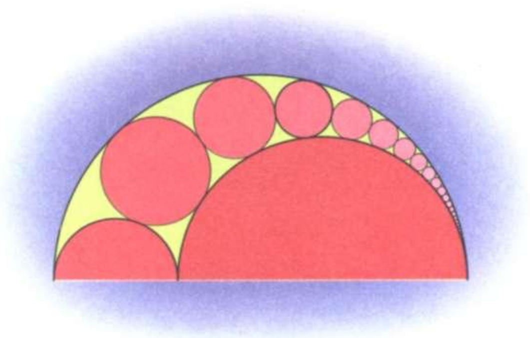
Библиотека
«Математическое просвещение»

И. Д. Жижилкин

ИНВЕРСИЯ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2009

Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 35

И. Д. Жижилкин

ИНВЕРСИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2009

УДК 511.1
ББК 22.130
Ж70

Жижилкин И. Д.

Ж70 Инверсия. — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-448-4

Инверсия — отображение плоскости на себя, которое может переводить окружности в прямые. С одной стороны, это помогает решать «школьные» геометрические задачи, особенно те, в которых речь идёт о многих пересекающихся или касающихся окружностях. В то же время знакомство с инверсией необходимо для дальнейшего изучения таких разделов математики, как комплексный анализ и геометрия Лобачевского.

После определения и вывода основных свойств инверсии в брошюре разбираются классические задачи Архимеда, Паппа, Аполлония. Рассказывается также об инверсии пространства, стереографической проекции сферы на плоскость, пучках окружностей и сфер, что приводит к доказательству знаменитой теоремы Понселе.

Материал брошюры рассчитан на старшеклассников, учителей математики и всех интересующихся элементарной геометрией.

Брошюра написана по мотивам лекции, прочитанной автором на Малом мехмате 28 февраля 2004 года.

ББК 22.130

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Жижилкин Игорь Дмитриевич

ИНВЕРСИЯ

Выпуск 35

Серия основана в 1999 году

Редактор *М. Г. Быкова*

Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано к печати 20/IV 2009 г. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Объём 4,50 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 700

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-448-4

ВСТУПЛЕНИЕ

В школьном курсе планиметрии рассматривают два вида преобразований плоскости: движения и преобразования подобия (гомотетию). Как гомотетия, так и движения являются линейными преобразованиями, то есть такими, при которых прямые переходят в прямые. Или, другими словами, в декартовой системе координат эти преобразования задаются линейными уравнениями.

Безусловно, класс линейных преобразований плоскости гораздо шире и отнюдь не исчерпывается лишь движениями и гомотетиями. Однако иногда бывает полезно рассмотреть и нелинейные преобразования. При таких преобразованиях прямая может перейти в какую-либо кривую. Правда в средней школе на уроках геометрии мы привыкли встречаться с одной-единственной кривой — окружностью. Не будем нарушать эту традицию, идущую ещё от Евклида, и рассмотрим замечательное преобразование плоскости, которое называется инверсией. При инверсии некоторые прямые переходят в окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим на плоскости окружность ω с центром O и радиусом R и произвольную точку A_1, отличную от центра O. Дадим следующее определение (рис. 1).

Определение. Точка A_2 называется *симметричной точке A_1 относительно окружности ω* с центром O и радиусом R, если точка A_2 лежит на луче OA_1 и $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$.

Из определения непосредственно следуют следующие утверждения.

1. Для каждой точки плоскости, кроме центра O, существует единственная точка, симметричная ей относительно окружности ω.

2. Для центра O симметричной точки не существует.

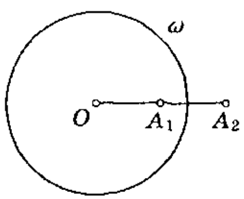


Рис. 1

3. Если точка A_2 симметрична точке A_1 относительно окружности ω, то и точка A_1 симметрична точке A_2 относительно окружности ω.

4. Каждая точка, лежащая на окружности ω, симметрична сама себе.

5. Если A_1 и A_2 — различные симметричные точки, то одна из них лежит внутри окружности ω, а другая — снаружи.

Теперь можно рассмотреть отображение плоскости на себя, которое переводит любую точку, кроме центра O, в точку, симметричную ей относительно окружности ω. Это преобразование и называется *инверсией плоскости относительно окружности* ω. Вопрос о судьбе центра окружности O оставим пока открытым. Будем рассматривать плоскость с выколотой точкой O. На такой «проколотой плоскости» инверсия полностью и однозначно определена для всех точек.

Наглядно представить себе инверсию можно как результат «выворачивания» плоскости через окружность ω. Все точки окружности инверсии остаются на месте, все точки, находившиеся внутри окружности ω, оказываются снаружи, а все точки, располагавшиеся снаружи окружности, попадают внутрь.

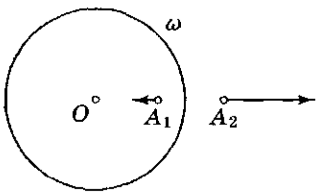


Рис. 2

Если точки A_1 и A_2 меняются при этом местами, то по определению симметричных точек $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$, то есть $OA_2 = \frac{R^2}{OA_1}$. Значит, чем больше величина OA_1, тем меньше величина OA_2 и наоборот. Чем ближе точка расположена к центру инверсии, тем дальше её образ от этого центра. Если придвигать точку A_1 всё ближе и ближе к центру O, тем самым приближая величину OA_1 к нулю, то величина OA_2 будет неограниченно возрастать и, в конце концов, точка A_2 «уйдёт в бесконечность» (рис. 2).

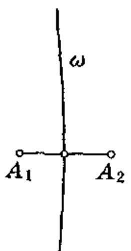


Рис. 3

Уместно также пояснить, почему мы называем точки A_1 и A_2 симметричными. Для этого рассмотрим такую точку A_1, что OA_1 мало отличается от R, то есть точку, лежащую близко к окружности инверсии. Её образ A_2 также лежит недалеко от окружности инверсии, но по другую сторону. Если при этом сделать радиус R очень большим (как говорят, достаточно большим), чтобы видимая часть окружности ω стала весьма похожей на прямую (так же как видимая нами часть земной поверхности весьма похожа на плоскость), то точки A_1 и A_2 станут «весьма похожи» на точки, симметричные относительно этой «почти прямой» (рис. 3).

Ограничимся пока этими расплывчатыми рассуждениями, а в дальнейшем сформулируем и докажем ряд строгих утверждений, придающих смысл словам, взятым в кавычки.

1. Рассмотрим на координатной плоскости точку $A_1(x_1, y_1)$ и окружность ω: $x^2+y^2=R^2$. Найдите координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно окружности ω.

ПОСТРОЕНИЕ

Из определения симметричных точек следует, что для любой точки плоскости (слова «кроме центра O» будем в дальнейшем пропускать) однозначно определена симметричная ей точка. Хотелось бы, однако, не просто быть уверенным в её существовании, но и уметь достаточно быстро её построить циркулем и линейкой. Самое известное построение вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Пусть точка A лежит снаружи окружности ω с центром O, AM и AN — касательные к окружности ω, прямые OA и MN пересекаются в точке B. Тогда точки A и B симметричны относительно окружности ω (рис. 4).

Доказательство этого утверждения совсем не сложно.

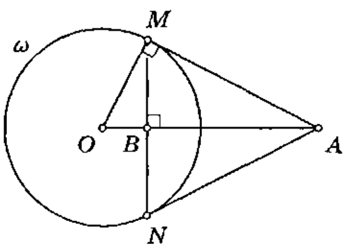


Рис. 4

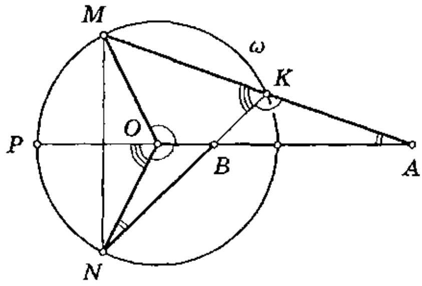


Рис. 5

Из подобия прямоугольных треугольников OMA и OBM следует пропорция $OM/OB=OA/OM$, или $OA\cdot OB=OM^2$, что и требовалось доказать.

Теперь можно построить точку, симметричную любой точке плоскости относительно данной окружности. Это легко сделать по заданной окружности как для точки A, расположенной внутри окружности, так и для точки B, расположенной вне её.

Однако несмотря на простоту построения оно, пожалуй, обладает определённым недостатком. Точки A и B названы симметричными относительно окружности, а вот само построение в каком-то смысле «несимметрично». Действительно, если точка A лежит снаружи окружности ω, то для построения надо сначала провести касательную, а потом опустить на прямую OA перпендикуляр из точки касания. Если же данная точка лежит внутри окружности, то построение ведётся в обратном порядке; сначала — перпендикуляр, потом — касательная.

Хотелось бы найти такое построение, чтобы оно действовало совершенно одинаковым образом, независимо от того, как именно расположена исходная точка: внутри или вне окружности. Это построение получается из следующей важной задачи.

2. Пусть K, M, N — произвольные точки на окружности, p — серединный перпендикуляр к отрезку MN. Тогда прямые KM и KN пересекают прямую p в точках A и B, симметричных относительно окружности (рис. 5).

Решение. Пусть P — та точка пересечения прямой p с окружностью, которая лежит вне отрезка AB. Так как угол MKN — вписанный, а угол PON равен половине соответствующего ему центрального угла, значит, $\angle MKN=\angle PON$ и $\angle BKA=\angle BON$. Поэтому в треугольниках ONB и KAB все углы соответственно равны. Следовательно, равны и соответственные углы треугольников BON и MOA.

Из подобия треугольников BON и MOA получаем:

$$\frac{OA}{ON}=\frac{OM}{OB},\quad OA\cdot OB=OM\cdot ON=R^2.$$

Используя полученный результат, строим точку, симметричную данной точке A, следующим образом (рис. 6):

1) проведём прямую OA и произвольную секущую, проходящую через точку A и пересекающую окружность ω в точках M и K;

2) опустим из точки M перпендикуляр на прямую OA и продолжим его до пересечения с окружностью в точке N.

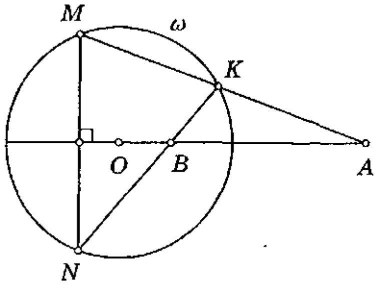


Рис. 6

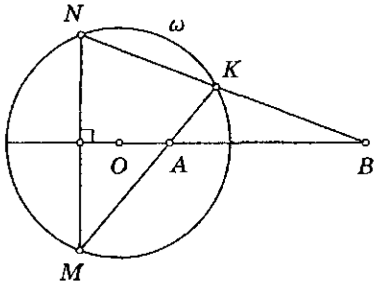


Рис. 7

Прямая KN пересекает OA в искомой точке B.

Легко видеть, что если на нашем чертеже просто поменять местами буквы A и B, а также M и N, то описание построения вообще не изменится (рис. 7). Последовательность действий останется той же самой, поскольку произвольную секущую KM можно провести как из внутренней точки окружности, так и из внешней, а для построения безразлично — лежит исходная точка A на отрезке KM или на его продолжении.

Заметим также, что первый способ построения (рис. 4) является вырожденным случаем второго, при котором точки M и K сливаются, а секущая превращается в касательную. Если попытаться аккуратно провести все построения циркулем и линейкой, то преимущества второго способа становятся очевидными. Действительно, отрезок MN можно заменить подходящей дугой окружности с центром, лежащим на прямой OA. Тогда для построения надо провести всего три прямые и одну окружность.

Сравнение явно не в пользу первого способа, где по ходу построения надо проводить перпендикуляры или делить отрезок пополам, что требует проведения дополнительных прямых и окружностей.

СВОЙСТВА ИНВЕРСИИ

До сих пор мы применяли инверсию лишь к единственной точке. Посмотрим теперь, что произойдёт, если применить это преобразование к более сложному объекту. Естественно попробовать подействовать инверсией на прямую. Если эта прямая проходит через центр инверсии, то точки, находившиеся внутри окружности, окажутся снаружи, и наоборот: точки, находившиеся вне окружности, окажутся внутри, но в целом прямая перейдёт сама в себя. Гораздо интереснее случай, когда исходная прямая не проходит через центр инверсии. Прежде чем рассмотреть этот случай, докажем несложную лемму. В силу важности назовём её основной.

Основная лемма. Пусть A_1, A_2 и B_1, B_2 — пары различных точек, симметричных относительно окружности ω с центром O. Тогда $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$ (рис. 8).

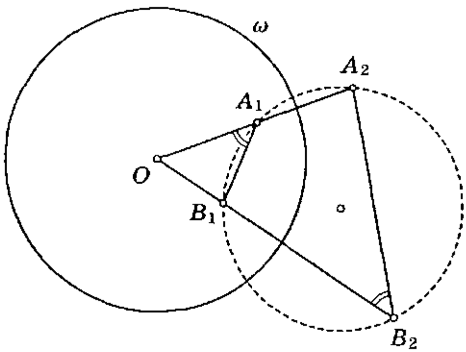


Рис. 8

Доказательство. По определению симметричных точек $OA_1 \cdot OA_2 = R^2 = OB_1 \cdot OB_2$, следовательно,

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OB_2}{OA_2}.$$

Из пропорциональности сторон следует подобие треугольников OA_1B_1 и OA_2B_2 по двум сторонам и углу между ними. Из подобия треугольников следует равенство углов: $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$. □

Равенство этих углов также означает, что четырёхугольник $A_1A_2B_2B_1$ вписанный, или другими словами все четыре точки лежат на одной окружности. В дальнейшем этот факт пригодится для доказательства важных свойств инверсии.

3. Вычислите длину отрезка A_2B_2, если известны стороны треугольника OA_1B_1 и радиус окружности инверсии.

Теперь можно доказать первое важное свойство инверсии.

Теорема 1. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

Доказательство. Опустим из центра O перпендикуляр OM на данную прямую a и рассмотрим точку K, симметричную точке M относительно окружности инверсии. Построим окружность α с диаметром OK. Рассмотрим произвольную прямую, не совпадающую с OK, проходящую через центр O и непараллельную прямой a. Пусть она пересекает окружность ω в точке B, а прямую a — в точке A (рис. 9).

Угол при вершине B прямой, поскольку он опирается на диаметр. Из подобия прямоугольных треугольников OBK и OMA получаем $OA \cdot OB = OM \cdot OK$. Поскольку точки M и K по построению симметричны, $R^2 = OM \cdot OK = OA \cdot OB$. Значит, точки A и B также симметричны относительно окружности инверсии. Следовательно, прямая a и окружность ω переходят друг в друга при инверсии. □

4. Если исходная прямая касается окружности, то точки M и K совпадают и доказательство теряет силу. Как изменить доказательство теоремы для этого частного случая?

Построить образ прямой, которая пересекает окружность инверсии, особенно легко. Поскольку точки окружности инверсии остаются неподвижными, достаточно провести окружность через центр инверсии и две точки пересечения окружности инверсии и исходной прямой.

На рис. 10 показаны: окружность ω, прямая a, пересекающая её в двух точках B и C, и окружность α, проходящая

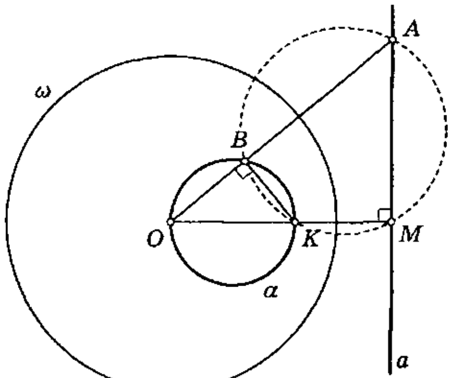


Рис. 9

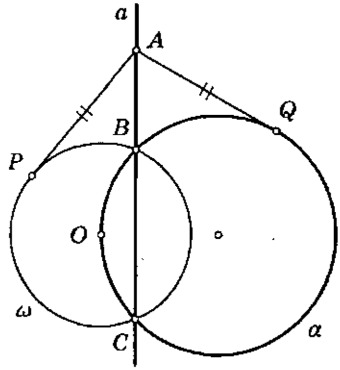


Рис. 10

через точки O, B, C. Эта окружность α является образом прямой a при инверсии относительно окружности ω.

Легко видеть, что касательные, проведённые к обеим окружностям из точки A, лежащей на прямой a, равны между собой. Это следует из теоремы о квадрате касательной:

$$AP^2 = AB \cdot AC = AQ^2,$$

значит, $AP = AQ$.

Оказывается, это утверждение остаётся верным, даже если окружности α и ω не пересекаются.

5. Пусть окружность α является образом прямой a при инверсии относительно окружности ω, точка A лежит на прямой a. Докажите, что касательные, проведённые к окружностям α и ω из точки A равны между собой.

Теорему 1 можно, очевидно, сформулировать и иначе.

Теорема 1′. Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии.

Теперь представляется естественным применить инверсию к произвольной окружности. Докажем следующую важнейшую теорему.

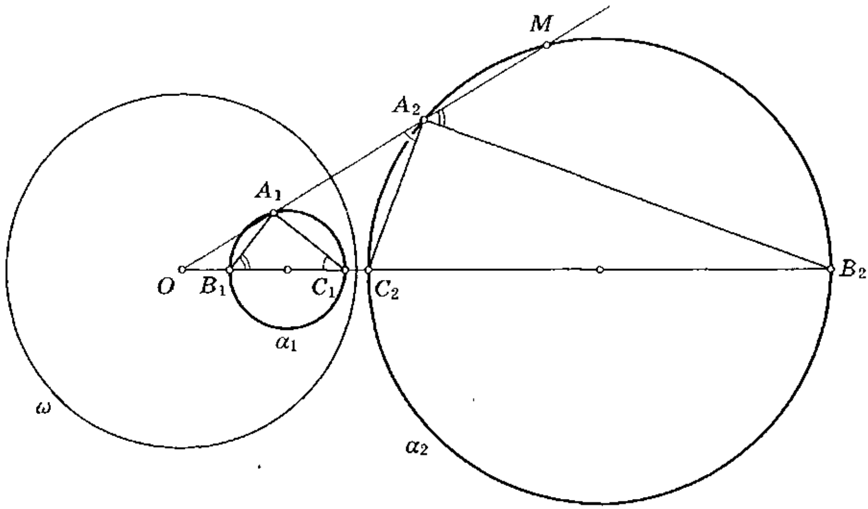


Рис. 11

Теорема 2. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии.

Доказательство. Рассмотрим инверсию относительно окружности ω и окружность α_1, не проходящую через центр инверсии O (рис. 11). Проведём прямую через центры окружностей α_1 и ω. Эта прямая пересекает окружность α_1 в диаметрально противоположных точках B_1 и C_1. Построим точки B_2 и C_2, соответственно симметричные точкам B_1 и C_1 относительно окружности ω, и рассмотрим окружность α_2, построенную на диаметре B_2C_2. Докажем теперь, что точки, симметричные точкам окружности α_1, расположены на окружности α_2, и наоборот.

Возьмём на окружности α_1 произвольную точку A_1 и построим точку A_2, симметричную точке A_1 относительно окружности ω. Теперь применим основную лемму к двум четвёркам точек — к A_1, A_2; B_1, B_2 и к A_1, A_2; C_1, C_2. Первая четвёрка даёт равенство углов $A_1B_1C_1$ и B_2A_2M, а вторая — $A_1C_1B_1$ и C_2A_2O.

Треугольник $A_1B_1C_1$ является прямоугольным, так как B_1C_1 — диаметр окружности, значит, $\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 =$

$=90^\circ$, следовательно, $\angle B_2A_2M+\angle C_2A_2O=90^\circ$. Из последнего равенства следует, что угол $B_2A_2C_2$ — прямой и, значит, точка A_2 расположена на окружности α_2 с диаметром B_2C_2, что и требовалось доказать. □

На приведённом чертеже окружности α_1 и α_2 не пересекают окружность инверсии ω и не содержат внутри себя её центр. Доказательство, разумеется, остаётся в силе и при любом другом расположении окружностей, хотя чертёж становится немного более запутанным. Попробуйте самостоятельно проследить все шаги доказательства в оставшихся случаях.

СЕРЕДИННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Рассмотрим ещё раз рис. 11. Пусть прямая A_1A_2 пересекает второй раз окружность α_2 в точке M (рис. 12). Цепочку равенств углов из доказательства теоремы 2 можно продолжить: $\angle A_1C_1B_1=\angle C_2A_2O=\angle C_2B_2M$. Отсюда следует, что прямые A_1C_1 и MB_2 параллельны. А это значит, что точка O является центром гомотетии окружностей α_1 и α_2. Таким образом, можно сформулировать ещё одно утверждение, широко применяемое при решении задач.

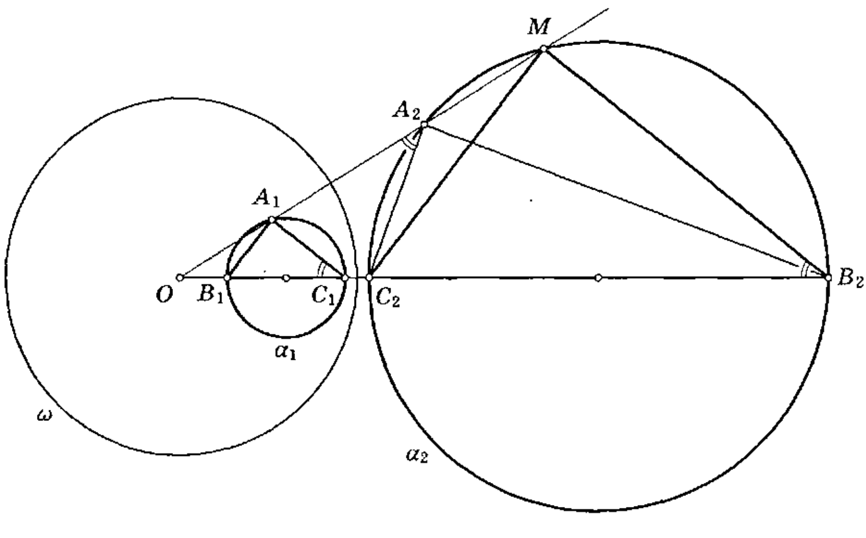


Рис. 12

Утверждение. Если при инверсии с центром O окружность α_1 переходит в окружность α_2, то центр инверсии является также центром гомотетии.

Если рассматривать окружность как целое, не интересуясь «судьбой» каждой точки, то инверсия неотличима от гомотетии. Если же рассматривать окружность как множество точек, то инверсия и гомотетия, конечно же, являются разными отображениями окружности на окружность.

Хотелось бы так же просто сформулировать и обратное утверждение, что центр гомотетии двух окружностей является центром подходящей инверсии, переводящей эти окружности друг в друга, однако это не совсем так. Дело в том, что две окружности имеют, вообще говоря, два центра гомотетии. Коэффициент одной гомотетии положителен, а другой — отрицателен. При этом для одного из центров гомотетии подходящая инверсия обязательно существует, а для другого иногда существует, а иногда нет. Разберёмся в этой ситуации подробнее.

Теорема 3. Пусть точка O — центр гомотетии окружностей α_1 и α_2; точке A_1 окружности α_1 соответствует при этой гомотетии точка A_2 окружности α_2. Пусть прямая A_1A_2 второй раз пересекает окружности в точках B_1 и B_2 соответственно. Тогда произведение $OA_1 \cdot OB_2$ постоянно и не зависит от выбора точки A_1.

Доказательство. Выберем на окружности α_1 произвольную точку C_1, построим гомотетичную ей точку C_2 и рассмотрим точки D_1 и D_2, в которых прямая C_1C_2 вторично пересекает окружности (рис. 13). Покажем, что $OA_1 \cdot OB_2 = OD_1 \cdot OC_2$.

Четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ гомотетичны, и значит, $\angle D_1 = \angle D_2$. Кроме того, $\angle D_2 = \angle A_1B_2C_2$, так как $A_2B_2C_2D_2$ — вписанный четырёхугольник. Следовательно, точки A_1, B_2, C_2, D_1 лежат на одной окружности, и, значит, $OA_1 \cdot OB_2 = OD_1 \cdot OC_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Если обозначить $R^2 = OA_1 \cdot OB_2 = OD_1 \cdot OC_2$, то на чертеже, использованном для доказательства, R — это длина касательной, проведённой к вспомогательной окружности из точки O.

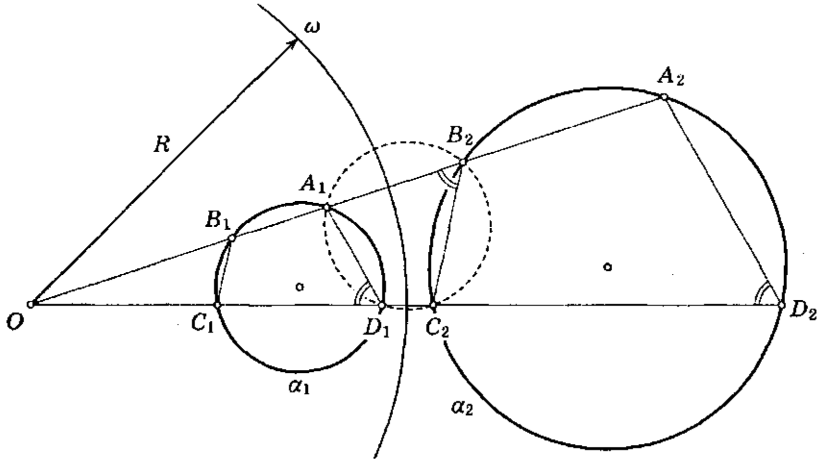


Рис. 13

Проводя окружность ω радиуса R с центром O, получаем окружность инверсии, переводящей окружность α_1 в α_2. Её называют серединной окружностью для α_1 и α_2.

Но если попытаться проделать то же самое построение для внутреннего центра гомотетии окружностей α_1 и α_2 на том же самом чертеже, то можно видеть, что, хотя теорема 3 остаётся верной, окружность инверсии, тем не менее,

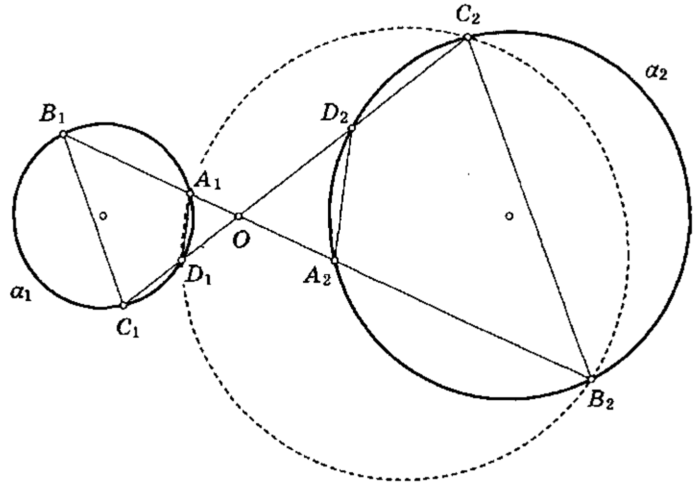
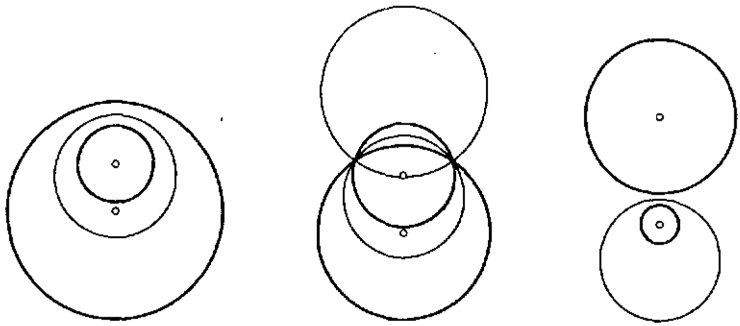


Рис. 14

построить не удаётся, так как точка O лежит внутри вспомогательной окружности и, значит, касательную провести нельзя (рис. 14).

Если же провести эти построения для случая, когда одна окружность лежит внутри другой (рис. 15 *а*), то оказывается, что для центра гомотетии с отрицательным коэффициентом можно построить серединную окружность, а для другого нельзя. Фактически всё определяет то обстоятельство, лежит точка B_2 на луче OA_1 или нет.



а) *б*) *в*)

Рис. 15

Лучше всего обстоят дела для пересекающихся окружностей (рис. 15 *б*). Для них можно построить две различные серединные окружности. Их центрами являются оба центра гомотетии.

На рис. 15 показаны все три случая.

Можно сформулировать теорему.

Теорема 4. Для двух непересекающихся или касающихся окружностей существует одна серединная окружность, а для пересекающихся окружностей существуют две различные серединные окружности. Центром серединной окружности всегда является один из центров гомотетии двух исходных окружностей.

6. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга. Найдите радиус их серединной окружности. (Рассмотрите два различных случая касания.)

РАСШИРЕННАЯ ПЛОСКОСТЬ

Формулировка теоремы 4, к сожалению, не является вполне корректной. Неприятность возникает при попытке применить её к двум равным окружностям. Действительно, для двух непересекающихся или касающихся окружностей, не лежащих одна внутри другой, центром серединной окружности служит внешний центр гомотетии. Но для двух равных окружностей внешний центр гомотетии не существует. Получается, что к формулировке надо добавить ещё несколько строк, описывающих этот частный случай. Однако лучше поступить совсем другим образом.

Попробуем рассмотреть две «почти равные» окружности. Внешний центр гомотетии лежит где-то «очень далеко», а радиус серединной окружности весьма велик по сравнению с исходными окружностями. Если радиусы исходных окружностей будут отличаться всё меньше и меньше, то радиус серединной окружности будет становиться всё больше и больше, а сама серединная окружность будет «выпрямляться», становясь всё больше похожей на прямую. Эта предельная прямая является, конечно же, осью симметрии двух равных окружностей.

Таким образом, напрашивается примерно такая формулировка: серединной окружностью двух равных окружностей является их ось симметрии. Звучит достаточно абсурдно: «окружностью является прямая». Но с другой стороны, образом окружности при инверсии может служить и прямая, и окружность. И значит, окружности и прямые, с точки зрения инверсии, вполне взаимозаменяемы.

Получается, надо не исправлять формулировку теоремы, а так расширить определение окружности, чтобы оно включало в себя прямую как частный случай. Что-то вроде: «прямая — это окружность бесконечного радиуса». Но, для того чтобы это определение было логически корректным, придётся вместо евклидовой плоскости рассмотреть другую конструкцию, получившую название «расширенная плоскость».

Для этого присоединим к плоскости одну «бесконечно удалённую точку». Пока что проделаем это как абсолютно формальную процедуру. Просто договоримся, что теперь кроме обычных точек на плоскости есть ещё одна невидимая «бесконечно удалённая точка», обладающая лишь одним свойством: *бесконечно удалённая точка при любой инверсии является образом центра инверсии.*

Будем теперь считать, что *прямая — это окружность, проходящая через бесконечно удалённую точку.* В дальнейшем будем употреблять вместо слов «окружность или прямая» слово «окружность», считая прямую частным случаем окружности. еорема 1 становится при этом частным случаем теоремы 2. *Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через бесконечно удалённую точку.* Вместо теорем 1 и 2 получаем теорему $1 \cup 2$.

Теорема $1 \cup 2$. Окружность при инверсии переходит в окружность.

Ясно также, что инверсией относительно прямой можно считать осевую симметрию. В дальнейшем это будет строго доказано.

На расширенной плоскости инверсия является взаимно однозначным преобразованием. Каждая точка, без исключения, имеет образ, и каждая точка служит образом некоторой точки.

Любые две окружности могут быть отнесены к одному из трёх типов: пересекающиеся, непересекающиеся, касающиеся. При этом параллельные прямые — это окружности, касающиеся в бесконечно удалённой точке. Поскольку инверсия является взаимно однозначным преобразованием, то пара окружностей при инверсии переходит в пару окружностей того же типа.

7. Докажите, что через две данные точки можно провести не более двух окружностей, касающихся данной окружности.

КОНФОРМНОСТЬ

Итак, при инверсии окружности переходят в окружности. Определим угол между пересекающимися окружностями как угол между касательными в точке их пересечения. Окружности, конечно же, пересекаются в двух точках, и углы в этих точках имеют одну и ту же величину. Воспользуемся этим для доказательства того, что углы при инверсии сохраняются. Это свойство инверсии называют конформностью.

Теорема 5. Инверсия сохраняет угол между пересекающимися окружностями.

Доказательство. Рассмотрим сначала две пересекающиеся прямые a и b, которые при инверсии переходят в пересекающиеся окружности α и β. Точка пересечения прямых P переходит в точку P', а второй раз окружности α и β пересекаются в центре инверсии O (рис. 16).

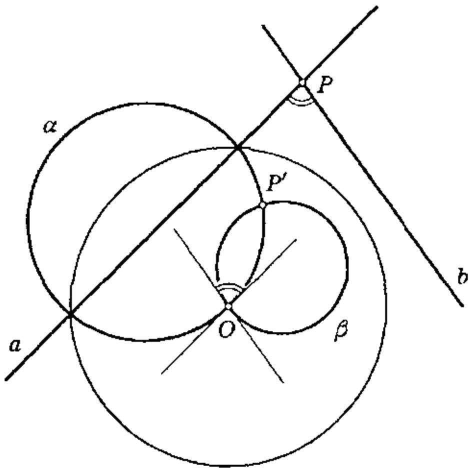


Рис. 16

Остаётся заметить, что из доказательства теоремы 1 следует, что касательные к окружностям α и β в точке O параллельны прямым a и b. Отсюда следует, что угол между прямыми a и b равен углу между касательными в точке O и равен углу между их образами α и β, так как угол между этими окружностями в точке O равен углу в точке P'.

Если рассмотреть теперь две окружности, пересекающиеся в точке P и касающиеся прямых a и b, то образы этих окружностей пересекаются в точке P' и касаются в ней окружностей α и β соответственно. Значит, угол между образами этих окружностей равен углу между α и β, который, в свою очередь, равен углу между касательными a и b, то есть углу между исходными окружностями. □

Теперь понятно, почему пересекающиеся окружности имеют ровно две серединные окружности. Они делят пополам углы между исходными окружностями.

8. Можно ли построить три такие окружности, что каждая из них является серединной окружностью для двух других?

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

По основной лемме любые две пары симметричных точек A_1, A_2 и B_1, B_2 лежат на одной окружности. Поскольку при инверсии эта четвёрка точек в целом остаётся на месте, то окружность α, проходящая через эти точки, также остаётся на месте, то есть переходит сама в себя.

При инверсии точки окружности ω остаются неподвижными, а точки на окружности α меняются местами, но в целом окружность α остаётся на месте (рис. 17). Из предыдущей теоремы о сохранении углов, получаем, что в точке пересечения смежные углы между окружностями α и ω равны между собой. Значит, эти углы — прямые.

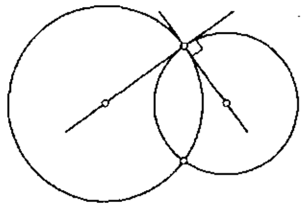


Рис. 17

Именно поэтому окружности α и ω называют ортогональными (т. е. перпендикулярными). В силу очевидной симметрии, имеет место следующее утверждение: *если окружность α переходит в себя при инверсии относительно ω, то окружность ω переходит в себя при инверсии относительно α.*

Ортогональные окружности легко построить, пользуясь очевидным свойством: *касательные в точке пересечения ортогональных окружностей проходят через их центры.*

Полезным дополнением к основной лемме является следующая теорема.

Теорема 6. Пусть точки A_1 и A_2 симметричны относительно окружности ω. Тогда любая окружность α, проходящая через эти точки, ортогональна к окружности ω.

Доказательство. Пусть луч с началом в центре инверсии O пересекает окружность α в точках B_1 и B_2 (рис. 18). По известной теореме о секущих окружности $OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2$.

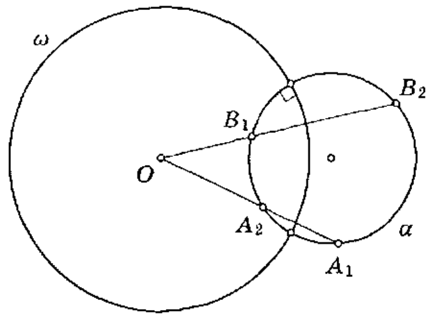


Рис. 18

По определению симметричных точек $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$, следовательно $OB_1 \cdot OB_2 = R^2$, то есть точки B_1 и B_2 также симметричны относительно окружности ω.

Поскольку точки A_1, A_2 и B_1, B_2 при инверсии меняются местами, то окружность α, проходящая через эти точки, переходит при инверсии сама в себя. Это и значит, что окружности α и ω ортогональны. □

9. Постройте окружность, которая проходит через данную точку и ортогональна к двум данным окружностям.

Рассмотрим теперь окружность α и какие-нибудь две ортогональные к ней окружности, пересекающиеся в точках A_1 и A_2 (рис. 19). Поскольку при инверсии относительно окружности α ортогональные к ней окружности остаются на месте, то при этой инверсии точка A_1 переходит в точку A_2, то есть точки A_1 и A_2 симметричны относительно окружности α.

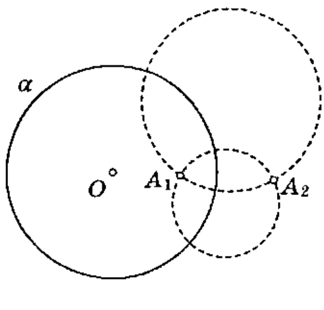


Рис. 19

Теперь совершим инверсию относительно любой другой окружности ω. Окружность α перейдёт в какую-то окружность β, а две окружности, ортогональные к α, перейдут в две окружности, ортогональные к β, так как инверсия сохраняет углы.

Отсюда следует, что точки A_1 и A_2, симметричные относительно окружности α, перейдут в точки B_1 и B_2, симметричные относительно её образа, окружности β.

Окончательно получаем, что *при инверсии окружность и две симметричные относительно неё точки переходят в окружность и две симметричные точки.*

Заметим ещё, что окружность, ортогональная прямой, — это окружность, центр которой лежит на данной прямой. Значит, если окружность α при инверсии перейдёт в прямую a, то образы точек A_1 и A_2 будут симметричны относительно этой прямой (рис. 20).

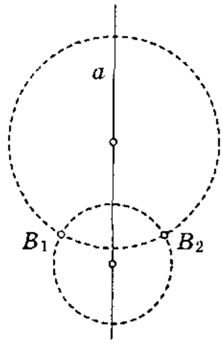


Рис. 20

Теперь можно считать строго доказанным, что осевая симметрия есть частный случай инверсии.

10. Докажите, что любые две окружности можно при помощи инверсии перевести в пару равных окружностей.

Следующая задача устанавливает полезное свойство ортогональных окружностей.

11. Пусть ортогональные окружности пересекаются в точках M и N; AB — диаметр одной из них. Тогда прямые

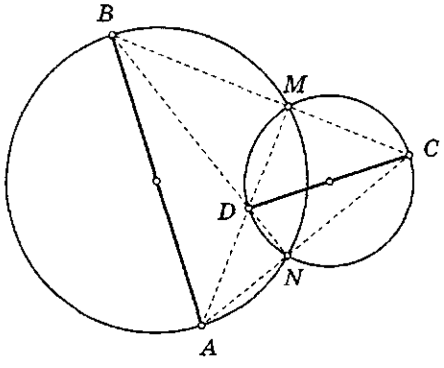


Рис. 21

AM, AN, BM, BN пересекают другую окружность в концах диаметра, перпендикулярного AB (рис. 21).

Указание: воспользуйтесь тем, что касательные к одной из окружностей в точках M и N проходят через центр другой окружности.

Нетрудно также доказать и обратное утверждение.

12. Пусть высоты AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке D. Тогда окружности, описанные вокруг четырёхугольников $ABMN$ и $CMDN$, ортогональны (рис. 21).

ЗАДАЧА АРХИМЕДА

Несмотря на то что инверсия интересна и сама по себе, она служит удобным, а порой практически незаменимым инструментом для решения задач, где «главным действующим лицом» является окружность. Многие из этих задач могут быть решены и без применения инверсии, но инверсия позволяет доказывать содержательные утверждения быстро и элегантно. Вот несколько примеров.

Докажем сначала простую и полезную лемму.

Лемма Архимеда*). Пусть окружность α касается изнутри окружности β и её хорды PQ в точках A и B соответственно. Тогда прямая AB делит дугу PQ, не содержащую точку касания, пополам (рис. 22).

Доказательство. Рассмотрим гомотетию с центром A, которая переводит окружность α в окружность β. При этом точка B переходит в точку M, прямая PQ переходит в касательную к окружности β в точке M, параллельную PQ. Отсюда следует, что точка M — середина дуги PQ (почему?). □

Теперь проведём через точки P и Q окружность ω с центром в точке M. При инверсии относительно окружности ω

*) Архимед, древнегреческий учёный (ок. 287—212 до н. э.). Родом из Сиракуз (Сицилия). Разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объёмов различных фигур и тел. В основополагающих трудах по статике и гидростатике дал образцы применения математики в естествознании и технике.

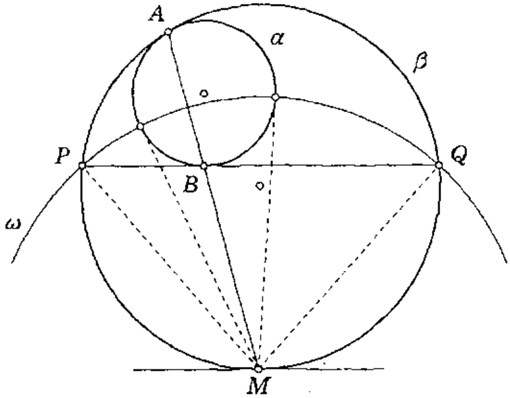


Рис. 22

прямая PQ переходит в окружность β, а точка A — в точку B. Окружность α проходит через точки A и B, симметричные относительно окружности ω, и, следовательно, окружности α и ω ортогональны по теореме 6. Значит, касательные к окружности α в точках её пересечения с ω проходят через точку M, центр окружности ω.

Таким образом, оказывается верным следующее утверждение: *касательные, проведённые из точки M к окружности α равны расстояниям от точки M до точек P и Q*. Попробуйте доказать его справедливость, не используя инверсии.

Инверсия позволяет также получить короткое решение задачи Архимеда об арбелосе. Словом арбелос (сапожный нож) будем вслед за Архимедом называть «криволинейный треугольник», образованный тремя полуокружностями (рис. 23).

Задача Архимеда. Пусть точка C лежит на отрезке AB. Построим в одну сторону от отрезка полуокружности на диаметрах AB, BC, AC (это и есть арбелос). Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой (рис. 24).

Решение. Обозначим $AC=2a$; $BC=2b$. Далее рассмотрим инверсию относительно окружности ω с центром в точке B

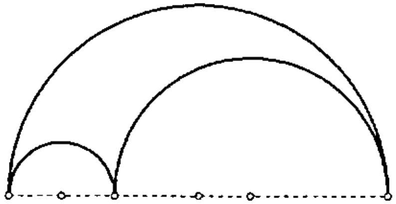


Рис. 23

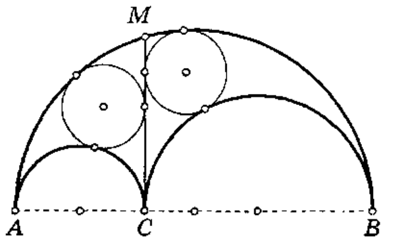


Рис. 24

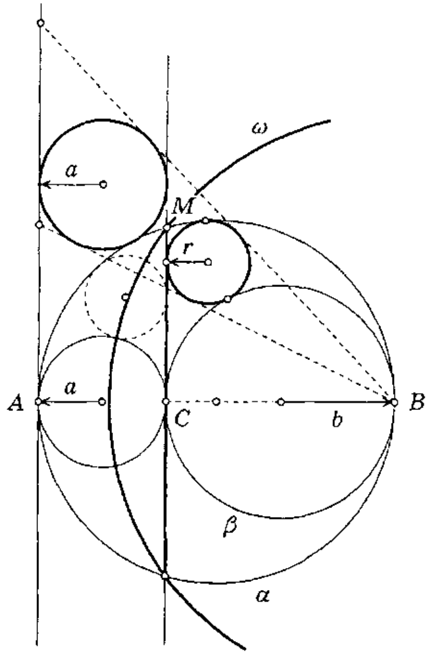


Рис. 25

и радиусом BM (рис. 25). При такой инверсии окружность α с диаметром AB перейдёт в прямую CM, а окружность β с диаметром BC — в прямую, параллельную CM, проходящую через точку A. Таким образом, вписанная окружность радиуса r, касающаяся окружностей α и β, перейдёт в окружность, касающуюся их образов, то есть двух параллельных прямых. Радиус этой новой окружности равен a — радиусу окружности с диаметром AC.

Рассмотрим теперь гомотетию с центром B, при которой окружность радиуса r переходит в окружность радиуса a, а точка C переходит в точку A.

$$\frac{r}{a}=\frac{BC}{BA}=\frac{2b}{2(a+b)}, \quad r=\frac{ab}{a+b}.$$

Из симметричности полученной формулы относительно a и b следует утверждение задачи.

13. Постройте циркулем и линейкой точный чертёж к задаче Архимеда (т. е. арбелос и две вписанные окружности).

ЗАДАЧА ПАППА

Знаменитая задача Паппа*) об арбелосе представляет замечательный пример задачи, которая почти мгновенно решается с использованием инверсии и становится невероятно тяжёлой, если запретить ею пользоваться.

Задача Паппа. Даны окружности α, β и γ с диаметрами AB, BC, AC, которые образуют арбелос, δ_1 — окружность, вписанная в арбелос, окружность δ_2 касается окружностей α, β и δ_1, окружность δ_3 касается окружностей α, β и δ_2, …, окружность δ_{n+1} касается окружностей α, β и δ_n (рис. 26). Пусть R_n — радиус окружности δ_n, d_n — расстояние от центра окружности δ_n до прямой AB. Докажите, что тогда

$$\frac{d_1}{R_1}=2, \quad \frac{d_2}{R_2}=4, \quad \frac{d_3}{R_3}=6, \quad \ldots, \quad \frac{d_n}{R_n}=2n,$$

т. е. расстояние от центра n-й окружности до диаметра арбелоса в $2n$ раз больше её радиуса.

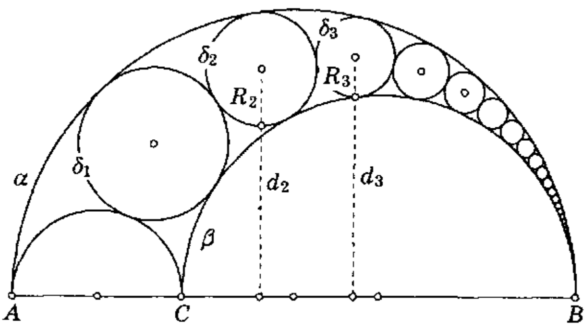


Рис. 26

*) Папп Александрийский, древнегреческий математик второй половины III в. н. э., автор труда «Математическое собрание» в восьми книгах, из которых дошли до нас последние шесть. Справедливо назван «последним великим геометром древности».

Решение. Совершим инверсию относительно какой-нибудь окружности с центром в точке B. На рис. 27 эта окружность проходит через точку A.

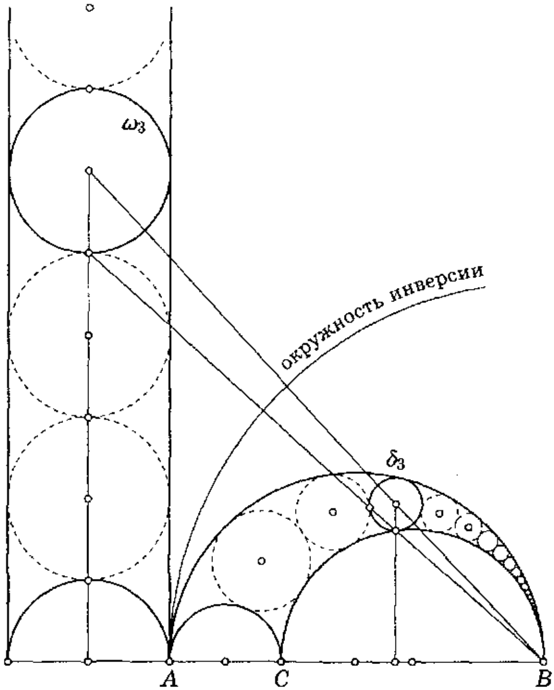


Рис. 27

При этой инверсии окружности α и β перейдут в две параллельные прямые, а цепочка из окружностей δ_1, δ_2, δ_3, ... перейдёт в цепочку равных окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ..., заключённых между параллельными прямыми. Центры окружностей ω_n и δ_n лежат на одной прямой с точкой B. Для окружности ω_n утверждение задачи выполняется очевидным образом. Но окружность δ_n переходит в окружность ω_n при гомотетии с центром B, откуда и следует утверждение задачи.

14. Докажите без привлечения инверсии, что $\dfrac{d_1}{R_1} = 2$.

Если вам удастся самостоятельно решить задачу 14, то, возможно, вы лучше сможете представить себе те трудности, которые пришлось преодолеть Паппу. Дело в том, что инверсию стали применять как средство решения задач примерно через полторы тысячи лет после того, как он нашёл своё решение без инверсии.

Интересно также построить точный чертёж к задаче Паппа, то есть вписать хотя бы одну окружность в арбелос. Это построение является, очевидно, частным случаем задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей. Однако в этом частном случае решение получается совсем коротким и изящным.

Докажем сначала одну простую и важную лемму.

Лемма. Пусть окружность γ касается окружностей α и β в точках A и B. Тогда прямая AB проходит через центр гомотетии окружностей α и β (точка O на рис. 28).

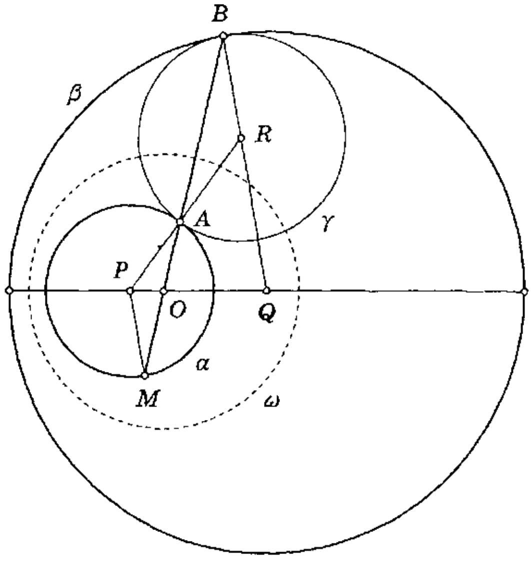


Рис. 28

Доказательство. Обозначим центры окружностей α, β, γ соответственно P, Q, R. Пусть прямая AB второй раз пересекает окружность α в точке M.

Равнобедренные треугольники ABR и AMP, очевидно, подобны, значит BR и PM параллельны. Прямая BM, соединяющая концы параллельных радиусов окружностей α и β, проходит через центр гомотетии этих окружностей. □

На рисунке 28 центр гомотетии O является также и центром серединной окружности ω. По теореме 3 точки A и B симметричны относительно окружности ω. Поскольку окружность γ проходит через точки A и B, то по теореме 6 она ортогональна окружности ω.

Применим теперь доказанные утверждения для построения окружности, вписанной в арбелос.

Пусть арбелос образован окружностями α, β, γ. Впишем в него окружность δ. Построим серединную окружность ω для окружностей α и β (рис. 29). Она ортогональна окружно-

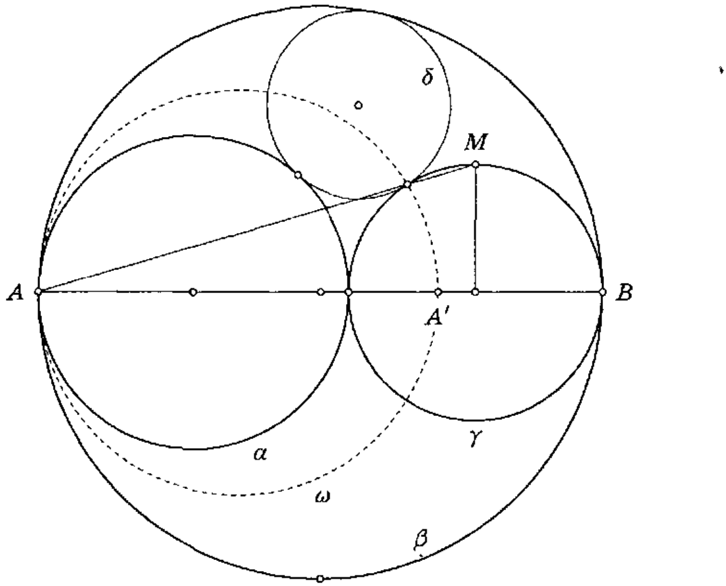


Рис. 29

стям γ и δ. При инверсии относительно ω окружности α и β меняются местами, а окружности γ и δ остаются на месте. Точка касания окружностей γ и δ при инверсии переходит сама в себя, и, следовательно, лежит на окружности ω.

Значит, точку касания окружностей γ и δ можно построить как точку пересечения окружностей γ и ω. Саму окружность ω проще всего построить на диаметре AA', где A' — это точка, симметричная точке A относительно окружности γ. Теперь можно таким же образом построить серединные окружности для пар окружностей α, γ и β, γ и найти все три точки касания, после чего провести окружность δ через три точки.

Однако предложенное построение можно существенно улучшить, используя результат задачи 10.

Саму окружность ω строить не обязательно. Достаточно построить точки её пересечения с окружностью γ. Но в задаче 10 доказано, что прямая, соединяющая концы перпендикулярных диаметров ортогональных окружностей проходит через точку их пересечения.

Окружность ω ортогональна γ, проходит через точку A, а её центр лежит на AB. Достаточно провести через центр окружности γ перпендикуляр к диаметру AB и соединить один из его концов с точкой A. Полученная прямая проходит через точку пересечения γ и ω, то есть через точку касания окружностей γ и δ.

В итоге получаем следующее построение (рис. 30):

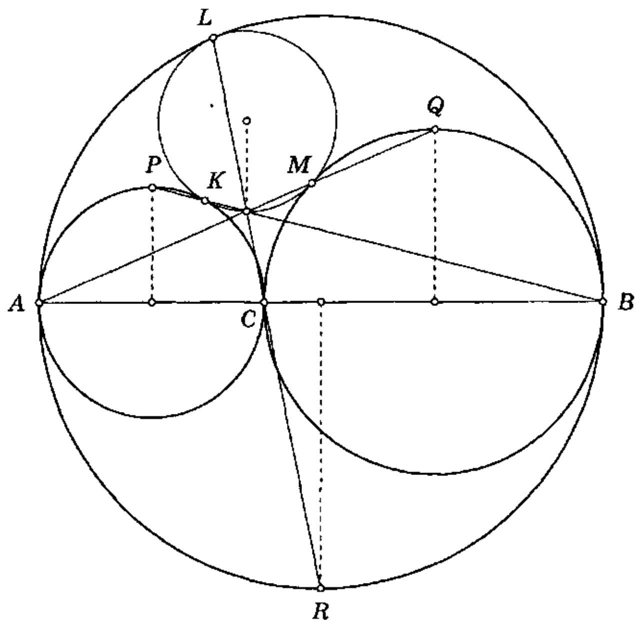


Рис. 30

1) строим три радиуса, перпендикулярных AB;

2) строим три прямые, соединяющие концы этих радиусов с точками касания;

3) строим окружность, проходящую через точки пересечения этих прямых с соответствующими окружностями.

Это и есть окружность, вписанная в арбелос. Так и хочется написать рядом с чертежом только одно слово: «Смотри!».

15. Докажите, что прямые AQ, BP, CR, используемые в построении (см. рис. 30), пересекаются в одной точке, которая лежит на вписанной окружности.

16. Докажите, что (в обозначениях рис. 30)

$$PA = PL = PM, \quad QB = QK = QL, \quad RA = RK = RM.$$

17. Окружности α, β, γ попарно касаются. Постройте окружность, которая касается этих окружностей.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Пусть прямая a касается окружности α в точке S, а точка N диаметрально противоположна точке S (рис. 31). Проведём диаметр KM, параллельный прямой a, и рассмотрим точки окружности A_1 и A_2, симметричные относительно

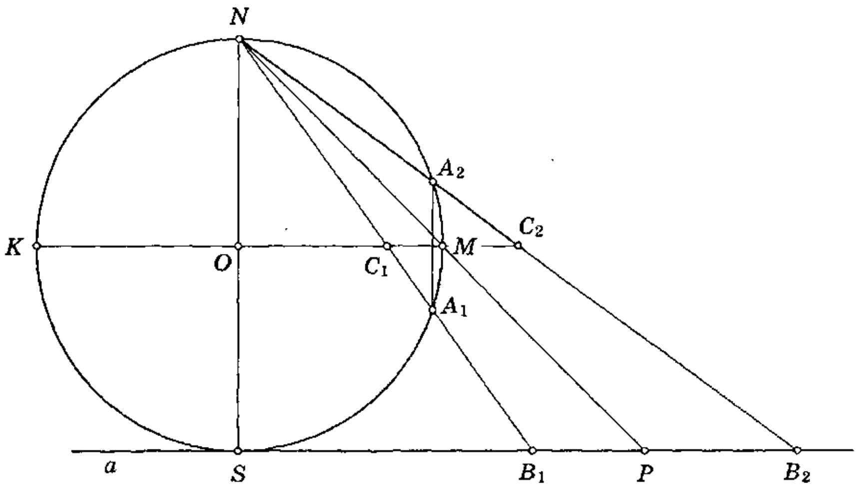


Рис. 31

этого диаметра. Лучи NA_1, NA_2, NM пересекают прямую a в точках B_1, B_2, P. Докажем, что $SB_1 \cdot SB_2 = SP^2$.

Пусть лучи NA_1, NA_2 пересекают прямую KM в точках C_1, C_2. Из задачи 2 следует, что точки C_1, C_2 симметричны относительно окружности, то есть $OC_1 \cdot OC_2 = OM^2$. При гомотетии с центром N и коэффициентом $k=2$ точки O, M, C_1, C_2 переходят в точки S, P, B_1, B_2, следовательно, $SB_1 \cdot SB_2 = SP^2$.

Теперь будем вращать чертёж относительно оси NS. Окружность α превратится в сферу с диаметром NS, прямая a будет при вращении заметать плоскость β, а точка P начертит на этой плоскости окружность ω с центром S.

Рассмотрим отображение сферы с диаметром NS на плоскость β, называемое стереографической проекцией. Каждой точке сферы соответствует её проекция на плоскость из точки N (северного полюса), самой точке N соответствует бесконечно удалённая точка плоскости. При таком отображении бесконечно удалённая точка, которая была введена как некоторый абстрактный элемент, находит своё место на сфере как центр стереографической проекции.

Заметим, что точкам сферы A_1 и A_2, симметричным относительно плоскости, *проходящей через центр сферы и параллельной плоскости проекции*, соответствуют на плоскости проекции точки B_1 и B_2, симметричные относительно окружности ω. Значит, при стереографической проекции инверсии на плоскости соответствует зеркальная симметрия на сфере.

Стереографическую проекцию можно также истолковать как результат инверсии пространства относительно подходящей сферы. Для этого надо сначала определить, что такое инверсия пространства и установить, какими свойствами она обладает.

Здесь, к счастью, дело обстоит очень просто. Достаточно лишь заменить во всех формулировках, относящихся к инверсии плоскости, слова «окружность» и «прямая» на слова «сфера» и «плоскость». Доказательства соответствующих теорем практически не изменятся. Если ещё добавить к пространству одну «бесконечно удалённую точку», считая её образом центра любой инверсии, а плоскость считать сферой, проходящей через «бесконечно удалённую точку», то можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 1″. При инверсии пространства образом сферы является сфера.

Заметим, что стереографическая проекция возникает как результат инверсии пространства относительно сферы с центром N (рис. 32). При этом сфере, проходящей через центр инверсии, соответствует плоскость. Это простое соображение позволяет доказать важнейшее свойство стереографической проекции.

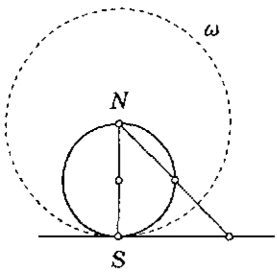


Рис. 32

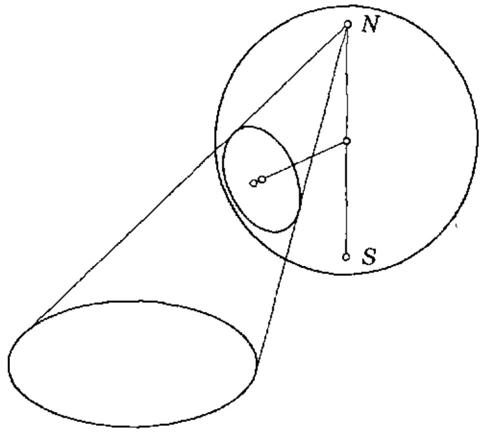


Рис. 33

Теорема 7. Стереографическая проекция переводит окружность на сфере в окружность на плоскости (рис. 33).

Для доказательства заметим лишь, что две пересекающиеся сферы (или сфера и плоскость) пересекаются по окружности. Вместе с теоремой 1″ получаем, таким образом, что при инверсии пространства окружности переходят в окружности.

Поскольку стереографическая проекция получается как результат инверсии пространства, то справедливость теоремы можно считать установленной.

Последняя теорема представляет ещё один пример утверждения, которое легко и естественно доказывается с помощью инверсии, однако превращается в весьма трудную задачу, если пользоваться только «школьными» методами.

18. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между окружностями (доказательство очень похоже на доказательство теоремы о сохранении углов при инверсии).

Стереографическая проекция, несмотря на свои замечательные свойства, редко находит применение в школьном курсе математики, однако удалось отыскать сложную задачу, которая быстро и красиво решается с использованием доказанных теорем.

Назовём *гексаэдром* многогранник с шестью четырёхугольными гранями, которые сходятся по три в каждой вершине*). Таким образом, у гексаэдра шесть граней, восемь вершин и двенадцать рёбер. Примерами гексаэдров в школьном курсе служат параллелепипеды и усечённые четырёхугольные пирамиды. Однако можно рассматривать гексаэдры самого общего вида, не накладывая каких-либо дополнительных условий на их грани и рёбра. Следующая задача не имеет отношения к инверсии, но представляет самостоятельный интерес.

19. Три четырёхугольника на плоскости имеют общую вершину и три общих (для каждых двух четырёхугольников) стороны, выходящих из этой вершины. Рассматривая их как параллельную проекцию трёх смежных граней некоторого гексаэдра, построить проекцию трёх остальных граней (рис. 34).

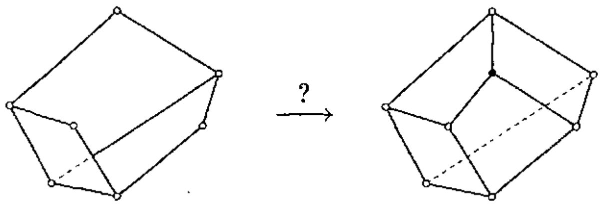


Рис. 34

Теперь рассмотрим произвольный гексаэдр, вписанный в сферу. Докажем следующее утверждение.

*) Обычно *гексаэдром* называют правильный шестигранник, т. е. куб. — *Прим. ред.*

Утверждение. Если семь вершин гексаэдра лежат на сфере, то и восьмая вершина лежит на этой сфере.

Доказать это обычными «метрическими» средствами весьма нелегко (если вообще возможно), поскольку произвольный гексаэдр не обладает никакими «хорошими» свойствами. Поэтому займёмся сначала «переводом задачи на другой язык».

Рассмотрим сечения сферы плоскостями граней гексаэдра (рис. 35). Получим шесть окружностей на сфере. Каждая

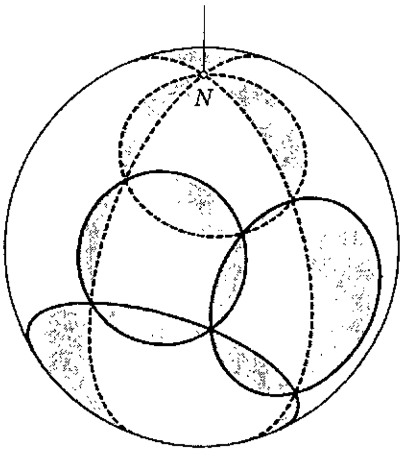


Рис. 35

окружность пересекается с четырьмя другими, а всего у них восемь общих точек, в каждой из которых встречаются по три окружности. Точнее, по условию общих точек — семь, а наличие восьмой требуется доказать.

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость с центром в какой-либо вершине гексаэдра. Тогда три окружности, проходящих через центр проекции, перейдут в три прямые на плоскости, а три других окружности — в три окружности на плоскости.

Одной вершины — центра проекции — на чертеже нет, она «ушла в бесконечность». Оставшиеся точки, прямые и окружности образуют рисунок к следующему хорошо известному утверждению.

Утверждение. Пусть на сторонах треугольника взяты три произвольные точки. Тогда три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника и две смежные с ней точки, пересекаются в одной точке (рис. 36).

Доказательство. Достаточно провести две окружности и соединить точку их пересечения с тремя точками на сторонах. Треугольник разделился на три четырёхугольника. Как известно, вокруг четырёхугольника можно описать окруж-

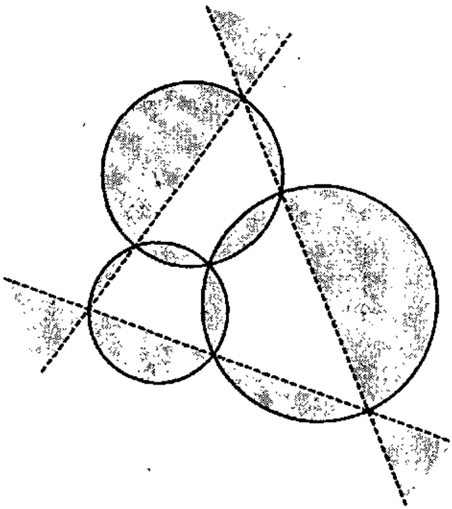


Рис. 36

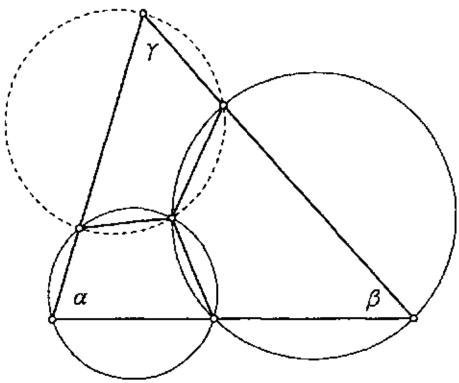


Рис. 37

ность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Обозначив углы треугольника α, β, γ ($\alpha+\beta+\gamma=180°$), получаем, что два угла при точке пересечения равны $180° - \alpha$ и $180° - \beta$ (рис. 37). Тогда третий угол равен

$$360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Значит, третий четырёхугольник также вписан в окружность, что и доказывает утверждение. □

Оказывается, верен также пространственный аналог этого утверждения.

20*. На каждом ребре произвольного тетраэдра возьмём по точке. Рассмотрим четыре сферы, каждая из которых проходит через одну из вершин тетраэдра и три выбранные точки на выходящих из этой вершины рёбрах. Докажите, что эти четыре сферы проходят через одну точку.

Указание. При решении этой задачи используйте утверждение о гексаэдре, вписанном в сферу.

ЗАДАЧА О БАБОЧКЕ

В качестве интересного примера применим построенную теорию для решения известной задачи о бабочке.

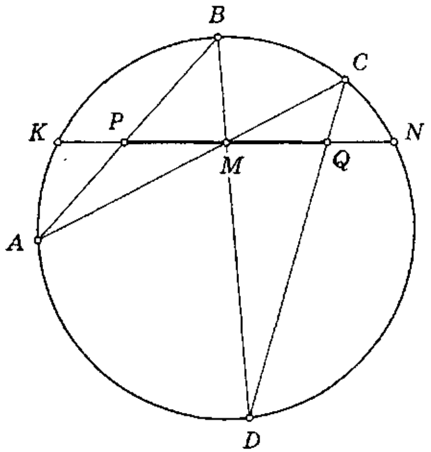


Рис. 38

Задача. Пусть хорды окружности AC, BD и KN пересекаются в точке M, а прямая KN пересекает прямые AB и CD и точках P и Q соответственно. Если точка M является серединой хорды KM, то $MP = MQ$ (рис. 38).

Все известные «школьные» решения этой задачи довольно сложны. Дело в том, что в основе её лежит проективная теорема, поэтому использовать в решении такие свойства окружности, как равенство радиусов или равенство вписанных углов, напрямую не получается. Приходится изобретать неочевидные дополнительные построения и всячески выкручиваться. Более того, начать решение со слов «рассмотрим инверсию...» тоже, кажется, не удаётся. Будем искать обходной путь, а заодно докажем ряд красивых теорем (на самом деле, они интереснее и важнее самой задачи). При инверсии относительно окружности ω ортогональная к ней окружность α переходит сама в себя (рис. 39). Но если при

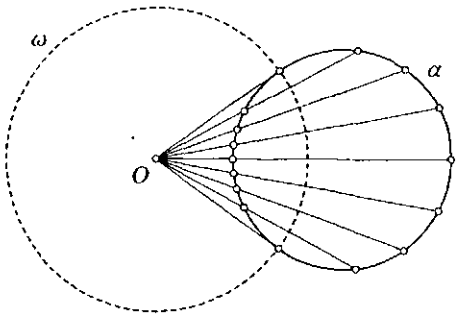


Рис. 39

этом рассматривать не всю плоскость, а только окружность α, то можно вообще обойтись без инверсии.

В самом деле, возьмём окружность α и произвольную точку O с внешней стороны. Рассмотрим теперь «проекцию окружности на себя», то есть проведём из точки O секущие к окружности α и для каждой секущей поменяем местами две точки её пересечения с окружностью. Две точки, в которых секущие превратились в касательные, останутся на месте, остальные точки разобьются на пары и в каждой паре поменяются местами. Полученное отображение окружности на себя можно назвать центральной гомографией, но мы назовём его *центральной проекцией окружности на себя.*

Полученное отображение обладает следующим интересным свойством.

Утверждение. Пусть при проекции окружности на себя с центром O точки A, B, C, D переходят в точки A', B', C', D', пусть также прямые AB и CD пересекаются в точке M, прямые $A'B'$ и $C'D'$ — в точке M'. Тогда точки O, M, M' лежат на одной прямой (рис. 40 и 41).

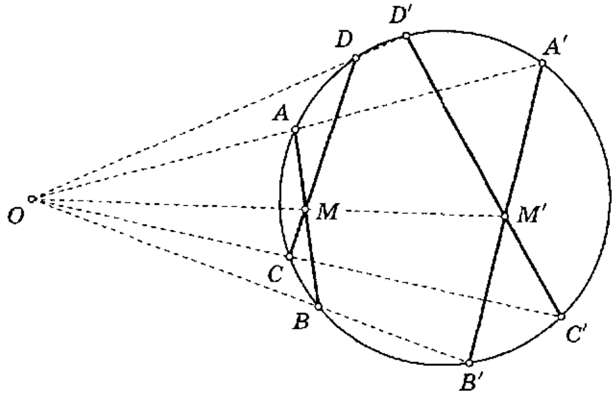


Рис. 40

Пожалуй, самое красивое доказательство этого свойства получается при помощи выхода в пространство.

Будем проецировать на себя не окружность, а сферу. Такая проекция также может быть истолкована как результат инверсии относительно подходящей сферы, ортогональной данной. При инверсии пространства окружность переходит в окружность, следовательно, верно следующее утверждение.

Утверждение. При центральной проекции сферы на себя окружность переходит в окружность.

(Попробуйте-ка доказать это без инверсии!)

Главным здесь является то обстоятельство, что плоское сечение сферы переходит снова в плоское сечение. И то свойство проекции, которое для окружности являлось достаточно

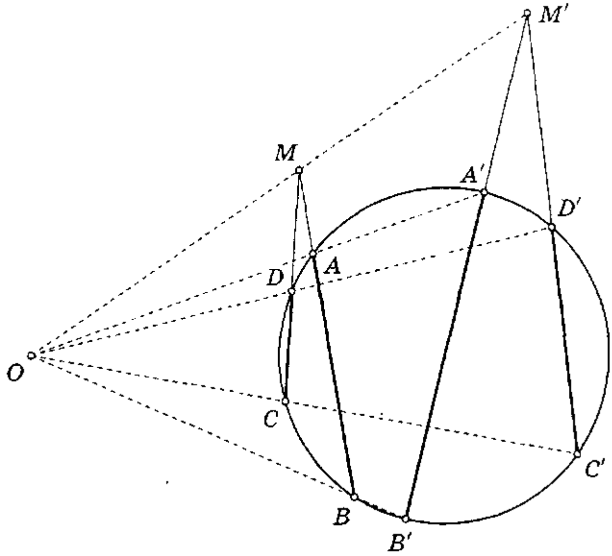


Рис. 41

сложной теоремой, получается для сферы как простое следствие свойств пересечения прямых и плоскостей (рис. 42). Действительно, точки M и M' лежат на прямой пересечения плоскостей OAB и OCD (и всё!).

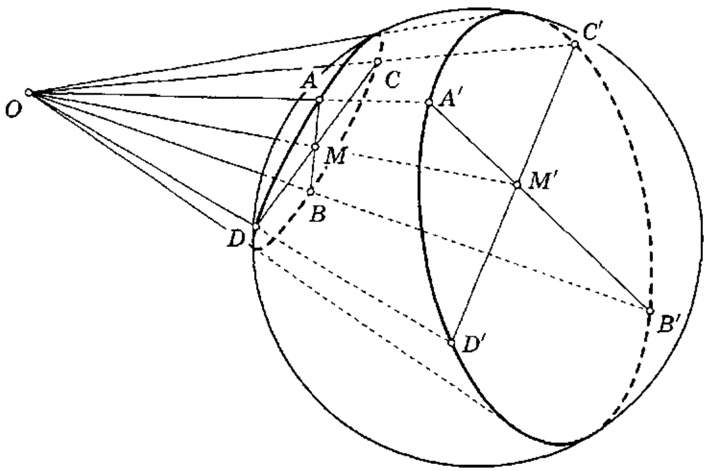


Рис. 42

Для того чтобы вернуться из пространства в плоскость, рассмотрим случай, когда плоскости OAB и OCD совпадают (рис. 43). При этом, на первый взгляд, доказательство теряет

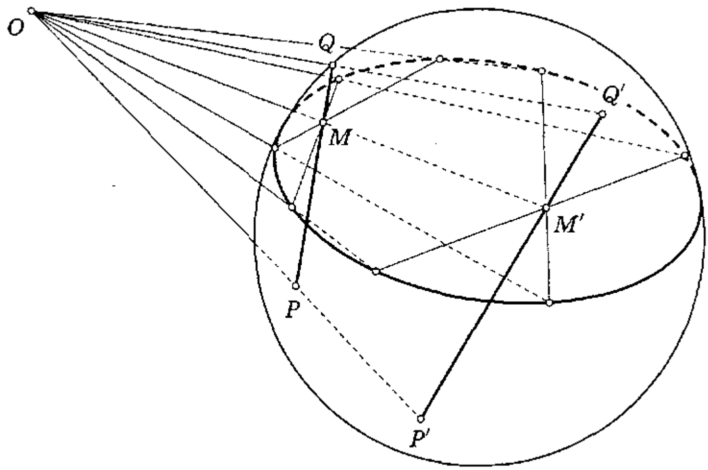


Рис. 43

силу, поскольку пропадает линия пересечения плоскостей. Чтобы убедиться в справедливости теоремы и в этом важном частном случае, проведём через прямые AB и CD какие-либо вспомогательные плоскости, пересечение которых даст ещё одну хорду сферы PQ.

Применяя теперь предыдущую теорему к паре хорд AB и PQ, а затем — к хордам CD и PQ, убеждаемся, что и в этом частном случае она остаётся верной. Значит, она верна и для окружности, которая является сечением сферы.

Возьмём теперь произвольную точку O внутри окружности (сферы) и рассмотрим центральную проекцию окружности (сферы) на себя с центром в точке O. Пусть при этом точка A перейдёт в точку A' (рис. 44). Построим точку S, симметричную точке O относительно окружности, и рассмотрим проекцию окружности на себя с центром S. Точка A перейдёт теперь в точку A''. Из задачи 2 следует, что точки A' и A'' симметричны относительно прямой OS.

Значит, проекция окружности на себя с внутренним центром является композицией проекции с внешним центром и осевой симметрии. Аналогично проекция сферы на себя

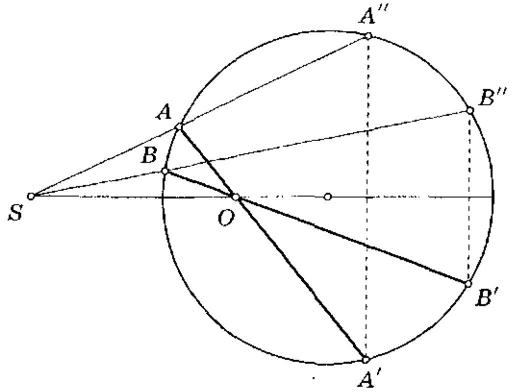


Рис. 44

с внутренним центром является композицией проекции с внешним центром и поворота на 180° вокруг диаметра.

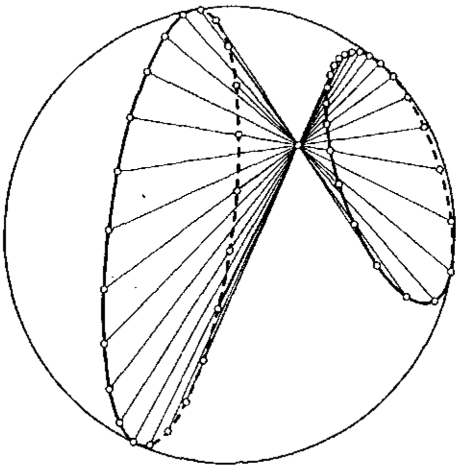


Рис. 45

Принципиально важно, что окружность на сфере при этом опять переходит в окружность (рис. 45 и 46), и всё доказательство предыдущей теоремы полностью остаётся в силе.

Теперь можно вернуться, наконец, к задаче о бабочке, которая моментально решается при помощи доказанных теорем. Достаточно вписать в окружность произвольную «ба-

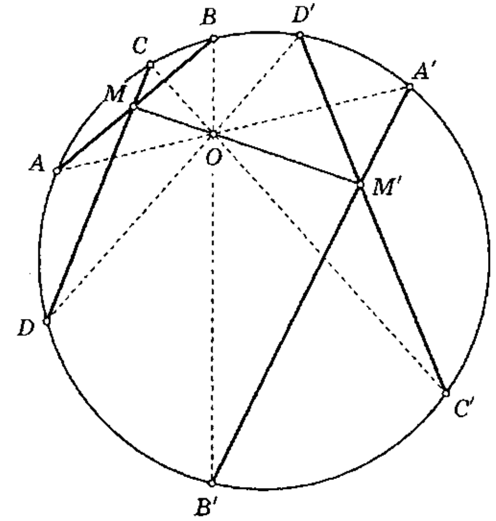


Рис. 46

бочку» $ABB'A'$ с «центральной точкой» P, а затем построить симметричную ей относительно диаметра OP «бабочку» $CDD'C'$ (рис. 47). Точки M и M' пересечения прямых AB,

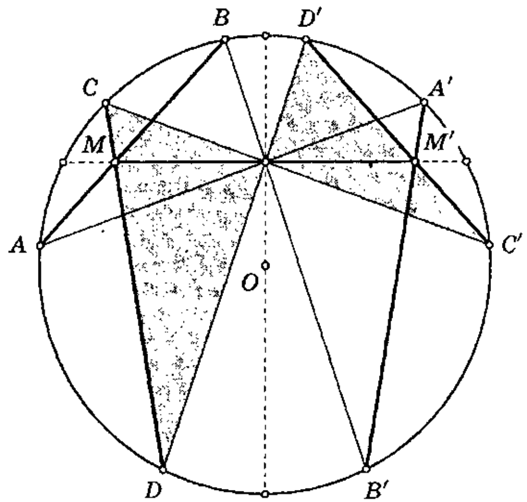


Рис. 47

CD и $A'B'$, $C'D'$, по предыдущей теореме, лежат на одной прямой с центром проекции P, а с другой стороны — симметричны относительно прямой OP. Точка P является при этом серединой соответствующей хорды. Убирая с чертежа одну из «бабочек», получаем утверждение задачи.

ПОЛЯРЫ

Возвращаясь к проекции окружности на себя с внешним центром, заметим, что существуют ровно две точки M и N, которые при этой проекции переходят сами в себя. Чтобы построить их, достаточно провести две касательные из центра проекции.

Возьмём теперь любую хорду AB, построим образы точек A и B — точки A' и B', и применим доказанную теорему. Из неё очевидным образом следует, что прямые AB и $A'B'$ пересекают MN в одной и той же точке (рис. 48). То же самое относится и к прямым AB' и $A'B$.

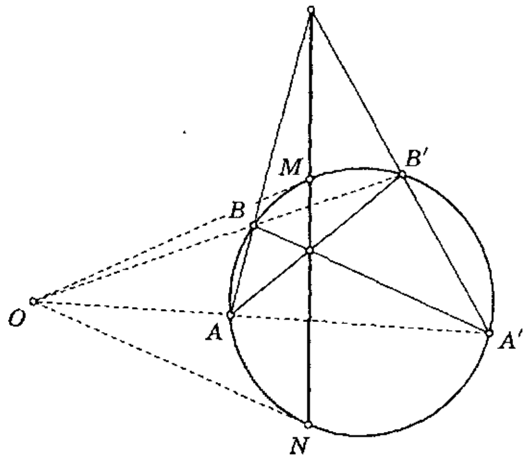


Рис. 48

Одно из возможных применений доказанной теоремы — построение касательной, проходящей через данную точку O, одной линейкой (!). Для этого достаточно выбрать на окружности две произвольные точки A и B, после чего весь чертёж однозначно восстанавливается очевидным образом.

Заметим также, что прямую MN можно описать и по-другому. Для этого нужно построить точку O', симметричную точке O относительно окружности, и провести через неё перпендикуляр к прямой OO'. Это и будет искомая прямая (рис. 49). В этом определении не играет роли, где нахо-

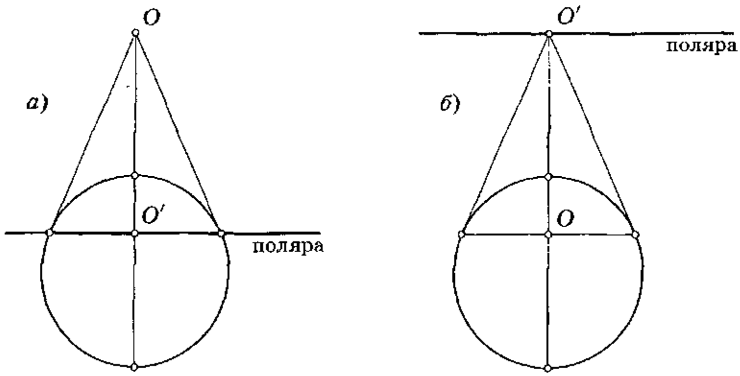


Рис. 49

дится точка O — внутри или снаружи окружности. Назовём построенную прямую *полярой* точки O относительно данной окружности, а точку O — *полюсом*.

Важнейшим свойством полюсов и поляр является замечательная теорема, известная как *принцип двойственности*.

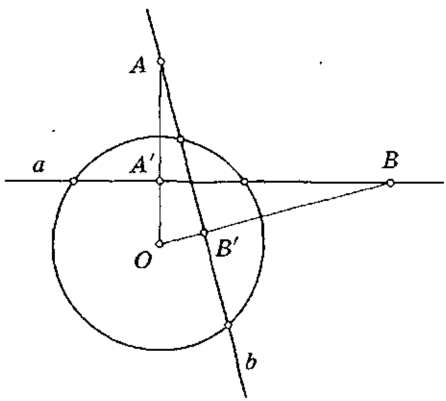


Рис. 50

Теорема 8. Если поляра точки A проходит через точку B, то и поляра точки B проходит через точку A (рис. 50).

Доказательство. Заметим, что поляра точки A проходит перпендикулярно прямой OA через точку A', симметричную точке A относительно окружности, то есть $OA \cdot OA' = R^2$. Это верно независимо от того, где лежит точка A, внутри или снаружи окружности.

Пусть B — произвольная точка на поляре a. Проведём через точку A прямую b, перпендикулярную прямой OB, и покажем, что прямая b является полярой точки B. Для этого достаточно показать, что прямая b пересекает OB в точке B', симметричной точке B относительно окружности, то есть что $OB \cdot OB' = R^2$.

Это следует из подобия треугольников OAB' и OBA':

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}, \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB'.$$

Значит, прямая b, проходящая через точку A, является полярой точки B. Это доказательство сохраняет силу при любом расположении точек A и B относительно окружности. □

Переведя полученный результат на «школьный язык», без использования полюсов и поляр, получаем две достаточно сложные задачи.

Утверждение. Пусть A и B — две точки вне окружности, AP, AQ, BM, BN — касательные.

1) Если прямая PQ проходит через точку B, то прямая MN проходит через точку A (рис. 51).

2) Если прямая AB параллельна PQ, то прямая MN делит отрезок PQ пополам (рис. 52).

Легко видеть, что в одном случае прямые PQ и MN являются полярами точек A и B, а в другом случае прямые AB и MN являются полярами точек C и B. Таким образом, перед нами просто иллюстрации к доказанной теореме. Попробуйте решить эти задачи, используя только факты, известные из школьного курса геометрии. Это возможно, хотя и не очень просто.

Утверждение, сформулированное в начале главы, также является замечательным свойством поляры.

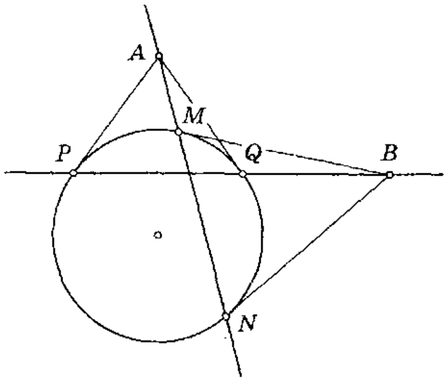


Рис. 51

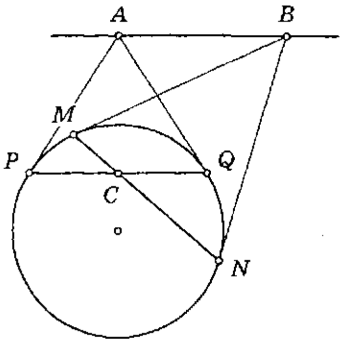


Рис. 52

Теорема 9. Пусть AB и CD — хорды окружности. Если прямые AB и CD пересекаются в точке M, то точка пересечения прямых AC и BD принадлежит поляре точки M.

Однако пока эта теорема доказана лишь для случая, когда точка M лежит снаружи окружности. Другой случай попробуйте разобрать самостоятельно.

21. Докажите теорему для внутреннего расположения точки M.

ПУЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Очень интересные результаты получаются, если применить инверсию не просто к нескольким окружностям и прямым, а к бесконечному семейству окружностей или прямых. Рассмотрим, например, пучок прямых, проходящих через фиксированную точку A. Если рассмотреть любую инверсию с центром A, то каждая прямая перейдёт в себя и весь пучок останется на месте.

Совершим теперь инверсию с каким-нибудь центром O (окружность инверсии можно взять любого радиуса). Все прямые, кроме одной, превратятся в окружности (рис. 53). Все эти окружности будут проходить через центр инверсии O и образ точки A — точку A'. Прямая OA перейдёт сама в себя. Таким образом, пучок прямых, проходящих через точку A, превратится в пучок окружностей, проходящих через точки

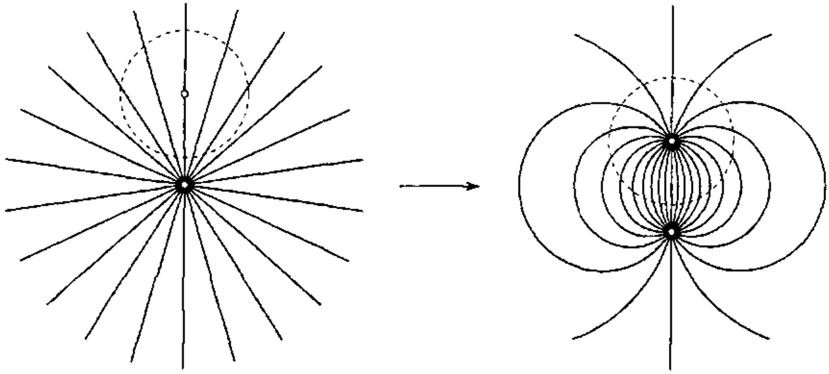


Рис. 53

O и *A'*. Понятно, что исходный пучок прямых можно рассматривать тоже как пучок окружностей, проходящих через точку *A* и бесконечно удалённую точку.

Если взять на глобусе северный и южный полюс и через них провести все меридианы, то при стереографической проекции сферы (глобуса) на какую-нибудь плоскость эти меридианы перейдут как раз в окружности такого пучка.

Теперь применим инверсию к пучку концентрических окружностей с центром *A* (рис. 54). Конечно же, центр инверсии должен отличаться от центра пучка. Радиус окружности инверсии опять не играет роли. Все окружности, кроме одной, перейдут снова в окружности, а окружность, проходя-

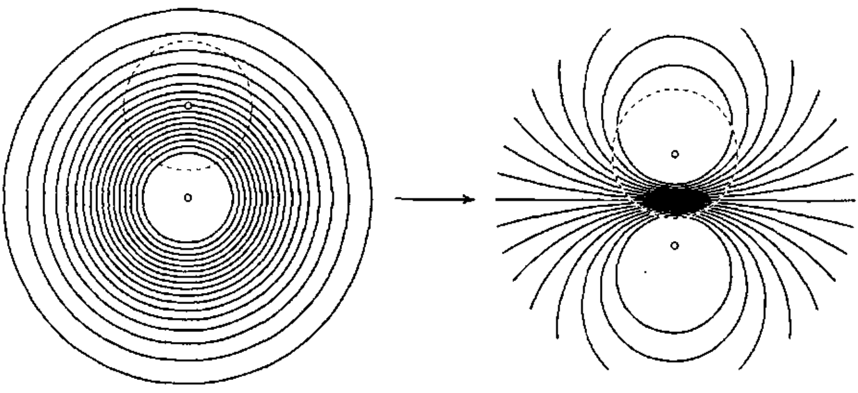


Рис. 54

щая через центр инверсии, перейдёт в прямую. Поскольку исходные окружности не имели общих точек, то и их образы при инверсии также не будут пересекаться.

Окружности малого («достаточно малого») радиуса перейдут в окружности малого радиуса, содержащие точку A', образ точки A. Окружности большого радиуса перейдут тоже в малые окружности, содержащие внутри себя центр инверсии. То есть окружности, проходящие близко к центру O, перейдут в «большие» окружности, а окружности, далёкие от центра O, перейдут в «маленькие» окружности. У получившегося пучка непересекающихся окружностей будут две предельные точки — O и A'.

На поверхности сферы такой пучок образуют параллели, то есть сечения сферы плоскостями, параллельными экватору. Две предельные точки пучка — это северный и южный полюса.

Теперь можно рассмотреть два пучка с общим центром. Один пучок состоит из прямых, другой — из концентрических окружностей. Каждая прямая одного пучка ортогональна каждой окружности другого пучка. При инверсии они перейдут в пучки, состоящие из окружностей, но по-прежнему

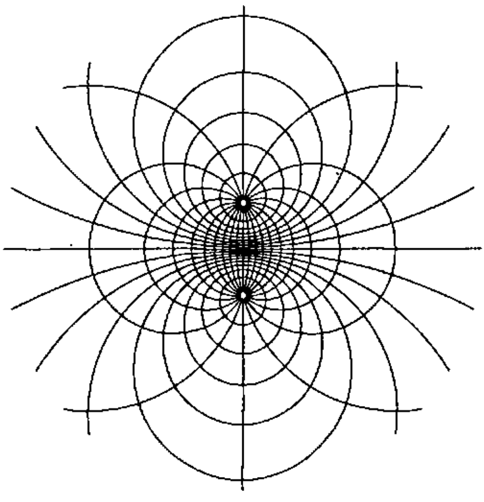


Рис. 55

каждая окружность одного пучка будет ортогональна каждой окружности второго пучка.

Один пучок состоит из окружностей, проходящих через две фиксированные точки. И эти же точки являются предельными точками пучка непересекающихся окружностей (рис. 55).

Ясно также, что восстановить всю конструкцию можно по двум предельным точкам. Все окружности, проходящие через эти точки, образуют один пучок. Выберем теперь из него две любые окружности. Через любую точку плоскости проходит ровно одна окружность, ортогональная к двум данным (задача 9). Все такие окружности образуют пучок, ортогональный к первому.

Можно было бы взять две непересекающиеся окружности и рассмотреть все окружности, которые к ним ортогональны. Однако мы пока что не можем доказать, что в результате получится пучок окружностей, проходящих через две фиксированные точки. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, введём очень важное понятие.

РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ

Рассмотрим две окружности, проходящие через точки A и B. Проводя окружности, ортогональные к ним, мы считали очевидным, что их центры лежат на прямой AB (рис. 56). Попробуем доказать это строго.

Радиусы ортогональной окружности, проведённые в точки пересечения, являются касательными к двум исходным окружностям, то есть центр построенной окружности — это такая точка, что касательные, проведённые из неё к двум данным окружностям, равны. Легко видеть, что этим свойством обладают только точки прямой AB, лежащие вне окружностей.

Действительно, если точка O лежит на прямой AB, то $OM^2 = ON^2 = OA \cdot OB$ по известной теореме о квадрате касательной. Ес-

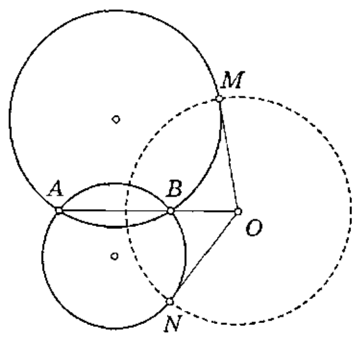


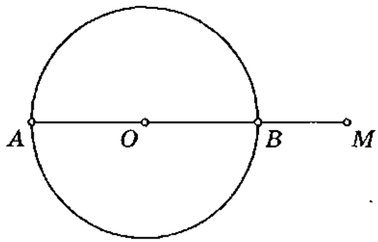
Рис. 56

ли же касательные OM и ON равны, то проведём прямую OA и обозначим точки её пересечения с окружностями B_1 и B_2. Так как $OA \cdot OB_1 = ON^2$ и $OA \cdot OB_2 = OM^2$, то $OB_1 = OB_2$, значит, точки B_1 и B_2 совпадают.

Прямую AB называют *радикальной осью* двух данных окружностей. Её внешняя часть является геометрическим местом точек, в которых достигается равенство касательных к двум окружностям.

Построим теперь радикальную ось двух непересекающихся окружностей. Для этого дадим вспомогательное определение. Рассмотрим окружность и произвольную точку M. Проведём через точку M прямую, пересекающую окружность в точках A и B. *Степенью точки M относительно окружности* называется произведение $MA \cdot MB$, взятое со знаком «+», если точка лежит снаружи окружности, и со знаком «−», если она лежит внутри.

В силу известной теоремы произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора секущей. Кроме того, для точки, лежащей вне окружности, степень равна квадрату касательной. Выбирая секущую, проходящую через центр окружности, убеждаемся в справедливости следующего эквивалентного определения (рис. 57).



$MO = d,$
$OA = R,$
$MA = d + R,$
$MB = d - R.$

Рис. 57

Степенью точки M относительно окружности называется величина $d^2 - R^2$, где R — радиус окружности, d — расстояние от точки до центра окружности.

Теорема 10. Геометрическое место точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров.

Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей. На рис. 58 показаны радикальные оси для различных случаев расположения окружностей.

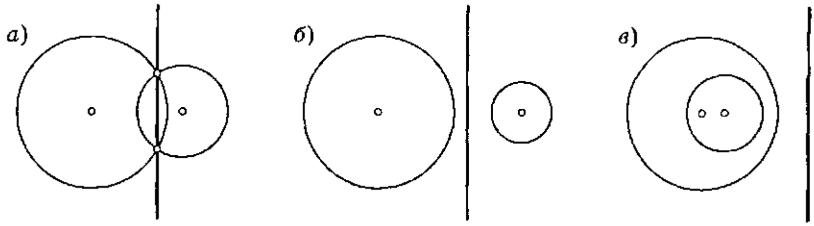


Рис. 58

Доказательство. Рассмотрим две окружности с различными центрами O_1 и O_2 и радиусами r и R. Воспользуемся следующей известной леммой.

Лемма 1. Пусть O_1 и O_2 — произвольные точки, k — произвольная постоянная. Тогда геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию $O_1M^2 - O_2M^2 = k$, есть прямая, перпендикулярная прямой O_1O_2.

В справедливости леммы проще всего убедиться, введя систему координат так, чтобы начало координат совпало с точкой O_1, а ось Ox — с прямой O_1O_2. Тогда точка O_2, лежащая на оси Ox, имеет координаты $(a; 0)$, а точка M — координаты $(x; y)$. Вычислим разность:

$$O_1M^2 - O_2M^2 = (x^2 + y^2) - ((x-a)^2 + y^2) = 2ax,$$

Получаем $2ax = k$, $x = \frac{k}{2a}$. Это и есть уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox.

Если же степени точки M относительно двух данных (неконцентрических) окружностей равны, то по определению степени точки относительно окружности

$$O_1M^2 - r^2 = O_2M^2 - R^2,$$

или

$$O_1M^2 - O_2M^2 = r^2 - R^2 = \text{const},$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

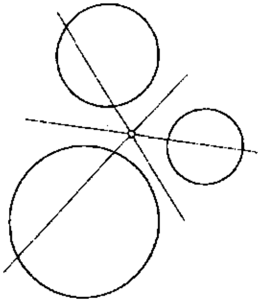


Рис. 59

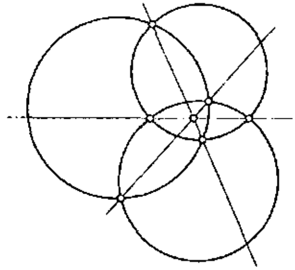


Рис. 60

Рассмотрим теперь три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Возьмём точку пересечения двух любых радикальных осей (рис. 59 и 60). Степени этой точки относительно всех трёх окружностей равны, следовательно, она лежит и на третьей радикальной оси. Таким образом, оказывается верной следующая теорема.

Теорема 11. Если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то их радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эта точка называется *радикальным центром* трёх окружностей.

22. Постройте радикальную ось двух непересекающихся окружностей.

Указание. Достаточно построить лишь одну точку.

23. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности. (Что является радикальной осью двух касающихся окружностей?)

ПОРИЗМ ШТЕЙНЕРА

Теперь возвратимся к пучкам окружностей. Возьмём две непересекающиеся окружности, построим их радикальную ось и найдём точку O пересечения этой оси с линией центров. Эта точка является центром окружности, ортогональной двум данным (рис. 61 и 62). Пусть она пересекает линию центров в точках A и B. Эта пара точек симметрична относительно обеих исходных окружностей.

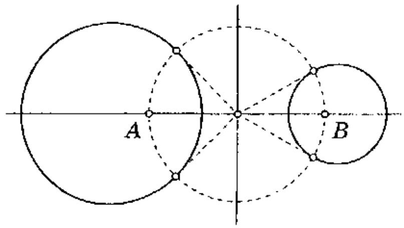


Рис. 61

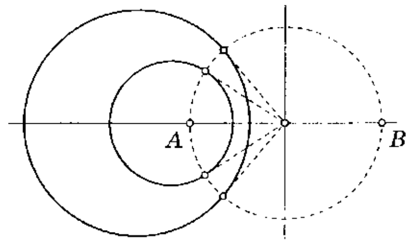


Рис. 62

Совершим инверсию относительно какой-нибудь окружности с центром A или B. При этом ортогональная окружность перейдёт в прямую, а линия центров перейдёт сама в себя. Две исходные окружности перейдут в две окружности, ортогональные двум пересекающимся прямым. Значит, точка пересечения этих прямых будет их общим центром. Мы доказали следующую важную лемму.

Лемма. Для любых двух непересекающихся окружностей существуют инверсии, переводящие их в концентрические окружности.

Теперь несложно доказать отложенную теорему о пучках окружностей. Возьмём две непересекающиеся окружности и рассмотрим все окружности, ортогональные к ним. При помощи подходящей инверсии переведём две исходные окружности в две концентрические окружности. Тогда все ортогональные к ним окружности перейдут в прямые, проходящие через общий центр (почему?). Значит, все эти окружности проходили через две фиксированные точки (в доказательстве леммы обозначенные A и B).

Если взять две любые непересекающиеся окружности, то «с точки зрения инверсии» можно считать их концентрическими, но две концентрические окружности задают единственный пучок. Таким образом, две непересекающиеся окружности однозначно определяют весь пучок.

Подведём итоги: для любых двух пересекающихся окружностей существует содержащий их пучок, также и для любых двух непересекающихся окружностей существует содержащий их пучок. (В литературе пучки этих двух типов называют гиперболическими и эллиптическими.)

Очевидна аналогия: пучок проводится через любые две окружности, так же как прямая — через две точки. Однако для полноты аналогии нужно уметь проводить пучок и через две касающиеся окружности. Такой пучок обычно называют параболическим. Его легко построить как образ пучка параллельных прямых при какой-либо инверсии.

Пучки обычно удобно рассматривать не поодиночке, а ортогональными парами.

24. Постройте образ «бесконечной шахматной доски» при инверсии. (Иными словами, опишите построение или постройте конечный кусок.)

Следующий изящный результат известен как «поризм Штейнера». Слово «поризм» означало теорему, содержанием которой являлось какое-либо построение циркулем и линейкой. Сегодня оно уже ушло из активного словаря, поэтому можно также встретить название «альтернатива Штейнера».

Теорема 12 (поризм Штейнера). Рассмотрим две непересекающиеся окружности и построим цепочку окружностей, каждая из которых касается двух исходных окружностей и двух соседних в цепочке. Может случиться так, что эта цепочка замкнётся, то есть n-я окружность коснётся первой.

Если для двух данных окружностей какая-либо цепочка замкнулась, то замкнётся любая такая цепочка, независимо от выбора первой окружности. Количество окружностей во всех цепочках будет одинаковым.

Для доказательства достаточно перевести две данные окружности в концентрические. Результат виден на рис. 63 и не нуждается в дополнительных пояснениях.

СООСНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

Опираясь на доказательство последней леммы, можно описать пучок непересекающихся окружностей ещё одним способом. Возьмём произвольную окружность ω с центром O и проведём через этот центр прямую l. Все окружности с центрами на прямой l, ортогональные окружности ω, образуют пучок. Предельные точки пучка — точки пересечения l и ω.

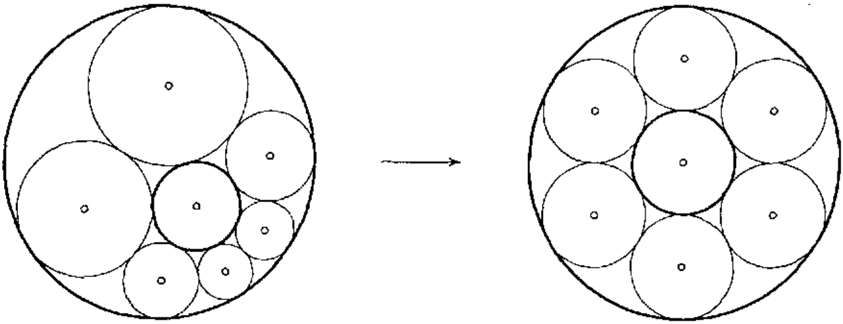


Рис. 63

Одна из окружностей пучка проходит через бесконечно удалённую точку, то есть является прямой p. Эта прямая также ортогональна окружности ω, а значит проходит через её центр O перпендикулярно прямой l. Касательные, проведённые к окружностям пучка из точки O — это радиусы окружности ω. Значит, точка O имеет одну и ту же степень относительно всех окружностей пучка. Прямая p, перпендикулярная линии центров l, будет радикальной осью для любых двух окружностей пучка.

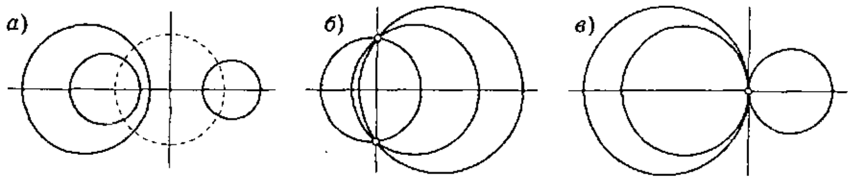


Рис. 64

Значит, можно взять две любые окружности α и β, построить их радикальную ось p и рассмотреть все окружности, имеющие с α ту же самую радикальную ось. Эти окружности образуют пучок (почему?). Любые три окружности, принадлежащие одному пучку, имеют общую радикальную ось и поэтому называются *соосными*. Их центры лежат на одной прямой (но это не является достаточным условием соосности). Важно отметить, что через любую точку плоскости можно провести единственную окружность, соосную с двумя данными (каким образом?).

Можно теперь описать построение пучка окружностей ещё одним способом. Определим сначала степень точки относительно сферы как $d^2 - R^2$, где R — радиус сферы, d — расстояние от точки до центра сферы. Для двух сфер в пространстве определим их радикальную плоскость как множество точек, степени которых относительно данных сфер равны. Радикальная плоскость двух сфер перпендикулярна их линии центров. Доказательство этой теоремы дословно повторяет соответствующее доказательство теоремы о радикальной оси двух окружностей. Верно также и то, что радикальные плоскости трёх сфер пересекаются по одной прямой (или параллельны), а радикальные плоскости четырёх сфер общего положения проходят через одну точку.

Заметим, что если построить сечение конструкции «две сферы и их радикальная плоскость» любой другой плоскостью, то в сечении получатся две окружности и их радикальная ось (почему?). Если две исходные сферы имели общую окружность, лежащую в радикальной плоскости, то две окружности, полученные в сечении, могут иметь общие точки, а могут и не иметь. Это зависит от того, где проведена секущая плоскость.

Рассмотрим теперь пучок сфер, содержащих данную фиксированную окружность. Центры всех таких сфер лежат на одной прямой, а плоскость окружности является общей радикальной плоскостью. Построим сечение этого пучка сфер какой-либо произвольной плоскостью. Получим плоский пучок соосных окружностей с общей радикальной осью. Если общая окружность всех сфер пересекает плоскость сечения в двух точках, то все окружности плоского пучка проходят через эти две точки. Если же плоскость сечения не пересекает общую окружность пучка сфер, то окружности плоского пучка не имеют общих точек. В таком случае две предельные точки плоского пучка окружностей — это точки касания двух сфер пространственного пучка с секущей плоскостью.

Если рассмотреть на плоскости пучок окружностей, то порождающий его пучок сфер в пространстве можно построить многими способами. Достаточно через любые две окружности пучка провести две какие-либо пересекающиеся сферы.

Совершим теперь инверсию пространства, при которой пучок сфер с общей окружностью перейдёт в другой пучок сфер с общей окружностью, плоскость сечения перейдёт в сферу, а плоский пучок окружностей перейдёт в пучок окружностей на секущей сфере.

Каждая окружность на сфере — это сечение сферы плоскостью. Каждая такая плоскость является радикальной плоскостью секущей сферы и одной из сфер пучка. Но точно так же, как три радикальные оси трёх окружностей проходят через одну точку, три радикальные плоскости трёх сфер проходят через одну прямую. Отсюда следует, что все плоскости окружностей пучка на сфере должны пересекать общую радикальную плоскость пучка сфер по одной прямой.

Значит, определить пучок окружностей на сфере можно даже легче, чем на плоскости. Пучок окружностей на сфере образован сечениями сферы плоскостями, проходящими через фиксированную прямую (или параллельными).

25. Даны две окружности и произвольная прямая, непараллельная их радикальной оси. Постройте окружность, сосную двум данным, касающуюся данной прямой.

26. Пусть окружность α переходит в окружность β при инверсии относительно окружности ω. Докажите, что окружности α, β, ω соосны.

27. Докажите, что три соосные окружности перейдут при инверсии в три соосные окружности.

ОКРУЖНОСТЬ АПОЛЛОНИЯ

Как известно, множеством точек, равноудалённых от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB. Построим теперь множество таких точек M, что $\frac{MA}{MB}=$ $=k$. При $k=1$ получим серединный перпендикуляр, а при $k\neq 1$ — окружность. Эта теорема принадлежит Аполлонию*).

Основным средством для доказательства теоремы об окружности Аполлония служит известное свойство биссектрисы треугольника.

*) *Аполлоний Пергский*, древнегреческий математик (III в. до н. э.), один из представителей александрийской школы. Важнейший труд — «Конические сечения». Эта книга Аполлония сильно опередила своё время. Многие теоремы, доказанные в ней, были фактически открыты заново лишь в XVII—XVIII вв.

Утверждение. Пусть биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекают прямую AC в точках M и N (рис. 65). Тогда

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC}.$$

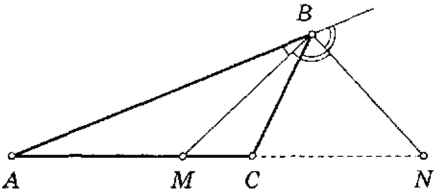


Рис. 65

(Доказательство — в любом учебнике.)

Теорема 13. Пусть точки A и B симметричны относительно окружности ω. Тогда для любой точки M окружности ω отношение $MA:MB$ будет постоянным.

Доказательство. Утверждение следует из построения симметричных точек, описанного в задаче 2.

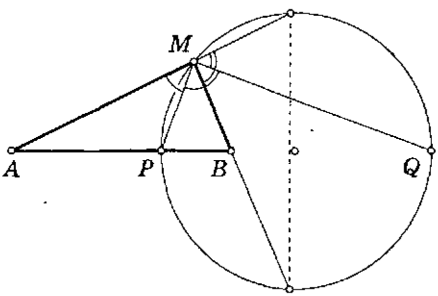


Рис. 66

Пусть P и Q — точки пересечения окружности ω с прямой AB (рис. 66). Тогда MP и MQ — биссектрисы внутреннего и внешних углов треугольника AMB (в силу равенства вписанных углов, опирающихся на равные симметричные дуги). Значит,

$$\frac{MA}{MB}=\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB},$$

что и требовалось доказать. □

Заметим теперь, что для любого значения k ($k>0$, $k\neq 1$) на прямой AB существуют ровно две точки P и Q, такие что

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}=k$$

(говорят, что точки A, B, P, Q образуют гармоническую четвёрку). Если теперь взять любую точку M, такую что $\frac{MA}{MB}=k$, то биссектрисы смежных углов при вершине M

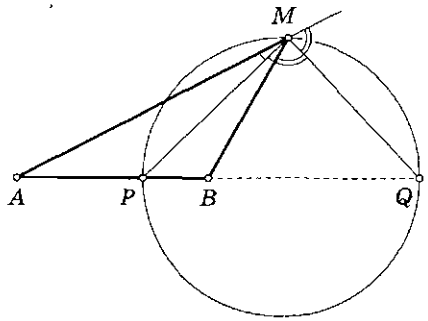


Рис. 67

пройдут через точки P и Q по свойству биссектрис. Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то точка M лежит на окружности с диаметром PQ.

28. Пусть точки A, B, P, Q лежат на одной прямой и $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно окружности, построенной на PQ как на диаметре.

29. Проведём к двум окружностям общую касательную AB (A и B — точки касания). Пусть она пересекает третью окружность, соосную с данными в точках M и P. Докажите, что $\frac{AM}{MB}=\frac{AP}{PB}$.

Заметим, что каждая окружность Аполлония при любом значении параметра k ортогональна окружности с диаметром AB. Значит, все такие окружности образуют пучок с предельными точками A и B. Каждому значению $k>0$ соответствует единственная окружность пучка. Таким образом, пучок непересекающихся окружностей можно описать ещё как множество окружностей, относительно которых симметричны две данные точки A и B.

30. Пусть O — центр окружности Аполлония для точек A и B, соответствующей параметру k. Докажите, что $\frac{OA}{OB}=k^2$.

31. Пусть расстояние между точками A и B равно 1. Найдите радиус окружности Аполлония, соответствующей параметру k.

32*. Проведём в треугольнике ABC все биссектрисы внешних и внутренних углов до пересечения с противоположными сторонами и построим на каждой стороне свою окружность Аполлония. Докажите, что три этих окружности соосны.

ОБОБЩЁННАЯ ОКРУЖНОСТЬ АПОЛЛОНИЯ

Вместо двух точек A и B возьмём две непересекающиеся окружности α и β. Как известно, множество точек, степени которых относительно этих окружностей равны, является прямой (радикальной осью). Представляется естественным рассмотреть множество точек, для которых отношение степеней равно некоторому числу k. Оказывается, это множество представляет собой окружность, соосную с двумя данными.

Для доказательства построим по окружностям α и β две предельные точки пучка — A и B. Если взять точку M на радикальной оси, то степень точки M относительно каждой окружности равна величине MA^2 (почему?). Если теперь взять точку M на окружности β, то её степень относительно окружности α будет равна $k\cdot MA^2$, а величина коэффициента k определяется взаимным расположением окружностей α и β.

Лемма 2. Пусть α и β — две непересекающиеся окружности, A — предельная точка пучка, содержащего эти окружности, M — произвольная точка окружности β. Тогда степень точки M относительно окружности α равна $k\cdot MA^2$, причём k не зависит от положения точки M на окружности β.

Доказательство леммы. Выберем предельную точку A, лежащую внутри окружности α. Пусть прямая MA пересекает окружность β в точках M и P, окружность α — в точках C и D, радикальную ось — в точке K (рис. 68). Тогда $KM \cdot KP = KC \cdot KD = KA^2$, так как равны степени точки K относительно окружностей.

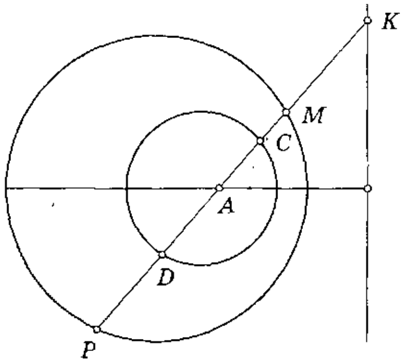


Рис. 68

Выразим степень точки M относительно окружности α (с точностью до знака).

$$MC \cdot MD = (KC - KM) \cdot (KD - KM) = KC \cdot KD - \\ - KM \cdot (KC + KD) + KM^2 = KM \cdot KP - KM \cdot (KC + KD) + \\ + KM^2 = KM(KP + KM - (KC + KD)).$$

Аналогично

$$MA^2 = (KA - KM)^2 = KA^2 - 2KA \cdot KM + KM^2 = \\ = KM \cdot KP - 2KA \cdot KM + KM^2 = KM \cdot (KP + KM - 2KA).$$

Разделив одно на другое, получаем

$$\frac{MC \cdot MD}{MA^2} = \frac{(KP + KM) - (KC + KD)}{KP + KM - 2KA} = \frac{\frac{KP+KM}{2} - \frac{KC+KD}{2}}{\frac{KP+KM}{2} - KA}.$$

В числителе дроби — расстояние между серединами хорд MP и CD, в знаменателе — расстояние между серединой хорды MP и точкой A. Поскольку середина любой хорды лежит на перпендикуляре, проведённом из центра, это отношение равно $\frac{OO'}{OA}$, где O и O' — центры окружностей (рис. 69).

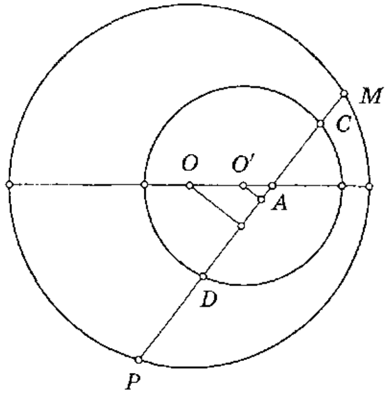


Рис. 69

Аккуратный перебор различных случаев расположения окружностей показывает, что если считать отношение $\frac{OO'}{OA}$ положительным или отрицательным в зависимости от направления векторов $\overrightarrow{OO'}$ и $\overrightarrow{OA}$, то его знак совпадает со знаком степени точки M относительно окружности α. Значит, степень точки M равна $\frac{\overrightarrow{OO'}}{\overrightarrow{OA}} \cdot MA^2$.

Если вместо точки A выбрать другую предельную точку B, то лемма останется верной, поскольку $\frac{MA}{MB} = \mathrm{const}$ в силу того, что β — окружность Аполлония для точек A и B. □

Из доказанной леммы следует теорема об обобщённой окружности Аполлония.

Теорема 14. Множество точек, для которых отношение степеней относительно двух данных окружностей постоянно, является окружностью, соосной с ними.

Из леммы следует, что для любой точки M окружности, соосной с двумя исходными, отношение степеней точки M постоянно. В самом деле, если исходные окружности содержат одну и ту же предельную точку A, то отношение степеней по лемме равно $\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}}$, где O_1, O_2 — центры исходных окружностей, O — центр третьей окружности. Если же исходные окружности лежат по разные стороны от радикальной оси и содержат различные предельные точки A и B, то по лемме отношение степеней равно $\frac{MA^2}{MB^2}\cdot\frac{OB}{OA}\cdot\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}}$. Из задачи 29 получаем, что $\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{OA}{OB}$, откуда отношение степеней опять-таки равно $\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}}$.

Если теперь рассмотреть точку M, для которой отношение степеней относительно двух данных окружностей равно s, то окружность пучка, на которой лежит эта точка, однозначно задаётся условием $\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_2}}=s$. Для полноты доказательства надо ещё рассмотреть вырожденный случай концентрических окружностей (этим может заняться любой аккуратный читатель).

33. Докажите теорему 14 для случая пересекающихся или касающихся окружностей (это гораздо проще).

Доказать теорему 14 можно и без вычислений, с помощью выхода в пространство. Для этого рассмотрим пучок сфер, проходящих через фиксированную окружность. Плоскость этой окружности служит радикальной плоскостью всего пучка. Доказать пространственный аналог теоремы для этого пучка сфер весьма просто. Для этого можно рассмотреть плоское сечение, представляющее собой пучок окружностей, проходящих через две фиксированные точки и решить для него задачу 33 (сделайте это!). Но если эта теорема верна для пучка сфер, то она верна для любого его плоского сечения. Рассмотрев сечение плоскостью, не пересекающей общую окружность сфер, получаем доказательство теоремы для любого пучка окружностей.

ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ

Проделанная работа даёт возможность доказать одну из самых замечательных теорем элементарной геометрии — теорему Понселе*). Замечательна она прежде всего контрастом

*) Понселе́, французский математик и инженер, член Парижской АН (1834). В 1812 году участвовал в походе Наполеона в Россию, был взят в плен. Основной работой Понселе по геометрии является «Трактат о проективных свойствах фигур», написанный им в плену (в г. Саратове)

между наглядностью результата и сложностью доказательства. Её формулировка во многом напоминает поризм Штейнера и на первый взгляд кажется даже более простой, чего нельзя сказать о доказательстве.

Теорема Понселе. Рассмотрим две непересекающиеся окружности α и β. Будем строить ломаную $A_1A_2A_3\ldots$, вершины которой лежат на окружности α, а звенья касаются окружности β. Может случиться так, что вершина A_n совпадёт с вершиной A_1. Тогда у любой аналогичной ломаной $B_1B_2B_3\ldots$, начинающейся из произвольной точки B_1 окружности α, вершина B_n совпадёт с вершиной B_1.

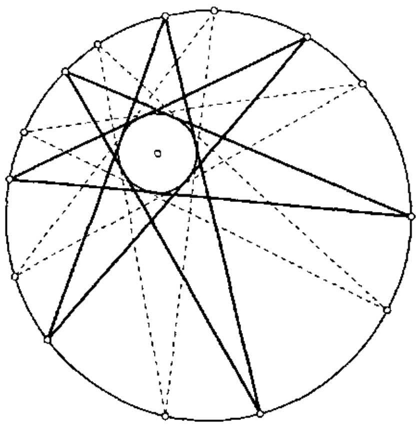


Рис. 70

На рис. 70 окружность β лежит внутри α, однако можно рассмотреть и случай, когда она расположена снаружи. Тогда вместо звеньев ломаной надо брать прямые, содержащие эти звенья. Более того, вместо двух окружностей можно взять две любые кривые второго порядка, то есть эллипсы, параболы, гиперболы в любых комбинациях. Однако в этом случае

и опубликованный в Париже в 1822 году. Ему принадлежат работы по технической механике и гидравлике; он усовершенствовал водяное колесо (колесо Понселе), ввёл в употребление килограммометр в качестве единицы механической работы и др.

доказательство становится существенно более сложным, поскольку вместо пучка окружностей придётся рассматривать пучок кривых второго порядка.

Доказательство теоремы Понселе для окружностей разобьём на несколько шагов.

Лемма о треугольнике. Пусть прямая пересекает стороны AC и BC треугольника ABC в точках R и Q, а продолжение стороны AB — в точке P, при этом $BP = BQ$. Тогда $\frac{CR}{CQ} = \frac{AR}{AP}$.

Доказательство леммы. Проведём через точку A прямую, параллельную PR до пересечения с BC в точке M (рис. 71). Треугольник ABM, как и треугольник PBQ будет равнобедренным, поэтому $MQ = AP$. Отсюда следует, что

$$\frac{CR}{CQ} = \frac{AR}{MQ} = \frac{AR}{AP},$$

что и требовалось доказать. □

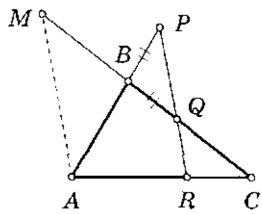


Рис. 71

Лемма о четырёх касательных. Пусть некоторая прямая пересекает две окружности в четырёх точках. Проведём в этих точках касательные и рассмотрим четыре точки пересечения касательных к различным окружностям. Эти четыре точки лежат на одной окружности, соосной к данным.

Доказательство леммы. Обозначим точки касания A, B, C, D, точки пересечения разных касательных — K, L, M, N, точки пересечения касательных к одним и тем же окружностям — P, Q (рис. 72).

Треугольники PAB и QCD — равнобедренные, с равными углами при основаниях, поэтому угол между прямыми PA и QC равен углу между прямыми PB и QD. Это и означает, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

Кроме того, треугольники ACN и BDL подобны, откуда $\frac{NA}{NC} = \frac{LB}{LD}$, аналогично $\frac{MA}{MD} = \frac{KB}{KC}$. Применяя предыдущую лемму к треугольнику MQN, получаем $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MD}$.

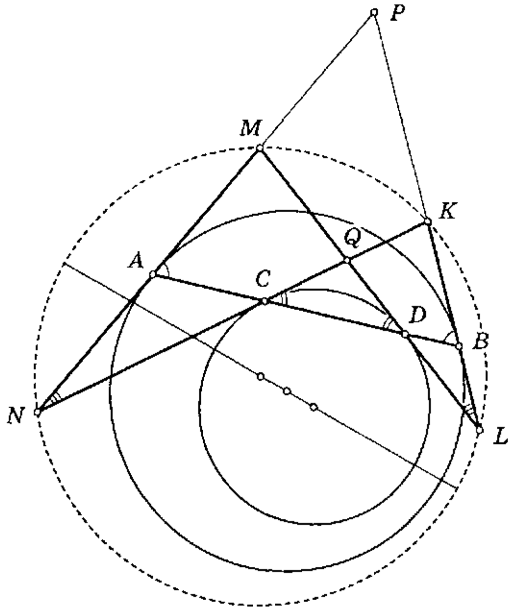


Рис. 72

Окончательно

$$\frac{NA}{NC}=\frac{LB}{LD}=\frac{MA}{MD}=\frac{KB}{KC},$$

то есть для точек K, L, M, N отношения степеней относительно двух данных окружностей равны. Значит, они лежат на обобщённой окружности Аполлония, соосной с двумя исходными. (А можно было применить теорему синусов к треугольникам NAC и MAD.) □

Последний шаг в доказательстве теоремы — самый сложный.

Лемма о промежуточной окружности. Пусть α и β — две непересекающиеся окружности. Вершины ломаных $A_1A_2A_3\ldots$ и $B_1B_2B_3\ldots$ лежат на окружности α, а их звенья касаются окружности β. Тогда прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, … касаются окружности, соосной с двумя исходными.

Доказательство леммы. Достаточно рассмотреть три соседних вершины каждой ломаной A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3.

Точки касания на звеньях A_1A_2 и A_2A_3 обозначим C и D, на звеньях B_1B_2 и B_2B_3 — M и N, точку пересечения A_1A_2 и B_1B_2 обозначим E, A_2A_3 и B_2B_3 — F (рис. 73).

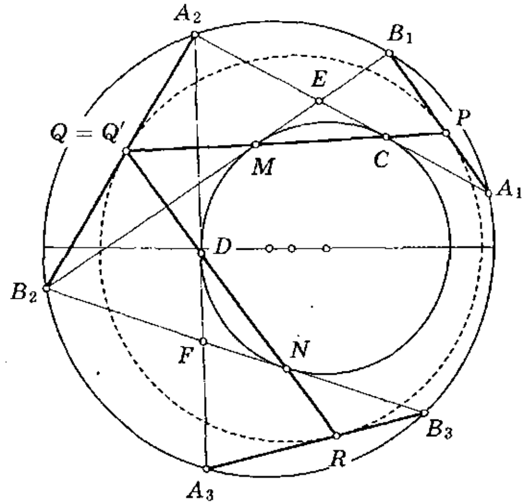


Рис. 73

Покажем, что прямые MC и DN пересекают A_2B_2 в одной и той же точке. Пусть MC пересекает A_2B_2 в точке Q, тогда по лемме о треугольнике, применённой A_2B_2E, получаем $\frac{B_2Q}{A_2Q}=\frac{B_2M}{A_2C}$. Пусть теперь DN пересекает A_2B_2 в точке Q', и по той же лемме, применённой к треугольнику A_2B_2F, получаем $\frac{B_2Q'}{A_2Q}=\frac{B_2N}{A_2D}$. Учитывая, что $B_2M=B_2N$, $A_2C=A_2D$, получаем $\frac{B_2Q}{A_2Q}=\frac{B_2Q'}{A_2Q'}$, что и означает совпадение точек Q и Q'.

Кроме того, прямая MC образует равные углы с прямыми A_1B_1 и A_2B_2, а прямая DN — с прямыми A_2B_2 и A_3B_3. Это следует из того, что треугольники MCE и NDF равнобедренные, а вписанные углы (какие?) в окружности α равны между собой.

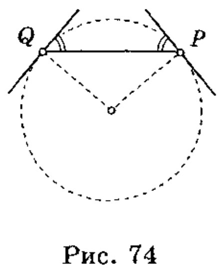


Рис. 74

Осталось заметить, что если прямая образует с двумя другими равные односторонние углы в точках P и Q (рис. 74), то существует окружность, которая касается их в этих точках (почему?). Таким образом, существует окружность, которая касается прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 в точках P, Q, R. Причём это именно одна окружность, поскольку по лемме о четырёх касательных она должна быть соосна с окружностями α и β, но через точку Q проходит единственная окружность, соосная двум данным. (Вот где пригодилась соосность! Без неё — никак.)

Поскольку лемма доказана для трёх последовательных вершин, можно продолжать доказательство и для следующих вершин, присоединяя по одной. □

Из леммы о промежуточной окружности следует теорема Понселе. Действительно, пусть ломаная $A_1A_2A_3\ldots$ замкнулась, т. е. $A_n = A_1$. Предположим, что ломаная $B_1B_2B_3\ldots$ не замкнулась, то есть точки B_n и B_1 не совпадают. По последней лемме отрезки A_1B_1 и A_1B_n касаются промежуточной окружности. Но точки B_1 и B_n лежат по одну сторону от прямой A_1A_2, значит такая ситуация принципиально невозможна. Полученное противоречие и доказывает теорему Понселе.

Более того, можно заменить окружность β любой последовательностью соосных окружностей, потребовав, чтобы очередное звено ломаной касалось очередной окружности из данной последовательности. Доказательство при этом прин-

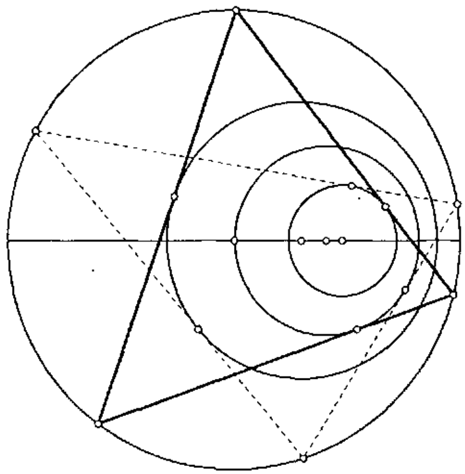


Рис. 75

ципиально не изменяется, но лемма о промежуточной окружности становится чуть более громоздкой. Если вы разобрали её доказательство, вы без труда внесёте соответствующие изменения.

Пожалуй, последняя теорема отстоит довольно далеко от темы «инверсия», хотя активно использует пучки окружностей, непосредственно связанные с инверсией.

ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ

С точки зрения многих школьников (и не только), инверсия представляется в основном средством «взлома» задач на построение, связанных с касанием окружностей. Самая знаменитая из них известна как задача Аполлония.

Задача Аполлония. Постройте окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Для начала удобно рассмотреть частный случай задачи. Вместо трёх окружностей возьмём две окружности и точку. Тогда при помощи инверсии можно свести задачу к построению общих касательных к двум окружностям. Действительно, любая инверсия с центром в данной точке переведёт две данные окружности в две другие окружности, а искомые окружности — в прямые.

Получаем решение для частного случая: построить окружность, касающуюся данных окружностей α и β и проходящую через данную точку M.

1) Построим образы α' и β' данных окружностей α и β при какой-либо инверсии с центром в точке M. Окружность инверсии можно выбрать произвольно.

2) Проведём к окружностям α' и β' общие касательные (как это сделать?). Всего их может быть не более четырёх: две внешние и две внутренние.

3) Построим образы этих касательных при той же инверсии. Получим окружности, проходящие через центр инверсии M и касающиеся окружностей α и β. Что и требовалось.

Общий случай трёх окружностей сводится к частному случаю при помощи искусственного приёма. Заметим, что если две окружности касаются внешним образом, то увеличивая радиус одной на r и уменьшая радиус второй на r, мы

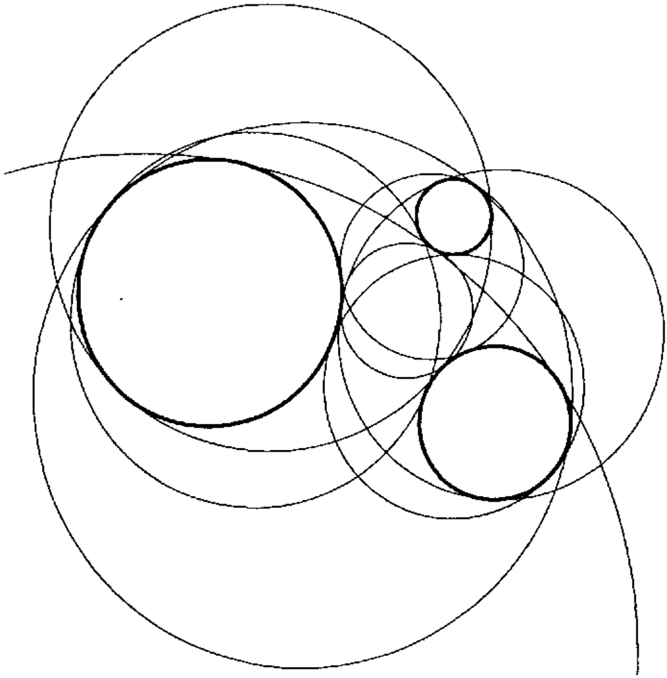


Рис. 76

получим новые окружности, которые также будут касаться друг друга. В том случае, когда касание внутреннее, оба радиуса надо увеличить или уменьшить одновременно.

Таким образом, согласованно увеличивая и уменьшая радиусы в системе из нескольких касающихся окружностей, можно добиться того, что одна из них превратится в точку. Это позволяет получить решение задачи Аполлония (рис. 76).

Чтобы построить окружность, касающуюся трёх данных, определим сначала, каким образом она будет касаться каждой из них — внешним или внутренним. Сожмём радиус r наименьшей окружности до нуля, превращая её в точку, а радиусы двух других изменим на r (уменьшим или увеличим) в зависимости от предполагаемого типа касания. Для полученной конфигурации из двух окружностей и точки проведём известное построение, после чего изменим радиусы всех окружностей на r в обратную сторону. Можно доказать (попробуйте), что задача имеет до восьми различных решений.

Увы, честно провести все требуемые построения циркулем и линейкой — дело довольно утомительное.

Очень полезно самостоятельно рассмотреть различные частные случаи задачи Аполлония, когда некоторые окружности превращаются в прямые или сжимаются в точки. Как правило, это ведёт к существенным упрощениям, а иногда позволяет обойтись без инверсии.

34. Постройте окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности. (Попробуйте придумать решение без использования инверсии и сравните с общим случаем.)

Естественно было бы попытаться поточнее определить тот круг задач на построение, для решения которых можно использовать инверсию или, в более общем виде, построения, осуществимые циркулем. Оказывается, верна следующая теорема, доказанная независимо Г. Мором (1672) и Л. Маскерони (1797):

Теорема Мора—Маскерони. Любое построение, выполнимое циркулем и линейкой, может быть осуществлено одним циркулем.

При этом под построением прямой понимается возможность построить любое количество точек, принадлежащих этой прямой. Доказательство теоремы не очень сложно, но требует определённой аккуратности.

В качестве примера такого построения можно рассмотреть следующую задачу.

35. Пусть окружность α с центром в точке A проходит через центр O окружности ω и пересекает её в точках P и Q. Докажите, что окружности с центрами P и Q, проходящие через точку O, пересекаются второй раз в точке A', симметричной точке A относительно окружности ω.

* * *

За кадром, увы, остались задача Мальфатти о построении трёх касающихся окружностей, вписанных в треугольник, связь инверсии и геометрии Лобачевского и многое другое.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

— Учреждён Московским комитетом образования, префектурой Центрального административного округа Москвы, Отделением математики РАН, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Независимым Московским университетом.

— Ставит своей целью сохранение и развитие традиций математического образования в Москве, организацию и поддержку различных форм внеклассной работы со школьниками, методическую помощь руководителям кружков и преподавателям классов с углублённым изучением математики.

— Является некоммерческой организацией и не стремится к извлечению прибыли. Обучение школьников, студентов, аспирантов и преподавателей средней школы в рамках программ МЦНМО является бесплатным.

...низует курсы повышения квалификации москов-...

...и физические кружки, конкурсы, олимпиады ...твует в организации классов с углублённым ...

— Осуществляет информационную поддержку большинства московских олимпиад для школьников, информация о них представлена на сервере МЦНМО http://www.mccme.ru/olympiads

ISBN 978-5-94057-448-4

9 785940 574484 >

Адрес МЦНМО: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.

Телефон для справок: (499) 241 05 00.