифференцируемых в V функциях q(M), удовлетворяющих дополнительным условиям $\nabla q = q_V$ в V и $q \cdot n = \alpha T - f_2$ на S_q , где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

Справедлива цепочка неравенств вида (7.51)

$$I[T, \boldsymbol{q}] \leqslant J[T^*] \leqslant J[T], \tag{7.67}$$

где $T^*(M), M \in \overline{V},$ — истинное распределение температуры, на котором функционал J[T] достигает своего наименьшего значения. Для этого значения с учетом (7.62)–(7.64) имеем

$$2J[T^*] = -\int_{V} q_V T^* \, dV + \int_{S_T} f_1 \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} n_i \, dS - \int_{S_q} f_2 T^* \, dS. \tag{7.68}$$

Выделим несколько характерных случаев оценки интегральных параметров.

1. В области V действуют внутренние источники теплоты, мощность которых имеет постоянную объемную плотность q_V , а поверхность S состоит из участков S_T с заданным постоянным значением температуры, которое можно принять за нуль отсчета, т.е. $f_1(P) \equiv 0$, $P \in S_T$, и участков S_q , на которых $f_2(P) \equiv 0$, $P \in S_q$ (рис. 7.12). В частном случае участки S_q могут быть идеально теплоизолированы и теплообмен на них будет отсутствовать ($\alpha(P) \equiv 0, P \in S_q$). Возможен случай, когда $S = S_T$ либо $S = S_q$.



Рис. 7.12

Рис. 7.13

При указанных условиях второй и третий интегралы в правой части (7.68) равны нулю, и для температуры, усредненной по объему Vобласти, получаем

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \int_{V} T^* dV = -2 \frac{J[T^*]}{q_V V}.$$
(7.69)

Используя соотношения (7.67) и (7.69), находим двустороннюю оценку температуры, усредненной по объему V области, в виде $-\frac{2J[T]}{q_V V} \leq \leq \overline{T} \leq -\frac{2I[T,q]}{a_V V}$.

2. Пусть в области V отсутствуют внутренние источники теплоты $(q_V(M) \equiv 0, M \in V)$, участки S_q поверхности S идеально теплоизолированы $(f_2(P) \equiv 0$ и $\alpha(P) \equiv 0, P \in S_q)$, а на остальной части поверхности S имеются два не граничащих между собой изотермических участка S'_T и S''_T с заданными значениями температур T'_1 и T''_1 соответственно (рис. 7.13). В этом случае вместо (7.68) получаем

$$2J[T^*] = T_1'Q_1' + T_1''Q_1'', (7.70)$$

где Q'_1 и Q''_1 — суммарные тепловые потоки, поступающие в область V через участки S'_T и S''_T ее поверхности соответственно, причем

$$Q_1' = \int_{S_T'} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} n_i dS, \quad Q_1'' = \int_{S_T''} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} n_i dS.$$

Согласно условию сохранения тепловой энергии при установившемся процессе теплопроводности, $Q'_1 + Q''_1 = 0$. Поэтому, учитывая (7.70), получаем $Q'_1 = -Q''_1 = 2J[T^*]/(T'_1 - T''_1)$. Отсюда находим термическое сопротивление тела

$$R_{\rm T} = \frac{T_1' - T_1''}{Q_1'} = \frac{(T_1' - T_1'')^2}{2J[T^*]}$$
(7.71)

между изотермическими участками S'_T и S''_T поверхности S. Из (7.67) и (7.71) следует двусторонняя оценка значения термического сопротивления:

$$\frac{(T'_1 - T''_1)^2}{2J[T]} \leqslant R_{\rm T} \leqslant \frac{(T'_1 - T''_1)^2}{2I[T, q]}$$

3. В области V отсутствуют внутренние источники теплоты $(q_V(M) \equiv 0, M \in V)$, участки S_T поверхности S являются изотермическими $(f_1(P) \equiv T_1 = \text{const}, P \in S_T)$, а на участках S_q происходит теплообмен с окружающей средой, температуру которой примем за нуль отсчета, т.е. $f_2(P) \equiv 0, P \in S_q$ (рис. 7.14). При таких условиях от участков S_T через участки S_q к окружающей среде проходит, согласно (7.68), тепловой поток

$$Q_{\mathrm{T}} = \int_{S_{\mathrm{T}}} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} n_i \, dS = 2 \frac{J[T^*]}{T_1}, \qquad (7.72)$$

а термическое сопротивление теплопередаче между участками S_T с температурой T₁ и окружающей средой с нулевой температурой равно $\overline{R}_{\rm T} = T_1/Q_{\rm T} = T_1^2/(2J[T^*])$. Отсюда, используя (7.67) и (7.72), получаем двусторонние оценки

$$\frac{2I[T,\boldsymbol{q}]}{T_1} \leqslant Q_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{2J[T]}{T_1} \quad \mathrm{M} \quad \frac{T_1^2}{2J[T]} \leqslant \overline{R}_{\mathrm{T}} \leqslant \frac{T_1^2}{2I[T,\boldsymbol{q}]}.$$

4. Пусть по-прежнему в области V отсутствуют внутренние источники теплоты $(q_V(M) \equiv 0, M \in V)$, но отсутствует также и участок S_T поверхности S, а участок S_q , на котором, согласно (7.63), происходит теплообмен с коэффициентом теплообмена $\alpha(P)$, состоит из двух частей (рис. 7.15). На части S_q° теплообмен происходит с окружающей средой, температуру которой примем за нуль отсчета, т.е. $f_2(P) \equiv 0$, $P\in S_q^{\circ};$ на остальной части $S_q'=S_q\setminus S_q^{\circ}$ имеем $f_2(P)\equiv q_2'={
m const.}$ Тогда



Рис. 7.14

из (7.68) найдем среднюю температуру участка S'_a :

$$\overline{T}'_{2} = \frac{1}{S'_{q}} \int_{S'_{q}} T^{*} dS = -2 \frac{J[T^{*}]}{q_{2}S'_{q}}.$$
(7.73)

Из (7.67) и (7.73) следует двусторонняя оценка

$$-rac{2J[T]}{q_2S_q'}\leqslant\overline{T}_2'\leqslant-rac{2I[T,q]}{q_2S_q'}$$

Если на участке S'_q происходит теплообмен со средой, имеющей температуру T'_c , т.е. $q'_2 = \alpha' T'_c$, где α' — постоянный на этом участке коэффициент теплообмена, то, используя (7.73), можно найти передаваемый через S'a тепловой поток

$$Q'_{2} = \alpha'(T'_{c} - \overline{T}'_{2})S'_{q} = \alpha'T'_{c}S'_{q} + 2\frac{J[T^{*}]}{T'_{c}}$$

и термическое сопротивление теплопередачи

$$\overline{R}'_{\mathrm{T}} = \frac{T'_{\mathrm{c}}}{Q'_{2}} = \frac{T'_{\mathrm{c}}}{\alpha' T'_{\mathrm{c}} S'_{q} + 2J[T^{*}]/T'_{\mathrm{c}}}$$

Отсюда, учитывая (7.67), получаем двусторонние оценки среднего теплового потока, передаваемого через поверхность S'a, и среднего термического сопротивления теплопередачи

$$\frac{2I[T, \boldsymbol{q}]}{T'_{c}} + \alpha' T'_{c} S'_{\boldsymbol{q}} \leqslant Q'_{2} \leqslant \frac{2J[T]}{T'_{c}} + \alpha' T'_{c} S'_{\boldsymbol{q}},$$

$$\frac{T'_{c}}{\alpha' T'_{c} S'_{\boldsymbol{q}} + 2J[T]/T'_{c}} \leqslant \overline{R}'_{T} \leqslant \frac{T'_{c}}{\alpha' T'_{c} S'_{\boldsymbol{q}} + 2I[T, \boldsymbol{q}]/T'_{c}}$$

Примеры применения двусторонних оценок можно найти в [34, 37]. Цепочка неравенств (7.67) позволяет также получить двусторонние оценки эффективной теплопроводности $\overline{\lambda}^{(T)}$ поликристаллического материала, состоящего из хаотически ориентированных анизотропных зерен, теплопроводность которых определяет тензор \mathbf{x}_{1} с компонентами $\lambda_{kl}^{(T)}$ (k,l=1,2,3) в кристаллогра- ϕ ических осях Ox'_k . Пусть такой материал занимает T_H область V в виде прямого кругового цилиндра радиусом R и высотой H (рис. 7.16) с идеально теплоизолированной боковой поверхностью и изотермически-

ми основаниями, имеющими температуры T₀ при $x_1 = 0$ и T_H при $x_1 = H$. Истинному распределению температуры $T^*(M)$ $(M \in V)$ будет отвечать, согласно (7.71), термическое сопротивление цилиндра



Рис. 7.16

 $R_{\rm T} = (T_H - T_0)^2 / (2J[T^*])$ между его основаниями, что соответствует эффективной теплопроводности:

$$\overline{\lambda}^{(T)} = \frac{H}{\pi R^2 R_{\rm T}} = 2 \frac{J[T^*]H}{\pi R^2 (T_H - T_0)^2}.$$
(7.74)

В данном случае допустимым для функционала (7.65) будет линейное по высоте цилиндра распределение температуры $T(x_1) = T_0 + (T_H - T_0)x_1/H$, которому соответствует единственная составляющая $\partial T/\partial x_1 = (T_H - T_0)/H$ градиента температуры. Тогда, учитывая (П1.6) и преобразование компонент *тензора второго ранга* в соответствии с (П1.11), находим

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_{V} \frac{\partial T}{\partial x_{j}} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_{i}} dV = \frac{1}{2} \int_{V} \lambda_{11}^{(T)} \left(\frac{\partial T}{\partial x_{1}}\right)^{2} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{H} - T_{0}}{H}\right)^{2} \int_{V} \lambda_{11}^{(T)} dV = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{H} - T_{0}}{H}\right)^{2} \int_{V} \lambda_{kl}^{(T)} \beta_{k1} \beta_{l1} dV =$$

$$= \frac{\pi R^{2}}{2H} (T_{H} - T_{0})^{2} \lambda_{kl}^{(T)} \beta_{k1} \beta_{l1} = \frac{\pi R^{2}}{6H} (T_{H} - T_{0})^{2} \lambda_{kl}^{(T)} \delta_{kl}, \quad (7.75)$$

где β_{k1} и β_{l1} — элементы матрицы поворота репера при переходе от кристаллографических осей Ox'_k к осям Ox_i ; δ_{kl} — символ Кронекера.

Для функционала (7.66) допустимым будет такое распределение вектора плотности теплового потока, для которого равны нулю все составляющие, кроме q_1 вдоль оси Ox_1 , причем $q_1 = \text{const.}$ После выкладок, аналогичных проведенным по (7.75), получим

$$I[T, \mathbf{q}] = -\frac{q_1^2}{2} \int\limits_V r_{11}^{(T)} dV - \pi R^2 q_1 (T_H - T_0) = -\pi R^2 q_1 \left(\frac{q_1 H r_{kl}^{(T)} \delta_{kl}}{6} + T_H - T_0\right)$$

и из условия $\frac{\partial I[T,q]}{\partial q_1}=0$ найдем $q_1=rac{3(T_0-T_H)}{Hr_{kl}^{(T)}\delta_{kl}},$ что в итоге дает

$$I[T,q] = \frac{3\pi}{2} \frac{R^2}{H} \frac{(T_H - T_0)^2}{r_{kl}^{(T)} \delta_{kl}}.$$
(7.76)

Из (7.67) и (7.74)–(7.76) следует $3/(r_{kl}^{(T)}\delta_{kl}) \leq \overline{\lambda}^{(T)} \leq \lambda_{kl}^{(T)}\delta_{kl}/3$. В случае изотропных по отношению к теплопроводности кристаллических зерен (например, с кубической кристаллической решеткой) имеем шаровой тензор теплопроводности, поэтому нижняя и верхняя оценки значения $\overline{\lambda}^{(T)}$ совпадают. Для поликристаллического материала, состо-

ящего из зерен с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой тензор теплопроводности в кристаллографических осях соответствует диагональной матрице третьего порядка с элементами $\lambda_{11}^{(T)} = \lambda_{22}^{(T)} \neq \lambda_{33}^{(T)}$, причем $r_{11}^{(T)} = r_{22}^{(T)} = 1/\lambda_{11}^{(T)}$ и $r_{33}^{(T)} = 1/\lambda_{33}^{(T)}$. В этом случае получаем

$$\frac{3}{2/\lambda_{11}^{(T)}+1/\lambda_{33}^{(T)}} \leqslant \overline{\lambda}^{(T)} \leqslant \frac{2\lambda_{11}^{(T)}+\lambda_{33}^{(T)}}{3}.$$

Для поликристаллического материала типа сплава-смеси, состоящего из разнородных кристаллических зерен, или для композиционного материала двусторонние оценки теплопроводности также следуют из (7.67):

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{3\eta_n}{(r_{kl}^{(T)})_n \delta_{kl}} \leqslant \overline{\lambda}^{(T)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \eta_n \frac{(\lambda_{kl}^{(T)})_n \delta_{kl}}{3}$$

где индексом $n = \overline{1, N}$ отмечены параметры компонента материала, составляющего в нем объемную долю η_n . В предположении статистически усредненной сферической формы хаотически ориентированных в поликристаллическом материале зерен оценку $\widetilde{\lambda}^{(T)}$ для $\overline{\lambda}^{(T)}$, находящуюся между верхней и нижней оценками, можно найти из условия [36]

$$\sum_{n=1}^{N} \left(2\widetilde{\lambda}^{(T)} \delta_{kj} + (\lambda_{kj}^{(T)})_n \right)^{-1} \left(\widetilde{\lambda}^{(T)} \delta_{jl} - (\lambda_{jl}^{(T)})_n \right) \delta_{kl} = 0.$$

Отсюда для материала, состоящего из однородных зерен с ГПУ-решеткой, следует

$$\widetilde{\lambda}^{(T)} = \frac{\lambda_{11}^{(T)}}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{\lambda_{11}^{(T)}}{\lambda_{33}^{(T)}}} \right).$$

При количественном анализе ММ приближенными методами одним из важных интегральных параметров является *среднеквадратичная погрешность*

$$\overline{\Delta}^2(T) = \frac{1}{V} \int_V \left(T(M) - T^*(M) \right)^2 dV$$

полученного распределения температуры $T(M), M \in V$. Рассмотрим разность значений функционалов

$$\Delta J^*[T] = J[T] - J[T^*] = \int_V \left(\frac{\lambda_{ij}^{(T)}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \frac{\partial T^*}{\partial x_j}\right) - q_V(T - T^*)\right) dV + \int_{S_q} \left(\alpha \frac{T^2 - (T^*)^2}{2} - f_2(T - T^*)\right) dS.$$
Отсюда, учитывая, что T^* удовлетворяет (7.62) и (7.63), а в силу (7.64) $T = T^*$ на S_T , используя *первую формулу* Грина и обозначая $\theta = T - T^*$, получаем

$$2\Delta J^*[T] = \int\limits_V \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} dV + \int\limits_{S_q} \alpha \theta^2 dS.$$
(7.77)

Правая часть (7.77) представляет собой функционал, минимальное значение которого равно

$$\Xi_1 \int\limits_V \vartheta^2 dV = V \overline{\Delta}^2(T),$$

где Ξ₁ — наименьшее *собственное значение* задачи для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\lambda_{ij}^{(T)}(M) \, \frac{\partial \theta(M)}{\partial x_j} \Big) + \Xi \theta(M) = 0, \quad M \in V,$$

с однородными граничными условиями

$$\lambda_{ij}^{(T)}(P)\frac{\partial\theta(P)}{\partial x_j}n_i(P) + \alpha(P)\theta(P) = 0, \quad P \in S_q \text{ if } \theta(P) = 0, \quad P \in S_T.$$

Из (7.77) следует, что $\overline{\Delta}^2(T) = 2\Delta J^*[T]/(\Xi_1 V)$. Однако при использовании приближенных методов анализа ММ значения $\Delta J^*[T]$ и Ξ_1 не известны. Для достоверной оценки погрешности $\overline{\Delta}^2(T)$ достаточно располагать значениями $\Delta J = J[T] - I[T,q] \ge \Delta J^*[T]$ и $\Xi_1' \leqslant \Xi_1$. Тогда

$$\bar{\Delta}^2(T) \leqslant 2 \frac{\Delta J}{\Xi_1' V}. \tag{7.78}$$

Из (7.65) и (7.66) получим

$$\Delta J = \int\limits_{V} \left(q_i + \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) r_{ij}^{(T)} \left(q_j + \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV.$$

Нахождение нижней оценки Ξ'_1 собственного значения Ξ_1 рассмотрено в **П2.4**.

Изложенный подход к построению оценки среднеквадратичной погрешности можно обобщить применительно к нелинейной MM процесса теплопроводности в однородном теле (см. 7.4). Используя (7.38), запишем

$$\Delta J^*[\psi] = J_*[\psi] - J_*[\psi^*] = \frac{1}{2} \int_V \left((\nabla \psi)^2 - (\nabla \psi^*)^2 \right) dV - \int_V dV \int_{\psi^*}^{\psi} \overline{q}_V d\psi - \int_{S_q} dS \int_{\psi^*}^{\psi} \overline{f}_2 d\psi,$$

где ψ^* — функция, минимизирующая функционал (7.38). Отсюда при помощи разложений (7.40) и формулы Остроградского — Гаусса в первом приближении получим

$$2\Delta J^*[\psi] = \int\limits_V \left((\nabla \Theta)^2 - q'_V \Theta^2 \right) dV - \int\limits_{S_q} f'_2 \Theta^2 dS, \tag{7.79}$$

где $\Theta = \psi - \psi^*$. Правая часть (7.79) представляет собой функционал, минимальное значение которого равно

$$\widehat{\Xi}_1 \int\limits_V \Theta^2 dV = \Xi_1 V \overline{\Delta}^2(\psi),$$

где $\overline{\Delta}^2(\psi)$ — среднеквадратичная погрешность полученного распределения $\psi(M), M \in \overline{V} = V \cup S$, связанного с распределением температуры соотношением (7.36), а $\widehat{\Xi}_1$ — наименьшее собственное значение задачи для однородного дифференциального уравнения

$$abla^2 \Theta(M) + (q'_V(M) + \widehat{\Xi}) \Theta(M) = 0, \quad M \in V,$$

где $\nabla^2 - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа, с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial \Theta(P)}{\partial x_i} n_i - f_2'(P) \Theta(P) = 0, \quad P \in S_q \quad \text{if} \quad \Theta(P) = 0, \quad P \in S_T.$$

При анализе нелинейной ММ функции $q'_V(M)$ и $f'_2(P)$ не известны, но, располагая полученным распределением $\psi(M)$, $M \in \overline{V} = V \cup S$, их можно в первом приближении заменить соответственно функциями $\partial \overline{q}_V(M,\psi)/\partial \psi |_{\psi=\psi(M)}, M \in V$, и $\partial \overline{f}_2(P,\psi)/\partial \psi |_{\psi=\psi(P)}, P \in S_q$. При этом для $\widehat{\Xi}_1$ следует найти гарантированную нижнюю оценку $\widehat{\Xi}'_1 \leq \widehat{\Xi}_1$, а значение $\Delta J^*[\psi]$, согласно (7.51) и (7.52), оценить сверху разностью $\Delta J[T,q] = J_*[\psi] - I_*[\psi,q]$ (см. 7.4 и 7.5). Тогда с учетом (7.79) получим $\overline{\Delta}^2(\psi) \leq 2\Delta J[T,q]/(\widehat{\Xi}'_1V)$.

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ

Сплошная среда, заполняющая некоторую пространственную область и рассматриваемая как изолированная термодинамическая система, в соответствии с нулевым законом термодинамики имеет хотя бы одно естественное состояние. Характерным свойством вещества в жидком и газообразном агрегатных состояниях является то, что оно имеет несчетное множество естественных состояний. В качестве постулата считают, что все состояния, для которых плотность ρ среды совпадает с начальным значением ρ_0 , являются естественных принимают якобиан $J^* = \rho_0/\rho$, определяющий в окрестности рассматриваемой точки изменение плотности среды при ее течении. В этой главе под жид-костью будем понимать как жидкое, так и газообразное агрегатные состояния вещества (см. 1.1–1.3). Чтобы различать эти состояния, в гидромеханике собственно жидкости часто называют капельными [116].

8.1. Жидкость как сплошная среда скоростного типа

Примем в качестве аргументов активных переменных — массовых плотностей свободной энергии A и энтропии h, тензора напряжений $\hat{\sigma}$ и вектора q плотности теплового потока — реактивные переменные: якобиан $J^* = \rho/\rho_0$, равный отношению плотности ρ среды к значению ρ_0 в естественном состоянии, тензор скоростей $\hat{\mathbf{V}}$, абсолютную температуру T и ее градиент ϑ , т.е.

$$\left. \begin{array}{l} A = A(J^*, V_{kl}, T, \vartheta_k), \quad h = h(J^*, V_{kl}, T, \vartheta_k), \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(J^*, V_{kl}, T, \vartheta_k), \quad q_i = q_i(J^*, V_{kl}, T, \vartheta_k), \\ i, j, k, l = 1, 2, 3, \end{array} \right\}$$

$$(8.1)$$

где V_{kl} и σ_{ij} — компоненты тензоров $\hat{\mathbf{V}}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно; ϑ_k и q_i — проекции векторов соответственно ϑ и q на оси прямоугольной системы координат $O_{X_1X_2X_3}$.

Подставив первое и третье соотношения (8.1) в уравнение (4.11) закона сохранения энергии (уравнение переноса энергии), с учетом (4.21) запишем

$$\rho \frac{\partial A}{\partial J^*} \frac{dJ^*}{dt} - \sigma_{ij} V_{ij} + \rho \frac{\partial A}{\partial V_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dt} + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{d\vartheta_i}{dt} + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial T} + h\right) \frac{dT}{dt} + \rho T \frac{dh}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - q_V = 0, \quad (8.2)$$

где t — время; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты. Так как, согласно (3.30),

$$\frac{dJ^*}{dt} = \frac{\partial J^*}{\partial(\partial x_i/\partial a_k)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) = J^* \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) = J^* \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = J^* V_{kk},$$

где a_k — материальные координаты, определяющие положение частицы жидкости в начальной конфигурации, а v_k — проекции вектора скорости на оси $O_{\mathbf{x}_k}$ системы пространственных координат, то

$$\rho \frac{\partial A}{\partial J^*} \frac{dJ^*}{dt} = \rho \frac{\partial A}{\partial J^*} J^* V_{ij} \delta_{ij} = \rho_0 \frac{\partial A}{\partial J^*} V_{ij} \delta_{ij}$$

Используя это равенство и вычитая (8.2) из неравенства Клаузиуса — Дюгема в виде (4.19), получаем

$$-\left(\rho_{0}\delta_{ij}\frac{\partial A}{\partial J^{*}}-\sigma_{ij}\right)V_{ij}-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial T}+h\right)\frac{dT}{dt}-\rho\frac{\partial A}{\partial V_{ij}}\frac{dV_{ij}}{dt}-\rho\frac{\partial A}{\partial \vartheta_{i}}\frac{d\vartheta_{i}}{dt}-\frac{q_{i}}{T}\frac{\partial T}{\partial x_{i}} \ge 0, \quad (8.3)$$

откуда в силу того, что скорости dT/dt, dV_{ij}/dt и $d\vartheta_i/dt$ изменения реактивных переменных произвольны, следуют достаточные условия реализуемости рассматриваемого процесса:

$$h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial V_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad \left(\sigma_{ij} - \rho_0 \frac{\partial A}{\partial J^*} \delta_{ij}\right) V_{ij} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \ge 0. \quad (8.4)$$

Представим каждую функцию из (8.1) в виде

$$A = A^{\circ} + A^{(D)}, \quad h = h^{\circ} + h^{(D)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \sigma_{ij}^{(D)}, \quad q_i = q_i^{\circ} + q_i^{(D)}, \quad (8.5)$$

где первые слагаемые в правых частях равенств, отмеченные индексом $(\cdot)^{\circ}$, не зависят от V_{kl} , т.е. представляют собой значения активных переменных при $V_{kl} = 0$, а вторые слагаемые, отмеченные индексом $(\cdot)^{(D)}$, зависят от V_{kl} и обращаются в нуль при $V_{ij} = 0$. Тогда с учетом (8.4) получим, что $A^{(D)} = 0$, т.е. $A = A^{\circ}$, а также $h^{(D)} = 0$, т.е. $h = h^{\circ}$. Введем диссипативную функцию $\delta_D = \sigma_{ij}^{(D)} V_{ij}$ и представим неравенство (8.4) в виде

$$\left(\sigma_{ij}^{\circ} - \rho_0 \delta_{ij} \frac{\partial A^{\circ}}{\partial J^*}\right) V_{ij} + \delta_D - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \ge 0.$$

Так как первое слагаемое в левой части этого неравенства линейно зависит от V_{ij} , то

$$\sigma_{ij}^{\circ} = \rho_0 \frac{\partial A^{\circ}}{\partial J^*} \delta_{ij}. \tag{8.6}$$

Поэтому второй закон термодинамики в данном случае принимает вид $\delta_D - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \ge 0$. Если не учитывать взаимного влияния процесса переноса теплоты и диссипации энергии, то получим два неравенства: $\delta_D = \sigma_{ij}^{(D)} V_{ij} \ge 0$ и $-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \ge 0$, причем в случае $\delta_D > 0$ говорят о вязкой жидкости.

Жидкость, как правило, изотропна, в связи с этим в линейном приближении *тензор вязких напряжений* имеет компоненты $\sigma_{ij}^{(D)} = \lambda_D V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}$, где λ_D и μ_D — коэффициенты, аналогичные константам Ламе, причем μ_D принято называть **динамической** (или сдвиговой) **вязкостью**. Основной единицей измерения λ_D и μ_D является Па·с. Если принять, что $p = -\rho_0 \partial A / \partial J^*$ — давление жидкости, то с учетом (8.6) получим **реологическое уравнение**

$$\sigma_{ij} = \sigma^{\circ} + \sigma_{ij}^{(D)} = -p\delta_{ij} + \lambda_D V_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}, \qquad (8.7)$$

характеризующее линейную вязкую (или ньютоновскую) жидкость. Из (8.7) следует, что при контакте с твердой поверхностью в силу конечных значений напряжений возникает эффект прилипания частиц линейной вязкой жидкости к этой поверхности, подтверждаемый экспериментально и объясняемый наличием сил молекулярного сцепления [73]. Это означает, что вектор скорости частицы жидкости, находящейся в контакте с твердой поверхностью, совпадает с вектором скорости соответствующей точки этой поверхности.

Если положить $A = A(J^*, T)$ и определить зависимость вектора плотности теплового потока от реактивных переменных, например, в виде закона Био — Фурье, то, учитывая (8.2), (8.4) и (8.7), после несложных преобразований можно получить уравнение теплопереноса в жидкости [88]

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{dT}{dt} = \lambda_D V_{kk}^2 + 2\mu_D V_{ij} V_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V - T \frac{\partial p}{\partial T} V_{kk}, \quad (8.8)$$

где $c_{\varepsilon} = -T \frac{\partial^2 A(J^*,T)}{\partial T^2}$ — теплоемкость при постоянной деформации. Отметим, что в механике жидкости и газа используют термины удельная теплоемкость при постоянном объеме или изохорная теплоемкость, соответствующая изохорному (при постоянном объеме среды) термодинамическому процессу, и обозначение c_v .

Подставляя (8.7) в уравнения (3.62), получаем уравнения Навье — Стокса — Дюгема для вязкой сжимаемой жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial (\lambda_D V_{kk})}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial (\mu_D V_{ij})}{\partial x_j} + b_i, \qquad (8.9)$$

где b_i — проекции вектора **b** плотности объемных сил на оси Ox_i . Полная система уравнений, описывающих течение жидкости, в рассматриваемом варианте математической модели содержит шесть неизвестных: ρ , T, p и три проекции v_i вектора v скорости. Для их определения необходимо совместно решить уравнения (8.8), (8.9) и уравнение неразрывности (3.31), используя уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T). \tag{8.10}$$

Согласно (8.7) среднее нормальное напряжение в жидкости $\sigma_{kk}/3 = -p + 3\varkappa_D V_{kk}$, где $\varkappa_D = \lambda_D + 2\mu_D/3$ — объемная вязкость. Если принять, что это напряжение в движущейся жидкости определяется (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением с приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением (как и в покоящейся) лишь давлением, то приходим к условию Стокса (как и в покоящейся) лишь давлением (как и в покоящейся) лишь (как и в поко

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_D \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2\mu_D}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + b_i.$$
(8.11)

Если жидкость несжимаемая и однородная ($\rho = \text{const}, \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = = 0$), а также $\mu_D = \text{const}$, то из (8.9) получим

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + b_i,$$
или $\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla_x p + \mu_D \nabla_x^2 v + b,$ (8.12)

где ∇_x и ∇_x^2 — дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа, вычисляемые в системе пространственных координат с радиус-вектором x. Вместе с (3.31) эти уравнения образуют замкнутую систему относительно неизвестных функций v(x,t) и p(x,t), однако не удается корректно задать граничные условия для давления на непроницаемых границах области V, в которой рассматривается движение жидкости.

При сравнительно малой скорости течения жидкости и выполнении неравенства $|v_j \partial v_i / \partial x_j| \ll |\partial v_i / \partial t|$ говорят о ползучем движении жидкости [76], описываемом уравнениями

$$ho rac{\partial v_i}{\partial t} = -rac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_D rac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + b_i,$$

которые отличаются от (8.12) отсутствием инерционных сил, вызванных переносным ускорением частиц жидкости. При $b_i = 0$ и установившемся движении $(\partial v_i/\partial t = 0)$ имеем $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$. Дифференцируя

обе части этого равенства по x_i и суммируя по индексу i, с учетом (3.33) получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \mu_D \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = 0,$$

т. е. для такого движения давление является гармонической функцией: $\nabla_x^2 p = 0.$

Если существует потенциал В векторного поля объемных сил, т.е. $b = -\nabla_x B$, то векторную форму (8.12) с учетом (П1.21) и выражения для полной производной dv/dt можно представить в виде $\partial v/\partial t - v \times (\nabla_x \times v) = -\nabla_x (p/\rho + |v|^2/2 + B/\rho) + (\mu_D/\rho) \nabla_x^2 v$. Затем вычислим *ротор* левой и правой частей этого равенства и с учетом (П1.22) запишем

$$\frac{\partial (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v})}{\partial t} - (\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}))\boldsymbol{v} + (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v})\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v} - (\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}))\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{W} - (\boldsymbol{W} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v} = \frac{\mu_D}{\rho}\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{W}, \quad (8.13)$$

поскольку $\nabla_x \times v = W$ — вектор завихренности, $\nabla_x \cdot (\nabla_x \times v) = 0$ как смешанное произведение векторов с двумя одинаковыми сомножителями (см. П1.1), $\nabla_x \cdot v = 0$ в силу (3.33) для несжимаемой жидкости, $\nabla_x \times ((\nabla_x f(x)) = 0$ для любой дважды дифференцируемой скалярной функции f(x) (см. П1.4) и $\nabla_x \times (\nabla_x^2 v) = \nabla_x^2 (\nabla_x \times v) = \nabla_x^2 W$. Так как $\partial W / \partial t + (v \cdot \nabla_x) W = dW/dt$, в итоге получим уравнение переноса завихренности

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = (\boldsymbol{W} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v} + \nu_D \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{W}, \qquad (8.14)$$

где $\nu_D = \mu_D / \rho$ — кинематическая вязкость, м²/с.

Исключение давления из системы уравнений снимает и проблему формулировки граничных условий для функции p(x,t) на непроницаемых границах области V, но порождает аналогичную проблему по отношению к функции W(x,t). Равенством $v = \nabla_x \times \psi$ можно ввести векторную **функцию тока** ψ , тождественно удовлетворяющую (3.33). Тогда с учетом (П1.19) $W = \nabla_x \times (\nabla_x \times \psi) = \nabla_x (\nabla_x \cdot \psi) - \nabla_x^2 \psi$. После подстановки этого равенства в (8.13) получим единственное уравнение относительно векторной функции $\psi(x,t)$, содержащее ее производные по пространственным координатам до четвертого порядка включительно. Преимущество математической модели, включающей это уравнение, состоит в том, что для функции $\psi(x,t)$ удается корректно сформулировать по два граничных условия в каждой точке поверхности S, ограничивающей область V (см. 8.4).

8.2. Идеальная жидкость

Гипотетическую жидкость, полностью лишенную свойства вязкости, принято называть идеальной. Для получения уравнений, описывающих ее движение, достаточно в (8.11) положить $\mu_D = 0$. В итоге получим уравнения Эйлера

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad$$
или $\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla_x p + b,$ (8.15)

где ρ — плотность жидкости; v_i и b_i — проекции векторов v скорости и b плотности объемных сил на оси Ox_i системы пространственных координат; t — время; p — давление; ∇_x — дифференциальный оператор Гамильтона, вычисляемый в системе пространственных координат с радиус-вектором x. Для неподвижной жидкости из (8.15) следуют уравнения $\partial p/\partial x_i = b_i$, или $\nabla_x p = b$, описывающие состояние гидростатического равновесия.

Если ρ зависит лишь от p, т.е. $\rho = \rho(p)$, то жидкость называют баротропной и вводят функцию давления

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)},$$
(8.16)

равную работе, совершаемой при движении единицы массы баротропной жидкости при изменении давления от p_0 до p. Во многих приложениях векторное поле *плотности массовых сил* не зависит от времени и обладает *потенциалом* B(x), поэтому $b/\rho = -\nabla_x B$. При перечисленных допущениях, учитывая (П1.21) и выражения для полной производной dv/dt, запишем векторную форму (8.15) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{v} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \left(B + P + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} \right), \tag{8.17}$$

где $W = \nabla_x \times v$ — вектор завихренности.

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то B = gh, где g — постоянное ускорение свободного падения, а h — высота, отсчитываемая от некоторого уровня. Величины h, $h_p = P/g$ и $h_v = |v|^2/(2g)$ называют напором соответственно геометрическим, пьезометрическим и скоростным [116]. Сумма значений этих напоров составляет полный напор $H = h + h_p + h_v$. С учетом введенных обозначений вместо (8.17) получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{v} = -g \nabla_{\boldsymbol{x}} H. \tag{8.18}$$

Поскольку $\nabla_x \cdot (\nabla_x \times v) = \nabla_x \cdot W = 0$ (см. П1.4), согласно теореме Остроградского — Гаусса для области V пространства, ограниченной поверхностью S и лежащей в области определения поля скоростей, имеем

$$\int_{S} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = 0, \tag{8.19}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. Подынтегральное выражение в (8.19) называют потоком вихря через элемент dS поверхности, векторные линии поля W — вихревыми линиями, а поверхность, образованную вихревыми линиями, проведенными через точки замкнутого контура, — вихревой трубкой, которую в случае контура, охватывающего бесконечно малую площадку, называют вихревой нитью.

Пусть dS_1 и dS_2 — площадки соседних нормальных сечений вихревой нити, а вектор завихренности направлен от dS_1 к dS_2 . Так как поток вихря через боковую поверхность вихревой трубки равен нулю, то, применяя (8.19) к участку вихревой нити, ограниченному рассматриваемыми сечениями, получаем $W_1 dS_1 = W_2 dS_2$, где W_1 и W_2 — модули вектора **W** в сечениях dS_1 и dS_2 соответственно. Таким образом, |W| изменяется вдоль вихревой нити обратно пропорционально площади ее поперечного сечения. Вихревая нить (или трубка) не может оканчиваться внутри жидкости, она или замкнута или оканчивается на поверхности, ограничивающей жидкость. Справедлива теорема Кельвина (Томсона) о том, что при движении идеальной баротропной жидкости в потенциальном поле массовых сил циркуляиия вектора скорости по замкнутому контуру остается постоянной во времени [76, 116]. Следовательно, такая жидкость обладает свойством сохранять безвихревое движение, определяемое выполнением условия $W = \nabla_x \times v = 0$ в каждой точке области, занятой этой жидкостью. В этом случае векторное поле скоростей обладает потенциалом $\Phi(x)$:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}). \tag{8.20}$$

Отсюда для несжимаемой жидкости с учетом (3.33) получим уравнение Лапласа

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \Phi(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{8.21}$$

т.е. $\Phi(x)$ является гармонической функцией.

Для безвихревого движения сжимаемой жидкости из (8.17) и (8.20) следует интеграл Лагранжа — Коши [76]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + B + P + \frac{|\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi|^2}{2} = f(t), \qquad (8.22)$$

где f(t) — одинаковая для всей области движения жидкости функция времени, определяемая обычно или из граничных условий, или по зависимости от t левой части (8.22) в какой-либо одной точке этой области. Если движение жидкости установившееся, то $\partial \Phi / \partial t = 0$, f(t) == const и (8.22) переходит в интеграл Бернули $B + P + |v|^2/2 =$ = const, который в случае несжимаемой жидкости плотностью ρ_0 имеет вид

$$\rho_0 B + p + \frac{\rho_0 |\boldsymbol{v}|^2}{2} = \text{const.}$$
(8.23)

Дифференциал функции давления можно представить в виде $dP = \frac{1}{\rho}dp = \frac{a_{\star}^2}{\rho}d\rho$, где $a_{\star}^2 = \frac{dp}{d\rho} > 0$, или $\frac{dP}{dt} = \frac{a_{\star}^2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$. Тогда, используя (8.20) и уравнение неразрывности (3.31), получаем

$$\frac{1}{a_*^2}\frac{dP}{dt} + \nabla^2 \Phi = 0.$$
 (8.24)

Система уравнений (8.22), (8.24) замкнута относительно неизвестных функций P и Φ , поскольку a_*^2 можно также представить как функцию P.

В ряде прикладных задач аэродинамики и акустики течение среды можно рассматривать как возмущенное относительно известного движения или состояния покоя жидкости. Так, при малых возмущениях относительно состояния покоя, в котором $\rho = \rho_0 = \text{const}$, систему (8.22), (8.24) можно линеаризовать, если в (8.22) пренебречь слагаемым $|\nabla_x \Phi|^2/2$ и положить $f(t) \equiv 0$, а в (8.24) принять $a_*^2 = a_0^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}$. Тогда при отсутствии массовых сил получаем $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P = 0$ и $\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla_x^2 \Phi = 0$. Исключая отсюда P или Φ , приходим к волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla_x^2 \Phi$$
 или $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla_x^2 P,$ (8.25)

относящимся к дифференциальным уравнениям гиперболического типа. Значение a_0 в (8.25) является скоростью распространения малых возмущений в среде и носит название скорости звука.

При установившихся колебаниях с некоторой частотой ω функцию Φ можно представить произведением зависящей только от времени t периодической функции вида $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$ (или линейной комбинации этих функций) и функции $\Phi^{\circ}(x)$, зависящей лишь от пространственных координат и описывающей форму волны. Тогда первое уравнение (8.25) переходит в уравнение эллиптического типа $\nabla_x^2 \Phi^{\circ} + (\omega^2/a_0^2) \Phi^{\circ} = 0$, называемое уравнением Гельмгольца.

При взаимодействии идеальной жидкости с непроницаемой границей области течения, в силу того что со стороны этой границы в направлении вектора n нормали к ней на частицы жидкости действует лишь давление, возможно относительное проскальзывание частиц, т.е. в отличие от вязкой жидкости отсутствует эффект прилипания частиц к границе. Поэтому на непроницаемых границах совпадают проекции векторов скорости идеальной жидкости и заданной скорости v° границы на направление нормали, т.е. $v \cdot n = v^{\circ} \cdot n$, или (в случае безвихревого движения жидкости) ($\nabla \Phi$) $\cdot n = v^{\circ} \cdot n$. При построении математической модели (ММ) течения идеальной жидкости на ее свободной поверхности должно быть задано давление, а на проницаемых границах области — вектор скорости или давление.

Пусть твердый шар радиусом r_0 и массой m движется поступательно вдоль оси Ox_3 со скоростью v_0 в идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ_0 . Приняв обтекание шара безвихревым и осесимметричным относительно этой оси, представим (8.21) в подвижной системе сферических координат с началом в центре шара:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) = 0, \qquad (8.26)$$

где r — радиальная координата; $\vartheta \in [0, \pi]$ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси O_{X_3} (рис. 8.1).



Рис. 8.1

На поверхности S шара (при $r = r_0$) $\partial \Phi / \partial r = v_0 \cos \vartheta$, что дает основание искать решение (8.26) в виде $\Phi(r, \vartheta) = R(r) \cos \vartheta$, удовлетворяющем (8.26) при условии $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - 2R(r) = 0$. Подставляя сюда $R(r) = r^k$, находим k(k+1) - 2 = 0, т.е. $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$. Таким образом, $R(r) = C_1 r + C_2/r^2$. В случае $C_1 \neq 0$ при $r \to \infty$ имеем $R(r) \to \infty$,

что противоречит физическому смыслу, поскольку вдали от движущегося шара жидкость неподвижна. Поэтому $C_1 = 0$, а вторую константу можно найти из граничного условия при $r = r_0$: $C_2 = -v_0 r_0^3/2$. В итоге получим $\Phi(r, \vartheta) = -v_0 \frac{r_0^3}{2r^2} \cos \vartheta$. Составляющие вектора v скорости жидкости при обтекании движущегося шара будут равны

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \frac{r_0^3}{r^3} \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{v_0}{2} \frac{r_0^3}{r^3} \sin \vartheta.$$
(8.27)

Кинетическая энергия жидкости при движении шара с учетом (8.27) составит [35]

$$\begin{split} K^* &= 2\pi \int\limits_{r_0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\rho_0}{2} (v_r^2 + v_\vartheta^2) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta = \\ &= \frac{\pi \rho_0 v_0^2 r_0^6}{4} \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \int\limits_{0}^{\pi} (3\cos^2 \vartheta + 1) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{3} \pi \rho_0 v_0^2 r_0^3 = \widetilde{m} \frac{v_0^2}{2}, \end{split}$$

где $\tilde{m} = 2\pi\rho_0 r_0^3/3$ — половина массы жидкости, вытесненной шаром. Суммарная кинетическая энергия системы «шар — жидкость» при поступательном движении шара будет $K_{\Sigma}^* = (m + \tilde{m})v_0^2/2$. Изменение K_{Σ}^* за время dt, согласно закону сохранения энергии, равно работе, совершаемой силой P, приложенной к шару, на перемещении $v_0 dt$, т.е. $dK_{\Sigma}^* = Pv_0 dt$, или $\frac{d}{dt} \left(\frac{(m + \tilde{m})v_0^2}{2} \right) = (m + \tilde{m})v_0 \frac{dv_0}{dt} = Pv_0$. Отсюда получаем $(m + \tilde{m}) \frac{dv_0}{dt} = P$. Таким образом, ММ поступательного движения шара массой m в идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ_0 эквивалентна ММ поступательного движения в вакууме материальной точки массой $m + \tilde{m}$. В связи с этим величину \tilde{m} называют присоединенной массой шара.

При поступательном движении в жидкости твердого тела, ограниченного поверхностью вращения, вводят понятия **продольной** и **поперечной присоединенной массы** [76], а в случае произвольного движения тела произвольной формы влияние жидкости учитывают введением **тензора** второго ранга коэффициентов присоединенных **масс** [13].

Если на поле скоростей, определяемое соотношениями (8.27), наложить поле с составляющими $\overline{v}_r = -v_0 \cos \vartheta$ и $\overline{v}_\vartheta = v_0 \sin \vartheta$ вектора скорости, то получим поле скоростей с составляющими

$$\widehat{v}_r = -v_0 \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \cos \vartheta, \quad \widehat{v}_\vartheta = v_0 \left(1 + \frac{r_0^3}{2r^3} \right) \sin \vartheta, \tag{8.28}$$

которое возникает при установившемся обтекании неподвижного шара идеальной несжимаемой жидкостью, имеющей вдали от шара скорость v_0 , направленную противоположно оси Ox_3 (см. рис. 8.1). Приняв давление жидкости при $r \to \infty$ равным p_0 , из (8.22) при $B \equiv 0$ с учетом (8.28) получим на поверхности шара

$$p(r_0,\vartheta) = p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{9}{8} \sin^2 \vartheta\right),$$

т. е. распределение давления симметрично относительно плоскости $\vartheta = \pi/2$. Этот результат носит название **парадокса Даламбера** и означает, что шар не оказывает сопротивления обтекающему его потоку жидкости или, что равносильно, шар, движущийся поступательно с постоянной скоростью, не испытывает сопротивления со стороны жидкости, что противоречит всем известным экспериментам и является следствием принятого допущения о безвихревом обтекании шара. В действительности при обтекании шара потоком жидкости с его поверхности срываются вихри, которые изменяют как поле скоростей, так и распределение давления на этой поверхности.

8.3. Неустановившееся движение идеальной жидкости в трубопроводе

При движении жидкости (или газа) по трубопроводу могут возникать колебания давления и расхода жидкости вследствие пульсаций этих параметров на выходе из насоса (или компрессора), нагнетающего жидкость (или газ) в трубопровод, и срабатывания регулирующей и запорной арматуры гидравлической (или пневматической) системы. Ограничимся рассмотрением неустановившегося движения жидкости в прямолинейном горизонтальном трубопроводе, считая ее идеальной (невязкой), но сжимаемой. Сжимаемость жидкости будем характеризовать объемным модулем упругости \varkappa_{m} , который входит в соотношение

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{\varkappa_{\mathsf{x}}} \right),\tag{8.29}$$

связывающее плотность ρ жидкости с *давлением* \hat{p} (ρ_0 — значение плотности при давлении p_0). Так, для воды $\varkappa_{\mathbf{x}} = 2,136 \cdot 10^9 \, \Pi$ а при температуре 293К и атмосферном давлении.

Выделим в трубопроводе участок длиной dx (рис. 8.2). Примем, что среднее по поперечному сечению трубопровода давление p(x,t) жидкости зависит от координаты x этого сечения и времени t. В соответствии с (8.29) для плотности $\rho(x,t)$ имеем аналогичную зависимость. Так как



Рис. 8.2

стенки трубопровода могут деформироваться под действием давления, то площадь F(x,t) поперечного сечения также является функцией xи t. Массовый расход жидкости через трубопровод обозначим $\dot{m}(x,t)$. Все указанные функции предполагаем дифференцируемыми по своим аргументам.

С точностью до бесконечно малых более высокого порядка в фиксированный момент времени t в объеме выделенного участка трубопровода находится масса жидкости $\rho(x,t) F(x,t) dx$. Из закона сохранения массы следует, что скорость $(\partial(\rho F)/\partial t) dx$ изменения массы жидкости в пределах этого участка равна разности $\dot{m}(x,t) - \dot{m}(x + dx,t) =$ $= -(\partial \dot{m}/\partial t) dx$ расходов через его входное и выходное сечения соответственно (см. рис. 8.2). Таким образом, получаем уравнение неразрывности для движения жидкости по трубопроводу в виде

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}.$$
(8.30)

Перепад давления между входным и выходным сечениями выделенного участка создает действующую в направлении оси Ох силу

$$p(x,t) F(x,t) - p(x+dx,t) F(x+dx,t) + \int_{x}^{x+dx} p(\xi,t) \frac{\partial F(\xi,t)}{\partial \xi} d\xi$$

причем интеграл соответствует проекции на эту ось равнодействующей сил давления со стороны стенок трубопровода. В соответствии с законом сохранения количества движения эта сила равна скорости

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho v \, dV = \frac{d}{dt} \int_{x}^{x+dx} \rho(\xi, t) \left(\int_{F(\xi, t)} v \, dF \right) d\xi =$$
$$= \frac{d}{dt} \int_{x}^{x+dx} \rho(\xi, t) \, \overline{v}(\xi, t) \, F(\xi, t) \, d\xi = \frac{d}{dt} \int_{x}^{x+dx} \dot{m}(\xi, t) \, d\xi$$

изменения в этом направлении количества движения массы жидкости в объеме V выделенного участка (v — проекция вектора скорости жидкости на ось Ox, \overline{v} — среднее значение этой проекции по поперечному сечению трубопровода). В итоге, отбросив бесконечно малые более высокого порядка, запишем

$$-rac{\partial(pF)}{\partial x}dx+prac{\partial F}{\partial x}dx=-Frac{\partial p}{\partial x}dx=rac{d\dot{m}}{dt}dx$$

Если неустановившееся движение жидкости в трубопроводе рассматривать как возмущенное относительно известного установившегося движения или состояния покоя, то при малых возмущениях полную производную по времени в последнем равенстве можно заменить частной производной. Тогда получим

$$\frac{\partial \dot{m}(x,t)}{\partial t} = -F(x,t)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$
(8.31)

Зависимость F от p в предположении линейной упругости материала стенок трубопровода можно представить в виде, аналогичном (8.29):

$$F = F_0 \left(1 + \frac{\chi(p - p_0)}{E} \right), \tag{8.32}$$

где F_0 — площадь поперечного сечения трубопровода при давлении p_0 ; E — модуль упругости при растяжении материала стенок, а коэффициент χ зависит от формы поперечного сечения и толщины стенок. Так, для толстостенной трубы с внутренним радиусом r и толщиной стенки h при давлении p_0 увеличение давления на Δp при отсутствии осевой силы приводит к радиальному перемещению [145]

$$\Delta r = \left((1+\nu) \frac{r+2r^2}{2h+h^2/r} \right) \frac{\Delta p}{E}$$

на внутренней поверхности трубы (здесь $\nu - \kappa o \Rightarrow \phi \phi$ ициент Пуассона материала стенки). Это вызывает приращение $\Delta F = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2$ площади поперечного сечения. В итоге, пренебрегая величиной Δr , малой по сравнению с r, получаем

$$F = F_0 \left(1 + \frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2} \right) \approx F_0 \left(1 + 2\left(1 + \nu + \frac{2r/h}{1 + h/(2r)} \right) \frac{\Delta p}{E} \right).$$

Сравнивая это выражение с (8.32), заключаем, что $\chi \approx 2(1 + \nu) + \frac{2r/h}{1 + h/(2r)}$. Для тонкостенной трубы с круглым поперечным сечением при $h \ll r$ и $\nu \leq 1/2$ получим $\chi \approx 2r/h$.

В (8.29) и (8.32)
$$(p-p_0)/\varkappa_{\tt m}\ll 1$$
 и $\chi(p-p_0)/E\ll 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} = \rho_0 F_0 \Big(\frac{1}{\varkappa_{\mathsf{m}}} + \frac{\chi}{E} + \frac{2\chi}{\varkappa_{\mathsf{m}} E} \Big) \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{F_0}{a_0^2} \Big(1 + \frac{\chi \varkappa_{\mathsf{m}}}{E} \Big) \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (8.33)$$

где $a_0 = \sqrt{\varkappa_{\mathbf{x}}/\rho_0}$ — *скорость звука* в неограниченном объеме жидкости при давлении p_0 . В трубопроводе благодаря деформированию его стенок скорость звука в жидкости меньше a_0 и равна

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \chi \varkappa_{\mathbf{x}}/E}}.$$
(8.34)

Например, для стальной трубы внутренним радиусом r = 16 мм, толщина стенки которой равна h = 5 мм, при $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu = 0.3$ найдем $\chi \approx 8,135$ и для воды при $a_0 \approx 1483$ м/с получим $a \approx 1422$ м/с, т. е. скорость звука уменьшается примерно на 4%. Но для тонкостенной алюминиевой трубы внутренним радиусом 100 мм, толщина стенки которой равна h = 2 мм, имеем $\chi = 2r/h = 100$, и при $E = 7.2 \cdot 10^{10}$ Па скорость звука в воде, находящейся в такой трубе, составит $a \approx 745$ м/с, что почти в 2 раза меньше скорости звука в неограниченном объеме.

Для трубопровода с изменяющимися по его длине площадью $F_0(x)$ поперечного сечения и толщиной стенок коэффициент χ зависит от x. Поэтому a = a(x), и с учетом (8.33) и (8.34) вместо (8.30) запишем

$$\frac{F_0(x)}{a^2(x)}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m}(x,t)}{\partial x}.$$
(8.35)

Дифференцируя (8.35) по t, а (8.31) по x, можно исключить \dot{m} и записать

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{a^2(x)}{F_0(x)} \frac{\partial}{\partial x} \Big(F(x,t) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big)$$

Наоборот, исключая p, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{F(x,t)} \frac{\partial \dot{m}(x,t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2(x)}{F_0(x)} \frac{\partial \dot{m}(x,t)}{\partial x} \right).$$

В случае трубопровода с постоянными по его длине поперечным сечением и толщиной стенок имеем a(x) = a = const и $F_0(x) = F_0 = \text{const}$. При этом в силу неравенства $\chi(p-p_0)/E \ll 1$ можно принять $F \approx F_0$. Тогда получим одномерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \dot{m}(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \dot{m}(x,t)}{\partial x^2}.$$
 (8.36)

Рассмотрим некоторые варианты граничных условий на концах трубопровода. В концевом сечении трубопровода при x = 0 может быть задан закон изменения во времени t давления жидкости, т.е. $p(0,t) = p_0(t)$. В этом случае из (8.35) получим

$$rac{\partial \dot{m}(0,t)}{\partial x}=-rac{F_0(0)}{a^2(0)}rac{dp_0(t)}{dt}$$

(здесь и далее для аналогичных ситуаций запись $\partial \dot{m}(0,t)/\partial x$ означает, что частная производная по x вычислена при x = 0). В частном случае $p_0(t) \equiv p_0 = \text{const}$ имеем $\partial \dot{m}(0,t)/\partial x = 0$. Если конец трубопровода при x = 0 закрыт, то $\dot{m}(0,t) = 0$. Тогда в соответствии с (8.31) $\partial \dot{p}(0,t)/\partial x =$ = 0. При задании в этом сечении массового расхода жидкости в виде зависимости $\dot{m}(0,t) = \dot{m}_0(t)$ из (8.31) следует

$$F(0,t)\frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = -\frac{d\dot{m}_0(t)}{dt}$$

В концевом сечении трубопровода с координатой x = l может быть установлен демпфер — устройство, в котором объем жидкости изменяется в зависимости от ее давления. Если изменение ΔV этого объема происходит за счет упругости стенок демпфера, то, пренебрегая инерцией стенок, ΔV можно считать пропорциональным изменению Δp давления жидкости, причем $\Delta V/V_0 = K(p-p_0)/p_0 = K\Delta p/p_0$, где V_0 объем жидкости в демпфере при давлении p_0 , а K — безразмерный коэффициент пропорциональности. Тогда с учетом (8.35) получим

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{KV_0}{p_0} \frac{\partial p(l,t)}{\partial t} = -\frac{a^2(l)KV_0}{p_0F_0(l)} \frac{\partial m(l,t)}{\partial x}.$$

Но скорость изменения объема жидкости в демпфере равна объемному расходу жидкости через сечение трубопровода при x = l, т. е. $d\Delta V/dt = = \dot{m}(l,t)/\rho(l,t)$, и в итоге

$$\dot{m}(l,t)+rac{a^2(l)
ho(l,t)\,KV_0}{p_0F_0(l)}\,rac{\partial\dot{m}(l,t)}{\partial x}=0.$$

Отметим, что при установке демпфера в концевом сечении с координатой x = 0 при $d\Delta V/dt > 0$ объемный расход жидкости через это сечение отрицателен и поэтому

$$\dot{m}(0,t) - rac{a^2(0)
ho(0,t)\,KV_0}{p_0F_0(0)}\,rac{\partial m(0,t)}{\partial x} = 0.$$

Демпфер может представлять собой полость объемом V_* , частично заполненную газом (воздухом). При повышении давления p жидкости газ сжимается, что приводит к увеличению объема V, занятого в таком демпфере жидкостью. Связь V и p зависит от *термодинамического процесса* сжатия газа. При изотермическом процессе $p(V_* - V) = p_0(V_* - V_0)$, поэтому в случае малых изменений давления по сравнению со значением p_0 имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{p_0}{p^2} (V_* - V_0) \frac{dp}{dt} \approx \frac{V_* - V_0}{p_0} \frac{dp}{dt}.$$

Поскольку $d\Delta V/dt = \dot{m}(l,t)/\rho(l,t)$ в сечении трубопровода с координатой x = l, то с учетом (8.35) получим

$$\dot{m}(l,t) + rac{a^2(l)
ho(l,t)\,(V_{\star}-V_0)}{p_0F_0(l)}rac{\partial\dot{m}(t,l)}{\partial x} = 0.$$

В гидравлических системах часто встречаются разветвленные трубопроводы. Пусть концевые сечения n трубопроводов объединены в один узел, от которого ведется отсчет координат x_i , $i = \overline{1, n}$, вдоль оси каждого трубопровода (рис. 8.3). Тогда в этих сечениях в любой текущий момент времени t давление жидкости одинаково, т. е. $p_1(0,t) =$ $= \ldots = p_i(0,t) = \ldots = p_n(0,t)$ при $x_i = 0$,



Рис. 8.3

 $i = \overline{1, n}$, что с учетом (8.35) позволяет написать равенство

$$\frac{a_1^2(0)}{F_{01}(0)}\frac{\partial \dot{m}_1(0,t)}{\partial x} = \dots = \frac{a_i^2(0)}{F_{0i}(0)}\frac{\partial \dot{m}_i(0,t)}{\partial x} = \dots = \frac{a_n^2(0)}{F_{0n}(0)}\frac{\partial \dot{m}_n(0,t)}{\partial x}.$$

Кроме того, в узле равна нулю алгебраическая сумма массовых расходов:

$$\sum_{i=1}^n \dot{m}_i(0,t) = 0.$$

Отсюда в соответствии с (8.31) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(0,t) \frac{\partial p_i(0,t)}{\partial x} = 0.$$

В большинстве случаев граничные условия в концевых сечениях трубопроводов удается сформулировать относительно искомой функции $\dot{m}(x,t)$ массового расхода жидкости. Поэтому в математическую

модель (MM) неустановившегося движения жидкости в трубопроводах помимо таких граничных условий должны входить второе уравнение (8.36) и начальные условия, включающие распределения по длине каждого трубопровода в момент времени t = 0, принимаемый за начальный, расхода жидкости и скорости его изменения. Однако на практике обычно известны начальные распределения $\dot{m}(x,0) = \dot{m}^{\circ}(x)$ и p(x,0) = $= p^{\circ}(x)$ расхода жидкости и давления соответственно. В этом случае из последнего равенства при помощи (8.31) и (8.32) получим необходимое для завершения построения MM начальное условие $\partial \dot{m}(x,0)/\partial t =$ $= -F(x,0) \partial p^{\circ}(x)/\partial x$. При определении собственных частот и форм колебаний жидкости в трубопроводах и анализе установившегося процесса колебаний под действием внешних возмущающих факторов необходимость в задании начальных условий отпадает. После нахождения функции $\dot{m}(x,t)$, как правило, несложно установить зависимость p(x,t)давления жидкости от времени и от координаты.

Пусть трубопровод длиной l имеет постоянные площадь F_0 поперечного сечения и толщину стенки, т.е. для скорости звука в жидкости, находящейся в этом трубопроводе, имеем a = const. В момент времени t = 0 давление и массовый расход жидкости постоянны по длине трубопровода и равны p_0 и \dot{m}° соответственно. При t > 0 на одном конце трубопровода (при x = 0) поддерживается постоянное давление p_0 , т. е. $p(0,t) = p_0$, а другой его конец (при x = l) перекрывают. В этом случае искомая функция $\dot{m}(x,t)$ должна удовлетворять второму уравнению (8.36), однородным граничным условиям $\partial \dot{m}(0,t)/\partial x = 0$, $\dot{m}(l,t) = 0$ и начальным условиям $\dot{m}(x,0) = \dot{m}^\circ$ и $\partial \dot{m}(x,0)/\partial t = 0$.

Искомое решение сформулированной краевой задачи представим в виде $\dot{m}(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя это равенство во второе уравнение (8.36), получаем $a^2 X''(x)/X(x) = T''(t)/T(t) = \beta = \text{const.}$ Отсюда следуют два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) второго порядка

$$a^{2}X''(x) - \beta X(x) = 0, \qquad T''(t) - \beta T(t) = 0.$$
 (8.37)

Общее решение $X(x) = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\beta}x/a) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\beta}x/a)$ первого из них должно удовлетворять граничным условиям в виде X'(0) = 0 и X(l) == 0. При любом значении $\beta > 0$ из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Значение $\beta = 0$ также приводит к равенству $C_1 = C_2 = 0$. Нетривиальные решения этого ОДУ существуют, если $0 > \beta = -\omega^2$. В этом случае общее решение ОДУ принимает вид $X(x) = D_1 \cos(\omega x/a) +$ $+ D_2 \sin(\omega x/a)$. Из первого граничного условия имеем $D_2 = 0$, а из второго граничного условия следует, что $D_1 \neq 0$, если $\cos(\omega l/a) = 0$, т. е. $\omega_k = \pi a(2k-1)/(2l), k \in \mathbb{N}$. Таким образом, ω_k являются собственными значениями, а $X_k(x) = \cos(\omega_k x/l)$ — собственными функциями рассматриваемой краевой задачи [35].

Теперь общее решение второго уравнения (8.37) при $\beta = -\omega_k^2$ можно записать в виде $T_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$, причем, согласно второму начальному условию, $b_k = 0$. Общее решение второго уравнения (8.36) запишем как суперпозицию всех решений вида $T_k(t)X_k(x)$, т.е.

$$\dot{m}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

Первое начальное условие приводит к равенству

$$\dot{m}(0,x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l} = \dot{m}^{\circ}.$$

Умножая среднюю и правую части этого равенства на $\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$ и интегрируя по отрезку [0, l], с учетом ортогональности собственных функций [85] получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^l \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l} \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l} dx = a_k \int_0^l \cos^2\frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx =$$
$$= \frac{a_k l}{2} = \int_0^l \dot{m}^\circ \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx = \frac{2l\dot{m}^\circ}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1}$$

и в итоге находим искомую функцию

$$\dot{m}(x,t) = \frac{4\dot{m}^{\circ}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\frac{(2k-1)\pi at}{2l} \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

Зависимость давления жидкости от t и x определим при помощи (8.35):

$$p(x,t) = p_0 + \int_0^t \left(-\frac{a^2}{F_0} \frac{\partial \dot{m}(x,t)}{\partial x} \right) dt =$$

= $p_0 + \frac{4\dot{m}^2 a}{\pi F_0} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$

Давление жидкости на перекрытом конце трубопровода равно

$$p(0,t) = p_0 + \frac{4\dot{m}^{\circ}a}{\pi F_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\frac{(2k-1)\pi at}{2l}.$$
 (8.38)

Нетрудно убедиться, что сумма ряда равна $\dot{m}^{\circ}a/F_0$ при $t \in (0, 2l/a)$ и $-\dot{m}^{\circ}a/F_0$ при $t \in (2l/a, 4l/a)$. Это означает, что сразу после перекрытия сечения трубопровода в его сечении при x = l скачком возрастает давление жидкости на величину $\Delta p^* = \dot{m}^{\circ}a/F_0$ и сохраняет это значение в течение интервала времени $\Delta t = 2l/a$, равного времени распространения возмущения от одного конца трубопровода до другого и обратно. Затем давление также скачком уменьшается на величину $2\Delta p^*$ и т. д. Полученное приращение давления Δp^* при перекрытии трубопровода согласуется с известной **формулой Жуковского** $\Delta p^* = \rho a \overline{w}$ [116] для **гидравлического удара**, где $\overline{w} = \dot{m}^{\circ}/(\rho F_0)$ — средняя в поперечном сечении трубопровода скорость движения жидкости перед его перекрытием.

При анализе явления гидравлического удара в трубопроводе наряду с полученным выше решением в виде стоячих волн удобно использовать общее решение уравнений (8.36), описывающее распространение возмущений в виде бегущих волн [85]:

$$\begin{cases} p(x,t) - p_0 = f_1(x - at) + f_2(x + at), \\ \dot{m}(x,t) - \dot{m}^\circ = g_1(x - at) + g_2(x + at), \end{cases}$$
(8.39)

где f_1, f_2, g_1, g_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть в момент времени t = 0 в сечении x = l трубопровода возникают возмущения установившихся значений давления p_0 и массового расхода жидкости \dot{m}° , вызванные перекрытием этого сечения. Возмущения, равные $\Delta p^* = \dot{m}^\circ a/F_0$ и $\dot{m} = -\dot{m}^\circ$, начинают в виде бегущих волн распространяться со скоростью *a* к открытому концу трубопровода. При этом, используя (8.39), получаем $p(x,t) = p_0 + \Delta p^*$, $\dot{m}(x,t) = 0$ при at < l - x и $p(x,t) = p_0$, $\dot{m}(x,t) = \dot{m}^\circ$ при at > l - x, $x \in (0, l)$. В момент времени $t^* = (l - x^*)/a < l/a$ распределения p(x,t) и $\dot{m}(x,t)$ по длине трубопровода имеют ступенчатый характер (рис. 8.4). В зоне повышенного давления происходит возрастание в соответствии с (8.29) плотности ρ жидкости и увеличение в соответствии с (8.32) площади F поперечного сечения трубопровода по сравнению с площадью F_0 при давлении p_0 .

В момент времени t = l/a при достижении бегущими волнами открытого конца трубопровода по всей его длине давление равно



Рис. 8.4

 $p_0 + \Delta p^*$, а расход жидкости равен нулю, т.е. жидкость неподвижна. Но в соответствии с граничным условием в сечении x = 0 давление равно p_0 и поддерживается постоянным, например, за счет постоянного уровня H жидкости в сосуде (см. рис. 8.4). Это приводит к тому, что в момент времени t = l/a в сечении x = 0 возникает возмущение давления $p_0 - (p_0 + \Delta p^*) = -\Delta p^*$, которое в виде отраженной бегущей волны начинает распространяться со скоростью a к закрытому концу трубопровода.

Распределение давления по длине трубопровода в момент времени $t_* = (l + x_*)/a < 2l/a$ показано на рис. 8.5. При $x \in (0, x_*)$ возмущения давления разных знаков взаимно уничтожаются и давление принимает значение p_0 . При этом плотность жидкости и площадь поперечного сечения трубопровода принимают начальные значения ρ_0 и F_0 соответственно. Это вызывает отраженную от открытого конца трубопровода бегущую волну возмущения расхода жидкости – m° , т.е. жидкость при $x \in (0, x_*)$ движется в направлении, противоположном начальному.



Рис. 8.5

При достижении отраженными бегущими волнами в момент времени t = 2l/a закрытого конца трубопровода давление по всей его длине равно p_0 , а расход жидкости равен $-\dot{m}^\circ$. Но в силу граничного условия $\dot{m}(l,t) = 0$ в этот момент времени при x = l возникнет возмущение расхода жидкости $\dot{m}(l,t) - (-\dot{m}^{\circ}) = \dot{m}^{\circ}$ обратного знака, которое в виде отраженной бегущей волны начнет распространяться к открытому концу трубопровода. Однако этот процесс реально возможен лишь при выполнении некоторых условий.

Дело в том, что благодаря инерции жидкости, вытекающей в момент времени t = 2l/a из трубопровода через его открытый конец, в сечении x = l возникнет отраженная бегущая волна с возмущением давления $-\Delta p^*$. Если окажется, что $p_0 - \Delta p^* \leq p_{\text{н.п.}}$, где $p_{\text{н.п.}}$ — давление насыщенных паров жидкости, то в ней начнется процесс образования пузырьков пара, называемый *кавитацией*. Так, для воды $p_{\rm H, II} = 600\,{
m IIa}$ при температуре 273 К и $p_{\rm H,n} = 3200\,\Pi a$ при температуре 298 К. Значение средней плотности образующейся двухфазной парожидкостной смеси уменьшается по сравнению со значением ρ_0 , что приводит к увеличению давления и последующему захлопыванию пузырьков, вызывающему микроразрушения стенок трубопровода, если такое захлопывание происходит на их поверхности. Двухфазная газожидкостная смесь может возникнуть и в случае, когда в жидкости растворен какой-либо газ (например, воздух). Ясно, что рассматриваемая ММ распространения возмущений в однородной жидкости не применима к двухфазной смеси и сохраняет адекватность при условии $p_0 - \Delta p^* > p_{\mathrm{H,II}}$.

Если указанное условие выполнено, то в момент времени t = 3l/aбегущие волны с возмущениями $-dp^*$ и \dot{m}° достигнут открытого конца трубопровода. При этом по всей его длине давление равно $p_0 - \Delta p^*$, расход жидкости равен нулю, а значения плотности р жидкости и площади F поперечного сечения меньше начальных значений. В силу граничного условия $p(0,t) = p_0$ в этот момент времени в сечении x = 0 возникнет возмущение давления $p_0 - (p_0 - \Delta p^*) = \Delta p^*$, которое в виде бегущей волны начнет распространяться к закрытому концу трубопровода и достигнет сечения x = l в момент времени t = 4l/a. Одновременно будет происходить увеличение значений ρ и F, что вызовет распространение в том же направлении бегущей волны возмущения расхода жидкости \dot{m}° . В результате при t = 4l/a по всей длине трубопровода давление и расход жидкости примут значения p_0 и \dot{m}° , равные начальным. В этот момент времени в сечении x = l снова возникнут возмущения давления Δp^* и расхода жидкости $-\dot{m}^\circ$ и описанный процесс их распространения будет повторяться.

Отметим, что у закрытого конца трубопровода знаки возмущения давления в прямой и отраженной бегущих волнах одинаковы, а знаки возмущения расхода жидкости противоположны. При отражении бегущей волны от открытого конца трубопровода, наоборот, возмущение давления изменяет знак, а возмущение расхода жидкости его сохраняет. Если зафиксировать некоторое промежуточное сечение $x = x^*$ трубопровода, то изменения в нем во времени t давления и расхода жидкости будут иметь вид, показанный на рис. 8.6, т.е. совершать колебания с периодом 4l/a. В действительности вследствие сопротивления при движении реальной (вязкой) жидкости в трубопроводе эти колебания постепенно затухают, поэтому давление жидкости в трубопроводе стремится к p_0 , а расход жидкости — к нулю.



Рис. 8.6

Рассмотренный подход к анализу явления гидравлического удара можно использовать для нахождения распределения давления по длине трубопровода при постепенном перекрытии его сечения x = l [35].

8.4. Движение вязкой несжимаемой жидкости

При одномерном прямолинейном движении частиц линейной вязкой несжимаемой жидкости примем, что в прямоугольной системе координат $O_{x_1x_2x_3}$ проекции вектора v скорости на оси этой системы $v_1 = v_2 = 0$. Тогда из уравнения неразрывности (3.33) следует $\partial v_3 / \partial x_3 =$ = 0, т. е. $v_3 = v_3(x_1, x_2, t)$, а из (8.12) при i = 1, 2 и отсутствии объемных сил $(b_i = 0)$ получим, что давление p не зависит от координат x_1 и x_2 . В этом случае с учетом равенства $dv_3/dt = \partial v_3/\partial t + v_3 \partial v_3/\partial x_3 = \partial v_3/\partial t$ из (8.12) при i = 3 следует

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} - \nu_D \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2,$$
(8.40)

где t — время; ν_D и ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкости, значения которых приняты постоянными. Так как v_3 не зависит от x_3 , то при таком движении жидкости $\partial p/\partial x_3$ может зависеть лишь от времени, а в случае установившегося движения $\partial p/\partial x_3 = \text{const}$, т. е. давление изменяется линейно вдоль оси Ox_3 .

В математическую модель (ММ) прямолинейного движения жидкости помимо (8.40) входят начальные и граничные условия для искомой функции $v_3(x_1, x_2, t)$ и заданная зависимость давления от времени при каком-либо значении x_3 . Эта ММ описывает так называемое ламинарное (слоистое) течение жидкости в прямолинейных каналах постоянного поперечного сечения площадью F = const. При установившемся течении произведение $\Delta pF = -lF dp/dx_3$, где Δp — nepenad давления в жидкости на некотором выбранном участке канала длиной l, равно суммарной силе, уравновешиваемой силами сопротивления движению вязкой жидкости со стороны стенок канала.

Рассмотрим один из простых случаев установившегося течения, называемого *течением Куэтта*, когда канал в виде плоской щели с шириной зазора 2h образован двумя параллельными между собой и осью Ox_3 и неограниченными в направлении оси Ox_1 плоскими стенками (рис. 8.7). Тогда $v_3 = v_3(x_2)$ и (8.40) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$\frac{d^2v_3}{dx_2^2} = -\frac{\Delta p}{\mu_D l} = \text{const.}$$
(8.41)

Пусть стенка с координатой $x_2 = -h$ движется со скоростью v_* , а стенка с координатой $x_2 = h$ — со скоростью v^* . Тогда для (8.41) в силу эффекта прилипания частиц жидкости к стенкам получим граничные условия $v_3(-h) = v_*$, $v_3(h) = v^*$ и решение

$$v_3(x_2) = \frac{v_* + v^*}{2} + \frac{(v^* - v_*)x_2}{2h} + \frac{\Delta p(h^2 - x_2^2)}{2\mu_D l}.$$
 (8.42)

На рис. 8.7 приведены зависимости $v_3(x_2)/v^*$ при $v_* = 0$ и различных значениях параметра $\eta_p = h^2 \Delta p / (2\mu_D l v^*)$.

При неподвижных стенках и $\Delta p > 0$ из (8.42) находим максимальную скорость жидкости $\hat{v} = v_3(0) = h^2 \Delta p/(2\mu_D l)$, объемный расход



Рис. 8.7

жидкости, приходящийся на единицу ширины канала,

$$Q_{\mathbf{x}} = \int_{-h}^{h} v_3(x_2) \, dx_2 = \frac{2\Delta p}{3\mu_D l} h^3$$

и среднюю скорость в канале $\overline{v} = Q_{\mathbf{*}}/(2h) = h^2 \Delta p/(3\mu_D l) = 2\widehat{v}/3.$

В рассматриваемом случае отличны от нуля лишь компоненты $V_{23} = V_{32} = \frac{1}{2} \frac{dv_3(x_2)}{dx_2}$ тензора скоростей, поэтому, согласно (8.7), отличны от нуля только компоненты $\sigma_{23}^{(D)} = \sigma_{32}^{(D)} = \mu_D \frac{dv_3(x_2)}{dx_2}$ тензора вязких напряжений. На неподвижных стенках (при $x_2 = \pm h$) это приводит к возникновению касательных напряжений $\tau = (h/l)\Delta p$, действующих со стороны стенок на жидкость в направлении, противоположном оси Ox_3 , и создающих сопротивление движению, называемое гидравлическим и характеризуемое отношением $R_{\Gamma} = \Delta p/Q_{\#}$. В данном случае $R_{\Gamma} = 3\mu_D l/(2h^3)$.

При течении жидкости в трубе с круглым поперечным сечением радиусом r₀ вместо (8.41) получим ОДУ

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_3(r)}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\mu_D l} = \text{const},\tag{8.43}$$

где r — радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы, с граничными условиями $\frac{dv_3(r)}{dr}\Big|_{r=0} = 0$ и $v_3(r_0) = 0$, что приводит к следующему решению: $v_3(r) = \frac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4\mu_D l}$. В этом случае касательное напряжение, действующее на жидкость со стороны стенки трубы и направленное противоположно оси Ox_3 , $\tau = \mu_D \Big| \frac{dv_3(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = \frac{r_0}{2l} \Delta p$, максимальная скорость $\hat{v} = v_3(0) = \frac{r_0^2 \Delta p}{4\mu_D l}$, а объемный расход жидкости

$$Q_{\mathbf{x}} = 2\pi \int_{0}^{r_0} v_3(r) r \, dr = \frac{\pi r_0^4 \Delta p}{8\mu_D l},$$

 $\overline{v} = \frac{Q_{\star}}{\pi r_0^2} = \frac{r_0^2 \Delta p}{8\mu_D l} = \frac{\widehat{v}}{2}$ и $R_r = \frac{\Delta p}{Q_{\star}} = \frac{8\mu_D l}{\pi r_0^4}$. Используя соотношение

$$\Delta p = \frac{\lambda_{\rm r} l}{d} \frac{\rho \overline{v}^2}{2},\tag{8.44}$$

где $d = 2r_0$, кроме гидравлического сопротивления R_r канала вводят коэффициент λ_r сопротивления движению жидкости. Из полученных результатов следует, что для круглой трубы

$$\lambda_{\rm r} = \frac{2d\,\Delta p}{l\rho\bar{v}^2} = \frac{64}{{\rm Re}},\tag{8.45}$$

где $Re = \overline{v}d/\nu_D$ — число Рейнольдса, характеризующее соотношение между силами инерции и силами вязкости при течении жидкости. Значение Re используют в качестве критерия, устанавливающего границу сохранения ламинарного течения в канале. Для круглой трубы принимают, что течение сохраняется при условии Re ≤ 2300 , хотя при снижении возмущений на входе в трубу с достаточно гладкой поверхностью стенки удавалось сохранить ламинарный режим течения при Re ≤ 50000 [116]. При более высоких значениях Re происходит потеря устойчивости ламинарного режима и течение переходит в *турбу*лентное, при котором частицы жидкости совершают неустановившиеся беспорядочные движения по сложным траекториям [113].

Точное решение в аналитической форме удается получить для течения вязкой жидкости в цилиндрических каналах с поперечным сечением в виде кругового кольца, прямоугольника, равностороннего треугольника и эллипса [76]. Для оценки сопротивления цилиндрических каналов с произвольным поперечным сечением площадью F используют (8.44) и (8.45), но в (8.44) и в выражение для Re вместо диаметра $d = 2r_0$ круглого поперечного сечения подставляют так называемый гидравлический диаметр $d_{\Gamma} = 4F/\Pi_{\pi}$, где Π_{π} — «смоченная» жидкостью часть периметра контура поперечного сечения канала. Ясно, что для трубы с круглым поперечным сечением $d_{\Gamma} = d$. Однако такая оценка значения λ_{Γ} может оказаться слишком грубой. Например, для рассмотренной выше плоской щели $d_{\Gamma} = 4h$ и, согласно (8.44) и (8.45),

$$\Delta p = 64
u_D rac{l}{d_{
m r}} rac{
ho \overline{v}^2}{2 \overline{v} d_{
m r}} = rac{2 \mu_D l \overline{v}}{h^2} = rac{\mu_D l Q_{
m w}}{h^3},$$

т. е. $\Delta p/Q_{\mathbf{x}} = \mu_D l/h^3$, что в 1,5 раза меньше значения $R_{\mathbf{r}}$, которое следует из точного решения. Этот пример показывает, что гидравлическое сопротивление канала при ламинарном течении надежнее находить путем непосредственного анализа исходной MM.

Двустороннюю оценку гидравлического сопротивления канала произвольного поперечного сечения площадью F с полностью смоченным контуром Γ можно получить при помощи двойственной вариационной формы MM, включающей альтернативные функционалы [35]

$$J[v_3] = \int_F \left(\frac{(\nabla_2 v_3)^2}{2} - \frac{\Delta p}{\mu_D l} v_3\right) dF, \quad I[f] = -\int_F \frac{|f|^2}{2\mu_D} dF, \quad (8.46)$$

где $\nabla_2 = (\partial/\partial x_i)e_i - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Гамильтона, действующий в плоскости $x_1 O x_2$ поперечного сечения канала. Первый из этих функционалов допустимо рассматривать на функциях $v_3(M)$, $M \in F$, имеющих кусочно непрерывные производные и удовлетворяющих условию $v_3(P) = 0$, $P \in \Gamma$, а второй — на векторных функциях f(M), $M \in F$, удовлетворяющих уравнению $\nabla_2 \cdot f = \Delta p/l$. Уравнением Эйлера — Лагранжа по отношению к $J[v_3]$ является обобщение уравнения (8.41):

$$\nabla_2^2 v_3 = -\frac{\Delta p}{\mu_D l},\tag{8.47}$$

где $\nabla_2^2 - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа, определенный в плоскости x₁Ox₂.

Функция v_3^* , удовлетворяющая (8.47), на допустимом множестве функций v_3 минимизирует функционал $J[v_3]$, а функция $f^* = -\mu_D \nabla_2 v_3^*$ на допустимом множестве функций f максимизирует функционал I[f], при этом выполняются неравенства $J[v_3] \ge J[v_3^*] = I[f^*] \ge I[f]$. Используя теорему Остроградского — Гаусса и учитывая (8.47), находим

$$J[v_3^*] = \int_F \left(\frac{(\nabla_2 v_3^*)^2}{2} - \frac{\Delta p}{\mu_D l} v_3^* \right) dF = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} v_3^* (\nabla_2 v_3^*) n \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_F v_3^* \nabla_2^2 v_3^* \, dF - \frac{\Delta p}{\mu_D l} \int_F v_3^* \, dS = -\frac{\Delta p}{2\mu_D l} Q_{\mathbf{x}} = -\frac{(\Delta p)^2}{2\mu_D l R_{\mathbf{r}}},$$

где n — единичный вектор внешней нормали к контуру Г. В итоге получаем двустороннюю оценку для R_{Γ} в виде

$$-\frac{(\Delta p)^2}{2\mu_D l J[v_3]} \leqslant R_{\rm r} \leqslant -\frac{(\Delta p)^2}{2\mu_D l I[\boldsymbol{f}]}.$$
(8.48)

Например, в случае течения в канале с квадратным поперечным сечением площадью $F = 4a^2$ при выборе начала координат в центре квадрата допустимой для $J[v_3]$ будет функция $v_3(x_1, x_2) = C(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2)$, C = const. Подставляя эту функцию в первое равенство (8.47), получаем

$$J[v_3] = \frac{C^2}{2} \int_{-a-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left(4x_1^2(a^2 - x_2^2)^2 + 4x_2^2(a^2 - x_1^2)^2 \right) dx_1 dx_2 - C\frac{\Delta p}{\mu_D l} \int_{-a-a}^{a} \int_{-a}^{a} (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{128}{45}C^2a^8 - \frac{16}{9}C\frac{\Delta p}{\mu_D l}a^6.$$

Из необходимого условия $\frac{\partial J[v_3]}{\partial C} = 0$ минимума функционала найдем константу $C = \frac{5}{16} \frac{\Delta p}{a^2 \mu_D l}$, а затем вычислим значение $J[v_3] = -\frac{5}{18} \left(\frac{a^2 \Delta p}{\mu_D l}\right)^2$.

В качестве функции, допустимой для I[f], примем $f = \frac{\Delta p}{l} \nabla_2 \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \right)$. Подставляя ее во второе равенство (8.47), находим

$$I[f] = -\frac{1}{2\eta^2} \left(\frac{\Delta p}{4l}\right)^2 \int_{-a-a}^{a} \int_{-a}^{a} 4(x_1^2 + x_2^2) \, dx_1 \, dx_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{a^2 \Delta p}{\mu_D l}\right)^2$$

Таким образом, учитывая (8.48), имеем $1.5\mu_D l/a^4 \leq R_r \leq 1.8\mu_D l/a^4$. Из точного решения [76] следует $R_r \approx 1.775\mu_D l/a^4$, что достаточно близко к полученной верхней оценке. Для рассматриваемого канала $d_r = 2a$, поэтому, согласно (8.45) и (8.45), получим $R_r = \Delta p/Q_{\star} = 2\mu_D l/a^4$, т.е. примерно на 11% выше полученной верхней оценки и почти на 13% выше значения R_r , которое следует из точного решения.

При прямолинейном движении вязкой жидкости в канале в некоторых случаях удается получить точное решение и для более сложных по сравнению с (8.7) *реологических уравнений*, описывающих свойства так называемых *неньютоновских жидкостей*. В частности, эти уравнения применяют для описания свойств широкого класса сред, используемых в технике и технологических процессах: расплавленных металлов, полимеров, нефтепродуктов, бетонов, силикатов, грунтов и т. п. [76, 148]. Некоторые из таких уравнений представлены в 10 и 11. Здесь в качестве примера рассмотрим уравнение

$$-V_{23} = \frac{\tau}{2\mu_D} + k_n \tau^n, \quad k_n, n = \text{const},$$
 (8.49)

связывающее компоненту V₂₃ тензора скоростей с возникающим при этом касательным напряжением τ .

Учитывая условие равновесия $2l\tau = 2x_2\Delta p$ слоя жидкости толциной $2x_2$ и длиной *l* при ее установившемся движении в плоской щели (см. рис. 8.7) с неподвижными стенками, а также (8.49) и равенство $V_{23} = \frac{1}{2} \frac{dv_3(x_2)}{dx_2}$, получаем ОДУ

$$-\frac{dv_3(x_2)}{dx_2} = \frac{\Delta p x_2}{\mu_D l} + 2k_n \left(\frac{\Delta p x_2}{\mu_D l}\right)^n$$

с граничным условием $v_3(h) = 0$. После интегрирования находим

$$v_3(x_2) = \frac{\Delta p(h^2 - x_2^2)}{2\mu_D l} + 2k_n \left(\frac{\Delta p}{\mu_D l}\right)^n \frac{h^{n+1} - x_2^{n+1}}{n+1}.$$

При установившемся течении в трубе с круглым поперечным сечением радиусом r_0 условием равновесия объема жидкости в виде цилиндра длиной l и радиусом $r \leq r_0$ будет $2\pi r l \tau = \pi r^2 \Delta p$. Отсюда, заменив в (8.49) V_{23} на $(1/2) dv_3(r)/dr$, получим ОДУ

$$-\frac{dv_3(r)}{dr} = \frac{\Delta pr}{2\mu_D l} + 2k_n \left(\frac{\Delta pr}{2\mu_D l}\right)^n$$

с граничным условием $v_3(r_0) = 0$ и после интегрирования найдем

$$v_3(r) = rac{\Delta p(r_0^2 - r^2)}{4\mu_D l} + 2k_n \left(rac{\Delta p}{2\mu_D l}
ight)^n rac{r_0^{n+1} - r^{n+1}}{n+1}.$$

Объемный расход жидкости через трубу

$$Q = 2\pi \int_{0}^{r_0} v_3(r) r \, dr = \frac{\pi r_0^4 \Delta p}{8\mu_D l} + \pi k_n \left(\frac{\Delta p}{2\mu_D l}\right)^n \frac{n+1}{n+3} r_0^{n+3}$$

нелинейно зависит от Δp . Поэтому гидравлическое сопротивление трубы при течении рассматриваемой жидкости будет зависеть от $Q_{\mathbf{x}}$ (или от Δp).

Если при движении жидкости вектор v ее скорости параллелен некоторой плоскости, например координатной плоскости x_1Ox_2 , и не зависит от координаты x_3 , то говорят о **плоском течении**, причем $v_1 = v_1(x_1, x_2, t), v_2 = v_2(x_1, x_2, t), v_3 \equiv 0$ и в (8.13) $(\mathbf{W} \cdot \nabla_x) v = 0$, так как ненулевой может быть лишь проекция W_3 вектора \mathbf{W} завихренности. В этом случае из (8.13) следует уравнение переноса завихренности

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + v_i \frac{\partial W_3}{\partial x_i} = \nu_D \nabla_2^2 W_3, \quad i = 1, 2.$$
(8.50)

Помимо (8.50) в ММ, описывающую плоское течение несжимаемой ньютоновской жидкости, входят уравнение неразрывности (3.33) и выражение $W_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$. Однако при этом сохраняется отмеченная в 8.1 проблема корректной формулировки граничных условий для W_3 на непроницаемых участках контура Г, ограничивающего двумерную область F, в которой реализуется плоское течение.

В плоском течении ненулевой является лишь проекция ψ_3 векторной функции тока, причем

$$v_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}.$$
 (8.51)

Следовательно, уравнение неразрывности в виде $\partial v_i / \partial x_i = 0$ удовлетворяется тождественно. Значение ψ_3 постоянно вдоль каждой линии тока, которая при установившемся движении совпадает с траекторией частиц жидкости, а объемный расход жидкости между двумя любыми линиями тока пропорционален разности значений ψ_3 , соответствующих этим линиям. Учитывая (8.51) и выражение для W_3 , получаем уравнение

$$\nabla_2^2 \psi_3 = -W_3, \tag{8.52}$$

которое в сочетании с (8.50) в виде

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \frac{\partial W_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \frac{\partial W_3}{\partial x_2} = \nu_D \nabla_2^2 W_3 . \tag{8.53}$$

формирует еще один вариант ММ, описывающей плоское течение. При решении прикладных задач граничные условия для W_3 на непроницаемых участках контура Г обычно получают последовательными приближениями [125] из решения (8.52).

Если при помощи (8.52) исключить W_3 из (8.53), то получим

$$\frac{\partial(\nabla_2^2\psi_3)}{\partial t} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}\frac{\partial(\nabla_2^2\psi_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\frac{\partial(\nabla_2^2\psi_3)}{\partial x_2} = \nu_D \nabla_2^4\psi_3, \tag{8.54}$$

где $\nabla_2^4 = \nabla_2^2(\nabla_2^2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \partial u \phi \phi e penuuaльный бигар$ $монический оператор, действующий в плоскости <math>x_1Ox_2$. Несмотря на более высокий порядок производных по пространственным координатам для (8.54) удается корректно сформулировать граничные условия в любой точке контура Γ .

Согласно физическому смыслу функции ψ_3 ее значение не изменяется на непроницаемом для жидкости участке контура, т. е. $\psi_3 = \text{const.}$ Если весь контур Γ , ограничивающий односвязную область F (рис. 8.8), является непроницаемым, то на нем можно принять $\psi_3 = 0$. На участке Γ_* (рис. 8.9), через который жидкость вытекает из области F (или поступает в эту область) и на котором задана скорость течения $v^{\circ}(P)$, $P \in \Gamma_*$, нетрудно вычислить изменение функции тока

$$\psi_3(P) = \psi_3(A) + \int_0^{s(P)} \boldsymbol{v}^{\circ}(P')\boldsymbol{n}(P')\,ds(P'), \quad P \in \Gamma_*,$$

где $\psi_3(A)$ — значение функции тока в точке $A \in \Gamma_*$, от которой отсчитывают длину s(P') дуги до текущей точки $P' \in \Gamma_*$ с единичным вектором n(P') внешней нормали. Это позволяет задать одно граничное условие.



Рис. 8.8

Рис. 8.9

Второе граничное условие на этом участке контура следует из (8.51) и принимает вид $\frac{\partial \psi_3(P)}{\partial n(P)} = \boldsymbol{v}^\circ \cdot \boldsymbol{t}(P)$, где $\boldsymbol{t}(P)$ — единичный вектор в направлении касательной к контуру в точке $P \in \Gamma_*$, повернутый относительно $\boldsymbol{n}(P)$ против хода часовой стрелки.

Если в области F до решения задачи можно установить линию Γ_0 симметрии течения (см. рис. 8.9), то она будет совпадать с одной из линий тока, на которой $\psi_3 = C_0 = \text{const}$, а в точках $P \in \Gamma_0$ частицы жидкости не будут вращаться, т.е. $W_3(P) = 0$, и в соответствии с (8.52) $\nabla^2 \psi_3(P) = 0$. Совмещая в любой точке $P \in \Gamma_0$ оси координат с направлениями t(P) касательной и n(P) нормали к линии симметрии, в силу инвариантности дифференциального оператора Лапласа относительно поворота прямоугольной системы координат (см. П1.4) получаем $\frac{\partial^2 \psi_3(P)}{\partial t^2(P)} + \frac{\partial^2 \psi_3(P)}{\partial n^2(P)} = 0$. Но так как $\psi_3(P) = \text{const}, P \in \Gamma_0$, то $\frac{\partial^2 \psi_3(P)}{\partial t^2(P)} = 0$ и, следовательно, в качестве граничного условия можно принять $\frac{\partial^2 \psi_3(P)}{\partial n^2(P)} = 0$.

Аналогичные рассуждения можно провести применительно к свободной поверхности жидкости (участок $\tilde{\Gamma}$ на рис. 8.8), если пренебречь трением жидкости с воздухом (или иным газом) на этой поверхности. Однако на участке Γ^* , соответствующем твердой стенке, в силу эффекта прилипания частиц жидкости в точках $P \in \Gamma^*$ вектор v(P) скорости жидкости равен заданному вектору $v^*(P)$ скорости движения стенки. Поэтому в соответствии с (8.51) на такой стенке $\frac{\partial \psi_3(P)}{\partial n(P)} = v^*(P) \cdot t(P)$, $P \in \Gamma^*$. Ясно, что в случае неподвижной стенки $\frac{\partial \psi_3(P)}{\partial n(P)} = 0$.

Таким образом, в каждой точке контура Γ , ограничивающего двумерную область F, удается задать по два граничных условия для функции ψ_3 , необходимых для построения MM, включающей (8.54). Эти граничные условия можно записать в достаточно общем виде следующим образом:

$$\psi_{3}(P) = \psi_{3}^{\circ} = \text{const}, \quad \frac{\partial^{2}\psi_{3}(P)}{\partial n^{2}(P)} = 0, \quad P \in \Gamma_{1} \subset \Gamma;$$

$$\psi_{3}(P) = f_{0}(P), \quad \frac{\partial\psi_{3}(P)}{\partial n(P)} = f_{1}(P), \quad P \in \Gamma_{2} = \Gamma \setminus \Gamma_{1},$$

$$(8.55)$$

где Γ_1 — участки контура, соответствующие свободной поверхности жидкости или линии симметрии течения; $f_0(P)$ и $f_1(P)$ — заданные функции точки на участках Γ_2 контура, а число ψ_3° обычно можно принять равным нулю.

Используя соотношения $rv_r = -\partial \psi/\partial z$ и $rv_z = \partial \psi/\partial r$ [76], можно ввести функцию тока $\psi(r, z)$ для осесимметричного относительно оси Оz течения, в котором вектор скорости имеет в цилиндрической системе координат проекции v_r и v_z на радиальное и осевое направления соответственно. Тогда уравнение неразрывности (3.33) в виде $\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ удовлетворяется тождественно, а вместо (8.54) можно получить уравнение относительно ψ , содержащее производные этой функции по координатам r и z до четвертого порядка включительно. Граничные условия для ψ формулируются аналогично (8.55). Функция тока может быть введена и для осесимметричного течения, рассматриваемого в сферической системе координат.

8.5. Модели тепломассопереноса в несжимаемой жидкости

При движении вязкой жидкости в силу диссипации механической энергии и теплообмена с обтекаемыми твердыми телами в общем случае может возникнуть неоднородное по объему жидкости распределение температуры, описываемое *уравнением теплопереноса* (8.8). В случае несжимаемой изотропной жидкости и в отсутствие внутренних источников теплоты оно примет вид

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 2\mu_D V_{ij} V_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где ρ , c_v , μ_D и $\lambda^{(T)}$ — плотность, теплоемкость при постоянном объеме, динамическая вязкость и теплопроводность жидкости; T температура; t — время; v_i — проекция вектора скорости на ось Ox_i прямоугольной системы координат; $V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты тензора скоростей. В большинстве прикладных задач можно пренебречь диссипацией механической энергии и считать $\lambda^{(T)} = \text{const}$, что позволяет представить уравнение теплопереноса в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = a^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}.$$
(8.56)

где $a^{(T)} = \lambda^{(T)}/(\rho c_v)$ — температуропроводность жидкости.

Помимо (8.56) в математическую модель (ММ), описывающую процесс теплопереноса, войдут уравнение неразрывности (3.33) и уравнения Навье — Стокса (8.12), а в случае плоского течения — либо (8.50)-(8.52), либо (8.51) и (8.54) с соответствующими краевыми условиями. Если в жидкости присутствует некоторое вещество, массу которого в единице объема определяет объемная концентрация С, и происходят явления концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии, то ММ следует дополнить уравнением переноса этого вещества вида (3.40)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(D^{(C)} \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{C}{T} D^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{C}{p} D^{(p)} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big),$$

где $D^{(C)}$, $D^{(T)}$ и $D^{(p)}$ — коэффициенты концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии этого вещества; p — давление. Часто можно ограничиться учетом лишь явления концентрационной диффузии при условии $D^{(C)} = \text{const}$, что приводит последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = D^{(C)} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i}.$$
(8.57)

В этом случае ММ описывает процесс тепломассопереноса в несжимаемой жидкости в предположении $C \ll \rho$, что позволяет не учитывать влияние C на значения ρ , μ_D и $a^{(T)}$. Если движение жидкости вызвано внешними механическими воздействиями (например, nepenaдом давления, создаваемым насосом или возникающим при обтекании твердого тела), то говорят, что тепломассоперенос определяется вынужденной конвекцией. Плотность р несжимаемой жидкости в некоторой степени зависит от Т и С. Поэтому при их неоднородном распределении в объеме жидкости возникает и неоднородное распределение ρ , что в поле силы тяжести или при наличии ускорения приводит к возникновению объемных сил и вызывает движение жидкости, называемое естественной конвекцией. Если объем можно считать неограниченным (например, в случае тепломассопереноса в атмосфере или водоемах), то обычно говорят о свободной конвекции. При сопоставимом влиянии как вынужденной, так и естественной (свободной) конвекции тепломассоперенос определяется смешанной конвекцией.

Изменение плотности жидкости при сравнительно малом изменении *T* и *C* можно представить в виде

$$\rho(1 + \alpha_V^{(T)}(T - T_0)) = \rho_0 + C, \qquad (8.58)$$

где $\alpha_V^{(T)}$ — температурный коэффициент объемного расширения жидкости; ρ_0 — плотность при температуре T_0 и C = 0. В неподвижной относительно выбранной системы координат жидкости, имеющей плотность ρ_0 , согласно (8.12), $\partial p^{\circ}/\partial x_i = b_i^{\circ} = w_i \rho_0$, где p° — гидростатическое давление, b_i° и w_i — проекции на оси Ox_i векторов b плотности объемных сил и w абсолютного ускорения (например, если на поверхности Земли ось Ox_3 неподвижной системы координат направлена вверх, то $w_3 = -g_0$, где $g_0 \approx 9,81$ м/с² — ускорение свободного падения). Тогда при неоднородных в объеме жидкости распределениях T и C можно принять в левой части (8.12) $\rho = \text{const.}$, а в правой части с учетом (8.58) и равенства $b_i = w_i \rho$ произвести замену

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i = -\frac{\partial (p - p^{\circ})}{\partial x_i} + b_i - b_i^{\circ} = -\frac{\partial (p - p^{\circ})}{\partial x_i} + w_i(\rho - \rho_0) =$$
$$= -\frac{\partial (p - p^{\circ})}{\partial x_i} - w_i(\rho \alpha_V^{(T)}(T - T_0) - C),$$

где р — давление жидкости. В итоге (8.12) примет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - p_0)}{\partial x_i} - w_i \left(\alpha_V^{(T)} (T - T_0) - \frac{C}{\rho} \right) + \nu_D \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8.59)$$

где ν_D — кинематическая вязкость.

Наряду с (8.56), (8.57) и (8.59) в ММ, описывающую процесс тепломассопереноса, должны входить так называемые условия однозначности. Они состоят из геометрических, физических и краевых условий.

В уравнениях (8.56), (8.57) и (8.59), входящих в ММ теплопереноса, перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов длины, скорости, давления, температуры и объемной концентрации L, v_0 , p_0 , T_0 и C_0 соответственно (выбор масштабов целесообразно согласовывать с набором параметров, которые входят в условия однозначности). Тогда получим

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial F_{0}} + \operatorname{Pe} \overline{v}_{i} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial \overline{x}_{i}} = \frac{\partial^{2} \overline{\theta}}{\partial \overline{x}_{i} \partial \overline{x}_{i}}, \\
\operatorname{Lu} \frac{\partial \overline{C}}{\partial F_{0}} + \operatorname{Re} \operatorname{Sc} \overline{v}_{i} \frac{\partial \overline{C}}{\partial \overline{x}_{i}} = \frac{\partial^{2} \overline{C}}{\partial \overline{x}_{i} \partial \overline{x}_{i}}, \\
\frac{\partial \overline{v}_{i}}{\partial \operatorname{Ho}} + \overline{v}_{j} \frac{\partial \overline{v}_{i}}{\partial \overline{x}_{j}} = -\operatorname{Eu} \frac{\partial \Delta \overline{p}}{\partial \overline{x}_{i}} - \frac{w_{i}}{|w|} \operatorname{Ra} \frac{\overline{\theta} - 1}{\operatorname{Re}^{2} \operatorname{Pr}} + \frac{w_{i}}{|w|} \frac{\operatorname{Ra}_{C} \overline{C}}{\operatorname{Re}^{2} \operatorname{Sc}} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^{2} \overline{v}_{i}}{\partial \overline{x}_{j} \partial \overline{x}_{j}}, \\
= \operatorname{Re}^{\overline{\theta}} - \frac{T}{\overline{v}} + \overline{v}_{i} - \frac{v_{i}}{\overline{v}} = -\frac{x_{i}}{\overline{v}} - \frac{\overline{C}}{\overline{v}} + \Delta \overline{v} - \frac{p - p^{\circ}}{\overline{v}} + \operatorname{Fe} = -\frac{a^{(T)}t}{\overline{v}} + \operatorname{Re}^{T} +$$

где
$$\overline{\theta} = \frac{1}{T_0}$$
; $\overline{v}_i = \frac{v_i}{v_0}$; $\overline{x}_i = \frac{x_i}{L}$, $\overline{C} = \frac{C}{C_0}$; $\Delta \overline{p} = \frac{p-p}{p_0}$; Fo $= \frac{a' \cdot i}{L^2}$ — число
Фурье; Pe $= \frac{v_0 L}{a^{(T)}}$ — число Пекле; Lu $= \frac{a^{(T)}}{D^{(C)}}$ — число Лыкова —
Льюиса; Re $= \frac{v_0 L}{\nu_D}$ — число Рейнольдса; Sc $= \frac{\nu_D}{D^{(C)}}$ — число Шмидта;
Ho $= \frac{v_0 t}{L}$ — число гомохронности; Eu $= \frac{p_0}{\rho v_0^2}$ — число Эйлера;
Ra $= \frac{|w|L^3 \alpha_V^{(T)} T_0}{\nu_D a^{(T)}}$ — число Рэлея; Pr $= \frac{\nu_D}{a^{(T)}}$ — число Прандтля;
Ra_C $= \frac{|w|L^3 C_0}{\rho \nu_D D^{(C)}}$ — концентрационное число Рэлея.

Не все безразмерные комплексы в (8.60), являющиеся критериями подобия процессов тепломассопереноса, независимы (например, Ho = Fo Re Pr и Pe = Re Pr). Совокупность комплексов, состоящих из параметров, входящих в условия однозначности, называют определяющими критериями подобия. Эти критерии могут быть вычислены по исходным данным до количественного анализа ММ процесса или его экспериментального исследования. При геометрическом подобии областей протекания двух процессов, имеющих одинаковую физическую природу, подобии их условий однозначности и попарном равенстве значений одноименных определяющих критериев говорят, что эти процессы подобны [135], т. е. для таких процессов в моменты времени t, соответствующие равенству значений Fo и Ho, совпадают зависимости безразмерных распределений $\overline{\theta}, \overline{C}, \overline{p}$ и \overline{v}_i от безразмерных координат \overline{x}_i .

Для установления совокупности независимых определяющих критериев подобия удобно использовать основные положения теории размерностей, которая на основе анализа связей между размерными параметрами, характеризующими рассматриваемый процесс, позволяет определить структуру MM этого процесса в виде зависимости между безразмерными комбинациями, составленными из таких параметров.

Размерностью величины или параметра называют произведение степеней независимых единиц измерения физических величин, принятых в качестве основных (стандартных). Известно, что в качестве основных в Международной системе единиц СИ (Systême International)
приняты следующие единицы измерения: длины — метр (м), массы — килограмм (кг), времени — секунда (с), силы электрического тока — ампер (А), температуры — кельвин (К), силы света — кандела (кд), количества вещества — моль. Дополнительными (безразмерными) единицами являются радиан (рад) для измерения плоского угла и стерадиан (ср) для измерения телесного угла.

Например, размерность модуля w вектора w ускорения записывают в виде $[w] = [l]^{\psi_l^{(w)}}[t]^{\psi_l^{(w)}} = m/c^2$, где [l] = m и [t] = c — размерности длины и времени соответственно, $\psi_l^{(w)} = 1$ и $\psi_t^{(w)} = -2$ — показатели этих размерностей в выражении для размерности ускорения. Размерность силы P в системе СИ вводят на основе второго закона Ньютона P = mw, где m — масса. Отсюда [P] = [m][w] = $= [m]^{\psi_m^{(P)}}[l]^{\psi_l^{(P)}}[t]^{\psi_l^{(P)}} = кг \cdot m \cdot c^{-2} = кг \cdot m/c^2 = H$ (ньютон), где $\psi_m^{(P)} = 1$, $\psi_l^{(P)} = 1$, $\psi_t^{(P)} = -2$ — показатели размерности массы, длины и времени соответственно в выражении для размерности силы. Ясно, что для величины, равной произведению размерных величин, показатели размерности равны алгебраической сумме соответствующих показателей сомножителей. Например, размерность мощности Q следует из выражения

$$[Q] = \frac{[P][l]}{[t]} = [m]^{\psi_m^{(P)}}[l]^{\psi_l^{(P)}}[t]^{\psi_t^{(P)}}[l]^{\psi_l^{(l)}}[t]^{-\psi_t^{(t)}} = [m]^{\psi_m^{(P)}}[l]^{\psi_l^{(P)} + \psi_l^{(l)}}[t]^{\psi_t^{(P)} - \psi_t^{(t)}},$$

где $\psi_l^{(l)} = \psi_t^{(t)} = 1$. В итоге получаем $[Q] = [m][l]^2[t]^{-3} = \mathrm{kf} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{c}^3 = \mathrm{Bt}$ (ватт).

Отметим, что для принятой системы основных единиц измерения размерность любой величины может быть представлена лишь единственным образом. Итак, наиболее важное предположение теории размерностей состоит в том, что размерность любой рассматриваемой величины ζ_j можно представить в виде так называемого степенного одночлена

$$[\zeta_j] = \prod_{i=1}^{k} [L_i]^{\psi_{ij}}, \qquad (8.61)$$

где $[L_i]$ — размерности k величин, принятые в качестве основных единиц измерения; ψ_{ij} — некоторые показатели степени.

Наименьшую совокупность размерных и безразмерных величин, необходимых и достаточных для однозначного описания рассматриваемого процесса, в теории размерностей называют определяющими параметрами. К ним относят геометрические и физические характеристики процесса и независимые переменные, включая пространственные координаты и время. Величины, зависящие от определяющих параметров, называют определяемыми параметрами. Определяющих ющие и определяемые параметры образуют совокупность основных параметров данного процесса.

Пусть рассматриваемый процесс характеризуют n основных параметров $\zeta_j > 0, j = \overline{1, n}$, для каждого из которых справедливо (8.61). Рассмотрим степенной одночлен

$$\Pi = \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{z_j},\tag{8.62}$$

где z_j — некоторые показатели степени, и найдем число \overline{n} степенных одночленов этого вида при условии, что они являются независимыми (т.е. ни один из них нельзя представить произведением степеней других) и безразмерными. При помощи (8.61) выразим размерность П, равную единице, через размерности k величин, принятых в качестве основных единиц измерения:

$$[\Pi] = \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} [L_i]^{\psi_{ij}} \right)^{z_j} = \prod_{i=1}^{k} [L_i]^{\beta_i} = 1, \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij} z_j.$$

Таким образом, условием равенства единице размерности степенного одночлена П является выполнение k равенств $\beta_i = 0, i = \overline{1, k}$, или

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij} z_j = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

$$(8.63)$$

Известно, что фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (8.63) относительно n неизвестных z_j , $j = \overline{1, n}$, матрица которой с элементами ψ_{ij} имеет ранг r, состоит из n - r линейно независимых решений [50]. Таким решениям соответствуют ровно n - r независимых степенных одночленов Π_q , $q = \overline{1, n-r}$, размерность которых равна единице, поскольку показатели степени z_j любого другого степенного одночлена П, будучи решениями СЛАУ (8.63), можно представить линейной комбинацией решений из фундаментальной системы, а это означает, что П можно представить произведением степеней Π_q .

Ранг r прямоугольной матрицы размера $k \times n$ с элементами ψ_{ij} , называемой матрицей размерностей, при $n \ge k$ может принять наибольшее возможное значение, равное числу k ее строк. В этом случае из n основных параметров можно составить $\overline{n} = n - k$ безразмерных комбинаций, т.е. степенных одночленов, что и является одним из утверждений основной теоремы теории размерностей — П-теоремы [129]. Но в общем случае $r \leq k$, и поэтому формулировку II-теоремы следует уточнить [76,153]: имеющую физический смысл зависимость между nосновными параметрами, характеризующими изучаемый процесс, можно представить в виде зависимости между $\overline{n} = n - r$ их независимыми безразмерными комбинациями, где r — ранг матрицы размерностей, элементами которой являются показатели в выражениях вида (8.61) для размерности этих параметров.

Из этой теоремы также следует, что при помощи безразмерных комбинаций — критериев подобия — можно привести к безразмерному виду любую зависимость между *n* параметрами, имеющую физический смысл. Действительно, если такая зависимость содержит слагаемые, то их размерность должна быть одинаковой, а аргументы показательных, тригонометрических, обратных тригонометрических и других функций (кроме, может быть, степенных) должны быть безразмерными. Поэтому такую зависимость путем элементарных операций можно представить в безразмерном виде.

В большинстве прикладных задач r = k. Однако возможны случаи, когда r < k, что заставляет при использовании теории размерностей проверять ранг матрицы размерностей [35, 153]. Применим теорию размерностей к процессу тепломассопереноса в вязкой несжимаемой жидкости.

При фиксированной форме области, имеющей характерный размер L, и характерных значениях скорости v₀, температуры T₀, давления p_0 и объемной концентрации C_0 , входящих в условия однозначности, в число основных размерных параметров для рассматриваемого процесса тепломассопереноса необходимо также включить время t, модуль |w| вектора ускорения и теплофизические свойства жидкости: плотность ρ , кинематическую вязкость ν_D , температуропроводность $a^{(T)}$, концентрационную диффузию $D^{(C)}$ и температурный коэффициент объемного расширения $\alpha_{V}^{(T)}$. Пространственные координаты x_{i} (i = 1, 2, 3) и проекции v_i вектора скорости на оси координат, а также T, p и C можно не включать в основные параметры, поскольку их можно привести к безразмерному виду $\overline{x}_i = x_i/L, \overline{v}_i = v_i/v_0, \overline{\theta} = T/T_0, \overline{p} = p/p_0$ и $\overline{C} = C/C_0$ непосредственно при помощи уже выбранных основных параметров, имеющих с ними одинаковые размерности, образовав так называемые безразмерные симплексы, которые следует включить в безразмерные зависимости на заключительной стадии их формирования.

Таким образом, общее число рассматриваемых определяющих размерных параметров, которые должны войти в независимые определяющие критерии подобия, составляет n = 12. Элементы матрицы размерностей для этих параметров представлены в табл. 8.1.

Единица измерения	Параметр											
	L	v_0	T_0	p_0	C_0	t	w	ρ	ν_D	$a^{(T)}$	$D^{(C)}$	$\alpha_V^{(T)}$
м	1	1	0	-1	-3	0	1	-3	2	2	2	0
кг	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
с	0	-1	0	-2	0	1	-2	0	1	-1	-1	0
K	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Таблица 8.1

Перестановкой столбцов в этой таблице соответствующую ей прямоугольную матрицу можно привести к ступенчатому виду. Расположение элементов в такой матрице представлено в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Единица	Параметр												
измерения	L	ρ	t	T_0	v_0	p_0	C_0	w	ν_D	$a^{(T)}$	$D^{(C)}$	$\alpha_V^{(T)}$	
М	1	-3	0	0	1	-1	-3	1	2	2	2	0	
кг	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
с	0	0	1	0	-1	-2	0	-2	-1	-1	-1	0	
K	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	

Определитель, составленный из первых четырех столбцов ступенчатой матрицы, равен -1, т.е. отличен от нуля, следовательно, ранг матрицы размерностей r = k = 4. Поэтому из n = 12 размерных определяющих параметров в соответствии с П-теоремой можно составить $\overline{n} = n - k = 8$ независимых безразмерных комбинаций. Показатели z_j степеней этих параметров в выражении для каждой безразмерной комбинации в форме (8.62) удовлетворяют однородной СЛАУ вида (8.63), матрица которой является матрицей размерностей.

Для нахождения фундаментальной системы решений СЛАУ указанный определитель примем в качестве базисного минора матрицы размерностей, поэтому неизвестные z_j $(j = \overline{1, 4})$ будут базисными [50]. Выразим их через свободные неизвестные z_j , $j = \overline{5, 12}$, используя ступенчатый вид матрицы размерностей:

$$z_1 = -z_5 - 2z_6 - z_8 - 2z_9 - 2z_{10} - 2z_{11},$$

$$z_2 = -z_6 - z_7,$$

$$z_3 = z_5 + 2z_6 + 2z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11},$$

$$z_4 = z_{12}.$$

Значения свободных неизвестных в правых частях этих равенств можно выбрать произвольно. Выбирая эти значения последовательно, так, чтобы одно из них равнялось единице, а остальные — нулю, получаем из записанных равенств значения z_j $(j = \overline{1, 12})$ показателей степени, с которыми определяющие параметры входят в безразмерные

Таблица 8.3

Комби- нация	Параметр												
	L	ρ	t	T_0	v_0	p_0	C_0	w	$ u_D $	$a^{(T)}$	$D^{(C)}$	$\alpha_V^{(T)}$	
Π_1	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
Π_2	-2	$^{-1}$	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
Π_3	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
Π_4	-1	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
Π_5	-2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
Π_6	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
Π_7	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
Π_8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	

комбинации Π_m $(m = \overline{1,8})$ вида (8.62). Эти значения представлены в табл. 8.3.

При помощи этой таблицы запишем выражения для независимых безразмерных комбинаций: $\Pi_1 = v_0 t/L$, $\Pi_2 = p_0 t^2/(L^2\rho)$, $\Pi_3 = C_0/\rho$, $\Pi_4 = = |w|t^2/L$, $\Pi_5 = v_D t/L^2$, $\Pi_6 = a^{(T)}t/L^2$, $\Pi_7 = D^{(C)}t/L^2$, $\Pi_8 = \alpha^{(T)}T_0$. Из них лишь Π_1 и Π_6 совпадают с входящими в (8.60) числами гомохронности Но и Фурье Fo соответственно. Но несложно установить, что $\Pi_2/\Pi_1^2 = \text{Eu}$, $\Pi_1/\Pi_5 = \text{Re}$, $\Pi_6/\Pi_1 = \text{Pe}$, $\Pi_5/\Pi_6 = \text{Pr}$, $\Pi_5/\Pi_7 = \text{Sc}$, $\Pi_4\Pi_8/(\Pi_5\Pi_6) = \text{Ra}$, $\Pi_4\Pi_3/(\Pi_5\Pi_7) = \text{Ra}_C$, $\Pi_6/\Pi_5 = \text{Lu}$. Важно подчеркнуть, что в качестве аргументов безразмерных функций $\bar{\theta}$, \bar{C} , \bar{p} и \bar{v}_i , i = 1, 2, 3, которые удовлетворяют (8.60), наряду с безразмерными координатами \bar{x}_i следует использовать ровно восемь независимых безразмерных комбинаций в виде Π_m ($m = \overline{1,8}$) или столько же полученных из них независимых критериев подобия.

Отметим, что из полученных безразмерных комбинаций Π_m можно также построить еще ряд определяющих критериев подобия, используемых при исследовании движения жидкости и процессов тепломассопереноса в ней. Так, $\Pi_4/\Pi_1^2 = |w|L/v_0^2 = Fr$ называют числом $\Phi py \partial a$, характеризующим соотношение сил тяжести и инерционных сил. Влияние числа Фруда обычно существенно в случае, когда вес жидкости, вытесненной объемом твердого тела, сопоставим с весом тела (например, при движении воздушного шара или дирижабля). Если движение жидкости у поверхности твердого тела вызвано лишь объемными силами, то обычно не удается выбрать в качестве характерной скорости v_0 какое-либо определенное значение. Тогда вместо чисел Рейнольдса и Фруда при анализе подобия процессов используют число Галилея $Ga = Re^2 Fr = |w|L^3/\nu_D^2 = \Pi_4/\Pi_5^2$, которое служит мерой соотношения сил тяжести и вязкого трения. Если в двух характерных точках области, занятой жидкостью, известны значения температур T_1 и T_2 , то можно ввести число Грасгофа $\mathrm{Gr} = \alpha_V^{(T)} |T_1 - T_2| \mathrm{Ga} = \frac{|w|L^3}{\nu_2^2} |T_1 - T_2|.$

В более общем случае объемные силы могут возникнуть за счет неоднородности жидкости, что приводит к изменению ее плотности в рассматриваемой области. Тогда используют **число Архимеда** Ar = $= \left|1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right| Ga = \frac{|w|L^3}{\nu_D^2} \left|1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right|$, где ρ_1 и ρ_2 — плотность жидкости в двух характерных точках этой области.

8.6. Некоторые модели пограничного слоя

При обтекании неподвижного *твердого тела* потоком *вязкой жидкости* в силу *эффекта прилипания* скорость ее *частиц* на поверхности тела равна нулю, а по мере удаления в глубь потока по направлению нормали к поверхности постепенно возрастает, стремясь к некоторому значению в обтекающем потоке. Прилегающую к поверхности тела область течения, в которой происходит наиболее существенное изменение скорости, называют **пограничным слоем**. Под толщиной этого слоя понимают расстояние от обтекаемой поверхности, на котором с обусловленной точностью завершается изменение скорости жидкости, хотя формально возмущение поля скоростей, вызванное торможением частиц жидкости на поверхности тела, распространяется во всей области течения.

В зависимости от режима течения различают ламинарный и турбулентный пограничные слои. Помимо пристенного пограничного слоя, который образуется при обтекании твердого тела, возникают так называемые свободные пограничные слои при движении в неподвижной жидкости струй или вихревых следов, срывающихся с поверхности обтекаемого тела [76]. Здесь ограничимся рассмотрением математических моделей (ММ) ламинарного пристенного пограничного слоя в случае установившегося течения несжимаемой жидкости.

Если вдали от обтекаемого тела течение жидкости является безвихревым, то такой режим течения сохраняется и за пределами пограничного слоя, в котором течение носит вихревой характер. Рассмотрим установившееся обтекание тонкой пластины потоком жидкости, имеющим вдали от пластины вектор скорости v_{∞} , совпадающий с положительным направлением оси Ox_1 прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 8.10). В этом случае течение жидкости будет плоским, а уравнение (8.50) переноса завихренности примет вид

$$v_1\frac{\partial W_3}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial W_3}{\partial x_2} = \nu_D\frac{\partial^2 W_3}{\partial x_1^2} + \nu_D\frac{\partial^2 W_3}{\partial x_2^2},\tag{8.64}$$

где v_1 и v_2 — проекции вектора $v(x_1, x_2)$ скорости на оси Ox_1 и Ox_2 соответственно, удовлетворяющие уравнению неразрывности в



Рис. 8.10

виде $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad \nu_D$ — кинематическая вязкость; $W_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ — единственная отличная от нуля проекция на ось Ox_3 вектора завихренности, перпендикулярного в данном случае плоскости x_1Ox_2 .

Левая часть (8.64) характеризует интенсивность конвективного переноса вихрей, правая часть — интенсивность их $\partial u \phi \phi y$ зионного переноса. Толщина δ пограничного слоя зависит от взаимодействия этих механизмов переноса. Оценим роль отдельных слагаемых в (8.64), введя масштабы входящих в них величин: $v_{\infty} = |v_{\infty}|$ для v_1 , т.е. $v_1 =$ $= O(v_{\infty})$, где $O(\cdot)$ — символ порядка величины; W_0 для W_3 , L как характерный размер стенки в направлении оси Ox_1 и δ_0 как масштаб, характеризующий порядок величины δ , т.е. $\delta = O(\delta_0)$. Из уравнения неразрывности с учетом условия $v_2 = 0$ при $x_2 = 0$ следует, что

$$v_{2} = -\int_{0}^{x_{2}} \frac{\partial v_{1}}{\partial x_{1}} dx_{2} = O(v_{\infty}\delta_{0}/L), \qquad (8.65)$$

т.е. $v_2/v_{\infty} = O(\delta_0/L)$. Таким образом, оба слагаемых в левой части (8.64) имеют одинаковый порядок $O(v_{\infty}W_0/L)$, а в правой части первое слагаемое имеет порядок $O(\nu_D W_0/L^2)$, существенно меньший, чем порядок $O(\nu_D W_0/\delta_0^2)$ второго слагаемого. Поэтому первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым. В итоге, сопоставляя порядки $O(v_{\infty}W_0/L)$ и $O(\nu_D W_0/\delta_0^2)$ величин слагаемых, сохраняемых в (8.64), получаем

$$\frac{\delta_0}{L} = O\left(\sqrt{\frac{\nu_D}{\nu_\infty L}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}\right),\tag{8.66}$$

где $\operatorname{Re}_L = v_{\infty}L/\nu_D$ — число Рейнольдса, включающее в качестве характерного размера протяженность L обтекаемой стенки в направлении оси Ox_1 . Из (8.66) следует, что относительная толщина пограничного слоя должна уменьшаться с увеличением Re_L .

Если в (8.64), опустив первое слагаемое в правой части и использовав (8.51), перейти к функции тока $\psi_3(x_1, x_2)$, то получим уравнение

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} = \nu_D \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2^2} \tag{8.67}$$

с граничными условиями: $\psi_3 = 0$ и $\partial \psi_3 / \partial x_2 = 0$ при $x_2 = 0$, $x_1 > 0$; $\partial \psi_3 / \partial x_2 \rightarrow v_\infty$ при $x_2 \rightarrow \infty$, $x_1 > 0$ и $\partial \psi_3 / \partial x_2 = v_\infty$ при $x_1 = 0$, $x_2 > > 0$. В постановку этой задачи входят величины, размерности которых можно выразить лишь через две независимые единицы измерения: метр (м) и секунда (с), что позволяет перейти от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) с безразмерной искомой функцией $f(\eta) = \psi_3 / \sqrt{\nu_D v_\infty x_1}$, зависящей от одного безразмерного аргумента $\eta = x_2 \sqrt{v_\infty / (\nu_D x_1)}$, который включает оба независимых переменных x_1 и x_2 . В таком случае говорят, что задача имеет автомодельное («самоподобное») решение [76,93,129].

Представляя (8.67) и граничные условия через введенные безразмерные величины, получаем ОДУ

$$2f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0 \tag{8.68}$$

с граничными условиями f(0) = f'(0) = 0 и $f'(\infty) = 1$, причем условие при x = 0 удовлетворяется автоматически. Проведенное с высокой точностью численное интегрирование ОДУ позволило получить

зависимость $f(\eta)$, по которой можно вычислить безразмерный профиль скорости $\overline{v} = v_1/v_{\infty} = f'(\eta)$, представленный сплошной линией на рис. 8.11. С погрешностью до 1% изменение v_1/v_{∞} завершается при $\eta \approx 5$, т.е. в качестве толщины пограничного слоя можно принять $\delta \approx 5\sqrt{\nu_D x_1/v_{\infty}}$. По мере увеличения x_1 растет и толщина пограничного слоя, но безразмерный профиль скорости остается неизменным (по-



добным самому себе). Штриховой линией на рис. 8.11 показана вычисленная при помощи (8.51) зависимость $\overline{v}_2 = \frac{v_2}{v_{\infty}} \sqrt{\text{Re}_x} = \frac{1}{2} (\eta f'(\eta) - f(\eta))$, где $\text{Re}_x = v_{\infty} x_1 / \nu_D$ — число Рейнольдса, вычисленное по текущему значению координаты x_1 . Таким образом, по мере удаления от поверхности стенки v_2 возрастает, т.е. жидкость при обтекании стенки оттесняется от ее поверхности вследствие увеличения толщины пограничного слоя вдоль по течению [81].

Зависимости

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_1}{v_\infty}\right) dx_2 \approx 1,73 \sqrt{\frac{\nu_D x_1}{v_\infty}},$$
$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_1}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_1}{v_\infty}\right) dx_2 \approx 0,664 \sqrt{\frac{\nu_D x_1}{v_\infty}}$$

от x_1 называют соответственно **толщиной вытеснения** и **толщиной потери импульса**. Величина $v_{\infty}\delta^*$ равна уменьшению объемного расхода вязкой жидкости, проходящей через пограничный слой, по сравнению с расходом идеальной жидкости, а толщина δ^{**} характеризует потерю вязкой жидкостью количества движения вследствие трения [104]. Напряжение трения на поверхности обтекаемой плоской стенки $\tau_0 = \mu_D \partial v_1 / \partial x_2 |_{x_2=0} \approx 0.332 \sqrt{\mu_D \rho v_{\infty}^3 / x_1} = 0.664 (\rho v_{\infty}^2 / 2) / \sqrt{\text{Re}_x}$, где μ_D и ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости. Величину $C_f = \tau_0 / (\rho v_{\infty}^2 / 2) \approx 0.664 / \sqrt{\text{Re}_x} = \delta^{**} / x_1$ называют местным коэффициентом трения [135].

Используем введенные выше масштабы величин для оценки слагаемых в уравнениях Навье — Стокса (8.11), которые в случае установившегося обтекания плоской стенки при отсутствии объемных сил принимают вид

$$v_{1} \frac{\partial v_{1}}{\partial x_{1}} + v_{2} \frac{\partial v_{1}}{\partial x_{2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} = \nu_{D} \frac{\partial^{2} v_{1}}{\partial x_{1}^{2}} + \nu_{D} \frac{\partial^{2} v_{1}}{\partial x_{2}^{2}},$$

$$v_{1} \frac{\partial v_{2}}{\partial x_{1}} + v_{2} \frac{\partial v_{2}}{\partial x_{2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_{2}} = \nu_{D} \frac{\partial^{2} v_{2}}{\partial x_{1}^{2}} + \nu_{D} \frac{\partial^{2} v_{2}}{\partial x_{2}^{2}},$$

$$(8.69)$$

где p - dasaeнue. С учетом (8.65) и (8.66) по аналогии с (8.64) слагаемые в левых частях уравнений (8.69) имеют одинаковый порядок, причем в первом уравнении $-O\left(\frac{v_{\infty}^2}{L}\right)$, а во втором $-O\left(\frac{v_{\infty}^2\delta_0}{L^2}\right) = O\left(\frac{v_{\infty}^2}{L\sqrt{\text{Re}_L}}\right)$. Также по аналогии с (8.64) вторым слагаемым в правых частях этих уравнений можно пренебречь по сравнению с третьим, которое в первом уравнении имеет порядок $O\left(\frac{v_Dv_{\infty}}{\delta_0^2}\right) = O\left(\frac{v_{\infty}^2}{L\delta_0}\right) = O\left(\frac{v_{\infty}^2}{L\sqrt{\text{Re}_L}}\right)$. При продольном обтекании плоской стенки можно принять $\partial p/\partial x_1 = 0$ [76, 135]. Таким образом, первое уравнение (8.69) можно записать в виде

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu_D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \tag{8.70}$$

а из второго при $\text{Re}_L \gg 1$ следует, что $\partial p / \partial x_2 \approx 0$, поскольку в нем все слагаемые имеют порядок, малый по сравнению с порядком слагаемых первого уравнения.

Оценивая аналогичным путем порядок слагаемых в (8.56) и (8.57), получим, что *тепломассоперенос* в пограничном слое при установившемся обтекании плоской стенки несжимаемой жидкостью описываются уравнениями

$$v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\nu_D}{\Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}, \quad v_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} = \frac{\nu_D}{\operatorname{Sc}} \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}, \quad (8.71)$$

где T и C — температура жидкости и объемная концентрация некоторого вещества в жидкости; $\Pr = \nu_D/a^{(T)}$ и $Sc = \nu_D/D^{(C)}$ — числа Прандтля и Шмидта; $a^{(T)}$ — температуропроводность жидкости; $D^{(C)}$ коэффициент концентрационной диффузии этого вещества. При этом для масштабов $\delta_0^{(T)}$ и $\delta_0^{(C)}$, оценивающих порядок толщины теплового и концентрационного пограничных слоев [76], с учетом (8.66) получим соответственно $\delta_0^{(T)}/\delta_0 = O(1/\sqrt{\Pr})$ и $\delta_0^{(C)}/\delta_0 = O(1/\sqrt{Sc})$.

Если в (8.70) и (8.71) перейти к безразмерным переменным

$$\overline{v} = \frac{v_1}{v_{\infty}}, \quad \overline{\theta} = \frac{T - T_{\pi}}{T_{\infty} - T_{\pi}}, \quad \overline{C} = \frac{C - C_{\pi}}{C_{\infty} - C_{\pi}}$$

где $T_{\rm m}, T_{\infty} = {\rm const}$ — температуры поверхности стенки и жидкости за пределами пограничного слоя; $C_{\rm m} = {\rm const}, C_{\infty} = {\rm const}$ — объемная концентрация вещества около стенки и за пределами пограничного слоя, то при ${\rm Pr} = {\rm Sc} = 1$ эти уравнения станут с точностью до обозначений тождественными, а толщины всех пограничных слоев одинаковыми. Это означает совпадение безразмерных профилей скорости, температуры и объемной концентрации по толщине пограничного слоя, т.е. $\bar{v} = \bar{\theta} =$ $= \bar{C}$, характеризующее так называемую **тройную аналогию** между переносом количества движения, теплоты и вещества. Поскольку на поверхности стенки при $x_2 = 0$ в соответствии с законами Био — Фурье и Фика соответственно плотность теплового потока

$$q_0 = \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = 0} = \lambda^{(T)} (T_{\infty} - T_{\pi}) \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = 0}$$

и плотность потока вещества

$$j_0^{(C)} = D^{(C)} \frac{\partial C}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = D^{(C)} (C_{\infty} - C_{\pi}) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0},$$

передаваемые от жидкости к стенке, из тройной аналогии следует [135]

$$\frac{C_f}{2} = \operatorname{St} = \frac{q_0}{\rho c_v v_\infty (T_\infty - T_\pi)} = \frac{\alpha}{\rho c_v v_\infty} = \operatorname{St}_C = \frac{j_0^{(C)}}{v_\infty (C_\infty - C_\pi)} = \frac{\alpha_C}{v_\infty}, \quad (8.72)$$

где St и St_C — число Стантона (тепловое) и число Стантона концентрационное; α и α_C — коэффициенты теплообмена и массообмена; c_v — теплоемкость жидкости при постоянном объеме. Тройную аналогию широко используют при построении MM тепломассопереноса.

После подстановки в первое уравнение (8.71) выражений для v_1 и v_2 и перехода к безразмерной температуре $\overline{\theta}$ получим ОДУ $\overline{\theta}''(\eta) + \Pr f(\eta)\overline{\theta}'(\eta)/2 = 0$ с граничными условиями $\overline{\theta}(0) = 0$ и $\overline{\theta}(\infty) = 1$,

интегрирование которого дает

$$\overline{\theta}(\eta) = \frac{\int\limits_{0}^{\eta} \exp\left(-\frac{\Pr}{2} \int\limits_{0}^{\xi} f(\xi') d\xi'\right) d\xi}{\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Pr}{2} \int\limits_{0}^{\eta} f(\xi) d\xi\right) d\eta}$$

В силу (8.68)

$$\int_{0}^{\eta} f(\xi) d\xi = -2 \int_{0}^{\eta} \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} d\xi = -2 \ln \frac{f''(\eta)}{f''(0)},$$
$$\exp\left(-\frac{\Pr}{2} \int_{0}^{\eta} f(\xi) d\xi\right) = \left(\frac{f''(\eta)}{f''(0)}\right)^{\Pr},$$

в итоге получаем

$$\overline{\theta}(\eta) = \frac{\int\limits_{0}^{\eta} (f''(\xi))^{\Pr} d\xi}{\int\limits_{0}^{\infty} (f''(\eta))^{\Pr} d\eta}.$$

Отсюда при Pr = 1 следует уже установленное совпадение безразмерных профилей температуры и скорости.

Использовав (8.72) и анпроксимацию [135] $d\overline{\theta}(0)/d\eta = 0.332 \mathrm{Pr}^{1/3}$ (0.5 \leq Pr \leq 50), запишем

$$q_0 = \alpha (T_{\infty} - T_{\pi}) = \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \lambda^{(T)} (T_{\infty} - T_{\pi}) \overline{\theta}'(0) \sqrt{\frac{v_{\infty}}{\nu_D x}} = 0,332 \operatorname{Pr}^{1/3} \operatorname{Re}_x^{1/2} \lambda^{(T)} \frac{T_{\infty} - T_{\pi}}{x_1},$$

или $Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$, где $Nu_x = \alpha x_1 / \lambda^{(T)}$ — число Нуссельта, вычисленное по текущему значению x_1 . Для плоской стенки длиной L в направлении обтекания интегрированием по x_1 получим $Nu_L =$ $= \overline{\alpha} L / \lambda^{(T)} = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2}$, где $\overline{\alpha}$ — значение коэффициента теплообмена, усредненное по поверхности стенки. Преобразованием второго уравнения (8.71) можно получить аналогичный результат и для коэффициента массообмена. При обтекании криволинейной поверхности изменение давления в направлении обтекания может стать существенным. Но за пределами пограничного слоя вязкость движущейся жидкости проявляется слабо. Поэтому можно воспользоваться интегралом Бернулли (8.23) и, полагая при малой толщине пограничного слоя по сравнению с радиусами кривизны обтекаемой поверхности течение по-прежнему плоским, при $B \equiv 0$ принять $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = -v(x_1) \frac{dv(x_1)}{dx_1}$, где x_1 — координата, отсчитываемая по поверхности в направлении обтекания, а v — скорость жидкости на внешней границе пограничного слоя, которая может быть найдена при помощи ММ безвихревого обтекания поверхности идеальной несжимаемой жидкостью [76]. Тогда, подставляя это равенство в (8.69) и учитывая, что $v \frac{dv}{dx_1} = O\left(\frac{v_{\infty}^2}{L}\right)$, вместо (8.70) получаем

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = v \frac{dv}{dx_1} + \nu_D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}.$$
(8.73)

Использовав уравнение неразрывности $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$ для установившегося плоского течения и (8.73), запишем

$$v_1 \frac{dv}{dx_1} + v \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial (v_1 v)}{\partial x_1} + \frac{\partial (v_2 v)}{\partial x_2} = v_1 \frac{dv}{dx_1},$$
$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial (v_1 v_2)}{\partial x_2} = v \frac{dv}{dx_1} + \nu_D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}.$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем

$$\frac{\partial \big(v_1(v-v_1)\big)}{\partial x_1} + \frac{\partial \big(v_2(v-v_1)\big)}{\partial x_2} + (v-v_1)\frac{dv}{dx_1} = -\nu_D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$$

После интегрирования по x_2 в пределах от 0 до ∞ с учетом изменения порядка интегрирования по x_2 и дифференцирования по x_1 запишем

$$\frac{d(v^2\delta^{**})}{dx_1} + v\delta^*\frac{dv}{dx_1} = \frac{\tau}{\rho v^2} = \frac{C_f}{2}.$$

Это интегральное соотношение позволяет, задаваясь приближенным профилем скорости v_1 в пределах пограничного слоя, найти связь между местным коэффициентом трения на обтекаемой поверхности и изменением скорости v на внешней границе пограничного слоя. Аналогичные интегральные соотношения можно получить для теплового и концентрационного пограничных слоев [135].

9. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Газовая динамика — раздел механики жидкости и газа, в котором изучают движение сжимаемой сплошной среды с большой скоростью и ее взаимодействие с твердыми телами. Малая пространственная протяженность области взаимодействия газового потока с твердым телом позволяет отбросить в уравнениях газовой динамики объемные силы, а большая скорость движения требует учета сжимаемости рассматриваемой среды.

При большой скорости движения вязкость газа не играет существенной роли и область ее влияния ограничивается сравнительно тонким пограничным слоем. За пределами этого слоя движение газа может быть описано математической моделью, содержащей уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости (см. 8.2), но без учета объемных сил. Поскольку термин «идеальный газ» часто используют как синоним термина совершенный газ, чтобы избежать путаницы, для краткости вместо идеальной или вязкой сжимаемой жидкости в этой главе будем говорить о невязком или вязком газе соответственно.

Наличие большой скорости движения отличает газовую динамику от других областей механики сжимаемой жидкости (таких, как акустика или метеорология) возможностью образования поверхностей, при переходе через которые параметры потока претерпевают разрыв. Наличие таких поверхностей заставляет с осторожностью подходить к построению математических моделей. При очень больших скоростях за поверхностью разрыва температура потока может достигать весьма больших значений, возможна *диссоциация* молекул газа на атомы или на молекулы с меньшим числом атомов, а при еще бо́льших температурах — ионизация, связанная с утратой атомами или молекулами газа электронов. Указанные особенности выделяют газовую динамику в отдельный раздел механики жидкости и газа.

9.1. Дифференциальная форма модели газовой динамики

Состояние движущегося в области V невязкого газа в произвольный момент времени t характеризуют локальные значения его плотности ρ , давления p, массовой плотности внутренней энергии и и проекций v_i (i = 1, 2, 3) вектора v скорости на оси Ox_i прямоугольной декартовой системы координат. Дифференциальная форма математической модели газовой динамики включает уравнение неразрывности (закон сохранения массы) в дивергентной форме (3.32)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \qquad (9.1)$$

уравнения движения (закон сохранения количества движения сплошной среды) в дивергентной форме (3.63)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p\delta_{ij})}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{9.2}$$

в которых учтены лишь нормальные напряжения $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера) и не учитывается влияние плотности объемных сил ($b_i \equiv 0$), и уравнение закона сохранения энергии в виде (4.12)

$$\frac{\partial \rho(v_i v_i/2 + u)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho(v_i v_i/2 + u)v_j + pv_j\right)}{\partial x_j} = 0; \qquad (9.3)$$

в нем опущены слагаемые: q_j — проекции вектора плотности теплового потока, q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты и мощности $b_i v_i$ объемных сил.

Условия на поверхности разрыва S^* , которая может возникнуть при движении газа, согласно (4.36) и (9.1)–(9.3), имеют вид

$$\left[\rho\right]D_{n}^{*} = \left[\rho v_{i}\right]n_{i}^{*}, \quad \left[\rho v_{i}\right]D_{n}^{*} = \left[\rho v_{i}v_{j} + p\delta_{ij}\right]n_{j}^{*}, \\ \left[\rho\left(\frac{v_{i}v_{i}}{2} + u\right)\right]D_{n}^{*} = \left[\rho\left(\frac{v_{i}v_{i}}{2} + u\right)v_{j} + pv_{j}\right]n_{j}^{*}, \end{cases}$$

$$(9.4)$$

где $D_n^* = D^* \cdot n^* \ge 0$ — проекция вектора D^* скорости движения произвольной точки $M \in S^*$ на направление вектора n^* вектора нормали к поверхности S^* , имеющего проекции n_i^* на координатные оси $Ox_i; [\cdot]$ скачок соответствующей величины в этом направлении (см. 4.4). Если перейти к системе координат, связанной с этой точкой и движущейся со скоростью D^* , то вместо (9.4) получим

$$[\rho \tilde{v}_i] n_i^* = 0, \quad [\rho v_i \tilde{v}_j + p\delta_{ij}] n_j^* = 0, \quad \left[\rho \left(\frac{v_i v_i}{2} + u \right) \tilde{v}_j + p v_j \right] n_j^* = 0, \quad (9.5)$$

где \tilde{v}_j — проекции вектора $\tilde{v} = v - D^*$ скорости частиц газа на оси подвижной системы координат.

При адиабатическом процессе движения газа и отсутствии объемных источников энерговыделения исследуемый процесс можно рассматривать и как изоэнтропический, т.е. считать массовую плотность h энтропии постоянной, положив h = 0. Тогда в силу (4.21) и можно отождествить с массовой плотностью A свободной энергии и записать

$$u = A = \int_{0}^{T} c_v \, dT, \qquad (9.6)$$

где c_v — удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме; T — абсолютная температура газа. Тогда при $c_v = \text{const}$ третье уравнение (9.5) примет вид $[\rho(v_i v_i/2 + c_v T)\tilde{v}_j + pv_j]n_j^* = 0.$

Если объединить (9.3) с (9.6), то с учетом равенств $v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial (pv_j)}{\partial x_j} - p \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ и $v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right)$ получим $\rho v_j \frac{dv_j}{dt} + \rho c_v \frac{dT}{dt} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} =$ $= \left(\rho \frac{dv_j}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) v_j + \rho c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \quad (9.7)$

так как справедливы уравнения Эйлера (8.15) при $b_i \equiv 0$. Далее, полагая газ совершенным, уравнение состояния которого имеет вид

$$p = \rho R_g T, \tag{9.8}$$

где $R_g = R_{\mu}/\mu_g^*$ — газовая постоянная; R_{μ} — универсальная газовая постоянная; μ_g^* — молекулярная масса газа, и используя (9.1) в виде $\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0$, имеем

$$p\left(\frac{c_v}{R_gT}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right) = p\left(\frac{c_v}{R_g}\frac{d\ln T}{dt} - \frac{d\ln\rho}{dt}\right) = 0.$$

Отсюда $T/\rho^{\kappa-1} = \text{const}$, где $\kappa = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, а $c_p = c_v + R_g$ — удельная массовая теплоемкость газа при постоянном давлении, или изобарная теплоемкость, соответствующая изобарному (при постоянном давлении газа) термодинамическому процессу. Тогда с учетом (9.8) получаем уравнение адиабаты Пуассона

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \text{const.} \tag{9.9}$$

Таким образом, для изоэнтропического процесса движения газа p в силу (9.9) зависит лишь от ρ . В этом случае газ называют **баротропным**. Отметим, что всегда $\kappa > 1$. При нормальной температуре для одноатомного газа $\kappa = 5/3$, а для двухатомного газа $\kappa = 7/5$. Если газ не является совершенным, т.е. его параметры не удовлетворяют (9.8), то в качестве уравнения состояния можно использовать (1.5) в виде

$$p = \frac{\rho R_g T}{1 - \beta_1 \rho} - \alpha_1 \rho^2. \tag{9.10}$$

Кроме того, для *реального газа* следует также учитывать зависимость c_v от T, которую можно задать в виде

$$c_v = c_0 + c_1 T + c_2 T^2.$$

Тогда вместо (9.7) получаем

$$(c_0 + c_1 T + c_2 T^2) dT - \left(\frac{R_g T}{\rho - \beta_1 \rho^2} - \alpha_1\right) d\rho = 0.$$
(9.11)

Если для изоэнтропического процесса представить зависимость T от ρ в виде $T(\rho) = T^{(0)}(\rho) + \alpha_1 T^{(1)}(\rho) + \beta_1 T^{(2)}(\rho) + c_1 T^{(3)}(\rho) + c_2 T^{(4)}(\rho)$ и принять коэффициенты α_1 , β_1 , c_1 , c_2 малыми, а в дальнейшем пренебречь слагаемыми, содержащими произведения этих коэффициентов, то после интегрирования (9.11) найдем [7]

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \widetilde{\rho}^{\gamma_1} \left(1 + \widetilde{\alpha}_1 \gamma_1 \frac{1 - \widetilde{\rho}^{1 - \gamma_1}}{1 - \gamma_1} - \beta_1 \gamma_1 \rho_0 (1 - \widetilde{\rho}) \right) + \\ &+ \widetilde{\rho}^{\gamma_1} \left(\frac{c_1 T_0}{c_0} (1 - \widetilde{\rho}^{\gamma_1}) + \frac{c_2 T_0^2}{2c_0} (1 - \widetilde{\rho}^{2\gamma_1}) \right) \end{aligned}$$

и, учитывая (9.10),

$$\frac{p}{p_0} = \tilde{\rho}^{1+\gamma_1} \left(1 + \tilde{\alpha}_1 \frac{1 - \tilde{\rho}^{1-\gamma_1}}{1 - \gamma_1} - \beta_1 (1 + \gamma_1) \rho_0 (1 - \tilde{\rho}) \right) + \tilde{\rho}^{1+\gamma_1} \left(\frac{c_1 T_0}{c_0} (1 - \tilde{\rho}^{\gamma_1}) + \frac{c_2 T_0^2}{2c_0} (1 - \tilde{\rho}^{2\gamma_1}) \right), \quad (9.12)$$

где $\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1 \rho_0}{R_g T}$; $\gamma_1 = \frac{R_g}{c_0}$; $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$; p_0 , ρ_0 и T_0 — параметры газа в некотором начальном состоянии (например, в состоянии покоя).

В случае малости скорости v и ее производных, считая малыми и изменения $\Delta p = p - p_0$ и $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ давления p и плотности ρ по сравнению с давлением p_0 и плотностью ρ_0 газа в его невозмущенном состоянии, из (9.1) и (9.2) с учетом (9.8) и (9.9) получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} \approx -\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \approx -\frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \tag{9.13}$$

где $a_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\Big|_{\rho=\rho_0} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa R_g T} - c \kappa o pocmь звука (скорость распространения в газе малых возмущений <math>\Delta p$ и $\Delta \rho$). Заменив в (9.13)

приближенные равенства точными, приходим к известным волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i}, \tag{9.14}$$

аналогичным (8.25) и описывающим распространение малых возмущений. Пространственную форму распространяющегося возмущения называют волной.

Если до возникновения возмущения плотности газа векторное поле скоростей обладало потенциалом $\Phi_0(x,t)$, где x — радиус-вектор точки с пространственными координатами x_i , то и при распространении малого возмущения это поле остается потенциальным. Действительно, из второго соотношения (9.13), полагая, что возмущение возникло в момент времени t = 0 и $v_i|_{t=0} = \partial \Phi_0(x,0)/\partial x_i$, интегрированием по времени t получаем

$$v_i = v_i \Big|_{t=0} - \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \rho \, dt = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i}, \quad \Phi(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_0(\boldsymbol{x}, 0) - \frac{a_0^2}{\rho_0} \int_0^t \rho \, dt \quad - - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i} = \Phi_0(\boldsymbol{x}, 0) - \Phi_0(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_0(\boldsymbol{x}, 0) - \Phi_0(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_0(\boldsymbol{x}, 0) - \Phi_0(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_0(\boldsymbol$$

потенциал поля скоростей газа в процессе распространения малого возмущения плотности газа, удовлетворяющий первому уравнению (8.25). При установившемся движении невозмущенного газа потенциал Φ_0 не зависит от времени t. В этом случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\rho}{\rho_0}.$$
(9.15)

Пусть в момент времени t = 0 в неподвижном газе плотностью ρ_0 в пределах шаровой области радиусом r_0 возникает малое возмущение $\Delta \rho$ плотности. Это возмущение в силу центральной симметрии порождает сферическую волну $\rho(r,t) = \rho_0 + \Delta \rho(r,t)$, распространение которой описывается первым уравнением (9.14) в виде $\frac{\partial^2(r\Delta\rho)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2(r\Delta\rho)}{\partial r^2}$ (r — расстояние от центра этой области). При этом потенциал $\Phi(r,t)$ поля скоростей будет удовлетворять аналогичному уравнению

$$\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} \tag{9.16}$$

с начальными условиями $\Phi(r,0) = 0$ и $\frac{\partial \Phi(r,0)}{\partial t} = -a_0^2 f(r)$, где с учетом (9.15)

$$f(r) = 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$
 при $r < r_0$, $f(r) = 1$ при $r > r_0$. (9.17)

Общее решение (9.16) имеет вид $\Phi(r,t) = \frac{1}{r} (f_{\Phi}(a_0t-r) + g_{\Phi}(a_0t+r)),$ где f_{Φ} и g_{Φ} — произвольные дважды дифференцируемые функции. Поскольку при r = 0 потенциал остается конечным, вместо последнего равенства следует записать

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{f_{\Phi}(a_0t-r) - f_{\Phi}(a_0t+r)}{r}.$$
(9.18)

Тогда с учетом (9.15) получим

$$\rho(r,t) = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t} = \frac{\rho_0 \left(f'_{\Phi}(a_0 t + r) - f'_{\Phi}(a_0 t - r) \right)}{a_0 r}.$$
(9.19)

Используя начальные условия, (9.18) и (9.19) приведем к виду $f_{\Phi}(-r) - f_{\Phi}(r) = 0$ и $f'_{\Phi}(-r) - f'_{\Phi}(r) = -a_0 r f(r)$. Отсюда находим

$$f'_{\Phi}(-r) = -f'_{\Phi}(r) = -\frac{a_0 r f(r)}{2}.$$
(9.20)

При t > 0 для точек за пределами возмущенной шаровой области $a_0t + r > r_0$, т. е. аргумент функции $f'_{\Phi}(a_0t + r)$ всегда больше r_0 . Поэтому для этих точек в силу (9.17) и (9.20) и $f'_{\Phi}(a_0t + r) = a_0(a_0t + r)/2$.

Для вычисления $f'_{\Phi}(a_0t-r)$ выделим три промежутка времени распространения возмущения [65]

$$\left(0, \frac{r-r_0}{a_0}\right); \quad \left(\frac{r-r_0}{a_0}, \frac{r+r_0}{a_0}\right); \quad \left(\frac{r+r_0}{a_0}, \infty\right).$$

В первом промежутке $r - a_0 t > r_0$, и из (9.17) и (9.20) следует, что $f'_{\Phi}(a_0 t - r) = f'(-(r - a_0 t)) = -\frac{a_0(r - a_0 t)}{2}$; во втором $-a_0 t - r < r_0$, что в силу (9.17) и (9.20) дает $f'_{\Phi}(a_0 t - r) = \frac{a_0(a_0 t - r)}{2} \left(1 + \frac{\Delta \rho^\circ}{\rho_0}\right)$; в третьем $-a_0 t - r > r_0$ и, согласно (9.17) и (9.20), $f'_{\Phi}(a_0 t - r) = \frac{a_0(a_0 t - r)}{2}$. Таким образом, из (9.19) следует, что в первом и третьем промежутках $\rho(r,t) = \rho_0$, т.е. газ остается невозмущенным, а во втором промежутке $\rho(r,t) = \rho_0 + \frac{\Delta \rho^\circ(r - a_0 t)}{2r}$.

Изменение плотности газа в рассмотренных промежутках времени представлено на рис. 9.1, причем на границах этих промежутков плотность газа изменяется скачком. При фиксированном значении r изменение плотности происходит в течение промежутка времени $2r_0/a_0$. В момент времени t > 0 передний фронт сферической волны (позиция 1 на рис. 9.2) достигает точек, расположенных на расстоянии $r = a_0 t + r_0$ от центра O шаровой области начального возмущения плотности газа. При $t > 2r_0/a_0$ за пределами этой области формируется задний фронт 2 сферической волны, который достигает точек, расположенных на расстоянии $r = a_0 t - r_0$ от центра O, и эта волна располагается в сферическом слое толщиной $2r_0$, равномерно расширяющемся со скоростью a_0 . Сфера 3 радиусом $r = a_0 t$ делит этот слой на внешнюю ($\rho > \rho_0$) и внутреннюю ($\rho < \rho_0$) части.





В случае точечного источника возмущения $r_0 = 0$ и шаровой слой переходит в сферическую поверхность, также равномерно расширяющуюся со скоростью a_0 . Если такой источник движется из начальной точки O прямолинейно с постоянной скоростью v_0 , то для неподвижного наблюдателя сферическая волна в различные моменты времени не будет представлять собой концентрические сферы. При $v_0 < a_0$ каждому моменту времени $t_1, 2t_1, 3t_1, \ldots$ соответствует сфера, охватывающая все сферы для предшествующих моментов времени (рис. 9.3, a). В случае $v_0 = a_0$ все сферы имеют общую точку касания, соответствующую начальному положению точечного источника (рис. 9.3, b). При $v_0 > a_0$ все сферы касаются прямого кругового конуса (рис. 9.3, b), называемого конусом Маха. Вершина этого конуса совпадает с начальным положением источника, а полуугол $\operatorname{arcsin}(a_0/v_0)$ при вершине называют углом Маха.

9.2. Одномерное течение невязкого газа

При установившемся одномерном течении невязкого газа в прямолинейном канале постоянного поперечного сечения из (9.1) следует $\rho v = \text{const}$, где ρ — плотность газа, а v — модуль вектора скорости. Отсюда $\rho dv + v d\rho = 0$, или

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0. \tag{9.21}$$

Для такого течения из (9.2) получим $\rho v dv + dp = 0$, где $p - \partial a$ вление газа. Используя последнее равенство и (9.21), находим

$$\frac{dp}{d\rho} = v^2. \tag{9.22}$$

При изоэнтропическом процессе движения газа $dp/d\rho$, согласно (9.9), является функцией только *р* или *р*. В этом случае (9.22) определяет скорость распространения в канале малого возмущения неизменной формы, удовлетворяющую как уравнению неразрывности, так и уравнению движения, называемую местной скоростью звука и обозначаемую через а [64]. Для совершенного газа с учетом его уравнения состояния (9.8) и уравнения адиабаты Пуассона (9.9) запишем

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R_g T}, \qquad (9.23)$$

где R_g — газовая постоянная; T — абсолютная температура газа. Из (9.3) с учетом (9.6) получим

$$\frac{v^2}{2} + c_v T + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \qquad (9.24)$$

где $c_v = \text{const}$ — удельная массовая теплоемкость газа при постоянном объеме, или, учитывая (9.8) и (9.23),

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_v p}{R_g \rho} + \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \text{const} = \frac{a_0^2}{\kappa - 1}, \quad (9.25)$$

где $\kappa = 1 + R_g/c_v$ — показатель адиабаты; $a_0 = \sqrt{\kappa p_0/\rho_0} = \sqrt{\kappa R_g T_0}$ — скорость звука в полностью заторможенном газе при давлении торможения $p_0 = p + \rho v^2/2$, которому соответствуют температура торможения $T_0 = T + v^2/(2c_p v)$ (c_p — удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении) и плотность $\rho_0 = p_0/(R_g T_0)$. Из (9.25) с учетом (9.9) имеем

$$v^{2} = \frac{2a_{0}^{2}}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_{0}}\right)^{1 - \frac{1}{\kappa}} \right), \quad p = p_{0} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{v}{a_{0}}\right)^{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$
 (9.26)

Скорость *v* достигает максимального значения $v_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}}$ при p = 0.

Если в (9.25) положить v = a, т. е. приравнять скорость потока местной скорости звука, то получим значение критической скорости звука:

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}}.$$
 (9.27)

Ей соответствует давление $p^* = p_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$. Течение газа называют *дозвуковым*, если $0 < v < a_*$, и *сверхзвуковым*, если $a_* < v < v_{max}$. Безразмерный параметр M = v/a, характеризующий влияние сжимаемости газа, называют **числом Маха**. Используя это число, вместо второго равенства (9.26) получаем $\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ и с учетом (9.9) $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$, а в соответствии с (9.8)

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \mathbf{M}^2, \tag{9.28}$$

что позволяет, согласно (9.23) и (9.27), записать

$$a_* = a \sqrt{\frac{2T_0}{T(\kappa+1)}} = a \sqrt{\frac{2 + (\kappa-1)M^2}{\kappa+1}}.$$
(9.29)

Отсюда следует, что $a_* < a$ при M < 1 и $a_* > a$ при M > 1.

При изоэнтропическом процессе неустановившегося одномерного течения невязкого газа в прямолинейном канале постоянного поперечного сечения из (9.1), (9.2) и (9.9) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = p(\rho), \tag{9.30}$$

где t — время; x — координата, отсчитываемая вдоль оси канала. Для малых отклонений $\Delta p = p - p_0$ и $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ давления p и плотности ρ от соответственно давления p_0 и плотности ρ_0 газа в невозмущенном состоянии при малой скорости v и ее производных из (9.13) следуют одномерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{9.31}$$

общие решения которых имеют вид $\rho(x,t) = f_{\rho}(x-a_0t) + g_{\rho}(x+a_0t)$ и $v(x,t) = f_v(x-a_0t) + g_v(x+a_0t)$. Анализ этих решений показывает, что если, например, $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ в начальный момент времени t = 0и $\rho(x,0) = F_{\rho}(x) = f_{\rho}(x) + g_{\rho}(x)$, то по прошествии времени t_1 кривая распределения плотности газа сдвигается без искажения вдоль оси Oxвправо и влево на расстояние a_0t_1 . Вдоль линий $x - a_0t = \text{const}$ решения $f_{\rho}(x-a_0t) = \text{const}$ и $f_v(x-a_0t) = \text{const}$, а вдоль линий $x + a_0t = \text{const}$ решения $g_{\rho}(x+a_0t) = \text{const}$ и $g_v(x+a_0t) = \text{const}$. Эти линии называют **характеристиками волнового уравнения**.

Если возмущения скорости не являются малыми, то необходимо решать систему нелинейных уравнений (9.30), и, как правило, численно. В частном случае зависимости ρ только от v, т.е. $\rho = f(v)$ [7], удовлетворяющей первым двум уравнениям (9.30), с учетом третьего уравнения (9.30) получим

$$rac{\partial v}{\partial t} + v rac{\partial v}{\partial x} = -rac{f}{f'} rac{\partial v}{\partial x}, \quad rac{\partial v}{\partial t} + v rac{\partial v}{\partial x} = -a^2 rac{f'}{f} rac{\partial v}{\partial x}$$

Отсюда следует $\frac{f}{f'} = a^2 \frac{f'}{f}$, или $\frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{dv}{a}$, что позволяет первые два уравнения (9.30) представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm a) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Непосредственной проверкой можно установить, что этим уравнениям удовлетворяют соотношения

$$\rho(x,t) = F_{\rho}(x - (v \pm a)t), \quad v(x,t) = F_{v}(x - (v \pm a)t), \quad (9.32)$$

где F_{ρ} и F_{v} — произвольные функции.

При $|v/a| \rightarrow 0$ соотношения (9.32) переходят в общие решения волновых уравнений (9.31). Из (9.32) следует, что в подвижной системе координат, начало которой имеет скорость $v \pm a$, плотность и скорость частиц газа остаются постоянными. Отсюда можно сделать вывод, что возмущения будут распространяться со скоростью $v \pm a$, в общем случае различной в разных точках потока газа, поэтому пространственная форма возмущений будет изменяться во времени.

Примем в (9.32) $v(x,t) = F_v(x - (v + a)t)$ и в момент времени t = 0 волнообразное распределение возмущения скорости v вдоль оси Ох (рис. 9.4, a). Поскольку возмущения в области, где v > 0, распространяются быстрее, чем в области, где v < 0, то при t > 0 гребень волны будет стремиться нагнать впадину, что приведет к более резкому изменению скорости в зоне смены ее знака (рис. 9.4, d). В рамках



рассматриваемой математической модели (MM) это изменение, сопровождаемое скачкообразным изменением давления и плотности газа, к некоторому моменту времени $t_1 > 0$ также должно принять форму скачка (рис. 9.4, ϵ). Таким образом, эта MM описывает формирование в газе движущейся поверхности разрыва, которая соответствует волне сжатия, называемой скачком уплотнения, так как перед движущимся фронтом этой волны возрастают плотность и давление газа. Если в (9.32) принять $v(x,t) = F_v(x - (v - a)t)$, то возмущение скорости в виде, изображенном на рис. 9.4, a, со временем будет, наоборот, сглаживаться, т. е. волна разрежения по мере распространения растягивается, что исключает возможность возникновения скачков разрежения.

Математическую модель (9.30) одномерного неустановившегося плоского течения невязкого газа несложно модифицировать для общего случая одномерного движения, включающего также **цилиндрическое** и сферическое течения, когда поле скоростей обладает осевой и центральной симметриями соответственно. Такая модель в случае изо-энтропического процесса течения отличается лишь первым уравнением (9.30), которое примет вид $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} + \frac{N \rho v}{x} = 0$, где N = 0, 1, 2 для плоского, цилиндрического и сферического течений соответственно.

9.3. Скачки уплотнения и ударные волны

Если поверхность разрыва в газе, соответствующая скачку уплотнения, перпендикулярна направлению движения газа, то такой скачок уплотнения называют прямым. Рассмотрим aduaбатический процесс установившегося одномерного плоского течения совершенного невязкого газа с уравнением состояния (9.8), считая положение прямого скачка уплотнения неизменным относительно выбранной системы координат. Тогда из (9.1), (9.2) и (9.25) получим

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \ \rho_1 v_1 (v_1 - v_2) = p_2 - p_1, \ \frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa p_1}{\rho_1 (\kappa - 1)} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa p_2}{\rho_2 (\kappa - 1)}, \ (9.33)$$

где κ — показатель адиабаты, а индексами 1 и 2 отмечены значения скорости v, давления p и плотности ρ перед скачком уплотнения и после него соответственно.

Исключая v_2 из первого и второго уравнений (9.33), находим

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa \rho_2(p_1 + p_2)}{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)}}.$$
(9.34)

Если отсюда при помощи третьего уравнения (9.33) исключить v_1 , то получим уравнение_

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{\kappa (p_1 + p_2)}{\rho_1 + \rho_2} \tag{9.35}$$

адиабаты Гюгонио.

При малой интенсивности скачка уплотнения различие в состояниях газа до и после скачка незначительно, т. е. $p_1 \approx p_2 \approx p$ и $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho$, поэтому (9.35) принимает вид приближенного равенства $\Delta p / \Delta \rho \approx \kappa p / \rho$, в пределе соответствующего уравнению (9.9) *для aduaбamuческого процесса*. В этом случае из (9.34) следует, что относительно наблюдателя, движущегося со скоростью v_1 вместе с невозмущенным потоком газа, прямой скачок уплотнения малой интенсивности перемещается навстречу в виде слабой ударной волны со скоростью $D^* \approx \sqrt{\kappa p / \rho}$, близкой к местной скорости звука $a_1 = \sqrt{\kappa p_1 / \rho_1}$ в невозмущенном газе.

Преобразовав (9.35) к виду

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{p_2}},$$

для скачка большой интенсивности $(p_2 \gg p_1)$ получим, что $\frac{\rho_2}{\rho_1} \leq \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$, т.е. в адиабатическом процессе сжатия газа вследствие диссипации энергии увеличение его плотности ограничено, тогда как при изоэнтропическом процессе сжатия из (9.9) следует, что с ростом давления газа его плотность возрастает неограниченно. Для скорости такого скачка относительно подвижного наблюдателя согласно (9.34) найдем $D^* \leq \sqrt{\frac{(\kappa+1)p_2}{2\rho_1}}$. При этом верхняя граница для D^* превышает как a_1 , так и местную скорость звука $a_2 = \sqrt{\kappa p_2/\rho_2}$ в газе после скачка.

Изменение давления, плотности, скорости и абсолютной температуры T газа в прямом скачке можно представить в виде зависимости от числа Maxa $M_1 = v_1/a_1$ перед скачком. Из второго и третьего уравнений (9.33) имеем $\frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{1}{\kappa M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$ и $1 + (\kappa - 1) \frac{M_1^2}{2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{v_2}{v_1} + (\kappa - 1) \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{M_1^2}{2}$. Отсюда следует уравнение $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 2\frac{p_2}{p_1} \frac{1 + \kappa M_1^2}{\kappa + 1} - 2(\kappa - 1)(\kappa + 1) - 2\frac{\kappa M_1^2}{\kappa + 1} = 0$, имеющее два решения: тривиальное $p_2/p_1 = 1$, означающее, что в одномерном потоке газа параметры состояния не изменяются, и решение

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2 - \kappa + 1}{\kappa + 1},\tag{9.36}$$

характеризующее изменение давления газа в прямом скачке. Используя (9.36) и привлекая (9.8) и первое уравнение (9.33), находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa - 1 + \frac{2}{M_1^2}}{\kappa + 1}, \quad M_2^2 = \frac{v_2^2}{a_2^2} = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_1^2}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}, \\
\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2\rho_1}{p_1\rho_2} = (2\kappa M_1^2 - \kappa + 1)\frac{(\kappa - 1)M_1^2 + 2}{(\kappa + 1)^2 M_1^2}.$$
(9.37)

Отсюда с учетом (9.28) следует соотношение Прандтля

$$v_1v_2 = \frac{v_2}{v_1}v_1^2 = \frac{v_1^2}{M_1^2} \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_1^2}{\frac{\kappa + 1}{2}} = a_1^2 \frac{2T_0}{T_1(\kappa + 1)} = \frac{2a_0^2}{\kappa + 1} = a_*^2$$

где a_0 — скорость звука в заторможенном потоке, а a_* — критическая скорость звука. Таким образом, если $v_1 > a_*$, т. е. относительно фронта прямого скачка течение сверхзвуковое, то за прямым скачком $v_2 < a_*$, т. е. течение дозвуковое. Из (9.36) и второго уравнения (9.37) имеем

$$M_1^2 = \frac{(\kappa+1)\frac{p_2}{p_1} + \kappa - 1}{2\kappa}, \quad M_2^2 = \frac{(\kappa+1)\frac{p_1}{p_2} + \kappa - 1}{2\kappa}.$$

Так как $p_2/p_1 \ge 1$, то M_1^2 не может быть меньше единицы, а M_2^2 не может быть больше единицы и меньше $(\kappa - 1)/(2\kappa)$. При отсутствии скачка $p_2/p_1 = 1$ и $M_1 = M_2$. Следовательно, $(\kappa - 1)/(2\kappa) \le M_2^2 \le 1 \le M_1^2 < \infty$.

В отличие от геометрической интерпретации скачка как поверхности разрыва физически он представляет собой очень узкую зону, в которой происходит резкое изменение скорости и параметров состояния газа. Для оценки толщины δ_* этой зоны приравняем перепад давления $\Delta p = p_2 - p_1$ на фронте прямого скачка напряжению $\sigma = \mu_D(v_1 - v_2)/\delta_*$, обусловленному вязкостью газа, где μ_D — его динамическая вязкость. Тогда с учетом второго уравнения (9.34) получим $\delta_* = \mu_D/(\rho_1 v_1)$. Например, для воздуха при стандартных условиях $\mu_D/\rho_1 = 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\kappa = 1.4$ при $M_1 = 2$ ($v_1 = 683 \text{ м/c}$) $\delta_* = 2.54 \cdot 10^{-8}$ м, что на самом деле соответствует весьма тонкому слою, который можно рассматривать как поверхность разрыва. Следует отметить, что при высокой скорости

газа (M₁ > 5) необходимо использовать уравнение состояния *реального газа*, учитывать процессы диссоциации и ионизации газа при высокой температуре, а также *время релаксации* его параметров в тонком слое скачка уплотнения [7].

Более общий случай — косой скачок уплотнения, фронт которого (позиция 1 на рис. 9.5) располагается наклонно к направлению скорости v_1 невозмущенного газа и образует с этим направлением угол α . При переходе через косой скачок касательная к фронту составляющая скорости остается неизменной, т. е. $v_1^{(\tau)} = v_2^{(\tau)} = v^{(\tau)} =$ $= v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta$, а нормальная составляющая терпит разрыв, причем $v_1^{(n)} = v_1 \sin \alpha > v_2^{(n)} = v_2 \sin \beta$. Для вычисления изменения параметров состояния газа при переходе через косой скачок в (9.36) и (9.37) необходимо использовать нормальные составляющие скорости:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa (M_1 \sin \alpha)^2 - \kappa + 1}{\kappa + 1},
\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2^{(n)}}{v_1^{(n)}} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2 + (\kappa - 1)(M_1 \sin \alpha)^2}{\kappa + 1},
(M_2 \sin \beta)^2 = \frac{2 + (\kappa - 1)(M_1 \sin \alpha)^2}{2\kappa (M_1 \sin \alpha)^2 - \kappa + 1},
\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\kappa (M_1 \sin \alpha)^2 - \kappa + 1)(2 + (\kappa - 1)(M_1 \sin \alpha)^2)}{(\kappa + 1)^2 (M_1 \sin \alpha)^2}.$$
(9.38)

Из второго уравнения (9.38) для угла θ отклонения потока газа при переходе через косой скачок получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_2'}{v_2''} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{M_1^2 \sin 2\alpha - 2\operatorname{ctg} \alpha}{M_1^2(\kappa + \cos 2\alpha) + 2}.$$

Отсюда при $\theta = 0$ следует уравнение $M_1^2 \sin 2\alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha = 0$, один корень $\alpha = \pi/2$ которого соответствует прямому скачку, а имеющий



Рис. 9.5

физический смысл второй корень $\alpha = \arcsin(1/M_1)$ представляет собой угол Maxa, соответствующий распространению малых возмущений при сверхзвуковом течении. Так как существуют два значения α , при которых поток газа имеет нулевое отклонение, то это означает, что для данного значения M_1 может существовать максимальный угол $\theta_{\rm max}$ отклонения потока.

Предположим, что клин с полууглом θ при вершине размещен симметрично относительно однородного сверхзвукового потока газа, имеющего скорость v_1 . Если $\theta < \theta_{max}$, то косой скачок (позиция 1 на рис. 9.6, *a*) присоединен к передней кромке клина 2, так, что течение за скачком параллельно поверхностям клина, а давление вдоль клина постоянно. Если же $\theta > \theta_{max}$, то возникнет отсоединенный скачок уплотнения с криволинейным фронтом (позиция 1 на рис. 9.6, *б*), расположенный на некотором расстоянии перед клином 2. Течение за отсоединенным скачком вблизи линии симметрии клина будет дозвуковым (область 3), а на некотором расстоянии от передней кромки клина перейдет в сверхзвуковое (области 4). На границах раздела 5 этих областей скорость газа равна местной скорости звука. На линии симметрии $\alpha = \pi/2$, а по мере удаления от нее α постепенно уменьшается.



Рис. 9.6

При переходе от состояния перед скачком уплотнения к состоянию после скачка в газе могут происходить фазовые переходы или химические реакции, связанные с подводом к газу теплоты, например конденсация содержащегося в нем водяного пара [7] или взрывное горение (дефлаграция) и детонация взрывчатого газа [103, 146]. Исходя из уравнения состояния (9.8) заключаем, что в случае детонации скорость распространения возникающей ударной волны может достигать величины $\sqrt{2(\kappa^2 - 1)q_m}$ [103], где q_m — количество теплоты, сообщаемое единице массы газа.

9.4. Течение невязкого газа в соплах

Одним из приложений математической модели (MM) одномерного течения невязкого газа является анализ его движения в каналах переменного поперечного сечения. Основной причиной изменения параметров газа при этом является изменение площади поперечного сечения канала, а трение газа о поверхность канала и увеличение пограничного слоя оказывают существенно меньшее влияние. Однако, чтобы эти факторы не оказывали большого влияния на параметры газа, суммарные силы трения должны быть меньше сил давления и, следовательно, канал должен быть сравнительно коротким.

Существуют два основных вида коротких каналов переменного поперечного сечения: сопла, в которых падение *давления* p газа используют для увеличения его скорости v, и диффузоры, в которых уменьшение скорости приводит к возрастанию давления. Рассмотрим лишь течение газа в соплах.

При установившемся течении в любом поперечном сечении сопла площадью F массовый расход газа

$$\dot{m} = \rho v F = \text{const},\tag{9.39}$$

где ρ — плотность газа. Отсюда $d(\rho v F) = 0$, а из (9.2) для установившегося одномерного течения можно получить одно уравнение движения газа в виде

$$dp + \rho v \, dv = 0. \tag{9.40}$$

Объединяя два последних равенства в виде $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} - \frac{dF}{F}$ и $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{dp/d\rho}$ и учитывая (9.23), находим

$$\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right)\frac{dv}{v} = \frac{dF}{F},\tag{9.41}$$

где $a = \sqrt{dp/d\rho}$ — местная скорость звука. Отсюда следует, что для ускорения газа (dv > 0) при v < a необходимо уменьшать площадь поперечного сечения сопла (dF < 0), а при v > a сопло должно расширяться (dF > 0). В связи с этим, учитывая (9.29), можно выделить три режима течения: дозвуковое течение ($v < a_* < a$), критический режим $(v = a_* = a)$, возникающий в наименьшем по площади поперечном сечении сопла, называемом **критическим**, и сверхзвуковое течение $(v > a_* > a)$, где a_* — критическая скорость звука. Сопло, в котором скорость газа, увеличиваясь, становится больше местной скорости звука, называют сверхзвуковым (или соплом Лаваля). Отметив звездочкой параметры газа в критическом сечении сопла, из (9.39) с учетом (9.29) и равенства M = v/a, а также в случае изоэнтропического процесса течения совершенного газа равенства $\frac{a_*^2}{a^2} = \frac{T_*}{T} = \left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)^{\kappa-1}$ получим

$$\frac{F}{F_*} = \frac{\rho_* a_*}{\rho v} = \frac{\rho_* a_*}{\rho a M} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + (\kappa - 1)M^2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2\kappa - 2}}.$$

Эта зависимость при $\kappa = 1,4$ представлена на рис. 9.7. Из нее следует, что одному и тому же отношению F/F_* соответствуют два значения числа Maxa M: одно при дозвуковом течении, другое — при сверхзвуковом. В критическом сечении плотность массового расхода $\rho v = \dot{m}/F$ достигает максимального значения. Используя (9.8), (9.9), (9.26) и приведенные выше соотношения, найдем

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa R_g T_0}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right)},$$

$$\dot{m} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa + 1}{2\kappa - 2}} p_0 F_* \sqrt{\frac{\kappa}{R_g T_0}},$$

$$(9.42)$$

где p_0 и T_0 — соответственно давление и температура торможения; R_g — газовая постоянная.



Из закона сохранения количества движения газового потока следует соотношение для приложенной к узлам крепления сопла реактивной тяги $P = mv_k + (p_k - p_a)F_k$, где индексом k отмечены параметры в выходном сечении (на срезе) сопла, а p_a — давление окружающей среды. При изменении p_a в определенных пределах в окрестности значения p_k процесс ускорения газа в сверхзвуковом сопле остается неизменным, поскольку малые внешние возмущения, распространяющиеся в газе со скоростью звука, не могут проникнуть в расширяющуюся часть сопла. Однако при приближении значения p_a к p_0 возникает система *скачков* уплотнения, которая входит в эту часть сопла, продвигаясь к критическому сечению [24]. Используя первое равенство (9.42), можно показать, что при прочих равных условиях P достигает максимального значения при $p_k = p_a$, что соответствует расчетному режиму работы сопла.

Помимо геометрического воздействия на газовый поток путем изменения площади поперечного сечения сопла существуют и другие способы достижения скорости течения газа в канале большей, чем скорость звука. Для их анализа применим закон сохранения энергии в виде

$$dq_m = c_p \, dT + d\frac{v^2}{2},\tag{9.43}$$

где q_m — количество теплоты, сообщаемое извне единице массы газа; $c_p = \kappa R_g/(\kappa - 1)$ — удельная массовая теплоемкость газа при постоянном давлении. Положив \dot{m} переменным, получим вместо (9.39) равенство $\dot{m} = \rho v F$. Продифференцировав его и разделив результат на \dot{m} , запишем $\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dF}{F}$. Исключив отсюда при помощи (9.8) $d\rho/\rho$, с учетом (9.40) получим

$$\frac{dp}{\rho} = R_g dT + R_g T \left(\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dv}{v} - \frac{dF}{F} \right) = -v \, dv.$$

Отсюда, используя (9.23) и (9.43), находим

$$\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right)\frac{dv}{v} = \frac{dF}{F} - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{(\kappa - 1)\,dq_m}{a^2}.$$
(9.44)

Отметим, что при $d\dot{m} = 0$ и $dq_m = 0$ (9.44) переходит в (9.41).

Для канала постоянного поперечного сечения (dF = 0) при $dq_m = 0$ из (9.44) следует, что для ускорения газа (dv > 0) необходимо при v < aувеличивать массовый расход газа $(d\dot{m} > 0)$, а при v > a уменьшать расход $(d\dot{m} < 0)$. Аналогично в случае dF = 0 и $d\dot{m} = 0$ для ускорения газа необходимо при v < a подводить к газу теплоту $(dq_m > 0)$, а при v > a отводить ее $(dq_m < 0)$. Таким образом, в канале постоянного поперечного сечения увеличением массового расхода газа и/или подводом к нему теплоты можно лишь достигнуть скорости, равной критической скорости звука, а для перехода к сверхзвуковому течению следует изменить знак расходного и/или теплового воздействия на обратный.

Можно показать [24], что если газ при течении в канале постоянного поперечного сечения совершает механическую работу (например, вращает турбину), то при v < a его скорость может возрастать вплоть до значения a_* , а для дальнейшего ускорения газа необходимо воздействовать на газ (например, при помощи компрессора). Затраты энергии на преодоление сил трения при течении газа в канале постоянного поперечного сечения приводят к ускорению газа при v < a и его торможению при v > a.

9.5. Пограничный слой, образующийся при высокой скорости газа

При обтекании вязким газом поверхности твердого тела (как и в случае вязкой несжимаемой жидкости) возникает пограничный слой, в пределах которого модуль вектора v скорости газа возрастает от нуля на этой поверхности (в силу эффекта прилипания) до некоторого значения в обтекающем потоке. Рассмотрим установившееся плоское течение вязкого газа, описываемое в координатной плоскости x_1Ox_2 при выполнении условия Стокса уравнениями Навье — Стокса в виде (8.11) при i, j = 1, 2, но без учета объемных сил ($b_i \equiv 0$) [135]:

$$\begin{split} \rho \Big(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Big) &= \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big(\mu_D \Big(2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Big) \Big) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \Big(\mu_D \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Big) \Big) - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \rho \Big(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big) &= \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big(\mu_D \Big(2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Big) \Big) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big(\mu_D \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Big) \Big) - \frac{\partial p}{\partial x_2}, \end{split}$$

где v_i — проекции вектора скорости на координатные оси Ox_i ; ρ , p и μ_D — плотность, давление и динамическая вязкость газа.



Рис. 9.8

ось Ox_1 направим в каждой точке контура по касательной к нему, а ось Ox_2 — по нормали к нему. Полагая текущую толщину $\delta(x_1)$ пограничного слоя малой по сравнению с радиусом кривизны контура и расстоянием x_1 вдоль него от точки образования этого слоя, после оценки

В случае обтекания плоским течением поверхности с криволинейным контуром (рис. 9.8)

порядка слагаемых в первом из приведенных выше уравнений, аналогичной проведенной в 8.6, запишем

$$\rho\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu_D\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_1}.$$
(9.45)

Если в уравнении теплопереноса (8.8) учесть зависимость теплопроводности $\lambda^{(T)}$ газа от температуры T и работу, совершаемую в единицу времени силами давления и трения, а затем провести оценку порядка слагаемых, то оно для установившегося плоского течения примет вид [135]

$$\rho c_p \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + v_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2, \quad (9.46)$$

где c_p — удельная массовая теллоемкость газа при постоянном давлении. Умножив (9.45) на v_1 и сложив с (9.46), с учетом равенства $\mu_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2 + v_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_D \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_D \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v_1^2}{2}\right)\right)$ в предположении $c_p =$ = const получим

$$\rho\left(v_1\frac{\partial T^*}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial T^*}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_D}{\Pr}\frac{\partial T^*}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_D}{2c_p}\left(1 - \frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}\right), \quad (9.47)$$

где $\Pr = \mu_D c_p / \lambda^{(T)}$ — число Прандтля; $T^* = T + v_1^2 / (2c_p)$ — температура, приближенно равная *температуре торможения*, если пренебречь величиной v_2^2 по сравнению с величиной v_1^2 .

При обтекании плоской стенки газом, для которого $\Pr = 1$, (9.45) и (9.47) с точностью до обозначений станут тождественными, если учесть, что при этом $\partial p/\partial x_1 = 0$, и в этих уравнениях перейти к безразмерным переменным $\overline{v} = v_1/v_\infty$ и $\overline{\theta}^* = (T^* - T_n)/(T^*_\infty - T_n)$, где T_n — температура поверхности стенки, $T^*_\infty = T_\infty + v^2_\infty/(2c_p)$, v_∞ и T_∞ скорость и температура газа за пределами пограничного слоя. Так как при $x_2 = 0$ $\overline{v} = \overline{\theta}^* = 0$, а за пределами пограничного слоя $\overline{v} = \overline{\theta}^* =$ = 1, то тождественность уравнений означает совпадение безразмерных профилей скорости и температуры T^* в пограничном слое, являющееся дополнением к установленной в **8.6** *тройной аналогии*. При $x_2 = 0$ в силу эффекта прилипания для вязкого газа $v_1 = 0$. Поэтому для *плотности темпового потока*, передаваемого от газа к стенке, в соответствии с законом Био — Фурье получим $q_0 = \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} =$ $= \lambda^{(T)} (T^*_\infty - T_n) \frac{\partial \overline{\theta}^*}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}$. Тогда первые четыре части цепочки равенств (8.72) примут вид

$$\frac{C_f}{2} = \operatorname{St} = \frac{q_0}{\rho c_p v_{\infty} (T_{\infty}^* - T_{\pi})} = \frac{\alpha}{\rho c_p v_{\infty}},$$
(9.48)

где C_f — местный коэффициент трения; St — число Стантона (тепловое); α — коэффициент теплообмена.

355

Из рассмотренной математической модели (ММ) пограничного слоя, образующегося на обтекаемой поверхности при высокой скорости газа, следует, что в случае идеальной теплоизоляции этой поверхности ее температура $T_{\pi} = T_{\infty}^*$ превышает температуру T_{∞} газа за пределами пограничного слоя. Для большинства газов Pr < 1 (например, для воздуха $\Pr \approx 0.71$ [104]), и температура идеально теплоизолированной поверхности $T_{\Pi} = T_r < T_{\infty}^*$, где $T_r = T_{\infty} + r_T v^2/(2c_p)$ — *темпе*ратура восстановления, r_T — коэффициент восстановления температуры, зависящий от значения Pr (при ламинарном meveнии вдоль плоской стенки $r_T \approx \Pr^{1/2}$, а при турбулентном течении $r_T \approx \Pr^{1/3}$ [104]). При полном торможении газового потока перед преградой, когда кинетическая энергия газа полностью переходит в тепловую энергию, $r_T = 1$. В этом случае в силу (9.48) $q_0 = \alpha (T_{\infty}^* - T_{\Pi})$, тогда как в случае обтекания газом произвольной поверхности с учетом модификации рассмотренной MM $q_0 = \alpha (T_r - T_{\pi})$. Характер распределения температуры газа по толщине пограничного слоя для случаев идеальной теплоизоляции поверхности (кривая 1), ее нагрева (кривая 2) и охлаждения (кривая 3) показан на рис. 9.9. Отметим, что для излучающей и идеально теплоизолированной поверхности $T_{\rm n} = \overline{T} < T_r$, где \overline{T} — равновесная температура.



Рис. 9.9

В случае $\Pr \neq 1$ безразмерные профили скорости и температуры T^* не совпадают, что приводит к зависимости α от \Pr , которую можно установить тем же путем, что и при обтекании плоской стенки несжимаемой жидкостью (см. 8.6).

При большой скорости обтекания газом поверхности в пограничном слое возникает весьма значительная разность температур $T_r - T_{\Pi}$. В интервале этих температур необходимо учитывать зависимость c_p от T. Кроме того, заметное влияние на процесс mennomacconepenoca в пограничном слое оказывают duccoulauus, а при более высокой температуре — uonusauus газа, сопровождаемые затратами тепловой энергии на разрыв межатомных связей и связей электронов с атомами. Вследствие существенного изменения температуры по толщине пограничного слоя концентрация диссоциированных атомов и молекул газа около поверхности меньше, чем на некотором расстоянии от нее. Приближаясь к поверхности в результате концентрационной duффузии и перемешивания, продукты диссоциации рекомбинируют, восстанавливая разорванные связи и освобождая накопленную энергию, что приводит к интенсификации теплообмена между газом и обтекаемой им поверхностью.

Влияние перечисленных факторов можно учесть, если в рассмотренной ММ пограничного слоя перейти от температуры *T* газа к приращению его *теплосодержания* (энтальпии)

$$H_T = \int_{T_{\pi}}^T c_p \, dT$$

при нагреве газа от температуры $T_{\rm n}$ до текущего значения T. Величина c_p учитывает все затраты теплоты (включая тепловые эффекты при диссоциации и ионизации газа), необходимые для повышения температуры единицы массы газа. Так как процессы диссоциации зависят не только от температуры, но и от давления, то c_p и H_T будут функциями T и p. Учитывая, что $dH_T = c_p dT$, вместо (9.46) получаем

$$\rho\left(v_1\frac{\partial H_T}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial H_T}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\lambda^{(T)}}{c_p}\frac{\partial H_T}{\partial x_2}\right) + v_1\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu_D\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2.$$
 (9.49)

Снова умножив (9.45) на v_1 и сложив с (9.49), запишем

$$\rho\left(v_1\frac{\partial H_T^*}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial H_T^*}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_D}{\Pr}\frac{\partial H_T^*}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_D}{2}\left(1 - \frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}\right), \quad (9.50)$$

где $H_T^* = H_T + v_1^2/2$. Если в случае обтекания плоской стенки $(\partial p/\partial x_1 = 0)$ в (9.45) и (9.50) перейти к безразмерным переменным $\overline{v} = v_1/v_\infty$ и $\overline{H}_T^* = (H_T^*)_\infty$, где $v_1 = v_\infty$ и $(H_T^*)_\infty$ — значение H_T^* при $T = T_\infty$, то при $\Pr = 1$ эти уравнения с точностью до обозначений будут тождественными. Поскольку $\overline{v} = \overline{H}_T^* = 0$ при $x_2 = 0$, а за пределами пограничного слоя $\overline{v} = \overline{H}_{T_\infty}^* = 1$, то из тождественности этих уравнений следует совпадение профилей \overline{v} и \overline{H}_T^* в пограничном слое, являющееся еще одним дополнением к тройной аналогии (см. 8.6). Тогда вместо (9.48) можно записать $\frac{C_f}{2} = \operatorname{St}_{\mathrm{H}} = \frac{q_0}{\rho v_\infty (H_T^*)_\infty}$.

Различные молификации ММ пограничного слоя объединяет сопоставление характерного размера L поверхности в направлении обтекания и масштаба δ_0 , характеризующего порядок толщины этого слоя. Однако при уменьшении плотности газа увеличивается средняя длина І свободного пробега молекул газа, что ограничивает применение ММ сплошной среды. Оценить границу области применения таких ММ можно следующим образом. Если в (1.4) среднюю скорость свободного пробега молекул газа представить в виде [76] $\overline{v} = a\sqrt{8/(\pi\kappa)}$, где а — скорость звука, а к — показатель адиабаты, то получим $\bar{l} \approx 1.15 \nu_D \sqrt{\kappa}/a$ (здесь $\nu_D = \mu_D/\rho$ — кинематическая вязкость газа). Тогда, полагая $\delta_0/L \approx 1/\sqrt{\text{Re}_L}$ (см. 8.6), где $\text{Re}_L = v_\infty L/\nu_D$ — число Рейнольдса, находим $\bar{l}/\delta_0 \approx M/\sqrt{\text{Re}_L}$ (здесь $M = v_{\infty}/a$ — число Ма*ха*). Ясно, что в случае $\bar{l}/\delta_0 \ge 1$ ММ пограничного слоя не применима. Ее надежное использование целесообразно при $\bar{l}/\delta_0 \leq 0.01$, т.е. при $M/\sqrt{Re_L} \leq 0.01$. Для сильно разреженных газов $M/\sqrt{Re_L} \geq 10$. В этом случае необходимо применение ММ молекулярно-кинетической теории газов. В интервале значений M/ $\sqrt{\mathrm{Re}_L}$ между этими границами используют ММ течений со скольжением, допускающие отсутствие эффекта прилипания и основанные на предположениях, что

$$v_1\Big|_{x_2=0} \sim \overline{l} \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \quad \mathbf{M} \quad T\Big|_{x_2=0} - T_{\mathbf{n}} \sim \overline{l} \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}$$

10. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Материал твердого тела с повышением абсолютной температуры, сохраняя свойство упругости, может приобрести и вязкие свойства. В этом случае при нагружении тела возникает так называемая **бязкоупругая деформация**, которая изменяется во времени даже при постоянной нагрузке, а после снятия нагрузки постепенно исчезает. Свойства таких материалов, к которым относятся многие полимеры, описывают математические модели (MM) термовязкоупругой сплошной среды. В этой главе ограничимся рассмотрением линейных MM этой среды, для построения которых использован термодинамический подход (см. 4.5). При этом будем считать справедливым принцип начальных размеров, т.е. полную производную по времени t примем равной частной производной: $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t$, а плотность среды ρ не зависящей от времени.

10.1. Термовязкоупругая среда скоростного типа

Термодинамический подход, использованный при построении математической модели (MM) жидкости как среды скоростного типа (см. 8.1), отличается от используемого при построении MM термовязкоупругой сплошной среды тем, что в (8.1) вместо якобиана J^* в качестве аргумента принят тензор малой деформации $\hat{\varepsilon}$ с компонентами ε_{kl} , k, l = 1, 2, 3, заданными в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда (8.1) примет вид

$$A = A(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), \quad h = h(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), \quad q_i = q_i(\varepsilon_{kl}, V_{kl}, T, \vartheta_k), i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$(10.1)$$

где активными переменными являются массовые плотности свободной энергии A и энтропии h, компоненты σ_{ij} тензора напряжений $\hat{\sigma}$ и проекции q_i вектора q плотности теплового потока на оси Ox_i , а в качестве реактивных переменных помимо ε_{kl} приняты компоненты $V_{kl} = \partial \varepsilon_{kl} / \partial t$ тензора скоростей $\hat{\mathbf{V}}$, абсолютная температура T и проекции $\vartheta_k = \partial T / \partial x_k$ ее градиента ϑ на оси Ox_k .

При $V_{kl} \equiv 0$ соотношения (10.1) должны совпадать с аналогичными соотношениями для термоупругой сплошной среды. Поэтому можно
записать

$$A = A^{\circ} + A^{(D)}, \quad h = h^{\circ} + h^{(D)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \sigma_{ij}^{(D)}, \quad q_i = q_i^{\circ} + q_i^{(D)}, \quad (10.2)$$

где первые слагаемые в правых частях равенств соответствуют функциям для термоупругой среды и не зависят от V_{kl} , а вторые — зависят только от V_{kl} и обращаются в нуль при $V_{kl} = 0$.

Если с учетом (4.21) подставить (10.2) в уравнение переноса энергии (4.11), а затем полученное равенство вычесть из (4.19), то выражение для второго закона термодинамики примет вид

$$\left(\rho \frac{\partial A^{\circ}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}^{\circ}\right) V_{ij} + \left(\rho \frac{\partial A^{(D)}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}^{(D)}\right) V_{ij} + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial T} + h\right) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{\partial A^{(D)}}{\partial V_{ij}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + \frac{q_i \vartheta_i}{T} \leqslant 0, \quad (10.3)$$

где ρ — плотность среды; t — время. Это неравенство линейно относительно производных $\partial V_{ij}/\partial t$, $\partial T/\partial t$ и $\partial \vartheta_i/\partial t$, которые в соответствии с (10.1) не являются реактивными переменными. Тогда при произвольных значениях этих скоростей и линейности относительно V_{ij} первого слагаемого в левой части (10.3) получим в качестве достаточных условий реализуемости рассматриваемого термомеханического процесса равенства

$$\frac{\partial A^{(D)}}{\partial V_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \sigma_{ij}^{\circ} = \rho \frac{\partial A^{\circ}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$
(10.4)

и общее диссипативное неравенство вида (4.23) $\delta_D - q_i \vartheta_i / T \ge 0$, где в данном случае диссипативная функция $\delta_D = \sigma_{ij}^{(D)} V_{ij}$. Так как из первого равенства (10.4) следует, что $A^{(D)}$ не зависит от V_{ij} , далее можно принять $A = A^\circ$. Если считать, что процессы вязкого деформирования и распространения теплоты независимы, то должно выполняться каждое из неравенств

$$\delta_D = \sigma_{ij}^D V_{ij} \ge 0, \quad -q_i \vartheta_i \ge 0, \tag{10.5}$$

характеризующих диссипацию энергии в этих двух процессах.

(-)

Закон сохранения энергии (4.22) в данном случае принимает вид

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \sigma_{ij}^{(D)} V_{ij}, \qquad (10.6)$$

где q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты. Дальнейшая конкретизация (10.6) связана с заданием вида функций A, q_i и $\sigma_{ij}^{(D)}$. В случае рассматриваемой среды используем для A и q_i те же соотношения, что и в 5.1, и введем **тензор** \hat{R} коэффициентов вязкости с компонентами R_{ijkl} , удовлетворяющими условиям симметрии $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk} = R_{klij}$ и неравенству $R_{ijkl}V_{kl}V_{ij} \ge 0$ для произвольных V_{ij} . Положив $\sigma_{ij}^{(D)} = R_{ijkl}V_{kl}$ и подставив в (10.6) соотношения из 5.1, получим форму записи закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t} = -T C_{ijkl} V_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V + R_{ijkl} V_{kl} V_{ij}, \quad (10.7)$$

где c_{ε} — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации, и с учетом равенства $V_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ придем к соотношению

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \sigma_{ij}^{(D)} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + R_{ijkl}V_{kl}, \qquad (10.8)$$

где C_{ijkl} — компоненты *тензора коэффициентов упругости*, которое определяет анизотропную термовязкоупругую *среду Кельвина* — **Фойгта**. Отметим, что последнее слагаемое в правой части (10.7) имеет при $V_{ij} \rightarrow 0$ более высокий порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми и им можно пренебречь.

Для изотропной среды $R_{ijkl} = \lambda_D \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_D (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, где λ_D и μ_D — коэффициенты (см. 8.1), аналогичные константам Ламе λ и μ . При этом

$$\sigma_{ij}^{(D)} = \lambda_D V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D V_{ij}. \tag{10.9}$$

Если вязкие свойства среды не проявляются при объемной деформации, т.е. выполняется условие Стокса, то (10.9) принимает вид $\sigma_{ij}^{(D)} = 2\mu_D(V_{ij} - V_{kk}\delta_{ij}/3)$. В этом случае, учитывая (5.5), вместо (10.8) получаем

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \,\delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \varepsilon^{(T)} \,\delta_{ij} + 2\mu_D \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}, \qquad (10.10)$$

где $\varepsilon^{(T)}$ — температурная деформация среды, а $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ — компоненты девиатора деформация.

С учетом (10.8) уравнения движения (3.62) по аналогии с (5.8) для рассматриваемой термовязкоупругой сплошной среды примут вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + R_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right) + b_i, \quad (10.11)$$

где u_i и b_i — проекции на оси Ox_i векторов и перемещения и b плотности объемных сил. Если среда изотропна и однородна, то вместо (10.11) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu_D \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda_D + \mu_D) \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_j \partial x_i} + b_i - (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon^{(T)}}{\partial x_i}, \quad (10.12)$$

где $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$. Для получения единственного решения системы дифференциальных уравнений (10.7) и (10.11) (или (10.12)) используют краевые условия (5.20), (5.21) и (5.10)–(5.12).

Рассмотрим более подробно вопрос о различии между вязкоупругим твердым телом и жидкостью. Интуитивно ясно, что упругая среда является твердым телом, а вязкая среда — жидкостью, для вязкоупругой среды ситуация существенно сложнее, так как она проявляет признаки как упругого, так и вязкого поведения.

Будем различать жидкость и твердое тело при помощи следующего простого, но нестрогого рассуждения. Пусть рассматриваемое термовязкоупругое тело изотропно и однородно. Тогда компоненты девиатора напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$ связаны с e_{ij} соотношением $s_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\mu_D \dot{e}_{ij}$, откуда

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{(t-t')\mu}{\mu_D}\right) \frac{\partial s_{ij}}{\partial t'} dt'.$$
 (10.13)

Для однородной вязкой жидкости в случае малой деформации компоненты девиатора скоростей совпадают с компонентами девиатора скоростей деформации, т.е. $\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\delta_{ij}}{3}$, и тогда $s_{ij} =$ $= 2\mu_D \dot{e}_{ij}$. Если $\dot{e}_{ij} = 0$, то для вязкоупругой среды $s_{ij} = 2\mu e_{ij} \neq 0$, а для вязкой жидкости $s_{ij} = 0$. В случае полимеров, если их рассматривать на микроуровне (см. 1.4), различие между твердым и жидким состояниями достаточно простое: в жидком состоянии отдельные цепи молекул не связаны между собой и за длительные промежутки времени обладают неограниченной подвижностью по отношению друг к другу, а в твердом состоянии между цепями молекул имеются дискретные химические связи, называемые поперечными, которые и препятствуют неограниченному *течению*.

На рис. 10.1 представлен механический аналог, соответствующий (10.13) при одноосном растяжении. Он состоит из упругого элемента, перемещение u которого линейно зависит от приложенной силы P_C , т.е.

 $u = P_C/C$, причем жесткость этого элемента C пропорциональна 2μ , и элемента вязкого трения, скорость перемещения которого связана с приложенной силой P_η соотношением $du/dt = P_\eta/\eta$, где коэффициент η пропорционален $2\mu_D$. Тогда в случае переменной во времени суммарной силы P(t) = $= P_C(t) + P_\eta(T) = Cu(t) + \eta \frac{du(t)}{dt}$, или



Рис. 10.1

$$u(t) = \frac{P(t)}{C} - \frac{1}{C} \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{(t-t')C}{\eta}\right) \frac{dP(t')}{dt'} dt',$$
 (10.14)

что с точностью до обозначений совпадает с (10.13). Отметим, что механический аналог, соответствующий ньютоновской жидкости, содержит лишь элемент вязкого трения.

Если в (10.13) принять $s_{ij} = s_{ij}^{\circ}H(t)$, где $s_{ij}^{\circ} = \text{const}$, а H(t) функция Хевисайда (H(t) = 1 при $t \ge 0$ и H(t) = 0 при t < 0), то

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}^{\circ}}{2\mu} \left(1 - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{(t-t')\mu}{\mu_D}\right) \delta(t') dt' \right) = \frac{s_{ij}^{\circ}}{2\mu} \phi(t), \quad (10.15)$$

где $\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$ — *дельта-функция*, обладающая в данном случае по отношению к произвольной непрерывной в точке $t_0 \in (0, t)$ функции f(t') свойством

$$\int_{0}^{t} f(t')\delta(t'-t_0) \, dt' = f(t_0);$$

 $\phi(t) = 1 - \exp(-t/t_*)$ — функция ползучести; $t_* = \mu_D/\mu$ — время запаздывания.

10.2. Модель среды, учитывающая скорость изменения напряжений

Влияние скорости изменения тензора напряжений на поведение термовязкоупругой среды можно учесть введением при помощи преобразования Лежандра термодинамического потенциала Гиббса

$$G(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, T, \vartheta_k) = -\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\rho} + A(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (10.16)$$

где ρ — плотность среды; A — массовая плотность свободной энергии; ε_{kl} — компоненты тензора малой деформации. Аргументами этого потенциала являются компоненты σ_{kl} тензора напряжений и их скорости $\dot{\sigma}_{kl} = \partial \sigma_{kl}/\partial t$ изменения во времени t, абсолютная температура T и ее градиент с проекциями $\vartheta_k = \partial T/\partial x_k$ на оси Ox_k системы пространственных координат.

Общее диссипативное неравенство (4.23), выражающее второй закон термодинамики, с учетом (10.16) можно представить в виде $\rho \frac{\partial G}{\partial t} + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho h \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q_i \vartheta_i}{T} \leq 0$, где h — массовая плотность энтропии, а q_i — проекции на оси Ox_i вектора плотности теплового потока, или

$$\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\sigma_{ij}}+\varepsilon_{ij}\right)\dot{\sigma}_{ij}+\rho\frac{\partial G}{\partial\dot{\sigma}_{ij}}\ddot{\sigma}_{ij}+\rho\left(\frac{\partial G}{\partial T}+h\right)\dot{T}+\rho\frac{\partial G}{\partial\vartheta_i}\dot{\vartheta}_i+\frac{q_i\vartheta_i}{T}\leqslant 0.$$

Это неравенство линейно по отношению к величинам $\ddot{\sigma}_{ij}$, \dot{T} и $\dot{\vartheta}_i$, которые не являются *реактивными переменными*. Поэтому достаточные условия его выполнения имеют вид

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad h = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \varepsilon_{ij}\right) \dot{\sigma}_{ij} + \frac{q_i \vartheta_i}{T} \leqslant 0, \quad (10.17)$$

т.е. G не зависит от $\dot{\sigma}_{ij}$ и ϑ_i .

Положим $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\circ} - \varepsilon_{ij}^{(D)}$, где ε_{ij}° не зависят от $\dot{\sigma}_{ij}$, а $\varepsilon_{ij}^{(D)}$ не зависят от σ_{ij} . Тогда из неравенства в (10.17) следует $\varepsilon_{ij}^{\circ} = -\rho \partial G / \partial \sigma_{ij}$, и в (4.23) в данном случае *диссипативная функция* $\delta_D = \varepsilon_{ij}^{(D)} \dot{\sigma}_{ij}$, а закон сохранения энергии (4.22) принимает вид

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^{(D)}, \qquad (10.18)$$

где q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты.

При малых скоростях изменения компонент тензора напряжений можно принять $\varepsilon_{ij}^{(D)} = -D_{ijkl}\dot{\sigma}_{ij} + G_{ijk}\vartheta_k$, где D_{ijkl} и G_{ijk} должны быть выбраны так, чтобы выполнялось (4.23). Если по аналогии с (10.5) считать, что механическая и тепловая диссипации энергии независимы и по отдельности неотрицательны, т. е. $\varepsilon_{ij}^D\dot{\sigma}_{ij} = -D_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}\dot{\sigma}_{ij} + G_{ijk}\vartheta_k\dot{\sigma}_{ij} \ge$ ≥ 0 и $-q_i\vartheta_i \ge 0$, то в силу произвольности ϑ_k и $\dot{\sigma}_{ij}$ достаточным условием выполнения неравенства (4.23) является $G_{ijk} = 0$. В итоге получим

$$\varepsilon_{ij} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}. \tag{10.19}$$

Дальнейшая конкретизация (10.19) связана с выбором функции $G(\sigma_{ij}, T)$. С учетом (1.13), (5.1), (5.2) и (5.14) вместо (10.16) запишем

$$\rho G(\sigma_{kl},T) = -\frac{S_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}}{2} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{(T)} - \frac{C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}\varepsilon_{ij}^{(T)}}{2} + \rho B(T), \quad (10.20)$$

где S_{ijkl}, C_{ijkl} и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензоров коэффициентов податливости, упругости и температурной деформации соответственно, а B(T) включает все остальные слагаемые, зависящие только от температуры. Тогда (10.19) примет вид

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} + D_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)},$$

что определяет анизотропную *термовязкоупругую сплошную среду Максвелла*. Для изотропной среды положим

$$D_{ijkl} = D_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + D_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

где δ_{ii} — символ Кронекера, и с учетом (5.6) получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + D_1 \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + 2D_2 \dot{\sigma}_{ij} + \varepsilon^{(T)} \delta_{ij}, \quad (10.21)$$

где λ и μ — константы Ламе.

Из (10.21) следует, что связь между компонентами девиаторов деформации e_{ij} и напряжений s_{ij} имеет вид $e_{ij} = s_{ij}/(2\mu) + 2D_2 \dot{s}_{ij}$, откуда

$$s_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{4\mu D_2}\right) \frac{\partial e_{ij}}{\partial t'} dt' \right).$$
(10.22)

Если $e_{ij} = e_{ij}^{\circ}H(t)$, где $e_{ij}^{\circ} = \text{const}$, $H(t) - \phi$ ункция Хевисайда, то по аналогии с (10.15) $s_{ij} = 2\mu e_{ij}^{\circ}\psi(t)$, где $\psi(t) = 1 - \exp(-t/t_*) - \phi$ ункция релаксации, а время релаксации в данном случае равно $t_* = 4\mu D_2$. Явление, при котором напряжения измененяются во времени при постоянной деформации, называют релаксацией напряжений.

В соответствии с (10.20) и третьим равенством (10.17) имеем

$$h=rac{\sigma_{ij}lpha_{ij}^{(T)}+C_{ijkl}arepsilon_{kl}^{(T)}lpha_{ij}^{(T)}}{
ho}-rac{dB}{dT},$$

где $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T = \text{const}$ — компоненты тензора коэффициентов температурной деформации. Подставляя h в (10.18) и вводя удельную массовую теплоемкость $c_{\sigma} = c_{\varepsilon} + TC_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \alpha_{ij}^{(T)} / \rho$ при постоянных напряжениях, где $c_{\varepsilon} = -T d^2 B / dT^2$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, с учетом (5.17) получаем уравнение теплопроводности, в котором учтена связь между полями температуры и напряжений:

$$\rho c_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial t} = -T \dot{\sigma}_{ij} \alpha_{ij}^{(T)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V + D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \dot{\sigma}_{ij},$$

где $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты *тензора теплопроводности*. Для решения этого уравнения помимо зависимостей $\dot{\sigma}_{ij}$ от времени и пространственных координат должны быть заданы *краевые условия* (5.20) и (5.21).

10.3. Термовязкоупругая среда с внутренним параметром состояния

Один из возможных вариантов построения математической модели (MM) термовязкоупругой сплошной среды основан на использовании ее внутренних параметров термодинамического состояния. Введем тензорный внутренний параметр с компонентами χ_{ij} , i, j = 1, 2, 3, изменение которых во времени t в линейном приближении описывает обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$t_{\sigma}^* \dot{\chi}_{ij} = \overline{\chi}_{ij} - \chi_{ij}, \quad \dot{\chi}_{ij} = \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t}, \qquad (10.23)$$

где t_{σ}^* — время релаксации параметра с компонентами $\chi_{ij}; \overline{\chi}_{ij}$ — его значение в равновесном термодинамическом процессе. Этому ОДУ удовлетворяет функция

$$\chi_{ij} = \overline{\chi}_{ij} - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{t_{\sigma}^{*}}\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{ij}}{\partial t'} dt'.$$
(10.24)

По аналогии с (5.69) массовую плотность свободной энергии A с учетом $|\chi_{ij}| \ll 1$ представим в виде

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_{kl}) = \frac{C_{ijkl}}{2} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij} - H_{ijkl} \chi_{kl} \varepsilon_{ij} + \frac{K_{ijkl} \chi_{kl} \chi_{kl} \chi_{ij}}{2} + \rho B(T), \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (10.25)$$

где ρ — плотность среды; ε_{ij} , C_{ijkl} и $\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензоров малой деформации, коэффициентов упругости и температурной деформации соответственно; T — абсолютная температура. Примем, что при температуре T_0 естественного состояния $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(T)} = \chi_{ij} = 0$ и $B(T_0) = 0$. Тогда $A(0, T_0, 0) = 0$ и с учетом первых двух равенств (4.39), отождествляя при малой деформации тензоры напряжений Коши и Пиолы — Кирхгофа, получаем с использованием (10.25) соотношения для компонент тензора напряжений и массовой плотности энтропии

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - H_{ijkl} \chi_{kl}, \quad h = \frac{\left(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - H_{ijkl} \chi_{kl} \right) \alpha_{ij}^{(T)}}{\rho} - \frac{dB}{dT}$$

где $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T = \text{const}$ — компоненты тензора коэффициентов температурной деформации.

Соотношение для h в сочетании с выражением (4.22) для закона сохранения энергии, (5.17) и (10.25) дают возможность получить уравнение теплопроводности

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t} = -T \left(C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - H_{ijkl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t} \right) \alpha_{ij}^{(T)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_V + \delta_D, \quad (10.26)$$

где $c_{\varepsilon} = -T d^2 B/dT^2$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора теплопроводности; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты, а диссипативная функция

$$\delta_D = -\rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial t} = -\left(K_{ijkl}\chi_{kl} - H_{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)})\right) \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial t}.$$
 (10.27)

С целью дальнейшей конкретизации соотношений для σ_{ij} примем линейную зависимость $\overline{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ij} (T - T_0) + F_{ijk} \frac{\partial T}{\partial x_k}$ и с учетом (10.23) и (10.27) подставим в общее диссипативное неравенство (4.23):

$$\begin{split} \Big(K_{ijkl}\chi_{kl} - H_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) \Big) \Big(X_{ijmn}\varepsilon_{mn} + \gamma_{ij}(T - T_0) + F_{ijm}\frac{\partial T}{\partial x_m} - \chi_{ij} \Big) + t_{\sigma}^* \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \leqslant 0. \end{split}$$

Отсюда, полагая, что процессы деформирования и изменения χ_{ij} связаны между собой и не зависят от изменения температуры и распро-

странения теплоты, получим достаточные условия реализации этих процессов в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 0, \quad F_{ijm} = 0, \quad K_{ijkl} X_{ijmn} \varepsilon_{mn} \chi_{kl} \leq 0, \quad -K_{ijkl} \chi_{kl} \chi_{ij} \leq 0, \\ H_{ijkl} \chi_{ij} \varepsilon_{kl} \leq 0, \quad -H_{ijkl} X_{ijmn} \varepsilon_{mn} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) \leq 0, \quad q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда с учетом первых двух равенств получим

$$\overline{\chi}_{ij} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \tag{10.28}$$

Используя (10.24) и (10.28), соотношения для σ_{ij} можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - R'_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t - t'}{t_{\sigma}^{*}}\right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t'} dt'\right), \quad (10.29)$$

где $R'_{ijkl} = H_{ijmn}X_{mnkl}$, причем $R'_{ijkl} = R'_{klij} = R'_{jikl} = R'_{ijlk}$. Если продифференцировать (10.29) по времени, полученный результат умножить на t^*_{σ} и сложить с (10.29), то получим

$$t_{\sigma}^{*} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(1 + t_{\sigma}^{*} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - R'_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$
(10.30)

Это равенство в сочетании с (10.26) определяет анизотропную стандартную линейную термовязкоупругую сплошную среду. Для изотропной среды $R'_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а коэффициенты λ' и μ' совпадают по размерности с константами Ламе λ и μ .

Подставив соотношения (10.29) в (3.62) и использовав соотношения Коши (3.12), получим уравнения движения в перемещениях, которые для изотропной и однородной стандартной линейной среды имеют вид

$$\begin{split} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= (\mu - \mu') \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda - \lambda' + \mu - \mu') \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + b_i - \\ &- (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \int_0^t \exp\left(-\frac{t - t'}{t_\sigma^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left(\mu' \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda' + \mu') \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) dt', \end{split}$$

где u_i и b_i — проекции на оси Ox_i векторов перемещения и плотности объемных сил соответственно. Для совместного решения этого уравнения с (10.26) необходимо добавить краевые условия (5.10)–(5.12), (5.20) и (5.21).

Для изотропной среды вместо (10.30) можно записать

$$t_{\sigma}^* \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + s_{ij} = 2\mu \left(t_{\sigma}^* \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + e_{ij} \right) - 2\mu' e_{ij}, \tag{10.31}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$ и $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}/3$ — компоненты девиаторов напряжений и деформации; δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда механический аналог ММ рассматрива-

емой среды можно представить в виде аналога среды Кельвина — Фойгта (см. рис. 10.1) с параметрами С и η , последовательно соединенного с упругим элементом жесткостью C_1 (рис. 10.2). С учетом (10.14) запишем



Рис. 10.2

$$u(t) = rac{P(t)}{C_1} + rac{P(t)}{C} - rac{1}{C} \int\limits_0^t \exp \left(-rac{(t-t')C}{\eta}
ight) rac{dP(t')}{dt'} dt',$$

где u — перемещение точки приложения силы P. После дифференцирования этого равенства по времени, умножения полученного результата на η/C и сложения с исходным равенством получим $\tilde{t}_{\sigma}^* \frac{dP}{dt} + P =$ $= C_1 \left(\tilde{t}_{\sigma}^* \frac{du}{dt} + u \right) - \frac{C_1^2 u}{C + C_1}$, где $\tilde{t}_{\sigma}^* = \frac{\eta}{C + C_1}$, что при условиях $\tilde{t}_{\sigma}^* = t_{\sigma}^*$ и $\frac{C_1}{C + C_1} = \frac{\mu'}{\mu}$ с точностью до обозначений соответствует (10.31).

Условия на поверхности разрыва в рассматриваемой термовязкоупругой сплошной среде можно получить, если считать, что отклонение абсолютной температуры от температуры естественного состояния невелико, т.е. $|T - T_0|/T_0 \ll 1$. Полагая, что возмущения в однородной среде распространяются со скоростью D_n^* , из (10.26) при $T \approx T_0$ и $\delta_D = 0$ находим

$$\rho c_{\varepsilon}[T] D_n^* = -T_0 D_n^* \big(C_{ijkl}[\varepsilon_{kl}] - H_{ijkl}[\chi_{kl}] \big) \alpha_{ij}^{(T)} + [q_i] n_i^*, \qquad (10.32)$$

где $[\cdot]$ — скачок соответствующей величины на поверхности разрыва; n_i^* — направляющие косинусы нормали к этой поверхности (см. 4.4). Остается в силе второе равенство (5.30), из которого следует, что так как в общем случае $\lambda_{ij}^{(T)} n_j^* \neq 0$, то [T] = 0, т. е. абсолютная температура непрерывна, поскольку в рассматриваемой среде скорость распространения теплоты бесконечна.

Используя (5.27) и (5.28), из (10.30) получаем систему

$$\left(\rho(D_n^*)^2 \delta_{ik} - C_{ijkl} n_j^* n_l^*\right) [\dot{u}_k] + R_{ijkl} [u_k] n_j^* \frac{n_l^*}{t_\sigma^*} = 0$$
(10.33)

трех однородных линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с шестью неизвестными $[\dot{u}_k]$ и $[u_k]$. Так как ранг матрицы этой СЛАУ не больше трех, то неизвестные значения скачков параметров могут быть определены с точностью до некоторых постоянных множителей. Если из решения краевой задачи термовязкоупругости с соответствующими граничными и начальными условиями определены скачки $[\dot{u}_k]$, то скачки $[u_k]$ могут быть найдены из решения этой СЛАУ. Скорости распространения скачков $[\dot{u}_k]$ удовлетворяют равенству det $(\rho(D_n^*)^2 \delta_{ik} - C_{ijkl} n_j^* n_l^*) = 0$, которое в случае изотропной среды имеет решение (5.31).

Согласно соотношениям (10.23) и (10.28) с учетом (3.12) можно записать $-t_{\sigma}^{*}[\chi_{ij}]D_{n}^{*} = \frac{1}{2}X_{ijkl}([u_{k}]n_{l}^{*} + [u_{l}]n_{k}^{*})$, что позволяет с использованием (10.32) и (10.33) получить $[q_{i}]n_{i}^{*}n_{j}^{*} = -\rho[\dot{u}_{i}]\alpha_{ij}^{(T)}T_{0}(D_{n}^{*})^{2}$. Таким образом, в рассматриваемой ММ термоупруговязкой среды скачки $[q_{i}]$ и $[\dot{u}_{i}]$ связаны между собой.

10.4. Температурные напряжения в трубе из вязкоупругого материала

Рассмотрим осесимметричную задачу нахождения температурных напряжений в толстостенной трубе внутренним радиусом *a* и внешним радиусом *b*, изготовленной из вязкоупругого изотропного материала. Примем, что труба находится в условиях плоского деформированного состояния и осевая деформация $\varepsilon_{zz} = 0$. При использовании математических моделей (ММ) (10.10) среды Кельвина — Фойгта и (10.30) стандартной линейной среды положим $\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$ и $\chi_{kk} = 0$, а при использовании модели (10.21) среды Максвелла будем считать, что $\dot{\sigma}_{kk} = 0$, где $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$.

При указанных допущениях для модели (10.10) получим

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} (u_r + t_* \dot{u}_r) - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2\mu (u_r + t_* \dot{u}_r)}{r} - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^{(T)},$$
(10.34)

где σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — радиальное и окружное напряжения соответственно; λ и μ — константы Ламе; r и u_r — радиальные координата и перемещение; $t_* = \mu_D/\mu$ — время запаздывания; μ_D — параметр этой модели, по физическому смыслу соответствующий динамической вязкости среды; $\varepsilon^{(T)}$ — заданная температурная деформация, зависящая от r и безразмерного времени $\overline{t} = t/t_*$. Подставив (10.34) в первое уравнение (5.42), запишем

$$\left(\lambda + 2\mu \left(1 + \frac{\partial}{\partial \overline{t}}\right)\right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon^{(T)}}{\partial r} = 0.$$

Применив к этому уравнению интегральное преобразование Лапласа [22]

$$\widetilde{u}(r,p) = \int_{0}^{\infty} u(r,ar{t}) \exp(-par{t}) dar{t},$$

где p — параметр преобразования, получим решение относительно изображения

$$\widetilde{u}_r(r,p) = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \widetilde{Q}(r,p) \frac{3\lambda + 2\mu}{rZ(p)}.$$
(10.35)

Здесь

$$\widetilde{Q}(r,p) = \int_{a}^{r} \widetilde{\varepsilon}^{(T)}(r',p)r'\,dr', \quad \widetilde{\varepsilon}^{(T)}(r,p) = \int_{0}^{\infty} \varepsilon^{(T)}(r,\bar{t})\,\exp(-p\bar{t})\,d\bar{t}$$

и $Z(p) = \lambda + 2\mu(1+p).$

Из граничных условий $\sigma_{rr} = 0$ при r = a и r = b найдем постоянные

$$C_1 = \frac{3\lambda + 2\mu}{b^2 - a^2} \widetilde{Q}_b(p) \frac{1 - \lambda/Z(p)}{\lambda + Z(p)}, \quad C_2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{b^2 - a^2} \widetilde{Q}_b(p) \frac{a^2}{Z(p)}, \quad \widetilde{Q}_b(p) = \widetilde{Q}(b,p).$$

После их подстановки в (10.35) и перехода к оригинал
у $u_r(r, \bar{t})$ из (10.34) получим

$$\frac{\sigma_{rr}}{3\lambda + 2\mu} = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{f(Q_b(\bar{t}))}{b^2 - a^2} - \frac{f(Q(r,\bar{t}))}{r^2},$$
$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{3\lambda + 2\mu} = \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{f(Q_b(\bar{t}))}{b^2 - a^2} + \frac{f(Q(r,\bar{t}))}{r^2} - f(\varepsilon^{(T)}(r,\bar{t})),$$

где

$$f(Y) = Y - \frac{\lambda}{2\mu} \int_{0}^{\overline{t}} Y \exp\left(-\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}(\overline{t} - t')\right) dt';$$
$$Q(r,\overline{t}) = \int_{a}^{r} \varepsilon^{(T)}(r',\overline{t})r' dr'; \qquad Q_b(\overline{t}) = Q(b,\overline{t}).$$

Для стандартной линейной среды решение задачи аналогично, но при этом $Z(p) = \frac{\lambda + (\lambda + 2\mu)p}{p+1}$ и $\bar{t} = t/t_{\sigma}^*$, где t_{σ}^* — время релаксации внутреннего параметра χ_{ij} . При $\mu' = \mu$ имеем

$$\frac{2\mu\sigma_{rr}}{(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)} = \frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{b^2-a^2}f_*(Q_b(\bar{t})) - \frac{f_*(Q(r,\bar{t}))}{r^2},$$

 $\frac{2\mu\sigma_{\varphi\varphi}}{(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)} = \frac{1+\frac{a^2}{r^2}}{b^2-a^2}f_*\left(Q_b(\bar{t})\right) + \frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{r^2}f_*\left(Q(r,\bar{t})\right) - f_*\left(\varepsilon^{(T)}(r,\bar{t})\right),$

где

$$f_*(Y) = Y - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \int_0^{\overline{t}} Y \exp\left(-\frac{\lambda(\overline{t} - t')}{3\lambda + 2\mu}\right) dt'.$$

Для решения задачи с применением MM (10.21) введем функцию напряжений $\tilde{F}(r,\bar{t})$, зависящую от r и безразмерного времени $\bar{t} = t/(4\mu D_2)$, где D_2 — коэффициент в (10.21). Из (5.37) и (5.40) получим уравнение для $\tilde{F}(r,\bar{t})$, которое после интегрального преобразования Лапласа примет вид

$$\frac{d^{4}\bar{F}}{dr^{4}} + \frac{2}{r}\frac{d^{3}\bar{F}}{dr^{3}} + \frac{1}{r^{2}}\frac{d^{2}\bar{F}}{dr^{2}} + \frac{1}{r^{3}}\frac{d\bar{F}}{dr} = -\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)rZ_{*}(p)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\varepsilon}^{(T)}}{dr}\right).$$
 (10.36)

Здесь $\overline{F} = \overline{F}(r, p)$ — изображение по Лапласу оригинала $\widetilde{F}(r, \overline{t}); Z_*(p) =$ = $1 + (1 + \nu)p - \frac{\nu^2}{1 + (1 + \nu)p}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, - \kappa os \phi \phi$ ициент Пуассона.

Из решения (10.36) следуют выражения для изображений напряжений

$$\widetilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{d^{2}\overline{F}}{dr^{2}} = -\frac{A_{1}}{r^{2}} + 2A_{3} + \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)Z_{*}(p)} \left(\frac{\widetilde{Q}(r,p)}{r^{2}} - \widetilde{\varepsilon}^{(T)}(r,p)\right),$$

$$\widetilde{\sigma}_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\overline{F}}{dr} = \frac{A_{1}}{r^{2}} + 2A_{3} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r^{2}Z_{*}(p)}\widetilde{Q}(r,p).$$

$$(10.37)$$

После определения из граничных условий постоянных A_1 и A_3 , подстановки их в (10.37) и перехода от изображений к оригиналам получим

$$\frac{2(\lambda+\mu)\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{1+a^2/r^2}{b^2-a^2}f^*(Q_b(\bar{t})) + \frac{f^*(Q(r,\bar{t}))}{r^2} - f^*(\varepsilon^{(T)}(r,\bar{t})),$$
$$\frac{2(\lambda+\mu)\sigma_{rr}}{\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{1-a^2/r^2}{b^2-a^2}f^*(Q_b(\bar{t})) - \frac{f^*(Q(r,\bar{t}))}{r^2},$$

где

$$f^*(Y) = \int_0^t Y\left(\exp\left(-\frac{(\lambda+2\mu)(\bar{t}-t')}{3\lambda+2\mu}\right) + \exp\left(-\bar{t}-t'\right)\right) dt'.$$

Осевые напряжения можно определить из решения уравнения

$$2D_2\dot{\sigma}_{zz} + \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{zz} = \lambda \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \varepsilon^{(T)}(r,\bar{t}),$$

которое следует из (10.21).

В частном случае изменения во времени температурной деформации по закону $\varepsilon^{(T)}(r,\bar{t}) = g(r)H(\bar{t})$, где $H(\bar{t}) - \oint y$ нкция Хевисайда, из модели (10.10) среды Кельвина — Фойгта следует, что

$$\frac{(1-\nu)\sigma_{rr}}{3\lambda+2\mu} = \left(\frac{1-a^2/r^2}{b^2-a^2}Q(b) - \frac{Q(r)}{r^2}\right)f_1(\bar{t}),
\frac{(1-\nu)\sigma_{\varphi\varphi}}{3\lambda+2\mu} = \left(\frac{1+a^2/r^2}{b^2-a^2}Q(b) + \frac{Q(r)}{r^2} - g(r)\right)f_1(\bar{t}),$$
(10.38)

где

$$Q(r) = \int_{a}^{r} g(r')r' dr', \quad f_1(\bar{t}) = 1 - 2\nu + \nu \exp\left(-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\bar{t}\right).$$

В этом случае для ММ (10.30) стандартной линейной среды имеем

$$\frac{\sigma_{rr}}{3\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left(\frac{1 - a^2/r^2}{b^2 - a^2} Q(b) - \frac{Q(r)}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{\nu \bar{t}}{1 + \nu}\right), \\
\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{3\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \left(\frac{1 - a^2/r^2}{b^2 - a^2} Q(b) + \frac{Q(r)}{r^2} - g(r) \right) \exp\left(-\frac{\nu \bar{t}}{1 + \nu}\right), \\$$
(10.39)

а для ММ (10.21) среды Максвелла —

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda+2\mu)\sigma_{rr}}{\mu(3\lambda+2\mu)} &= \left(\frac{1-a^2/r^2}{b^2-a^2}Q(b) - \frac{Q(r)}{r^2}\right)f_2(\bar{t}),\\ \frac{(\lambda+2\mu)\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda+2\mu)} &= \left(\frac{1-a^2/r^2}{b^2-a^2}Q(b) + \frac{Q(r)}{r^2} - g(r)\right)f_2(\bar{t}), \end{aligned}$$
(10.40)
rge $f_2(\bar{t}) = 2 - (1+\nu)\exp\left(-\frac{(1-\nu)\bar{t}}{1+\nu}\right) - (1-\nu)\exp(-\bar{t}). \end{aligned}$

Сравнительный анализ (10.38)-(10.40) позволяет сделать следующие выводы. Математическая модель стандартной линейной среды при $\bar{t} = 0$ дает то же самое распределение радиальных и окружных напряжений, что и ММ линейно-упругой сплошной среды, а при $\bar{t} \to \infty$ эти напряжения стремятся к нупю. При $\bar{t} = 0$ значения σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$, найденные по ММ среды Кельвина — Фойгта, отличаются от соответствующих значений ММ линейно-упругой среды в $1/(1-2\nu)$ раз, но при $\bar{t} \to \infty$ это различие стремится к нупю. Использование ММ среды Максвелла при $\bar{t} = 0$ дает нулевые напряжения, но при $\bar{t} \to \infty$ распределения напряжений $\sigma_{rr}(r,t)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$ стремятся к распределениям напряжений для линейно-упругой среды.

10.5. Термовязкоупругая среда с памятью

При построении определяющих соотношений термовязкоупругой сплошной среды с памятью будем полагать, что в рассматриваемой области V компоненты $\varepsilon_{ij}(M,t)$ (i, j = 1, 2, 3) тензора малой деформации и абсолютная температура T(M,t), зависящие от координат точки $M \in V$ и времени t, непрерывны при $t \in (-\infty, \infty)$, а при $t \to -\infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_{ij} \to 0$ и $T \to T_0$, где T_0 — абсолютная температура естественного состояния среды, причем $|\theta|/T_0 \ll 1, \theta = T - T_0$. Эти предположения позволяют представить массовую плотность A свободной энергии в виде [39]

$$\rho A = \int_{-\infty}^{t} D_{ij}(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} dt' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(t-t',t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t''} dt'' + \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t} m(t-t',t-t'') \frac{\partial \theta}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial t''} dt'' - \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t} \beta_{ij}(t-t',t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial t''} dt'', \quad (10.41)$$

где ρ — плотность среды, а функции релаксации D_{ij} , ψ , m, R_{ijkl} (k, l = 1, 2, 3) и β_{ij} , характеризующие термомеханические свойства среды, не зависят от деформации и температуры, непрерывны по аргументам $t - t' \ge 0$, $t - t'' \ge 0$ и тождественно равны нулю при t - t' < 0, t - t'' < 0.

Подставляя (10.41) в общее диссипативное неравенство (4.23) и используя свойства симметрии $R_{ijkl}(t-t',t-t'') = R_{ijkl}(t-t'',t-t')$ и

m(t-t',t-t'')=m(t-t'',t-t'), получаем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ij} - D_{ij}(0) - \int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(t - t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^{t} \beta_{ij}(0, t - t') \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt' \end{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \\ + \left(\psi(0) - \int_{-\infty}^{-t} m(t - t', 0) \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^{t} \beta_{ij}(t - t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} dt' - \rho h \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \\ - \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial D_{ij}(t - t')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi(t - t')}{\partial t} \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} \right) dt' + \delta_D - \frac{q_i}{T} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \ge 0, \quad (10.42)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; h — массовая плотность энтропии; q_i — проекции вектора плотности теплового потока на оси Ox_i системы пространственных координат; δ_D — диссипативная функция, равная

$$\begin{split} \delta_D &= \int\limits_{-\infty}^t \int\limits_{-\infty}^t \frac{\partial \beta_{ij}(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial t''} dt' dt'' - \\ &- \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^t \int\limits_{-\infty}^t \left(\frac{\partial R_{ijkl}(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t''} + \frac{\partial m(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial t''} \right) dt' dt''. \end{split}$$

Так как неравенство (10.42) должно выполняться при любых значениях производных $\partial \varepsilon_{ij}/\partial t$ и $\partial \theta/\partial t$, не являющихся *реактивными переменными*, то достаточно, чтобы коэффициенты при этих переменных в (10.42) обращались в нуль. Тогда получим

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) + \int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(t - t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t'} dt' - \int_{-\infty}^{t} \beta_{ij}(0, t - t') \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt', \quad (10.43)$$

$$\rho h = \psi(0) + \int_{-\infty}^{t} \beta_{ij}(t - t', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} dt' - \int_{-\infty}^{t} m(t - t', 0) \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt'. \quad (10.44)$$

Из (10.43) и (10.44) следует, что $D_{ij}(0)$ и $\psi(0)$ являются начальными значениями компонент тензора напряжений и объемной плотности энтропии. Полагая, что естественное состояние среды и является начальным, можно принять $D_{ij}(0) = 0$ и $\psi(0) = 0$. Отметим, что при T = const и определенном выборе функции R_{ijkl} (10.43) следует из известной теории наследственной упругости [119, 120]. Если в области V распределение температуры однородно, то $\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0$ и (10.42) с учетом (10.43) и (10.44) принимает более простой вид:

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial D_{ij}(t-t')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi(t-t')}{\partial t} \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'} \right) dt' + \delta_D \ge 0.$$
(10.45)

Поскольку подынтегральная функция в (10.45) имеет первый порядок малости по реактивным переменным, а δ_D — второй, (10.45) можно заменить двумя неравенствами:

$$-\int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial D_{ij}(t-t')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi(t-t')}{\partial t} \frac{\partial \theta(t')}{\partial t'}\right) dt' \ge 0 \quad \text{if} \quad \delta_D \ge 0.$$

Первое из этих неравенств будет удовлетворено для всех возможных термомеханических процессов при условиях $\frac{\partial D_{ij}(t-t')}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \psi(t-t')}{\partial t} = 0$. Поэтому с учетом нулевого закона термодинамики можно принять $D_{ij}(t-t') = 0$, $\psi(t-t') = 0$ и вместо (10.42) записать

$$\delta_D - \frac{q_i}{T} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \ge 0. \tag{10.46}$$

При этом уравнение (4.22) закона сохранения энергии с учетом (10.44) примет вид

$$-T\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t} \left(m(t-t',0)\frac{\partial\theta}{\partial t'} - \beta_{ij}(t-t',0)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t'}\right)dt' = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \quad (10.47)$$

где q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты.

Для приведения (10.47) к форме уравнения теплопроводности положим

$$q_{i} = -\int_{-\infty}^{t} \lambda_{ij}^{(T)}(t - t') \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_{j}}\right) dt'.$$
(10.48)

Подставляя (10.48) в (10.46) и учитывая, что $\delta_D \ge 0$, получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \int_{-\infty}^t \lambda_{ij}^{(T)}(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) dt' \ge 0.$$

4

В произвольный момент времени t функция $\partial \theta / \partial x_i$ и интеграл будут иметь одинаковые знаки лишь в том случае, когда матрица с элементами $\lambda_{ij}^{(T)}$, соответствующими компонентам *тензора теплопроводности* среды, неотрицательно определена и не изменяется во времени. При этих условиях (10.48) примет вид $q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \partial \theta / \partial x_j$, следовательно, вместо (10.47) можно записать уравнение теплопроводности

$$-T\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t}\left(m(t-t',0)\frac{\partial\theta}{\partial t'}-\beta_{ij}(t-t',0)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t'}\right)dt'=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij}^{(T)}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)+q_V+\delta_D.$$

Отметим, что второе слагаемое в подынтегральной функции характеризует *термомеханическую связанность* полей температуры и деформации. При переходе к изотропной среде с памятью в этом уравнении следует положить $\beta_{ij}(t-t',0) = \beta(t-t',0)\delta_{ij}$ и $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda^{(T)}\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а в (10.43) принять $R_{ijkl}(t-t',0) = R_1(t-t',0)\delta_{ij}\delta_{kl} + R_2(t-t',0)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

Рассмотрим некоторые следствия из условия $\delta_D \ge 0$ для изотропной термовязкоупругой среды с памятью, положив

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^{\circ} H(t), \quad \theta(t) = \theta^{\circ} H(t), \quad (10.49)$$

где $\varepsilon_{ij}^{\circ} = \text{const}; \ \theta^{\circ} = \text{const}; \ H(t) - \phi$ ункция Хевисайда. Диссипативная функция для такой среды примет вид

$$\begin{split} \delta_{D} &= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial \beta(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'} - \frac{1}{2} \frac{\partial m(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t''} dt' dt'' - \\ &- \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R_{1}(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t'} + \frac{\partial R_{2}(t-t',t-t'')}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \right) dt' dt''. \end{split}$$

Подставив (10.49) в неравенство $\delta_D \ge 0$, получим

$$2\varepsilon_{kk}^{\circ}\theta^{\circ}\frac{\partial\beta(t,t)}{\partial t} - (\theta^{\circ})^{2}\frac{\partial m(t,t)}{\partial t} - (\varepsilon_{kk}^{\circ})^{2}\frac{\partial R_{0}(t,t)}{\partial t} - 2\varepsilon_{ij}^{\circ}\varepsilon_{ij}^{\circ}\frac{\partial R_{2}(t,t)}{\partial t} \ge 0, \quad (10.50)$$

где $R_0(t,t) = R_1(t,t) + 2R_2(t,t)/3$, а $e_{ij}^\circ = \varepsilon_{ij}^\circ - \varepsilon_{kk}^\circ \delta_{ij}/3$, k = 1, 2, 3, --компоненты девиатора деформации.

При $e_{ij}^{\circ} = 0$ и неравных одновременно нулю ε_{kk}° и θ° из (10.50) следуют ограничения

$$\frac{\partial R_0(t,t)}{\partial t} \leqslant 0 \quad \mathbf{M} \quad \frac{\partial m(t,t)}{\partial t} \leqslant 0. \tag{10.51}$$

Если при этом представить (10.50) в виде

$$\begin{split} 2\varepsilon_{kk}^{\circ}\theta^{\circ}\bigg(\frac{\partial\beta(t,t)}{\partial t}-\sqrt{\frac{\partial R_{0}(t,t)}{\partial t}\frac{\partial m(t,t)}{\partial t}}\bigg) \geqslant \\ \geqslant -\bigg(\varepsilon_{kk}^{\circ}\sqrt{-\frac{\partial R_{0}(t,t)}{\partial t}}+\theta^{\circ}\sqrt{-\frac{\partial m(t,t)}{\partial t}}\bigg)^{2}, \end{split}$$

то получим ограничение

$$\left(\frac{\partial\beta(t,t)}{\partial t}\right)^2 \ge \frac{\partial R_0(t,t)}{\partial t} \frac{\partial m(t,t)}{\partial t}.$$
(10.52)

В частном случае $\varepsilon_{kk}^{\circ} = \theta^{\circ} = 0$ из (10.50) следует, что

$$\frac{\partial R_2(t,t)}{\partial t} \leqslant 0. \tag{10.53}$$

Пусть свободная от напряжений среда находится в однородном поле температуры, причем $\theta(t) = \theta^{\circ}H(t)$, $\theta^{\circ} = \text{const.}$ Тогда из (10.43) для изотропной среды с учетом $\sigma_{ij} = D_{ij}(0) = 0$ получим

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial R_0(t-t',0)}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t'} dt' = \beta(0,t)\theta^{\circ}.$$

Этому равенству при условии $\beta(0,t) = \alpha_V^{(T)} R_0(t,0)$, где $\alpha_V^{(T)} = \text{const}$ температурный коэффициент объемного расширения среды, удовлетворяет очевидное соотношение $\varepsilon_{kk}(t) = \alpha_V^{(T)} \theta^{\circ} H(t)$. Если же это условие не выполняется, то зависимость объемной деформации $\varepsilon_V = \varepsilon_{kk}$ от температуры не удается выразить при помощи $\alpha_V^{(T)} = \text{const.}$

В механике сплошной среды широко используется условие неотрицательности работы, совершаемой напряжениями на соответствующих деформациях. Это условие для среды с памятью при изотермическом деформировании имеет вид

$$\int_{0}^{t} \sigma_{ij}(t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' \ge 0, \qquad (10.54)$$

где моменту времени t = 0 соответствует естественное состояние. Установим связь (10.54) с условием, накладываемым на объемную плотность ρA свободной энергии. При $\partial \theta / \partial t = 0$ и $\partial \theta / \partial x_i = 0$ интегрированием по времени общего диссипативного неравенства (4.23) можно получить

$$\int_{0}^{t} \delta_{D}(t') dt' = -\rho A + \int_{0}^{t} \sigma_{ij}(t') \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t')}{\partial t'} dt' \ge 0.$$
(10.55)

Если потребовать, чтобы $\rho A \ge 0$, то (10.55) будет необходимым условием выполнения (10.54), однако выполнение (10.54) не обеспечивает неотрицательности объемной плотности свободной энергии. Отсюда можно заключить, что требование $\rho A \ge 0$ является более жестким и физически более содержательным, чем требование неотрицательности работы.

В случае изотермического деформирования изотропной среды с памятью вместо (10.41) с учетом $D_{ij}(t-t')=0$ получим

$$\rho A = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{R_1(t-t',t-t'')}{2} \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t''} + R_2(t-t',t-t'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t''} \right) dt' dt''.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^{\circ}H(t)$, $\varepsilon_{ij}^{\circ} = \text{const}$, требование $\rho A \ge 0$ приводит к условиям $R_1(t-t',t-t'') \ge 0$ и $R_2(t-t',t-t'') \ge 0$, а значит, и $R_0(t-t',t-t'') \ge 0$. Таким образом, при ограничениях (10.51) и (10.53) функции релаксации должны быть неотрицательными убывающими функциями времени. Принцип затухающей памяти накладывает дополнительно требование неотрицательности вторых производных этих функций по времени.

Для рассматриваемой термовязкоупругой среды с памятью можно получить уравнения движения в перемещениях, если подставить (10.43) в (3.62). Для полученных уравнений и уравнения теплопроводности остаются в силе краевые условия (5.10)-(5.12), (5.20) и (5.21).

В заключение рассмотрим наиболее широко используемые функциональные связи между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ в случае одноосного напряженного состояния. Обозначив функцию релаксации

$$\psi(t) = R_2(t) \frac{3R_1(t) + 2R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)},$$

запишем

$$\sigma(t) = \int_{0}^{t} \psi(t-t') \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} dt'.$$

Если принять [119]

$$\psi(t) = 1 - \sum_{k=1}^{K} m_k \tau_k \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right) \right),$$

где значения τ_k определяют спектр времен релаксации, а m_k — экспериментально определяемые коэффициенты, то получим так называемую экспоненциальную функцию релаксации. При $K \to \infty$ спектр времен релаксации становится непрерывным и функция релаксации принимает вид [119]

$$\psi(t) = 1 - \int_0^\infty B(p) \left(1 - \exp(-pt)\right) dp.$$

При иной форме связи

$$\sigma(t) = rac{\psi_0}{\Gamma(1-eta)} \int\limits_0^t rac{\partial arepsilon(t')}{\partial t'} \, rac{dt'}{(t-t')^eta},$$

где $\psi_0 = \text{const} > 0; \ \beta \in [0, 1);$

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} s^{x-1} \exp(-s) \, ds \quad -$$

гамма-функция, причем $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(1 + x) = x\Gamma(x)$, функция релаксации $\psi(t) = \frac{\psi_0}{t^{\beta}\Gamma(1-\beta)}$ порождена оператором Абеля [119] $I_{\beta} = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$. Возможно также применение комбинаций рассмотренных функций.

11. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СРЕДЫ

Характерной особенностью упругой сплошной среды является полное восстановление формы и объема деформируемого тела после снятия приложенной к нему нагрузки, т.е. упругая деформация полностью обратима. Неупругая деформация связана с возникновением на микроуровне необратимых смещений вследствие разрыва межмолекулярных и межатомных связей, движения дислокаций и других явлений (1.4, 1.8). В этом случае говорят о неупругом деформировании сплошной среды, различая пластическую деформацию и деформацию ползучести.

11.1. Простейшие модели пластического деформирования

При неупругом деформировании различные материалы ведут себя по-разному. Их поведение зависит от структуры материала, условий его работы в конструкции и приложенной нагрузки. Изучение неупругих свойств материала начинают с проведения испытаний образцов при одноосном нагружении (как правило, растягивающей нагрузкой). Получаемые в результате испытаний *диаграммы деформирования* затем аппроксимируют различными зависимостями между напряжением σ и *деформацией* ε . Эти зависимости при отсутствии явления ползучести и представляют собой математические модели (MM) пластического деформирования материала при одноосном нагружении. Графическое представление некоторых таких ММ приведено на рис. 11.1.

Одним из основных параметров ММ идеальной упругопластической среды (рис. 11.1, a) является предел текучести $\sigma_{\rm T}$, равный напряжению при растяжении (или сжатии) образца, соответствующему началу пластического деформирования. До достижения этого предела (при $|\sigma| < \sigma_{\rm T}$) среда является линейно-упругой с модулем продольной упругости $E = \sigma_{\rm T}/\varepsilon_{\rm T}$, пропорциональным tg β , а при $|\sigma| = \sigma_{\rm T}$ материал образца деформируется без упрочнения. В случае разгрузки (уменьшения абсолютного значения напряжения σ) и возможного последующего повторного нагружения при выполнении условия $|\sigma| < \sigma_{\rm T}$ среда ведет себя как линейно-упругая с тем же значением модуля E, поэтому в со-



Рис. 11.1

ответствии с законом Гука упругая деформация $\varepsilon^{(e)} = \sigma/E$. При этом сохраняет свое абсолютное значение $|\varepsilon_1^{(p)}| = |\varepsilon_1| - \varepsilon_T$ накопленная перед разгрузкой пластическая деформация, называемая в этом случае остаточной.

Отличие ММ упругопластической среды с упрочнением от ММ идеальной упругопластической среды состоит в том, что пластическое деформирование происходит при возрастании нагрузки и выполнении условия $|\sigma| > \sigma_{T}$. Среду называют упругопластической с линейным упрочнением (рис. 11.1, б), если

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_{\rm T} + \frac{|\sigma| - \sigma_{\rm T}}{E'}\right) \operatorname{sgn} \sigma, \tag{11.1}$$

где $E' = \text{const} - \kappaos \phi \phi$ ициент упрочнения, пропорциональный tg β' ; sgn $x - \phi$ ункция знака числа x: sgn x = 1 при x > 0, sgn x = -1 при x < 0 и sgn x = 0 при x = 0. Если после достижения деформации ε_1 , вызванной напряжением σ_1 , происходит разгрузка, то среда ведет себя как линейно-упругая с модулем E, но сохраняет остаточную деформацию $\varepsilon_1^{(p)} = \varepsilon_1 - \sigma_1/E$. При последующем повторном нагружении в первоначальном направлении образца материал деформируется упруго до достижения напряжения σ_1 , при котором началась разгрузка. Значение σ_1 можно рассматривать как значение нового предела текучести, превышающее первоначальное значение, т.е. материал получил упрочнение путем предварительного пластического деформирования. При $|\sigma| > \sigma_1$ и дальнейшем увеличении нагрузки снова вступает в силу линейная зависимость (11.1), поэтому упрочнение и называют линейным. Оно может быть как изотролным, т.е. не зависеть от направления повторного нагружения, так и анизотропным, связанным с проявлением эффекта Баушингера. В последнем случае материал в результате пластического деформирования приобретает деформационную анизотропию.

Если после достижения предела текучести при возрастающей нагрузке зависимость напряжения от деформации становится нелинейной (рис. 11.1, ϵ), т. е. материал обладает нелинейным упрочнением, то поведение такого материала описывает MM упругопластической среды с нелинейным упрочнением. В этом случае коэффициент упрочнения $E' = \partial \sigma / \partial \varepsilon$ будет переменным, зависящим от текущего значения ε (или σ). Процессы разгрузки и повторного нагружения эта MM описывает аналогично MM упругопластической среды с упрочнением.

Для общего случая MM **упругопластической среды** (рис. 11.1, e) характерно отсутствие четко выраженного предела текучести, т. е. пластическая деформация возникает при любом отличном от нуля значении σ . При нагружении зависимость между напряжением и деформацией нелинейна, поэтому и упрочнение материала нелинейное. Разгрузка для такой среды происходит по закону Гука с модулем продольной упругости E, пропорциональным tg β (β — угол наклона касательной к диаграмме деформирования в начале координат). При повторном нагружении в первоначальном направлении пластическое деформирование продолжается после достижения напряжением значения σ_1 , при котором началась разгрузка.

Если при пластическом деформировании $|\varepsilon_1| \gg \varepsilon_{\rm T}$, что характерно для некоторых технологических процессов обработки материалов, то можно пренебречь упругой деформацией и при отсутствии упрочнения материала использовать ММ идеальной жесткопластической среды (рис. 11.1, d), а при наличии упрочнения — ММ жесткопластической среды с нелинейным (или линейным при $\partial\sigma/\partial\varepsilon =$ = const) упрочнением (рис. 11.1, e). Для таких ММ $\varepsilon^{(p)} = \varepsilon$, следовательно, процессы разгрузки и повторного нагружения на диаграммах деформирования соответствуют вертикальным отрезкам.

Вернемся к достаточно общей ММ упругопластической среды с нелинейным упрочнением (см. рис. 11.1, в) и предположим, что образец, нагруженный сначала до напряжения σ_1 (точка C на рис. 11.2), затем разгружен до напряжения σ° (точка D). При нагружении образца будет совершена работа, пропорциональная площади под диаграммой деформирования. На единицу объема образца эта работа составит

$$A_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \, d\varepsilon.$$



Рис. 11.2

Часть этой работы будет запасена в виде потенциальной энергии упругой деформации объемной плотностью $\Pi_1 = \sigma_1 \varepsilon_1/2 = \sigma_1^2/(2E)$. При полной разгрузке эта часть работы обратима, а остальная часть, равная разности $A_1 - \Pi_1$ и называемая **работой пластического деформирования**, необратима. При разгрузке образца до напряжения σ° потенциальная энергия упругой деформации уменьшится и ее объемная плотность составит $\Pi^{\circ} = (\sigma^{\circ})^2/(2E)$, а разность $\Pi_1 - \Pi^{\circ}$ может быть использована для совершения работы во внешней по отношению к образцу системе.

Примем состояние образца в точке D (см. рис. 11.2) за исходное и проведем его нагружение до напряжения $\sigma_1 + d\sigma$ (точка H), что приведет к приращению $d\varepsilon^{(p)} > 0$ пластической деформации $\varepsilon_1^{(p)}$, и разгрузку до напряжения σ° (точка D_1). При этом работа пластического деформирования будет пропорциональна сумме площадей параллелограмма DCC_1D_1 и криволинейного треугольника CHC_1 , причем

$$(\sigma_1 - \sigma^{\circ}) d\varepsilon^{(p)} > 0 \quad \mathbf{u} \quad d\sigma \, d\varepsilon^{(p)} > 0. \tag{11.2}$$

Отсюда следует условие $d\sigma/d\varepsilon > 0$, которое можно рассматривать как критерий устойчивости пластического деформирования [82].

Рассмотренные MM являются в определенной степени идеализированными. В частности, при разгрузке и повторном нагружении реальных материалов их поведение отличается от линейно-упругого. Даже если приближенно считать это поведение линейно-упругим, то оно соответствует модулю упругости, значение которого, строго говоря, отличается от значения E [119]. Однако при построении MM пластического деформирования эти особенности обычно не учитывают и принимают, что пластическую и упругую деформации можно рассматривать независимо.

11.2. Условие текучести

Рассмотренные в 11.1 простейшие математические модели (ММ) пластического деформирования сплошной среды при одноосном нагружении позволяют подойти к выяснению условия, при выполнении которого начинают возникать пластические деформации в случае произвольного напряженного состояния. Это условие называют условием пластичности [119] или условием текучести, поскольку процесс пластического деформирования среды часто называют пластическим течением.

Так как для упругой сплошной среды деформированное состояние в окрестности фиксированной точки однозначно определено тензором напряжений $\hat{\sigma}$ с компонентами σ_{ij} (i, j = 1, 2, 3) и абсолютной температурой T и не зависит от последовательности нагружения, то условие текучести можно записать в виде $f_1(\sigma_{ij}, T) = 0$. Для материала, обладающего свойством изотропии, функция в левой части этого равенства должна одинаковым образом зависеть от главных напряжений σ_{α} , $\alpha =$ = 1, 2, 3. Тогда можно записать $\overline{f}_1(\sigma_{\alpha}, T) = 0$, но возможна запись условия текучести и в виде $f_2(I_{1\hat{\sigma}}, I_{2\hat{\sigma}}, I_{3\hat{\sigma}}, T) = 0$, где $I_{1\hat{\sigma}}, I_{2\hat{\sigma}}$ и $I_{3\hat{\sigma}}$ первый, второй и третий инварианты тензора $\hat{\sigma}$. До определенного уровня всестороннего сжатия или растяжения пластические деформации обычно не возникают. Поэтому влияние первого инварианта можно не учитывать и представить условие текучести в виде

$$f_3(I_{2\widehat{\sigma}}, I_{3\widehat{\sigma}}, T) = 0. \tag{11.3}$$

При фиксированной температуре (11.3) в трехмерном пространстве главных напряжений σ_{α} геометрически соответствует цилиндрической поверхности, называемой поверхностью текучести или поверхностью пластичности. Эта поверхность пересекает оси $O\sigma_{\alpha}$ в точках с координатами $\pm \sigma_{T}(T)$, где $\sigma_{T}(T)$ — зависящий от температуры T предел текучести материала при растяжении. Образующая этой поверхности одинаково наклонена к осям $O\sigma_{\alpha}$ и перпендикулярна к плоскости, заданной уравнением $\sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3} = 0$ и называемой девиаторной плоскостью, поскольку любой лежащий в ней вектор соответствует девиатору напряжений для некоторого напряженного состояния. След пересечения этой плоскостью поверхности текучести образует кривую текучести (рис. 11.3), которая обладает следующими свойствами [82]:

– если пластическая деформация не возникает с самого начала нагружения материала, то кривая не проходит через начало системы координат (в противном случае кривая текучести стягивается в точку, совпадающую с началом системы координат);

– луч, проведенный из начала системы координат, пересекает кривую текучести только один раз (иначе существовало бы два подобных напряженных состояния, удовлетворяющих условию начала пластического деформирования, что невозможно);

– кривая симметрична относительно проекций Os_{α} осей $O\sigma_{\alpha}$ на девиаторную плоскость;

 – если свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы, то кривая симметрична относительно штриховых прямых, перпендикулярных этим проекциям.



Рис. 11.3

Рис. 11.4

Из этих свойств следует, что кривая текучести должна состоять из 12 одинаковых дуг (см. рис. 11.3). Так как косинусы углов между осями $O\sigma_{\alpha}$ и их проекциями на девиаторную плоскость равны $\sqrt{2/3}$, то в этой плоскости эта кривая пересекает оси Os_{α} в точках с координатами $s_{\alpha} = \pm \sqrt{2/3}\sigma_{\rm T}(T)$. В **11.3** показано, что поверхность текучести должна быть выпуклой, откуда следует, что выпукла и кривая текучести, т. е. она должна быть заключена между двумя правильными шестиугольниками, пересекающими оси Os_{α} в тех же точках и симметричными относительно осей Os_{α} (рис. 11.4).

Внутренний шестиугольник образован пересечением девиаторной плоскостью граней призмы, заданных уравнениями $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{T}$, $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_{T}$ и $\sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_{T}$. Приняв боковую поверхность этой призмы в качестве поверхности текучести, придем к условию текучести

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_{\mathrm{T}}(T).$$
(11.4)

Если $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$, то вместо (11.4) получим условие наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max} = \sigma_{\mathrm{T}}/2$, поскольку $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ (см. **3.5**). Это условие не учитывает влияние промежуточного по значению главного напряжения σ_2 .

Внешний шестиугольник (см. рис. 11.4) образован пересечением девиаторной плоскостью граней призмы с уравнениями $\sigma_1 - \sigma_c = \pm 2\sigma_T/3$, $\sigma_2 - \sigma_c = \pm 2\sigma_T/3$ и $\sigma_3 - \sigma_c = \pm 2\sigma_T/3$, где $\sigma_c = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ — среднее напряжение. Если боковую поверхность этой призмы считать поверхностью текучести, то условие текучести примет вид

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_c|, |\sigma_2 - \sigma_c|, |\sigma_3 - \sigma_c|\} = \frac{2\sigma_{\rm T}(T)}{3}.$$
 (11.5)

Его называют условием наибольшего приведенного напряжения.

Если поверхность текучести задать уравнением

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{\rm T}^2(T), \qquad (11.6)$$

то ее пересечение девиаторной плоскостью будет представлять собой окружность радиусом $\sqrt{2/3}\sigma_{\rm T}$, вписанную во внешний шестиугольник и описанную вокруг внутреннего шестиугольника (см. рис. 11.4). С учетом (3.56) вместо (11.6) можно записать $|I_{2\hat{\sigma}}| = \sigma_{\rm T}^2(T)/3$, т.е. в этом случае в (11.3) не учитывается влияние $I_{3\hat{\sigma}}$.

Эксперименты показывают [82], что условие (11.6) достаточно хорошо выполняется для большой группы материалов (металлов, некоторых видов пластмасс и др.). Ему можно дать энергетическую интерпретацию. Если объемную плотность П^(e) потенциальной энергии упругой деформации представить через главные напряжения, то получим [145]

$$\Pi^{(e)} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{2E},$$

где ν — коэффициент Пуассона; E — модуль продольной упругости. Вычитая отсюда объемную плотность $\Pi_V^{(e)} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ энергии, связанной с изменением объема, находим объемную плотность потенциальной энергии формоизменения

$$\Pi_F^{(e)} = (1+\nu)\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6E}$$

Сравнивая это равенство с (11.6), получаем условие текучести в виде $\frac{3E\Pi_F^{(e)}}{1+\nu} = \sigma_T^2$. Эта интерпретация хорошо согласуется с представлениями о микромеханизме пластической деформации, связанном со скольжением по определенным плоскостям в *твердом кристаллическом теле*. Такой процесс приводит к изменению формы в окрестности рассматри-

ваемой точки и объясняет для (11.6) название энергетического условия текучести.

Из (3.56) и (11.6) следует $\tau_N = \frac{\sqrt{2}\sigma_r(T)}{3}$, где τ_N — октаэдрическое касательное напряжение. Если ввести интенсивность напряжений

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}},$$
 (11.7)

значение которой при одноосном растяжении напряжением σ совпадает со значением этого напряжения, то (11.6) примет вид $\sigma_{\mu} = \sigma_{\tau}(T)$. Для материалов, обладающих свойством *анизотропии*, предложено достаточно большое число условий текучести [82,119], которые представляют собой обобщения условий (11.4)–(11.6) или их комбинации.

При продолжении процесса нагружения за пределом текучести у конструкционных материалов, как правило, увеличивается сопротивляемость пластическому деформированию. Для материалов с выраженным пределом текучести упрочнение связано с изменением как размеров, так и положения начальной поверхности текучести в пространстве напряжений. Последующие поверхности текучести, которые образуются в процессе нагружения и отделяют области упругих и пластических деформаций друг от друга, называют **поверхностиями нагружения**. Соотношение, определяющее характер изменения начальной поверхности текучести в зависимости от текущего напряженного состояния и предыстории деформирования, называют **условием упрочнения**. В случае изотропного упрочнения поверхность нагружения однородно расширяется, сохраняя свою форму, и в простейшем виде может быть описана **функцией нагружения**

$$f(\sigma_{ij}) = \psi_{\mathrm{T}}(\chi, T), \qquad (11.8)$$

где χ — скалярный внутренний параметр состояния, называемый **па**раметром упрочнения. В процессе пластического деформирования его значение возрастает.

Параметр упрочнения можно определить различными способами. Один из них заключается в его приравнивании достигнутой интенсивности деформации сдвига $2\sqrt{|I_{2\hat{e}}|}$, где $I_{2\hat{e}}$ — второй инвариант девиатора деформации \hat{e} , другой — в его приравнивании диссипации энергии при пластическом деформировании $\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)}$, где $\varepsilon_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)} - \varepsilon_{ij}^{(f)}$ — компоненты тензора пластической деформации, $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензоров соответственно упругой и температурной деформации, а тензор $\hat{\epsilon}$ малой деформации с компонентами ε_{ij} в данном случае принято называть тензором полной деформации. Третий способ связан с выбором в качестве меры упрочнения накопленной пластической деформации

$$\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^{(p)} d\varepsilon_{ij}^{(p)}, \qquad (11.9)$$

называемой параметром Удквиста [82].

Если начальным считать состояние, при котором пластические деформации отсутствуют, и использовать условие (11.6), то (11.8) можно записать в виде $s_{ij}s_{ij} = 2\tau_{\rm T}^2(\chi,T)$, где правая часть равенства определяет изменение предела текучести при чистом сдвиге, обусловленное изотропным упрочнением и температурой. Так как условия изотропного упрочнения не учитывают эффект Баушингера, наличие которого подтверждено экспериментально, то они пригодны лишь для приближенного описания пластического деформирования изотропных материалов со сравнительно малым коэффициентом упрочнения, когда влияние этого эффекта не очень существенно.

Анизотропное упрочнение материала при фиксированной температуре и идеальном эффекте Баушингера, когда предел текучести при разгрузке уменьшается настолько, насколько он увеличился при предшествующем нагружении, можно описать параллельным перемещением начальной поверхности текучести в пространстве напряжений, т.е. вместо (11.8) написать

$$f(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) = \psi_{\mathrm{T}}(T), \qquad (11.10)$$

где χ_{ij} — компоненты тензорного внутреннего параметра состояния $\hat{\chi}$, называемого *тензором трансляции* и определяющего положение центра поверхности нагружения. *Упрочнение* такого вида называют *трансляционным* или *кинематическим* [119]. Если пренебречь изменением объема при пластическом деформировании, то (11.10) примет вид $f(s_{ij} - \chi'_{ij}) = \psi_{\rm T}(T)$, где $\chi'_{ij} = \chi_{ij} - \chi_{kk} \delta_{ij}/3$ — компоненты девиатора $\hat{\chi}'$ трансляции центра поверхности нагружения. В первом приближении $\chi'_{ij} = c_{\hat{\chi}'}(T)\varepsilon_{ij}^{(p)}$, где $c_{\hat{\chi}'}(T)$ — коэффициент, характеризующий свойства данного материала.

При кинематическом упрочнении первоначально изотропный материал становится анизотропным, причем пластические деформации не зависят от *среднего напряжения*, а направления главных осей тензора напряжений не меняются. Так как условия кинематического упрочнения описывают идеальный эффект Баушингера, то они применимы для сравнительно небольшого числа упрочняющихся материалов. В общем случае комбинированного упрочнения материала поверхность нагружения изменяет свои размеры и форму, перемещаясь в пространстве напряжений.

11.3. Модели термопластичности

Под термопластичностью понимают процесс развития в материале пластической деформации, протекающий в условиях изменения абсолютной температуры Т. Иногда этот процесс называют неизотермической пластичностью [136]. При построении математических моделей (ММ) термопластичности в качестве внутренних параметров термодинамического состояния обычно используют параметр Удквиста χ , учитывающий в поликристаллическом материале плотность микродефектов, и тензорный параметр $\widehat{\chi}$ с компонентами $\chi_{ii}, i, j = 1, 2, 3,$ который пропорционален усредненному симметричному тензору плотности дислокаций и может рассматриваться как аналогичный тензору трансляции усредненный тензор микронапряжений, возникающих в скоплениях дислокаций. Эти параметры в случае твердого аморфного тела (например, полимера) могут иметь иной микромеханический смысл, но важным является их зависимость от компонент $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ тензора пластической деформации, причем $d\chi = 0$ и $d\chi_{ij} = 0$ при $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0.$

Любая MM термопластичности в частном случае должна описывать эксперименты при одноосном нагружении, в которых проявляются упругие и пластические свойства материала, и подтверждаться результатами экспериментов при произвольном *напряженном состоянии*. На основании имеющихся экспериментальных данных можно сделать следующие заключения об общих свойствах такой модели [58]:

- в бесконечно малой окрестности любой точки рассматриваемого тела приращение компонент *тензора полной деформации*

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)} + d\varepsilon_{ij}^{(T)}, \qquad (11.11)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензоров упругой и температурной деформации соответственно;

– в исходном состоянии материал изотропен, а при нагружении изменение его объема происходит линейно-упруго, т.е. $d\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0$, $d\varepsilon_V = d\varepsilon_{kk} = d\varepsilon_{kk}^{(e)} + d\varepsilon_{kk}^{(T)}$, k = 1, 2, 3,

$$d\sigma_{kk} = d\sigma_{ij}\,\delta_{ij} = 3\frac{\partial\varkappa}{\partial T}dT\big(\varepsilon_V - \varepsilon_{kk}^{(T)}\big) + 3\varkappa\big(d\varepsilon_V - d\varepsilon_{kk}^{(T)}\big),\tag{11.12}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$; δ_{ij} — символ Кронекера; ε_V — объемная деформация; \varkappa — модуль объемной упругости; ~ компоненты девиатора упругой деформации линейно зависят от компонент s_{ij} девиатора напряжений, т.е.

$$de_{ij}^{(e)} = \frac{ds_{ij}}{2\mu} - s_{ij}\frac{\partial\mu}{\partial T}\frac{dT}{2\mu^2},$$
(11.13)

где μ — модуль сдвига;

- существует функция нагружения, определяющая для пластически деформируемой бесконечно малой окрестности рассматриваемой точки тела уравнение *поверхности нагружения* в пространстве напряжений в виде

$$f(\sigma_{ij}, T, \chi, \chi_{ij}) = 0.$$
 (11.14)

Сплошную среду с указанными свойствами назовем термопластической средой.

Задаваемая (11.14) поверхность делит пространство напряжений на две части. При $f(\sigma_{ij}, T, \chi, \chi_{ij}) < 0$ бесконечно малая окрестность рассматриваемой точки тела деформируется упруго, т.е. $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$, а напряженное состояние, соответствующее $f(\sigma_{ij}, T, \chi, \chi_{ij}) > 0$, не может быть реализовано.

Если левая часть (11.14) не зависит от χ и χ_{ij} , то получим уравнение $f_*(\sigma_{ij},T) = 0$ поверхности текучести для идеальной упругопластической среды. При этом $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$, если $f_* = 0$ и $df_* = \frac{\partial f_*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_*}{\partial T} dT = 0$, и $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$, если $f_* = 0$ и $df_* < 0$ или $f_* < 0$. В общем случае упругопластической среды с упрочнением при выполнении (11.14) возможны следующие процессы: активное нагружение, если

$$df^* = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \, d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \, dT > 0, \quad df = df^* + \frac{\partial f}{\partial \chi} \, d\chi + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} \, d\chi_{ij} = 0 \quad (11.15)$$

и тогда $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$; нейтральное нагружение, если $df^* = df = 0$; начало разгрузки, если $df^* < 0$. Для двух последних процессов $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$.

Введем параметр $d\lambda^* \ge 0$, причем $d\lambda^* = 0$, когда $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$, и представим внутренние параметры состояния в виде

$$d\chi = W(\sigma_{kl}, T, \chi_{kl}, \chi) d\lambda^*, \quad d\chi_{ij} = W_{ij}(\sigma_{kl}, T, \chi_{kl}, \chi) d\lambda^*.$$
(11.16)

При активном нагружении из (11.15) и (11.16) получим

$$d\lambda^* = \left| -\frac{df^*}{W \frac{\partial f}{\partial \chi} + W_{ij} \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}}} \right|.$$

Тогда уравнение *закона пластического течения* можно записать в виде [39]

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = N_{ij} \, d\chi + Y_{ijkl} \, d\chi_{kl} = M_{ij} \, d\lambda^*, \qquad (11.17)$$

где, согласно (11.16), $M_{ij} = N_{ij}W + Y_{ijkl}W_{kl}$, $M_{ij} = M_{ji}$, $M_{kk} = 0$.

При построении некоторых вариантов ММ пластического деформирования используют постулат Драккера, обобщающий (11.2). Пусть тело, находящееся в исходном состоянии, нагружено по некоторому пути OC в пространстве напряжений (рис. 11.5), а затем из точки



Рис. 11.5

C, лежащей на поверхности нагружения и соответствующей значениям σ_{ij} , разгружено до точки D, расположенной внутри этой поверхности и соответствующей значениям σ_{ij}° (в частном случае нейтрального нагружения точка D может находиться и на этой поверхности). Если из точки D по пути DCH сначала перейти в точку C, а затем за счет приращений $d\sigma_{ij}$ провести активное нагружение до точки H, то на участке CH возникнут приращения $d\varepsilon_{ij}^{(e)} \neq 0$ и $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$ компонент тензоров упругой и пластической деформации. Новое положение участка поверхности нагружения, на которой лежит точка H, отмечено на рис. 11.5 штриховой линией. После разгрузки по некоторому пути из точки H в точку D приходящаяся на единицу объема материала необратимая работа пластического деформирования составит [82] $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ}) d\varepsilon_{ij}^{(p)} + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} > 0$, поскольку при замкнутом цикле нагружения, равна нулю. Отсюда при $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ}$ следует, что

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} > 0. \tag{11.18}$$

Так как при $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}^{\circ}$ разность $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ}$ может быть больше $d\sigma_{ij}$, то

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ}) d\varepsilon_{ij}^{(p)} > 0.$$
(11.19)

Неравенство (11.18) по аналогии со вторым условием (11.2) можно рассматривать как критерий устойчивости пластического деформирования при произвольном напряженном состоянии [82]. Если в пространстве напряжений вдоль осей $O\sigma_{ij}$ откладывать компоненты $arepsilon_{ij}^{(p)}$ с теми же индексами, то левую часть (11.19) можно интерпретировать как скалярное произведение векторов $\sigma - \sigma^{\circ}$ и $d\varepsilon^{(p)}$ соответственно с проекциями $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ}$ и $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$ на эти оси. Тогда (11.19) будет означать, что угол между этими векторами острый. Отсюда следует, что поверхность нагружения выпукла, а вектор $d\varepsilon^{(p)}$ направлен по внешней нормали к этой поверхности (рис. 11.6, а). Действительно, так как положение точки D с координатами σ_{ii}° может быть выбрано произвольно относительно вектора σ (например, она может занимать положение D'), то при отклонении вектора $d\varepsilon^{(p)}$ от направления нормали (штриховая линия со стрелкой на рис. 11.6, а) условие (11.19) может быть нарушено. При невыпуклой поверхности нагружения (рис. 11.6, б) независимо от направления вектора $d\varepsilon^{(p)}$ всегда можно подобрать положение точки D, при котором будет нарушено условие (11.19).





Направляющие косинусы нормали к поверхности нагружения пропорциональны $\partial f/\partial \sigma_{ij}$. Поэтому из коллинеарности этой нормали и вектора $d\varepsilon^{(p)}$ следует равенство

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_*, \qquad (11.20)$$

где лишь при активном нагружении коэффициент пропорциональности $d\lambda_* > 0$, а в остальных случаях $d\lambda_* = 0$. Сопоставляя (11.17) с равенством (11.20), выражающим ассоциированный с поверхностью нагружения закон пластического течения, получим, что $M_{ij} d\lambda^* =$ $= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_*$. Так как функция f в (11.14) определена с точностью до произвольного множителя, то в (11.17) можно принять $M_{ij} = \partial f / \partial \sigma_{ij}$. Если влияние внутренних параметров χ и χ_{ij} на процесс пластического деформирования можно разделить и принять $f(\sigma_{ij}, T, \chi, \chi_{ij}) = f_{\rm T}(\sigma_{ij}, T, \chi_{ij}) - \psi_{\rm T}(T, \chi) = 0$, то вместо (11.17) получим

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \left| -\frac{\frac{\partial f_{\mathbf{T}}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{T}}}{\partial T} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{T}}}{\partial T}\right) dT}{W_{kl} \frac{\partial f_{\mathbf{T}}}{\partial \chi_{kl}} - W \frac{\partial \psi_{\mathbf{T}}}{\partial \chi}} \right| \frac{\partial f_{\mathbf{T}}}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Пусть толстостенная труба внутренним радиусом a и внешним радиусом b изготовлена из изотропного материала и подвержена действию внутреннего давления p. Осессимметричное установившееся распределение T(r) температуры зависит лищь от радиальной координаты $r \in [a, b]$, отсчитываемой от оси трубы, и его можно представить в виде [105]

$$T(r) - T(b) = \Delta T(r) = \vartheta_a \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, \quad \vartheta_a = T(a) - T(b).$$
(11.21)

Положим, что T(b) является температурой естественного состояния материала трубы и при указанных условиях в нем возникает пластическая деформация. Если труба достаточно длинная, то можно считать, что имеет место плоское деформированное состояние, т.е. в направлении осевой координаты z деформация $\varepsilon_{zz} = \text{const. B}$ дальнейшем примем $\varepsilon_{zz} = 0$.

Как при упругом, так и при пластическом деформировании материала трубы для ее любого поперечного сечения справедливо уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \qquad (11.22)$$

где σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ — радиальное и окружное напряжения. Ясно, что (11.22) является частным случаем первого уравнения (5.42). При этом соответствующие компоненты тензора полной деформации равны

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r},$$
(11.23)

где u_r — радиальное перемещение.

Пусть свойства материала трубы соответствуют свойствам идеальной упругопластической сплошной среды, подчиняющейся условию текучести (11.4), а также $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Тогда (11.4) примет вид

$$f(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}) = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_{\mathrm{T}},\tag{11.24}$$

где $\sigma_{\rm T}$ — предел текучести. Положим, что $\sigma_{\rm T}$, а также модуль продольной упругости E, коэффициент Пуассона ν и температурный

коэффициент линейного расширения $\alpha^{(T)}$ материала трубы не зависят от температуры.

Так как изменение объема происходит только вследствие упругой и температурной деформаций, то с учетом (11.23) имеем

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}}{3\varkappa} + 3\alpha^{(T)}\Delta T(r).$$
(11.25)

Согласно (11.20) и (11.24) $d\varepsilon_{zz}^{(p)} = \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \sigma_{zz}} d\lambda_* = 0$. Поэтому в силу обобщенного закона Гука справедливо равенство

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})}{E} + \alpha^{(T)} \Delta T(r) = 0.$$
(11.26)

Выражая отсюда σ_{zz} , подставляя его в (11.25) и учитывая (11.22), после интегрирования получаем

$$u_r = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} r \sigma_{rr} + \frac{2(1+\nu)\alpha^{(T)}}{r} \int \Delta T(r) r \, dr + \frac{C_0}{r}.$$
 (11.27)

Соотношение (11.27) справедливо как в области упругой деформации, так и в области пластической деформации.

Если из равенств

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})}{E} + \alpha^{(T)} \Delta T(r),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})}{E} + \alpha^{(T)} \Delta T(r)$$
(11.28)

для обобщенного закона Гука исключить u_r и использовать выражения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ из (11.22) и для σ_{zz} из (11.26), то получим

$$\frac{d^2\sigma_{rr}}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{E\alpha^{(T)}}{r(1-\nu)}\frac{d\Delta T}{dr} = 0$$

и после интегрирования, учитывая (11.21), найдем

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \sigma^{\circ} \ln \frac{b}{r}, \quad \sigma^{\circ} = \frac{E\alpha^{(T)}\vartheta_a}{2(1-\nu)\ln(b/a)}.$$
 (11.29)

Из (11.22) и (11.24) получим условие $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r=r_0} = \sigma_{\rm T}$, которому должна удовлетворять граница $r = r_0$ области упругой деформации, что позволяет в (11.29) записать $2C_1/r_0^2 = \sigma^\circ - \sigma_{\rm T}$. Таким образом, согласно (11.29) $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = (\sigma_{\rm T} - \sigma^\circ) \frac{r_0^2}{r^2} + \sigma^\circ$. Отсюда следует, что при $\sigma_{\rm T} = \sigma^\circ$
условие текучести будет выполнено во всем поперечном сечении трубы, что соответствует неустойчивому пластическому течению материала трубы. Если $\sigma_{\rm T} > \sigma^{\circ}$, то область упругой деформации занимает внешнюю часть поперечного сечения трубы при $r \ge r_0$, поскольку при углублении в эту область величина $r d\sigma_{rr}/dr$ должна убывать. Отметим, что это неравенство заведомо справедливо, когда $\vartheta_a < 0$, т.е. температура T(a) внутренней поверхности трубы ниже температуры T(b) наружной поверхности.

При $\sigma_{\rm T} > \sigma^{\circ}$, согласно граничному условию $\sigma_{rr}(b) = 0$, из (11.29) найдем $C_2 = -\frac{C_1}{b^2} = \frac{(\sigma^{\circ} - \sigma_{\rm T})r_0^2}{2b^2}$ и в итоге при $r \in [r_0, b]$ получим $\sigma_{rr} =$ $= \frac{\sigma^{\circ} - \sigma_{\rm T}}{2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r_0^2}{b^2}\right) - \sigma^{\circ} \ln \frac{b}{r}$, далее из (11.22) следует $\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ}}{2} \times$ $\times \left(\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^2}{b^2}\right) + \sigma^{\circ} \left(1 - \ln \frac{b}{r}\right)$, а затем из (11.26) $- \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ}) \frac{r_0^2}{b^2} +$ $+ \sigma^{\circ} \left(\nu - 2\ln \frac{b}{r}\right)$. Приравнивая при r = b значения u_r из (11.27) и из второго уравнения (11.28), находим $C_0 = \frac{(1 - \nu^2)(\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ})r_0^2}{E}$.

Для области пластической деформации из условия $r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \sigma_{T}$ при $r \in [a, r_{0}]$ путем интегрирования (с учетом непрерывности σ_{rr} при $r = r_{0}$) имеем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\rm T} \ln \frac{r}{r_0} - \sigma^{\circ} \ln \frac{b}{r_0} - \frac{\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ}}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2} \right). \tag{11.30}$$

Из граничного условия $\sigma_{rr}(a) = -p$ с учетом (11.30) получим уравнение $\sigma_{\rm T} \ln \frac{a}{r_0} + p = \sigma^{\circ} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ}}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)$ относительно r_0 . Если в трубе сначала возникло установившееся распределение температуры, которое не вызвало пластических деформаций, а затем стало возрастать давление, то из последнего уравнения при $r_0 = a$ следует, что пластическая деформация возникнет при значении давления $p_* = \sigma^{\circ} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{\sigma_{\rm T} - \sigma^{\circ}}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)$. Случай $p_* < 0$ означает, что пластические деформации возникают еще до повышения давления.

Используя (11.30), в области пластической деформации можно сначала найти $\sigma_{\varphi\varphi}$ из (11.24), а затем σ_{zz} — из (11.26).

11.4. Деформационная теория термопластичности

Среди задач механики деформируемого твердого тела, связанных с анализом напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из упругопластичного материала, встречаются такие, когда в процессе нагружения изменение всех компонент девиатора напряжений в окрестности каждой точки материала происходит в одном и том же отношении. Такое нагружение называют пропорциональным. В этом случае вместо исследования непрерывного процесса изменения напряжений и деформаций можно использовать связывающие их конечные соотношения, учитывающие и температурное состояние материала. Эти соотношения вытекают из деформационной теории термопластичности [136] и для изотропного материала могут быть получены из ассоциированного закона пластического течения (11.20).

Для случая одноосного активного нагружения при постоянной абсолютной температуре T диаграммы деформирования (см. рис. 11.1) дают однозначную зависимость между напряжением σ и деформацией ε . По аналогии с законом Гука можно записать $\varepsilon = \sigma/E_{\rm c}(\varepsilon,T)$, где $E_{\rm c}$ — секущий модуль. В отличие от модуля продольной упругости E(T), зависящего для данного материала только от температуры, секущий модуль зависит и от деформации. Так как упругая деформация $\varepsilon^{(e)} = \sigma/E(T)$, то для пластической деформации получим

$$\varepsilon^{(p)} = \varepsilon - \varepsilon^{(e)} = \sigma \left(\frac{1}{E_{\rm c}} - \frac{1}{E} \right). \tag{11.31}$$

При произвольном напряженном состоянии, характеризуемом компонентами σ_{ij} (i, j = 1, 2, 3) тензора напряжений, основные положения деформационной теории термопластичности, базирующиеся на большом числе экспериментов, формулируют следующим образом [136]:

– компоненты тензора полной деформации представляют собой сумму компонент тензоров упругой $\varepsilon_{ij}^{(e)}$, пластической $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ и температурной $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ деформации, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \qquad (11.32)$$

причем обратимы только упругая и температурная деформации;

- изменение объема происходит только вследствие изменения упругой и температурной деформаций, поэтому объемная деформация $\varepsilon_V = \varepsilon_{kk}^{(e)} + \varepsilon_{kk}^{(T)}$, $k = 1, 2, 3, \sigma_{kk} = 3\varkappa(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{(T)})$, где \varkappa — модуль объемной упругости, и, следовательно, $\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0$, а компоненты тензора пластической деформации совпадают с компонентами ее девиатора, т.е. $\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij}^{(p)}$;

- компоненты e_{ij} девиатора деформации пропорциональны компонентам s_{ij} девиатора напряжений,

$$e_{ij} = \frac{\psi_p s_{ij}}{2\mu},\tag{11.33}$$

где $\psi_p \ge 1$ — параметр пластичности ($\psi_p = 1$ в области упругой деформации); μ — модуль сдвига.

Введя интенсивность деформации $\varepsilon_{\mu} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}$, вместо (11.33) получим $\psi_p = \frac{3\mu\varepsilon_{\mu}}{\sigma_{\mu}}$, где $\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij}$ — интенсивность напряжений. Для материала, обладающего свойством изотропии, компоненты девиатора температурной деформации равны нулю. Поэтому с учетом (11.33) $\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij} - e_{ij}^{(e)} = \frac{(\psi_p - 1)s_{ij}}{2\mu}$, а интенсивность пластической деформации $\varepsilon_{\mu}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{ij}^{(p)} \varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{(\psi_p - 1)\sigma_{\mu}}{3\mu}$, следовательно, $\varepsilon_{\mu} = \frac{\psi_p \sigma_{\mu}}{3\mu} = \varepsilon_{\mu}^{(p)} + \frac{\sigma_{\mu}}{3\mu} = \varepsilon_{\mu}^{(p)} + \frac{2(1+\nu)\sigma_{\mu}}{3E}$, где ν — коэффициент Пуассона. При одноосном растяжении $\sigma_{\mu} = \sigma$, $\varepsilon_{\mu}^{(p)} = \varepsilon^{(p)}$ и, следовательно, $\varepsilon_{\mu} = \varepsilon^{(p)} + \frac{2(1+\nu)\sigma}{3E}$, или с учетом (11.31)

$$\varepsilon_{\mathbf{H}} = \varepsilon - \frac{(1-2\nu)\sigma}{3E} = \varepsilon - \frac{(1-2\nu)\sigma_{\mathbf{H}}}{3E}.$$
 (11.34)

Таким образом, при фиксированном значении T зависимость $\sigma_{u} = \sigma_{u}(\varepsilon_{u}, T)$, определяющая обобщенную диаграмму деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$ при одноосном растяжении, причем эта зависимость одинакова для любого напряженного состояния.

Из (11.34) следует, что параметр пластичности $\psi_p = \frac{3\mu\varepsilon_n}{\sigma_n} = \frac{3\mu\varepsilon}{\sigma} - \frac{\mu(1-2\nu)}{E} = 1 + \frac{3}{2(1+\nu)} \left(\frac{E}{E_c} - 1\right)$. С учетом этого равенства и (11.33) получим $e_{ij} = \frac{3s_{ij}}{2E_c} \left(1 - (1-2\nu)\frac{E_c}{3E}\right)$ и

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = e_{ij} - \frac{s_{ij}}{2\mu} = \frac{3s_{ij}}{2} \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E}\right).$$
(11.35)

При использовании деформационной теории термопластичности не очевидно, что условия пропорционального нагружения всегда выполняются. В частности, пропорциональное изменение внешних силовых факторов не обязательно приводит к пропорциональному нагружению. При фиксированном значении T такое нагружение возможно при выполнении следующих достаточных условий (*теорема Ильюшина* [110]): зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений степенная; материал несжимаем.

Как правило, при решении конкретных задач эти условия не выполняются [82], однако накопленный к настоящему времени опыт анализа напряженно-деформированного состояния различных конструкций, особенно при однократном нагружении, показывает, что получаемые с использованием деформационной теории результаты дают приемлемое приближение к реальности. Необходимо отметить, что не все из приведенных на рис. 11.1 диаграмм деформирования можно использовать для решения задач с применением этой теории, поскольку зависимость σ от ε должна быть взаимно однозначной, а *модуль Юнга Е* должен иметь конечное значение. Поэтому диаграммы деформирования, представленные на рис. 11.1, *a*, *д* и *e*, в общем случае не позволяют применить эту теорию.

Рассмотренному варианту деформационной теории термопластичности соответствует вариационная форма математической модели (MM), содержащая минимизируемый функционал (5.50), в котором [36,44]

$$\Phi[u_i] = \int\limits_V \left(\frac{\varkappa(\varepsilon_{kk} - 3\varepsilon^{(T)})^2}{2} + \int\limits_0^{\varepsilon_n} \sigma_n(\varepsilon'_n) d\varepsilon'_n \right) dV,$$

где u_i — проекции вектора перемещений на оси Ox_i ; $\varepsilon^{(T)}$ — температурная деформация; V — пространственная область, занятая телом. В двойственную вариационную форму ММ помимо (5.50) войдет максимизируемый функционал (5.55), в котором

$$\Phi_1[\sigma_{ij}] = -\int\limits_V \left(\frac{(\sigma_{kk})^2}{18\varkappa} + \sigma_{kk} \varepsilon^{(T)} + \int\limits_0^{\sigma_{\mu}} \varepsilon_{\mu}(\sigma'_{\mu}) d\sigma'_{\mu} \right) dV,$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{u}}(\sigma_{\mathfrak{u}})$ — функция, обратная функции $\sigma_{\mathfrak{u}}(\varepsilon_{\mathfrak{u}})$.

Наиболее характерным примером материалов, проявляющих при неизотермическом пластическом деформировании свойство *анизотроnuu*, являются *композиты*, нашедшие широкое применение в различных термонапряженных конструкциях. Особенности технологии изготовления композитов обусловливают высокую степень анизотропии их механических свойств, причем в большинстве случаев можно говорить об ортотропии. Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями у этих материалов особенно сильно проявляется при повышенных температурах.

Для сложного напряженного состояния соотношения деформационной теории термопластичности анизотропных (ортотропных) материалов можно сформулировать в виде следующих положений, аналогичных тем, что были приняты для изотропных материалов:

- компоненты тензора полной деформации представляют собой сумму компонент упругой, пластической и температурной деформации, т. е. справедливо (11.32), причем, как и ранее, обратимы только упругая и температурная деформации; – между аналогами среднего напряжения $\sigma_a = \sigma_{ij} \alpha_{ij}$ и объемной деформации $\varepsilon_a = \beta_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)})$ существует зависимость

$$\sigma_a = 3\varphi_a \varkappa_a \varepsilon_a, \tag{11.36}$$

где $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}/(3\varkappa_a)$; C_{ijkl} — компоненты тензора четвертого ранга коэффициентов упругости (при этом компоненты α_{ij} симметричного тензора второго ранга нормированы соотношением $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$ и могут изменяться в процессе деформирования); $\varkappa_a = C_{ijkl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}/3$ — аналог модуля объемной упругости; переменный коэффициент φ_a учитывает «псевдообъемную» сжимаемость материала вследствие имеющихся технологических дефектов: пор и пустот, неидеальности контакта волокон и связующего композита и т.п.;

– между компонентами $s_{ij}^{(a)} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ и $e_{ij}^{(a)} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^*$ аналогов девиаторов напряжений и деформации соответственно существует зависимость

$$s_{ij}^{(a)} = \frac{\sigma_{\mathbf{\mu}}^{(a)} C_{ijkl} e_{kl}^{(a)}}{3\varkappa_a \varepsilon_{\mathbf{\mu}}^{(a)}},\tag{11.37}$$

где $\sigma_{ij}^* = \beta_{ij}\sigma_a$ и $\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij}\varepsilon_a$ — компоненты аналогов *шаровых тензоров* напряжений и деформации соответственно, связь между которыми имеет вид

$$\sigma_{ij}^* = \varphi_a C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*; \tag{11.38}$$

 $\sigma_{\mu}^{(a)} = \sqrt{3\varkappa_a S_{ijkl} s_{kl}^{(a)} s_{ij}^{(a)}}$ и $\varepsilon_{\mu}^{(a)} = \sqrt{C_{ijkl} e_{kl}^{(a)} e_{ij}^{(a)} / (3\varkappa_a)}$ — обобщенные интенсивности соответственно напряжений и деформации; S_{ijkl} — компоненты *тензора коэффициентов податливости*;

– при заданной температуре T зависимость $\sigma_{u}^{(a)} = \sigma_{u}^{(a)}(\varepsilon_{u}^{(a)}, T)$ инвариантна к виду напряженно-деформированного состояния.

Из (11.36)-(11.38) следует

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^* \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \qquad (11.39)$$

где $S_{ijkl}^* = \frac{S_{ijkl}}{\psi_a} + \left(\frac{1}{\varphi_a} - \frac{1}{\psi_a}\right) \frac{\alpha_{ij}\alpha_{kl}}{3\varkappa_a}$ — компоненты переменного **тен**зора коэффициентов секущей податливости; $\psi_a = \frac{\sigma_{n}^{(a)}}{3\varkappa_a \varepsilon_{n}^{(a)}}$ — аналог параметра пластичности. Несложно проверить, что для изотропного материала зависимости (11.36)–(11.39) переходят в (11.33). Действительно, в этом случае $\varphi_a = 1$, $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \delta_{ij}/\sqrt{3}$, $\sigma_a = \sigma_{kk}/\sqrt{3}$, $\varkappa_a = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \frac{\alpha_{kl}\alpha_{ij}}{3} = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ и $e_{ij} = \frac{3\varepsilon_n}{2\sigma_n} s_{ij} = \frac{\psi_p s_{ij}}{2\mu}$.

11.5. Основные модели ползучести

Явление ползучести, в общем случае связанное с изменением во времени t деформации и напряжения даже при постоянных внешней нагрузке и абсолютной температуре Т, при одноосном напряженном состоянии часто называют простой ползучестью (или последействием), если при постоянном напряжении о изменяется деформация ε , и **релаксацией**, если при $\varepsilon = \text{const}$ изменяется напряжение σ [82]. Экспериментальное исследование ползучести обычно проводят на растягиваемых образцах при $\sigma, T = \text{const}$, а результаты представляют в виде зависимости ε от t (сплошная кривая на рис. 11.7), называемой кривой ползучести (иногда — кривой простого последействия). В общем случае на этой кривой можно выделить три характерных участка: I — стадия неустановившейся ползучести, когда скорость $\xi^{(c)} = \frac{d\varepsilon^{(c)}}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ деформации ползучести $\varepsilon^{(c)}$ постепенно уменьшается; II — стадия установившейся ползучести при практически постоянном наименьшем значении $\xi^{(c)}$ и III — стадия ускоряющейся **ползучести**, когда $\xi^{(c)}$ непрерывно возрастает вплоть до разрушения образца. Напряжение, вызывающее разрушение образца за определенный промежуток времени при T = const. называют пределом длительной прочности материала.



Рис. 11.7

При возрастании σ и/или T ординаты кривой ползучести увеличиваются (штриховая кривая на рис. 11.7), а продолжительность стадии установившейся ползучести сокращается. Для некоторых материалов при определенных условиях неустановившаяся ползучесть может непосредственно переходить в ускоряющуюся. Стадия установившейся ползучести вырождается на этой кривой в точку перегиба (штрихпунктирная линия на рис. 11.7). В случае существенной зависимости поведения материала при ползучести от изменения температуры говорят о *термоползучести*.

Известно достаточно много различных подходов к построению математических моделей (ММ) простой ползучести [82, 87, 120, 121]. В одном из подходов, характеризующих теорию старения, постулируют существование функции $\sigma = f_1(\varepsilon, t, T)$, которой при T = const в трехмерном пространстве (σ , ε и t) соответствует поверхность. Сечения этой поверхности плоскостями $\sigma = \mathrm{const}$ являются кривыми ползучести, плоскостями $\varepsilon = \text{const} - \mathbf{k}$ ривыми релаксации, а плоскостями t = const — изохронными кривыми, аналогичными диаграммам деформирования, но с учетом накопленной к фиксированному моменту времени деформации ползучести. Изохронные кривые можно использовать для построения вариационной формы ММ ползучести подобно тому, как используются диаграммы деформирования в такой форме ММ, основанной на деформационной теории термопластичности (см. 11.4). Если кривые ползучести подобны, то $\sigma = E_T(\varepsilon, T)\Theta_1(t)$. В этом случае при $\varepsilon, T = \text{const}$ функция $\Theta_1(t)$ описывает релаксацию. Для многих конструкционных материалов можно принять $\Theta_1(t) = (1 + a_1 t^{b_1})^{-1}$, $a_1, b_1 = \text{const} [82].$

Так как все изохронные кривые выходят из начала системы координат $O\varepsilon\sigma$, то, согласно теории старения, после накопления некоторой деформации ползучести $\varepsilon^{(c)}$ при разгрузке до $\sigma = 0$ эта деформация должна полностью исчезнуть, что часто противоречит экспериментальным результатам. От такого противоречия свободна MM, базирующаяся на *теории течения* и постулирующая существование зависимости $\sigma = f_2(\xi^{(c)}, t, T)$. Эту зависимость часто удается представить в виде

$$\xi^{(c)} = \frac{d\varepsilon^{(c)}}{dt} = S_T(\sigma, T) \Theta_2(t),$$

что при постоянных σ и T после интегрирования по t позволяет получить соотношение

$$\varepsilon^{(c)} = S_T(\sigma, T) \int_0^t \Theta_2(t') dt',$$

соответствующее кривой ползучести при фиксированных значениях σ и T, ординаты которой на рис. 11.7 отсчитываются от уровня $\varepsilon(0)$ деформации в начальный момент нагружения. Если $\Theta_2(t) = \text{const}$, то эта MM описывает лишь стадию установившейся позучести.

При резком изменении σ более близкие к реальным результаты (по сравнению с рассмотренными MM) дает MM, основанная на **meoрии упрочнения**, постулирующей существование зависимости $\xi^{(c)} = f_3(\sigma, \varepsilon^{(c)}, T)$. При изменении знака σ вместо $\varepsilon^{(c)}$ в качесте аргумента следует использовать параметр

$$q_c = \int_0^t |\xi^{(c)}| \, dt',$$

аналогичный параметру Удквиста в ММ термопластичности и позволяющий учесть изотропное упрочнение материала на стадии неустановившейся ползучести. Более точное и полное описание процесса ползучести можно получить, если увеличить количество параметров, используемых в ММ [120]. В частности, введением параметра, имеющего смысл среднего значения микронапряжений, удается учесть влияние анизотропного упрочнения материала [82,87], а путем использования параметра повреждаемости материала можно описать стадию ускоряющейся ползучести [87, 120]. Учет предыстории процесса ползучести может быть также проведен в рамках так называемой наследственной теории ползучести [120].

Если за время порядка десятка или сотни секунд достигается значение $\varepsilon^{(c)}$, сопоставимое с деформацией в начальный момент нагружения, то говорят о кратковременной ползучести [120, 121]. В этом случае для ряда конструкционных материалов при достаточно высоких значениях σ и T практически отсутствует стадия неустановившейся ползучести, а стадия установившейся ползучести может быть описана в рамках теории течения, если принять $\Theta_2(t) = 1$, т.е. $\xi^{(c)} = S_T(\sigma, T)$. Если в координатах T, σ построить кривую ACEB зависимости от T предела прочности материала (предела временного сопротивления) $\sigma_{\rm BD}$, выше которого материал разрушается в начальный момент нагружения, то в области ползучести ВЕСД можно условно выделить подобласть BEF кратковременной ползучести (рис. 11.8). Левее линии CD расположена область, в которой ползучесть несущественна. Штриховые линии определяют зависимости от Т предела длительной прочности материала при фиксированных значениях времени t_{p} до его разрушения.



Рис. 11.8

Обобщение рассмотренных ММ ползучести при одноосном напряженном состоянии на случай сложного напряженного состояния можно провести на основе следующих допущений [87].

1. В условиях ползучести материал несжимаем, т. е. $\varepsilon_{ij}^{(c)}$ и $\xi_{ij}^{(c)}$ (i, j = 1, 2, 3) являются компонентами девиаторов деформации и скоростей деформации ползучести соответственно. Это позволяет не учитывать влияние первого инварианта тензора напряжений.

2. Существенно влияние лишь квадратичного инварианта тензора напряжений, который можно представить в виде интенсивности напряжений σ_{μ} .

3. Компоненты $\varepsilon_{ij}^{(c)}$ (в случае теории старения) и $\xi_{ij}^{(c)}$ (в остальных случаях) пропорциональны компонентам s_{ij} девиатора напряжений.

Эти допущения позволяют для теорий старения, течения и упрочнения соответственно записать

$$\varepsilon_{ij}^{(c)} = g_{\mathbf{c}}(\sigma_{\mathbf{u}}, t, T)s_{ij}, \quad \xi_{ij}^{(c)} = g_{\mathbf{T}}(\sigma_{\mathbf{u}}, t, T)s_{ij}, \quad \xi_{ij}^{(c)} = g_{\mathbf{y}}(\sigma_{\mathbf{u}}, q_{c}, T)s_{ij},$$

где

$$q_{c} = \int_{0}^{t} \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij}^{(c)} \xi_{ij}^{(c)}} \, dt'.$$

Если для теории старения функцию f_1 представить в виде $\varepsilon^{(c)} = \varepsilon - \varepsilon(0) = \Phi_1(\sigma, t, T)$, то $g_c = \frac{3\Phi_1(\sigma_{\mu}, t, T)}{2\sigma_{\mu}}$. Для теории течения $g_T = \frac{3S_T(\sigma_{\mu}, T)\Theta_2(t)}{2\sigma_{\mu}}$, а для теории упрочнения $g_y = \frac{3}{2}f_3(\sigma_{\mu}, q_c, T)$.

11.6. Структурные модели неупругого деформирования

Рассмотренные в 11.1-11.5 математические модели (MM) неупругого поведения твердого тела не учитывают в явной форме его микроструктуру и микромеханизм процесса деформирования. Использование современных физических представлений о структуре конструкционных материалов и микромеханизме их неупругого неизотермического деформирования позволяет построить соответствующие модели термопластичности и термоползучести, получившие название структурных [36, 87]. Они состоят из механически связанных между собой структурных элементов, наделенных определенными свойствами. Путем подбора параметров этих элементов можно добиться удовлетворительного по точности описания такими моделями поведения реальных конструкционных материалов при произвольных режимах нагружения.

Поскольку анализ пропорционального нагружения при сложном напряженном состоянии эквивалентен рассмотрению одноосного нагружения и, кроме того, во многих прикладных задачах конструкцию удается свести к расчетной схеме, соответствующей одноосному напряженному состоянию (см. 6), целесообразно сначала остановиться на варианте структурной ММ одноосного нагружения. Такая ММ способна описать большинство существенных особенностей в поведении реального поликристаллического материала, проявляющихся при неизотермическом деформировании. В этом варианте материал представляется совокупностью из *n* нагруженных в одном направлении совместно деформируемых структурных элементов, обладающих индивидуальными характеристиками термопластичности и термоползучести. Поведение каждого структурного элемента качественно соответствует поведению отдельно взятой системы скольжения в кристаллическом зерне и может быть описано механическим аналогом, представленным на рис. 1.27. Различие в характеристиках структурных элементов отражает прежде всего различную ориентацию систем скольжения в зернах и зерен в поликристаллическом материале и позволяет путем согласования с экспериментальными данными интегрально учесть влияние ряда дополнительных факторов, которые не учитывают рассмотренные в 11.1-11.5 MM.

Примем, что диаграммы деформирования структурных элементов с номерами $j = \overline{1, n}$ в координатах деформация ε_j — напряжение σ_j имеют линейно-упругий участок с зависящим от абсолютной температуры T модулем продольной упругости E и участок линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения E', причем зависимости E и E' одинаковы для всех элементов. Диаграммы деформирования элементов различаются лишь пределами текучести $\sigma_T^{(j)}$, одинаковым образом зависящими от T, т.е. $\sigma_T^{(j)}(T)/\sigma_T^{(j)}(T_*) = f(T/T_*)$, где T_* — температура, для которой по экспериментальной диаграмме деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, T_*)$ моделируемого материала путем ее двойного дифференцирования находят спектр

$$S_*(\sigma_{\mathrm{T}}) = \left(\frac{\partial^2 \sigma(\varepsilon, T_*)}{\partial \varepsilon^2}\right) \left(E(T_*) \left(E(T_*) - E'(T_*) \right) \right)$$

распределения $\sigma_{\rm T}(T_*)$ по структурным элементам. От непрерывного спектра переходят к ступенчатому распределению $\delta_j = S(\sigma_{\rm T}^{(j)}) \Delta \sigma_{\rm T}^{(j)}$. Если сумму всех *n* значений δ_j принять равной единице, то при произвольном режиме одноосного нагружения напряжением σ для элемента с номером *j* имеем $\sigma_j = \sigma \delta_j$ при выполнении условия совместности

деформаций $\varepsilon = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_j = \ldots = \varepsilon_n$. При этом предел текучести моделируемого материала $\sigma_{\mathrm{T}}(T) = \sigma_{\mathrm{T}}^{(j)}(T)\delta_j$.

При неупругом деформировании в структурном элементе возникают напряжения σ'_j , которые моделируют микронапряжения в плоскости скольжения кристаллического материала и позволяют описать эффект Баушингера, связанный с анизотропным упрочнением. Эти напряжения при текущем значении T удовлетворяют условию $|\sigma_j - \sigma'_j| = \sigma_{\rm T}^{(j)}(T)$. Для записи скоростей $\dot{\varepsilon}_j^{(c)} = \partial \varepsilon_j^{(c)} / \partial t$ деформации ползучести элементов использованы соотношения

$$\dot{\varepsilon}_{j}^{(c)} = \alpha(T) \operatorname{sh} \frac{\beta(T)(\sigma_{j} - \sigma_{j}')}{\sigma_{\mathrm{T}}^{(j)}(T)},$$

$$\dot{\varepsilon}_{j}' = \frac{\dot{\sigma}_{j}'}{E'(T)} = \dot{\varepsilon}_{j}^{(c)} - \alpha'(T) \operatorname{sh} \frac{\beta'(T)\sigma_{j}'}{\sigma_{\mathrm{T}}^{(j)}(T)},$$

$$(11.40)$$

аналогичные (1.28). В общем случае зависящие от T коэффициенты α , α' и β , β' могут попарно отличаться друг от друга. По физическому смыслу α и α' связаны с энергиями активации процессов преодоления дислокациями препятствий своему движению и процессов расщепления дислокаций или их переползания в параллельные плоскости скольжения (см. 1.8). В первом приближении можно считать эти энергии одинаковыми и положить $\alpha(T) = \alpha'(T)$. Коэффициенты $\beta(T)$ и $\beta(T)'$, связанные с соответствующими активационными объемами, также можно принять одинаковыми.

Согласно этим допущениям из (11.40) следует, что при $\sigma'_j = \sigma_j/2 =$ = const во всех структурных элементах скорость ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{j}^{(c)} = \alpha(T) \operatorname{sh}\left(\beta(T) \frac{\sigma_{j}}{2\sigma_{\mathrm{T}}^{(j)}(T)}\right)$$
(11.41)

одинакова и совпадает со скоростью $\dot{\varepsilon}^{(c)}$ деформации ползучести моделируемого материала, что в случае $\sigma, T = \text{const}$ соответствует установившейся ползучести. Но на стадии неустановившейся ползучести скорости $\dot{\varepsilon}_{j}^{(c)}$ различны и между элементами происходит перераспределение отношений $\sigma_j/(2\sigma_{\rm T}^{(j)}(T))$ и $\sigma'_j/(2\sigma_{\rm T}^{(j)}(T))$ до тех пор, пока практически не будет выполнено условие $\sigma'_j = \sigma_j/2 = \text{const.}$ Таким образом, структурная ММ описывает непрерывный переход неустановившейся ползучести в установившуюся.

Если из экспериментов на стадии установившейся ползучести моделируемого материала известны два значения $\dot{\varepsilon}_{\rm I}^{(c)}$ и $\dot{\varepsilon}_{\rm II}^{(c)}$ при $T={\rm const}$ и

двух значениях σ_{I} и σ_{II} , то (11.41) можно представить в виде

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{(c)}}{\mathrm{sh}\Big(\beta(T)\frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{2\sigma_{\tau}(T)}\Big)} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{II}}^{(c)}}{\mathrm{sh}\Big(\beta(T)\frac{\sigma_{\mathrm{II}}}{2\sigma_{\tau}(T)}\Big)}.$$

Отсюда можно найти $\beta(T)$, а затем при помощи (11.41) вычислить $\alpha(T) = \dot{\varepsilon}_{I}^{(c)} \operatorname{sh} \left(\beta(T) \frac{\sigma_{I}}{2\sigma_{T}(T)} \right)^{-1}$.

Помимо достаточно точной интерполяции экспериментальных диаграмм деформирования по T и кривых ползучести по σ и T структурная MM в хорошем согласии с результатами экспериментов описывает неупругое деформирование материала при переменных во времени σ и T, а также отражает взаимное влияние пластической деформации и деформации ползучести. При скачкообразном изменении σ на $\Delta \sigma$ (ступенчатое нагружение) наиболее близкое к реальности описание поведения материала дает теория упрочнения. Однако во многих экспериментах [120,121] установлено, что в отличие от экспериментальных данных из этой теории при $\Delta \sigma > 0$ следуют заниженные значения $\varepsilon^{(c)}$, а при $\Delta \sigma < 0$ — завышенные. Структурная модель в этих случаях, а также при знакопеременных напряжениях дает лучшее согласие с экспериментальными данными.

Накопленная в процессе деформирования материала неупругая деформация может привести к заметному изотропному упрочнению, а в случае материалов, находящихся в нестабильном состоянии после наклепа или закалки, — к изотропному разупрочнению, связанному с уменьшением $\sigma_{\rm T}$. Структурная модель будет описывать эти эффекты, если учесть влияние накопленной неупругой деформации на значения $\sigma_{\rm T}^{(j)}$. Наделив структурные элементы свойствами, учитывающими накопление повреждений в материале, можно описать процесс его разрушения при различных режимах нагружения, в том числе при знакопеременном неизотермическом нагружении и на стадии ускоряющейся ползучести. Количественно накопление повреждений в элементе с номером *j* связано с уменьшением δ_j вплоть до нулевого значения, когда этот элемент выходит из строя, что вызывает перераспределение нагрузки между оставшимися элементами до тех пор, пока все они последовательно не потеряют работоспособность.

Ясно, что расширение возможностей структурной модели связано с ее усложнением, что порождает трудности при ее практическом использовании. Кроме того, подбор параметров усложненной ММ по данным испытаний образцов превращается в самостоятельную и довольно непростую задачу, которая может и не иметь удовлетворительного рещения. Обычно для решения прикладных задач при одноосном 11. МОДЕЛИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СРЕДЫ

напряженном состоянии с приемлемой точностью можно использовать упрощенный вариант структурной MM, также основанный на механическом аналоге системы скольжения (см. рис. 1.27), что позволяет описывать свойства материала в целом.

При сравнительно низких температурах, когда термически активируемые процессы протекают довольно медленно (вязкость жидкости в элементах 2 и 3 вязкого трения в механическом аналоге на рис. 11.9 весьма велика), приращение пластической деформации возникает при выполнении необходимого условия

$$|\sigma - \sigma'| = \sigma_{\mathrm{T}}.\tag{11.42}$$

Здесь σ' и $\sigma_{\rm T}$ — среднее значение микронапряжений в материале и предел текучести, соответствующие в аналоге натяжению пружины 1 и силе сопротивления в элементе 4 сухого трения. Достаточное условие имеет вид [36]

$$d'|\sigma - \sigma'| = d'((\sigma - \sigma')\operatorname{sgn}(\sigma - \sigma')) > d'\sigma_{\mathrm{T}}, \quad (11.43)$$

где штрих у знака дифференциала означает, что приращения вычисляются без учета упрочнения, вызванного текущим пластическим деформированием, а sgn $x - \phi$ ункция знака числа x.



Рис. 11.9

В общем случае наличия пластической деформации $\varepsilon^{(p)}$ и деформации $\varepsilon^{(c)}$ ползучести примем, что в изотермических условиях $(\dot{T}=0)$

$$\sigma' = f_m(T, \varepsilon^{(p)}, \varepsilon^{(c)}), \quad \sigma_{\mathrm{T}} = f_{\mathrm{T}}(T, q_p, q_c), \quad q_p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{(p)}| dt', \quad q_c = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{(c)}| dt',$$

где f_m и $f_{\rm T}$ — функции, характеризующие соответственно анизотропное и изотропное упрочнение материала; t — время. Тогда вместо (11.43) получим

$$(d\sigma - k_T dT) \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') > k_T^* dT, \quad k_T = \frac{\partial f_m}{\partial T}, \quad k_T^* = \frac{\partial f_T}{\partial T}.$$
 (11.44)

При выполнении условия (11.42) замена в (11.44) знака «>» на знак «=» соответствует нейтральному нагружению, а на знак «<» — началу

упругой разгрузки, причем в обоих этих случаях $d\varepsilon^{(p)} = 0$. При активном нагружении из (11.42) следует ($d\sigma - k_T dT - k_p d\varepsilon^{(p)}$) $\operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') = = k_T^* dT + k_p^* dq_p$, где $k_p = \partial f_m / \partial \varepsilon^{(p)}$ и $k_p^* = \partial f_T / \partial q_p$. Сравнивая последнее равенство с (11.44), получаем $k_p d\varepsilon^{(p)} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') + k_p^* dq_p > 0$. Для устойчиво деформируемых материалов знак $d\varepsilon^{(p)}$ совпадает со знаком разности $\sigma - \sigma'$ и поэтому $d\varepsilon^{(p)} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') = |d\varepsilon^{(p)}| = dq_p$. Тогда из двух последних соотношений следует ограничение $k_p + k_p^* \ge 0$. Для материала, обладающего изотропным разупрочнением ($k_p^* < 0$), устойчивое пластическое деформирование возможно, если $k_p > |k_p^*|$. В предельном случае $k_p = |k_p^*|$, как и для идеальной упругопластической среды с постоянным пределом текучести, установление однозначной связи $d\sigma$ и $d\varepsilon^{(p)}$ возможно лищь при наличии дополнительных условий.

С повышением температуры интенсифицируются термически активируемые процессы и даже при неизменных во времени условиях теплового и механического воздействий возникает приращение неупругой деформации вследствие ползучести материала, т.е. $\dot{\varepsilon}^{(c)} = f_c(T, \sigma - \sigma')$. Это соответствует в механическом аналоге (см. рис. 11.9) конечной вязкости жидкости в нелинейных элементах 2 и 3 вязкого трения, а функции f_c отвечает характеристика элемента 3. Термическое разупрочнение материала вызывает уменьшение σ' по абсолютному значению, поэтому при $\dot{T} \neq 0$ и $\dot{\varepsilon}^{(p)} \neq 0$

$$\dot{\sigma}' = k_T \dot{T} + k_p \dot{\varepsilon}^{(p)} + k_c f_c(T, \sigma - \sigma') - \tilde{f}_c(T, \sigma'), \quad k_c = \frac{\partial f_m}{\partial \varepsilon^{(c)}}, \quad (11.45)$$

где функция \tilde{f}_c определяет скорость снятия анизотропного упрочнения материала за счет релаксации микронапряжений и соответствует характеристике элемента 2 (см. рис. 11.9). Ясно, что $k_p = k_c$ в случае одинакового механизма анизотропного упрочнения материала за счет пластической деформации и деформации ползучести.

Скорость полной деформации $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(T)} + \dot{\varepsilon}^{(e)} + \dot{\varepsilon}^{(p)} + \dot{\varepsilon}^{(c)}$, где $\dot{\varepsilon}^{(T)}$ скорость температурной деформации, а $\dot{\varepsilon}^{(e)} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\sigma}{E^2} \frac{dE}{dT} \dot{T}$ — скорость упругой деформации. Модуль E(T) продольной упругости материала в механическом аналоге (см. рис. 11.9) соответствует жесткости пружины 5, $\dot{\varepsilon}^{(p)}$ — скорости движения элемента 4 сухого трения относительно неподвижных направляющих, а $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{(T)}$ — скорости точки, в которой приложена внешняя нагрузка, пропорциональная напряжению σ .

При высокой температуре процесс термического разупрочнения материала влияет и на значение $\sigma_{\rm T}$. При достаточно длительной выдержке образца в изотермических условиях ($\dot{T} = 0$) и в отсутствие неупругого деформирования ($\dot{\varepsilon}^{(p)} = \dot{\varepsilon}^{(c)} = 0$) значение $\sigma_{\rm T}$ должно стремиться к характерному для данного материала уровню $\sigma_{\rm T}^{\circ}(T) = f_{\rm T}(T,0,0)$, соответствующему пределу текучести после высокотемпературного отжига, при котором происходит рекристаллизация кристаллического материала и он «забывает» историю своего неупругого деформирования. Пусть функция $\tilde{f}(T, \sigma_{\rm T} - \sigma_{\rm T}^{\circ})$ характеризует скорость снятия изотропного упрочнения. Тогда

$$\dot{\sigma}_{\mathrm{T}} = k_T^* \dot{T} + k_p^* \dot{q}_p + k_c^* \dot{q}_c - \tilde{f}(T, \sigma_{\mathrm{T}} - \sigma_{\mathrm{T}}^\circ), \quad k_c^* = \frac{\partial f_{\mathrm{T}}}{\partial q_c}, \quad (11.46)$$

причем (11.46) описывает также эффект запаздывания во времени изменения $\sigma_{\rm T}$ по отношению к изменению *T*. Отметим, что $k_p^* = k_c^*$ при одинаковом механизме изотропного упрочнения материала вследствие накопления пластической деформации и деформации ползучести. Теперь в дополнение к условию (11.42) вместо (11.44), согласно (11.43), (11.45) и (11.46), для возникновения приращения пластической деформации получим достаточное условие в виде

$$\left(\dot{\sigma} - k_T \dot{T} - k_c \dot{\varepsilon}^{(c)} + \widetilde{f}_m(T, \sigma')\right) \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') > k_T^* \dot{T} + k_c^* \dot{q}_c - \widetilde{f}(T, \sigma_{\mathrm{T}} - \sigma_{\mathrm{T}}^\circ)$$

при выполнении ограничения $k_p + k_p^* \ge 0$.

Таким образом, упрощенный вариант структурной ММ описывает основные эффекты, характерные для неупругого поведения материала в неизотермических условиях. Среди этих эффектов следует отметить: изменение предела текучести при изменении направления деформирования (эффект Баушингера); циклическое изотропное упрочнение и разупрочнение материала; стадии неустановившейся и установившейся ползучести при постоянной нагрузке; взаимное влияние пластической деформации и деформации ползучести; изменение скорости деформации ползучести при ступенчатом нагружении одного знака и знакопеременном нагружении; обратную ползучесть в процессе разгрузки и в разгруженном состоянии; релаксацию микронапряжений и возврат пластических свойств материала; влияние рекристаллизации на снятие изотропного упрочнения и запаздывание изменения предела текучести в неизотермических условиях. Для подбора параметров этого варианта модели требуется сравнительно небольшой объем экспериментальных данных, полученных при стандартных испытаниях образцов при одноосном напряженном состоянии [36,87].

При ограниченных значениях $|\dot{\sigma}|$ и $|\dot{\varepsilon}|$ и сравнительно высокой температуре вклад пластической деформации в суммарную неупругую деформацию $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(p)} + \varepsilon^{(c)}$ оказывается небольшим. Диаграмма деформирования, полученияя экспериментально в таких условиях при T = const, не позволяет выделить явно зависимость пластической деформации от действующего напряжения. Такая диаграмма соответствует функции $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$, полученной (в зависимости от условий испытаний) либо при $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ (постоянная скорость движения захватов испытательной машины), либо при $\dot{\sigma} = \text{const}$ (постоянная скорость возрастания нагрузки) [82]. Тогда для описания неупругого деформирования материала можно использовать механический аналог без элемента сухого трения (рис. 11.10). В этом случае $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(T)} + \dot{\varepsilon}^{(e)} + \dot{\varepsilon}^{(n)}$, где $\dot{\varepsilon}^{(n)}$ — скорость вазкопластической деформации, объединяющая скорости пластической деформации и деформации ползучести, причем [36,87]

$$\dot{\varepsilon}^{(n)} = f_n \alpha(T) \operatorname{sh} \beta(T) \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma^*}, \quad \dot{\sigma}' = \bar{k}_T \dot{T} + k_n \Big(\dot{\varepsilon}^{(n)} - \alpha'(T) \operatorname{sh} \beta'(T) \frac{\sigma'}{\sigma^*} \Big),$$
$$\dot{\sigma}^* = \bar{k}_T^* \dot{T} + k_n^* \dot{q}_n - \alpha^*(T) \operatorname{sh} \beta^*(T) \frac{\sigma^* - \sigma_T^\circ}{\sigma^*}, \qquad q_n = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{(n)}| \, dt',$$

где

$$f_n = \left| 1 - \left(\frac{|\sigma - \sigma'|}{\sigma^*} \right)^m \right|^{-1}, \quad \bar{k}_T = \frac{\partial f^\circ}{\partial T}, \quad k_n = \frac{\partial f^\circ}{\partial \varepsilon^{(n)}}, \quad \bar{k}_T^* = \frac{\partial f^*}{\partial T}, \quad k_n^* = \frac{\partial f^*}{\partial q_n},$$

функции $f^{\circ}(T,\varepsilon^{(n)})$ и $f^{*}(T,\varepsilon^{(n)})$ описывают соответственно анизотропное и изотропное упрочнение материала, а функции $\alpha^{*}(T)$ и $\beta^{*}(T)$ определяют скорость изотропного разупрочнения. Функция f_{n} при $m \gg 1$ быстро возрастает при $|\sigma - \sigma'|/\sigma^{*} \to 1$, что ограничивает рост $\dot{\varepsilon}^{(n)}$.



Рис. 11.10

Упрощенный вариант структурной ММ можно обобщить на случай сложного напряженного состояния при нарушении условий пропорционального нагружения. Вместо (11.42) примем *условие пластичности* в виде

$$\frac{3}{2}a_{ij}a_{ij} - \sigma_{\tau}^2(T) = 0, \quad a_{ij} = s_{ij} - \chi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$
(11.47)

где s_{ij} , a_{ij} и χ_{ij} — компоненты девиаторов полных и активных напряжений и микронапряжений соответственно, а $\sigma_{\tau}(T)$ удовлетворяет (11.46), но теперь в (11.46)

$$q_p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_{ij}^{(p)} \dot{e}_{ij}^{(p)} dt', \quad q_c = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_{ij}^{(c)} \dot{e}_{ij}^{(c)} dt',$$

где $e_{ij}^{(p)}$ и $e_{ij}^{(c)}$ — компоненты девиаторов пластической деформации и деформации ползучести. По аналогии с (11.43) необходимое условие (11.47) следует дополнить достаточным условием

$$d'a_{\mu} > d'\sigma_{\tau}(T), \tag{11.48}$$

где $a_{\mu} = \sqrt{\frac{3}{2}a_{ij}a_{ij}}$ — интенсивность активных напряжений. Если выполнено (11.47), но $d'a_{\mu} = d'\sigma_{T}(T)$ либо $d'a_{\mu} < d'\sigma_{T}(T)$, то происходит соответственно нейтральное нагружение либо начинается упругая разгрузка материала.

При одновременном выполнении (11.47) и (11.48) справедлив закон пластического течения [36,87] в виде $de_{ij}^{(p)} = \frac{3a_{ij}}{2a} dq_p$, в противном случае $dq_p = 0$ и неупругое деформирование материала происходит лишь за счет ползучести с компонентами девиатора скоростей деформации $\dot{e}_{ij}^{(c)} = \frac{3a_{ij}}{2a_{\mu}} f_c(T, a_{\mu})$, где в функции f_c вместо аргумента $\sigma - \sigma'$ используется a_{μ} . По аналогии с (11.45) получим

$$\dot{\chi}_{ij} = \frac{2}{3} \left(k_p \dot{e}_{ij}^{(p)} + k_c \dot{e}_{ij}^{(c)} \right) + \left(k_T \dot{T} - \tilde{f}_c(T, \chi_{\mathfrak{u}}) \right) \frac{\chi_{ij}}{\chi_{\mathfrak{u}}}.$$
(11.49)

Здесь $k_p = \frac{\partial f_m}{\partial \varepsilon_{\mu}^{(p)}}, \ k_c = \frac{\partial f_m}{\partial \varepsilon_{\mu}^{(c)}}, \ \varepsilon_{\mu}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij}^{(p)} e_{ij}^{(p)}$ и $\varepsilon_{\mu}^{(c)} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij}^{(c)} e_{ij}^{(c)}$ — интенсивности пластической деформации и деформации ползучести соответственно, заменяющие в функции f_m аргументы $\varepsilon^{(p)}$ и $\varepsilon^{(c)}; \ \chi_{\mu} = \sqrt{\frac{3}{2}} \chi_{ij} \chi_{ij}$ — интенсивность микронапряжений, заменяющая в функции \tilde{f}_c аргумент σ' .

Так как условие (11.47) должно выполняться в любой момент пластического деформирования материала, то $\dot{a}_{\mu} = \dot{\sigma}_{T}$. Отсюда с учетом (11.46) и (11.49) получим

$$(k_{p} + k_{p}^{*})\dot{q}_{p} = \frac{3a_{ij}\dot{s}_{ij}}{2a_{\mu}} - (k_{c} + k_{c}^{*})f_{c}(T, a_{\mu}) - k_{T}^{*}\dot{T} + \tilde{f}_{T}(T, \sigma_{T} - \sigma_{T}^{\circ}) - (k_{T}\dot{T} - \tilde{f}_{c}(T, \chi_{\mu}))\frac{s_{\mu}^{2} - a_{\mu}^{2} - \chi_{\mu}^{2}}{2a_{\mu}\chi_{\mu}}.$$
 (11.50)

Положительность правой части (11.50) теперь эквивалентна условию (11.48), но при этом должно оставаться в силе ограничение $k_p + k_p^* > 0$.

Отсюда для компонент девиатора скоростей суммарной неупругой деформации имеем следующее выражение [36,87]:

$$\begin{split} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} &= \frac{3a_{ij}}{2a_{\mathfrak{n}}(k_p + k_p^*)} \bigg(\frac{3a_{kl}\dot{s}_{kl}}{2a_{\mathfrak{n}}} + (k_p + k_p^* - k_c - k_c^*) f_c(T, a_{\mathfrak{n}}) - \\ &- k_T^* \dot{T} + \tilde{f}_{\mathfrak{T}}(T, \sigma_{\mathfrak{T}} - \sigma_{\mathfrak{T}}^\circ) - \big(k_T \dot{T} - \tilde{f}_c(T, \chi_{\mathfrak{n}})\big) \frac{s_{\mathfrak{n}}^2 - a_{\mathfrak{n}}^2 - \chi_{\mathfrak{n}}^2}{2a_{\mathfrak{n}}\chi_{\mathfrak{n}}} \bigg). \end{split}$$

К ним для получения компонент ε_{ij} тензора скоростей полной деформации следует добавить компоненты тензора скоростей упругой деформации

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} = \left(\frac{\dot{\sigma}_{\rm c}}{\varkappa} - \sigma_{\rm c}\frac{d\varkappa}{dT}\frac{\dot{T}}{\varkappa^2} + 3\varepsilon^{(T)}\right)\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2\mu} - s_{ij}\frac{d\mu}{dT}\frac{\dot{T}}{2\mu^2},$$

где σ_с — среднее напряжение, а к и μ — модули объемной упругости и сдвига соответственно.

Если не учитывать влияние термического разупрочнения на предел текучести, которое для реальных материалов становится существенным при приближении рабочих температур к температуре рекристаллизации, то в (11.50) $\tilde{f}_{\rm T} \equiv 0$ и рассматриваемая ММ по своим возможностям будет близка к одному из вариантов теории пластичности и ползучести с анизотропным упрочнением [82]. В частном случае $f_c \equiv 0$, что соответствует затвердеванию жидкости в элементе 3 (см. рис. 11.9), приходим к ММ термопластичности с изотропным и анизотропным упрочнением материала. Если к тому же $\tilde{f}_{\rm T} \equiv 0$ и $\tilde{f}_c \equiv 0$, т.е. отсутствует термическое разупрочнение, то ММ эквивалентна теории пластичности с *трансляционным упрочнением* [119].

При $\tilde{f}_c \equiv 0$, что соответствует затвердеванию жидкости в элементе 2 (см. рис. 11.9), скорость деформации ползучести при неизменных значениях σ_{ij} уменьшается по абсолютному значению по мере упрочнения материала, а после разгрузки имеет место так называемая обратная ползучесть. Если к тому же элемент 4 сухого трения неподвижен относительно направляющих, то возникает лишь деформация ползучести, причем MM отражает *meopuю упрочнения*. После разгрузки вследствие обратной ползучести эта деформация исчезает, т. е. материал ведет себя как нелинейная *термовязкоупругая сплошная среда*. Наоборот, если вязкость жидкости в элементе 2 становится ничтожно малой, то $\chi_{ij} \rightarrow 0$ и материал не обладает анизотропным упрочнением, что характерно для реальных материалов при весьма высокой температуре. В этом случае пластическая деформация и деформация ползучести не влияют друг на друга, причем первая подчиняется теории термопластичности с изотропным упрочнением, а вторая при неизменных значениях σ_{ij} соответствует стадии установившейся ползучести.

При бесконечной жесткости пружины 1 (см. рис. 11.9) и затвердевании жидкости в элементе 3 получим ММ термовязкопластической сплошной среды. Наконец, при ничтожной вязкости жидкости в элементе 3 элемент 4 остается неподвижным относительно направляющих. В этом случае $\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{3\varepsilon_{\pi}^{(p)}s_{ij}}{2\sigma_{\pi}} = \frac{3s_{ij}}{2k_p}$, что следует из деформационной теории термопластичности (см. 11.4), а ползучесть материала описывает теория течения.

Для обобщения на случай сложного напряженного состояния описания неупругого деформирования, соответствующего механическому аналогу, представленному на рис. 11.10, введем интенсивность неупругой деформации $\varepsilon_{\mu}^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij}^{(n)} e_{ij}^{(n)}$, где $e_{ij}^{(n)}$ — компоненты девиатора неупругой деформации. Тогда можно записать $\dot{e}_{ij}^{(n)} = \frac{3\dot{\varepsilon}_{\mu}^{(n)}a_{ij}}{2a_{\mu}}$, где по аналогии с одноосным напряженным состоянием

$$\dot{\varepsilon}_{\mathbf{\mu}}^{(n)} = \frac{\alpha(T)}{\left|1 - \left(\frac{a_{\mathbf{\mu}}}{\sigma^*}\right)^m\right|} \operatorname{sh}\left(\beta(T)\frac{a_{\mathbf{\mu}}}{\sigma^*}\right),$$

причем

$$\dot{\sigma}^* = \bar{k}_T^* \dot{T} + k_n^* \dot{q}_n - \alpha^*(T) \operatorname{sh} \beta^*(T) \frac{\sigma^* - \sigma^\circ}{\sigma^*}, \qquad q_n = \int_0^t |\varepsilon_n^{(n)}| \, dt'$$

Вместо (11.49) получим

$$\dot{\chi}_{ij} = \frac{2}{3}k_n \dot{e}_{ij}^{(n)} + \left(k_T \dot{T} - \alpha'(T) \operatorname{sh}\left(\beta'(T) \frac{\chi_{\mathrm{M}}}{\sigma^*}\right)\right) \frac{\chi_{ij}}{\chi_{\mathrm{M}}},$$

где $k_n = \frac{\partial f^{\circ}(T, \varepsilon_{\mathbf{x}}^{(n)})}{\partial \varepsilon_{\mathbf{x}}^{(n)}}$, а в функции f° , описывающей анизотропное упрочнение материала, вместо аргумента $\varepsilon^{(n)}$ используется $\varepsilon_{\mathbf{x}}^{(n)}$.

Преимущество последнего варианта MM неупругого поведения материала состоит в том, что отпадает необходимость в проверке условий пластичности. Это создает определенные удобства при алгоритмизации решения прикладных задач неупругого деформирования элементов конструкций в неизотермических условиях.

11.7. Термопластическая сплошная среда с памятью

Существует широкий класс материалов, которые при деформировании проявляют одновременно упругие, пластические и вязкие свойства, не имея при этом четко выраженного *предела текучести*. Вязкопластические свойства у таких материалов могут проявляться при малых напряжениях и сравнительно невысокой по сравнению с нормальной температуре. Для описания поведения таких материалов предложены различные математические модели (MM) с едиными определяющими уравнениями как для активного нагружения, так и для разгрузки. Такой подход позволяет не рассматривать образование в деформируемом теле областей упругой и неупругой деформации. Модель сплошной среды с памятью и внутренними параметрами термодинамического состояния относится именно к этой группе MM. Основная идея, используемая в этом случае, состоит во введении внутреннего времени.

Рассмотрим тело, занимающее объем V, ограниченное поверхностью S и подверженное тепловому и механическому воздействиям, которые изменяются в соответствии с заданной программой на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Положим, что материал этого тела имеет вязкопластические свойства, а деформации малы. Вследствие внешних воздействий в окрестности любой точки внутри тела возникает необратимый термодинамический процесс, сопровождаемый диссипацией энергии, вызванной вязкопластической деформацией и связанными с ней структурными изменениями, а также процессом теплопроводности. На макроуровне эти структурные изменения можно, как и ранее, описать с помощью набора внутренних параметров состояния, отражающих усредненные плотности микродефектов в материале.

Введем скалярный χ и тензорный с компонентами χ_{ij} параметры состояния. Для описания необратимых изменений в материале тела используем параметр ξ , который выполняет роль внутреннего времени [58], описывающего последовательность изменения состояния тела как *термодинамической системы*. Он должен представлять собой однозначную неотрицательную и неубывающую функцию времени t, т. е. $\xi(t) \ge 0$ и $d\xi/dt \ge 0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

На вид зависимости ξ от t влияют свойства конкретного материала и структурные изменения, происшедшие в нем до момента времени t. При таком подходе термодинамические функции, описывающие состояние рассматриваемой системы в окрестности точки, имеющей радиус-вектор x с координатами x_i в прямоугольной системе координат, будут зависеть не только от x, но и от ξ :

$$A = A(\varepsilon_{kl}, T, \chi, \chi_{kl}), \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T},$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad q_i = q_i \left(\varepsilon_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k}, \chi, \chi_{kl}\right),$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$(11.51)$$

где A и h — массовые плотности свободной энергии и энтропии соответственно; ε_{kl} и σ_{ij} — компоненты тензоров малой деформации и напряжений соответственно; T — абсолютная температура; ρ плотность материала тела; q_i — проекции вектора плотности теплового потока на оси Ox_i . Кинетические уравнения для определения χ и χ_{ij} примем в виде, аналогичном (4.38):

$$\frac{d\chi}{d\xi} = \varkappa^{(\chi)} \left(\varepsilon_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k}, \chi, \chi_{km} \right), \\
\frac{d\chi_{ij}}{d\xi} = \varkappa^{(\chi)}_{ij} \left(\varepsilon_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k}, \chi, \chi_{km} \right).$$
(11.52)

Если ввести параметр $\zeta(x,\xi)$, удовлетворяющий неравенству вида (4.40)

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{q_i}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial A}{\partial \chi}\frac{d\chi}{d\xi} - \rho\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}}\frac{d\chi_{ij}}{d\xi} \ge 0,$$

то этот параметр будет неубывающей функцией ξ , что даст возможность использовать ζ как масштаб внутреннего времени, изменяющийся в течение процесса в зависимости от степени диссипации энергии. Функция $\zeta(x,\xi)$ может терять гладкость в точках, соответствующих обратимой стадии течения термодинамического процесса, для которой $\frac{d\chi}{d\xi} = 0$ и $\frac{d\chi_{ij}}{d\xi} = 0$. Если в процессе деформирования T = const, то можно записать [58]

$$g(\zeta)\frac{d\zeta}{d\xi} = \sqrt{-\rho\frac{\partial A}{\partial\chi}\frac{d\chi}{d\xi} - \rho\frac{\partial A}{\partial\chi_{ij}}\frac{d\chi_{ij}}{d\xi}},$$

где $g(\zeta)$ — неотрицательная функция ζ , т. е. $g(\zeta) \ge 0$ при $\zeta > 0$. Частные случаи этого равенства можно получить, если положить $g(\zeta) \equiv 1$ или отождествить χ_{ij} с компонентами тензора неупругой деформации.

При деформировании параметры χ и χ_{ij} далеко не всегда можно определить экспериментально, но зато можно измерить в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$ в окрестности некоторых точек рассматриваемого тела компоненты ε_{ij} тензора деформации и абсолютную температуру T, что позволяет применить иной подход к построению MM, введя скалярную величину $\tilde{\xi}$, характеризующую последовательные состояния $\varepsilon_{ij}(x,t)$ и T(x,t) и также играющую роль внутреннего времени. Любому приращению dt соответствуют приращения $d\varepsilon_{ij}$ и dT, а им отвечает приращение $d\tilde{\xi}$. Чтобы оценить $d\varepsilon_{ij}$ с помощью скалярной величины $d\tilde{\xi}$, используем величину $(da_e)^2 = \frac{d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}}{2}$, соответствующую элементарной работе, совершаемой при упругом деформировании, поскольку при $dt \to 0$ и $dT \to 0$ мгновенная реакция рассматриваемого материала на внешнее воздействие является упругой. Тогда можно записать

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{ij}, \quad C_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad (da_e)^2 = \frac{1}{2} C_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl},$$

где $C_{ijkl}(\varepsilon_{mn}, T, \chi, \chi_{mn}), m, n = 1, 2, 3, -$ компоненты тензора коэффициентов упругости материала. В этом случае

$$d\tilde{\xi} = \sqrt{D_a(da_e)^2 + D_T(dT)^2 + D_t(dt)^2},$$

где D_a , D_T и D_t — неотрицательные постоянные, определяемые экспериментально. Таким образом, при фиксированном x величина $\tilde{\xi}$ является однозначной неотрицательной и неубывающей функцией времени t на отрезке $[t_0, t_1]$. Эффекты диссипации энергии можно учесть введением однозначной неотрицательной и неубывающей функции $\tilde{\zeta}$ от $\tilde{\xi}$, а следовательно, и от t. Определяющие и кинетические уравнения при таком способе введения внутреннего времени аналогичны (11.51) и (11.52) соответственно, причем оба способа введения внутреннего времени приводят к одинаковым результатам, если за масштаб для $\tilde{\xi}$ принять $\tilde{\zeta} = \zeta$.

При построении MM рассматриваемой среды с памятью аналогично (10.41) положим [39]

$$\begin{split} \rho A &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(R_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi''} + 2B_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi''} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} d\xi'' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(D_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi'} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi''} + \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} \right) d\xi'' - \\ &- \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} + \gamma_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'') \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' + \end{split}$$

где $R_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl}, \psi, \beta_{ij}$ и γ_{ij} — функции релаксации, описывающие термомеханические свойства среды и тождественно равные нулю при $\xi - \xi' < 0$ и $\xi - \xi'' < 0$; $\theta(\xi) = T(\xi) - T_0$; T_0 — абсолютная температура

естественного состояния среды, причем $|\theta|/T_0 \ll 1$. Тогда, согласно второму и третьему равенствам (11.51),

$$\rho h = \int_{-\infty}^{\xi} \left(\beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} + \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi'} - \frac{-\psi(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta}{\partial \xi'}}{\partial \xi'} \right) d\xi',$$

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{\xi} \left(R_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi'} + B_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi'} - \frac{-\beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta}{\partial \xi'}}{\partial \xi'} \right) d\xi',$$
(11.53)

где

$$\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi} = \int_{-\infty}^{\xi} \left(G_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi'} + E_{ij}(\xi - \xi') \frac{\partial \theta(\xi')}{\partial \xi'} \right) d\xi'.$$

В соответствии с выражением для *диссипативной функции*, входящей в (4.22), с учетом (11.53) запишем

$$\begin{split} \delta_{D} &= \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi} - \rho \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} + h \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = \\ &= -\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\xi} \left(B_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi'} + D_{ijkl}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi'} - \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} \right) d\xi' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial R_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi'} + 2 \frac{\partial B_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial D_{ijkl}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \gamma_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi'} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \xi'} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi'} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} - 2 \frac{\partial \beta_{ij}(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi'}{\partial \xi''} \right) \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{\partial \xi'}{\partial \xi''} \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi - \xi', \xi - \xi'')}{\partial \xi''} \frac{\partial \theta}{\partial \xi''} \right) \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \right) \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} d\xi'' - \\ &- \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi'''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi''}{\partial \xi''} \frac{\partial \xi'$$

Тогда уравнение теплопроводности по аналогии с (10.47) примет вид

$$-T\frac{\partial}{\partial\xi} \int_{-\infty}^{\xi} \left(\psi(\xi - \xi', 0) \frac{\partial\theta}{\partial\xi'} - \beta_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\xi'} - \gamma_{ij}(\xi - \xi', 0) \frac{\partial\chi_{ij}}{\partial\xi'} \right) d\xi' = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \right) + q_V + \delta_D,$$

где $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты *тензора теплопроводности* среды, а q_V — объемная плотность мощности внутренних источников тепловыделения.

Отметим, что в рассмотренной MM сплошной среды присутствует время t, что дает возможность описывать эффекты вязкого деформирования и называть такую сплошную среду термовязкопластической. Если же зависимость от t отсутствует, то тогда внутреннее время связано лишь с компонентами тензора деформации и с температурой.

Рассмотрим вариант ММ термовязкопластической среды с учетом ее анизотропии [68]. Примем, что компоненты $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ тензора пластической деформации удовлетворяют уравнениям

$$t_{\varepsilon}^* \frac{d\varepsilon_{ij}^{(p)}}{d\xi} + \varepsilon_{ij}^{(p)} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$
(11.54)

где t_{ε}^* , $E_{ijkl} = \text{const.}$ Тогда, использовав представление компонент тензора напряжения в виде $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(p)})$ ($\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты *тензора температурной деформации*) и решения (11.54), запишем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - K_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \int_{0}^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi - \xi'}{t_{\varepsilon}^{*}}\right) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \xi'} d\xi'\right),$$

где $K_{ijkl} = C_{ijmn}E_{mnkl}$, m, n = 1, 2, 3. Если принять тензор с компонентами K_{ijkl} подобным тензору с компонентами C_{ijkl} , то в случае, когда при упругом деформировании материал соответствует линейной термоупругой ортотропной среде, значения K_{ijkl} можно найти в результате обработки диаграмм деформирования при одноосном нагружении в направлении главных осей ортотропии.

Аналогично введенной в **11.4** обобщенной интенсивности деформации для дифференциала внутреннего времени положим

$$d\xi = d\gamma_* = \sqrt{\left(\frac{C_{ijkl}}{3\varkappa_u} - \beta_{ij}\beta_{kl}\right)d\varepsilon_{kl}d\varepsilon_{ij}},$$

где $d\gamma_*$ — обобщенная интенсивность приращения деформации, а \varkappa_u — модуль объемной упругости среды. Если механизмы неупругого поведения среды при растяжении и сжатии различны, то внутреннее время в этих случаях будет изменяться неодинаково, а коэффициенты в (11.54) будут разными. Примем, что при $I_{\xi} = dI_{1\widehat{\epsilon}}/d\xi > 0$ имеет место растяжение, а при $I_{\xi} = dI_{1\widehat{c}}/d\xi < 0$ — сжатие (здесь $I_{1\widehat{c}} = \varepsilon_{ii}$ — первый инвариант тензора деформации). Тогда получим

$$d\xi = \frac{d\gamma_*^+ + d\gamma_*^-}{2} + \operatorname{sgn}(I_{\xi}) \frac{d\gamma_*^+ - d\gamma_*^-}{2},$$

$$t_{\varepsilon}^* = \frac{(t_{\varepsilon}^*)^+ + (t_{\varepsilon}^*)^-}{2} + \operatorname{sgn}(I_{\xi}) \frac{(t_{\varepsilon}^*)^+ - (t_{\varepsilon}^*)^-}{2},$$

$$K_{ijkl} = \frac{K_{ijkl}^+ + K_{ijkl}^-}{2} + \operatorname{sgn}(I_{\xi}) \frac{K_{ijkl}^+ - K_{ijkl}^-}{2},$$

где верхний индекс «+» соответствует растяжению, «-» — сжатию, а $sgn(x) - \phi y$ нкция знака числа x.

12. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В рамках современной терминологии [148] электродинамика как раздел физики включает классическую теорию, изучающую движение и взаимодействие электрических зарядов, и квантовую, учитывающую корпускулярно-волновой дуализм материи, а также электродинамику движущихся сред, учитывающую релятивистские эффекты. Классическая электродинамика составляет теоретическую основу электротехники, радиотехники, электроники и других инженерных электротехники, радиотехники, электроники и других инженерных электротехнических дисциплин [113]. В этой главе ограничимся рассмотрением основных математических моделей, описывающих на макроскопическом уровне взаимодействие электромагнитного поля с неподвижной, деформируемой или движущейся со сравнительно небольшой скоростью сплошной средой.

12.1. Электрические и магнитные свойства сплошной среды

Материалы в зависимости от своего поведения в электрическом или магнитном поле подразделяют на проводящие, полупроводящие, диэлектрические (изоляторы), магнитные и немагнитные [90]. Способность вещества проводить электрический ток под действием постоянного (не меняющегося во времени) электрического поля количественно характеризуют электрической проводимостью $\sigma^{(e)}$, обратной удельному электрическому сопротивлению и измеряемой в $\frac{1}{O_{M} \cdot M}$ (Ом — единица измерения электрического сопротивления проводника). При $\sigma^{(e)} > 10^6 \frac{1}{O_{M} \cdot M}$ вещество относят к проводникам, при $10^{-8} \frac{1}{O_{M} \cdot M} < \sigma^{(e)} < 10^6 \frac{1}{O_{M} \cdot M}$ — к полупроводникам, а при $\sigma^{(e)} < 10^{-8} \frac{1}{O_{M} \cdot M}$ — к диэлектрикам. Величина $\sigma^{(e)}$ заметно зависит от внешних условий, в частности от давления и абсолютной температуры. Например, такой типичный полупроводник, как германий, при высоком давлении становится проводником, а при низкой температуре — диэлектриком.

Некоторые металлы (например, Pb и Nb), сплавы и интерметаллиды (например, Nb₃Ge и Nb₃Sn), являющиеся в обычных условиях проводниками, с понижением температуры становятся сверхпроводниками, в которых благодаря образованию связанных пар электронов исчезает электрическое сопротивление. Проводники с кристаллической структурой (за исключением структур с кубической кристаллической решеткой) обычно обладают анизотропией электрической проводимости, характеризуемой симметричным тензором второго ранга $\hat{\sigma}^{(e)}$ электрической проводимости. В этом случае закон Ома (3.24) для сплошной среды принимает вид

$$\boldsymbol{j}^{(e)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{12.1}$$

где $j^{(e)}$ и E — векторы плотности электрического тока и напряженности электрического поля соответственно.

У некоторых металлов и полупроводников электрическая проводимость зависит от напряженного состояния или деформации. Для анизотропной среды эту зависимость описывают соотношением $E = = \hat{\rho}^{(e)} \cdot (\hat{\mathbf{I}}_2 + \hat{\pi}^{(e)} \cdot \hat{\sigma}) \cdot j^{(e)}$ или $E = \hat{\rho}^{(e)} \cdot (\hat{\mathbf{I}}_2 + \hat{\mu}^{(e)} \cdot \hat{c}) \cdot j^{(e)}$, где $\hat{\rho}^{(e)} - meнзор$, обратный $\hat{\sigma}^{(e)}$, т.е. $\hat{\rho}^{(e)} \cdot \hat{\sigma}^{(e)} = \hat{\mathbf{I}}_2$; $\hat{\mathbf{I}}_2$ — единичный тензор второго ранга; $\hat{\pi}^{(e)}$ и $\hat{\mu}^{(e)}$ — тензоры четвертого ранга **тензорезистивных** и эласторезистивных коэффициентов соответственно; $\hat{\sigma}$ и $\hat{\epsilon}$ — тензоры напряжений и деформации. Если среда линейноупругая, то $\hat{\mu}^{(e)} = \hat{\pi}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{C}}$, где $\hat{\mathbf{C}}$ — тензор коэффициентов упругости. Такую зависимость используют при изготовлении тензорезисторов для измерения напряжений и деформаций.

К полупроводникам относят большую группу веществ, промежуточную между проводниками и диэлектриками и имеющую (в отличие от металлов) экспоненциальную зависимость электрической проводимости вида $\sigma^{(e)}(T) = \sigma_0^{(e)} \exp\left(-\frac{\Pi_e^*}{k_BT}\right)$ от абсолютной температуры T, где $\sigma_0^{(e)}$ — коэффициент, зависимость которого от T существенно слабее, чем экспоненциальная; Π_e^* — энергия активации проводимости; $k_{\rm E}$ — постоянная Больцмана. В полупроводниках связь электронов с атомами, характеризуемая энергией Π_e^* , может быть разорвана не только за счет теплового возбуждения микрочастиц, но и путем внешнего воздействия (например, электрическим полем, излучением, заряженными частицами и т.п.), что превращает электроны в свободные носители заряда. Возможность в широких пределах управлять электрической проводимостью полупроводников определяет их применение в различных областях техники.

В диэлектрике на макроскопическом уровне объемная плотность электрического заряда $\rho_e = 0$, но при определенных внешних воздействиях происходит поляризация диэлектрика, связанная с перемещениями в нем на микроскопическом уровне заряженных частиц (электронная и ионная поляризации) и/или со взаимным поворотом молекул (ориентационная поляризация). Это приводит к возникновению распределенного по объему электрического дипольного момента, среднее значение которого в единице объема характеризуют вектором $P^{(e)}$ электрической поляризованности, его модуль измеряют в Кл/м² или в А · с/м².

Под действием электрического поля в линейном приближении для изотропного диэлектрика $P^{(e)} = \chi^{(e)} \varepsilon_0 E$, где $\chi^{(e)}$ — диэлектрическая восприимчивость; $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{c}/(\text{B} \cdot \text{m})$ — электрическая постоянная. Вектор

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}^{(e)} \tag{12.2}$$

определяет электрическое смещение (электрическую индукцию), причем

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{E},\tag{12.3}$$

где $\varepsilon^{(e)} = 1 + \chi^{(e)}$ — относительная диэлектрическая проницаемость. Величину $\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0$ называют абсолютной диэлектрической проницаемостью. Для анизотропного диэлектрика

$$\boldsymbol{D} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{E}, \tag{12.4}$$

где $\widehat{c}^{(e)}$ — симметричный **тензор** второго ранга **диэлектрической** проницаемости, т.е. в общем случае векторы **D** и **E** не являются коллинеарными.

Электрическое поле с переменным во времени t вектором E(t) напряженности вызывает запаздывание изменения вектора $\boldsymbol{D}(t)$, характеризуемое временем релаксации. В случае синусоидальных колебаний напряженности электрического поля с круговой частотой ω это запаздывание приводит к разности φ фаз колебаний, зависящей от ω . т.е. $D(t) = \varepsilon^{(e)} \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \varphi)$, где E_0 — вектор, соответствующий наибольшему по модулю значению изменяющейся напряженности. При этом часть энергии электрического поля необратимо переходит в тепловую энергию, определяя так называемые диэлектрические потери. пропорциональные значению $tg\varphi$, причем максимум потерь в случае электронной и ионной поляризации приходится на частоты колебаний в диапазоне $10^{12} \dots 10^{15}$ Гц, а при ориентационной поляризации — на более низкие частоты [148]. Некоторую долю в этих потерях составляют и джоулевы потери, поскольку реальные диэлектрики обладают малой, но все-таки конечной электрической проводимостью. В оптическом диапазоне частот ($\sim 10^{15}$ Гц) свойства диэлектрика характеризуют комплексным показателем преломления $n_{\rm m}(1+ik_{\rm m})$, где $n_{\rm m}$ показатель преломления, равный отношению скоростей распространения электромагнитных волн в вакууме и в диэлектрике; k_{π} показатель поглощения; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

С увеличением напряженности постоянного во времени электрического поля сила тока через диэлектрик сначала возрастает в соответствии с законом Ома (3.24), но при некотором значении $E_{np}^{(e)}$ модуля вектора E, называемого электрической прочностью диэлектрика, наступает электрический пробой. Для твердых диэлектриков, имеющих $\sigma^{(e)} = 10^{-16} \dots 10^{-11} \frac{1}{O_{M} \cdot M}, E_{np}^{(e)} \approx 10^7 \dots 10^8 \text{ B/m}$ [148]. С увеличением частоты колебаний электрического поля значение $E_{np}^{(e)}$ обычно возрастает.

Линейная зависимость (12.2) для большинства диэлектриков справедлива при $|E| < 10^8$ В/м, т.е. в случае постоянного или медленно меняющегося во времени электрического поля она справедлива вплоть до электрического пробоя. Однако с увеличением частоты колебаний напряженности электрического поля отклонения от линейности могут стать существенными. Например, в нелинейной оптике вместо (12.2) для модуля вектора $P^{(e)}$ используют зависимость

$$|\mathbf{P}^{(e)}| = \chi_1^{(e)} |\mathbf{E}| + \chi_2^{(e)} |\mathbf{E}|^2 + \dots, \qquad (12.5)$$

в которой коэффициенты $\chi_1^{(e)}$, $\chi_2^{(e)}$ и т.д. называют нелинейными восприимчивостями [148]. При этом $\varepsilon^{(e)}$ становится зависимой от частоты колебаний, что характеризует явление *дисперсии* диэлектрической проницаемости.

Поляризацию диэлектриков, возникающую и при отсутствии внешнего электрического поля, называют спонтанной, а обладающие ею диэлектрики — пироэлектриками, для которых вместо (12.2) справедлива зависимость

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}_0^{(e)} + \varepsilon^{(e)} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \qquad (12.6)$$

где $P_0^{(e)}$ — вектор спонтанной поляризованности. Однако существование такой поляризации обычно недолговечно. Она исчезает благодаря тепловому движению микрочастиц и пусть малой, но конечной электропроводности диэлектриков. При достаточно быстром изменении температуры T по сравнению с начальной температурой T_0 можно измерить изменение $P_0^{(e)}(T) - P_0^{(e)}(T_0) = p^{(e)}(T - T_0)$ спонтанной поляризации, где $p^{(e)}$ — вектор пироэлектрических коэффициентов. Некоторые диэлектрики (например, керамика из титаната бария BaTiO₃) благодаря существенной зависимости $P^{(e)}$ от T используются для измерения быстро изменяющихся температур и тепловых потоков [131].

Спонтанная поляризация более стабильна у *сегнетоэлектриков*, которые также относят к пироэлектрикам [148]. При малой напряженности внешнего электрического поля сегнетоэлектрики не являются однороднополяризованными по объему, а состоят из доменов — областей с различными направлениями поляризации, но с увеличением напряженности векторы поляризации большинства доменов переориентируются в направлении вектора E и эта ориентация сохраняется после исчезновения внешнего поля. При двукрат-

ной смене направления вектора E зависимость $P^{(e)} = \pm |P^{(e)}|$ от $E^{(e)} = \pm |E|$ имеет вид петли гистерезиса (рис. 12.1). Такие свойства сегнетоэлектрики сохраняют при условии $T < T_C$, где $T_C -$ **точка Кюри**, соответствующая фазовому переходу. Так, для ниобата лития LiNbO₃ $T_C = 1483$ K, а $|P_0^{(e)}|_{\text{max}} = 0.5$ Кл/м². Некоторые сегнетоэлектрики (например, титанат бария) являются полупроводниками.



Рис. 12.1

В свою очередь, пироэлектрики относят к более широкому классу пьезоэлектриков, у которых поляризация возникает под действием механических напряжений (прямой пьезоэффект), причем $P^{(e)} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\sigma}$, где $\hat{\mathbf{d}}$ — тензор третьего ранга пьезоэлектрических коэффициентов, а $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений. Обратный пьезоэффект состоит в возникновении деформации под действием электрического поля и описывается соотношением $\hat{\varepsilon} = \hat{\mathbf{d}} \cdot E$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор малой деформации. Условием проявления диэлектриком пьезоэлектрических свойств является отсутствие в элементарной ячейке его кристаллической решетки центра симметрии. Это условие выполнено в 20 из 32 кристаллических классов [108, 131].

Деформирование диэлектриков, не зависящее от направления вектора E и пропорциональное $|E|^2$, называют электрострикцией. Для жидких, газообразных и твердых изотропных диэлектриков объемная деформация пропорциональна $\beta_V |E|^2$, где $\beta_V - c$ жимаемость. Для твердых анизотропных диэлектриков $\hat{\epsilon} = \hat{\Theta} \cdots (E \otimes E)$, где $\hat{\Theta}$ — тензор четвертого ранга коэффициентов электрострикции, а $E \otimes E$ — тензор второго ранга, полученный диадным умножением векторов.

Прямой пьезоэффект используют в различных приборах и устройствах, преобразующих механическую энергию в электрическую, а электрострикцию и обратный пьезоэффект применяют для преобразования колебаний напряженности электрического поля в механические колебания (например, для генерации колебаний звуковых и ультразвуковых частот, а также для стабилизации круговой частоты ω колебаний приложенного электрического поля, если значение ω или 2ω совпадает с одним из значений круговой частоты собственных колебаний элемента, выполненного из диэлектрика, обладающего хорошо выраженными обратным пьезоэффектом или электрострикцией соответственно). Взаимодействие сплошной среды с магнитным полем, возникающим благодаря движению электрических зарядов и действующим на такие заряды, на движущиеся заряженные тела и тела, обладающие намагниченностью, определяется ее магнитными свойствами. Магнитное поле характеризуют вектором H его напряженности, модуль которого измеряют в A/M, а для описания взаимодействия со сплошной средой используют вектор магнитной индукции, модуль которого измеряют в $B \cdot c/M^2 = T\pi$ ($T\pi - \text{тесла}$). В вакууме $B = \mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ B} \cdot c/(A \cdot M) = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ B} \cdot c/(A \cdot M) - магнитная постоянная, причем <math>c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx (299792458 \pm 1,2) \text{ м/с} - скорость света (скорость распространения электромагнитных волн) в вакууме. Для сплошной среды$

$$B = \mu_0 (H + M^{(m)}), \tag{12.7}$$

где $M^{(m)}$ — вектор намагниченности, зависящий в общем случае от H.

Материалы, у которых при наличии магнитного поля $M^{(m)} = 0$, относят к немагнитным, а свойства изотропных магнитных материалов характеризуют в линейном приближении **магнитной восприимчивостью** $\chi^{(m)} = \pm |M^{(m)}|/|H|$, положительной в случае однонаправленных векторов $M^{(m)}$, H и отрицательной, если эти векторы противоположно направлены. В этом случае

$$B = \mu_0 H (1 + \chi^{(m)}) = \mu^{(m)} \mu_0 H, \qquad (12.8)$$

где $\mu^{(m)} = 1 + \chi^{(m)}$ — относительная магнитная проницаемость. Величину $\mu^{(m)}\mu_0$ называют абсолютной магнитной проницаемостью. Для анизотропного материала

$$\boldsymbol{B} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{(m)} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 \boldsymbol{H}, \tag{12.9}$$

где $\hat{\mu}^{(m)}$ — симметричный *тензор* второго ранга *магнитной про*ницаемости. Таким образом, магнитные материалы могут как усиливать, так и ослаблять магнитное поле, а в случае анизотропии и изменять его ориентацию.

Изотропные магнитные материалы при $\chi^{(m)} < 0$ относят к *диамагнетикам*, при $\chi^{(m)} > 0$ — к парамагнетикам, а при $\chi^{(m)} \gg 1$ к *ферромагнетикам*. При повышении температуры тепловое возбуждение микрочастиц ферромагнетика препятствует упорядочиванию их магнитных моментов, вследствие чего значение $\chi^{(m)}$ уменьшается до уровня, характерного для парамагнетиков. Наоборот, с понижением температуры парамагнетики могут приобрести свойства, характерные для ферромагнетиков, причем намагниченность может сохраняться и при отсутствии внешнего магнитного поля. При двукратном изменении направления вектора H зависимость $M^{(m)} = \pm |M^{(m)}|$ для ферромагнетиков может иметь вид петли гистерезиса (см. рис. 12.1). Существуют парамагнетики, называемые антиферромагнетиками, для которых с уменьшением температуры ниже определенного уровня значение $\chi^{(m)}$ остается постбянным или даже снижается [148]. Некоторые антиферромагнетики обладают прямым и обратным пьезомагнитными эффектами, аналогичными соответствующим пьезоэлектрическим эффектам диэлектриков.

Для ряда ферромагнетиков характерны эффекты магнитострикции и магнитоупругости, связанные с появлением деформации под действием магнитного поля и изменением магнитной проницаемости под влиянием деформации. Некоторые вещества обладают так называемыми прямым и обратным магнитоэлектрическими эффектами [74]: поляризуются под действием магнитного поля и намагничиваются под действием электрического поля. Дополнительные слагаемые векторов электрической поляризованности и намагниченности в этом случае можно представить в виде $P^{(m)} = \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H}$ и $M^{(e)} = \hat{\mathbf{G}}^{-1} \cdot \mathbf{E}$, где $\hat{\mathbf{G}}$ тензор второго ранга магнитоэлектрических коэффициентов.

Таким образом, математические модели (MM), описывающие взаимодействие сплошной среды с электрическим и магнитным полями, достаточно сложны и многообразны. Дополнительное усложнение таких MM связано с необходимостью учитывать влияние температурного состояния среды на ее электрические и магнитные свойства. Влияние температуры порождает многочисленные дополнительные эффекты, называемые термогальваномагнитными [74, 131].

12.2. Уравнения Максвелла и модели недеформируемой среды

Переменное во времени t магнитное поле возникает при изменении электрического поля, а изменение магнитного поля порождает переменное электрическое поле. В этом случае говорят об электромагнитном поле. Применительно к сплошной среде его характеризуют сочетанием векторных функций E(x,t) и H(x,t) напряженности электрического и магнитного полей соответственно, а также векторных функций D(x,t) электрического смещения и B(x,t) магнитной индукции, где x — радиус-вектор точки в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Связь между этими функциями устанавливается соотношениями (12.3), (12.8) или (12.4), (12.9). Математическая модель (MM), описывающая взаимное влияние магнитного и электрического полей и их взаимодействие со сплошной средой, включает известные **уравнения** Максвелла [85]

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}^{(e)}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{e}, \quad (12.10)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; $j^{(e)}$ — вектор плотности электрического тока; ρ_e — объемная плотность электрического заряда. Связь между $j^{(e)}$ и Е для изотропной среды при отсутствии распределенных сторонних источников электродвижущей силы (ЭДС) устанавливает закон Ома (3.24). В случае анизотропной среды вместо (3.24) следует использовать (12.1).

Запись (12.10) предполагает, что среда неподвижна относительно прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а эта система инерциальна, т. е. неподвижна или движется поступательно с постоянной скоростью. Правую часть третьего уравнения (12.10) можно рассматривать как вектор плотности суммарного электрического тока, причем $\partial D/\partial t$ является вектором **плотности тока смещения**, а $j^{(e)}$ — вектором **плотности тока проводимости**. Применив к обеим частям этого уравнения дифференциальную операцию *дивергенции*, с учетом четвертого уравнения (12.10) и равенства $\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$ получим локальную форму

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}^{(e)} = 0 \tag{12.11}$$

закона сохранения электрического заряда.

Если $\rho_e \equiv 0$ и изотропная среда однородна, т.е. ее относительные диэлектрическая $\varepsilon^{(e)}$ и магнитная $\mu^{(m)}$ проницаемости, а также электрическая проводимость $\sigma^{(e)}$ постоянны, то, применяя к первому и третьему уравнениям (12.10) дифференциальную операцию ротора, с учетом (3.24), (12.3) и (12.8) запишем

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu^{(m)} \mu_0 \frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{H})}{\partial t},$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \varepsilon^{(e)} \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{E})}{\partial t} + \sigma^{(e)} \nabla \times \boldsymbol{E}.$$

где μ_0 и ε_0 — магнитная и электрическая постоянные соответственно. Отсюда, учитывая (12.10) и равенство $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla (\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$ для произвольного вектора a [23], где ∇^2 — $du \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, получаем

$$\nabla^{2} \boldsymbol{E} = \sigma^{(e)} \mu^{(m)} \mu_{0} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon^{(e)} \varepsilon_{0} \mu^{(m)} \mu_{0} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{E}}{\partial t^{2}},$$

$$\nabla^{2} \boldsymbol{H} = \sigma^{(e)} \mu^{(m)} \mu_{0} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \varepsilon^{(e)} \varepsilon_{0} \mu^{(m)} \mu_{0} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{H}}{\partial t^{2}},$$

$$(12.12)$$

т.е. каждая из проекций f на оси координат векторов E и H удовлетворяет так называемому телеграфному уравнению

$$\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sigma^{(e)}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla^2 f}{\mu^{(m)}\mu_0}.$$
(12.13)

Для непроводящей среды ($\sigma^{(e)} \equiv 0$) из (12.12) следуют уравнения

$$rac{\partial^2 m{E}}{\partial t^2} = a_{em}^2
abla^2 m{E}, \quad rac{\partial^2 m{H}}{\partial t^2} = a_{em}^2
abla^2 m{H},$$

т.е. каждая из проекций f на оси координат векторов E и H удовлетворяет волновому уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a_{em}^2 \nabla^2 f$, или $\Box f = 0$, где $\Box = \nabla^2 - \frac{1}{a_{em}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — **дифференциальный оператор Даламбера**; $a_{em} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^{(e)}\mu^{(m)}}}$ — скорость распространения в рассматриваемой среде возмущений электромагнитного поля, называемых электромагнитными волнами, а c — скорость света в вакууме. В случае зависимости f лишь от одной пространственной координаты этому уравнению удовлетворяет решение $f(x_1,t) = f_0 \cos(\omega t - k_\omega x_1)$, где $f_0 = \text{const};$ ω — круговая частота колебаний, а $k_\omega = \omega/a_{em}$ — волновое число, соответствующее плоской монохроматической волне, фаза $\varphi = \omega t - k_\omega x_1 = \text{const}$ колебаний которой имеет в идеальном изоляторе **фазовую скорость** а_{ет} [85]. В вакууме при $\varepsilon^{(e)} = \mu^{(m)} = 1$ фазовая скорость равна скорости света c. Построение вариационной формы MM применительно к гармоническим колебания электромагнитного поля

В среде с электрической проводимостью $\sigma^{(e)} > 0$ колебания будут затухающими. Действительно, (12.13) в одномерном случае имеет решение $f(x_1,t) = f_0 \exp(-\gamma_\omega x_1) \cos(\omega t - \beta_\omega x_1)$, которое после подстановки в (12.13) приводит к положительным значениям

$$\beta_{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}a_{em}}\sqrt{\sqrt{1+p_{\omega}^2}+1}, \quad \gamma_{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}a_{em}}\sqrt{\sqrt{1+p_{\omega}^2}-1}, \quad (12.14)$$

где $p_{\omega} = \frac{(\sigma^{(e)})^2}{\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0\omega}$. Для среды с высокой электропроводимостью, когда $p_{\omega} \gg 1$, т.е. плотность $|\boldsymbol{j}^{(e)}| = \sigma^{(e)}|\boldsymbol{E}|$ тока проводимости много больше плотности $\left|\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right| = \varepsilon^{(e)}\varepsilon_0 \left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|$ тока смещения, из (12.14) следует $\beta_{\omega} \approx \approx \gamma_{\omega} \approx \frac{\omega}{a_{em}}\sqrt{\frac{p_{\omega}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\mu^{(m)}\mu_0\sigma^{(e)}\omega}$. В такой среде электромагнитная

волна затухает на расстоянии порядка $1/\gamma_{\omega}$, пропорциональном $1/\sqrt{\omega}$ и называемом скиновой глубиной проникания электромагнитного поля в проводник [85]. Фазовая скорость при этом равна $\frac{\omega}{\beta_{\omega}} \approx a_{em}\sqrt{\frac{2}{p_{\omega}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu^{(m)}\mu_0\sigma^{(e)}}} < a_{em}$. Если полностью пренебречь плотностью тока смещения, то (12.13) примет вид $\mu^{(m)}\mu_0\sigma^{(e)}\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla^2 f$, аналогичный уравнению теплопроводности.

Для среды с низкой электропроводностью, когда $p_{\omega} \ll 1$, из (12.14) находим $\beta_{\omega} \approx \frac{\omega}{2a_{em}} \sqrt{4 + p_{\omega}^2}$ и $\gamma_{\omega} \approx \frac{\sigma^{(e)}}{2} \sqrt{\frac{\mu^{(m)}\mu_0}{\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0}}$. В этом случае глубина проникания электромагнитного поля не зависит от ω , а фазовая скорость $\frac{\omega}{\beta_{\omega}} \approx \frac{2a_{em}}{\sqrt{4 + p_{\omega}^2}}$ несколько меньше, чем в идеальном изоляторе. Параметр p_{ω} сравнения плотностей токов проводимости и смещения зависит от частоты ω колебаний электромагнитной волны. Следовательно, одна и та же среда при малых значениях ω может вести себя как проводник, а при больших — как изолятор.

Пусть неограниченная область заполнена изотропной средой, для которой $\rho_e = 0$. Подставим в (12.10) комплексные функции $E(x,t) = E_0 \exp(i(\omega t - k_\omega \cdot x))$ и $H(x,t) = H_0 \exp(i(\omega t - k_\omega \cdot x))$, описывающие распространение плоской монохроматической волны в направлении волнового вектора k_ω (E_0 и H_0 — постоянные векторы, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица). Тогда с учетом (3.24), (12.3) и (12.8) получим соответственно

$$\mathbf{k}_{\omega} \times \mathbf{E}_{0} = \omega \mu^{(m)} \mu_{0} \mathbf{H}_{0}, \quad \mathbf{k}_{\omega} \cdot \mathbf{H}_{0} = 0,$$

$$\mathbf{k}_{\omega} \times \mathbf{H}_{0} = \left(\frac{\sigma^{(e)}}{i} - \omega \varepsilon^{(e)} \varepsilon_{0} \right) \mathbf{E}_{0}, \quad \mathbf{k}_{\omega} \cdot \mathbf{E}_{0} = 0.$$

$$(12.15)$$

Из свойств векторного и скалярного произведений векторов следует, что векторы k_{ω} , E_0 и H_0 взаимно перпендикулярны. Условие существования ненулевых решений для векторов E и H можно получить из первого и третьего равенств (12.15), умножив их векторно на k_{ω} :

$$oldsymbol{k}_{\omega} imes (oldsymbol{k}_{\omega} imes oldsymbol{E}_{0}) = \omega \mu^{(m)} \mu_0 oldsymbol{k}_{\omega} imes oldsymbol{H}_{0},$$

 $oldsymbol{k}_{\omega} imes (oldsymbol{k}_{\omega} imes oldsymbol{H}_{0}) = \Big(rac{\sigma^{(e)}}{i} - \omega arepsilon^{(e)} arepsilon_0 \Big) oldsymbol{k}_{\omega} imes oldsymbol{E}_{0}$

Для плоской монохроматической волны примем $\mathbf{k}_{\omega} = \boldsymbol{\beta}_{\omega} + i \boldsymbol{\gamma}_{\omega}$. Тогда, учитывая (П1.2), второе и четвертое равенства (12.15), находим, что это условие примет вид $|\boldsymbol{\beta}_{\omega}|^2 - |\boldsymbol{\gamma}_{\omega}|^2 + 2i\boldsymbol{\beta}_{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\omega} - \omega^2 \varepsilon^{(e)} \varepsilon_0 \mu^{(m)} \mu_0 - -i\mu^{(m)} \mu_0 \sigma^{(e)} \omega = 0$. При $\sigma^{(e)} = 0$ и $\boldsymbol{\beta}_{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\omega} = 0$ или $\boldsymbol{\gamma}_{\omega} = \mathbf{0}$ отсюда следует соотношение $a_{em} = \frac{\omega}{\sqrt{|\beta_{\omega}|^2 - |\gamma_{\omega}|^2}}, \ |\beta_{\omega}| > |\gamma_{\omega}|, \ для фазовой скорости и отношение <math>\frac{|H_0|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0}{\mu^{(m)}\mu_0}}$. В случае проводящей среды ($\sigma^{(e)} > 0$) придем к (12.14), т.е. плоская монохроматическая волна в такой среде будет затухать пропорционально $\exp(-\gamma_{\omega} \cdot \boldsymbol{x})$.

Считая среду непроводящей ($\sigma^{(e)} = 0$), выясним влияние анизотропии среды по отношению к ее диэлектрической проницаемости (см. 12.1) на распространение плоской монохроматической волны. В этом случае вместо (12.15) получим

$$\boldsymbol{k}_{\omega} \times \boldsymbol{E}_{0} = \omega \boldsymbol{B}_{0}, \quad \boldsymbol{k}_{\omega} \cdot \boldsymbol{B}_{0} = 0, \quad \boldsymbol{k}_{\omega} \times \boldsymbol{H}_{0} = -\omega \boldsymbol{D}_{0}, \quad \boldsymbol{k}_{\omega} \cdot \boldsymbol{D}_{0} = 0,$$

где $B_0 = \hat{\mu}^{(m)} \mu_0 H_0$ и $D_0 = \hat{\varepsilon}^{(e)} \varepsilon_0 E_0$, а $\hat{\mu}^{(m)}$ и $\hat{\varepsilon}^{(e)}$ — тензоры магнитной и диэлектрической проницаемости соответственно. Отсюда, учитывая свойства скалярного и смешанного произведений векторов, устанавливаем, что вектор k_ω перпендикулярен векторам B_0 и D_0 , попарно ортогональны векторы B_0 и E_0 , D_0 и H_0 . Кроме того, $(k_\omega \times E_0) \cdot D_0 =$ $= \omega B_0 \cdot D_0 = -(k_\omega \times H_0) \cdot B_0$, или

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{k}_\omega \times \boldsymbol{E}_0) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\boldsymbol{e})} \cdot \boldsymbol{E}_0 = \omega \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{D}_0 = -\mu_0(\boldsymbol{k}_\omega \times \boldsymbol{H}_0) \cdot \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{(\boldsymbol{m})} \cdot \boldsymbol{H}_0.$$

В силу произвольности ω и тензоров $\hat{\epsilon}^{(e)}$ и $\hat{\mu}^{(m)}$ это равенство может быть выполнено лишь при условии $B_0 \cdot D_0 = 0$, т.е. при ортогональности векторов B_0 и D_0 , или (что то же самое) при условии компланарности троек векторов k_{ω} , E_0 , D_0 и k_{ω} , H_0 , B_0 . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 12.2.



В частном случае постоянного электрического поля в покоящейся среде, называемого элек-

Рис. 12.2

тростатическим, из (12.10) следует система уравнений электростатики

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\boldsymbol{\epsilon}}. \tag{12.16}$$

где **0** — нулевой вектор. В случае односвязной области первое уравнение (12.16) есть условие потенциальности электростатического поля, для которого с помощью соотношения $E = -\nabla U_e$ можно ввести электрический потенциал U_e . Из второго уравнения (12.16) при $D = = \varepsilon^{(e)} \varepsilon_0 E$ получаем

$$\nabla \cdot (\varepsilon^{(e)} \nabla U_e) + \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = 0.$$
 (12.17)

Так как объемная плотность ρ_e электрических зарядов в электростатическом поле не изменяется во времени, то в среде отсутствует
электрический ток. Поэтому в средах с электрической проводимостью $\sigma^{(e)} > 0$ (например, в металлах) в соответствии с (3.24) должно быть $E = -\nabla U_e \equiv 0$, т.е. $U_e = \text{const.}$ Тогда из (12.17) следует $\rho_e \equiv 0$. Это означает, что если металлическое тело объемом V, ограниченным поверхностью S, имеет электрический заряд Q_e , то он будет сосредоточен на поверхности тела. Интегрируя второе уравнение (12.16) по объему тела и учитывая *теорему Остроградского* — Гаусса, можно установить, что на этой поверхности $D \cdot n = \overline{\rho}_e$, где n — единичный вектор внешней нормали к ней, а $\overline{\rho}_e$ — поверхностная плотность электрического заряда. На границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора D терпит разрыв, равный $\overline{\rho}_e$, а тангенциальная составляющая



Рис. 12.3

вектора E непрерывна [74].

Пусть в полости заземленного металлического тела с внутренней поверхностью S_0 расположено тело из металла, ограниченное замкнутой поверхностью S_* (рис. 12.3). В области V между этими телами находится среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(e)}(M)$ ($M \in V$) и объемной плотностью $\rho_e(M)$ электрических зарядов, а внутреннее те-

по заряжено до потенциала U_e^* относительно заземленного тела. В этом случае распределение потенциала $U_e(M)$ удовлетворяет (12.17) с граничными условиями

$$U_e(P') = 0, \quad P' \in S_0; \qquad U_e(P_*) = U_e^*, \quad P_* \in S_*.$$
 (12.18)

Интегрируя второе уравнение (12.16) по области V, с учетом *тео*ремы Остроградского — Гаусса находим

$$\int_{V} \nabla \cdot \boldsymbol{D}(M) \, dV = \int_{S_{\star}} \boldsymbol{D}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) \, dS + \int_{S_{0}} \boldsymbol{D}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) \, dS = \int_{V} \rho_{e}(M) \, dV,$$

где n(P) — единичный вектор внешней (относительно области V) нормали в точках P поверхностей S_* и S_0 . Это соотношение останется верным и в частном случае $\rho_e(M) \equiv 0$, причем

$$\int_{S_*} \boldsymbol{D}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) dS = -\int_{S_0} \boldsymbol{D}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) dS$$

Если ввести поверхностную плотность электрического заряда $\overline{\rho}_e(P) = D(P) \cdot n(P)$, то это соотношение можно интерпретировать как равенство по абсолютной величине заряда, сосредоточенного на поверхности

 S_* внутреннего тела, и наведенного заряда на поверхности S_0 заземленного тела.

Итак, количественный анализ ММ, включающей (12.17) и (12.18), позволяет найти распределение $U_e(M)$ ($M \in V$) электрического потенциала, векторную функцию $D(P) = \varepsilon^{(e)}(P)\varepsilon_0 E(P) = -\varepsilon^{(e)}(P)\varepsilon_0 \nabla U_e(P)$ ($P \in S = S_* \cup S_0$) электрического смещения и поверхностную плотность $\overline{\rho}_e(P) = D(P) \cdot n(P)$ электрического заряда, а затем вычислить заряд внутреннего тела

$$Q_e = \int_{S_*} \boldsymbol{D}(P) \cdot \boldsymbol{n}(P) \, dS = \int_{S_*} \overline{\rho}_e(P) \, dS. \tag{12.19}$$

При $\rho_e(M) \equiv 0$ рассматриваемую систему характеризуют электрической емкостью $C_e = Q_e/U_e^*$, единицей измерения которой является фарад ($\Phi = \text{K}\pi/\text{B} = \text{A} \cdot \text{c}/\text{B}$).

Дифференциальной форме ММ системы, представленной на рис. 12.3, можно поставить в соответствие интегральную форму в виде интегрального уравнения. Согласно закону Кулона [90] неподвижный точечный заряд q_e , находящийся в точке $M' \in \mathbb{R}^3$ с радиус-вектором x', определяющим положение этой точки относительно начала пря-



Рис. 12.4

моугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 12.4), создает в точке $M \in \mathbb{R}^3$ с радиус-вектором x электростатическое поле с вектором напряженности $\mathbf{E}(x) = q_e(x - x')(4\pi\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0|x - x'|^3)^{-1}$ и потенциалом $U(x) = q_e(4\pi\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0|x - x'|)^{-1}$. Заменим заряд q_e зарядом $\rho_e(x')dV(x')$ в элементарном объеме dV(x') в окрестности точки с радиус-вектором x', находящейся в области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, или зарядом $\overline{\rho}_e(x')dS(x')$ на элементарной площадке dS(x'). Тогда, суммируя действие таких зарядов и полагая $\varepsilon^{(e)} = \text{const}$, получаем

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho_e(\boldsymbol{x}')\,dV(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon^{(e)}\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\overline{\rho}_e(\boldsymbol{x}')\,dS(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}.$$
 (12.20)

В соответствии с граничными условиями (12.18) значения U в точках $P_* \in S_*$ и $P \in S_0$ поверхности $S = S_* \cup S_0$, ограничивающей область V, заключенную между металлическими телами (см. рис. 12.3), заданы. Приравнивая этим значениям левую часть (12.20), приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной поверхностной плотности $\overline{\rho}_e$ электрического заряда в точках поверхности S. После решения этого уравнения из (12.20) можно найти потенциал U(x)электростатического поля в любой точке $M \in V$ с радиус-вектором x, а при помощи (12.19) вычислить электрический заряд Q внутреннего металлического тела.

В случае постоянного магнитного поля в неподвижной среде из (12.10) получим систему уравнений магнитостатики

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}^{(e)}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{12.21}$$

Из второго уравнения (12.21) следует, что магнитные заряды (или монополи) не существуют. На поверхности тела или на границе раздела двух сред должны быть непрерывны тангенциальные составляющие вектора H, нормальные составляющие вектора B и все компоненты вектора A, определенного равенствами $\nabla \cdot A = 0$ и $\nabla \times A = B$ [74]. Объединение граничных условий для (12.16) и (12.21) дает граничные условия для уравнений Максвелла (12.10).

Рассмотрим вариант преобразования (12.10) при помощи соотношений для потенциалов электромагнитного поля (скалярного Φ и векторного A)

$$E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A, \quad a_{em}^2 \nabla \cdot A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\sigma^{(e)} \Phi}{\varepsilon^{(e)} \varepsilon_0} = 0,$$

последнее из которых называют калибровочным условием Лоренца [85]. После подстановки этих соотношений в (12.10) первое и второе уравнения превратятся в тождества, а два остальных в случае однородной изотропной среды с учетом (П1.19) можно представить в виде

$$a_{em}^2
abla^2 A = rac{\partial^2 A}{\partial t^2} + rac{\sigma^{(e)}}{arepsilon^{(e)} arepsilon_0} rac{\partial A}{\partial t} - rac{oldsymbol{j}^{(e)}}{arepsilon^{(e)} arepsilon_0},$$

 $a_{em}^2
abla^2 \Phi = rac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + rac{\sigma^{(e)}}{arepsilon^{(e)} arepsilon_0} rac{\partial \Phi}{\partial t} - rac{a_{em}^2
ho_e}{arepsilon^{(e)} arepsilon_0},$

т. е. введенные потенциалы удовлетворяют одинаковым по структуре телеграфным уравнениям, которые для непроводящей среды ($\sigma^{(e)} = 0$ и $\rho_e \equiv 0$) переходят в волновые уравнения $\Box \Phi = 0$ и $\Box A = 0$. При построении MM распространения электромагнитных волн в такой среде удобно с помощью соотношений $a_{em}^2 A = \frac{\partial \Pi}{\partial t}$ и $\Phi = -\nabla \cdot \Pi$ ввести поляризационный потенциал П, называемый также вектором Герца [85]. При этом калибровочное условие Лоренца удовлетворяется тождественно, а из волнового уравнения для A следует $a_{em}^2 \nabla^2 \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t}$, или $\frac{\partial}{\partial t} \left(a_{em}^2 \nabla^2 \Pi - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \right) = 0$. Отсюда получаем неоднородное

волновое уравнение $\Box \Pi = f(x)$, где f(x) — векторная функция радиусвектора x, которую можно найти, если известно распределение $\Pi(x, t_0)$ в какой-либо момент времени t_0 (например, в начальный). По полученному решению $\Pi(x, t)$ несложно с учетом (П1.19) вычислить

$$\begin{split} \boldsymbol{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}) - \frac{1}{a_{em}^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi}}{\partial t^2} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Pi}) + \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{a_{em}^2} \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t} = \frac{1}{a_{em}^2} \frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{\Pi})}{\partial t}. \end{split}$$

Силы воздействия электромагнитного поля на среду называют пондеромоторными. На неподвижную относительно выбранной инерциальной системы координат среду при отсутствии электрической поляризации и намагниченности ($\chi^{(e)} = \chi^{(m)} = 0$, т.е. $\varepsilon^{(e)} = \mu^{(m)} = 1$) действует так называемая сила Лоренца, вектор объемной плотности которой равен

$$\boldsymbol{b}^{(L)} = \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}^{(e)} \times \boldsymbol{B}. \tag{12.22}$$

Силу Лоренца можно представить в иной форме. Для этого последовательно преобразуем первое и второе слагаемые в правой части (12.22) с учетом четвертого и третьего уравнений (12.10):

$$\begin{split} \rho_e \boldsymbol{E} &= (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla \boldsymbol{E}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla |\boldsymbol{E}|^2, \\ \boldsymbol{j}^{(e)} \times \boldsymbol{B} &= \left(\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} - \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{H} = \\ &= \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \boldsymbol{H}) - \frac{\mu_0}{2} \nabla |\boldsymbol{H}|^2 - \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{H} = \\ &= \mu_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}) - \frac{\mu_0}{2} \nabla |\boldsymbol{H}|^2 - \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{H}. \end{split}$$

Так как $\nabla |E|^2 = \nabla \cdot (|E|^2 \widehat{I}_2)$ и $\nabla |H|^2 = \nabla \cdot (|H|^2 \widehat{I}_2)$, где \widehat{I}_2 — единичный тензор второго ранга, то $b^{(L)} = \nabla \cdot \widehat{\sigma}^{(em)} - \frac{\partial G^{(em)}}{\partial t}$, где $\widehat{\sigma}^{(em)}$ — симметричный тензор электромагнитных напряжений Максвелла с компонентами

$$\sigma_{ji}^{(em)} = \varepsilon_0 E_j E_i + \mu_0 H_j H_i - (\varepsilon_0 E_k E_k + \mu_0 H_k H_k) \frac{\delta_{ji}}{2}, \quad i, j, k = 1, 2, 3;$$

 $G^{(em)} = D \times B = E \times H/c^2$ — объемная плотность количества движения электромагнитного поля.

Для электрически поляризованной и намагниченной неподвижной среды учет векторов электрической поляризованности $P^{(e)}$ и намаг-

ниченности $M^{(m)}$ приводит к тому, что компоненты тензора электромагнитных напряжений принимают вид [90] $\sigma_{ji}^{(emn)} = \sigma_{ji}^{(em)} + P_j^{(e)}E_i - B_jM_i^{(m)} - M_k^{(m)}B_k\delta_{ji}$, т. е. при $P_j^{(e)}E_i \neq B_jM_i^{(m)}$ этот тензор становится несимметричным. Для такой среды вектор объемной плотности пондеромоторных сил равен [130]

$$b^{(em)} = \rho_e E + j^{(e)} \times B + \frac{1}{2} \Big(P_i^{(e)} \nabla E_i - E_i \nabla P_i^{(e)} + \mu_0 M_i^{(m)} \nabla H_i - \mu_0 H_i \nabla M_i^{(m)} \Big). \quad (12.23)$$

Если для среды справедливы (12.3) и (12.8), причем электрическая и магнитная восприимчивости являются скалярами и не зависят от координат, то выражение в круглых скобках в (12.23) обращается в нуль, так как каждое слагаемое в них будет состоять из скалярных произведений ортогональных векторов. Это выражение может быть отлично от нуля для анизотропной среды или в случае, когда электрическая и магнитная восприимчивости зависят от координат. Ясно, что при взаимодействии среды с электромагнитным полем пондеромоторные силы должны быть учтены в уравнениях равновесия (см. **3.6**).

Направление и интенсивность переноса энергии электромагнитного поля характеризуют вектором $S = E \times H$ Умова — Пойнтинга. Если первое и третье уравнения (12.10) скалярно умножить на H и E соответственно и затем, приняв для вакуума $\varepsilon^{(e)} = \mu^{(m)} =$ = 1 и $j^{(e)} = 0$, из первого результата вычесть второй, то получим $H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H) = -\mu_0 H \cdot \partial H / \partial t - \varepsilon_0 E \cdot \partial E / \partial t$. Отсюда в силу $H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot (E \times H)$ приходим к локальной форме закона сохранения энергии электромагнитного поля в вакууме в виде уравнения Умова — Пойнтинга $\partial \varepsilon_{em}^* / \partial t + \nabla \cdot S = 0$, где $\varepsilon_{em}^{*} = (\varepsilon_{0}|E|^{2} + \mu_{0}|H|^{2})/2$ — объемная плотность энергии электромагнитного поля в вакууме [74]. Аналогично из (12.10) следует уравнение Умова — Пойнтинга $\nabla \cdot S + j^{(e)} \cdot E + E \cdot \partial D / \partial t + H \cdot \partial B / \partial t = 0$ для электрически поляризуемой и намагничиваемой среды. Слагаемое $j^{(e)} \cdot E$ характеризует для неподвижной среды так называемую $\partial \varkappa o$ улеву теплоту, т.е. объемную плотность мощности $q_{12}^{(e)}$ источников тепловой энергии, передаваемой среде при ее взаимодействии с электромагнитным полем. Эти источники должны быть учтены в (4.11) для уравнения переноса энергии (см. 4.2).

В среду также поступает энергия, затрачиваемая на электрическую поляризацию и намагничивание. Объемная плотность мощности источников этой энергии $q_V^{(P)} = \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{P}^{(e)} / \partial t$ и $q_V^{(M)} = \mu_0 \mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{M}^{(m)} / \partial t$ соответственно. Если зависимость $P^{(e)}$ от E (или $M^{(m)}$ от H) имеет вид петли гистерезиса (см. рис. 12.1), то часть затрачиваемой на процессы поляризации (или намагничивания) энергии электромагнитного поля может переходить в теплоту, что также следует учитывать в (4.11).

12.3. Электромагнитные процессы в медленно движущейся среде

Уравнения Максвелла (12.10) для вакуума в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами e_i (i = 1, 2, 3) репера $\{e_i\}$ принимают вид

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad (12.24)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; $E = E_i e_i$ и $H = H_i e_i$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей с проекциями E_i и H_i на оси Ox_i ; μ_0 и ε_0 — магнитная и электрическая постоянные; t — время. Пусть оси инерциальной прямоугольной системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ параллельны соответствующим осям системы координат $Ox_1x_2x_3$ и точка O' движется относительно точки O вдоль оси Ox_1 с постоянной скоростью $v = ve_1$ в положительном направлении этой оси (рис. 12.5). Если для перехода к системе $O'x'_1x'_2x'_3$ применить преобразование Лоренца [130] $t' = \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$, где t' — время в этой координатной системе, а c — скорость света в вакууме, то в (12.24) достаточно заменить E на $E' = E'_i e_i$ и H на $H' = H'_i e_i$ [140], где

$$E_1' = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{e}_1, \quad E_k' = \frac{(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{e}_k}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}, \quad k = 2, 3;$$
$$H_1' = (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_1, \quad H_k' = \frac{(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_k}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}, \quad k = 2, 3.$$

Из свойств смешанного произведения векторов (см. П1.1) следует, что $E'_1 = E_1$ и $H'_1 = H_1$.

При сравнительно медленном движении среды можно пренебречь значением v^2/c^2 по сравнению с единицей и для перехода к систе-



Рис. 12.5

ме $O'x'_1x'_2x'_3$ применить преобразование Галилея t' = t, $x'_1 = x_1 - vt$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$, относительно которого инвариантны уравнения классической (нерелятивистской) механики. Тогда в (12.24) достаточно заменить E на $E' = E + v \times B$ и H на $H' = H - v \times D$, причем такая замена справедлива для произвольных вектора v и ориентации репера $\{e'_i\}$ этой координатной системы. Для электрически поляризованной и намагниченной сплошной среды в (12.10) следует принять [90]

$$E' = E + v \times B, \quad B' = B - \frac{v \times E}{c^2}, \quad j'^{(e)} = j^{(e)} - v \rho_e,$$

$$D' = D + \varepsilon_0 v \times B, \quad H' = H - v \times D, \quad \rho'_e = \rho_e,$$
(12.25)

где $j^{(e)}$ — вектор плотности электрического тока; ρ_e — объемная плотность электрического заряда (обозначения со штрихом относятся к системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$, а соответствующие им обозначения без штриха — к системе $Ox_1x_2x_3$).

При произвольном поле вектора скорости среды, задаваемом в системе координат $Ox_1x_2x_3$ векторной функцией v(x,t), где x - pa*диус-вектор частицы сплошной среды*, уравнения (12.25) в рассматриваемом приближении, называемом *галилеевым*, справедливы для элементарного объема среды в *сопутствующей системе координат*, движущейся вместе с этим объемом со скоростью v(x,t) [130].

В частном случае, когда $|E| \gg |v| |B|$ и $|D| \gg |\varepsilon_0 v| |E|$, в (12.25) можно принять E' = E и D' = D, а (12.10) привести к виду [21] $\nabla \times E = 0, \ \nabla \cdot D = \rho_e, \ \nabla \times H' = \partial D / \partial t + j'^{(e)}, \ \nabla \cdot B' = 0$. В этом приближении изменение электрического поля порождает магнитное поле, но обратным эффектом (электромагнитной индукцией) пренебрегают. С учетом (12.25) в прежней системе координат для движущейся среды имеем $D = \varepsilon_0 E + P^{(e)}, \ B = \mu_0 (H + M^{(m)}), \ j^{(e)} = \sigma^{(e)} E + \rho_e v$, где $\sigma^{(e)}$ электрическая проводимость среды.

В случае, когда $|B| \gg |v| |E|/c^2$ и $|H| \gg |v| |D|$, в (12.25) допустимо принять H' = H и B' = B, а (12.10) записать в виде $\nabla \times E' = -\partial B/\partial t$, $\nabla \cdot D' = \rho_e$, $\nabla \times H = j'^{(e)}$, $\nabla \cdot B = 0$. При этом учитывают эффект электромагнитной индукции, порождающий электрическое поле при изменении магнитного поля, но пренебрегают обратным (магнитоэлектрическим) эффектом. Принимая во внимание (12.25), получаем

$$D = \varepsilon_0 E + P^{(e)}, \quad B = \mu_0 (H + M^{(m)}), \quad j^{(e)} = \sigma^{(e)} (E + v \times B) + \rho_e v. \quad (12.26)$$

Преобразование (12.25) используют при построении математических моделей (ММ) магнитной гидродинамики (см. 12.4), изучающей движение электропроводящих жидкостей и газов в электромагнитном поле [70]. В упрощенной ММ магнитной гидродинамики обычно принимают [130], что в движущейся проводящей среде отсутствуют поляризация и намагниченность, т.е. $D = \varepsilon_0 E$ и $B = \mu_0 H$, но может протекать электрический ток $(j^{(e)} \neq 0)$, причем $|v||D| \ll |H|$, поэтому $H' \approx H$. Если среда идеальная (невязкая) и имеет плотность ρ , то уравнение неразрывности имеет вид (3.32), а вместо векторной формы (8.15) уравнений Эйлера получим

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^{(L)}, \qquad (12.27)$$

где p — давление; b — вектор плотности объемных сил, и в соответствии с (12.22) и (12.25) в инерциальной системе координат вектор объемной плотности силы Лоренца $b^{(L)} = \rho_e E' + j^{(e)} \times B$, причем вектор $j^{(e)}$ плотности электрического тока задан последним равенством (12.26). В уравнении (4.11) переноса энергии мощность объемных источников энергии, обусловленных выделением джоулевой теплоты, равна $q_V^{(e)} = j^{(e)} \cdot E'$. К указанным соотношениям необходимо добавить уравнения Максвелла (12.10), записанные с учетом соотношения $H' \approx H$ в сопутствующей системе координат:

$$\nabla \times \mathbf{E}' + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} = \mathbf{j}^{(e)}, \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}' = \rho_e.$$

$$(12.28)$$

В частном случае бесконечно большой электрической проводимости $(\sigma^{(e)} \to \infty)$ среды ММ магнитной гидродинамики удается упростить. Так как плотность электрического тока должна быть конечной, из последнего равенства (12.26) следует, что $E = -v \times B = -\mu_0 v \times H$, т.е. напряженность электрического поля в идеальном проводнике в сопутствующей системе координат равна нулю ($E' \equiv 0$). Тогда из третьего и четвертого уравнений (12.28) имеем $j^{(e)} = \nabla \times H$, $\rho_e = 0$, а первое уравнение (12.10) и второе уравнение (12.28) дают

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0.$$
 (12.29)

Ясно, что для идеального проводника $q_V^{(e)} = 0$, а в уравнении (12.27) $b^{(L)} = (\nabla \times H) \times B = \mu_0 (\nabla \times H) \times H.$

Используя формулы векторного анализа [23], с учетом второго уравнения (12.29) можно записать $\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{H} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} +$ $+ \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{H} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}), \ (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} =$ $= (\boldsymbol{H} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} - \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{H}|^2$. Тогда из (12.27) и первого уравнения (12.29) получим два векторных уравнения

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p = \boldsymbol{b} + \mu_0 (\boldsymbol{H} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} - \frac{\mu_0}{2} \nabla |\boldsymbol{H}|^2, \\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = (\boldsymbol{H} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \end{cases}$$
(12.30)

относительно двух векторных функций v и H и двух действительных функций ρ и p. Уравнения (12.30) вместе с (3.32) и уравнением состояния $p = p(\rho)$ составляют замкнутую систему.

Предположим, что все неизвестные функции зависят лишь от одной пространственной координаты x_1 , причем вектор v скорости среды имеет лишь одну ненулевую проекцию v на координатную ось Ox_1 , а $b \equiv 0$. Применяя к первому уравнению (12.29) операцию дивергенции и учитывая, что $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$ для любой дважды дифференцируемой векторной функции f [23], найдем $\partial (\nabla \cdot H) / \partial t = 0$ и, следовательно, $\partial^2 H_1 / (\partial t \partial x_1) = 0$. Но так как из второго уравнения (12.29) следует, что $\partial H_1 / \partial x_1 = 0$, где H_1 — проекция вектора H на ось Ox_1 , то в итоге получим $H_1 =$ const. Примем $H_1 = 0$, а проекцию вектора H на направление, перпендикулярное оси Ox_1 , обозначим H. Тогда $(H \cdot \nabla)H = 0$ и $(H \cdot \nabla)v = 0$, а вместо (3.32) и (12.30) с учетом уравнения состояния $p = p(\rho)$ получим MM, включающую систему трех уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x_1} = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(p(\rho) + \frac{\mu_0}{2} H^2 \right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (vH)}{\partial x_1} = 0$$

относительно трех искомых величин ρ , v и H.

Уравнения Максвелла с использованием *теоремы Остроградско*го — Гаусса и теоремы Стокса можно представить в некоторой инерциальной системе координат в интегральной форме:

$$\int_{S_0} D_n dS = \int_{V_0} \rho_e dV, \quad \int_{V_0} \nabla \cdot \boldsymbol{B} dV = \int_{S_0} B_n dS = 0,$$

$$\oint_{L_0} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_{S_L} \frac{\partial B_n}{\partial t} dS, \quad \oint_{L_0} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{S_L} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \int_{S_L} j_n^{(e)} dS,$$
(12.31)

где V_0 и S_0 — объем и ограничивающая его поверхность (все они неподвижны относительно выбранной системы координат); L_0 и S_L замкнутый контур и натянутая на него поверхность; x — paduycвектор точки $M \in L_0$ в этой системе координат; нижний индекс nобозначает проекцию на направление единичного вектора n внешней нормали к S или нормали к S_L векторов D, B и $j^{(e)}$ (нормаль к S_L выбрана так, что наблюдаемый с ее стороны обход контура Lпроисходит против хода часовой стрелки). К (12.31) следует добавить закон сохранения электрического заряда в интегральной форме

$$\int_{S_0} j_n^{(e)} dS = \int_{V_0} \left(I_V^{(e)} - \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial t} \right) dV, \qquad (12.32)$$

где $I_V^{(e)}$ — интенсивность объемных источников электрического заряда.

Так как уравнения (12.10) справедливы для среды, неподвижной относительно выбранной системы координат, то применение (12.31) также ограничено этим случаем. Пусть $M^* \in S^* \subset V_0$ — некоторая точка на поверхности S^* сильного разрыва относительно функций, входящих в (12.31) и (12.32). Для среды в сопутствующей для точки $M^* \in S^*$ системе координат с учетом (3.24) получим [21]

$$[\boldsymbol{j}^{(e)}\cdot\boldsymbol{n}^*] + \frac{\partial\overline{\rho}_e}{\partial t} = 0, \quad [\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}^*] = \overline{\rho}_e, \quad [\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}^*] = 0 \text{ ha } S^*, \quad (12.33)$$

где $\tilde{\rho}_e$ — поверхностная плотность электрических зарядов, расположенных на S^* в окрестности точки $M^* \in S^*$, а символ $[\cdot]$ обозначает скачок значений функции при переходе в точке $M^* \in S^*$ через поверхность S^* в направлении, противоположном единичному вектору $n^*(M^*)$ нормали к этой поверхности.

Проведем к поверхности S^* касательную в точке $M^* \in S^*$ в направлении единичного вектора t^* и выберем в качестве поверхности S_L участок плоскости, содержащей векторы n^* и t^* и ограниченной прямоугольным контуром L_0 протяженностью 2h в направлении единичного вектора n^* (рис. 12.6). Обход этого контура против хода часовой стрелки будет соответствовать следующему условию: векторы n^* , t^* и единичный вектор n нормали к S_L образуют правую тройку векторов, т. е. $n = n^* \times t^*$. При $h \to 0$ интегралы по S_L в (12.31) также стремятся к нулю, и при последующем стягивании контура L_0 в точку M^* для произвольного направления касательного вектора t^* при отсутствии поверхностных токов получаем

$$[E \cdot t^*] = 0, \qquad [H \cdot t^*] = 0.$$
 (12.34)



Рис. 12.6

Условия (12.33) и (12.34) справедливы в случае неподвижной относительно сопутствующей для точки $M^* \in S^*$ системы координат. При сравнительно медленном относительно этой системы координат движении среды векторы, входящие в (12.33) и (12.34), можно преобразовать в соответствии с (12.25). Из (12.25) следует, что если векторы скорости среды на обеих сторонах поверхности S^* перпендикулярны S^* в точке $M^* \in S^*$, то не изменятся два последних условия (12.33), а если эти векторы касательны к S^* в этой точке, то не изменятся первое условие (12.33) и условия (12.34).

Установленные условия на поверхности разрыва дают полезную информацию для корректной формулировки граничных условий при построении ММ электродинамики в областях непрерывного изменения искомых функций и их производных. В частности, из (12.33) и (12.34) следует, что для уравнений Максвелла (12.10) в сочетании с (12.11) на границе области можно задать проекции векторов D, B, $j^{(e)}$ на нормаль к этой границе и проекции векторов E и H на направление касательной к ней.

12.4. Модели магнитной гидродинамики

При построении математических моделей (MM) магнитной гидродинамики обычно не учитывают электрическую поляризацию и намагниченность движущейся электропроводящей сплошной среды [70], т.е. для векторов электрического смещения и магнитной индукции принимают $D = \varepsilon_0 E$ и $B = \mu_0 H$, где E и H — векторы напряженности электрического и магнитного полей, а ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Кроме того, закон Ома представляют в галилеевом приближении в виде третьего равенства (12.26). Тогда при подстановке этого равенства в третье уравнение (12.28) получим

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t} + \sigma^{(e)} \mu_0 (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \mu_0 \rho_e \boldsymbol{v}, \qquad (12.35)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона; E' — вектор напряженности электрического поля в сопутствующей системе координат; t — время; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — скорость света в вакууме; $\sigma^{(e)}$ — электрическая проводимость; ρ_e — объемная плотность электрического заряда; v — вектор скорости среды относительно инерциальной системы координат.

В случае сильно ионизированных газов электрическая проводимость велика и сопоставима с электрической проводимостью металлов. Поэтому первым слагаемым в правой части (12.35) можно пренебречь по сравнению со вторым, а при медленном движении среды допустимо пренебречь и третьим слагаемым. Тогда из (12.35) следует $E = \frac{\nabla \times B}{\sigma^{(e)} \mu_0} - v \times B$ и после подстановки этого выражения в первое уравнение (12.10) получим уравнение магнитной индукции

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times (\boldsymbol{\nu}_m \nabla \times \boldsymbol{B}), \qquad (12.36)$$

где $\nu_m = 1/(\sigma^{(e)}\mu_0)$ — магнитная вязкость, размерность которой совпадает с размерностью кинематической вязкости среды. Безразмерный параметр $\text{Re}_m = v_0 L_0 / \nu_m$, где v_0 и L_0 — характерные для рассматриваемого процесса значения скорости и линейного размера, называют магнитным числом Рейнольдса. При $\text{Re}_m \gg 1$ в правой части (12.36) можно пренебречь вторым слагаемым.

В случае вязкой сжимаемой жидкости в правую часть (12.27) следует добавить слагаемое $\nabla \cdot \hat{\sigma}^{(D)}$, где $\hat{\sigma}^{(D)}$ — тензор вязких напряжений, а вектор объемной плотности силы Лоренца в соответствии с принятым выше приближением $j^{(e)} = \nabla \times H$ представить в виде $b^{(L)} = j^{(e)} \times B = (\nabla \times B) \times B/\mu_0$. Таким образом, с учетом равенства $(\nabla \times B) \times B = (B \cdot \nabla)B - \frac{1}{2}\nabla(B \cdot B)$ [86] закон сохранения количества движения примет форму

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(D)} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}), \qquad (12.37)$$

где ρ — плотность; p — давление; **b** — вектор плотности объемных сил (за исключением пондеромоторных сил).

Рассмотрим установившееся движение электропроводящей вязкой несжимаемой жидкости плотностью $\rho = \text{const}$ с прямолинейными линиями тока, что соответствует течению в трубах и каналах. Положим, что векторы v и B не изменяются вдоль линий тока, которые считаем параллельными оси Ox_1 , т. е. $v = v_1e_1$, $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \equiv 0$, $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} \equiv 0$ и $v_2 = v_3 = 0$, где v_i и B_i — проекции этих векторов на оси Ox_i прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ с репером $\{e_i\}$, i = 1, 2, 3. Тогда из (12.37) при b = 0, учитывая (8.7), для несжимаемой жидкости получим

$$\frac{\partial p^{*}}{\partial x_{1}} = \frac{1}{\mu_{0}} \left(B_{2} \frac{\partial B_{1}}{\partial x_{2}} + B_{3} \frac{\partial B_{1}}{\partial x_{3}} \right) + \mu_{D} \left(\frac{\partial^{2} v_{1}}{\partial x_{2}^{2}} + \frac{\partial^{2} v_{1}}{\partial x_{3}^{2}} \right),$$

$$\frac{\partial p^{*}}{\partial x_{2}} = \frac{1}{\mu_{0}} \left(B_{2} \frac{\partial B_{2}}{\partial x_{2}} + B_{3} \frac{\partial B_{2}}{\partial x_{3}} \right),$$

$$\frac{\partial p^{*}}{\partial x_{3}} = \frac{1}{\mu_{0}} \left(B_{2} \frac{\partial B_{3}}{\partial x_{2}} + B_{3} \frac{\partial B_{3}}{\partial x_{3}} \right),$$
(12.38)

где $p^* = p + \frac{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}{2\mu_0}; \ \mu_D$ — динамическая вязкость жидкости. Учитывая второе уравнение (12.28) в виде $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}$ и равенства [86] $\nabla \times (v_1 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{B}) = \nabla \times (v_1 (B_2 \boldsymbol{e}_3 - B_3 \boldsymbol{e}_2)) = (B_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}) \boldsymbol{e}_1$ и $\nabla \times (\nu_m \nabla \times \boldsymbol{B}) = -\nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B}$ при $\nu_m = \text{const}$, из (12.36) получаем

$$B_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \nu_m \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_3^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_3}{\partial x_3^2} = 0.$$
 (12.39)

Функция $\psi_m(x_2,x_3)$, определяемая соотношениями

$$B_2 = -\frac{\partial \psi_m}{\partial x_3}, \quad B_3 = \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}, \tag{12.40}$$

тождественно удовлетворяет второму уравнению (12.28), а из второго и третьего уравнений (12.39) следует

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \Big(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_3^2} \Big) = \frac{\partial}{\partial x_3} \Big(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_3^2} \Big) = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_3^2} = \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = C_m \mu_0 = \text{const.} \quad (12.41)$$

Константа C_m в соответствии с принятым приближением $j^{(e)}/\mu_0 = -\nabla \times B$ пропорциональна проекции $j^{(e)} = j^{(e)} \cdot e_1$ вектора $j^{(e)}$ на ось

 Ox_1 и должна быть задана с учетом граничных условий при $x_1 \to \pm \infty$. При течении жидкости в трубе или канале на контуре их поперечного сечения могут быть заданы значения проекции B_n вектора B на направление нормали к контуру, через которые можно выразить граничные значения функции ψ_m и затем решить относительно ψ_m уравнение Пуассона, следующее из равенства (12.41), что позволит из (12.40) найти B_2 и B_3 .

Второе и третье уравнения (12.38) можно привести к виду

$$\begin{split} \frac{\partial p^*}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial (B_2^2 + B_3^2)}{\partial x_2} - 2B_3 \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) \right), \\ \frac{\partial p^*}{\partial x_3} &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial (B_2^2 + B_3^2)}{\partial x_3} + 2B_2 \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) \right). \end{split}$$

Отсюда с учетом (12.40) и (12.41) получим $\frac{\partial p^*}{\partial x_2} = -C_m \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}\right)$ и $\frac{\partial p^*}{\partial x_3} = -C_m \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_3}\right)$, или

$$p_* = p + \frac{B_1^2}{2\mu_0} = -C_m \psi_m(x_2, x_3) + f(x_1).$$
(12.42)

Так как B_1 , ψ_m и $\frac{\partial p^*}{\partial x_1}$ (в силу первого уравнения (12.38)) не зависят от x_1 , то $\frac{\partial^2 p_*}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_1^2} = \frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0$. Следовательно, $f(x_1) = C_1 x_1 + C_2$, причем константы C_1 , C_2 могут быть найдены из заданных граничных условий для давления p.

Чтобы использовать (12.42) для нахождения давления, необходимо при известных B_2 и B_3 предварительно найти функции $B_1(x_2, x_3)$ и $v_1(x_2, x_3)$ из совместного решения первого уравнения (12.38), положив $\frac{\partial p^*}{\partial x_1} = C_1$, и первого уравнения (12.39). Введя новые переменные $y_1 =$ $= v_1 + B_1/\beta_*$ и $y_2 = v_1 - B_1/\beta_*$, где $\beta_* = \sqrt{\mu_0 \mu_D/\nu_m}$, эти уравнения можно привести к виду [70]

$$B_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \beta_* \nu_m \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2} \right) = \mu_0 \frac{C_1}{\beta_*},$$

$$-B_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \beta_* \nu_m \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2} \right) = \mu_0 \frac{C_1}{\beta_*},$$

т.е. функции y₁ и y₂ можно найти независимо, если для каждой из них заданы свои граничные условия.

Рассмотрим простейший случай течения с прямолинейными линиями тока между двумя параллельными плоскостями, которое может быть вызвано или *nepenadom давления* вдоль оси Ox_1 , или движением самих плоскостей (*mevenue Kyэmma*). Ось Ox_2 направим перпендикулярно плоскостям, расстояние между которыми 2h. Пусть все входящие в последние уравнения функции не зависят от x_3 , $B_3 = 0$ и задано $B_2 = B_0 = \text{const.}$ Тогда эти уравнения принимают вид

$$\frac{d^2y_1}{dx_2^2} + k_1\frac{dy_1}{dx_2} + k_2 = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dx_2^2} - k_1\frac{dy_1}{dx_2} + k_2 = 0,$$

где $k_1 = B_2/(eta_*
u_m)$ и $k_2 = -C_1/\mu_D$, и имеют общие решения

$$y_{1}(x_{2}) = -\frac{k_{2}}{k_{1}}x_{2} + \widetilde{C}_{1}'\exp(-k_{1}x_{2}) + \widetilde{C}_{1}'',$$

$$y_{1}(x_{2}) = \frac{k_{2}}{k_{1}}x_{2} + \widetilde{C}_{2}'\exp(-k_{1}x_{2}) + \widetilde{C}_{2}''.$$
(12.43)

Все остальные функции, характеризующие течение жидкости, можно выразить через y_1 и y_2 : $v_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}$, $B_1 = \frac{\beta_*(y_1 - y_2)}{2}$, $J_1 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\beta_*}{\mu_0} \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial x_2}$ и $E_3 = \nu_m \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + v_1 B_2 = \frac{\mu_0 \nu_m}{B_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + (\widetilde{C}_1'' + \widetilde{C}_2'') \frac{B_0}{2}$.

Для течения, вызванного перепадом давления, примем $B_1 = 0$ при $x_2 = \pm h$. Так как $v_1 = 0$ при $x_2 = \pm h$, то и $y_1 = y_2 = 0$. Тогда в (12.43) $\widetilde{C}'_1 = \widetilde{C}'_2 = -\frac{k_2 h}{k_1 \operatorname{sh} k_1 h}, \widetilde{C}''_1 = \widetilde{C}''_2 = -\widetilde{C}'_1 \operatorname{ch}(k_1 h)$ и в итоге

$$v_{1} = \frac{y_{1} + y_{2}}{2} = \frac{k_{2}h(\operatorname{ch} k_{1}h - \operatorname{ch} k_{1}x_{2})}{k_{1} \operatorname{sh} k_{1}h}, \\ \frac{B_{1}}{\beta_{*}} = \frac{y_{1} - y_{2}}{2} = -\frac{k_{2}x_{2}}{k_{1}} + \frac{k_{2}h \operatorname{sh} k_{1}x_{2}}{k_{1} \operatorname{sh} k_{1}h}.$$
(12.44)

Это решение можно представить через безразмерные параметры $\frac{x_2}{h}$, $\frac{v_1G_*\mu_D}{C_1h^2}$ и $\frac{B_1}{B_0}$, где $G_* = k_1h = \frac{B_0h}{\beta_*\nu_m}$ — число Гартмана, характеризующее соотношение между магнитными силами и силами вязкости.

При $k_2 = -\frac{1}{\mu_D} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \text{const}$ и $k_1 \to 0$ из первого равенства (12.44) следует $v_1^{\circ}(x_2) \to \frac{k_2(h^2 - x_2^2)}{2}$, что соответствует частному случаю (8.42), а при достаточно большом значении k_1 изменение скорости происходит в основном в узком слое, прилегающем к плоскостям $x_2 = \pm h$, но при этом $v_1(x_2) < v_1^{\circ}(x_2)$ [70]. В таком случае из первого уравнения (12.38) следует $\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} + \mu_D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$. Первое слагаемое в правой части этого равенства, согласно второму соотношению (12.44), положительно при $x_2 \to 0$ и отрицательно при $x_2 \to \pm h$, что приводит к замедлению движения жидкости в центральной части канала и более резкому изменению скорости при $x_2 o \pm h.$

Для течения, вызванного движением с постоянной скоростью v_0 стенки канала при $x_2 = h$, примем на другой, неподвижной, стенке (при $x_2 = 0$) $B_1 = B_1^{\circ}, \frac{\partial B_1}{\partial x_2} = 0$ и $v_1 = 0$. Кроме того, положим $\frac{\partial p}{\partial x_1} = C_1 = 0$. При этих условиях в (12.43) $k_2 = 0, \ \tilde{C}'_2 = -\tilde{C}'_1 = \frac{v_0}{\mathrm{sh}\,k_1h}, \ \tilde{C}''_1 = -\tilde{C}''_2 = \frac{B_1^{\circ}}{\beta_{\bullet}} + \tilde{C}'_2$ и в итоге

$$v_1 = v_0 \frac{\operatorname{sh} k_1 x_2}{\operatorname{sh} k_1 h}, \quad B_1 = \beta_* v_0 (1 - \operatorname{ch} k_1 x_2) \operatorname{sh} k_1 h + B_1^{\circ}.$$
 (12.45)

При отсутствии магнитного поля $(k_1 \to 0)$ распределение скорости становится линейным: $\tilde{v}_1^\circ = v_0 x_2/h$, что согласуется с соответствующим частным случаем в (8.42). Наличие магнитного поля тормозит движение жидкости: $v_1(x_2) < \tilde{v}_1^\circ(x_2)$, напряжение трения $\tau = \mu_D \frac{dv_1}{dx_2}$ на движущейся стенке возрастает, а на неподвижной — падает.

Если жидкость однородна, то закон сохранения энергии для рассматриваемого установившегося течения имеет вид [70]

$$\mu_D \left(\frac{dv_1}{dx_2}\right)^2 + \lambda^{(T)} \frac{d^2 T}{dx_2^2} + \frac{\nu_m}{\mu_0} \left(\frac{dB_1}{dx_2}\right)^2 = 0,$$

где $\lambda^{(T)}$ и T — теплопроводность и температура жидкости соответственно. Отсюда с учетом (12.45) получим

$$\lambda^{(T)} \frac{d^2 T}{dx_2^2} = -\mu_D v_0^2 k_1^2 \frac{\mathrm{ch} 2k_1 x_2}{\mathrm{sh}^2 k_1 h}$$

и после интегрирования

$$\lambda^{(T)}T(x_2)=-rac{\mu_D v_0^2\operatorname{ch}2k_1x_2}{4\operatorname{sh}^2k_1h}+\overline{C}_1+\overline{C}_2.$$

Пусть движущаяся стенка имеет температуру T_{∞} . Тогда, если неподвижная стенка идеально теплоизолирована, т. е. $\frac{dT}{dx_2} = 0$ при $x_2 = 0$, то $\overline{C}_1 = 0$ и $\overline{C}_2 = \lambda^{(T)} T_{\infty} + \frac{\mu_D v_0^2 \operatorname{ch} 2k_1 h}{4\operatorname{sh}^2 k_1 h}$, поэтому

$$T(x_2) = T_{\infty} + rac{\mu_D v_0^2 (\operatorname{ch} 2k_1 h - \operatorname{ch} 2k_1 x_2)}{4\lambda^{(T)} \operatorname{sh}^2 k_1 h},$$

причем влияние магнитного поля на температуру неподвижной стенки $T(0) = T_{\infty} + \frac{\mu_D v_0^2}{2\lambda^{(T)}}$ отсутствует. Если же температура T(0) задана, то

можно показать, что магнитное поле не влияет на плотность теплового потока $q(0) = \lambda^{(T)} \frac{dT}{dx_2}\Big|_{x_2=0} = \lambda^{(T)} \frac{T_{\infty} - T(0)}{h} + \frac{\mu_D v_0^2}{2h}$, поступающего от жидкости к неподвижной стенке.

Иногда анализ ММ магнитной гидродинамики может быть сведен к интегрированию уравнений обычной гидродинамики. Одним из таких случаев является установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости, когда вектор магнитной индукции B коллинеарен вектору скорости v жидкости, т.е. $B = K_v v$. Тогда закон сохранения количества движения (12.37) и уравнение магнитной индукции (12.36) с учетом равенства $v \times B = K_v v \times v = 0$ примут вид [70]

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p^* + \frac{(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}}{\mu_0} + \mu_D \nabla^2 \boldsymbol{v}, \quad \nabla \times (\nu_m \nabla \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}, \quad (12.46)$$

где $\nabla^2 - \partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа. Используя уравнение (3.33) и второе уравнение Максвелла (12.10), находим

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (K_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}) = K_{\boldsymbol{v}} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla K_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla K_{\boldsymbol{v}} = 0,$$

т. е. векторы v и ∇K_v ортогональны и $K_v = \text{const}$ на каждой линии тока. Если принять, что $K_v = \text{const}$ всюду в области течения жидкости, то первое уравнение (12.46) в виде

$$\rho^*(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p^* + \frac{(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}}{\mu_0} + \mu_D\nabla^2\boldsymbol{v}$$
(12.47)

будет описывать установившееся движение несжимаемой жидкости плотностью $\rho^* = \rho - K_v^2/\mu_0$ и динамической вязкостью μ_D при наличии поля давления $p^* = p + K_v^2 v_i v_i / (2\mu_0)$.

Второе уравнение (12.46) тождественно удовлетворяется, когда поле вектора скорости жидкости обладает потенциалом Φ , т.е. $v = \nabla \Phi$, или когда жидкость является идеальным проводником, т.е. $\nu_m = 0$. В первом случае после нахождения Φ путем решения уравнения Лапласа (8.21) из (12.47) можно найти p^* . Таким образом, любое потенциальное течение несжимаемой жидкости является решением уравнений магнитной гидродинамики, если $B = K_v v$ при $K_v = \text{const.}$ Во втором случае, если дополнительно принять $\mu_D = 0$ и $1 - K_v^2/(\rho\mu_0) = 0$, из (12.47) следует равенство $p + K_v^2 v_i v_i/(2\mu_0) = \text{const.}$ позволяющее найти давление p по известному векторному полю скорости, которое должно удовлетворять лишь условию несжимаемости $\nabla \cdot v = 0$. Если это условие выполнено и на бесконечности $v_\infty = B_\infty/K_v = \text{const.}$ то при переходе к системе координат, относительно которой жидкость на бесконечности покоится, получим, что при отсутствии внешних сил некоторая конфигурация, образованная магнитным полем и полем скорости, движется со скоростью $D_A = |B_{\infty}|/K_v$. Такую движущуюся конфигурацию рассматривают как волну и называют **альфесновской волной**, полагая $D_A = |B_{\infty}|/\sqrt{\rho\mu_0}$.

Если во втором случае при $\mu_D > 0$ также и $1 - K_v^2/(\rho\mu_0) > 0$, то течение жидкости плотностью ρ с динамической вязкостью μ_D в магнитном поле совпадает с течением жидкости плотностью ρ^* с динамической вязкостью μ_D при отсутствии магнитного поля.

Но если $K_v^2/(\rho\mu_0) > 1$, или, что то же самое, $|v| < |B|\sqrt{\rho\mu_0} = D_A$, то $\rho^* < 0$. Тогда, введя величины $\rho_1 = -\rho^*$, $v_1 = -v$, $p_1 = -p^* + \text{const}$, получим, что они удовлетворяют уравнениям гидродинамики $\nabla \cdot v_1 = 0$ и $\rho_1(v_1 \cdot \nabla)v_1 = -\nabla p_1 + \mu_D \nabla^2 v_1$. В этом случае вектор скорости и градиент давления в магнитогидродинамическом течении противоположны вектору скорости и градиенту давления в течении вязкой жидкости плотностью $\rho_1 = -\rho^* > 0$ с динамической вязкостью μ_D при отсутствии магнитного поля.

12.5. Модели электромагнитных процессов в деформируемой среде

Деформирование сплошной среды при наличии электромагнитного поля связано с возникновением векторного поля скорости v, которое необходимо учитывать при преобразовании в соответствии с (12.25) величин, входящих в уравнения Максвелла (12.10). При этом плотность ρ среды в уравнении неразрывности (3.31) или (3.32), отражающем закон сохранения массы, и объемная плотность ρ_e электрического заряда в уравнении (12.11), выражающем закон сохранения электрического заряда, остаются неизменными при переходе от одной системы координат к другой. При переходе к сопутствующей системе координат в (12.11) вектор $j^{(e)}$ плотности электрического тока следует заменить в соответствии с (12.25) вектором $j'^{(e)}$.

Если в изменяющейся во времени t области V, ограниченной поверхностью S, движется поверхность разрыва S^* , то для записи уравнений, выражающих законы сохранения таких физических субстанций, как количество движения, момент количества движения и энергия, можно использовать (4.35), а для формулировки условий на поверхности разрыва — (4.34). Так, применительно к закону сохранения количества движения в (4.34) и (4.35) следует положить $\Upsilon = v$, $\Psi = -\hat{\sigma}$, $\Omega_V = b + b^{(em)}$ и $\Omega_{S^*} = (\hat{\sigma}^{(emn)} + D^* \otimes G^{(em)}) \cdot n^*$ [90], где v — вектор скорости частицы сплошной среды; $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений Коши;

b и $b^{(em)}$ — векторы плотности объемных сил и объемной плотности пондеромоторных сил соответственно; $\hat{\sigma}^{(emn)}$ — несимметричный (в общем случае) тензор электромагнитных напряжений; D^* — вектор скорости точки $M^* \in S^*$; $G^{(em)}$ — вектор объемной плотности количества движения электромагнитного поля, а n^* — единичный вектор нормали к поверхности S^* , направление которого выбрано из условия $D^* \cdot n^* \ge 0$. Тогда (4.34) и (4.35) примут следующий вид:

на поверхности разрыва S^* —

$$\left[\rho \boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{D}^* - \boldsymbol{v}) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}\right] \cdot \boldsymbol{n}^* = -\left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(emn)} + \boldsymbol{D}^* \otimes \boldsymbol{G}^{(em)}\right) \cdot \boldsymbol{n}^*; \qquad (12.48)$$

в области $V \setminus S^*$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^{(em)}, \qquad (12.49)$$

где $[\cdot]$ — скачок соответствующей величины при переходе через поверхность разрыва в направлении вектора n^* (см. 4.4).

При формулировке закона сохранения момента количества движения в (4.34) и (4.35) нужно принять $\Upsilon = m{x} imes m{v}, \ m{\Psi} \cdot m{n} = m{p} imes m{x}, \ \Omega_V =$ $= x imes (b + b^{(em)}) + c^{(em)}$ и $\Omega_{S^*} = x imes ((\widehat{\sigma}^{(em)} + D^* \otimes G) \cdot n^*)$ [90], где x — радиус-вектор частицы среды, определенный в инерциальной прямоугольной системе координат Ox₁x₂x₃; п — единичный вектор внешней нормали к поверхности S; $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\widehat{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ — вектор плотности поверхностных сил; $c^{(em)} = P^{(e)} \times E' + M'^{(m)} \times B$ — вектор момента пондеромоторных сил; $P^{(e)}$ и B — векторы электрической поляризованности и магнитной индукции соответственно; E' = E + v imes B и $M'^{(m)} = M^{(m)} + v \times P^{(e)}$ — векторы напряженности электрического поля и намагниченности, определенные в соответствии с (12.25) в сопутствующей системе координат с ортами $e_i, i = 1, 2, 3; E$ и $M^{(m)}$ те же величины, но в инерциальной прямоугольной системе координат Ох₁х₂х₃ с теми же ортами. В этом случае (4.35) после преобразований примет вид [90] $e_{ijk}\sigma_{ik} + c_i^{(em)} = 0, \ j, k = 1, 2, 3,$ где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты, σ_{ik} — компоненты тензора $\widehat{\sigma}$, $c_i^{(em)}$ — проекции вектора $c^{(em)}$ на оси Ox_i , а для условия на поверхности разрыва S^* из (4.34) получим

$$[\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\otimes(\boldsymbol{D}^*-\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{n}^*=[(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n}^*)\times\boldsymbol{x}]+\big((\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(em)}+\boldsymbol{D}^*\otimes\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{n}^*\big)\times\boldsymbol{x}.$$

Применительно к закону сохранения энергии в (4.34) и (4.35) следует положить $\Upsilon = u + \frac{|v|^2}{2}, \Psi = q - \hat{\sigma} \cdot v, \Omega_V = b \cdot v + q_V + q_V^{(e)} + \frac{\partial P^{(e)}}{\partial t} \cdot E' - M'^{(m)} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}, \Omega_{S^*} = \left(\left(\varepsilon_0 |E^2| + \frac{|B|^2}{\mu_0} \right) \frac{D}{2} - S + (E \cdot P^{(e)})v \right) \cdot n^*$ [90], где u -массовая плотность внутренней энергии; q -вектор плотности теплового потока; q_V — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты (за исключением джоулевой теплоты $q_V^{(e)} = j'^{(e)} \cdot E'$); ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные соответственно; $S = E \times H$ — вектор Умова — Пойнтинга, H — вектор напряженности магнитного поля. После подстановки последних выражений для Υ , Ψ , Ω_V , Ω_S в (4.35) и (4.34) с учетом равенства (12.49) получим:

в области $V \setminus S^*$

$$\rho \frac{du}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + q_V + q_V^{(e)} + \frac{\partial \boldsymbol{P}^{(e)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{M}'^{(m)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \qquad (12.50)$$

на поверхности разрыва S^*

$$\left[\rho \left(u + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} \right) (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{v}) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{q} \right] \cdot \boldsymbol{n}^* = \\ = - \left(\left(\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}^2| + \mu_0 |\boldsymbol{B}|^2 \right) \frac{\boldsymbol{D}}{2} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{P}^{(e)}) \boldsymbol{v} - \boldsymbol{S} \right) \cdot \boldsymbol{n}^*,$$

где $\widehat{\mathbf{V}}$ — тензор скоростей.

Если в неравенстве (4.18) Клаузиуса — Дюгема учесть джоулеву теплоту $q_V^{(e)}$, то оно с учетом преобразования Лежандра (4.21) примет вид

$$\rho\left(\frac{du}{dt} - h\frac{dT}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) \ge -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \nabla T + q_V + q_V^{(e)},$$

где T — абсолютная температура; h и A — массовые плотности энтропии и свободной энергии соответственно. Отсюда с учетом равенства (12.50) получим иную форму записи второго закона термодинамики:

$$-\rho\left(h\frac{dT}{dt} + \frac{dA}{dt}\right) + \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{P}^{(e)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{M}'^{(m)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ge \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \nabla T. \quad (12.51)$$

В качестве аргументов массовой плотности A свободной энергии примем реактивные переменные: абсолютную температуру T, компоненты ε_{ij} тензора малой деформации и проекции $P_k^{(e)}$ и B_k векторов $P^{(e)}$ и B на координатные оси Ox_k . При $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$ можно принять плотность $\rho = \text{const}$, а компоненты $V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ тензора $\widehat{\mathbf{V}}$ заменить компонентами $V_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$. Тогда (12.51) можно представить в виде

$$\begin{split} &-\rho\Big(h+\frac{\partial A}{\partial T}\Big)\frac{\partial T}{\partial t}+\Big(\sigma_{ij}-\rho\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t}-\frac{q_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k}+\\ &+\Big(E'_k-\rho\frac{\partial A}{\partial P^{(e)}_k}\Big)\frac{\partial P^{(e)}_k}{\partial t}-\Big(M'^{(m)}_k+\rho\frac{\partial A}{\partial B_k}\Big)\frac{\partial B_k}{\partial t}\geqslant 0, \end{split}$$

где q_k , E'_k и $M'^{(m)}_k$ — проекции на оси Ox_k векторов q, E' и $M'^{(m)}$ соответственно. Выполнение этого неравенства является необходимым условием реализуемости рассматриваемого *термомеханического* процесса деформирования сплошной среды при ее взаимодействии с электромагнитным полем, а достаточными условиями при произвольных значениях скоростей изменения во времени реактивных переменных (см. 4.5) будут равенства

$$h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E'_k = \rho \frac{\partial A}{\partial P_k^{(e)}}, \quad M'^{(m)}_k = -\rho \frac{\partial A}{\partial B_k} \qquad (12.52)$$

и неравенство $\frac{q_k}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \leqslant 0.$

Приняв отклонение $\Delta T = T - T_0$ от температуры T_0 естественного состояния малым, т.е. $|\Delta T|/T_0 \ll 1$, объемную плотность свободной энергии при учете только упругой деформации среды представим в виде

$$\rho A = \frac{C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}}{2} - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\Delta T + F_{kij}^{(e)}\varepsilon_{ij}P_k^{(e)} + F_{kij}^{(m)}\varepsilon_{ij}B_k + \frac{K_{ij}^{(e)}P_j^{(e)}P_i^{(e)}}{2} + \frac{K_{ij}^{(m)}B_jB_i}{2} - N_i^{(e)}P_i^{(e)}\Delta T - N_i^{(m)}B_i\Delta T + K_{ij}^{(em)}P_j^{(e)}B_i - \frac{\rho c_{\varepsilon}}{T_0}\frac{(\Delta T)^2}{2},$$

где $C_{ijkl}, l = 1, 2, 3, -$ компоненты тензора коэффициентов упругости; $\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)}, \ \alpha_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора коэффициентов температурной деформации; c_{ε} — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации. Тогда с учетом (12.52) получим

$$h = \rho(\beta_{ij}\varepsilon_{ij} + N_i^{(e)}P_i^{(e)} + N_i^{(m)}B_i) + \frac{c_{\epsilon}}{T_0}\Delta T,$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\Delta T + F_{kij}^{(e)}P_k^{(e)} + F_{kij}^{(m)}B_k,$$

$$E'_i = K_{ij}^{(e)}P_j^{(e)} + F_{ikl}^{(e)}\varepsilon_{kl} + K_{ij}^{(em)}B_j - N_i^{(e)}\Delta T,$$

$$M'_i^{(m)} = K_{ij}^{(m)}B_j + F_{ikl}^{(m)}\varepsilon_{kl} + K_{ij}^{(em)}P_j^{(e)} - N_i^{(m)}\Delta T.$$

$$(12.53)$$

Коэффициенты в (12.53) могут быть установлены при построении математической модели (ММ) конкретной деформируемой сплошной среды при ее взаимодействии с электромагнитным полем. Ниже кратко рассмотрим особенности построения ММ применительно к упругим диэлектрикам (в том числе к пьезоэлектрикам), проводникам и ферромагнетикам. Так как для диэлектриков и большинства пьезоэлектриков $j^{(e)} = 0$ и $\rho_e = 0$, то уравнения Максвелла (12.10) принимают вид

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0,$$
(12.54)

где D — вектор электрического смещения. Для анизотропных материалов векторы E, D и H, B связаны соотношениями (12.4) и (12.9). Из второго равенства (12.53) можно заключить, что компоненты $F_{kij}^{(e)}$ тензора третьего ранга $\widehat{\mathbf{F}}^{(e)}$ связаны с компонентами d_{ijk} тензора $\widehat{\mathbf{d}}$ пьезоэлектрических коэффициентов, а компоненты $F_{kij}^{(m)}$ тензора $\widehat{\mathbf{F}}^{(m)}$ описывают пьезомагнитные эффекты, аналогичные пьезоэлектрическим эффектам (см. 12.1).

Если ввести тензор коэффициентов *диэлектрической восприимчивости* с компонентами $\chi_{ij}^{(e)}$, обратный тензору с компонентами $\varepsilon_0 K_{ij}^{(e)}$, и учесть первое равенство (12.25), то третье равенство (12.53) примет вид

$$P_{i}^{(e)} = \varepsilon_{0} \chi_{ij}^{(e)} \left(E_{j} + e_{jkl} v_{k} B_{l} - F_{jkl}^{(e)} \varepsilon_{kl} - K_{jk}^{(em)} B_{k} + N_{j} \Delta T \right), \quad (12.55)$$

где e_{jkl} — символ Леви-Чивиты; v_l — проекции вектора v на оси Ox_l . Отсюда следует, что $\varepsilon_0 \chi_{ij}^{(e)} N_j = p_i^{\circ}$ — проекции вектора p° пироэлектрических коэффициентов, характеризующих спонтанную поляризацию пироэлектриков. Для диэлектрика, не проявляющего пьезомагнитных свойств, $F_{ijk}^{(m)} = 0$, и при отсутствии магнитного поля (B = 0) второе равенство (12.53) с учетом (12.55) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(e)} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}^{(e)} \Delta T + F_{ijk}^{(E)} E_k, \qquad (12.56)$$

где $C_{ijkl}^{(e)} = C_{ijkl} - \varepsilon_0 F_{ijm}^{(e)} \chi_{ms}^{(e)} F_{skl}^{(e)}$, m, s = 1, 2, 3, - компоненты **пьезо**электрического тензора коэффициентов упругости; $\beta_{ij}^{(e)} = \beta_{ij} - \varepsilon_0 F_{ijm}^{(e)} \chi_{ms}^{(e)} N_s^{(e)}$; $F_{ijk}^{(E)} = \varepsilon_0 F_{ijm}^{(e)} \chi_{mk}^{(e)}$. Левую часть уравнения теплопроводности (5.18) следует дополнить слагаемыми $T_0 N_k \frac{\partial P_k^{(e)}}{\partial t}$, появляющимися при подстановке в (4.22) первого равенства (12.53).

Для большинства диэлектриков можно пренебречь собственной намагниченностью [90], т. е. допустимо положить $M'^{(m)} = 0$ и не рассматривать четвертое равенство (12.53), хотя, согласно (12.25), в инерциальной системе координат $Ox_1x_2x_3$ для таких диэлектриков $M^{(e)} = = P^{(e)} \times v$.

Рассмотрим продольные колебания пьезоэлектрика в виде полосы длиной L с прямоугольным *поперечным сечением* шириной b и высотой h, причем $L \gg b \gg h$ (рис. 12.7). Примем, что ориентация однород-



Рис. 12.7

ной пьезоэлектрической структуры материала полосы произвольна, но компоненты тензора деформации зависят только от продольной координаты x_1 и времени t. Поверхности полосы при $x_3 = \pm h/2$ покрыты электродами, соединенными с источником переменного электрического напряжения с *круговой частотой колебаний* ω , создающего в полосе электрическое поле, вектор напряженности которого имеет лишь одну проекцию $E_3 = E^{\circ} \cos \omega t$, $E^{\circ} = \text{const}$ [90]. Все боковые поверхности полосы свободны от механической нагрузки. Поэтому, если $T = T_0$, то, согласно (12.56), $\sigma_{i2} = C_{i2kl}^{(e)} \varepsilon_{kl} + F_{i23}^{(e)} E_3 = 0$ при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$, а $\sigma_{i3} =$ $= C_{i3kl}^{(e)} \varepsilon_{kl} + F_{i33}^{(e)} E_3 = 0$ при $x_3 \pm h/2$.

Поскольку $L \gg b$ и $L \gg h$, можно положить $\sigma_{i2} = \sigma_{2i} = \sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$ во всем объеме полосы, т.е. от нуля отлична лишь одна компонента тензора напряжений $\sigma_{11} = C_{11kl}^{(e)} \varepsilon_{kl} + F_{113}^{(E)} E_3$. Отсюда следует, что эта компонента зависит только от x_1 и t, и с учетом (12.56) можно записать

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = S_{11ij}^{(e)} \sigma_{ij} - S_{11ij}^{(e)} F_{ij3}^{(E)} E_3 = S_{1111}^{(e)} \sigma_{11} - S_{11ij}^{(e)} F_{ij3}^{(E)} E_3,$$

где u_1 — проекция вектора перемещения на ось $Ox_1; S_{klij}^{(e)}$ — компоненты тензора, обратного тензору с компонентами $C_{ijkl}^{(e)}$. Таким образом,

$$\sigma_{11} = \frac{1}{S_{1111}^{(e)}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - d^{\circ} \cos \omega t, \quad d^{\circ} = -\frac{E^{\circ} S_{11ij}^{(e)} F_{ij3}^{(E)}}{S_{1111}^{(e)}}.$$
 (12.57)

В этом случае уравнение движения в проекции на ось Ox_1 принимает вид волнового уравнения $S_{1111}^{(e)}\dot{\partial}_{t^2}^{2u_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$, поскольку для однородного материала полосы коэффициент d° не зависит от x_1 . При гармонических колебаниях напряженности электрического поля решение этого уравнения будем искать в виде $u(x_1,t) = f(x_1)\cos\omega t$. Функция $f(x_1)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению $\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \omega^2 S_{1111}^{(e)} \rho f = 0$, общим решением которого будет $f(x_1) = A_1 \sin k_1 x_1 + A_2 \cos k_1 x_1$, где $k_1 = \omega \sqrt{S_{1111}^{(e)} \rho}$. Если к торцам полосы не приложены механические нагрузки, то $\sigma_{11} = 0$ при $x_1 = \pm L/2$. Тогда с учетом (12.57) имеем $A_1 = \frac{d^{\circ}}{k_1 \cos(k_1 L/2)}$ и $A_2 = 0$. В итоге получим

$$u_1(x_1,t) = \frac{d^{\circ}}{k_1 \cos \frac{k_1 L}{2}} \sin k_1 x_1 \cos \omega t.$$
(12.58)

Так как $\cos \frac{k_1 L}{2} = 0$ при $\frac{k_1 L}{2} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, то резонанс возникнет при значениях $\omega = \frac{(2n-1)\pi}{L} (S_{1111}^{(e)} \rho)^{-1/2}$.

Если считать процесс колебаний адиабатическим и пренебречь теплопроводностью, то, учитывая (12.55) и дополнительные слагаемые в (5.18), при B = 0 получаем

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \left(\beta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + N_k^{(e)} \frac{\partial P_k^{(e)}}{\partial t} \right) = \\ = \left(\rho c_{\varepsilon} + T_0 \varepsilon_0 N_i^{(e)} \chi_{ij}^{(e)} N_j^{(E)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_{ij}^{(e)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + T_0 N_i^{(E)} \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0,$$

где $N_i^{(E)} = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(e)} N_j^{(e)}$. Отсюда, полагая, что начальному моменту времени t = 0 соответствует естественное состояние системы, находим

$$\frac{T(x_1,t)}{T_0} = 1 - \frac{\beta_{ij}^{(e)}\varepsilon_{ij} + N_i^{(E)}E_i}{\rho c_{\varepsilon} + T_0 N_k^{(e)} N_k^{(E)}}.$$

Для рассматриваемого одномерного случая с учетом (12.58) запишем

$$\frac{T(x_1,t)}{T_0} = 1 - \frac{(\beta_{11}^{(e)} \widetilde{d^{\circ}} \cos k_1 x_1 + N_3^{(E)} E^{\circ}) \cos \omega t}{\rho c_{\varepsilon} + T_0 N_k^{(e)} N_k^{(E)}},$$

где $\widetilde{d}^\circ = rac{d^\circ}{\cos(k_1L/2)}.$

Некоторые пьезоэлектрики являются *полупроводниками* (например, кристаллы германия Ge, сульфида кадмия CdS и арсенида галлия Ga As [90]). Более детальные MM пьезоэлектриков представлены в [62, 106, 108].

Для проводников обычно принимают [90], что они не поляризуются и практически не намагничиваются, а также не содержат свободных электрических зарядов. Тогда уравнения Максвелла (12.10) можно записать в виде

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \ \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}^{(e)}, \ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0.$$
(12.59)

При движении проводника, определяемом векторным полем скорости v(x,t), где x — радиус-вектор точки в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, вместо E и H в галилеевом приближении, согласно (12.25), следует рассматривать $E' = E + v \times (\mu_0 H)$ и $H' = H - v \times (\varepsilon_0 E)$ соответственно.

В данном случае в правой части равенства (12.49), являющегося уравнением движения, вектор $b^{(em)}$ следует заменить вектором $b^{(L)} = j^{(e)} \times (\mu_0 H)$ объемной плотности силы Лоренца, а равенство (12.50), являющееся уравнением переноса энергии, примет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + q_V + q_V^{(e)}. \tag{12.60}$$

При взаимодействии с внешним магнитным полем конструкций в виде стержней, пластинок и оболочек, выполненных из упругих проводников, возможна потеря устойчивости положения равновесия таких конструкций [5].

Можно показать [90], что взаимосвязанные процессы переноса электрического заряда и теплоты для изотропного материала проводника в линейном приближении описываются зависимостями $j'^{(e)} =$ $= \sigma^{(e)}(E' - \kappa_0 \nabla T)$ и $q = -\lambda^{(T)} \nabla T + \pi_0 j'^{(e)}$, где $\sigma^{(e)}$ — электрическая проводимость; $\lambda^{(T)}$ — теплопроводность материала; κ_0 и π_0 — коэффициенты, связывающие соответственно перенос электрических зарядов с градиентом температуры и перенос теплоты с электрическим током. Тогда, добавляя в (5.18) слагаемое $q_V^{(e)}$, получаем для изотропного проводника уравнение теплопроводности

$$\rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t} + (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}T \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} = \lambda^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} - \pi_0 \frac{\partial j_i^{\prime(e)}}{\partial x_i} + q_V + q_V^{(e)}, \quad (12.61)$$

где λ и μ — константы Ламе.

Некоторые металлы (например, алюминий, бериллий, золото, медь, серебро [148]) имеют столь высокое значение $\sigma^{(e)}$, что их можно считать идеальными проводниками, т.е. при построении ММ можно принять $\sigma^{(e)} \to \infty$. Тогда, согласно закону Ома $j'^{(e)} = \sigma^{(e)} E'$, величина $q_V^{(e)} = j'^{(e)} \cdot E'$ будет конечной при условии $|E'| \to 0$, что в соответствии с первым равенством (12.25) приведет к соотношению $E = B \times v = \frac{H \times v}{\mu_0}$.

В этом случае первое уравнение (12.59) принимает вид $\nabla \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}) = = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$. Если в третьем уравнении (12.59) принять, что $|\boldsymbol{j}^{(e)}| \gg \varepsilon_0 \Big| \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Big|$, то получим $\boldsymbol{b}^{(L)} = \mu_0 (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}$ и вместо уравнения (12.48) запишем $\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{b} + \mu_0 (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}$.

^{*at*} Для ферромагнетиков характерно почти полное отсутствие поляризации, но существенным фактором является намагничивание, причем в соответствии с (12.25) $M'^{(m)} = M^{(m)}$. Некоторые ферромагнетики (например, железо, никель и кобальт) одновременно являются и проводниками. Среди практически непроводящих ферромагнетиков можно отметить ферриты и иттрий-железные гранаты [90]. При построении MM упругих неполяризующихся ферромагнетиков во всех равенствах (12.53) следует положить равными нулю проекции вектора $P^{(e)}$ на координатные оси. Сложность этих MM связана с необходимостью учитывать нелинейную связь намагниченности с напряженностью магнитного поля (см. 12.1) и наличие распределенного по объему сплошной среды момента *пондеромоторных сил*, приводящего к несимметричности тензора напряжений.

Приложение 1. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

Механика и электродинамика оперируют физическими величинами, которые не зависят от выбора *системы координат*, применяемой для их описания. Математически эти величины являются скалярами, векторами и *тензорами*. Без потери общности устанавливаемых закономерностей свойства векторов и тензоров удобно описывать в *deкартовой прямоугольной системе координат*, тогда как скаляр определяет физическую величину (например, плотность, температуру, работу, энергию, электрический заряд), задаваемую только ее численным значением в любой системе координат. Вектор является более сложным математическим объектом по сравнению со скаляром и не только обладает неотрицательным численным значением модуля, но и имеет направление. Понятие тензора как еще более сложного математического объекта можно ввести при помощи операций над векторами.

П1.1. Основные операции над векторами

Векторы принято обозначать латинскими или греческими буквами, набранными полужирным курсивом (например, a, x, α, ξ). В проекциях на прямолинейные оси выбранной системы координат, называемой декартовой, вектор в трехмерном пространстве записывают в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i, \tag{\Pi1.1}$$

где e_i — единичные векторы, задающие направления осей этой системы координат. Проекции вектора обычно обозначают той же буквой, что и вектор, но набранной светлым курсивом и снабженной латинским индексом (в (П1.1) индекс *i* у проекций x_i), принимающим целочисленные значения, которые соответствуют номеру координатной оси, обозначаемой латинской буквой, набранной прямым светлым шрифтом (например, x_i). Тогда декартова прямоугольная система координат с началом в точке *O* может быть обозначена как $Ox_1x_2x_3$. Если x(M) *радиус-вектор* точки *M*, определяющий ее положение в пространстве и имеющий начало в точке *O*, то его проекции являются координатами $x_i(M)$ точки *M* в указанной системе координат. Значения проекций вектора зависят от ориентации системы координат и поэтому не являются скалярами. В выбранной системе координат радиус-вектор можно представить матрицей-столбцом и, используя **символ транспониро**вания $(\cdot)^{T}$, записать $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^{T}$ или $\boldsymbol{x}^{T} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$.

Векторы e_i (i = 1, 2, 3) вместе с точкой их приложения образуют *penep* $\{e_i\}$ системы координат. Если они взаимно перпендикулярны, то их будем называть ортами, а систему координат — декартовой прямоугольной или для краткости просто прямоугольной. В этой системе координат модуль вектора $(\Pi 1.1)$ $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

При записи выражений в виде суммы произведений величин, имеющих одинаковые нижние латинские индексы, знак суммы можно опускать, принимая **правило суммирования по одинаковым индексам**. Например, согласно этому правилу (П1.1) принимает вид $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, а модуль этого вектора $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_i x_i}$. Корректной в общем случае является запись произведения величин с индексами, в которой ни один из индексов не встречается более двух раз. Индексы, по которым ведется суммирование, называют **немыми**, поскольку их обозначение, не совпадающее с обозначениями остальных индексов, не влияет на результат.

При сложении двух векторов проекция их суммы на каждую ось координат является алгебраической суммой их проекций на эту ось. При умножении вектора на число умножают на это число его проекцию на каждую ось координат. Умножение вектора на 0 дает нулевой вектор **0**.

Скалярным произведением векторов $a = a_i e_i$ и $b = b_j e_j$ (i, j = 1, 2, 3) является скаляр $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, где θ — угол между векторами, или в проекциях на оси прямоугольной системы координат

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (b_j \boldsymbol{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

где $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$ — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при i = j и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Ясно, что $a \cdot b = b \cdot a$, т.е. скалярное произведение векторов обладает свойством коммутативности. Геометрически $a \cdot b$ соответствует проекции вектора a на направление вектора b, умноженной на модуль |b|, или наоборот. Выражение $a \cdot a = |a|^2$ называют скалярным квадратом. При представлении каждого вектора матрицей-столбцом в матричной записи скалярного произведения опускают точку между сомножителями: $a^{T}b = b^{T}a$.

В данной книге использована **правая** прямоугольная система координат, для которой репер является упорядоченной **правой тройкой** некомпланарных векторов: например, орт e_1 можно совместить с ортом e_2 поворотом на угол $\pi/2$ против хода часовой стрелки, если наблюдатель находится со стороны орта e_3 . В такой системе координат векторное произведение векторов $a = a_j e_j$ и $b = b_k e_k$ является вектором $c = a \times b$ с проекциями

$$c_i = e_{ijk}a_jb_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты: $e_{ijk} = 1$, если перестановка индексов ijk четная (123, 312 или 231); $e_{ijk} = -1$, если она нечетная (132, 213 или 321), и, наконец, $e_{ijk} = 0$, если среди индексов есть одинаковые. Тогда для ортов имеем $e_i = e_{ijk}e_j \times e_k$, а векторы a, b и c в равенстве $c = a \times b$ образуют упорядоченную правую тройку. Перестановка сомножителей изменяет направление векторного произведения на противоположное. Геометрически модуль |c| равен площади параллелограмма, смежные стороны которого соответствуют векторам a и b. Ясно, что если эти векторы коллинеарны, то c = 0.

Отметим, что при выполнении вычислений могут быть полезны равенства $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$, $e_{ijk}e_{ijk} = 6$, $e_{ijk}e_{mjk} = 2\delta_{im}$, $e_{ijk}e_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.

Скалярное произведение двух векторов, один из которых является векторным произведением, называют *смешанным произведением* трех векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = e_{ijk} a_i b_j c_k = \lambda,$$

где $\lambda > 0$ и равно объему параллелепипеда, построенного на векторахсомножителях, если векторы a, b и c образуют упорядоченную правую тройку. Отметим, что при совпадении двух сомножителей это произведение равно нулю.

Векторное произведение двух векторов, один из которых является векторным произведением, называют **деойным**. Оно равно вектору

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \qquad (\Pi 1.2)$$

лежащему в плоскости векторов b и c.

Пусть наряду с прямоугольной системой координат $Ox_1x_2x_3$, определяемой репером $\{e_j\}$, задан второй репер $\{e'_i\}$ с ортами e'_i , определяющий прямоугольную систему координат $O'x'_1x'_2x'_3$ с началом в точке O'. В этой системе координат вектор (П1.1) имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{e}_i'. \tag{\Pi1.3}$$

Если умножить (П1.3) скалярно на орт e'_i , то найдем

$$x'_i = e'_i \cdot x = e'_i \cdot e_j x_j = \alpha_{ij} x_j$$
, или $x' = \mathbf{A} x$, (П1.4)

где $\alpha_{ij} = e'_i \cdot e_j$ — элемент матрицы А поворота репера при переходе от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $O'x'_1x'_2x'_3$, являющийся проекцией

орта e'_i на орт e_j (и наоборот) и равный косинусу угла между этими ортами; x' — обозначение вектора x с координатами x'_i при преобразовании его координат x_j согласно (П1.4). Умножив (П1.3) скалярно на орт e_j , получим

$$x_j = e_j \cdot e'_i x'_i = \beta_{ji} x'_i$$
, или $x = \mathbf{B} x'$, (П1.5)

где В — матрица обратного перехода от системы $O'x'_1x'_2x'_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$, содержащая элементы $\beta_{ij} = e_i \cdot e'_j = \alpha_{ji}$. Но так как, согласно (П1.4), в матричной записи $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$, то из сопоставления с (П1.5) следует $B = A^{-1} = A^T$, т. е. матрица A^{-1} , обратная матрице A, равна транспонированной матрице A^T по отношению к матрице A.

Элемент $\alpha_{ki} = e'_k \cdot e_i$ матрицы А можно рассматривать как проекцию единичного вектора e'_k на орты e_i прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Его координаты x_i в этой системе определяют точку $M \in S_0$, лежащую на поверхности S_0 сферы радиусом $r_0 = 1$. При этом e'_k является единичным вектором внешней нормали к S_0 в точке $M \in S_0$. Найдем среднее на этой поверхности значение произведения $x_i x_j$, т.е.

$$\overline{x_i x_j} = \sum_k \overline{\alpha_{ki} \alpha_{kj}} = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} x_i x_j \, dS = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} x_i n_j \, dS,$$

где $n_j = x_j$ — проекция на ось Ox_j единичного вектора внешней нормали к S_0 в точке $M \in S_0$, а символ \sum_k означает «не суммировать по k». Тогда, используя теорему Остроградского — Гаусса, получаем

$$\sum_{k} \overline{\alpha_{ki} \alpha_{kj}} = \frac{1}{S_0} \int_{V_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \, dV = \frac{1}{S_0} \int_{V_0} \delta_{ij} \, dV = \frac{V_0}{S_0} \, \delta_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{3}$$

где $V_0 = 4\pi r_0^3/3$ — объем, ограниченный сферой площадью $S_0 = 4\pi r_0^2$. Аналогично при усреднении элементов матрицы В

$$\sum_{i} \overline{\beta_{ik}\beta_{il}} = \frac{\delta_{kl}}{3}.$$
(II1.6)

Переход от прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $O'x'_1x'_2x'_3$ можно осуществить тремя последовательными поворотами координатных осей, определяемыми тремя **эйлеровыми углами** (рис. П1.1), и затем переносом точки O в соответствии с вектором $r' = \overrightarrow{OO'}$. Угол **прецессии** ψ задает положение относительно оси Ox_3 линии ON пересечения плоскостей x_1Ox_2 и $x'_1Ox'_2$, называемой **лини ей узлов**. Угол **нутации** θ определяет взаимное положение осей Ox_3



Рис. П1.1

и Ox'_3 , а угол собственного вращения φ — линии узлов и оси Ox'_1 . Отсчет всех углов ведется в положительном направлении (против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси, перпендикулярной плоскости угла).

Пусть при переходе от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $Ox_1'x_2'x_3'$ перед первым поворотом на угол ψ вокруг оси Ox_3 орты e_i и e_i' с одинаковыми номерами совпадают, а после поворота орты e_1' и e_2' , оставаясь еще в плоскости x_1Ox_2 , примут направления единичных векторов (см. рис. П1.1) $n_1 = e_1 \cos \psi + e_2 \sin \psi$ и $n_2 = e_2 \cos \psi - e_1 \sin \psi$ соответственно. Второй поворот на угол $\theta \in (0, \pi)$ вокруг линии узлов переводит вектор n_2 в положение $n' = n_2 \cos \theta + e_3 \sin \theta$, а орт e_3' из его исходного положения в его конечное положение $e_3' = e_3 \cos \theta - n_2 \sin \theta$, определяющее искомое направление оси $O'x_3'$. Векторы n_1 и n' определяют плоскость $x_1'Ox_2'$. Их поворот на угол $\varphi \in (0, 2\pi)$ вокруг этой оси дает искомые направления ортов $e_1' = n_1 \cos \varphi + n' \sin \varphi$ и $e_2' = n' \cos \varphi - n_1 \sin \varphi$. Используя приведенные соотношения, можно найти элементы матрицы A поворота репера [84]:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= e'_1 \cdot e_1 = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta, \\ \alpha_{12} &= e'_1 \cdot e_2 = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta, \\ \alpha_{13} &= e'_1 \cdot e_3 = \sin\varphi \sin\theta, \\ \alpha_{21} &= e'_2 \cdot e_1 = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta, \\ \alpha_{22} &= e'_2 \cdot e_2 = \cos\varphi \cos\psi \cos\theta - \sin\varphi \sin\psi, \\ \alpha_{23} &= e'_2 \cdot e_3 = \cos\varphi \sin\theta, \\ \alpha_{31} &= e'_3 \cdot e_1 = \sin\psi \sin\theta, \\ \alpha_{32} &= e'_3 \cdot e_2 = -\cos\psi \sin\theta, \\ \alpha_{33} &= e'_3 \cdot e_3 = \cos\theta. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ ось узлов и углы ψ и φ не определены, а определена лишь их сумма $\psi + \varphi$. В этом случае набор эйлеровых углов можно видоизменить, задавая положение оси Ox'_3 не относительно оси Ox_3 , а относительно оси Ox_1 или Ox_2 .

Возможен поворот осей в другой последовательности: $\theta_1 \to \theta_3 \to \theta_2$ (рис. П1.2). В этом случае

$$\begin{array}{l}
\alpha_{11} = \mathbf{e}_{1}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{1} = \cos\theta_{2} \cos\theta_{3}, \\
\alpha_{12} = \mathbf{e}_{1}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{2} = \cos\theta_{1} \cos\theta_{2} \sin\theta_{3} + \sin\theta_{1} \sin\theta_{2}, \\
\alpha_{13} = \mathbf{e}_{1}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{3} = \sin\theta_{1} \cos\theta_{2} \sin\theta_{3} - \cos\theta_{1} \sin\theta_{2}, \\
\alpha_{21} = \mathbf{e}_{2}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{1} = -\sin\theta_{3}, \\
\alpha_{22} = \mathbf{e}_{2}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{2} = \cos\theta_{1} \cos\theta_{3}, \\
\alpha_{23} = \mathbf{e}_{2}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{3} = \sin\theta_{1} \cos\theta_{3}, \\
\alpha_{31} = \mathbf{e}_{3}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{1} = \sin\theta_{2} \cos\theta_{3}, \\
\alpha_{32} = \mathbf{e}_{3}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{2} = \cos\theta_{1} \sin\theta_{2} \sin\theta_{3} - \sin\theta_{1} \cos\theta_{2}, \\
\alpha_{33} = \mathbf{e}_{3}^{\prime} \cdot \mathbf{e}_{3} = \cos\theta_{1} \cos\theta_{2} - \sin\theta_{1} \sin\theta_{2} \sin\theta_{3}.
\end{array}$$
(II1.7)

При перемещении репера $\{e_i\}$ вдоль пространственной кривой так, чтобы один из ортов (пусть для определенности e_1) оставался касательным к ней, происходит поворот репера. Производную орта e_i по длине *s* дуги кривой представим в виде разложения $\frac{de_i}{ds} = \kappa_{ij}e_j$, где κ_{ij} — элементы матрицы третьего порядка. Так как $e_i \cdot e_j =$ $= \delta_{ij}$, то с учетом равенства $e_i \cdot \frac{de_j}{ds} = e_i \cdot \kappa_{jk}e_k = \kappa_{ji}$ можно записать $\frac{d(e_i \cdot e_j)}{ds} = e_i \cdot \frac{de_j}{ds} + e_j \cdot \frac{de_i}{ds} = \kappa_{ji} + \kappa_{ij} = 0$, т.е. эта матрица является кососимметрической ($\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$) и вместо нее можно рассматривать вектор (см. П1.2) $\kappa = \kappa_i e_i$, где κ_i — проекции этого вектора на напра-



вления ортов e_i. Тогда

$$\frac{de_i}{ds} = \kappa \times e_i = e_{ijk} \kappa_j e_k \tag{II1.8}$$

и для произвольного вектора $a = a_i e_i$ получим

$$\frac{da}{ds} = \frac{da_i}{ds}e_i + a_i\frac{de_i}{ds} = \frac{da_i}{ds}e_i + \kappa \times a. \tag{II1.9}$$

Если орты e_2 и e_3 направить соответственно вдоль главной нормали и бинормали, то из (П1.8) следуют **формулы** Серре — Френе [47]:

$$\frac{de_1}{ds} = \kappa e_2 = \frac{e_2}{R_{\kappa}}, \quad \frac{de_2}{ds} = \tilde{\kappa} e_3 - \kappa e_1, \quad \frac{de_3}{ds} = -\tilde{\kappa} e_2$$

где κ и R_{κ} — кривизна и радиус кривизны пространственной кривой соответственно, а $\tilde{\kappa}$ — кручение этой кривой. В этом случае $\kappa = \tilde{\kappa}e_1 + \kappa e_3$ называют вектором Дарбу. Для плоской кривой $\tilde{\kappa} = 0$, а для прямой $\tilde{\kappa} = \kappa = 0$.

П1.2. Понятие тензора

Тензором \widehat{D} ранга K называют геометрический или физический объект, характеризуемый совокупностью величин $D_{i_1...i_K}$, зависящих от K индексов $i_k = 1, 2, 3, k = \overline{1, K}$, при условии, что эти величины при переходе от системы координат $Ox_1x_2x_3$ с репером e_i к системе $O'x'_1x'_2x'_3$ с репером e'_j (i, j = 1, 2, 3) и обратно изменяют свои значения в соответствии с равенствами (с учетом правила суммирования по одинаковым индексам)

$$D'_{i_1\dots i_K} = \alpha_{i_1j_1}\dots\alpha_{i_Kj_K}D_{j_1\dots j_K} \quad \text{if} \quad D_{j_1\dots j_K} = \alpha_{j_1i_1}\dots\alpha_{j_Ki_K}D'_{i_1\dots i_K},$$

где $\alpha_{i_1j_1} = \ldots = \alpha_{i_Kj_K} = \alpha_{ij} = e'_i \cdot e_j$ — элементы матрицы поворота репера. Эти величины называют компонентами тензора. Строго говоря, данное определение относится к так называемым ортогональным тензорам, рассматриваемым в прямоугольных системах координат.

Так как ранг тензора равен числу индексов при записи компонент этого тензора, то скаляр и вектор можно условно считать тензорами нулевого и первого рангов соответственно.

Тензору второго ранга $\hat{\mathbf{D}}$ можно поставить в соответствие матрицу D третьего порядка с элементами D_{ij} , совпадающими с соответствующими компонентами тензора. В этом случае можно говорить о **транспонированном тензоре** $\hat{\mathbf{D}}^{T}$, соответствующем *транспони*- рованной матрице D^{T} с элементами D_{ji} , и об обратном тензоре \widehat{D}^{-1} , соответствующем обратной матрице D^{-1} .

Очевидна аналогия между определением компонент тензора второго ранга и вычислением произведения матрицы-столбца и матрицыстроки:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 b_2 b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

Если $D_{ij} = a_i b_j$ являются компонентами тензора второго ранга $\widehat{\mathbf{D}}$, то

$$\widehat{\mathbf{D}} = a_i b_j e_i \otimes e_j = D_{ij} e_i \otimes e_j, \qquad (\Pi 1.10)$$

где символ \otimes обозначает операцию **диадного умножения векторов** (результат этой операции называют **диадным произведением векторов**). Наличие в (П1.10) сомножителей e_i и e_j подчеркивает связь компонент этого тензора с выбранной прямоугольной системой координат, имеющей penep e_i . Преобразование компонент этого тензора при переходе к системе координат с репером e'_k имеет вид

$$D'_{km} = \alpha_{ki} D_{ij} \alpha_{jm}, \quad \alpha_{ki} = e'_k \cdot e_i, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \tag{II1.11}$$

и является частным случаем приведенного выше преобразования для компонент тензора ранга K. Компоненты тензора второго ранга не изменяют своих значений при смене направлений всех координатных осей, поскольку в этом случае в (П1.11) $\alpha_{ki} = \alpha_{jm} = -1$. Отметим, что таким свойством обладают компоненты любого тензора четного ранга.

Тензор называют симметричным относительно пары индексов его компонент, если он не изменяется при их перестановке, и антисимметричным, если при перестановке этих индексов его компоненты меняют знак. Так, тензор второго ранга \hat{D} симметричен, если $D_{ij} = D_{ji}$, и антисимметричен, если $D_{ij} = -D_{ji}$. Любой тензор второго ранга с компонентами D_{ij} можно представить суммой симметричного и антисимметричного тензоров того же ранга с компонентами $D_{(ij)} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji})$ и $D_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji})$ соответственно, причем первому будет отвечать симметрическая матрица третьего порядка, а второму — кососимметрическая с нулевыми элементами на главной диагонали.

Антисимметричному тензору с компонентами $D_{\langle ij \rangle}$ можно поставить в соответствие вектор d с компонентами $d_1 = D_{\langle 23 \rangle}$, $d_2 = D_{\langle 31 \rangle}$ и $d_3 = D_{\langle 12 \rangle}$, и, наоборот, вектору d с компонентами d_k соответствует антисимметричный тензор с компонентами $D_{\langle ij \rangle} = e_{ijk}d_k, \ k = 1, 2, 3,$ где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты.

Символ Кронекера δ_{ij} определяет компоненты единичного тензора второго ранга $\widehat{\mathbf{I}}_2 = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$, i, j = 1, 2, 3, которому соответствует единичная матрица третьего порядка. В некоторых приложениях удобно симметричный тензор второго ранга $\widehat{\mathbf{D}}$ с компонентами D_{ij} представлять суммой шарового тензора $\widehat{\mathbf{D}}^\circ = D^\circ \widehat{\mathbf{I}}_2$ с компонентами $D^\circ \delta_{ij}$, где $D^\circ = D_{kk}/3$, и девиатора $\widehat{\mathbf{D}}^*$ с компонентами $D_{ij}^* = D_{ij} - D^\circ \delta_{ij}$. Шаровому тензору соответствует диагональная матрица третьего порядка с элементами D° на главной диагонали.

Так как симметрическую матрицу можно привести к диагональному виду с действительными элементами на главной диагонали [151], то и симметричный тензор $\hat{\mathbf{D}}$ второго ранга поворотом координатных осей можно преобразовать в тензор с компонентами $D'_{ij} = \lambda_k \delta_{ij}$, i, j, k = 1, 2, 3, где λ_k — действительные собственные значения соответствующей симметрической матрицы D третьего порядка. В этом случае новый репер e'_i состоит из собственных векторов этой матрицы. Собственные векторы должны удовлетворять однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (D – $\lambda_k E)e'_k = 0$, где E единичная матрица третьего порядка, а 0 — нулевой вектор. Ненулевое решение этой СЛАУ возможно лишь при условии det(D – λE) = 0, приводящем к кубическому уравнению

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \tag{\Pi1.12}$$

где $I_1 = D_{ii}$, $I_2 = \frac{1}{2}(D_{ii}D_{jj} - D_{ij}D_{ij})$ и $I_3 = \det(D)$, решением которого и являются три значения λ_i , называемые **главными значениями** тензора второго ранга. Оси координат, задаваемые репером e'_i , называют **главными осями** этого тензора.

Девиатор $\hat{\mathbf{D}}^*$ симметричного тензора $\hat{\mathbf{D}}$ второго ранга также можно привести к главным осям, причем значения λ_k^* диагональных компонент в этом случае удовлетворяют уравнению

$$(\lambda^*)^3 + I_2^* \lambda^* - I_3^* = 0, \qquad (\Pi 1.13)$$

где $I_2^* = \frac{1}{2} (D_{ii}^* D_{jj}^* - D_{ij}^* D_{ij}^*); I_3^* = \det(D^*); D^*$ — симметрическая матрица третьего порядка, соответствующая девиатору \widehat{D}^* .

Единичный тензор второго ранга $\hat{\mathbf{I}}_2 = \delta_{ij} e_i \otimes e_j$ является примером изотропного тензора, компоненты которого не изменяются при преобразовании координат и определяются символом Кронекера δ_{ij} . Изотропным также является и шаровой тензор. Среди изотропных тензоров четвертого ранга выделяют тензоры с компонентами

 $\delta_{ij}\delta_{km}$, $\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}$ и $\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk} = e_{ijl}e_{kml}$ [60]. Ясно, что изотропными будут и линейные комбинации этих тензоров. В частности, изотропным является **единичный тензор** $\hat{\mathbf{I}}_4$ четвертого ранга с компонентами $I_{ijkm} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})$.

П1.3. Операции над тензорами

Умножение всех компонент тензора $\widehat{\mathbf{A}}$ ранга K на число α дает новый тензор $\widehat{\mathbf{B}} = \alpha \widehat{\mathbf{A}}$ того же ранга с компонентами, равными произведениям соответствующих компонент тензора $\widehat{\mathbf{A}}$ на это число. Сумма тензоров $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ одинакового ранга равна тензору $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{B}}$ того же ранга с компонентами, равными сумме соответствующих компонент тензоров $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$. Внешним произведением тензоров $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ рангов K_A и K_B соответственно называют тензор $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{A}} \otimes \widehat{\mathbf{B}}$ ранга $K_A + K_B$ с компонентами, образованными умножением каждой компоненты тензора $\widehat{\mathbf{A}}$ на каждую компоненту тензора $\widehat{\mathbf{B}}$. Результат *диадного умно*жения двух векторов можно рассматривать как пример вычисления внешнего произведения двух тензоров первого ранга. Внешнее произведение тензоров может содержать более двух сомножителей.

Получение тензора ранга K-2 путем приравнивания у компонент тензора ранга K двух индексов и использования правила суммирования по одинаковым индексам называют **свертыванием тензора** по этим немым индексам. Эта операция определена для тензора ранга $K \ge 4$ и для нескольких пар индексов. Например, свертывание тензора $\widehat{\mathbf{A}}$ четвертого ранга с компонентами A_{ijkl} (i, j, k, l = 1, 2, 3) по первым двум индексам приводит к тензору $\widehat{\mathbf{B}}$ второго ранга с компонентами $B_{kl} = A_{iikl}$, а свертывание по двум парам индексов дает один из скаляров: A_{iikk} , A_{ijij} или A_{ijji} .

Внутренним произведением двух тензоров называют результат операции свертывания, примененной к их внешнему произведению, причем совпадающие индексы должны присутствовать в обозначениях компонент каждого тензора только по одному разу. Скалярное произведение векторов является примером внутреннего произведения двух тензоров первого ранга. В общем случае внутреннее произведение тензоров $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ рангов K_A и K_B соответственно при свертывании по одной паре индексов является тензором $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ ранга $K_A + K_B - 2$, а при свертывании по двум парам индексов — тензором $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ ранга $K_A + K_B - 4$ и т. д. Например, при $K_A = K_B = 2$ имеем

$$\begin{aligned} A_{ik}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\boldsymbol{e}_{k}\cdot B_{lj}\boldsymbol{e}_{l}\otimes\boldsymbol{e}_{j} &= A_{ik}B_{lj}\boldsymbol{e}_{i}(\boldsymbol{e}_{k}\cdot\boldsymbol{e}_{l})\otimes\boldsymbol{e}_{j} = \\ &= A_{ik}B_{lj}\delta_{kl}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\boldsymbol{e}_{j} = A_{ik}B_{kj}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\boldsymbol{e}_{j} = C_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\boldsymbol{e}_{j}, \end{aligned}$$
где $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$, а при $K_A = 4$ и $K_B = 2$ —

$$\begin{aligned} A_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \cdots B_{mn} e_m \otimes e_n &= \\ &= A_{ijkl} B_{mn} e_i \otimes e_j \otimes e_k (e_l \cdot e_m) \cdot e_n = A_{ijkl} B_{mn} \delta_{lm} e_i \otimes e_j (e_k \cdot e_n) = \\ &= A_{ijkl} B_{ln} \delta_{kn} e_i \otimes e_j = A_{ijkl} B_{lk} e_i \otimes e_j = D_{ij} e_i \otimes e_j, \end{aligned}$$

где $D_{ij} = A_{ijkl}B_{lk}$ и m, n = 1, 2, 3. Внутреннее произведение тензоров может содержать более двух сомножителей.

В качестве сомножителей во внутреннее произведение могут входить и векторы, по индексам которых происходит свертывание. Так, записи $\widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}$ или $\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{A}}$ означают, что при вычислении внутреннего произведения тензора $\widehat{\mathbf{A}}$ произвольного ранга $K \ge 2$ и вектора \mathbf{a} происходит свертывание тензора $\widehat{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{a}$ ранга K+1 по паре индексов, один из которых принадлежит компонентам вектора. В итоге получаем тензор ранга K-1. Запись $(\widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ или эквивалентные ей записи $(\widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}$ означают свертывание тензора $\widehat{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ранга K+2по двум парам индексов, что в результате приводит к тензору ранга K-2, причем в одну пару входит индекс компонент вектора \mathbf{a} , а в другую пару — индекс компонент вектора \mathbf{b} .

Часто используемым в приложениях признаком того, что совокупность величин $D_{i_1...i_K}$, зависящих от K индексов $i_k = 1, 2, 3, k = \overline{1, K}$, характеризует тензор ранга K, является условие обращения в скаляр выражения $D_{i_1...i_K}a_{i_1}...a_{i_K}$, где a_{i_k} — компоненты K произвольных векторов a_k .

Если результат свертывания тензора является скаляром, то числовое значение этого скаляра не зависит от выбранной системы координат и его называют инвариантом тензора. Например, свертывание тензора $\widehat{\mathbf{D}}$ второго ранга с компонентами D_{ij} приводит к его **перво***му* (*линейному* относительно компонент) инварианту $I^{(1)} = D_{ii}$. Если эти компоненты усреднить по всем возможным ориентациям осей Ox_i прямоугольной системы координат, то получим шаровой тензор с компонентами $I^{(1)}\delta_{ij}/3$ [20]. Внешнее произведение $\widehat{\mathbf{D}}\otimes\widehat{\mathbf{D}}$ с компонентами $D_{ij}D_{km}$ является тензором четвертого ранга, и его свертывание по двум парам индексов i, k и j, m или i, m и j, k даст два квадратичных инварианта $D_{ij}D_{ij}$ и $D_{ij}D_{ji}$, которые для симметричного *тензора* $\widehat{\mathbf{D}}$ в силу выполнения равенства $D_{ij} = D_{ji}$ совпадут между собой, поэтому для такого тензора $I^{(2)} = D_{ij}D_{ij}$. Аналогично можно получить кубические инварианты тензора второго ранга, которые в случае его симметрии совпадут и примут вид $I^{(3)} = D_{ij}D_{jk}D_{ki}$. Можно показать [32], что симметричный тензор второго ранга имеет не более трех независимых инвариантов (например, $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$).

Отметим, что в уравнении (П1.12) $I_1 = I^{(1)}$, $I_2 = \frac{1}{2}((I^{(1)})^2 - I^{(2)})$ и $I_3 = \frac{1}{6}((I^{(1)})^3 - 3I^{(1)}I^{(2)} + 2I^{(3)})$. Так как линейный инвариант *девиатора* равен нулю, то (П1.13) является неполным кубическим уравнением. Поскольку коэффициенты в (П1.12) и (П1.13) можно выразить через три независимых инварианта, то эти коэффициенты не зависят от выбора системы координат и поэтому также являются инвариантами. Согласно теореме Виета, в (П1.12) $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$ и $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, т. е. *главные значения* λ_i симметричного тензора второго ранга тоже можно рассматривать как его инварианты.

Несложно проверить, что $C_{(ij)}D_{\langle ij \rangle} = 0$, где $C_{(ij)}$ — компоненты симметричного тензора, а $D_{\langle ij \rangle}$ — компоненты антисимметричного тензора.

Свертывание по двум парам индексов симметричного тензора $\hat{\mathbf{B}}$ четвертого ранга, компоненты которого удовлетворяют равенствам $B_{ijkm} = B_{jikm} = B_{ijmk} = B_{jimk} = B_{kmij} = B_{mkij} = B_{mkji}$, приводит к двум независимым линейным инвариантам B_{iikk} и B_{ikik} . Если эти компоненты усреднить по всем возможным ориентациям осей Ox_i прямоугольной системы координат, то получим изотропный тензор с компонентами [20]

$$\overline{B}_{ijkm} = \frac{2B_{ppqq} - B_{pqpq}}{15} \delta_{ij} \delta_{km} + \frac{3B_{pqpq} - B_{ppqq}}{30} (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}), \quad (\Pi 1.14)$$

причем одновременное выполнение неравенств

$$B_{ppqq} \ge 0, \quad B_{pqpq} \ge 0, \quad p, q = 1, 2, 3,$$
 (II1.15)

для линейных инвариантов тензора \widehat{B} является необходимым условием неотрицательности всех компонент \overline{B}_{ijkm} соответствующего ему изотропного тензора.

П1.4. Основные формулы векторного и тензорного анализа

Тензорное поле ставит в соответствие каждой точке пространства и каждому моменту времени t meнзор $\widehat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{x},t)$, где paduyc-sekmop \boldsymbol{x} меняется в заданной области пространства, а t — в заданном промежутке времени. Тензорное поле называют непрерывно дифференцируемым, если все компоненты тензора $\widehat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{x},t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат радиус-вектора и времени. Если компоненты тензора $\widehat{\mathbf{D}}$ зависят только от \boldsymbol{x} , то тензорное поле называют стационарным. В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, в которой радиусвектор x произвольной точки имеет вид (II1.1), тензорное поле можно записать в индексных и безындексных обозначениях. Так, например, скалярное поле (для тензора нулевого ранга) $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$, или $\psi =$ $= \psi(x, t)$; векторное поле (тензор первого ранга) $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, или $\psi =$ v(x, t); поле пензора стерзор первого ранга) $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, или v = v(x, t), где $v_i(x, t)$ — координатные функции векторной функции v(x, t); поле тензора второго ранга $T_{ij} = T_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$, или $\widehat{\mathbf{T}} =$ $\widehat{\mathbf{T}}(x, t)$, где T_{ij} (i, j = 1, 2, 3) — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{T}}$, и т. д.

Из математического анализа известны основные дифференциальные операции над скалярными и векторными функциями. Так, *градиент скалярного поля* (скалярной функции)

grad
$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \equiv \nabla_{\boldsymbol{x}} \psi,$$
 (II1.16)

где e_i — penep прямоугольной системы координат, а индекс x у $\partial u \phi$ ференциального оператора Гамильтона $\nabla = (\partial/\partial x_i)e_i$ означает, что дифференцирование проведено по координатам x_i . Оператор ∇_x можно рассматривать как вектор с проекциями $\partial/\partial x_i$ на оси координат, а процедуру вычисления $\operatorname{grad}\psi(x,t)$ — как умножение вектора на скаляр. Вычисление **дивергенции векторного поля**, задаваемого векторной функцией v(x,t), можно представить как скалярное произведение векторов

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \qquad (\Pi 1.17)$$

а вычисление ротора векторного поля — как векторное произведение векторов

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{e}_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \equiv \nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (\Pi 1.18)$$

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты. Отметим, что

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\psi \boldsymbol{v}) = (\nabla_{\boldsymbol{x}} \psi) \cdot \boldsymbol{v} + \psi \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v},$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \times (\psi \boldsymbol{v}) = \psi \nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v} + (\nabla_{\boldsymbol{x}} \psi) \times \boldsymbol{v},$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}) \equiv 0, \quad \nabla_{\boldsymbol{x}} \times (\nabla_{\boldsymbol{x}} \psi) \equiv 0$$

а также

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \psi) = \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \psi, \quad \nabla_{\boldsymbol{x}} (\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \times (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}) + \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v}, \qquad (\Pi 1.19)$$

где $\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ — **дифференциальный оператор Лапласа**. Отметим, что выражение для ∇_x^2 инвариантно относительно поворота прямоугольной системы координат.

Приняв в (П1.2) $\boldsymbol{b} = \nabla_{\boldsymbol{x}}$, запишем $\nabla_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{c})$ в случае переменного вектора \boldsymbol{c} и $\nabla_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{a})$ в случае переменного вектора \boldsymbol{a} . Когда переменны и \boldsymbol{a} , и \boldsymbol{c} , объединив два последних равенства, получим

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla_{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}\times(\nabla_{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{a}), \quad (\Pi 1.20)$$

причем $\boldsymbol{a} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \neq \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{a}$. Из (П1.20) в частном случае $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}$ следует

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{v}|^2 = 2(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v} \times (\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}). \tag{\Pi1.21}$$

Полагая в (П1.2) $a = \nabla_x$ и считая сначала переменным вектор b, а затем вектор c и объединяя полученные равенства, находим

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{c}). \quad (\Pi 1.22)$$

Рассмотренные дифференциальные операции можно обобщить. Так, градиент векторного поля

$$\widehat{\mathbf{W}}(\boldsymbol{x},t) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial \big(\boldsymbol{e}_i \otimes (v_j \boldsymbol{e}_j)\big)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

является тензором второго ранга, образованным *диадным произведе*нием векторов ∇_x и v. Для **тензорного поля**, заданного тензором $\widehat{\mathbf{T}}(x,t)$ второго ранга с компонентами $T_{ij}(x,t)$, **дивергенция** является вектором (тензором первого ранга), вычисляемым как внутреннее произведение тензоров

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{T}} = \boldsymbol{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k \cdot (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \equiv \\ \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_j \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \delta_{ki} \boldsymbol{e}_j \equiv \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \widehat{\mathbf{T}}.$$

Если в области V, ограниченной поверхностью S, непрерывно дифференцируемая функция v(x,t) задает векторное поле, то для него справедлива теорема Остроградского — Гаусса в виде

$$\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, dV \equiv \int_{V} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dV = \int_{S} v_i n_i \, dS \equiv \int_{S} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \qquad (\Pi 1.23)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к S. Эту теорему можно обобщить на поля тензоров любого ранга. Так, для тензорного поля, заданного тензором $\widehat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x},t)$ второго ранга с непрерывно дифференцируемыми компонентами $T_{ij}(\boldsymbol{x},t)$, вместо (П1.23) получим

$$\int_{V} \operatorname{div} \widehat{\mathbf{T}} dV \equiv \int_{V} \boldsymbol{e}_{i} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{k}} \boldsymbol{e}_{k} \cdot (\boldsymbol{e}_{i} \otimes \boldsymbol{e}_{j}) dV =$$
$$= \int_{S} n_{k} \boldsymbol{e}_{k} \cdot T_{ij} \boldsymbol{e}_{i} \otimes \boldsymbol{e}_{j} dS \equiv \int_{S} \boldsymbol{n} \cdot \widehat{\mathbf{T}} dS. \quad (\Pi 1.24)$$

Отметим, что (П1.23) или (П1.24) обычно называют формулой Остроградского — Гаусса. Из теоремы Стокса для векторного поля следует

$$\int_{V} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, dV \equiv \int_{V} e_{ijm} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \, \boldsymbol{e}_i \, dV = \int_{S} e_{ijm} n_j v_m \boldsymbol{e}_i \, dS \equiv \int_{S} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} \, dS, \quad m = 1, 2, 3.$$

Если же поверхность S^* с единичным вектором n^* нормали опирается на замкнутый контур Γ с единичным вектором n' внешней нормали, то с учетом теоремы Остроградского — Гаусса получим

$$\int_{S^{\star}} \boldsymbol{n}^{\star} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, dS = \int_{S^{\star}} n_{i}^{\star} \boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{e}_{mjk} \frac{\partial v_{k}}{\partial x_{j}} \boldsymbol{e}_{m} \, dS = \int_{S^{\star}} n_{i}^{\star} \delta_{im} \boldsymbol{e}_{mjk} \frac{\partial v_{k}}{\partial x_{j}} \, dS =$$
$$= \int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_{ijk} n_{i}^{\star} n_{j}' v_{k} \, d\gamma = \int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{n}^{\star} \times \boldsymbol{n}') \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} \equiv \int_{\Gamma} v_{i} \, dx_{i}, \quad (\Pi 1.25)$$

где dx — вектор, касательный к контуру L, причем векторы n', dx и n^* образуют правую тройку векторов, что в данном случае соответствует обходу контура L против хода часовой стрелки, если наблюдатель находится со стороны вектора n^* . Интеграл в правой части (П1.25) носит название **циркуляции вектора** v по замкнутому контуру Γ .

П1.5. Ортогональные криволинейные координаты

Обозначим через β_i параметры трех независимых семейств поверхностей, которые заданы уравнениями $\beta_i(x) = \text{const}, i = 1, 2, 3,$ где x — радиус-вектор точки с координатами x_j в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Если через каждую точку пространства проходит одна поверхность из каждого семейства, то при условии, что якобиан $\det(\partial\beta_i/\partial x_j) \neq 0, j = 1, 2, 3$, положение этой точки можно однозначно определить тремя значениями параметров β_i , соответствующими

трем проходящим через нее поверхностям и называемыми ее криволинейными координатами. Три линии пересечения поверхностей, называемых координатными, которые проходят через эту точку, также называют координатными. Например, пересечение поверхностей $\beta_2 = \text{const}$ и $\beta_3 = \text{const}$ образует координатную линию β_1 , вдоль которой изменяется лишь координата β_1 .

Выполнение условия $det(\partial \beta_i/\partial x_j) \neq 0$ позволяет радиус-вектор любой точки представить в виде функции криволинейных координат, т.е. $x = x(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Вектор $x_i = \partial x/\partial \beta_i$ параллелен касательной в этой точке к координатной линии β_i . В дальнейшем будем полагать, что рассматриваемые три семейства поверхностей всюду пересекаются между собой под прямыми углами, т.е. три нормали к этим поверхностям в любой точке взаимно перпендикулярны, а каждая нормаль касательна к соответствующей координатной линии, т.е. параллельна соответствующему вектору x_i . С каждой точкой свяжем penep $\{e_i\}$ системы криволинейных координат, орты e_i которого параллельны векторам x_i , направлены в сторону возрастания β_i и образуют правую тройку векторов. В этом случае криволинейные координаты называют ортогональными, а модули $H_j = |x_j|$ векторов x_j — коэффициентами Ламе.

Отметим, что при переходе от точки к точке penep $\{e_j\}$ изменяет свое положение, а его орты в общем случае изменяют направления в отличие от репера $\{e_k^{\circ}\}$ неподвижной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами e_k° , k = 1, 2, 3. Так как $x_i = e_k^{\circ} \frac{\partial x_k}{\partial \beta_i}$, то

$$\boldsymbol{e}_{i} = \sum_{i} \frac{\boldsymbol{x}_{i}}{H_{i}} = \sum_{i} \frac{\boldsymbol{e}_{k}^{\circ}}{H_{i}} \frac{\partial \boldsymbol{x}_{k}}{\partial \beta_{i}}, \qquad (\Pi 1.26)$$

где символ \sum_{i} означает «не суммировать по i». Для функции $\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ имеем $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \beta_j} d\beta_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i = d\mathbf{x} \cdot \nabla \psi = (\mathbf{x}_i d\beta_i) \cdot \nabla \psi$. Отсюда с учетом (П1.26) для градиента скалярного поля, заданного функцией ψ , получим

$$\operatorname{grad}\psi\equiv
abla\psi=\sum_{i=1}^{3}rac{oldsymbol{e}_{i}}{H_{i}}rac{\partial\psi}{\partialeta_{i}},$$

а *дифференциальный оператор Гамильтона* в ортогональных криволинейных координатах примет вид

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{e_i}{H_i} \frac{\partial}{\partial \beta_i}.$$
 (II1.27)

Дифференцированием скалярного квадрата любого орта e_m (m = 1, 2, 3) по β_i можно показать, что векторы $\partial e_m / \partial \beta_i$ и e_m ортогональны. Поэтому $\partial e_m / \partial \beta_i = a_{jm}^{(i)} e_j + a_{km}^{(i)} e_k$, где $j \neq k \neq m \neq j$. Умножая скалярно равенство $\partial e_1 / \partial \beta_1 = a_{21}^{(1)} e_2 + a_{31}^{(i)} e_3$ на e_2 и учитывая ортогональность векторов x_1 и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} a_{21}^{(1)} &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \beta_1} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\boldsymbol{x}_1}{H_1} \right) \cdot \frac{\boldsymbol{x}_2}{H_2} = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial \beta_1} - \frac{\boldsymbol{x}_1}{H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} \right) \cdot \frac{\boldsymbol{x}_2}{H_2} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial \beta_1} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial (\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)}{\partial \beta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\boldsymbol{x}_1)^2}{\partial \beta_2} \right) = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \end{aligned}$$

поскольку $x_1^2 = H_1^2$. Аналогично можно найти и все остальные коэффициенты $a_{jm}^{(i)}$. В итоге, используя двойное векторное произведение векторов, можно записать [79]

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_m}{\partial \beta_i} = \sum_i (\nabla H_i \times \boldsymbol{e}_i) \times \boldsymbol{e}_m. \tag{II1.28}$$

Дифференциал ds_i длины дуги координатной линии β_i , площадь dS_i элемента координатной поверхности и элементарный объем dV в криволинейных ортогональных координатах равны соответственно

$$ds_{i} = H_{i} d\beta_{i}, \quad dS_{i} = \sum_{i,j,k} H_{j} H_{k} d\beta_{j} d\beta_{k}, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

$$dV = H_{1} H_{2} H_{3} d\beta_{1} d\beta_{2} d\beta_{3} = J^{*} d\beta_{1} d\beta_{2} d\beta_{3},$$
 (II1.29)

где $J^* = H_1 H_2 H_3$ — якобиан. Дивергенция векторного поля, заданного функцией $v = v_i e_i$ криволинейных координат, с учетом (П1.28) при $i \neq j \neq k \neq i$ имеет вид [79] div $v \equiv \nabla \cdot v = \frac{1}{J^*} \frac{\partial(H_j H_k v_i)}{\partial \beta_i}$, а ротор того же векторного поля — rot $v \equiv \nabla \times v = e_{ijk} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \beta_j} \tilde{e}_i$, где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты, $\tilde{v}_i = H_{\varsigma} v_{\varsigma}$ и $\tilde{e}_i = H_{\varsigma} e_{\varsigma}/J^*$, причем по индексу $\varsigma = 1, 2, 3$, совпадающему с индексом *i*, суммирование не производится. Лапласиан ($\partial u \phi \phi$ еренциальный оператор Лапласа) скалярной функции ψ при условии $i \neq j \neq \nu \neq i$ имеет вид

$$\nabla^2 \psi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{J^*} \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial}{\partial \beta_{\nu}} \left(\frac{H_i H_j}{H_{\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{\nu}} \right). \tag{II1.30}$$

Орты $e_1 = e_r$ и $e_2 = e_{\varphi}$ цилиндрической системы координат имеют соответственно направления радиусов концентрических окружностей и касательных к ним, в то время как орт $e_3 = e_z$ параллелен оси концентрических цилиндров. При совпадении начала этой системы с началом прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ и выборе $\beta_1 = r$, $\beta_2 = \varphi$ и $\beta_3 = z = x_3$, где r — расстояние от оси Ox_3 , а φ — угол, обычно отсчитываемый в плоскости x_1Ox_2 от оси Ox_1 , коэффициенты Ламе принимают вид $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_{\varphi} = r$ и $H_3 = H_z = 1$. Согласно (П1.30) лапласиан скалярной функции $\psi(r,\varphi,z)$ в этой системе координат

$$\nabla_{\pi}^{2}\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\varphi^{2}} + \frac{\partial^{2}\psi}{\partial z^{2}},\qquad(\Pi 1.31)$$

где r, φ — полярные координаты проекции точки на координатную плоскость x_1Ox_2 , определяющие положение точки на этой плоскости в полярной системе координат; $z = x_3$ — аппликата, т. е. расстояние точки до этой плоскости.

Орты $e_1 = e_r$, $e_2 = e_\theta$ и $e_3 = e_\varphi$ сферической системы координат имеют направления радиуса, касательной к меридиану сферы (на юг) и нормали к плоскости меридиана (на восток). При выборе $\beta_1 = r$, $\beta_2 = \theta$ и $\beta_3 = \varphi$ (здесь r — расстояние от начала координат, $\theta \in [0, \pi]$ полярное расстояние, т.е. угол, отсчитываемый вдоль меридиана от северного полюса, и $\varphi \in [-\pi, \pi]$ — долгота) для коэффициентов Ламе имеем $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\theta = r$ и $H_3 = H_\varphi = r \sin \theta$. В силу (П1.30) лапласиан скалярной функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ в этой системе координат

$$\nabla_{\rm c}^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$
 (II1.32)

Функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$, называют гармонической. Неоднородное уравнение $\nabla^2 \psi + f = 0$ с заданной функцией f называют уравнением Пуассона.

Система ортогональных координат может быть образована совокупностью попарно пересекающихся координатных линий $\beta_1 =$ = const и $\beta_2 =$ const, принадлежащих некоторой поверхности S, заданной векторной функцией $x^{\circ}(\beta_1,\beta_2)$, и координатой β_3 , отсчитываемой в направлении нормали к этой поверхности. Поверхность S называют еладкой, если эта функция дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам. Векторы $x_n^{\circ} = \partial x^{\circ}/\partial \beta_n$ (n = 1, 2) совпадают по направлению с касательными к соответствующим координатным линиям и определяют единичный вектор $n = \frac{x_1^{\circ}}{|x_1^{\circ}|} \times \frac{x_2^{\circ}}{|x_2^{\circ}|}$ нормали к поверхности в ее точке $M \in S$ с криволинейными координатами β_n . Кривую при пересечении поверхности плоскостью, параллельной n, называют нормальным сечением поверхности в этой точке. Кривизну κ этой кривой считают положительной, если n сонаправлен главному нормальному вектору кривой [47]. Известно [52], что при повороте этого сечения вокруг вектора *п* величина κ достигает своих максимального и минимального значений, называемых *главными кривизнами поверхности*, а ее нормальные сечения, называемые *линиями кри*визны в точке $M \in S$, ортогональны.

Если в каждой точке $M \in S$ в качестве координатных линий β_n выбрать линии кривизны, то криволинейные координаты станут ортогональными. С этой точкой свяжем репер $\{e_j\}$ с правой тройкой единичных векторов — ортов $e_1 = x_1^{\circ}/H_1^{\circ}$, $e_2 = x_2^{\circ}/H_2^{\circ}$ и $e_3 = n$, где $H_n^{\circ} = |x_n^{\circ}|$. Если главные кривизны поверхности в точке $M \in S$ обозначить $\kappa_1(M)$ и $\kappa_2(M)$, то в этой системе координат (П1.28) примет вид [112]

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{1}}{\partial \beta_{1}} = -\frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} \frac{\mathbf{e}_{2}}{H_{2}^{\circ}} - \kappa_{1} H_{1}^{\circ} \mathbf{e}_{3}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{1}}{\partial \beta_{2}} = \frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} \frac{\mathbf{e}_{2}}{H_{1}^{\circ}}, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_{2}}{\partial \beta_{2}} = -\frac{\partial H_{2}^{\circ}}{\partial \beta_{1}} \frac{\mathbf{e}_{1}}{H_{1}^{\circ}} - \kappa_{2} H_{2}^{\circ} \mathbf{e}_{3}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{2}}{\partial \beta_{1}} = \frac{\partial H_{1}^{\circ}}{\partial \beta_{2}} \frac{\mathbf{e}_{1}}{H_{2}^{\circ}}, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_{3}}{\partial \beta_{1}} = \kappa_{1} H_{1}^{\circ} \mathbf{e}_{1}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{3}}{\partial \beta_{2}} = \kappa_{2} H_{2}^{\circ} \mathbf{e}_{2},$$
(II1.33)

а остальные производные будут равны нулю. Любой точке с координатами β_j соответствует радиус-вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + \beta_3 \boldsymbol{e}_3$. Дифференцируя его по этим координатам с учетом (П1.33), находим $\boldsymbol{x}_1 =$ $= H_1^\circ(1 + \kappa_1\beta_3)\boldsymbol{e}_1, \, \boldsymbol{x}_2 = H_2^\circ(1 + \kappa_2\beta_3)\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_3$, т. е. в рассматриваемой системе координат для коэффициентов Ламе получаем

$$H_1 = H_1^{\circ}(1 + \kappa_1 \beta_3), \quad H_2 = H_2^{\circ}(1 + \kappa_2 \beta_3), \quad H_3 = 1.$$
 (II1.34)

Из тождества $\frac{\partial^2 e_3}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 e_3}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}$ следуют условия Кодации

$$rac{\partial (\kappa_1 H_1^\circ)}{\partial eta_2} = \kappa_2 rac{\partial H_1^\circ}{\partial eta_2}, \quad rac{\partial (\kappa_2 H_2^\circ)}{\partial eta_1} = \kappa_1 rac{\partial H_2^\circ}{\partial eta_1},$$

а из тождества $\frac{\partial^2 e_1}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}$ — равенство

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\Big(\frac{1}{H_1^{\circ}}\frac{\partial H_2^{\circ}}{\partial\beta_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\Big(\frac{1}{H_2^{\circ}}\frac{\partial H_1^{\circ}}{\partial\beta_2}\Big) = -\kappa_1\kappa_2H_1^{\circ}H_2^{\circ},$$

называемое условием Гаусса. Эти условия должны выполняться в каждой точке гладкой поверхности.

Приложение 2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Количественный анализ математических моделей (MM) механики и электродинамики, описывающих реальные процессы, часто не удается провести точными аналитическими методами. Поэтому возникающие на практике задачи обычно приходится решать приближенно, главным образом численными методами. Приемлемые с практической точки зрения приближенные методы должны не только давать необходимую информацию о рассматриваемых процессах, но и обеспечивать оценку достоверности этой информации, устанавливая возможные границы возникающей погрешности. Основой разработки таких методов может быть двойственная вариационная форма ММ, содержащая два функционала, которые достигают в своих стационарных точках на истинном решении задачи альтернативных экстремумов (минимума и максимума), совпадающих по значению. Эти функционалы составляют математическую формулировку двойственного вариационного принципа для рассматриваемой ММ, и их принято называть альтернативными. По разности их значений, полученных на приближенном решении задачи, можно объективно проконтролировать его близость к истинному решению и оценить среднеквадратичную погрешность. Кроме того, значения этих функционалов на приближенном решении позволяют оценить сверху и снизу некоторые важные интегральные характеристики рассматриваемых процессов (см. 5.4, 7.5).

П2.1. Операторное и вариационное уравнения

Пусть \mathcal{U} и \mathcal{W} — некоторые множества. Если они наделены некоторой структурой, например, являются **функциональными пространствами** (линейными, нормированными и т.п.), т.е. их элементами являются функции, то обычно отображение $A: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ называют **оператором** [21]. При действиях с операторами используют терминологию, связанную с отображениями множеств. В частности, \mathcal{U} называют областью определения оператора A и обозначают D(A), а подмножество $R(A) = \{f \in \mathcal{W}: \exists u \in \mathcal{U} \ (f = A(u))\}$ — областью значений оператора A.

Если заданы операторы $A: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ и $B: \mathcal{W}_1 \to \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \mathcal{V}$ некоторые множества, а $R(A) \subset D(B) = \mathcal{W}_1$, то говорят о **композиции** операторов $B \circ A$ с областью определения $D(B \circ A) = U$. Если включение $R(A) \subset D(B)$ не имеет места, но $R(A) \cap D(B) \neq \emptyset$, то композицию операторов $B \circ A$ можно определить на более узком множестве $D' \subset \mathcal{U}$, таком, что для любого $u \in D'$ элемент $A(u) \in D(B)$.

Оператор $I_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, который переводит любой элемент $u \in \mathcal{U}$ в себя, т.е. $I_{\mathcal{U}}(u) = u$, $u \in \mathcal{U}$, называют **тождественным**. Если каждому элементу $f \in R(A)$ отвечает единственный элемент $u \in D(A)$, то оператор $A: \mathcal{U} \to \mathcal{W}, R(A) = \mathcal{W}$, называют **взаимно однозначным**. Это означает, что для каждого $f \in \mathcal{W}$ существует решение, и притом единственное, **уравнения**

$$A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f},\tag{\Pi2.1}$$

называемого операторным. Если оператор $A: \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ является взаимно однозначным, то оператор $A^{-1}: \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, удовлетворяющий условию $A^{-1}(f) = u$ тогда и только тогда, когда выполнено (П2.1), называют обратным оператору A. При этом $D(A^{-1}) = R(A)$ и $R(A^{-1}) = D(A)$. Композиции операторов $A^{-1} \circ A = I_{\mathcal{U}}$ и $A \circ A^{-1} = I_{\mathcal{W}}$ являются тождественными операторами, преобразующими любой элемент множества \mathcal{U} или \mathcal{W} в себя [21].

Примером взаимно однозначного оператора является линейное преобразование линейного (векторного) пространства \mathbb{R}^n в себя, имеющее в некотором базисе невырожденную матрицу. В этом случае обратному оператору в том же базисе будет соответствовать обратная матрица. Произведение невырожденной матрицы на обратную ей равно, как известно, единичной матрице, которая соответствует тождественному оператору.

Дифференциальную форму математической модели (MM) можно представить в виде (П2.1), где $u \in D(A)$ и $f \in R(A)$ — соответственно искомая и заданная функции (в общем случае векторные), а A *дифференциальный оператор*, предписывающий определенные действия (в том числе и дифференцирование) над искомой функцией u и определяющий краевую задачу поиска этой функции. Оператор A отражает свойства исследуемого объекта, и его область определения D(A), как правило, является бесконечномерным линейным нормированным функциональным пространством, т. е. оно удовлетворяет аксиомам линейного пространства [51] и каждой функции $u \in D(A)$ поставлено в соответствие действительное число $||u|| \in \mathbb{R}$, называемое нормой функции (или элемента этого пространства) и удовлетворяющее трем условиям (аксиомам нормы):

1) $\|u\| \ge 0$, причем $\|u\| = 0$ тогда и только тогда, когда u = 0;

2) $\|\alpha \boldsymbol{u}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{u}\|, \ \alpha \in \mathbb{R};$

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $u, v \in \mathcal{U}$ (неравенство треугольника для нормы).

Множество $X \subset \mathcal{U}$ называют всюду плотным в нормированном пространстве \mathcal{U} , если для любого элемента $u \in \mathcal{U}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $u' \in X$, что $||u - u'|| < \varepsilon$. Последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n \in \mathcal{U}$ называют фундаментальной (последовательностью Коши) в нормированном пространстве \mathcal{U} , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N \in \mathbb{N}$, что при всех m > N и n > N верно неравенство $||u_m - u_n|| < \varepsilon$. В том случае, когда любая фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ при $n \to \infty$ имеет предел $u^* \in \mathcal{U}$, говорят о полном нормированном (или банаховом) пространстве. Если такое пространство бесконечномерное и норма в нем введена при помощи операции скалярного умножения функций [21], то пространство называют гильбертовым и обозначают \mathcal{H} . Скалярное произведение функций $u, v \in \mathcal{H}$ обозначим $\langle u, v \rangle$. Норма функции $u \in \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве связана со скалярным квадратом $\langle u, u \rangle$ равенством $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Например, гильбертовым пространством является множество $L_2(V)$ действительных функций, суммируемых с квадратом в области $V \subset \subset \mathbb{R}^3$ [21]. В $L_2(V)$ операцию скалярного умножения векторных функций $f(M), g(M) \in L_2(V)$ координат точки $M \in V$ вводят соотношением

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int_{V} \boldsymbol{f}(M) \cdot \boldsymbol{g}(M) \, dV(M),$$
 (II2.2)

а квадрат нормы функции $w(M) \in L_2(V)$ определяет интеграл

$$\|\boldsymbol{w}\|^{2} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = \int_{V} \left(\boldsymbol{w}(M) \right)^{2} dV(M). \tag{II2.3}$$

Говорят, что оператор A действует в линейном пространстве \mathcal{L} , если и $D(A) \subset \mathcal{L}$, и $R(A) \subset \mathcal{L}$. При этом предполагается, что множество D(A) всюду плотно в \mathcal{H} . Если при $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in \mathcal{L}$ выполняется условие $A(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2) = \beta_1 A(u_1) + \beta_2 A(u_2)$, то оператор Aназывают линейным. Если $\langle A(u), v \rangle = \langle u, A(v) \rangle$, $u, b \in D(A)$, то линейный оператор A называют симметрическим. Симметрический оператор A положительный, если $\langle A(u), u \rangle \ge 0$ для любого элемента $u \in D(A)$, причем $\langle A(u), u \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда u = 0. При $\langle A(u), u \rangle \ge \gamma^2 ||u||^2$, $u \in D(A)$, $\gamma \ne 0$, положительный оператор Aназывают положительно определенным.

Оператор $J: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, где \mathbb{R} — множество действительных чисел, называют **функционалом**. Любая функция $u \in D(J) \subseteq \mathcal{U}$ является **допустимой функцией** для данного функционала, который обычно обозначают J[u]. При выполнении условия $J[\beta_1u_1 + \beta_2u_2] = \beta_1 J[u_1] +$ $+\beta_2 J[u_2], \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, u_1, u_2 \in \mathcal{L}$, функционал J[u] называют линейным. Если $u_0 \in D(A)$ — решение операторного уравнения (П2.1) с линейным положительным оператором A, то значение $J[u_0]$ является наименьшим для квадратичного функционала $J[u] = \langle A(u), u \rangle / 2 - \langle u, f \rangle$ на множестве D(J) всех допустимых функций [19]. Вместо того чтобы решать операторное уравнение, можно искать наименьшее значение соответствующего функционала. Однако трудность состоит в том, что далеко не всегда удается построить ММ так, чтобы оператор в (П2.1) был положительным. Круг таких задач весьма ограничен. Поэтому важно установить более общие условия, при выполнении которых возможен переход от операторного уравнения к поиску наименьшего значения соответствующего функционала и которые не содержат требования положительности оператора.

Для каждой функции $u(M,t) \in \mathcal{U}, M \in V$, где t — время, можно построить однопараметрическое семейство функций $u_{\varepsilon}(M,t,\varepsilon) \in \mathcal{U}$, дифференцируемых по параметру $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Величину

$$\delta \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = 0} d\varepsilon \tag{II2.4}$$

называют вариацией функции и. Из (П2.4) следует, что оператор δ обладает свойствами оператора дифференцирования, т.е. для функций $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ справедливы соотношения $\delta(u_1 + u_2) = \delta u_1 + \delta u_2$ и $\delta(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot \delta u_2 + u_2 \cdot \delta u_1$. Пусть функции и и $u + \delta u$ являются допустимыми для функционала J[u], т.е. $u, u + \delta u \in D(J)$. Величину

$$\delta J[\boldsymbol{u}, \delta \boldsymbol{u}] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[\boldsymbol{u} + \varepsilon \, \delta \boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}]}{\varepsilon} \tag{II2.5}$$

называют вариацией функционала J[u] в точке u. При этом предполагается, что $\delta J[u, \delta u]$ — линейный функционал от δu . При таких условиях говорят, что функционал J[u] дифференцируем в точке $u \in D(J)$.

Функции $u \in D(J)$, которые для любых допустимых вариаций δu удовлетворяют условию $\delta J[u, \delta u] = 0$ стационарности функционала J[u], называют стационарными точками этого функционала. Точки экстремума функционала, в которых он дифференцируем, являются его стационарными точками.

Уравнение $F[u, \delta u] = 0$, левая часть которого является функционалом с областью определения $D(F) = D_u \times D_{\delta u}$, где $D_u \subset \mathcal{H}$ и $D_{\delta u} \subset \mathcal{H}$, называют **вариационным уравнением**, соответствующим (П2.1), если $D(A) \subseteq D_u$ и любое решение (П2.1) удовлетворяет этому уравнению при любой вариации $\delta u \in D_{\delta u}$, а любая функция $u \in D(A)$, обращающая это уравнение в тождество, удовлетворяет (П2.1). Так, вариационное уравнение $\langle A(u) - f, \delta u \rangle = 0$ соответствует (П2.1) [19]. Вариационное уравнение называют **голономным**, если его левая часть является вариацией $\delta J[\boldsymbol{u}, \delta \boldsymbol{u}]$ некоторого функционала $J[\boldsymbol{u}]$ с областью определения $D(J) = D_{\boldsymbol{u}}$. Если такой функционал удается найти, то (П2.1) будет равносильно уравнению $\delta J[\boldsymbol{u}, \delta \boldsymbol{u}] = 0$, т.е. решение операторного уравнения равносильно поиску стационарных точек функционала $J[\boldsymbol{u}]$. Таким образом, переход к *вариационной форме MM* может быть реализован построением голономного вариационного уравнения.

Вариационное уравнение в интегральной форме

$$\int_{V} N(\boldsymbol{u}) \,\delta \boldsymbol{u} \,dV \approx 0, \quad \boldsymbol{u} \in D(N) \subset \mathcal{H}, \tag{II2.6}$$

где N — оператор (в общем случае нелинейный) в операторном уравнении N(u) = 0, а $0 \in R(N) \subset \mathcal{H}$ — нулевой элемент, является голономным, если этот оператор обладает свойством потенциальности, т. е. интеграл в (П2.6) не зависит от пути варьирования функции $u \in D(N)$. Для выяснения условия потенциальности положим в (П2.6) $\delta u = \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ — бесконечно малые величины, а $h_1, h_2 \in D(N)$. Рассмотрим два пути варьирования: $u \to u + \beta_1 h_1 \to$ $\to u + \delta u$ и $u \to u + \beta_2 h_2 \to u + \delta u$. С точностью до величин более высокого порядка малости для этих путей варьирования получим подынтегральные выражения соответственно

$$(N(\boldsymbol{u})\beta_1\boldsymbol{h}_1 + N(\boldsymbol{u}+\beta_1\boldsymbol{h}_1)\beta_2\boldsymbol{h}_2) dV, \quad (N(\boldsymbol{u})\beta_2\boldsymbol{h}_2 + N(\boldsymbol{u}+\beta_2\boldsymbol{h}_2)\beta_1\boldsymbol{h}_1) dV.$$

Тогда условие потенциальности примет вид

$$\int_{V} \frac{N(\boldsymbol{u}+\beta_1\boldsymbol{h}_1)-N(\boldsymbol{u})}{\beta_1}\boldsymbol{h}_2 \, dV = \int_{V} \frac{N(\boldsymbol{u}+\beta_2\boldsymbol{h}_2)-N(\boldsymbol{u})}{\beta_2}\boldsymbol{h}_1 \, dV$$

В пределе при $\beta_1, \beta_2 \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{V} N_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{h}_1) \boldsymbol{h}_2 \, dV = \int_{V} N_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{h}_2) \boldsymbol{h}_1 \, dV, \qquad (\Pi 2.7)$$

где

$$N_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{h}) = \lim_{\beta \to 0} \frac{N(\boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{h}) - N(\boldsymbol{u})}{\beta} \quad - \tag{II2.8}$$

 $\partial u \phi \phi$ еренциал Гато [19] оператора N в точке $u \in D(N)$ на приращении $h \in D(N)$. В гильбертовом пространстве (П2.7) можно представить в виде $\langle N_u(h_1), h_2 \rangle = \langle N_u(h_2), h_1 \rangle$.

В частном случае N(u) = A(u) - f, $D(A) \subset \mathcal{H}$, где A — линейный оператор, а $f \in R(A)$ — фиксированный элемент, с учетом (П2.8) получим

$$N_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{h}) = \lim_{\beta \to 0} \frac{A(\boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{h}) - A(\boldsymbol{u})}{\beta} = A(\boldsymbol{h}),$$

т.е. согласно (П2.7) симметрический линейный оператор обладает свойством потенциальности. В общем случае оператор обладает свойством потенциальности, если существует его дифференциал Гато, обладающий свойством симметрии, а функционал

$$J[\boldsymbol{u}] = \int_{V} \boldsymbol{u} \, dV \int_{0}^{1} N(\beta \boldsymbol{u}) \, d\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{II2.9}$$

соответствует (П2.6). Несложно проверить, что его вариация совпадает с левой частью (П2.6). В случае N(u) = A(u) - f из (П2.9), согласно (П2.2), следует

$$J[\boldsymbol{u}] = \int_{V} \boldsymbol{u} \, dV \int_{0}^{1} \left(A(\beta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} \right) d\beta =$$

= $\frac{1}{2} \int_{V} \boldsymbol{u} A(\boldsymbol{u}) \, dV - \int_{V} \boldsymbol{u} \boldsymbol{f} \, dV = \frac{1}{2} \left\langle A(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \right\rangle, \quad (\Pi 2.10)$

т. е. приведенный выше квадратичный функционал.

П2.2. Выпуклость функционала

После построения функционала, соответствующего вариационному уравнению, которое, в свою очередь, равносильно операторному уравнению, важно выяснить, является ли стационарная точка этого функционала единственной и достигает ли он в этой точке своего наименьшего или наибольшего значения. Это можно выяснить путем проверки выпуклости функционала.

Подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ линейного пространства \mathcal{L} называют выпуклым множеством, если для любых элементов $u, v \in \mathcal{M}$ и любого числа $\beta \in [0, 1]$ элемент $\beta u + (1 - \beta)v$ также принадлежит \mathcal{M} . Простейшим примером выпуклого множества является само линейное пространство \mathcal{L} . Функционал J[u], определенный на выпуклом множестве \mathcal{M} , называют выпуклым, если для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{M}$ и $\beta \in [0, 1]$

$$J[\beta \boldsymbol{u}_1 + (1-\beta)\boldsymbol{u}_2] \leq \beta J[\boldsymbol{u}_1] + (1-\beta)J[\boldsymbol{u}_2]. \tag{II2.11}$$

Если при любых $u_1 \neq u_2$ и $\beta \in (0, 1)$ в (П2.11) выполнено строгое неравенство, т.е.

$$R(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \beta J[\boldsymbol{u}_1] + (1 - \beta)J[\boldsymbol{u}_2] - J[\beta \boldsymbol{u}_1 + (1 - \beta)\boldsymbol{u}_2] > 0, \quad (\Pi 2.12)$$

то J[u] называют *строго выпуклым функционалом*. В случае линейного пространства \mathbb{R} понятие функционала сводится к понятию действительной функции одного действительного переменного. В этом случае понятие выпуклого (строго выпуклого) функционала равнозначно понятию выпуклой вниз (строго выпуклой вниз) функции [47].

Из (П2.11) и (П2.12) следует, что сумма выпуклых функционалов является выпуклым функционалом, а сумма выпуклого и строго выпуклого функционалов является строго выпуклым функционалом. В частности, если $J_1[u]$ — линейный функционал и $J[u] = J_1[u] + J_2[u]$, то функционалы J[u] и $J_2[u]$ выпуклые (строго выпуклые) или нет одновременно. Это означает, что при исследовании выпуклости функционала J[u] в его представлении можно опускать линейные относительно элемента u слагаемые. Например, квадратичный функционал $J[u] = \langle A(u), u \rangle - 2 \langle f, u \rangle$ будет выпуклым (строго выпуклым) тогда и только тогда, когда выпуклым (строго выпуклым) является функционал $J_2[u] = \langle A(u), u \rangle$.

Выясним, при каком условии является строго выпуклым функционал $J_2[u] = \langle A(u), u \rangle$, где A — линейный симметрический оператор. Согласно (П2.12)

$$R(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \beta \langle A(\boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{u}_1 \rangle + \\ + (1-\beta) \langle A(\boldsymbol{u}_2), \boldsymbol{u}_2 \rangle - \langle A(\beta \boldsymbol{u}_1 + (1-\beta)\boldsymbol{u}_2), \beta \boldsymbol{u}_1 + (1-\beta)\boldsymbol{u}_2 \rangle = \\ = \beta (1-\beta) (\langle A(\boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{u}_1 \rangle + \langle A(\boldsymbol{u}_2), \boldsymbol{u}_2 \rangle - \langle A(\boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{u}_2 \rangle - \langle A(\boldsymbol{u}_2), \boldsymbol{u}_1 \rangle) = \\ = \beta (1-\beta) \langle A(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2), \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle.$$

Так как $\beta(1-\beta) > 0$ при $\beta \in (0, 1)$, то этот функционал будет строго выпуклым, если A — положительный оператор.

Если строго выпуклый функционал J[u] достигает на выпуклом множестве \mathcal{M} своего наименьшего значения $J_* = J[u_*]$, то элемент u_* единственный. Действительно, полагая в (П2.12) $\beta = 1/2$ и $J[u_1] = J_* = J[u_2]$, $u_1 \neq u_2$, получаем

$$R(u_1, u_2) = \frac{J[u_1] + J[u_2]}{2} - J\left[\frac{u_1 + u_2}{2}\right] = J_* - J\left[\frac{u_1 + u_2}{2}\right] > 0,$$

т.е. $J\left[\frac{u_1+u_2}{2}\right] < J_*$, а это противоречит тому, что J_* является наименьшим значением функционала на множестве \mathcal{M} .

Если строго выпуклый функционал J[u], у которого всюду в его области определения D(J) существует дифференциал Гато, имеет стационарную точку, то эта точка единственная и в ней функционал достигает наименьшего значения. Достаточно показать, что в стационарной точке строго выпуклый функционал достигает наименьшего значения, и тогда из предыдущего будет следовать, что она единственная. Пусть $u_0, u \in D(J)$ — стационарная и произвольная точки этого функционала. В силу (П2.12) при $\beta \in (0, 1)$ и $u_0 \neq u$

$$\beta J[\boldsymbol{u}] + (1-\beta)J[\boldsymbol{u}_0] > J[\beta \boldsymbol{u} + (1-\beta)\boldsymbol{u}_0].$$

Вычитая из обеих частей этого неравенства $J[u_0]$ и деля на β , получаем

$$J[\boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_0] > \frac{J[\beta \boldsymbol{u} + (1-\beta)\boldsymbol{u}_0] - J[\boldsymbol{u}_0]}{\beta} = \frac{J[\boldsymbol{u}_0 + \beta \delta \boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_0]}{\beta},$$

где $\delta u = u - u_0$. Так как функционал J[u] имеет дифференциал Гато, то, согласно (П2.5), существует предел

$$\lim_{\beta \to +0} \frac{J[\boldsymbol{u}_0 + \beta \delta \boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_0]}{\beta} = \delta J[\boldsymbol{u}_0, \delta \boldsymbol{u}] = 0,$$

поскольку u_0 — стационарная точка функционала $J[u_0]$, а $\delta J[u_0, \delta u]$ — вариация этого функционала. Тогда в силу правила перехода к пределу в неравенстве [92] получим

$$J[\boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_0] \geqslant \lim_{\beta \to +0} \frac{J[\boldsymbol{u}_0 + \beta \delta \boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_0]}{\beta} = 0,$$

т.е. $J[\boldsymbol{u}] \ge J[\boldsymbol{u}_0]$ и в силу произвольного выбора $\boldsymbol{u} \in D(J)$ в стационарной точке \boldsymbol{u}_0 функционал $J[\boldsymbol{u}]$ достигает своего наименьшего значения.

Обобщением теоремы Ферма [47] о необходимом условии экстремума действительной функции одного переменного является следующее утверждение: если функционал J[u] с областью определения D(J) достигает в точке u_* своего наименьшего значения и имеет всюду в некоторой окрестности этой точки дифференциал Гато, т. е. вариацию $\delta J[u, \delta u]$ этого функционала, то $\delta J[u_*, \delta u] = 0$. Действительно, тогда в точке $u_* \in D(J)$ в силу (П2.5) существует предел

$$\delta J[\boldsymbol{u}_*, \delta \boldsymbol{u}] = \lim_{eta o 0} rac{J[\boldsymbol{u}_* + eta \delta \boldsymbol{u}] - J[\boldsymbol{u}_*]}{eta}.$$

Но этот предел можно вычислить как производную действительной функции $\varphi(\beta) = J[\boldsymbol{u}_* + \beta \delta \boldsymbol{u}]$ по β при $\beta = 0$. Эта функция дифференцируема в некоторой окрестности точки $\beta = 0$ и достигает в этой точке наименьшего значения $\varphi(0) = J[\boldsymbol{u}_*]$. В силу теоремы Ферма $\varphi'(\beta)|_{\beta=0} = = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, $\delta J[\boldsymbol{u}_*, \delta \boldsymbol{u}] = 0$.

Итак, строго выпуклый функционал J[u] с областью определения D(J), непрерывный в окрестности своей стационарной точки $u_* \in D(J)$ и имеющий в этой окрестности вариацию $\delta J[u, \delta u]$, такую, что $\delta J[u_*, \delta u] = 0$, достигает своего наименьшего значения в этой точке. Следовательно, такой функционал имеет единственную стационарную точку, значение $J[u_*]$ будет минимальным для функционала J[u], а

и_{*} — точкой его минимума. В этом случае функционал называют минимизируемым. Ясно, что установление условий, при которых функционал является строго выпуклым, имеет существенное практическое значение при количественном анализе вариационной формы математической модели.

П2.3. Альтернативные функционалы

Существенным преимуществом вариационной формы математической модели (MM), содержащей строго выпуклый функционал, является не только возможность применения для количественного анализа MM эффективных приближенных (в том числе численных) методов, но и удобные способы контроля сходимости приближенного решения задачи к истинному. Действительно, из двух приближенных решений u_1 и u_2 в задаче на минимум функционала J[u] разумно отдать предпочтение тому из них, на котором значение функционала J[u] меньше, т.е. ближе к его наименьшему значению. В этом случае значение функционала выполняет роль обобщенного критерия для сравнения двух и более приближенных решений.

Для количественной оценки погрешности приближенного решения u можно использовать разность $\Delta J = J[u] - J[u_*]$, где $u_* - cmauu$ *онарная точка минимизируемого функционала*. Эту разность можно связать со значением $||u - u_*||$, отражающим близость истинного и приближенного решений. Но элемент u_* не известен в процессе приближенного решения задачи, поэтому не известно и значение $J[u_*]$. Следовательно, необходимо направить усилия на поиск оценки значения $J[u_*]$ снизу, чтобы получить оценку разности ΔJ сверху [19]. Такую оценку можно получить, если построить функционал I[v], $v \in D(I)$, достигающий в своей стационарной точке v_* своего наибольшего значения $I[v_*] = J[u_*]$, что приведет к оценке $\Delta J = J[u] - J[u_*] \leq J[u] - I[v]$.

В прикладных задачах значение $J[u_*]$ обычно имеет определенный содержательный смысл и соответствует некоторой усредненной характеристике исследуемого объекта или процесса. Поэтому, располагая значениями J[u] и I[v] альтернативных функционалов на приближенных решениях, можно получить двустороннюю оценку такой характеристики в виде $I[v] \leq J[u_*] \leq J[u]$.

Построение функционала I[v], альтернативного по отношению к J[u], — процесс неоднозначный, он может приводить к различным вариантам в зависимости от выбранного способа построения. Наиболее распространенный способ связан с построением на множестве $U \times V$, где U = D(J) — область определения функционала J[u], такого функционала $\Phi[u, v]$, для которого **точная верхная грань** [92] на множестве \mathcal{V} совпадает с J[u], т.е. $\sup_{v \in \mathcal{V}} \Phi[u, v] = J[u]$. Тогда задачу поиска наименьшего значения минимизируемого функционала можно интерпретировать как минимаксную:

$$J_* = \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} J[\boldsymbol{u}] = \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} \Phi[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \qquad (\Pi 2.13)$$

где $\inf_{u \in \mathcal{U}}$ — символ операции нахождения **точной нижней грани** [92] на множестве \mathcal{U} . Предположим, что в правой части (П2.13) можно поменять местами символы $\inf_{u \in \mathcal{U}} u \sup_{v \in V}$, т. е. изменить последовательность нахождения точных верхней и нижней граней: $J_* = \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} \Phi[u, v]$. Тогда получим искомый функционал

$$I[\boldsymbol{v}] = \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \Phi[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \qquad (\Pi 2.14)$$

для которого $J_* = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} I[\boldsymbol{v}].$

Если функционал $\Phi[u, v]$ определен на множестве $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, то

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}}\Phi[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\leqslant\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}}\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\Phi[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}].$$
(II2.15)

Это неравенство очевидно, если его правая часть равна $+\infty$ (это соответствует случаю, когда при любом $u \in \mathcal{U}$ функционал $\Phi[u, v]$ не ограничен по $v \in \mathcal{V}$). Далее примем, что правая часть (П2.15) равна некоторому числу β . Для любых $u \in \mathcal{U}$ и $v \in \mathcal{V}$ имеем $\Phi[u, v] \leq \sup_{v \in \mathcal{V}} \Phi[u, v]$. Поэтому и точные нижние грани по u связаны таким же неравенством: $\inf_{u \in \mathcal{U}} \Phi[u, v] \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} \sup_{v \in \mathcal{V}} \Phi[u, v]$. Отсюда следует, что функционал $I[v] = \inf_{u \in \mathcal{U}} \Phi[u, v]$ ограничен сверху числом β , которое является верхней гранью функционала I[v]. Так как точная верхняя грань является наименьшей верхней гранью, то $\sup_{v \in \mathcal{V}} I[v] \leq \beta$, что эквивалентно (П2.15).

Используя введенные обозначения, (П2.15) можно представить в виде

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}I[\boldsymbol{v}]\leqslant\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}}J[\boldsymbol{u}].$$
(II2.16)

Пусть в левой части (П2.16) точные верхняя и нижняя грани достигаются на элементах $v^* \in \mathcal{V}$ и $u_* \in \mathcal{U}$ соответственно. Тогда, согласно (П2.16), $I[v^*] \leq J[u_*]$. Часто удается сравнить значения $I[v^*]$ и $J[u_*]$. Если они совпадают, то неравенство (П2.15) на самом деле является равенством и справедливо (П2.14). Функционал $\Phi[u, v]$ с областью определения $D(\Phi) = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ можно построить следующим образом. Пусть оператор *B* отображает $\mathcal{U} =$ = D(J) в гильбертово пространство \mathcal{H} и требуется найти минимум функционала J[u] при условии B(u) = 0 (0 — нулевой элемент пространства $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$), т.е. на множестве $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{H}: B(u) = 0\}$. Если J[u]достигает минимума в точке $u_* \in \mathcal{U}$, то существует такой элемент $v \in \mathcal{V}$, что u_* является стационарной точкой функционала $\Phi[u, v] =$ $= J[u] + \langle B(u), v \rangle$ [19], т.е. вариация этого функционала

$$\delta\Phi[\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = \delta J[\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}] + \delta \langle B(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v} \rangle \tag{\Pi2.17}$$

в точке u_* равна нулю, поскольку $\delta J[u_*, \delta u] = 0$ и $B(u_*) = 0$ при $u_* \in \mathcal{U}$. Такой функционал принято называть полным по отношению к частному функционалу J[u].

Для полного функционала справедливо (П2.13). Действительно, решение минимаксной задачи можно получить лишь при выполнении условия B(u) = 0, а в этом случае $\Phi[u, v] = J[u]$ и ее решение совпадает с точкой $u_* \in \mathcal{U}$ минимума функционала J[u]. Если B — линейный оператор, а \mathcal{U} — выпуклое множество, то в правой части (П2.13) символы inf и sup можно поменять местами [12]. Тогда (П2.14) $u \in \mathcal{U}$ и сVдля искомого функционала, альтернативного по отношению к J[u], примет вид

$$I[\boldsymbol{v}] = \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} (J[\boldsymbol{u}] + \langle B(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle), \quad \boldsymbol{v} \in D(I) \subset \mathcal{V}, \tag{\Pi2.18}$$

где D(I) — область определения функционала I[v], более узкая по сравнению с множеством \mathcal{V} в силу дополнительной связи u и v условием равенства нулю вариации функционала (П2.17). Эту связь можно представить в операторной форме $u = B_*(v)$ и вместо (П2.18) записать $I[v] = J[B_*(v)] + \langle B(B_*(v)), v \rangle$, хотя оператор B_* далеко не всегда удается получить в явном виде [19].

П2.4. Оценка среднеквадратичной погрешности

Пусть $J[u] = \frac{1}{2} \langle A(u), u \rangle - \langle f, u \rangle$ — квадратичный функционал с областью определения $D(J) \subset \mathcal{H}$, соответствующий операторному уравнению (П2.1), где A — положительно определенный оператор с областью определения $D(A) = D(J), u \in D(A), f$ — заданная функция из области значений $R(A) \subset \mathcal{H}$ этого оператора, а \mathcal{H} — гильбертово пространство. В этом случае в единственной стационарной точке $u_* \in D(J)$ этого функционала он достигает минимума и она является решением (П2.1), т.е. $A(u_*) = f[21]$. Тогда для произвольного элемента $u \in D(J)$ с учетом линейности оператора A и свойств операции скалярного умножения [51] получим $\Delta J = J[u] - J[u_*] = \langle A(u - u_*), u - u_* \rangle$.

Известно [19], что минимальное значение функционала $\widetilde{J}[w] = \frac{\langle A(w), w \rangle}{\|w\|^2}$, где $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle$ — квадрат нормы элемента $w \in D(\widetilde{J}) = D(A) \subset \mathcal{H}$, достигаемое на элементе $w_1 \neq 0$ (0 — нулевой элемент гильбертова пространства), является наименьшим собственным значением $\lambda_1^* > 0$ положительно определенного оператора A, соответствующим нетривиальному решению $w_1 \neq 0$ операторного уравнения $A(w) = \tilde{\lambda}w$. Элемент $w_1 \in D(A)$ называют собственным элементом оператора A. Положив $w = u - u_*$ и $\widetilde{J}(w) = \Delta J$, запишем

$$\|\boldsymbol{w}\|^2 \leqslant \frac{\Delta J}{\lambda_1^*},\tag{\Pi2.19}$$

где, согласно (П2.3), квадрат нормы $||w||^2 = ||u - u_*||^2$ можно рассматривать как среднеквадратичную погрешность приближенного решения u по сравнению с истинным решением u_* .

Так как при количественном анализе вариационной формы математической модели (MM) приближенными методами значение ΔJ найти не удается, а λ_1^* обычно удается оценить сверху, то для достоверной оценки среднеквадратичной погрешности необходимо модифицировать неравенство (П2.19). Значение ΔJ можно заменить разностью $J[u] - I[v] \ge \Delta J$ альтернативных функционалов J[u] и I[v] (см. П2.3), а λ_1^* попытаться оценить снизу значением $\underline{\lambda}_1^* \le \lambda_1^*$. Тогда вместо (П2.19) получим

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|^2 \leqslant \frac{J[\boldsymbol{u}] - I[\boldsymbol{v}]}{\underline{\lambda}_1^*}.$$
 (II2.20)

Оценку $\underline{\lambda}_1^*$ можно получить различными способами [1,21,123]. Приведем обоснование одного из таких способов.

Пусть А — неотрицательный симметрический оператор, т.е.

$$\langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle \ge 0, \ \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, A(\boldsymbol{v}) \rangle, \ \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \in D(A) = \mathcal{U} \subset \mathcal{H}.$$
 (II2.21)

Если для некоторого числа $\beta > 0$ отрезок $[0, \beta]$ не содержит собственных значений этого оператора, то $A_{\beta} = A - \beta I_{\mathcal{U}}$, где $I_{\mathcal{U}}$ — тождественный оператор, будет положительным оператором, т.е. $\langle A_{\beta}w, w \rangle > 0$ для любого ненулевого элемента $w \in \mathcal{U}$. Это означает, что для любого $\nu^* \in [0, \beta]$ по отношению к оператору $A - \nu^* I_{\mathcal{U}}$ существует обратный оператор $R_{\nu^*} = A_{\nu^*}^{-1}$. Положим $g = A_{\beta}w$, где $w \in \mathcal{U}$ — любой ненулевой элемент. Тогда $g \neq 0$, поскольку в противном случае w был бы собственным элементом оператора A, а β — собственным значением этого оператора. Пусть $v = v(\nu^*) = R_{\nu^*}g$ — решение операторного уравнения $A_{\nu^*}v = g$. Введем вспомогательную функцию $\varphi(\nu^*) = \langle g, v \rangle = \langle A_{\nu^*}(v), v \rangle$. В частном случае $\nu^* = \beta$ имеем v = w и $\varphi(\beta) = \langle A_{\beta}(w), w \rangle$. Таким образом, положительность оператора A_{β} эквивалентна выполнению условия $\varphi(\beta) > 0$ для любого ненулевого элемента $w \in D(A)$.

Обозначим $v_1 = v(\nu_1^*) = R_{\nu_1^*}g$ и $v_2 = v(\nu_2^*) = R_{\nu_2^*}g$ решения операторного уравнения $A_{\nu^*}v = g$ для двух значений $\nu_1^*, \nu_2^* \in [0, \beta]$. Тогда $g = A_{\nu_2^*}(v_2) = A_{\nu_1^*}(v_1)$ и $A_{\nu_1^*}(v_2 - v_1) = A_{\nu_1^*}(v_2) - A_{\nu_2^*}(v_2) = (\nu_2^* - \nu_1^*)v_2$, или $v_2 - v_1 = (\nu_2^* - \nu_1^*)R_{\nu_1^*}v_2$. С учетом неравенства треугольника для нормы имеем

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}_{2} - \boldsymbol{v}_{1}\| \leq |\boldsymbol{\nu}_{2}^{*} - \boldsymbol{\nu}_{1}^{*}| \|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\nu}_{1}^{*}}\| \|\boldsymbol{v}_{2}\| &= |\boldsymbol{\nu}_{2}^{*} - \boldsymbol{\nu}_{1}^{*}| \|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\nu}_{1}^{*}}\| \|\boldsymbol{v}_{2} - \boldsymbol{v}_{1} + \boldsymbol{v}_{1}\| \leq \\ &\leq |\boldsymbol{\nu}_{2}^{*} - \boldsymbol{\nu}_{1}^{*}| \|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\nu}_{1}^{*}}\| (\|\boldsymbol{v}_{2} - \boldsymbol{v}_{1}\| + \|\boldsymbol{v}_{1}\|). \quad (\Pi 2.22) \end{aligned}$$

Поскольку ν_1^* не является собственным значением оператора A, при $\nu_2^* \rightarrow \nu_1^*$ справедливо неравенство $|\nu_2^* - \nu_1^*| ||R_{\nu_1^*}|| < 1/2$. Тогда из (П2.22) следует $||v_2 - v_1|| \leq 2|\nu_2^* - \nu_1^*| ||R_{\nu_1^*}|| ||v_1||$. Отсюда получаем, что $v_2 \rightarrow v_1$ при $\nu_2^* \rightarrow \nu_1^*$, и поэтому $\langle v_2, v_1 \rangle \rightarrow ||v_1||^2$ при $\nu_2^* \rightarrow \nu_1^*$.

С учетом (П2.21) и свойств операции скалярного умножения получим

$$\begin{aligned} \varphi(\nu_2^*) - \varphi(\nu_1^*) &= \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}_1 \rangle = \langle A_{\nu_1^*}(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle A_{\nu_2^*}(\boldsymbol{v}_2), \boldsymbol{v}_1 \rangle = \\ &= \langle A \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \nu_1^* \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle A \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \nu_2^* \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = (\nu_2^* - \nu_1^*) \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Заменяя ν_1^* на ν^* и v_1 на v и учитывая, что $\langle v_2, v \rangle \to ||v||^2$ при $\nu_2^* \to \nu^*$, в соответствии с определением производной находим

$$\varphi'(\nu^*) = \lim_{\nu_2^* \to \nu^*} \frac{\varphi(\nu_2^*) - \varphi(\nu^*)}{\nu_2^* - \nu^*} = \lim_{\nu_2^* \to \nu^*} \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Так как $g \neq 0$, то и $v \neq 0$, а значит, $\varphi'(v^*) > 0$ при $v^* \in [0, \beta]$ и функция $\varphi(v^*)$ возрастает на отрезке $[0, \beta]$. Для неотрицательного оператора A имеем $\varphi(0) = \langle Av, v \rangle \ge 0$ для любого элемента $v \in D(A)$. Следовательно, $\varphi(\beta) > 0$ для любого ненулевого элемента $w \in D(A)$.

Если A — симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , и отрезок $[\beta_1, \beta_2]$ не содержит собственных значений этого оператора, то композиция операторов $A_{\beta_1} \circ A_{\beta_2} =$ $= (A - \beta_1 I_{\mathcal{U}}) \circ (A - \beta_2 I_{\mathcal{U}})$ является положительным оператором. Для доказательства этого введем оператор $W_{\nu^*} = A_{m_++\nu^*} = A - (m_+ + \nu^*) I_{\mathcal{U}}$, где $m_+ = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$. Так как $\nu^* \in [-m_-, m_-]$ $(m_- = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1))$ не является собственным значением оператора $W_0 = A_{m_+}$, то оператор $W_{\nu^*} = W_0 - \nu^* I_{\mathcal{U}}$, а также оператор $W_{\nu^*} \circ W_{-\nu^*} = W_0^2 - (\nu^*)^2 I_{\mathcal{U}}$ имеют обратные операторы $W_{\nu^*}^{-1}$ и $(W_{\nu^*} \circ W_{-\nu^*})^{-1}$ соответственно. Это означает, что отрезок $[0, m_{-}^{2}]$ не содержит собственных значений оператора W_{0}^{2} , который, являясь квадратом симметрического оператора $A_{m_{+}} = A - m_{+}I_{\mathcal{U}}$, будет неотрицательным, так как $\langle W_{0}^{2}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle A_{m_{+}}(A_{m_{+}}(\boldsymbol{w})), \boldsymbol{w} \rangle = \langle A_{m_{+}}(\boldsymbol{w}), A_{m_{+}}(\boldsymbol{w}) \rangle = ||A_{m_{+}}(\boldsymbol{w})||^{2} \ge 0$ для любого $\boldsymbol{w} \in D(A)$. Таким образом, для оператора W_{0}^{2} на отрезке $[0, m_{-}^{2}]$ выполнены условия предыдущего утверждения о положительности оператора $A_{\nu^{*}}$. Поэтому оператор $W_{0}^{2} - m_{-}^{2}I_{\mathcal{U}} = W_{m_{-}} \circ W_{-m_{-}} = A_{\beta_{1}} \circ A_{\beta_{2}}$ является положительным.

Пусть A — симметрический оператор с областью определения $D(A) = \mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, а элемент $w \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $Aw \neq 0$. Если число $\overline{\lambda}_1^* = \frac{\langle Aw, w \rangle}{\|w\|^2}$ принадлежит интервалу (β_1, β_2) и на этом интервале находится только одно собственное значение λ^* оператора A, то справедливо неравенство

$$\psi(\beta_2) \leqslant \lambda^* \leqslant \psi(\beta_1), \tag{II2.23}$$

где $\psi(x) = \frac{x \langle A(w), w \rangle - \|A(w)\|^2}{x \|w\|^2 - \langle A(w), w \rangle}$. Оператор A на отрезках $[\beta_1, \lambda^* - \varepsilon]$ и $[\lambda^* + \varepsilon, \beta_2]$ при малом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям доказанного выше утверждения. Поэтому операторы $A_1 = A_{\beta_1} \circ A_{\lambda^* - \varepsilon} = (A - \beta_1 I_{\mathcal{U}}) \circ (A - (\lambda^* - \varepsilon)I_{\mathcal{U}})$ и $A_2 = A_{\lambda^* + \varepsilon} \circ A_{\beta_2} = (A - (\lambda^* + \varepsilon)I_{\mathcal{U}}) \circ (A - \beta_2 I_{\mathcal{U}})$ являются положительными. Следовательно,

$$\langle A_1(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle (A^2 - (\beta_1 + \lambda^* - \varepsilon)A + \beta_1(\lambda^* - \varepsilon)I_{\mathcal{U}})(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle = = \|A(\boldsymbol{w})\|^2 - (\beta_1 + \lambda^* - \varepsilon) \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle + \beta_1(\lambda^* - \varepsilon)\|\boldsymbol{w}\|^2 = = (\lambda^* - \varepsilon)(\beta_1 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle) - (\beta_1 \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle - \|A(\boldsymbol{w})\|^2) > 0$$

и аналогично

$$\langle A_2(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle (A^2 - (\beta_2 + \lambda^* + \varepsilon)A + \beta_2(\lambda^* + \varepsilon)I_{\mathcal{U}})(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle = = \|A(\boldsymbol{w})\|^2 - (\beta_2 + \lambda^* + \varepsilon) \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle + \beta_2(\lambda^* + \varepsilon)\|\boldsymbol{w}\|^2 = = (\lambda^* + \varepsilon)(\beta_2\|\boldsymbol{w}\|^2 - \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle) - (\beta_2 \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle - \|A(\boldsymbol{w})\|^2) > 0.$$

Из этих неравенств, учитывая, что $\beta_1 < \overline{\lambda}_1^* < \beta_2$, т. е. $\beta_1 \| \boldsymbol{w} \|^2 < \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle$ и $\beta_2 \| \boldsymbol{w} \|^2 > \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle$, находим

$$\lambda^* - \varepsilon < \frac{\beta_1 \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle - \|A(\boldsymbol{w})\|^2}{\beta_1 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle} = \psi(\beta_1),$$

$$\lambda^* + \varepsilon > \frac{\beta_2 \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle - \|A(\boldsymbol{w})\|^2}{\beta_2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle} = \psi(\beta_2).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (П2.23).

Если известна гарантированная оценка $\underline{\lambda}_2^*$ снизу собственного значения ν_2^* , следующего за наименьшим собственным значением λ_1^* симметрического оператора A, такая, что $\underline{\lambda}_2^* < \nu_2^* > \overline{\lambda}_1^*$, то (П2.23) можно применить для оценки снизу значения λ_1^* . Так как (П2.23) справедливо для любого β_1 , то

$$\psi(-\infty)^{\bar{}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \langle A(w), w \rangle - \|A(w)\|^2}{x \|w\|^2 - \langle A(w), w \rangle} = \frac{\langle A(w), w \rangle}{\|w\|^2} = \overline{\lambda}_1^*,$$

и поэтому

$$\psi(\underline{\lambda}_{2}^{*}) = \frac{\underline{\lambda}_{2}^{*} \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle - \|A(\boldsymbol{w})\|^{2}}{\underline{\lambda}_{2}^{*} \|\boldsymbol{w}\|^{2} - \langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle} \leqslant \lambda_{1}^{*} \leqslant \overline{\lambda}_{1}^{*} = \psi(-\infty).$$
(II2.24)

В случае положительного оператора A имеем $\langle A(w), w \rangle > 0$ и $\overline{\lambda}_1^* > 0$, поэтому вместо (П2.24) получаем

$$\overline{\lambda}_{1}^{*}\left(1-\frac{\kappa^{*}-\overline{\lambda}_{1}^{*}}{\underline{\lambda}_{2}^{*}-\overline{\lambda}_{1}^{*}}\right) \leqslant \lambda_{1}^{*} \leqslant \overline{\lambda}_{1}^{*}, \quad \kappa^{*}=\frac{\|A(\boldsymbol{w})\|^{2}}{\langle A(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle}.$$
(II2.25)

Ясно, что (П2.25) имеет смысл при условии $\overline{\lambda}_1^* \leq \kappa^*$, выполняющемся в силу неравенства Коши — Буняковского $|\langle A(w), w \rangle| \leq \leq ||A(w)|| ||w||$ [21]. Поскольку для положительного оператора $\lambda_1^* > 0$, то использование (П2.25) эффективно только при условии $\kappa^* < \underline{\lambda}_2^*$, так как в противном случае левая часть в (П2.25) не будет положительной.

Оценки (П2.24) и (П2.25) сохраняют силу и в том случае, когда собственное значение λ_1^* кратное, но изолированное. Тогда под $\underline{\lambda}_2^*$ следует понимать гарантированную оценку снизу наименьшего собственного значения $\lambda_2^* > \lambda_1^*$. Аналогично можно получить двустороннюю оценку для λ_2^* и т. д.

Изложенный подход к построению оценки среднеквадратичной погрешности, возникающей при количественном анализе вариационной формы ММ приближенными методами, в **5.3** использован при рассмотрении *линейной термоупругой среды*. Но такой подход применим не только в том случае, когда эта форма содержит квадратичный функционал. В [36] этот подход использован для анализа ММ нелинейной термоупругой среды, а в [34] — применительно к нелинейной ММ теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.

2. Адрианов В.Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия, 1972. 464 с.

3. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.

4. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия: Учеб. для вузов / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 256 с.

5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.

6. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с.

7. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 410 с.

8. Бартенев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1990. 432 с.

9. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

10. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

11. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 496 с.

12. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

13. Биркгоф Г. Гидродинамика: Методы. Факты. Подобие: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.

14. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наукова думка, 1976. 270 с.

15. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 518 с.

16. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 248 с.

17. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.

18. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2 т. Т.2. Динамика системы материальных точек. М.: Наука, 1966. 332 с. 19. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 488 с.

20. Введение в микромсханику / М. Онами, С. Ивасимидзу, К. Гэнка и др.: Пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.

21. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.

22. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 228 с.

23. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 492 с.

24. Газовая динамика. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев и др.; Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 671 с.

25. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 428 с.

26. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 350 с.

27. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.

28. Громадка II Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 304 с.

29. Гусенков А.П., Котов П.И. Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.

30. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979. 432 с.

31. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1999. 368 с.

32. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.

33. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 341 с.

34. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.

35. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 496 с.

36. Зарубин В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.

37. Зарубин В.С. Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.

38. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1966. 216 с.

39. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с. 40. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. О построении термомеханической модели релаксирующего твердого тела // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2001. № 2 (7). С. 23–30.

41. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Термомеханическая модель релаксирующего твердого тела при нестационарном нагружении // Доклады РАН. 1995. Т. 345. № 2. С. 193-195.

42. Зарубин В.С., Овчинников А.Г. Природа пластической деформации / Под ред. А.Г. Овчинникова. Ч.І. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 136 с.

43. Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.

44. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.

45. Зенкевич О. Методы конечных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 544 с.

46. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 936 с.

47. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 408 с.

48. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний: Учебник для вузов / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 272 с.

49. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 288 с.

50. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 388 с.

51. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 336 с.

52. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 456 с.

53. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 488 с.

54. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 552 с.

55. Келли А., Гровс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 496 с.

56. Кирсанов В.В. ЭВМ-эксперимент в атомном материаловедении. М.: Энергоатомиздат, 1990. 304 с.

57. Коздоба Л.А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М.: Энергия, 1972. 296 с.

58. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред: Пер. с болг. М.: Мир, 1979. 304 с.

59. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983. 350 с.

60. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Изд-во МФТИ, 1995. 240 с.

61. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 208 с.

62. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 304 с.

63. Косевич А.М. Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука, 1972. 280 с.

64. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: В 2 т. Т.2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

65. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.

66. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 328 с.

67. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 338 с.

68. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 142 с.

69. Кузьмин М.П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. М.: Энергия, 1974. 416 с.

70. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 248 с.

71. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 830 с.

72. *Курс* теоретической механики: Учеб. для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736 с.

73. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.

74. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т.8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.

75. Лихачев В.А., Волков А.Е., Шудегов В.Е. Континуальная теория дефектов (Структурно-аналитическая механика материалов). Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 232 с.

76. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

77. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1983. 640 с.

78. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

79. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

80. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.

81. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.

82. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

83. Мальков В.А., Фаворский О.Н., Леонтьев В.Н. Контактный теплообмен в газотурбинных двигателях и энергоустановках. М.: Машиностроение, 1978. 144 с.

84. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

85. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 368 с.

86. Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов и др. Т. I-3. В 2 кн. Кн. 1. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин / К.С. Колесников, Д.А. Александров, В.К. Асташев и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1994. 534 с.

87. *Машиностроение*. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов и др. Т. I-1. Математика / У.Г. Пирумов, В.С. Зарубин, А.П. Крищенко и др.; Под общ. ред. У.Г. Пирумова, В.С. Зарубина. М.: Машиностроение, 2003. 992 с.

88. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 318 с.

89. *Мешков Ю.Я.* Физические основы разрушения стальных конструкций. Киев: Наукова думка, 1981. 240 с.

90. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 560 с.

91. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.

92. Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 408 с.

93. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Наука, 1994. 192 с.

94. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 384 с.

95. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.

96. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости: Пер. с польск. М.: Мир, 1970. 256 с.

97. Новацкий В. Теория упругости: Пер. с польск. М.: Мир, 1975. 872 с.

98. Новиков И.И. Дефекты кристаллического строения металлов. М.: Металлургия, 1983. 232 с.

99. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 448 с.

100. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.

101. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 696 с.

102. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 464 с.

103. Орленко Л.П. Физика взрыва и удара. М.: Физматлит, 2006. 304 с.

104. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др.; Под ред. В.К. Кошкина. М.: Машиностроение, 1975. 624 с.

105. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения: Пер. с нем. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

106. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

107. Партон В.З, Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.

108. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики: Пер. с болг. М.: Мир, 1986. 288 с.

109. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000: математический практикум для экономистов и инженеров. М.: Финансы и статистика, 2000. 656 с.

110. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

111. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

112. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.

113. Политехнический словарь / Редкол.: А.Ю. Ишлинский (гл. ред.) и др. М.: Сов. энциклопедия, 1989. 656 с.

114. Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. М.: Металлургия, 1982. 584 с.

115. Попов В.М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. М.: Энергия, 1971. 216 с.

116. Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: Учеб. для вузов / Под ред. Д.Н. Попова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 384 с.

117. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

118. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур: Пер. с англ. М.: Мир, 2002. 461 с.

119. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

120. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

121. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.

122. Рейф Ф. Статистическая физика: Пер. с англ. М.: Наука, 1986. 336 с.

123. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 590 с.

124. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 130 с.

125. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.

126. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука, 1997. 320 с.

127. Светлицкий В.А. Механика стержней: В 2 т. Т.1. М.: Высш. шк., 1987. 320 с.

128. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.

129. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.

130. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

131. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.

132. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 350 с.

133. Стрижало В.А. Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур. Киев: Наукова думка, 1978. 238 с.

134. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 352 с.

135. *Теория* тепломассообмена / С.И. Исаев, И.А. Кожинов, В.И. Кофанов и др.; Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 684 с.

136. *Термопрочность* деталей машин / Под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.

137. Тетельбаум И.М. Электрическое моделирование. М.: Физматгиз, 1959. 320 с.

138. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: Пер. с англ. М.: Наука, 1966. 636 с.

139. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 500 с.

140. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 232 с.

141. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. 296 с.

142. Урмаев А.С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. М.: Наука, 1974. 320 с.

143. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969. 174 с.

144. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 368 с. 145. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

146. *Физика* взрыва: В 2 т. / Под ред. Л.П. Орленко. М.: Физматлит, 2004. Т. 1. 832 с. Т. 2. 656 с.

147. Физические величины: Справочник / Под ред. А.М. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

148. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. Редкол. Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.

149. Финкель В.М. Физика разрушения. М.: Металлургия, 1970. 376 с.

150. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1972. 400 с.

151. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 656 с.

152. Цянь Сюэ-сень. Физическая механика: Пер. с китайск. М.: Мир, 1965. 544 с.

153. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.

154. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

155. Штремель М.А. Прочность сплавов: В 2 ч. Ч.1. Дефекты решетки. М.: Металлургия, 1982. 280 с.

156. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабата Гюгонио 347 Пуассона 338 Альтернатива 17 Амплитуда колебаний 99 Аналогия гидромеханическая 208 - мембранная 212 песочная 218 пленочная 212 тройная 333 - электротепловая 260 Аналог механический 69 Анизотропия 39 деформационная 383 Балка 223 - консольная 223 Бародиффузия 117 Вакансия 55 Вариация изохронная 90 – функции 480 - функционала 480 Вектор Бюргерса 56 волновой 430 Герца 434 – Дарбу 464 - завихренности 110 количества движения главный 89 --- переносного главный 89 напряжения 49 перемещения 106 системы сил главный 91 Умова — Пойнтинга 436 Возврат 69 Волна 340 альфвеновская 449 плоская монохроматическая 429 - сферическая 340 ударная 144 Волны электромагнитные 429 Восприимчивость диэлектрическая 423 магнитная 426 Время запаздывания 363 – релаксании 38 Вязкость динамическая 292 кинематическая 294 - магнитная 443 объемная 293 Fa3 32

баротропный 338

вязкий 336

Газ невязкий 336 – реальный 38 совершенный 35 Гидродинамика магнитная 439 Гипотеза Бернулли 199 - кинематическая 197 - Кирхгофа — Лява 228 Градиент деформации материальный 108 -- пространственный 108 перемещения материальный 110 – пространственный 110 поля векторного 471 -- скалярного 470 температуры 51 -- материальный 148 – пространственный 159 Грань точная верхняя 486 -- нижняя 486 Павление 32 - гидростатическое 322 - торможения 343 Движение жидкости безвихревое 296 - стационарное 107 установившееся 107 Двухполюсники электрические 24 Девиатор 466 Действие по Гамильтону 104 Дельта-функция 175 Депланация 208 Деформации главные 114 Леформация 105 вязкопластическая 411 - вязкоупругая 359 - неупругая 65 объемная 156 - остаточная 382 пластическая 67 ползучести 67 - сдвига 114 - температурная 153 упругая 65 Деформирование 105 неизотермическое 153 - неупругое 381 - пластическое 381 Диаграмма деформирования 381 -- обобщенная 398 Лиамагнетик 426

Диаметр гидравлический 314 окрестности 114 Дивергенция поля векторного 470 - тензорного 471 Динамика газовая 336 Лислокация 56 винтовая 56 - краевая 56 Дисперсия 424 Диссипация энергии 133 Лиссоциация 336 Дифференциал Гато 481 Диффузия концентрационная 117 Диэлектрик 421

Емкость электрическая 433

Жесткость при изгибе 202 - кручении 206 цилиндрическая 242 Жидкость 39 баротропная 295 вязкая 292 --- линейная 292 идеальная 295 неньютоновская 316 несжимаемая 293 ньютоновская 292 сжимаемая 292 Задача краевая 29 Ламе 168 программирования линейного 29 - нелинейного 29 теплопроводности сопряженная 248 термоупругости несвязанная 164 связанная динамическая 160 - квазистатическая 160 – стационарная 161 Закон Био --- Фурье 117 Гука обобщенный 156 Дарси 118 – Пюамеля — Неймана 154 - Ома 118 сохранения заряда электрического 428 – количества движения материальной системы 95 ---- сплошной среды 129 – – массы 120 – момента количества движения материальной системы 96 ---- сплошной среды 131 – – энергии 134 ——— механической материальной системы 96

Закон течения пластического 392 --- ассоциированный 393 — Фика 117 Заряд электрический 114 Значение собственное 488 Значения тензора главные 466

Иерархия ММ 22

Изгиб косой 219 поперечный 223 – прямой 219 – чистый 218 Изотропия 39 Инвариант тензора 468 – линейный 468 – первый 468 Индекс немой 459 Индукция магнитная 426 Интеграл Бернулли 297 Лагранжа — Коши 296 Интенсивность деформации 398 -- пластической 398 напряжений 388 Интерметаллид 44 Ионизация 336 Источник Франка — Рида 63

 ${f K}$ авитация 310 Квадрат скалярный 459 Колебания гармонические 99 Количество движения 89 – электромагнитного поля 435 Композит 177 Композиция операторов 477, 478 Компонента девиатора 466 тензора 464 Конвекция вынужденная 321 естественная 321 свободная 321 смешанная 321 Константы Ламе 155 Конус Маха 342 Конфигурация актуальная 80 материальной системы 80 начальная 80 сплошной среды 105 Концентрация объемная 117 Координаты криволинейные 473 – – ортогональные 473 - лагранжевы 108 материальные 105 обобщенные 81 полярные 475 пространственные 106 эйлеровы 108 Коэффициент бародиффузии 117 восстановления температуры 356

диффузии концентрационной 117

- термодинамики второй 139
- – нулевой 134
- первый 134

Коэффициент излучения 249 массообмена 333 отражения излучения 249 - поглощения излучения 249 пропускания излучения 249 Пуассона 156 температурный расширения линейного 46 ~-- объемного 158 - теплообмена 160 — контактного 250 термодиффузии 117 трения местный 332 упрочнения 69 фильтрации 118 Коэффициенты Ламе 473 магнитоэлектрические 427 - пироэлектрические 424 пьезоэлектрические 425 тензорезистивные 422 эласторезистивные 422 электрострикции 425 Кривая изохронная 402 - ползучести 401 текучести 386 Кривизна поверхности главная 476 Кристалл жидкий 39 Критерии подобия 323 – – определяющие 323

Лагранжиан 98 Лапласиан 474 Линия вихревая 296 - координатная 473 - кривизны 476 - сечения нейтральная 219 - стержня осевая 198 - тока 107 - узлов 461

Macca 114

молекулярная 33 присоединенная 299 – – поперечная 299 – продольная 299 Материал композиционный 177 поликристаллический 177 Матрица обратная 461 поворота репера 460 размерностей 325 транспонированная 461 Мембрана 212 гибкая 245 Микронапряжение 64 Множество всюду плотное 479 выпуклое 482 точек объема нуль 115

Модель концептуальная 20 - математическая (MM) 21 -- двумерная 29 —— многомерная 29 -- одномерная 29 -- структурная 27 -- трехмерная 29 – функциональная 27 содержательная 20 Модуль сдвига 155 секущий 397 сжатия всестороннего 156 упругости второго рода 155 – объемной 156 -- первого рода 155 — – продольной 155 –– эффективный 178 Юнга 156 Моль 33 Момент изгибающий 202 - инерции 86 -- главный 87 -- сечения главный 198 – ~ – осевой 198 --- полярный 198 --- центробежный 198 кинетический 89 количества движения 89 --- главный 89 крутящий 202 распределенный по объему 124 --- поверхности 124 сечения статический 198 системы сил главный 91 сопротивления сечения полярный 207 --- при изгибе 219 Мощность 93 – лиссипации 93 Нагружение активное 391 нейтральное 391 пропорциональное 397 Нагрузка критическая 242

Намагниченность 426 Нанотехнологии 32 Напор геометрический 295 – полный 295 – скоростной 295 Напряжение касательное 125 – октаэдрическое 127 – нормальное 125 – октаэдрическое 127 – Пайерлса 60 – растягивающее 125

- растягивающее 12
 сжимающее 125
- сжимающее 12;
- среднее 59

Напряжения главные 127 Напряженность поля магнитного 426 электрического 118 Неравенство диссипативное общее 141 Клаузиуса — Дюгема 139 треугольника 478 Нить вихревая 296 Норма 478 Область значений 477 определения 477 Оболочка 197 гибкая 240 пологая 239 толшины постоянной 227 Объект технический 20 Объем активационный 71 представительный 177 Оператор 477 взаимно однозначный 478 дифференциальный 478 ~- бигармонический 166 ~- Гамильтона 470 -- Даламбера 429 -- Лапласа 471 линейный 479 обратный 478 положительно определенный 479 положительный 479 симметрический 479 - тождественный 478 Описание движения лагранжево 108 -- эйлерово 108 Оптика нелинейная 424 Орты 459 Оси инерции главные 87 кристаллографические 44 - ортотропии главные 155 сечения главные 198 -- центральные 198 тензора главные 466 Отжиг 69 Парадокс Даламбера 300 Парамагнетик 426 Параметр пластичности 398 - Удквиста 389 упрочнения 388 Параметры определяемые 325 определяющие 324 основные 325 состояния вещества 32 – – термодинамического 132 --- внутренние 133 Переменное активное 133

реактивное 133
 Перемещение возможное 90

обобщенное 90

Перенос диффузионный 116 конвективный 116 Перепад давления 312 Переход фазовый 34 Пироэлектрик 424 Плазма 32 Пластина 197 Пластинка 197 гибкая 242 Пластичность 67 - неизотермическая 390 Плоскость девиаторная 385 - координатная 475 скольжения 56 Плотность дислокаций 62 массовая 115 объемная 114 потока 116 – – вещества 117 излучения результирующего 249 --- эффективного 249 – – массы 116 -- теплового 118 сил массовых 123 – – объемных 123 – – поверхностных 123 среды 114 тока проводимости 428 -- смещения 428 -- электрического 116 Площадка октаэдрическая 127 Поверхность гладкая 475 координатная 473 нагружения 388 пластичности 385 разрыва 144 срединная 197 текучести 385 Погрешность среднеквадратическая 488 Показатель адиабаты 338 поглошения 423 преломления 423 – – комплексный 423 размерности 324 Поле магнитное 426 силовое 91 – – стационарное 91 - температурное 157 тензорное 469 -- стационарное 469 электрическое 118 электромагнитное 427 электростатическое 431 Ползучесть 67 кратковременная 403 неустановившаяся 401 простая 401 ускоряющаяся 401
Ползучесть установившаяся 401 Полимер 40 Полупроводник 421 Поляризация диэлектрика 422 -- спонтанная 424 Поляризованность электрическая 423 Порядок ближний 33 – лальний 33 Последействие 401 Последовательность Коши 479 фундаментальная 479 Постоянная Больцмана 36 – газовая 338 – – универсальная 36 - магнитная 426 Планка 46 – Стефана – Больцмана 249 электрическая 423 Постулат Драккера 392 Потенциал векторного поля 294 кинетический 98 поляризационный 434 термодинамический Гиббса 140 электрический 118 Потери джоулевы 423 диэлектрические 423 Потеря устойчивости 203 Поток вихря 296 Правило суммирования по одинаковым индексам 459 – фаз 34 Предел прочности 403 – – длительной 401 сопротивления временного 403 - текучести 381 Преобразование Галилея 438 Лежандра 140 Лоренца 437 Приближение галилеево 438 Принуждение 102 Принцип вариационный 28 – двойственный 477 -- экстремальный 30 - взаимной связи 133 возможных перемещений 100 Гамильтона наименьшего действия 104 Гамильтона — Остроградского 103 Γаусса 102 - Даламбера --- Лагранжа 101 - декомпозиции 27 допустимости 134 затухающей памяти 134 Лагранжа 100 локальности 134 механики аналитической 80 --- вариационный 100 наименьшего принуждения 102

Принцип объективности 134 освобождения от связей 94 причинности 134 равноприсутствия 134 размеров начальных 154 - Сен-Венана 199 Принципы Гиббса 141 - термодинамики рациональной 133 Пробег частицы свободный 36 Проводимость электрическая 421 Проводник 421 идеальный 456 Прогиб балки 223 - мембраны 212 - оболочки 229 - пластинки 242 стержня 222 Произведение векторов векторное 460 --- двойное 460 -- диадное 465 -- скалярное 459 -- смешанное 460 - тензоров внешнее 467 – – внутреннее 467 Проницаемость диэлектрическая абсолютная 423 – – относительная 423 магнитная абсолютная 426 – – относительная 426 Пространство банахово 479 гильбертово 479 евклидово 31 нормированное полное 479 функциональное 477 нормированное 478 Процесс адиабатический 162 деформирования 105 изобарный 338 изотермический 162 изохорный 292 изоэнтропический 162 - теплопроводности 117 термодинамический 133 -- необратимый 133 -- неравновесный 133 --- локально 183 – – обратимый 133 -- равновесный 133 термомеханический 135 простой 139 Процессы подобные 323 Прочность диэлектрика электрическая 424 Пьезоэлектрик 425

Работа возможная 90

- деформирования пластического 384
- Равновесие гидростатическое 295

Равновесие термодинамическое 132 – неустойчивое 133 – – устойчивое 132 Радиус-вектор 458 Разгрузка 381 Размерность 323 Разрушение вязкое 73 квазихрупкое 73 хрупкое 73 Разрыв сильный 144 - слабый 144 Ранг тензора 464 Раствор твердый 55 Растяжение стержня внецентренное 219 ~- однородное 219 Расход жидкости объемный 312 Реакция связи 93 Релаксация 401 напряжений 365 Репер системы координат 459 Решение автомодельное 331 Решетка кристаллическая 43 Ротор поля векторного 470

Свертывание тензора 467 Свойство коммутативности 459 Связанность термомеханическая 150 Связь 81 голономная 81 – склерономная 81 -- стационарная 81 идеальная 94 ионная 44 - ковалентная 44 - межатомная 44 металлическая 44 неголономная 81 нестационарная 81 реономная 81 Сдвиг чистый 205 Сегнетоэлектрик 424 Сечение поверхности нормальное 475 поперечное 197 сопла критическое 351 Сжимаемость 38 Сила активная 94 - инерции 101 критическая первая 203 Лоренца 435 обобщенная 90 – сопротивления 93 потенциальная 91 тока электрического 116 эйлерова 203 Силы Ван-дер-Ваальса 33 пондеромоторные 435 Символ Кронекера 459 Леви-Чивиты 460

Символ транспонирования 459 Симплекс безразмерный 326 Система дискретная 27 континуальная 27 - координат 458 -- декартова 458 --- прямоугольная 459 – – ортогональных 475 -- полярная 475 -- прямоугольная 459 --- инерциальная 82 ———— правая 459 – – сопутствующая 438 -- сферическая 475 -- цилиндрическая 474 - материальная 80 -- консервативная 96 - скольжения 65 стержневая 227 -- статически неопределимая 227 --- определимая 227 термодинамическая 132 -- закрытая 132 -- изолированная 132 -- открытая 132 Скачок уплотнения 346 -- косой 349 – – прямой 346 Скопление дислокаций 63 Скорости обобщенные 82 Скорость абсолютная 84 волны фазовая 429 — звука 297 критическая 344 – – местная 343 относительная 84 переносная 84 света в вакууме 426 угловая 84 Слой пограничный 329 – – концентрационный 333 – – ламинарный 329 – пристенный 329 – – свободный 329 – – тепловой 333 – турбулентный 329 Смещение электрическое 423 Соотношение Прандтля 348 Соотношения Коши 111 Сопло Лаваля 351 сверхзвуковое 351 Сопротивление гидравлическое 313 - термическое 252 электрическое 421 удельное 421 Состояние агрегатное 32 деформированное плоское 165

естественное 134

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Состояние напряженное 124 – – одноосное 218 -- плоское 166 – – сложное 218 напряженно-деформированное 154 - температурное 248 Среда диатермичная 254 - сплощная 105 —— жесткопластическая идеальная 383 --- с упрочнением линейным 383 ---- нелинейным 383 -- линейно-упругая 154 --- анизотропная 155 --- изотропная 155 -- несжимаемая 121 -- скоростного типа 151 -- с памятью 150 -- термовязкопластическая 419 – термовязкоупругая 359 --- Кельвина - Фойгта 361 --- Максвелла 365 --- стандартная линейная 368 – – термопластическая 391 -- термоупругая 153 --- линейная 154 ---- анизотропная 155 ---- изотропная 155 ---- ортотропная 155 -- упругая 381 – упругопластическая 383 --- идеальная 381 --- с упрочнением 382 ---- линейным 382 ---- нелинейным 383 Стержень 197 криволинейный 197 прямолинейный 198 -- закрученный естественно 198 Субстанция физическая 17 Схема расчетная 20 эквивалентная электрическая 259 Тело твердое 40 ~- абсолютно 80 -- аморфное 40 -- деформируемое 153 —— кристаллическое 43 термически тонкое 256 Температура 137 абсолютная 137 восстановления 356 равновесная 255 термодинамическая 183 - торможения 343 Температуропроводность 160 Тензор антисимметричный 465 деформации Альманзи 109 -- Грина 109

Тензор деформации конечной Грина 109 --- лагранжев 109 --- эйлеров 109 – – Коши 109 – малой 111 --- лагранжев 110 --- эйлеров 110 -- пластической 388 – – полной 388 -- температурной 153 – – упругой 154 - завихренности 110 - изотропный 466 - инерции 86 - коэффициентов вязкости 361 -- податливости 154 --- секущей 400 – присоединенных масс 299 – температурной деформации 154 -- упругости 154 --- пьезоэлектрический 453 микронапряжений 390 напряжений 125 – вязких 292 – Коши 125 -- Пиолы -- Кирхгофа 126 – – электромагнитных 436 --- Максвелла 435 несовместности деформаций 112 обратный 465 проницаемости диэлектрической 423 – магнитной 426 ранга второго 464 --- единичный 466 -- четвертого 466 --- елиничный 467 -- K 464 симметричный 465 скоростей 110 - теплопроводности 51 трансляции 389 транспонированный 464 шаровой 466 Теорема Бетти — Максвелла 174 Ильюшина 398 Кельвина (Томсона) 296 - Лагранжа 101 Остроградского — Гаусса 471 Стокса 472 Теория старения 402 течения 402 упрочнения 402 Теплоемкость изобарная 338 изохорная 292 – объемная 158 при постоянной деформации 158 -- постоянном давлении 338 --- объеме удельная 292

Теплоемкость при постоянных напряжениях 158 Тепломассоперенос 321 Теплопроводность газа 37 среды 118 Теплосодержание 357 Теплота джоулева 436 некомпенсированная 143 Термодиффузия 117 Термопластичность 390 Термоползучесть 401 Термоупругость классическая 154 Течение 105 газа дозвуковое 344 -- сверхзвуковое 344 Куэтта 312 - ламинарное 312 осесимметричное 320 пластическое 385 – – неустойчивое 396 плоское 317 сферическое 346 - турбулентное 314 цилиндрическое 346 Тожлества Сен-Венана 112 Толщина вытеснения 332 потери импульса 332 Точка критическая 34 Кюри 425 материальная 80 плавления 43 тройная 34 функционала стационарная 480 Траектория касательных напряжений 211 - частицы среды 107 Тройка векторов правая 459 Трубка вихревая 296 Углы эйлеровы 461 Угол Маха 342 нутации 461 прецессии 461 сдвига 113 собственного вращения 462 Удар гидравлический 308 Удлинение относительное 113 Умножение векторов диадное 465 скалярное 479 Упрочнение кинематическое 389 комбинированное 389 материала 66 – – анизотропное 69 -- изотропное 68 – – линейное 382 – – нелинейное 383 трансляционное 389 Упругость 153

Уравнение бигармоническое 166 Ван-дер-Ваальса 38 - вариационное 480 -- голономное 480 волновое 297 Гельмгольца 297 дифференциально-функциональное 28 индукции магнитной 443 интегральное 254 -- граничное 176 интегро-дифференциальное 28 Клапейрона — Менделеева 36 Лапласа 475 - неразрывности 120 операторное 478 переноса вещества 122 -- завихренности 294 -- энергии 136 Пуассона 475 релаксационного типа 38 реологическое 292 состояния 32 – вириальное 38 -- газа совершенного 36 телеграфное 429 теплопереноса 292 теплопроводности 159 Умова — Пойнтинга 436 Уравнения движения среды 129 --- в перемещениях 156 Лагранжа второго рода 97 – – первого рода 94 – Ламе 156 Максвелла 428 малых колебаний 98 Навье — Стокса 293 Навье — Стокса — Дюгема 292 равновесия в перемещениях 160 среды 129 Эйлера 295 Ускорение абсолютное 85 кориолисово 85 относительное 85 - переносное 85 свободного падения 295 угловое 84 Ускорения обобщенные 82 Условие Гаусса 476 пластичности 385 стационарности функционала 480 Стокса 293 текучести 385 упрочнения 388 Условия граничные 29 – – кинематические 156 -- рода второго 160 --- первого 160 --- третьего 160

Центр инерции 85 Условия граничные рода четвертого 249 -- силовые 125 - масс 85 Кодацци 476 тяжести сечения 198 - краевые 29 Циркуляция вектора 472 -- согласованные 266 Частица сплошной среды 105 - начальные 28 однозначности 322 Частота колебаний 72 - ортогональности осей координат 106 -- круговая 46 совместности деформаций 112 -- собственная 99 - сопряжения 248 Число Авогадро 33 Архимеда 329 Био 255 Фаза вешества 34 волновое 429 -- колебаний 99 Галилея 328 Ферромагнетик 426 Гартмана 446 Форма дивергентная 120 гомохронности 323 - MM вариационная 29 Грасгофа 328 --- двойственная 30, 477 координационное 44 -- дифференциальная 27 Лыкова — Льюиса 323 – – интегральная 28 – Maxa 344 Формула Жуковского 308 Остроградского — Гаусса 472 Пекле 323 Прандтля 323 Формулы Серре — Френе 464 Рейнольдса 314 Функционал 479 — магнитное 443 - выпуклый 482 Рэлея 323 --- строго 482 -- концентрационное 323 - Кастилиано 174 Стантона 333 - квадратичный 480 концентрационное 333 – Лагранжа 171 - степеней свободы 81 линейный 479 Фруда 328 минимизируемый 485 — Фурье 323 полный 487 Шмидта 323 – частный 487 Эйлера 323 Функционалы альтернативные 477 Функция гармоническая 475 Эксперимент вычислительный 7 - давления 295 Электродинамика 421 депланации 209 Электрострикция 425 – Дирака 201 Элемент оператора собственный 488 - диссипативная 141 Энергия 114 - допустимая 479 - активации 39 знака 382 внутренняя 135 - Лагранжа 98 кинетическая 87 - нагружения 388 полная 137 - напряжений 166 -- касательных 209 потенциальная 92 -- деформации 171 ползучести 363 -- формоизменения 387 - потенциальная 117 свободная 140 - релаксации 365 Энтальпия 357 силовая 91 Энтропия 138 тока 294 Эффект Баушингера 69 Хевисайда 363 - прилипания 292 - целевая 29 - Эри 166

Характеристики уравнения волнового

345

Якобиан 107

П-теорема 325

оглавление

K	чита	телю	5		
Предисловие					
Oc	новн	ые обозначения	9		
Вв	Введение				
	B.1.	Роль математического моделирования в развитии техники и			
		технологии	17		
	B.2.	Основные этапы математического моделирования	20		
	B.3.	Формы представления математических моделей	27		
1.	Эле	менты физической механики	32		
	1.1.	Агрегатные состояния вещества	32		
	1.2.	Газообразное состояние	35		
	1.3.	Жидкость	39		
	1.4.	Твердое аморфное тело	40		
	1.5.	Твердое кристаллическое тело	43		
	1.6.	Термоупругие и теплофизические свойства кристаллов	49		
	1.7.	Несовершенства структуры кристаллов	55		
	1.8.	Микромеханизмы неупругого деформирования кристаллов	64		
	1.9.	Микромеханизмы разрушения кристаллических тел	72		
2.	Mag	гематические модели аналитической механики	80		
	2.1.	Основные понятия и определения	80		
	2.2.	Кинематика абсолютно твердого тела	82		
	2.3.	Основные динамические величины материальной системы	85		
	2.4.	Работа и потенциальная энергия материальной системы	90		
	2.5.	Уравнения динамики материальной системы	93		
	2.6.	Основные вариационные принципы аналитической механики	99		
3.	Дви	ижение и равновесие сплошной среды	105		
	3.1.	Способы описания движения среды и деформация	105		
	3.2.	Тензор малой деформации	110		
	3.3.	Плотность и перенос физических субстанций сплошной среды	114		
	3.4.	Закон сохранения массы среды	119		
	3.5.	Внещние силы и тензоры напряжений	123		
	3.6.	Законы сохранения количества движения и момента количества			
		движения среды	128		
4.	Осв	ювы термодинамики необратимых процессов	132		
	4.1.	Основные понятия термодинамики	132		
	4.2.	Закон сохранения энергии	134		
	4.3.	Второй закон термодинамики	137		
	4.4.	Условия на поверхности разрыва	144		
	4.5.	Термодинамический подход к построению моделей	148		

5.	Mar	гематические модели термоупругой сплошной среды .	153
	5.1.	Классическая термоупругость	153
	5.2.	Температурные напряжения	164
	5.3.	Интегральная и вариационная формы моделей термоупругости	169
	5.4.	Двусторонние оценки характеристик неоднородных материалов	177
	5.5.	Термоупругая среда с внутренними параметрами состояния .	182
	5.6.	Термоупругая среда с фазовыми переходами	187
	5.7.	Термоупругая среда скоростного типа	192
6.	Осн	ювные модели прикладной механики	197
	6.1.	Математические модели стержня	197
	6.2.	Кручение прямолинейных стержней	204
	6.3.	Изгиб стержней и балок	218
	6.4.	Математические модели оболочки	227
	6.5.	Математические модели пластинки и мембраны	242
7.	Ma	тематические модели процесса теплопроводности	248
	7.1.	Граничные условия и условия сопряжения	248
	7.2.	Модель термически тонкого тела	256
	7.3.	Линейные модели теплопроводности	260
	7.4.	Нелинейные модели теплопроводности	265
	7.5.	Двойственная вариационная форма модели	272
	7.6.	Сопряженная задача для неоднородного тела	276
	7.7.	Двусторонние оценки интегральных параметров	281
8.	Ma	тематические модели жидкости	290
	8.1.	Жидкость как сплошная среда скоростного типа	290
	8.2.	Идеальная жидкость	295
	8.3.	Неустановившееся движение идеальной жидкости в трубопро-	
		воде	300
	8.4.	Движение вязкой несжимаемой жидкости	311
	8.5.	Модели тепломассопереноса в несжимаемой жидкости	320
	8.6.	Некоторые модели пограничного слоя	329
9.	Осн	ювные модели газовой динамики	336
	9.1.	Дифференциальная форма модели газовой динамики	336
	9.2.	Одномерное течение невязкого газа	343
	9.3.	Скачки уплотнения и ударные волны	346
	9.4.	Течение невязкого газа в соплах	351
	9.5.	Пограничный слой, образующийся при высокой скорости газа	354
10	. Ли	нейные модели термовязкоупругой среды	359
	10.1	. Термовязкоупругая среда скоростного типа	359
	10.2	. Модель среды, учитывающая скорость изменения напряжений	363
	10.3	. Термовязкоупругая среда с внутренним параметром состояния	366
	10.4	. Температурные напряжения в трубе из вязкоупругого ма-	0.70
	10 -	териала	370
	10.5	. Термовязкоупругая среда с памятью	374

11. Математические модели неупругого деформирования среды	381		
11.1. Простейшие модели пластического деформирования	381		
11.2. Условие текучести	385		
11.3. Модели термопластичности	390		
11.4. Деформационная теория термопластичности	396		
11.5. Основные модели ползучести	401		
11.6. Структурные модели неупругого деформирования	404		
11.7. Термопластическая сплошная среда с памятью	414		
12. Основные модели электродинамики сплошной среды	421		
12.1. Электрические и магнитные свойства сплошной среды	421		
12.2. Уравнения Максвелла и модели недеформируемой среды	427		
12.3. Электромагнитные процессы в медленно движущейся среде .	437		
12.4. Модели магнитной гидродинамики	442		
12.5. Модели электромагнитных процессов в деформируемой среде	449		
Приложение 1. Векторы и тензоры	458		
П1.1. Основные операции над векторами	458		
П1.2. Понятие тензора	464		
П1.3. Операции над тензорами	467		
П1.4. Основные формулы векторного и тензорного анализа	469		
П1.5. Ортогональные криволинейные координаты	472		
Приложение 2. Двойственные вариационные принципы	477		
П2.1. Операторное и вариационное уравнения	477		
П2.2. Выпуклость функционала	482		
П2.3. Альтернативные функционалы	485		
П2.4. Оценка среднеквадратичной погрешности	487		
Список литературы	492		
Предметный указатель			

Научное издание

Математическое моделирование в технике и в технологии

Зарубин Владимир Степанович Кувыркин Георгий Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Редактор Н.Г. Ковалевская Технический редактор Э.А. Кулакова Корректор Е.В. Авалова Художник С.С. Водчиц Компьютерная верстка А.Н. Канатникова

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.2008 г.

Подписано в печать 16.10.2008. Формат 70×100/16. Усл. печ. л. 41,6. Тираж 1000 экз. Заказ 2053

> Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана Email: press@bmstu.ru 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Отпечатано с оригинал-макета в ГУП ППП «Типография «Наука». 121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.



