В поисках «чудесного» доказательства Ферма

И.Г. ЖЕЛЕЗНОВ

И. Г. ЖЕЛЕЗНОВ

В поисках «чудесного» доказательства Ферма

Белые альвы

Москва 2010

ББК 22.14
Ж50

Железнов, Игорь Григорьевич

Ж50 В поисках «чудесного» доказательства Ферма. – М.: Белые альвы, 2010. ISBN 978-5-91464-036-8

Рассматриваются преобразования, которые позволяют задачу поиска целочисленных решений $(x, y, z) \in N$ уравнения Ферма свести к эквивалентной задаче нахождения целых значений $x = \eta \cdot x^*$ для условий, когда переменные η, x^* определены на множестве иррациональных чисел. В результате исследований показано, что целочисленных решений эквивалентное уравнение не имеет.

Книга может быть полезна школьникам старших классов, а также специалистам с высшим техническим образованием, которые интересуются вопросами доказательства теоремы Ферма с помощью широко известных методов математики.

ББК 22.14

ISBN 978-5-91464-036-8

Раздел 1
Введение

Проблема поиска целочисленных решений уравнения

$$x^n + y^n = z^n, n > 2 \qquad (1.1)$$

была сформулирована Пьером де Ферма в виде замечания на полях «Арифметики» Диофанта. Русский перевод этого замечания гласит: «Невозможно для куба быть записанным в виде суммы двух кубов, или для четвертой степени быть записанной в виде суммы двух четвертых степеней, или, в общем, для любого, которое есть степень больше двух, быть записанной в виде суммы двух таких же степеней». Впоследствии данное утверждение стало называться великой теоремой Ферма. В этой же книге относительно существования общего решения Ферма записал, что он нашел « поистине чудесное доказательство», но «поля слишком малы, чтобы его уместить».

После смерти в его бумагах было найдено доказательство для случая $n = 4$. Спустя 100 лет с помощью того же метода Эйлеру удалось доказать отсутствие решений уравнения (1.1) для $n = 3$. Однако попытки профессиональных математиков распространить метод спуска для произвольных значений $n > 2$ не увенчались успехом. Вместе с тем результаты доказательства теоремы для $n = 3$ и $n = 4$ позволили практически автоматически спрогнозировать отсутствие решений соответственно для $n = 6,9,12,15,\ldots$ и $n = 8,12,16,20, \ldots$.

В начале 19 века надежды на успешное доказательство теоремы Ферма появились в результате исследований, проведенных француженкой Софи Жермен.

Она доказала, что если значение n является простым числом, а числа $(x, y, z) \in N$ не делятся на n, то уравнение Ферма будет неразрешимо в целых числах в том случае, когда величина $2n + 1$ будет также простым числом.

В 1823 году Лежандр опубликовал работу, в которой на основании теоремы Жермен было доказано отсутствие решений уравнения Ферма для всех простых чисел $n < 197$.

После Лежандра немецкий математик Вендт продолжил эти исследования и в 1893 году получил результаты, которые, как принято считать, определяют предельные возможности использования элементарных методов при нахождении общих решений уравнения Ферма.

Впервые неэлементарные методы доказательства теоремы Ферма для частных значений n были применены немецким математиком Куммером. Введенные им куммеровы числа позволили ему и его последователям значительно расширить диапазон значений n, при которых истинность теоремы Ферма не вызывает сомнений. Однако получить общее решение с помощью этих методов не удалось.

В настоящее время теорема Ферма считается доказанной английским математиком Эндрю Уайлсом. Доказательство весьма сложное, содержит более 130 страниц и посвящено доказательству, так называемой, гипотезы Таниямы-Шимуры. Указанная гипотеза японских математиков была сформулирована на основе результатов, полученных ими по развитию теории эллиптических кривых и модулярных форм. На взаимосвязь этой гипотезы с теоремой Ферма впервые указал Герхард Фрей в 1984 году. Строгое доказательство этой взаимосвязи было получено профессором Калифорнийского университета Кеном Рибетом. Статьи с доказательством гипотезы Таниямы-Шимуры Уайлс опубликовал в 1995 году. Известно, что в проверке доказательства принимали участие питерские математики, и они ошибок не нашли. Существует мнение, что в процессе доказательства Уайлсом созданы новые методы, которые могут быть использованы при анализе нерешенных проблем математики. С помощью современных компьютеров теорема Ферма проверена до значений $n \sim 4 \cdot 10^6$.

Профессиональные математики считают, что в таких условиях поиски доказательства Ферма элементарными способами лишены всякого смысла. Возможно, такое утверждение в какой-то мере соответствует действительности. Однако с ним очень трудно согласиться, поскольку притягательность легенды о существовании «чудесного» решения Ферма просто бесконечна. По своему опыту знаю, что согласиться с таким приговором невозможно. А поэтому извечный вопрос: «Существует, или не существует «чудесное» доказательство Ферма», будет волновать любителей математики еще долгие годы.

Раздел 2
Основная идея доказательства

Об уравнении Ферма

$$x^n + y^n = z^n, n > 2 \qquad (2.1)$$

я впервые услышал еще в студенческие годы на семинаре, на котором в ознакомительном порядке, поверхностно озвучивалась суть основных проблем математики, связанных с поиском решений диофантовых уравнений.

В течение многих лет попытки решить уравнение Ферма с использованием методов, понятных читателям с высшим техническим образованием, не удавались. Однако круг возможных направлений исследований постепенно сужался, пока не привел к необходимости рассмотрения следующей цепочки рассуждений.

В начале этих исследований было решено максимально вскрыть структуру исходного уравнения Ферма. С этой целью уравнение (2.1) было преобразовано к виду:

$$x = \sqrt[n]{z^n - y^n} = \sqrt[n]{z^{n/2} - y^{n/2}} \cdot \sqrt[n]{z^{n/2} + y^{n/2}}, \qquad n > 2 \qquad (2.2)$$

Далее после введения обозначения

$$\eta(z,y)=\sqrt[n]{(z^{n/2}-y^{n/2})^2}\ ;$$

$$x^*(y,z)=\frac{\sqrt[n]{z^{n/2}+y^{n/2}}}{\sqrt[n]{z^{n/2}-y^{n/2}}}, \qquad (2.3)$$

было получено эквивалентное соотношение

$$x=\eta\cdot x^*\ , \qquad (2.4)$$

из которого видно, что свойства чисел x целиком и полностью зависят от свойств переменных η, x^*.

Исследования показывают, что если величину $\eta(z,y)=\sqrt[n]{(z^{n/2}-y^{n/2})^2}$ считать целым числом, то значение $x^*(y,z)$ всегда будет иррациональным числом, а поэтому среди целых чисел решений x уравнения (2.4) не существует.

Для анализа решений x уравнения (2.4), когда величина $\eta(z,y)$ является иррациональным числом, разработана процедура, основные положения которой изложены ниже.

Практическое её использование позволяет доказать, что переменные η, x^* являются алгебраическими иррациональностями. Далее показывается, что по определению квадратный корень $\sqrt{\eta}=\sqrt[n]{z^{n/2}-y^{n/2}}$ из иррационального числа η должен быть числом иррациональным. Но тогда из уравнения (2.2) следует, что для получения целых значений x необходимо, чтобы величина $\sqrt[n]{z^{n/2}+y^{n/2}}$ была также числом иррациональным.

В уравнениях (2.2) и (2.3), которые эквивалентны по своему содержанию, значения вторых сомножителей $\sqrt[n]{z^{n/2}+y^{n/2}}$, $x^*(y,z)$ являются иррациональными числами. Этот факт свидетельствуют о том, что с помощью простейших операций многократного деления величины $\sqrt[n]{z^{n/2}+y^{n/2}}$ на числа $\sqrt[n]{z^{n/2}-y^{n/2}}$ изменить свойства иррациональности получаемых отношений невозможно.

Поэтому если эту операцию выполнить (*n-1*) раз, то уравнение (2,2) можно не только преобразовать к виду

$$x=(z^{n/2}-y^{n/2})\cdot\frac{\sqrt[n]{z^{n/2}+y^{n/2}}}{\sqrt[n]{(z^{n/2}-y^{n/2})^{n-1}}}, \qquad (2.5)$$

но и сказать, что в полученном соотношении величина дроби должна быть иррациональным числом.

На основании этих сведений можно утверждать, что целых решений x уравнения (2.4) не имеет тогда, когда значения $z^{n/2}, y^{n/2}$ являются целыми числами.

Если значения $z^{n/2}, y^{n/2}$ являются иррациональными числами, то, умножив числитель и знаменатель дроби на иррациональное число $(z^{n/2}+y^{n/2})$, уравнение (2.5) можно записать в следующей форме:

$$x=(z^n-y^n)\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{(z^n-y^n)^{n-1}}}. \qquad (2.6)$$

Несложный анализ убеждает, что полученное соотношение эквивалентно исходному уравнению (2.2). Однако дополнительная информация о том, что величины $z^{n/2}, y^{n/2}$ являются иррациональными числами, позволяет поиски целочисленных решений уравнения (2.1) свести к нахождению решений уравнения

$$\begin{aligned}&X^2+Y^2=Z^2,\\&(X,Y,Z)\in D-N,\end{aligned} \qquad (2.7)$$

где переменные $z^{n/2}=Z, y^{n/2}=Y, x^{n/2}=X$ определены на множестве действительных чисел D, в котором вычеркнуты их целые значения.

Обращаясь к соотношениям (2.3), можно записать

$$\eta^n=z^n+y^n-2\cdot z^{n/2}\cdot y^{n/2} \qquad (2.8)$$

и после несложных преобразований получить

$$x^n=\eta^n-2y^n+2\cdot z^{n/2}\cdot y^{n/2} \qquad (2.9)$$

По условиям задачи переменные z,y являются взаимно простыми числами. Поэтому свойства произведения $(z^{n/2} \cdot y^{n/2})$ (рациональность, либо иррациональность) целиком и полностью определяются свойствами корня $\sqrt{y \cdot z}$. Известно, что произведение двух взаимно простых чисел $y \cdot z$ может быть полным квадратом только тогда, когда каждый сомножитель – полный квадрат. Но это означает, что числа $z^{n/2}, y^{n/2}$ (одно либо оба) могут быть либо целыми, либо иррациональными.

Вариант, когда числа $z^{n/2}, y^{n/2}$ целые, нами уже рассмотрен выше. Поэтому остается проанализировать случай, когда произведение $(z^{n/2} \cdot y^{n/2})$ будет иррациональным числом. Для этих условий с учетом всевозможных значений η, y из соотношения

$$x = \sqrt[n]{\eta^n - 2y^n + 2 \cdot z^{n/2} \cdot y^{n/2}} \qquad (2.10)$$

следует, что величина x будет также числом иррациональным. Поэтому если доказано, что величина $\eta^{n/2}$ является иррациональным числом, то можно утверждать, что уравнение (2.4) решений x в целых числах не имеет.

В качестве общего вывода скажем, что предложенная методика позволяет доказать теорему Ферма для произвольных значений $n > 2$. Техника ее использования будет продемонстрирована в следующем разделе.

Раздел 3
Доказательство теоремы Ферма

Дано: уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n, \qquad (3.1)$$

где n – целое положительное число, $n > 2$.

Необходимо доказать, что уравнение Ферма не имеет решений (x, y, z) на множестве целых положительных действительных чисел N. Соподчиненность указанных чисел такова: $0 < x, y < z < \infty$. Относительно чисел (x, y, z) будем полагать, что они взаимно просты и не имеют общих делителей, кроме 1.

Доказательство. Известно, что уравнение (3.1) имеет бесконечное число нецелочисленных решений $(x, y, z) \in D$, где D – множество положительных действительных чисел. Для определения этих решений обозначим:

$$x^{n/2} = X; y^{n/2} = Y; z^{n/2} = Z, \qquad (X, Y, Z) \in D, \qquad (3.2)$$

после чего исходное уравнение (3.1) можно записать в эквивалентной форме

$$X^2 + Y^2 = Z^2. \qquad (3.3)$$

Подставляя в уравнение (3.3) выражения

$$Z = X + s; \qquad Y = Z - d = X + s - d, \qquad s > 0, d > 0,$$

находим

$$(X - d)^2 = 2sd$$

и далее получаем:

$$X = \sqrt{2sd} + d, \qquad Y = \sqrt{2sd} + s, \qquad Z = \sqrt{2sd} + s + d = Y + d. \tag{3.4}$$

Полагая $s = 2p^2 d$, из соотношений (3.4) следует:

$$\begin{aligned} &X = d(2p+1), Y = d(2p^2 + 2p), \\ &Z = d(2p^2 + 2p + 1), \quad (0 < d < \infty, 0 < p < \infty). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Приведенные выражения для переменных *(X,Y,Z)* определяют всю совокупность решений уравнения (3.3),зависят от параметров d и p, которые в указанных областях своего определения могут принимать любые значения.

Совместное использование выражений (3.2) и (3.5) позволяет записать

$$x = \eta(d) \cdot x^*(p); \qquad y = \eta(d) \cdot y^*(p); \qquad z = \eta(d) \cdot z^*(p), \tag{3.6}$$

где η – коэффициент преобразования

$$\eta(d) = \sqrt[n/2]{d} = \sqrt[n/2]{z^{n/2} - y^{n/2}}, \tag{3.7}$$

а переменные (x^*, y^*, z^*) таковы:

$$x^* = \sqrt[n/2]{2p+1}; \qquad y^* = \sqrt[n/2]{2p^2+2p}; \qquad z^* = \sqrt[n/2]{2p^2+2p+1},$$

$$(0 < x^*, y^* < z^* < \infty) \tag{3.8}$$

Для определения общих свойств чисел, образующих троки $(x^*, y^*, z^*) \in D$, рассмотрим характер изменения разности $\delta^*(p) = z^*(p) - y^*(p)$, как функции от величины p, $0 < p < \infty$.

С этой целью найдем производную

$$\frac{\partial \delta^*(p)}{\partial p} = \frac{\partial z^*(p)}{\partial p} - \frac{\partial y^*(p)}{\partial p} = \frac{2}{n}(4p+2) \cdot \left[\frac{1}{(z^*)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{1}{(y^*)^{\frac{n}{2}-1}} \right] < 0, \tag{3.9}$$

которая отрицательна для всех p, $0 < p < \infty$, поскольку при $n > 2$ всегда $z^* > y^*$. Поэтому функция $\delta^*(p)$ будет монотонно убывающей функцией во всем диапазоне значений $p > 0$. Причем, пределы слева и справа будут соответственно равны: $\lim\limits_{p \to 0} \delta^*(p) = 1, \lim\limits_{p \to \infty} \delta^*(p) = 0$. Это означает, что величина разности

$$0 < \delta^*(p) < 1, \qquad 0 < p < \infty \tag{3.10}$$

для всех $0 < p < \infty$ всегда строго больше *0* и строго меньше *1*. Поэтому с получением неравенства (3.10) можно утверждать, что величины y^* и z^* одновременно целыми числами быть не могут, а, следовательно, целочисленных троек (x^*, y^*, z^*) не существует.

Для определения свойств чисел $(x, y, z) \in D$ и алгоритмов их расчета составим отношение

$$\frac{z}{y} = \frac{\sqrt[n/2]{2p^2 + 2p + 1}}{\sqrt[n/2]{2p^2 + 2p}}, \quad (0 < p < \infty) \tag{3.11}$$

и после несложных преобразований найдем такие значения $p > 0$, которые обращают его в тождество:

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^{n/2} + y^{n/2}}{z^{n/2} - y^{n/2}}}, \quad p > 0 \ . \tag{3.12}$$

Полагая

$$z^{n/2} + y^{n/2} = m^2; \tag{3.13}$$

$$z^{n/2} - y^{n/2} = k^2, \tag{3.14}$$

можно записать следующую систему уравнений:

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m}{k}, \qquad p > 0; \tag{3.15}$$

$$\eta(z,y)=\sqrt[n/2]{z^{n/2}-y^{n/2}}\ ; \qquad (3.16)$$

$$z=\eta\cdot z^*, \qquad z^*=\sqrt[n/2]{\frac{1}{2}\cdot(\frac{m^2}{k^2}+1)}; \qquad 3.17)$$

$$y=\eta\cdot y^*, \qquad y^*=\sqrt[n/2]{\frac{1}{2}\cdot(\frac{m^2}{k^2}-1)}; \qquad 3.18)$$

$$x=\eta\cdot x^*, \qquad x^*=\sqrt[n/2]{\frac{m}{k}}.=\sqrt[n]{\frac{m^2}{k^2}} \qquad 3.19)$$

При выводе этих соотношений на тройки чисел $(x,y,z)\in D$ никаких ограничений не накладывалось. Однако с данного момента мы будем рассматривать только такие тройки $(x,y,z)\in D$, в которых переменные z и y заданы и являются целыми числами.

С учетом этих условий общие свойства полученной системы уравнений можно охарактеризовать следующим образом:

1. Поскольку значения (y,z) являются целыми числами, заданы и удовлетворяют условию $(y<z)$, то для любых значений n соотношения (3.17,3.18) автоматически гарантируют воспроизведение тех же самых чисел (y,z) с теми же свойствами

2. Из соотношений (3.17,3.18,3.19) видно, что каждое число тройки (x^*,y^*,z^*) при заданном значении n целиком и полностью определяется величиной отношения *m/k*.

3. Поскольку отношение m/k не зависит от величины общего делителя чисел (y,z), то при определении свойств каждого числа тройки (x^*,y^*,z^*) значения переменных (y,z) можно считать взаимно простыми числами.

4. Подтвердить вышесказанное можно тем, что если бы переменные (y,z) имели общий делитель, равный целому числу α, то все переменные (x,y,z) в соотношениях (3.17,3.18,3.19) должны быть кратными этому же числу, что противоречит нашим исходным предпосылкам о взаимной простоте чисел (x,y,z).

5. Для рассматриваемых условий величину $\eta(z,y)=\sqrt[n/2]{z^{n/2}-y^{n/2}}$ будем принимать либо целым, либо иррациональным числом.

В уравнении (3.1) переменные (x,y) равноправны, взаимно независимы с величиной z, а поэтому все перечисленные выше преобразования можно выполнить по отношению к переменным (x,z), сформировать аналог величины $\eta(z,y)$ в виде $\theta(z,x)=\sqrt[n/2]{z^{n/2}-x^{n/2}}$ и получить алгоритм расчета переменных $(x,y,z)\in D$, совпадающий с соотношениями (3.15-3.19), в которых произведена замена переменных x на y и наоборот.

Основная идея выполненных выше преобразований состоит в том, чтобы с помощью полученных соотношений и вскрытых взаимосвязей между всеми переменными, включая $\eta(z,y)$, $\theta(z,x)$, оценить возможность существования целочисленных решений $(x, y, z) \in D$ уравнения (3.1).

С целью поиска целочисленных троек $(x, y, z) \in D$ проанализируем следующие возможные ситуации.

Ситуация 1. Пусть η будет целым числом, а n – целое число, кратное 4.

Обозначив $z^{n/4} = q$; $y^{n/4} = t$, соотношения (3.13, 3.14) можно записать в следующем виде:

$$q^2 + t^2 = m^2; \tag{3.20}$$

$$q^2 - t^2 = k^2. \tag{3.21}$$

Для рассматриваемых условий значения q, t, $k = \eta^{n/4}$ являются целыми числами.

Относительно полученной системы из двух уравнений второго порядка известно, что она не имеет решений в натуральных числах q, t, m, k.

Отсюда следует, что поскольку q, t, k являются целыми числами, то значение m должно быть иррациональным числом. Но тогда из соотношений (3.19) видно, что величина x^* будет иррациональным числом. Поскольку η число целое, то произведение $x = \eta \cdot x^*$ должно быть числом иррациональным, а, следовательно, в данных условиях уравнение (3.1) целочисленных троек (x, y, z) не содержит.

Ситуация 2. Пусть η будет целым числом, а величина $n/2$ – целым нечетным числом.

Для этих условий значения $Z = z^{n/2}$; $Y = y^{n/2}$ $X = x^{n/2}$ одновременно являются целыми числами. Поэтому поиск целочисленных троек (X,Y,Z) эквивалентен нахождению целочисленных решений уравнения (3.3). Решения эти известны, и их можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &Z = a^2 + b^2; \\ &Y = a^2 - b^2, \\ &X = 2 \cdot a \cdot b, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где a и b – целые числа, $a>b$.

При значениях

$$d = Z - Y = 2 \cdot b^2, \tag{3.23}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 1\right) \tag{3.24}$$

решения (3.22) преобразуются в соотношения (3.5). По своему существу решения (3.22) являются пифагоровыми тройками чисел (X,Y,Z), которые обращают соотношение (3.3) в тождество.

С другой стороны, значения переменных (Y,Z) можно найти, решив систему уравнений (3.20,3.21):

$$q^2 = Z = \frac{m^2 + k^2}{2} \quad ;$$

$$t^2 = Y = \frac{m^2 - k^2}{2}. \tag{3.25}$$

Совместный анализ уравнений (3.22) и (3.25) приводит к взаимосвязям

$$\sqrt{2} \cdot a = m, \qquad \sqrt{2} \cdot b = k, \tag{3.26}$$

которые свидетельствуют о том, что в рассматриваемом случае значения *(m,k)* одновременно должны быть иррациональными числами.

Используя полученные сведения, определим структуру чисел (a,b), при которой значения

$$x = \sqrt[n/2]{2 \cdot a \cdot b},$$

$$\eta(d) = \sqrt[n/2]{d} = \sqrt[n/2]{2 \cdot b^2}$$

одновременно будут целыми числами. Несложные рассуждения приводят к следующим результатам:

$$b = 2^{\frac{n-2}{4}} \cdot \beta^{n/2}, \tag{3.27}$$

$$a = 2^{\frac{n-2}{4}} \cdot \alpha^{n/2}, \tag{3.28}$$

где α, β – целые положительные числа.

Если подставить найденные значения чисел a и b в соотношения (3.22), то нетрудно получить

$$z = 2 \cdot \sqrt[n/2]{\frac{1}{2} \cdot (\alpha^n + \beta^n)};$$

$$y = 2 \cdot \sqrt[n/2]{\frac{1}{2}(\alpha^n - \beta^n)}, \qquad (3.29)$$

$$x = 2 \cdot \alpha \cdot \beta,$$

Так как значения α, β представляют собой целые положительные числа, то для различных сочетаний их четности, либо нечетности нетрудно заключить, что корни, входящие в соотношения (3.29), могут быть, либо целыми, либо иррациональными числами.

Возможные комбинации этих результатов таковы:

1. Если оба корня – целые числа, то значения (x, y, z) будут целыми числами, которые имеют общий делитель 2, что противоречит нашим исходным предпосылкам. Таким образом, в рассматриваемой ситуации значения η, x одновременно целыми числами быть не могут. Следовательно, x – иррациональное число, а поэтому уравнение (1) целочисленных решений (x, y, z) не имеет.
2. Если хотя бы один из корней не извлекается нацело, то вывод однозначен: целочисленных решений (x, y, z) уравнение (3.1) не содержит.

В том случае, когда корни $\sqrt{z}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x}$ одновременно будут целыми числами, то переход к новым переменным позволяет ситуацию 2 интерпретировать как ситуацию 1 с теми же выводами относительно существования целочисленных решений уравнения (3.1).

Ситуация 3. Пусть η будет целым числом, а величина n – целое нечетное число.

Поскольку целочисленных троек $(x^*, y^*, z^*) \in D$ не существует, то из соотношений (3.15, 3.16, 3.17) видно, что целочисленные решения (x, y, z) уравнения (3.1) можно получить только в том случае, если числа (x^*, y^*, z^*) будут дробно рациональными числами со знаменателем, который нацело сократим с величиной $\eta(z,y)$.

Сформулированные требования дробной рациональности чисел (x^*, y^*, z^*) можно рассматривать как *достаточные условия* для получения целочисленных троек (x, y, z). Поскольку выбранная структура выражений (3.17, 3.18) автоматически гарантирует получение целочисленных пар (y, z), то нетрудно понять, что *необходимым условием* дробной рациональности значений x^* можно считать дробную рациональность подкоренного выражения следующего соотношения:

$$x^* = \sqrt[n/2]{2p+1} = \sqrt[n]{(2p+1)^2} = \sqrt[n]{\frac{z^{n/2} + y^{n/2}}{z^{n/2} - y^{n/2}}} \qquad (3.30)$$

Структура чисел $z^{n/2}, y^{n/2}$ для некоторых значений n представлена в таблице:

n	3	5	7	9	11
$z^{n/2}$	$z\cdot z^{1/2}$	$z^2\cdot z^{1/2}$	$z^3\cdot z^{1/2}$	$z^4\cdot z^{1/2}$	$z^5\cdot z^{1/2}$
$y^{n/2}$	$y\cdot y^{1/2}$	$y^2\cdot y^{1/2}$	$y^3\cdot y^{1/2}$	$y^4\cdot y^{1/2}$	$y^5\cdot y^{1/2}$

Из этой таблицы следует, что для произвольных значений n подкоренное выражение соотношения (3.30) можно записать так:

$$\gamma=\frac{z^{n/2}+y^{n/2}}{z^{n/2}-y^{n/2}}=\frac{(z^{n/2}+y^{n/2})^2}{z^n-y^n}=\frac{z^n+y^n+2\cdot z^{\frac{n-1}{2}}\cdot y^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{y\cdot z}}{z^n-y^n}$$

(3.31)

Анализ полученного соотношения показывает, что нас интересующие свойства величины γ (рациональность, либо иррациональность) целиком и полностью определяются свойствами квадратного корня $\sqrt{y\cdot z}$.

Известно, что произведение двух взаимно простых чисел $y\cdot z$ может быть полным квадратом только тогда, когда каждый сомножитель – полный квадрат.

Поэтому необходимые условия дробной рациональности значений x^* будут выполнены только в том случае, когда квадратные корни $\sqrt{z}=w$, $\sqrt{y}=u$ являются целыми числами.

Если обозначить $\sqrt{x}=v$, то исходную задачу поиска целочисленных решений уравнения (3.1) можно преобразовать к задаче нахождения и последующего анализа решений (v,u,w) эквивалентного уравнения:

$$v^{2n}+u^{2n}=w^{2n}, \tag{3.32}$$

где n – целое положительное нечетное число, $n>2$.

При определении этих решений (v,u,w) необходимо учитывать, что:

1. Каждое число пары (u,w) всегда должно быть целым положительным числом $(u<w)$.
2. Значения v могут быть, либо иррациональными, либо целыми положительными числами.

Несложный анализ убеждает, что возможные комбинации структуры искомых решений таковы:

1. Если v является целым числом, то все корни $\sqrt{z}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x}$, а, следовательно, и им соответствующие переменные $Z=z^{n/2}$; $Y=y^{n/2}$ $X=x^{n/2}$ одновременно должны быть целыми числами. Поэтому возникшую ситуацию можно интерпретировать как ситуацию 2, получить пифагоровы тройки (X,Y,Z) в качестве решений уравнения (3.3) и после их анализа сказать, что целочисленных решений уравнение (3.1) не имеет.
2. Если число v иррациональное, то вывод однозначен: целочисленных решений (v,u,w) уравнение (32) не содержит, но при наличии этих

сведений заключение об отсутствии целочисленных решений у исходного уравнения (3.1) сделать невозможно потому, что величина $x = v^2$ может быть целым числом. Однако для подобных целочисленных троек (v^2, u, w) величина $\theta(z,x) = \sqrt[n/2]{z^{n/2} - x^{n/2}}$ будет иррациональным числом, поскольку корень $\sqrt{x}$ нацело не извлекается.

Поэтому общий вывод таков: если значения $\eta(z,y)$, либо $\theta(z,x)$ являются целыми числами, то целочисленных решений (x,y,z) уравнение (3.1) не содержит. Поскольку расчеты искомых целочисленных решений (x,y,z) уравнения (3.1) с использованием величин $\eta(z,y), \theta(z,x)$ аутентичны, то все дальнейшие исследования сосредоточим на анализе условий, когда величина $\eta(z,y)$ является иррациональным числом.

Ситуация 4. Пусть

$$\eta(z,y) = \sqrt[n/2]{z^{n/2} - y^{n/2}} = (\sqrt[n]{k^2})^2$$

будет иррациональным числом, а число n – произвольное целое положительное число, $n > 2$.

Если числа y, z целые и заданы, то нетрудно понять, что поиск целочисленных решений (x,y,z) исходного уравнения (3.1) можно интерпретировать как задачу нахождения целых значений x уравнения (2.4) для условий, когда переменные η, x^* определены на множестве иррациональных чисел. Методика решения этой задачи приведена во втором разделе.

Поскольку целые значения x не могут быть решениями уравнения (2.4), то общий вывод о результатах проведенных исследований таков: уравнение (3.1) целочисленных решений $(x, y, z) \in N$ не имеет, что и доказывает теорему Ферма.

Раздел 4

Заключение

При доказательстве гипотезы Таниямы-Шимуры Уайлс использовал методы, которые стали доступны математикам только в середине 20 века. Нет сомнений в том, что об этих методах Ферма ничего не знал. Тем не мене он уверенно записал, что он располагает «чудесным» доказательством своей теоремы. Однако даже намеков на суть этого доказательства в его бумагах найти не удалось. Многие считают, что это доказательство имеет либо «геометрический» смысл, либо было основано на свойствах производных, которыми многие годы занимался Ферма.

В данной работе рассматривается очевидная возможность преобразования исходной теоремы Ферма к эквивалентной задаче нахождения целых значений уравнения $x = \eta(y,z) \cdot x^*(y,z)$ для условий, когда числа (y,z) являются целыми, а переменные $\eta(y,z), x^*(y,z)$ определены на множестве иррациональных чисел.

Несложный анализ убеждает, что для всех значений n числа η, x^* являются алгебраическими иррациональностями. Последнее свойство чисел η, x^* предопределено структурой их выражений.

Предложенную систему доказательств того, что произведение $x = \eta \cdot x^*$ таких чисел является иррациональным числом, можно значительно упростить, но оценить ее соответствие «чудесному» решению Ферма невозможно. По этой причине поиски «чудесного» решения Ферма на результатах данного исследования нельзя считать законченными.

Автор желает успеха всем читателям, которые часть своего свободного времени могут уделить проведению подобных исследований.

Литература

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
2. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовые уравнения. М.: Наука, 1972.
3. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
4. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. М.: Физматлит, 1984.
5. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

Книги издательства «БЕЛЫЕ АЛЬВЫ»
можно приобрести:
в Москве — в книжных магазинах «Молодая Гвардия», «Библио-Глобус», «Дом книги», «Москва», «Русское зарубежье»; *в книжном клубе* в СК «Олимпийский» (1-й этаж место 16, 2-й этаж места 129, 130, 131, ковровый зал места 27, 28), в книготорговых оптовых фирмах «У Сытина», «Академкнига».
В С.-Петербурге — через редакцию газеты «За русское дело» (198103, С-Петербург, а/я 170, e-mail: zrdspb@gmail.com).
В Екатеринбурге — тел. 8-922-132-69-94.
В Вологде — тел. (8172) 75-43-22 фирма «Венал».
В Архангельске — (8182) 65-38-02.
В Минске — 8-029-401-97-09.
В Украине — zubr01@yandex.ru, 8-066-306-10-20.

Представитель издательства «Белые альвы» в книжном клубе в СК «Олимпийский» (2-й этаж, место 259)

Игорь Григорьевич Железнов

В поисках «чудесного» доказательства Ферма

Научное издание

Редактор: С. Удалова
Компьютерная верстка и обложка С. Удалов

Подписано в печать 25.05.2010 Формат 60x84/8
Печать офсетная Печ.л. 3,5 Тираж 200 экз. Заказ 161

Издательство «Белые альвы»
109542, Москва, а/я 44, Светлане Николаевне Удаловой
Тел. (495) 235-8797
E-mail: lebedy@gmail.com Интернет-магазин: shop.influx.ru
Напечатано и типографии «ЕВСТИ»

Рассматриваются преобразования, которые позволяют задачу поиска целочисленных решений $(x, y, z) \in N$ уравнения Ферма свести к эквивалентной задаче нахождения целых значений $x = \eta \cdot x^*$ для условий, когда переменные η, x^* определены на множестве иррациональных чисел. В результате исследований показано, что целочисленных решений эквивалентное уравнение не имеет.

Книга может быть полезна школьникам старших классов, а также специалистам с высшим техническим образованием, которые интересуются вопросами доказательства теоремы Ферма с помощью широко известных методов математики.

Белые альвы