УДК 530.12:531.51; 539.12.17

Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве

В. Г. Кречет, М. В. Левкоева, Д. В. Садовников

Представляется геометрическая модель гравитационного взаимодействия электромагнитного поля в аффинно-метрическом пространстве с кручением и неметричностью как динамика пустого 5-мерного аффинно-метрического пространства. Гравитационное и электромагнитное поля в модели представляются через метрический тензор 5-мерного пространства-времени. Уравнения теории выводятся из вариационного принципа с использованием формализма (4+1)–расщепления. Получены точные сферически-симметричные решения системы уравнений представленной теории и исследованы их возможные эффекты в астрофизике и физике элементарных частиц.

Как известно [1], гравитационные электромагнитные поля полностью геометризируются в рамках 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна, которые описываются компонентами метрического тензора риманова 5-мерного пространства. В качестве гравитационного лагранжиана такой 5-мерной теории выбирается, как и в ОТО, скаляр кривизны, но уже 5-мерного пространства. Тогда 5-мерные вакуумные уравнения Эйнштейна $G_{AB}=0$ в результате (4+1)–расщепления распадаются на систему уравнений Эйнштейна и Максвелла 4-мерной ОТО.

В данной работе эта геометрическая теория Калуцы обобщается на случай 5-мерного аффинно-метрического пространства, оснащенного кручением и неметричностью с целью изучить влияние неримановых объектов на гравитационное взаимодействие электромагнитного поля.

Пятимерное кручение $Q_{AB\cdot}^{\;\;\;\;C}=\Gamma^C_{[AB]}$ описывается лишь своим следом $Q_{AB\cdot}^{\;\;\;\;C}=(\delta^C_B Q_A - -\delta^C_A Q_B)/4$, где $Q_A=Q_{AC\cdot}^{\;\;\;\;C}$. Неметричность $\nabla_A g_{BC}=2W_A g_{BC}$ определяется вектором Вейля, для которого $W_A = T_A/10$, где $T_A=g^{AB}\nabla_A g_{BC}$ — след тензора неметричности.

Лагранжиан представленной 5-мерной геометрической теории выбирается в виде

$$L_g=-\frac{1}{2\text{æ}}\left({}^5\bar{R}+\omega\Omega_{AB}\Omega^{AB}\right), \qquad (1)$$

где $\omega=\text{const}$, совпадающий с геометрическим лагранжианом 5-мерной геометрической модели электрослабых взаимодействий [2] при отсутствии заряженных полей (W-бозонов), т. е. здесь фактически исследуется гравитационное взаимодействие нейтрального бозонного сектора указанной модели. Ω_{AB} — сегментарная кривизна 5-мерного аффинно-метрического пространства, которая в отличие от тензора Риччи $\bar{R}_{AB}=\bar{R}_{ACB\cdot}^{\;\;\;\;\;\;C}$ определяется как другая свертка тензора Римана: $\Omega_{AB}=\bar{R}_{ABC\cdot}^{\;\;\;\;\;\;C}$.[1] В аффинно-метрическом пространстве сегментарная кривизна Ω_{AB} выражается в общем случае только через тензор напряженности следа неметричности: $\Omega_{AB}=(T_{B,A}- -T_{A,B})/2$, $T_A=10W_A$. Пятимерная скалярная кривизна ${}^5\bar{R}$ рассматриваемого аффинно-метрического пространства, присутствующая в лагранжиане (1), имеет разложение

$$\begin{aligned}{}^5\bar{R}={}&{}^5R(\{\})+4Q^A_{\;;A}+8W^A_{\;;A}-\\&-12W_AW^A-12Q_AW^A-3Q_AQ^A, \qquad (2)\end{aligned}$$

где ${}^5R(\{\})$ — 5-мерная кривизна риманова пространства.

Для физической интерпретации теории используется редукция 5-мерной теории на 4-мерное пространство-время, т. е. проводится (4+1)–расщепление исходного 5-мерного многообразия с помощью монадного формализма [1]. Монада λ_A выбирается в хронометрической калибровке: $\lambda_A=g_{A5}/\sqrt{-\varphi^2}$, $\lambda_A\lambda^A=-1$. В данной работе используется условие цилиндричности по пятой координате, т. е. условие независимости всех геометрических величин от пятой координаты. С учетом этого из общей группы координатных преобразований выделяются следующие допустимые преобразования координат:

$$x'^5=x^5+f(x^0,x^1,x^2,x^3)$$
$$x'^\mu=x'^\mu(x^0,x^1,x^2,x^3).$$

С помощью монады от 5-мерного метрического тензора g_{AB} отщепляется эффективный метрический тензор $\tilde{g}_{AB}$ 4-мерного пространственно-временного сечения: $\tilde{g}_{AB}==g_{AB}+\lambda_A\lambda_B$, ортогонального монаде, — $\tilde{g}_{AB}\lambda^B=0$. Физическое значение имеют величины, спроектированные на направление монады и пространственно-временное сечение. Например, для следа тензора неметричности T_A имеем разложение: $T_A=\tilde{T}_A+\lambda_A T$, где $\tilde{T}_A=\tilde{g}^B_A T_B$ — пространственно спроектированная часть вектора, а $T=\lambda_A T^A$ — проекция вектора на монаду.

В 5-мерных геометрических теориях с неизбежностью присутствуют еще и геометрические скалярные поля: это компонента метрики $g_{55}=\varphi^2$, а в аффинно-метрическом пространстве еще и монадные проекции кручения и неметричности: $Q=\lambda_A Q^A$, $T==\lambda_A T^A$. В данной работе используются такие геометрические скалярные поля, которые не нарушают калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Показано [3], что такая ситуация реализуется в двух случаях:

1) когда геометрические скалярные поля постоянны, т. е. $g_{55}=\text{const}$ и $T=\lambda_A T^A==\text{const}$;

2) когда между геометрическими скалярными полями существует связь: $T\varphi=\text{const}$.

[1] В римановом пространстве такая свертка равна нулю в силу свойств симметрии тензора Римана.

Рассмотрим первый случай, когда $g_{55} = 1$ и $T = \lambda_A T^A = \mathrm{const}$. В результате процедуры (4+1)–расщепления выражение для скаляра 5-мерной римановой кривизны[2], входящего в (2), будет иметь вид ${}^5R(\{\}) = {}^4\tilde{R} + \beta^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, где $\beta = \sqrt{G}/c^2$, а геометрические величины связаны с физическими через соотношения: $\lambda_\nu = 2\beta A_\nu$, $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, где A_ν — электромагнитный потенциал.

В итоге исходный геометрический лагранжиан пустого 5-мерного аффинно-метрического пространства сводится к эффективному лагранжиану гравитационного взаимодействия электромагнитного поля в 4-мерном пространстве Вейля:

$$L = {}^4\tilde{R} + \beta^2(1+\omega T^2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ + \omega\tilde{\Omega}_{\mu\nu}\tilde{\Omega}^{\mu\nu} - 2\beta\omega T F_{\mu\nu}\tilde{\Omega}^{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $T = \lambda^A T_A = \mathrm{const}$, $\tilde{\Omega}_{\mu\nu} = (\tilde{T}_{\nu,\mu} - \tilde{T}_{\mu,\nu})/2$ — тензор напряженности поля неметричности Вейля.

Видно, что получилась калибровочно-инвариантная теория гравитационного взаимодействия электромагнитного поля в 4-мерном пространстве-времени с учетом эффектов неметричности, возникающих в результате взаимодействия электромагнитного поля с напряженностью поля неметричности, описываемого в (3) последним слагаемым $\beta\omega T F_{\mu\nu}\tilde{\Omega}^{\mu\nu}$. Здесь взаимодействие электромагнитного поля с неметричностью возникает естественным образом в результате редукции 5-мерной геометрической теории.

В данной теории возникающие массовые члены по неметричности, присутствующие в лагранжиане (1), компенсируются следом кручения в силу уравнений движения для кручения: $\delta L/\delta Q_A = 0$.

После варьирования действия с лагранжианом (3) по $g^{\mu\nu}$, A^μ и $\tilde{T}^\mu$ получается совместная система уравнений для гравитационного, электромагнитного полей и поля неметричности:

$$1)\ G_{\mu\nu} = \\ = 4\beta\omega T\left(\tilde{\Omega}_{(\mu s}F_{\nu)\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_{sm}F^{sm}g_{\mu\nu}\right) - \\ -2\omega\left(\tilde{\Omega}_{\mu s}\tilde{\Omega}_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_{sm}\tilde{\Omega}^{sm}g_{\mu\nu}\right) - \\ -2\beta^2(1+\omega T^2)\left(F_{\mu s}F_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}F_{sm}F^{sm}g_{\mu\nu}\right);$$

$$2)\ \left[(1+\omega T^2)F^{\mu\nu} - \frac{\omega T}{\beta}\tilde{\Omega}^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = 0;$$

$$3)\ \left[\tilde{\Omega}^{\mu\nu} - \beta T F^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = 0. \quad (4)$$

Представляет интерес с целью астрофизических приложений рассмотреть в данной теории статическое сферически-симметричное распределение полей в пространстве с метрикой:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5)$$

Другими словами, решается обобщенная задача Райснера-Нордстрема с учетом эффектов неметричности в новой более естественной постановке.

Из соображений симметрии векторные потенциалы имеют только одну ненулевую компоненту: $\tilde{T}_\mu = \delta^0_\mu 2\beta\psi(r)$ и $A_\mu = \delta^0_\mu\varphi(r)$. В таком случае система (4) в метрике (5) принимает вид:

$$1)\quad e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \\ = -\beta^2 e^{-\lambda-\nu}\Big[(1+\omega T^2)\varphi'^2 + \\ + \omega(\psi'^2 - 2T\varphi'\psi')\Big];$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \\ = -\beta^2 e^{-\lambda-\nu}\Big[(1+\omega T^2)\varphi'^2 + \\ + \omega(\psi'^2 - 2T\varphi'\psi')\Big];$$

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} - \frac{\lambda'\nu'}{4} = \\ \beta^2 e^{-\nu}\Big[(1+\omega T^2)\varphi'^2 + \omega(\psi'^2 - 2T\varphi'\psi')\Big];$$

$$2)\quad e^{-(\lambda+\nu)/2}\Big[(1+\omega T^2)\varphi' - \omega T\psi'\Big] = \frac{q}{r^2};$$

$$3)\quad \Big(\psi' - T\varphi'\Big) = \frac{C}{r^2},$$

где постоянные q и C имеют смысл соответственно электрического заряда и заряда неметричности (дилатонного заряда).

Получено точное статическое сферически-симметричное решение данной системы для гравитирующего электромагнитного поля, которое в координатах кривизн имеет вид:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{l_q^2 + \omega\,(C - Tl_q)^2}{r^2};$$

$$\varphi' = \frac{q}{r^2},$$

где $l_q = q\beta$ — электрогравитационная длина электрического заряда. Легко видеть, что полученное решение обобщенной задачи Райснера-Нордстрема с учетом неметричности отличается от обычного решения этой задачи в ОТО:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{l_q^2}{r^2}$$

постпостньютоновскими эффектами.

Представляет интерес рассмотрение данной задачи в отсутствии кручения. В таком случае массивные члены по неметричности не компенсируются, и в эффективном лагранжиане (3) появится дополнительный массовый член вида: $3(T^2 - T_\mu T^\mu)/25$. Соответствующая система полевых уравнений будет иметь вид:

$$1)\ G_{\mu\nu} = 4\beta\omega T\left(\tilde{\Omega}_{(\mu s}F_{\nu)\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_{sm}F^{sm}g_{\mu\nu}\right) - \\ -2\omega\left(\tilde{\Omega}_{\mu s}\tilde{\Omega}_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}\tilde{\Omega}_{sm}\tilde{\Omega}^{sm}g_{\mu\nu}\right) - \\ -2\beta^2(1+\omega T^2)\left(F_{\mu s}F_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4}F_{sm}F^{sm}g_{\mu\nu}\right) + \\ + \frac{3}{25}\left(\tilde{T}_\mu\tilde{T}_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{T}_s\tilde{T}^s - T^2\right);$$

$$2)\ \left[(1+\omega T^2)F^{\mu\nu} - \frac{\omega T}{\beta}\tilde{\Omega}^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = 0;$$

[2] Здесь мы не учитывали член $-2\tilde{\nabla}^{+}_{\alpha}\phi^\alpha$, который в действии дает полную дивергенцию.

$$3)\ \left[\tilde{\Omega}^{\mu\nu} - \beta T F^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = \frac{3}{25\omega}\tilde{T^{\mu}}. \qquad (6)$$

Это приводит к тому, что на малых расстояниях, когда можно пренебречь кривизной и считать пространство плоским, закон Кулона будет выглядеть:

$$\varphi' = \frac{q}{r^2} + \frac{C}{\mu^2}e^{-\mu r}\left(\frac{\mu}{r} + \frac{1}{r^2}\right),$$

где

$$\mu^2 = \frac{6}{25}\frac{1+\omega T^2}{\omega},$$

т. е. в отличие от обычного закона Кулона здесь имеется экспоненциально убывающая добавка, не играющая заметной роли на макроскопическом уровне. В случае с кручением получается обычный закон Кулона.

Будем также рассматривать обобщенную задачу Райснера-Нордстрема для рассматриваемой конфигурации полей, т. е. искать решение системы (6) для случая сферической симметрии:

$$ds^2 = e^{\nu(x)}dt^2 - e^{\lambda(x)}dx^2 - \\ - e^{\mu(x)}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \qquad (7)$$

В этом случае названная система запишется в виде

$$1)\quad e^{-\lambda}\left[\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right] - e^{-\mu} = \\ = -\frac{3}{50}(\psi^2 e^{-\nu} - T^2) - \frac{1}{2}e^{-\lambda-\nu}\times \\ \times\left[\frac{\omega T^2+1}{2}\varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \omega T\psi'\varphi'\right];$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\nu'}{2}\right] - e^{-\mu} = \\ = \frac{3}{50}(\psi^2 e^{-\nu} + T^2) - \frac{1}{2}e^{-\lambda-\nu}\times \\ \times\left[\frac{\omega T^2+1}{2}\varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \omega T\psi'\varphi'\right];$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\mu'\nu'}{4} - \frac{\mu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right] = \\ = \frac{3}{50}(\psi^2 e^{-\nu} + T^2) + \frac{1}{2}e^{-\lambda-\nu}\times \\ \times\left[\frac{\omega T^2+1}{2}\varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \omega T\psi'\varphi'\right];$$

$$2)\quad \frac{\omega T^2+1}{\omega T}\left[\varphi'' + \varphi'\mu' - \frac{\varphi'\lambda'}{2} - \frac{\varphi'\nu'}{2}\right] = \\ = \psi'' + \psi'\mu' - \frac{\psi'\lambda'}{2} - \frac{\psi'\nu'}{2};$$

$$3)\quad \psi'' + \psi'\mu' - \frac{\psi'\lambda'}{2} - \frac{\psi'\nu'}{2} - T\left[\varphi'' + \right. \\ \left. + \varphi'\mu' - \frac{\varphi'\lambda'}{2} - \frac{\varphi'\nu'}{2}\right] = \frac{6}{25\omega}\psi e^{\lambda}. \qquad (8)$$

Найдены два точных решения этой системы (в координатах кривизн).

Первое из них:

$$\varphi = \frac{1}{\beta}e^{\nu/2}; \qquad \nu' = \frac{2(v-1)}{r}; \\ v'vr + v^2 - v + \mu^2 r^2 = 0, \qquad (9)$$

где $v = e^{-\lambda/2}$, а $\mu^2 = \dfrac{6}{25}\dfrac{1+\omega T^2}{\omega}$. Здесь искомые функции φ и e^{ν} выражаются через функцию v, которая удовлетворяет уравнению (9). Это уравнение сводится к уравнению Абеля, причем к такому типу, который не интегрируется в квадратурах, но которое приводится к известному уравнению Фаулер-Эмдена для равновесия звезды с уравнением состояния политропного газа. Решение такого уравнения дано в [4].

Переобозначив $x = \mu r$, уравнение (9) можно записать в виде

$$v - v^2 - vv'x = x^2. \qquad (10)$$

Качественный анализ решения данного уравнения показывает, что все интегральные кривые (Г) этого уравнения в плоскости (x, v), располагаясь в области $x > 0$, $v > 0$, пересекают ось x под прямым углом при конечных значениях $x = x^*_\Gamma$ и переходят в область $v < 0$, пересекая ось v при отрицательных значениях v так, что каждая из этих кривых всегда находится в области $0 \le x \le x^*_\Gamma$. Поэтому решение в области $x > x^*_\Gamma$ не существует. Это видно также из асимптотики решения уравнения (10) вблизи точки $x = x^*_\Gamma$, то есть при $x^*_\Gamma - x \ll 1$: $v = e^{-\lambda/2} \sim \sqrt{x^*_\Gamma - x}$. Среди интегральных кривых Γ существует такая Γ_0, что $v(0) = 1$, то есть $\lambda = 0$ при $r = 0$. В этом случае $x^*_{\Gamma_0} = \sqrt{2}$ $(r^* = \sqrt{2}/\mu)$, а из (9) следует, что в области существования решения $0 \le x \le x^*_\Gamma$ искомые функции $\nu(r)$ и $\varphi(r)$ остаются конечными. Следовательно, в данном случае имеем регулярную в центре сферическую равновесную конфигурацию рассматриваемых полей, радиус которой $r^* = \sqrt{2}/\mu$ имеет величину порядка комптоновской длины частицы ($[\mu^2] = \text{см}^{-2}$). Вблизи точки $r = r^*$ метрический коэффициент $e^{\lambda} \to \infty$ как $1/\mu(r^* - r)$, а остальные величины e^{ν}, φ остаются конечными. Масса конфигурации $M = \frac{4\pi}{c^2}\displaystyle\int_0^{r^*} T^0_0 r^2\, dr$ и ее объем также являются конечными величинами.

Если теперь вместо r ввести новую «внутреннюю» координату z по формуле $r(z) = = z\sqrt{r^*\mu} - z^2\mu/4$ так, чтобы новый метрический коэффициент $\overline{e^{\lambda}} = e^{\lambda}(dr/dz)^2 = 1$ при $r = r^*$, то есть был регулярным в точке r^*, то функция e^{ν} и φ останутся также везде регулярными, а радиус r как функция от z будет меняться от 0 до r^*, а затем опять симметричным образом до 0. При этом $dr/dz(r = r^*) = 0$, то есть точка r^* оказывается просто точкой максимального значения радиуса. Следовательно, данную равновесную конфигурацию можно рассматривать как замкнутую неоднородную сферическую (с выделенным центром) космологическую модель, заполненную рассматриваемыми полями.

Второе точное решение системы (8):

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{4} r^2;$$
$$e^{\nu} = Cr^2 \left(\frac{2}{\mu^2} + r^2 \right);$$
$$E_r = \varphi' = C_1 r, \quad (11)$$

где C, C_1 — постоянные и $\mu^2 = \frac{6}{25} \frac{1+\omega T^2}{\omega}$, причем C_1 пропорциональна электрическому заряду в центре . Поскольку расстояние $l = \int\limits_0^{r_0} e^{\lambda/2} dr \to \infty$ при $r \to \infty$, то полученная конфигурация является неограниченной с возрастающей, пропорционально r, напряженностью электрического поля. Другими словами, сила, действующая на пробный электрический заряд, неограниченно возрастает с удалением от центрального источника, а с приближением к нему она стремится к нулю. Таким образом, получилась модель удержания кварков (кваркового конфаймента).

Рассмотрим теперь второй вариант калибровочно-инвариантной геометрической теории электромагнетизма в пространстве с неметричностью, когда геометрические скалярные поля связаны между собой соотношением $T\varphi = k = \text{const}$, в котором $g_{55} = \varphi^2$ и $T = \lambda_A T^A$. Здесь также за основу берется 5-мерный геометрический лагранжиан (1), который при помощи процедуры $(4+1)$ – расщепления приводится к следующему эффективному калибровочно-инвариантному лагранжиану 4-мерного аффинно-метрического пространства с электромагнитным и скалярным полями:

$$L = {}^4\tilde{R} + \beta^2(k^2\omega + e^{2\phi}) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ + \omega \tilde{\Omega}_{\mu\nu}\tilde{\Omega}^{\mu\nu} - 2k\beta \tilde{\Omega}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2\phi_{,\mu}\phi^{,\mu},$$

где $k = T\varphi = \text{const}$, $T = \lambda^A T_A$, $\phi_{,\mu} = \varphi_{,\mu}/\varphi$, $\beta = \sqrt{G}/c^2$, $\tilde{\Omega}_{\mu\nu} = (\tilde{T}_{\nu,\mu} - \tilde{T}_{\mu,\nu})/2$, $\lambda_\mu = = 2\beta\varphi A_\mu$, $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$.

Соответствующие уравнения теории, полученные из вариационного принципа, имеют вид:

$$\begin{aligned}
1)\quad & G_{\mu\nu} = 4k\beta\omega \times \\
& \times \left(\tilde{\Omega}_{(\mu s} F_{\nu)\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4} \tilde{\Omega}_{sm} F^{sm} g_{\mu\nu} \right) - \\
& -2\beta^2 (k^2\omega + e^{2\phi}) \times \\
& \times \left(F_{\mu s} F_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4} F_{sm} F^{sm} g_{\mu\nu} \right) - \\
& -2\omega \left(\tilde{\Omega}_{\mu s} \tilde{\Omega}_{\nu\cdot}{}^{s} - \frac{1}{4} \tilde{\Omega}_{sm} \tilde{\Omega}^{sm} g_{\mu\nu} \right) + \\
& +2 \left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,s}\phi^{s} g_{\mu\nu} \right); \\
2)\quad & \left[(k^2\omega + e^{2\phi}) F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = \frac{k\omega}{\beta} \tilde{\Omega}^{\mu\nu}{}_{;\nu}; \\
3)\quad & 2\Box\phi + \beta^2 e^{2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0; \\
4)\quad & \tilde{\Omega}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = k\beta F^{\mu\nu}{}_{;\nu}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Обобщенная задача Райснера-Нордстрема в этом случае решалась, когда метрика выбиралась в виде (7). Соответственно, система уравнений (12) примет вид (здесь $A_\mu = \delta^0_\mu \varphi(x)$, $\tilde{T}_\mu = \delta^0_\mu 2\psi(x)$):

$$\begin{aligned}
1)\quad & \mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} - e^{\lambda-\mu} = \\
& = -\frac{1}{2} e^{-\nu} \left[2\beta^2 \left(e^{2\phi} + k^2\omega \right) \varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \right. \\
& \left. -2k\beta\omega\varphi'\psi' \right] - \phi'^2; \\
& \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\nu'}{2} - e^{\lambda-\mu} = \\
& = -\frac{1}{2} e^{-\nu} \left[2\beta^2 \left(e^{2\phi} + k^2\omega \right) \varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \right. \\
& \left. -2k\beta\omega\varphi'\psi' \right] + \phi'^2; \\
& \mu'' + \nu'' + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} - \frac{\mu'\lambda'}{2} - \\
& - \frac{\nu'\lambda'}{2} = \mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} - e^{\lambda-\mu} = \\
& = e^{-\nu} \left[2\beta^2 \left(e^{2\phi} + k^2\omega \right) \varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\psi'^2 - \right. \\
& \left. -2k\beta\omega\varphi'\psi' \right] - 2\phi'^2; \\
2)\quad & \left[2\varphi'\beta^2 \left(e^{2\phi} + k^2\omega \right) - k\beta\omega\psi' \right] \times \\
& \times e^{\mu - \frac{\lambda+\nu}{2}} = \text{const}; \\
3)\quad & \phi'' + \phi' \left(\mu' + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) = -\beta^2 \varphi'^2 e^{2\phi-\nu}; \\
4)\quad & \left(\psi' - 2k\beta\varphi' \right) e^{\mu - \frac{\lambda+\nu}{2}} = \text{const}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Найдены сферически-симметричные решения данной системы как с учетом собственного гравитационного поля (обобщенная задача Райснера-Нордстрема), так и без него (обобщенный закон Кулона). В последнем случае задача на обобщенный закон Кулона (с учетом неметричности и геометрического скалярного поля) имеет два решения:

$$E = \frac{q}{(r + l_q)^2}$$

или

$$E = \frac{q}{(r + l_q\sqrt{2})^2 \left[1 + \left(\frac{l_q\sqrt{46}}{r + l_q\sqrt{2}} \right)^2 \right]},$$

где $l_q = q\beta$ — электрогравитационная длина электрического заряда. Откуда видно, что в рамках представленной теории в задаче Кулона отсутствует особенность в центре, а при $r \gg l_q$, что справедливо для ядерных, атомных и макроскопических расстояний, имеем обычный закон Кулона. Кроме того, из полученного решения следует, что электромагнитная масса заряда является конечной величиной, которая в единицах СИ выглядит:

$$m_q = \frac{W}{c^2} = \frac{\varepsilon_0}{2c^2} \int\limits_0^{\infty} E^2 dV = \frac{l_q c^2}{24\pi\varepsilon_0 G},$$

где ε_0 — электрическая постоянная.

С учетом собственного гравитационного поля для системы (13) получено (в гармонических координатах $\mu + (\nu - \lambda)/2$) точное решение обобщенной задачи Райснера-Нордстрема:

$$e^{\nu} = \frac{C_2}{\operatorname{sh} A(x - x_0)};$$

$$e^{\mu} = \frac{A^2}{2C_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} A(x - x_0)}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{A}{\sqrt{2}}(x_1 - x)};$$

$$e^{\lambda} = \frac{A^4}{4C_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} A(x - x_0)}{\operatorname{sh}^4 \dfrac{A}{\sqrt{2}}(x_1 - x)};$$

$$\varphi' = \frac{A^2}{C_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 A(x - x_0)};$$

$$\phi' = \frac{A}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} A(x - x_0)}{\operatorname{sh} A(x - x_0)},$$

где x_0, x_1, C_1 и A — постоянные, причем $C_2 = \operatorname{sh} A(x_1 - x_0)$.

В координатах кривизн в разложении по $1/r$ данное решение выглядит:

$$e^{\lambda_0} = 1 + \frac{r_g}{r} + \left(\frac{3r_g^2}{4l_q^2} - \frac{q_s}{r_g}\right)\frac{l_q^2}{r^2} + \cdots;$$

$$e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q_s}{r_g}\frac{l_q^2}{r^2} + \cdots; \quad E = \frac{q_e}{r^2},$$

где q_e — электрический заряд, q_s — скалярный заряд.

Здесь также видно, что полученное решение отличается от стандартного решения в ОТО постпостньютоновскими эффектами.

Таким образом, в данной работе показано, что в рамках 5-мерной геометрической модели взаимодействие электромагнитного поля с неметричностью пространства-времени возникает естественным образом автоматически без всякого искусственного введения в лагранжиан членов взаимодействия. Такая теория приводит к модели удержания кварков с асимптотической свободой.

В рассмотренной геометрической теории электромагнетизма в законе Кулона, вследствие эффектов неметричности, автоматически устраняется особенность в центре, а для электрона получается конечная электромагнитная масса.

Кроме того, получены точные решения для обобщенной задачи Райснера-Нордстрема как с учетом геометрических скалярных полей, так и при их отсутствии.

В заключении авторы выражают благодарность всем участникам научного семинара Российского гравитационного общества за полезные обсуждения данной работы.

Литература

1. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Кречет В. Г.* / Гравитация и электромагнетизм. – Минск: Изд-во БГУ, 1998. – т 7.
3. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в 5-мерном аффинно-метрическом пространстве / / Тезисы докладов 10-й Российской гравитационной конференции. – Владимир, – 1999.
4. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. – М.: Изд. иностр. литер., 1954.

UDC 530.12:531.51; 539.12.17

5-dimensional Geometrical Model of Gravitational Interaction of Electro–Magnetic Field in Affine-metric Space-Time

V. G. Krechet, M. V. Levkoeva, D. V. Sadovnikov

The geometrical model of the gravitational interaction of the electro-magnetic field in the affine-metric space-time with torsion and non-metricity $\left(Q_{AB.}^{\ \ C} = \Gamma_{[AB]}^{\ \ \ C}; \nabla_A g_{BC} = 2W_A g_{BC}\right)$ is regarded. This model is described as the dynamics of the empty 5-dimensional affine-metric space. The gravitational and electro-magnetic fields are determined by means of the metric tensor of the 5-dimensional space-time. The equations of this theory can be obtained by the variation principle by using the (4+1)-splitting formalism. The exact spherical and cylindrical symmetry solutions and its astrophysical effects are investigated.