

А.М. Петров

Кватернионное представление вихревых движений



Москва 2006

А.М. Петров

Кватернионное представление вихревых движений



Москва 2006

Петров А.М.
П 30 Кватернионное представление вихревых движений. – М.: Компания Спутник+, 2006. – 32 с.

ISBN 5-364-00355-8

Обсуждается причина возникновения и путь преодоления теоретико-методологических трудностей в постановке задач и оценке результатов научных исследований и изобретательской деятельности, направленных на создание альтернативной энергетики на основе вихревой техники.

On discute une cause de l'apparition et un moyen de l'élimination des difficultés théoriques et méthodologiques en positionnement des problèmes et en estimation des résultats des recherches scientifiques et de l'activité d'invention ayant pour but la création de l'énergétique alternative sur la base de la technique de tourbillon.

ББК 22.31

Отпечатано с готового оригинал-макета автора.

Отзывы и пожелания просьба отправлять по адресу:
petrov @ agent700.mtu-net.ru

ISBN 5-364-00355-8

© Петров А.М., 2006

Предисловие

Существуют проблемы «междисциплинарного» и «межвременного» характера, приковывающие к себе внимание представителей разных наук и переживающие вместе с ними эпохи различных подходов к их постепенному, сначала частичному, а затем всё более полному, разрешению. Такие проблемы вбирают в себя «дух времени» и определяют судьбы причастных к ним людей. Исследуя их, можно и нужно изучать историю науки, чтобы придавать последней новые импульсы в её продвижении вперёд.

Одна из таких, уже изрядно «застарелых», проблем, успешное разрешение которой могло бы изменить условия жизни человека на Земле, обозначается словом «вихри». За порой безобидным, как воронка на поверхности воды, а нередко грозным, как смерч, внешним обликом этого явления сокрыты великие тайны Природы, не дающие покоя людям разных профессий и занятий: учёным – «теоретикам и прагматикам»; создателям и испытателям новой техники – «физикам и лирикам»; рационализаторам и изобретателям – «прозаикам и поэтам». Объединяет их, кроме общего предмета внимания и деятельности, ещё и то, что все они (за исключением, быть может, настоящих поэтов) соперничество с Природой в хитроумии и изобретательности проигрывают.

Продолжаться так может ещё долго, пока «в один прекрасный день» не выступит и не скажет, наконец, своего веского слова Наука. Но, чтобы это произошло, ей самой сначала надо освободиться от того, что мешает, и приобрести то, что даёт возможность это слово произнести.

1. Вихри – Неопознанные Вращающиеся Объекты науки

«Вихри враждебные веют над нами...»
(из популярного революционного гимна).

Вихри – естественные накопители, преобразователи и переносчики энергии вращательных и поступательных движений – в виде атмосферных циклонов и антициклонов, смерчей, шаровых молний (а согласно теории вихревого строения материи, в виде любого из объектов микро и макрокосмоса) науке известны давно и ... до сих пор неизвестны, если за критерий принять знание закономерностей таких явлений на уровне, обеспечивающем их адекватное математическое и физическое моделирование, воспроизведение в заданных масштабах и границах с контролируемыми параметрами и свойствами, а, в конечном счёте, целенаправленное использование в научной и народно-хозяйственной практике.

Первый опыт теоретического исследования вихрей предпринял, в рамках гидродинамики, Г.Гельмгольц (Helmholtz, 1821-1894), опубликовавший в 1859 году мемуар «Об интеграле гидродинамических уравнений, соответствующих вихревому движению». Это исследование, до наших дней не утратившее актуальности, заслуживает не только должного уважения, но и, с высоты накопленного за прошедшие полтора столетия опыта встреч и общения человека с вихрями, достаточно серьёзного критического переосмысления.

Основным предметом науки XIX века были законы движения **замкнутых систем**, что сводило научные исследования к поискам определяющих подобные законы инвариантов (интегралов движения). Естественно, автор мемуара не мог не пойти по этому же пути. Он начинает своё исследование с выдвигания следующего постулата:

«Так как большинство поддающихся точному математическому определению сил природы может быть представлено в виде производных от потенциала сил, то отсюда и большая часть подлежащих математическому рассмотрению случаев движения жидкости принадлежит именно к тем, при которых существует потенциал скоростей».*

Понимая, что теоретико-методологическая база, которой он располагает, не позволяет вывести искомый инвариант непосредственно из функций (от времени как аргумента), описывающих движение жидкости в трёхмерном пространстве, автор пропускает первый этап исследования и начинает с «золотой середины»: с допущения, что потенциал скоростей существует и исходно задан. Тем самым, проблема, состоящая в том, что текущие значения координат, с одной стороны, и скоростей их изменения, с другой, могут оказаться (а в векторной трактовке поставленной задачи, в общем случае, действительно оказываются) в несовместимых друг с другом трёхмерных пространствах, исключающих присутствие координат и скоростей в едином уравнении движения, выносятся за рамки исследования (от чего эта проблема, конечно же, сама по себе не перестаёт существовать).

При исследовании замкнутых систем подобная методологическая и математическая нестрогость может не сказаться на конечных результатах. Но она обязывает, во всяком случае, контролировать границы правомерности и применимости последних. Гельмгольц на этот счёт предостерегает:

«Между тем уже сам Эйлер обратил внимание на то, что существуют и такие случаи движения жидкости, при которых не имеет места потенциал скоростей, например, вращение жидкости около оси при одинаковой угловой скорости всех частиц».**

Более поздние исследования показали, что для плоскопараллельных векторных полей проблема в значительной степени разрешается введением понятия комплексного потенциала и применением аппарата теории функций комплексного переменного или теории аналитических функций, основы которой были разработаны О.Коши (Cauchy, 1789-1857). Этот аппарат успешно применяется для решения гидродинамических и аэродинамических задач «на обтекание»; на его основе была построена (в России Н.Е.Жуковским и С.А.Чаплыгиным, в Германии Л.Прандтлем) теория крыла, включающая, в частности, хорошо известные теперь, формулу С.А.Чаплыгина и теорему Н.Е.Жуковского для подъёмной силы, действующей на обтекаемый газом или жидкостью контур (крыло самолёта или судна).***

* Н.Helmholtz. Два исследования по гидродинамике. Moskau, 1902, сс. 5-6.

Н.Helmholtz. Zwei hydrodynamische Abhandlungen. Berlin, 1858.

** Там же.

*** Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. 2-е изд. - СПб.: Изд-во «Лань», 2002, сс.232-246.

Существенно продвинуться в развитии теории вихрей позволило понятие циркуляции вектора в комплексной плоскости поля скоростей. Циркуляция вычисляется с помощью криволинейного интеграла от проекции вектора на положительное направление касательной к дуге, по которой обходится замкнутый контур. Равенство циркуляции нулю означает потенциальный характер поля в области, ограниченной данным контуром. Отличная от нуля циркуляция свидетельствует о наличии внутри замкнутого контура одной или нескольких вихревых точек; величина циркуляции определяет интенсивность вихря (вихрей).*

Для плоскопараллельных векторных полей понятие циркуляции позволяет вычислять, по аналогии с электродинамикой, скорость течения, индуцируемую вихрем на расстоянии от него (формула Био-Савара), а также решать некоторые другие задачи, которые, однако, оказываются «представляющими значительные трудности в случае произвольного течения в пространстве».** Последнее обстоятельство объясняется тем, что аппарат комплексного потенциала оперирует с плоской проекцией вихря и не в состоянии дать его объёмной картины.

К сожалению, проблема адекватного описания и моделирования поведения вихря в трёхмерном пространстве наукой XX века так и не была решена, потому что ... по существу перед нею и не ставилась. Математики, конечно, не оставались в стороне от исследования вихревых движений, но включались в них, в основном, лишь с целью наладить обработку экспериментальных данных на уже имеющейся теоретико-методологической основе.

К примеру, в начале 1941 года в трудах Академии наук СССР был опубликован доклад А.Н. Колмогорова «Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса», который начинался следующим образом:***

«§1. Будем обозначать через $U_\alpha(P) = U_\alpha(x_1, x_2, x_3, t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ компоненты скорости в момент времени t в точке с прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3 . При изучении турбулентности естественно считать компоненты скорости $U_\alpha(P)$ в каждой точке $P(x_1, x_2, x_3, t)$ изучаемой области G четырёхмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) случайными величинами в смысле, принятом в теории вероятностей».

Как видим, «потенциал скоростей» Гельмгольца здесь по-прежнему принимается за данность. Правда, постановка проблемы несколько изменяется, но весь вопрос в том, в сторону ли приближения к истине.

Имеющее отношение к делу обстоятельство состоит в том, что этимологически слово «турбулентность» синонимично слову «завихрённость» (франц. *tour* - круг, движение по кругу; *tourbine* - от лат. *turbo* - вихрь, вращение с большой скоростью; наконец, франц. *tourbillonnaire*, *tourbillonnement*

* Там же, сс. 220-221.

** Аржаников Н.С., Мальцев В.Н.. Аэродинамика. Учебник для авиационных вузов. – М.: 1956, сс. 110, 112, 124.

*** Колмогоров А.Н. Избранные труды: в 6 т. Т.1. Математика и механика. – М.: Наука, 2005, с. 311.

переводятся как «турбулентный, вихревой, завихрённый» и «вихревое [турбулентное] движение; завихрение, образование вихрей, завихрённость»^{*}). Однако физики, а за ними и математики, с определённых пор стали характеризовать «турбулентное течение жидкости или газа», прежде всего, как «неупорядоченное, хаотичное» (от лат. *turbulentus*, которое действительно имеет, помимо вышеуказанных, ещё и смысл «беспорядочного»); в таком виде оно противопоставляется ламинарному течению, означающему «перемещение жидкости или газа слоями без перемешивания».

В итоге, не столь уж значимая этимологическая проблема, связанная с трактовкой слова «турбулентность», приобретает прямой практический смысл. Действительно, результат деятельности учёного существенно зависит от того, что он изначально рассчитывает найти в исследуемом явлении: скрытый вихрь или простой хаос. Либо он настраивает свой мыслительный аппарат на выявление закономерностей вращений и связанных с ними резонансных процессов, либо готовится фиксировать вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и т.д.) наблюдаемого случайного процесса, с расчётом подготовить полезные практические рекомендации по результатам статобработки. Последнее тоже ведёт к истине, но не прямым, а окольным путём, так что достичь конечной цели, может статься, будет уже не суждено ни самому учёному, ни его ближайшим потомкам.

Можно привести и «контрпример», из которого видно, что значительно предметнее и результативнее выглядит подход к вихрям не как хаотическим образованиям, а как своеобразной «игре и противоборству» поступательных и вращательных движений:

«Обнаруженные крупномасштабные вихревые образования сходны с природными смерчами, поскольку имеют продольный размер больший, чем поперечный, обладают азимутальной циркуляцией и эффектом всасывания окружающей среды в свой ствол... При обтекании гладкой поверхности наиболее правдоподобным представляется механизм рождения вихрей, ось которых направлена перпендикулярно локальному вектору скорости порождающего течения. В результате взаимодействия уже родившегося вихря с породившим его вектором скорости, а также и моментами количества движения других вихрей, отстоящих от стенки на большие расстояния, чем вновь образованный вихрь, его ось изменяет ориентацию, конечное положение которой зависит от времени жизни пристеночного вихря, а степень стохастичности распределения осей в таком процессе будет зависеть от интенсивности процесса вихреобразования, т.е. величины сдвиговых напряжений в потоке... Генерируемые рельефом вихри имеют ещё одно качество, которое, на наш взгляд, пока ещё не достаточно осознано: эти вихри стремятся быть трёхмерными, и это происходит даже при поперечном обтекании двумерного рельефа... В большинстве опытов ... наблюдалась существенно трёхмерная картина потока... Нетрудно усмотреть согласованность (когерентность) в поведении вихревых структур и другие особенности, составляющие основу самоорганизации смерчеобразных структур при обтекании потоком рельефа лунок... Сегодняшний уровень понимания турбулентности приграничных течений жидкости или газа не позволяет провести количественный анализ обсуждаемой задачи об обтекании трёхмерных возмущений...».

^{*}Французско-русский политехнический словарь. Изд. 2-е, стереотип. М.: «Сов. Энциклопедия», 1970, с.756.

^{**}Г.И.Кикнадзе, В.Г.Олейников. Самоорганизация смерчеобразных вихревых структур в потоках газов и жидкостей и интенсификация тепло- и массообмена. – Институт теплофизики Сиб. отделение АН СССР, препр. №227-90, 1990, сс.3, 9, 10, 16, 23.

Таким образом, экспериментаторы трудятся, ставя всё новые и новые опыты, совершенствуя технику наблюдений и измерений, чтобы «нащупать» закономерности зарождения, развития и исчезновения вихревых образований, которые уже давно и во многих случаях стали для человека в буквальном смысле «вопросом жизни или смерти». А теоретики по-прежнему оперируют «законами сохранения» (согласно которым вихри «не возникают и не исчезают»), унаследованными от науки XIX века. Покажем, как «работает» подобная методология, на конкретном примере.

Теоретическое исследование вихревого движения начинается с определения понятия вихря:*

«Движение жидкости описывается векторным полем скорости $u(x,t)$. Завихрённостью $\omega(x,t)$ называется ротор скорости. В различных обозначениях

$$\omega(x,t) = \omega_I \equiv \text{rot } u = (\partial w / \partial y - \partial v / \partial z, \partial u / \partial z - \partial w / \partial x, \partial v / \partial x - \partial u / \partial y) = (\xi, \eta, \zeta).$$

Из определения следует, что завихрённость – соленоидальный вектор, т.е.

$$\text{div } \omega = \partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z = 0.$$

Приведём аналогичное, но в несколько иной редакции, определение:**

«Вихрем скорости называется вектор, имеющий составляющими в каждой точке (x, y, z) :

$$\xi = (1/2)(\partial w / \partial y - \partial v / \partial z), \eta = (1/2)(\partial u / \partial z - \partial w / \partial x), \zeta = (1/2)(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y).$$

Если вихрь равен нулю, то скорость (u, v, w) имеет потенциал. Если вихрь везде нормален к скорости, то поле скоростей обладает интегрирующим множителем» (ниже мы воспользуемся формулами для вычисления составляющих вихря именно в данной редакции, с нормирующими коэффициентами 1/2).

Как видим, в определении вихря участвуют два ключевых понятия векторной алгебры: ротор и дивергенция, – представляющие соответственно векторное и скалярное произведения символического дифференциального оператора Гамильтона на заданный вектор. Эти символические операторы выступают заменителями обычных процедур дифференцирования, которые в векторной алгебре невозможны из-за отсутствия в ней операции векторного деления (естественно, включая деление бесконечно малых векторных величин).

В своё время, в конце XIX века, сам факт создания векторного исчисления, не включающего в исходную аксиоматику алгебраической операции деления векторных величин (с «компенсацией» этой потери введением двух произведений вместо одного), вызвал острую дискуссию в среде математиков и физиков-теоретиков. Знаковым событием, по сути, завершившим эту дискуссию, стал выигранный О.Хевисайдом (Heaviside, 1850-1925), одним из создателей векторного исчисления и автором векторной трактовки уравнений Максвелла в терминах ротора-дивергенции, принципиальный спор с Дж.Томсоном-старшим (Thomson, 1856-1940).

«Когда прокладывался трансатлантический кабель, вопросы телефонной связи из области научных абстракций перешли в самую злободневную

* Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000, с.10.

** Г.Вилля. Теория вихрей. – М.: Комкнига, 2006, сс.5-6. – Henri Villat. Leçons sur la théorie des tourbillons. - Paris, 1936.

реальность. Томсон, рассматривавший передачу сигнала как распространение тепла, пришёл к выводу о том, что телефонная связь на далёких расстояниях невозможна, поскольку сигнал должен "расплываться". Хевисайд на основании электромагнитной теории получил противоположное заключение и указал, как улучшить передачу сигнала. В 1899 году Томсон в речи в Институте инженеров-электриков признал правоту Хевисайда... Исследования Хевисайда продемонстрировали эффективность векторных методов, удобство этого языка для физических исследований».

Столь наглядная и убедительная победа приверженцев векторной алгебры надолго заглушила голоса их оппонентов и «притупила бдительность» научного сообщества в отношении возможных ошибок при применении данного аппарата «за пределами его компетенции». Впрочем, какой бы аппарат ни использовали учёные, они всегда имеют возможность применить для решения задачи упрощённый «контрольный вариант», чтобы убедиться в правильности основных математических выкладок и избежать крупных просчётов. К примеру, дифференциальная форма уравнений Максвелла для трёхмерного пространства в символическом представлении Хевисайда, подкупающая своей лаконичностью и внешним изяществом (как и векторная запись решений этих уравнений), на деле являлась скорее теоретической иллюстрацией, чем рабочим инструментом для исследователей; когда требовалось провести конкретный расчёт и наглядно представить описываемый уравнениями процесс, обычно использовалась достаточно практичная и вполне универсальная модель плоской волны с одномерной пространственной координатой.

«Уравнения Максвелла представляют собой математическое обобщение экспериментально открытых законов электродинамики. Они не выводятся теоретически, а являются следствием основных закономерностей электромагнетизма, полученных в процессе длительного изучения электромагнитных явлений в природе, науке и технике... Для определения 16 скалярных величин мы имеем только 7 уравнений (два векторных уравнения Максвелла, т.е. шесть скалярных уравнений, и одно скалярное уравнение). Поэтому необходимо дополнить систему уравнений Максвелла ещё 9 известными скалярными уравнениями, которые берут из рассмотрения связей между векторами поля $\vec{E}$ (напряжённость электрического поля), $\vec{H}$ (напряжённость магнитного поля), $\vec{B}$ (магнитная индукция), $\vec{D}$ (электрическая индукция), $\vec{j}$ (плотность электрического тока) в различных материальных средах. Система дифференциальных уравнений, дополненная материальными связями, является полной системой уравнений электромагнитного поля в неподвижных средах... К настоящему времени известен также ряд областей науки об электромагнитных явлениях, где уравнения Максвелла уже непригодны для правильного описания законов электромагнитного поля. Сюда относятся законы электромагнетизма в движущихся средах с произвольными скоростями, законы распространения полей очень высокой частоты и энергии, когда начинают существенно проявляться корпускулярные, квантовые свойства полей... Другими словами, существуют некоторые границы, за которыми законы классической электродинамики Максвелла теряют свою силу».

Поскольку нас интересует именно трёхмерная картина вихрей, мы проведём «контрольный расчёт» без каких-либо упрощений, используя возможности

* Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.242.

** П.М.Колесняков. Электродинамика и теория волноводов. – Белгород: Изд-во БелГТАСМ, 2003, сс.11-14.

векторного аппарата в полном объёме. Объектом исследования выберем наиболее простое (вихревого характера) движение по винтовой линии, описываемое параметрическими уравнениями для пространственных координат x, y, z как функций времени t :

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt = (h\omega/2\pi)t,$$

где a - радиус винтовой линии,

h - шаг винтовой линии,

ω - угловая скорость вращения.

Для составляющих вектора скоростей получаем следующие выражения:

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = a\omega \cos \omega t, \quad \dot{z} = b = (h\omega/2\pi).$$

Применяя к данному вектору символический дифференциальный оператор ротор, получаем следующие составляющие вектора завихрённости (вихря):

$$\xi = (\pi a \omega / h) \sin \omega t, \quad \eta = -(\pi a \omega / h) \cos \omega t, \quad \zeta = \omega$$

Составляющая ротора по оси z , имеет ясный физический смысл: её величина совпадает с величиной угловой скорости изначально заданного вращения (именно на этот физический смысл и «настраивается» существующая теория вихрей). Но как понимать «побочный эффект теории», а именно те две составляющие, которые образуют вращающийся вектор, радиус которого с уменьшением шага винтовой линии устремляется в бесконечность?

Поскольку ротор не равен нулю и не нормален к скорости, у скорости нет ни потенциала, ни интегрирующего множителя (понятно, что нет и самого поля; существующая теория основана на понятии, отрицание которого уже заложено в определении вихря, что и обнаруживается в конкретном примере расчёта). Заметим, что ротор не соленоиден, поскольку его дивергенция не равняется нулю (за исключением одного компонента - частной производной по оси z):

$$\partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z = (\pi \omega / h) (\operatorname{tg} \omega t - \operatorname{ctg} \omega t).$$

Выяснить смысл и обсуждать возможные способы использования полученных результатов за существующую теорию вихрей не будем. Обратим лишь внимание на следующий момент. Одновременное равенство нулю всех трёх составляющих ротора равносильно выполнению условия, что функция $u dx + v dy + w dz$ является полным дифференциалом. Причины, по которым это условие не выполняется, могут быть различными, в том числе и не связанными с вихревым характером движения. В рассмотренном случае «побочный эффект» явился результатом операции частного дифференцирования по координатным направлениям, отличным от оси вращения (на что существующая теория, как видно, не рассчитана).

Следует иметь в виду, что направление оси вращения может и не быть заранее заданным, а определиться лишь в ходе наблюдений и исследования движения. Тогда более естественным будет выбор иной системы координат, в которой ось исходного вращения может вообще не фигурировать. К примеру, осями координат могут быть рёбра сопутствующего трёхгранника, т.е. касательной, главной нормали и бинормали, в заданной точке траектории движения.*

* М.Я.Выгодский. Справочник по высшей математике. – М.: Физматлит, 1995, с.522.

Используя указанную систему координат, проверим, какой вид примут в ней ротор и его дивергенция для того же движения по винтовой линии. Сначала, путём стандартных вычислений, определим интересующие нас направления.

Дифференцируя исходные уравнения винтовой линии по длине дуги s

$$s = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2} t = \alpha t$$

(как параметру, отсчитываемому с момента времени $t = 0$), определяем единичный вектор касательной:

$$[-(a\omega/\alpha) \sin(s\omega/\alpha), (a\omega/\alpha) \cos(s\omega/\alpha), b/\alpha].$$

Дифференцируя теперь этот вектор по s , получаем вектор кривизны:

$$[-(a\omega^2/\alpha^2) \cos(s\omega/\alpha), -(a\omega^2/\alpha^2) \sin(s\omega/\alpha), 0].$$

Умножая вектор кривизны на радиус кривизны (т.е. на обратную по модулю величину) $R = \alpha^2/a\omega^2$, получаем единичный вектор главной нормали:

$$[-\cos(s\omega/\alpha), -\sin(s\omega/\alpha), 0].$$

Наконец, векторным произведением двух, уже известных, единичных векторов получаем третий – единичный вектор бинормали:

$$[(b/\alpha) \sin(s\omega/\alpha), -(b/\alpha) \cos(s\omega/\alpha), a\omega/\alpha].$$

Остановим движение тройки единичных векторов по винтовой линии в момент времени $t = 0$. Получим следующую неподвижную тройку ортогональных единичных векторов:

$$[0, a\omega/\alpha, b/\alpha],$$

$$[-1, 0, 0],$$

$$[0, -b/\alpha, a\omega/\alpha].$$

Приняв её за систему декартовых координат, получим уравнение движения по винтовой линии в таком виде:

$$[(a^2 \omega/\alpha) \sin(\omega t) + b^2 t/\alpha, -a \cos(\omega t), -(ab/\alpha) \sin(\omega t) + ab\omega/\alpha].$$

Соответственно, вектор скорости примет следующий вид:

$$[(a^2 \omega^2/\alpha) \cos(\omega t) + b^2/\alpha, a\omega \sin(\omega t), -(ab\omega/\alpha) \cos(\omega t) + ab\omega/\alpha].$$

Определим составляющие ротора данного вектора:

$$\xi_1 = b\omega/2\alpha - (a\omega/2b) \cos(\omega t)/(\cos \omega t - 1),$$

$$\eta_1 = (a\omega^2/2b) \sin(\omega t)/(\cos \omega t - 1) - (ab\omega^2/2) \sin(\omega t)/(a^2 \omega^2 \cos \omega t + b^2),$$

$$\zeta_1 = (a\omega^2 \alpha/2) \cos(\omega t)/(a^2 \omega^2 \cos \omega t + b^2) + a\omega^2/2\alpha.$$

Замечаем, что роторы (ξ, η, ζ) и (ξ_1, η_1, ζ_1) существенно отличаются друг от друга, так что данная характеристика никак не является инвариантом исследуемого вихревого движения. Причём, во втором случае вихревое движение представляется уже столь хаотичным, что не кажется неоправданным его исследование методами теории вероятностей. Легко убедиться, что и с дивергенцией ротора дело обстоит не лучше: во втором случае она уже не обращается в нуль ни по одному из координатных направлений.

Следует напомнить, что только привлечение теории функций комплексного переменного к исследованию двумерных векторных полей позволило идентифицировать «особые» точки векторного поля (в которых частные производные вектора по координатам обращаются в бесконечность, нарушая тем самым потенциальность либо соленоидальность поля) как вихревые точки либо как источники (стоки).

Не проведя аналогичной аналитической работы в отношении трёхмерного пространства и не найдя для трёхмерных вихревых моделей адекватного математического аппарата, теория вихревого движения должна была зайти и, действительно, зашла в тупик. Выхода из этого тупика на пути частичных улучшений аппарата векторной алгебры нет: здесь требуется «консилиум» математиков для постановки диагноза достаточно серьёзной теоретико-методологической болезни.

Пока такой «консилиум» не собрался, попытаемся в меру собственных сил выяснить происхождение и сущность данной болезни.

2. XIX век - начало и конец эры кватернионов

«Unde mathematicis lumen praeluxit Hamilito»
(Отсюда воссияло математическое светило Гамильтона).
Стих из торжественной оды, адресованной в 1892 году
Гёттингенским университетом Дублинскому
Trinity College по случаю его 300-летия.

К 40-м годам XIX века имя Уильяма Роуана Гамильтона (Hamilton, 1805-1865) было уже достаточно известно в учёном мире. С января 1838 года он возглавлял Ирландскую академию наук, являлся членом ряда академий европейских стран, в 1837 году был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

В представлении, подписанном академиками М.В.Остроградским, В.Я.Буняковским и П.Н.Фуссом, высоко оценивались его работы в области динамики:^{**}

«Механика вступила в область чистого анализа. Любой вопрос равновесия или движения систем оказался сведенным к интегрированию дифференциальных уравнений. Однако выполнение этой интеграции представляет трудности, очень часто непреодолимые. Например, в проблемах движения системы материальных точек известно вообще только семь интегралов, доставляемых общими принципами динамики, а именно: три интеграла движения относительно центра инерции, три, которые относятся к принципу площадей, и один, который содержит в себе принцип живых сил. Но для того, чтобы решение было полным, необходимо иметь двойное количество интегралов по сравнению с числом переменных; имея только семь интегралов, необходимо отыскать остальные интегралы методами, особыми для каждой частной задачи. Однако г-н Гамильтон, королевский астроном в Дублине, показал, что достаточно иметь некоторое число интегралов для того, чтобы найти все остальные с помощью простого дифференцирования; этот результат, продемонстрированный с наибольшей простотой, должен быть зачислен в число наиболее блестящих открытий, сделанных в последнее время».

В дальнейшем были и другие достижения в развитии теоретической физики, подтверждением важности и актуальности которых стало избрание Гамильтона в 1865 году членом вновь созданной во время Гражданской войны Академии наук США: он был представлен и прошёл первым в списке 15-ти её иностранных членов, что означало признание его одним из самых крупных из живших тогда учёных.^{***}

Однако сам Гамильтон главным предназначением своей жизни считал не развитие физики, а то математическое открытие, которое, после 8-ми лет напряжённой умственной работы, пришло к нему, как озарение, 16 октября 1843 года на Бругамском мосту через Королевский канал в Дублине, где он вырезал на камне основную формулу $i^2=j^2=k^2=-1$, содержащую решение проблемы «умножения триплетов» или, на языке современной математики, «алгебры с делением для трёхмерного пространства». Четвёрке чисел, дающей

* Феликс Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. – М.-Л.: Объедин. н.-т. изд-во НКТП СССР, 1937, с. 202. Felix Klein. Vorlesungen über die entwicklung der mathematik im 19 Jahrhundert. Tell I. - Berlin. Verlag von Julius Springer. 1928.

** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.50.

*** Там же, с.48.

возможность адекватно описывать движение в окружающем нас трёхмерном пространстве, Гамильтон дал название **кватернионы** (от лат. *quaterni* – по четыре). Вот что об этом писал учёный-математик, профессионально занимавшийся историей развития математики в XIX веке:*

«Начиная с 1835 года, Гамильтон ... всё с большим и большим интересом отдаётся проблеме разыскания такой новой системы комплексных чисел, которая допускала бы полезную геометрическую интерпретацию в пространстве, т.е. в нашем обычном R_3 , подобную той, которую имеют комплексные числа $x+iy$ в плоскости. Неутомимые поиски привели его наконец в 1843 году к нахождению кватернионов, т.е. к системе особенных четырёхзначных комплексных чисел, разработке и распространению которых он себя с этой поры исключительно посвятил.... Для изображения вращения с растяжением в пространстве недостаточно вектора, т.е. трёхчленного комплексного числа (выделено и подчеркнуто мною – А.П.)... Для представления всевозможных вращений с растяжением необходимы кватернионы, в которые входит и скалярная часть».

Разработке и развитию исчисления кватернионов (оставив научные исследования в других областях и отказавшись в 1846 году от поста президента Ирландской академии наук) Гамильтон посвятил последние 22 года своей жизни. Вместе и вслед за ним в разработку кватернионики включились и другие учёные.

«Только в XIX веке было издано почти 600 посвящённых теории кватернионов научных работ, в которых эти гиперкомплексные числа успешно применялись к решению различных задач по физике, геометрии, теории чисел и т.д. В ряде университетов преподавание теории кватернионов стало обязательным, с ними знакомили учащихся во многих средних школах. Именно в кватернионах, о чём сейчас мало кто помнит, дал великий Дж.К.Максвелл компактную запись своих знаменитых уравнений, ставших основой теории электромагнетизма».**

Пришло и более глубокое осознание роли и места нового исчисления в математике:***

«Уникальное место исчисления кватернионов определено теоремой Фробениуса (1878г.). Единственными ассоциативными алгебрами над полем действительных чисел, в которых произведение равно нулю только при равенстве нулю хотя бы одного множителя, являются поле действительных чисел, поле обыкновенных комплексных чисел и алгебра действительных кватернионов».

Ещё одна теорема, впервые установленная в 1898 году немецким математиком А.Гурвицем, определила не менее уникальное место кватернионов в ряду алгебр с делением и единицей, получаемых посредством процедуры удвоения или процедуры Кэли-Диксона:****

«Теорема Гурвица. Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырёх алгебр: действительных чисел, комплексных чисел,

* Феликс Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. – М.-Л.: Объедин. н.-т. изд-во НКТП СССР, 1937, сс.223-226.

** И.Т.Львов. Об осмыслении феномена времени. История о потерянном времени. – <http://ilvov.narod.ru>.

*** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.247.

**** И.Л.Кантор, А.С.Солодовников. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973, сс.37, 99.

кватернионов или октав».

В то же время, среди учёных появились и противники кватернионистов, что для науки было (и должно быть) естественным. Однако в том, что противники, в конечном счёте, оказались сильнее, помимо объективных причин, надо видеть и долю вины самого Гамильтона.

Во-первых, Гамильтон повторил ошибку Коши, который трактовал введение им нового исчисления как простое увеличение числа измерений. Так, вводя в алгебраический анализ комплексные числа, Коши писал:*

«Всякое мнимое уравнение есть только символическое изображение двух уравнений между вещественными количествами».

Точно так же поступил Гамильтон, вводя кватернионы:**

«Предполагается, что между i, j, k не существует никакого линейного соотношения, так что уравнение $Q=Q'$... эквивалентно четырём отдельным уравнениям».

Но ни то, ни другое принципиально не верно. Правилами умножения (а это тоже уравнения, так что всего уравнений отнюдь не два и не четыре) между координатами двумерного комплексного или четырёхмерного кватернионного пространства устанавливается нелинейная связь, поэтому говорить об их независимости (линейной или какой-либо иной) можно только условно. В обмен на изначальную зависимость координат друг от друга (и, в частности, невозможность свободно продолжать увеличение числа измерений) мы получаем новую алгебраическую операцию, т.е. возможность не только складывать и умножать, но и делить координаты пространства друг на друга. И это – не просто искусственный математический приём: в нём находят отражение глубинные внутренние единство и целостность окружающего нас пространства, которые в евклидовом пространстве с декартовыми координатами игнорируются (можно сказать, «в порядке первого приближения к реальности»). А векторная алгебра, являясь таким же «первым приближением», попадает в тупиковую ситуацию именно тогда, когда обходным путём, через частное дифференцирование по зависимым координатам, произвольно принимаемым за независимые, пытается осуществить алгебраическую операцию деления, которая ей, по её собственной аксиоматике, «не показана».

Ошибки первопроходцев обычно не остаются без последствий. Так, в математическую традицию вошло использование комплексных чисел лишь как «удобной формы записи» двух действительных чисел одним выражением. Не считается даже необходимым обосновывать (кроме ссылок на удобство дифференцирования эйлеровских экспоненциальных функций комплексного аргумента) такой приём: к исходному выражению исследуемой величины добавляем мнимую часть, производим вычисления, после чего мнимую часть полученного результата, за ненадобностью, отбрасываем.

Достаточно большое количество практических приложений, включая и широко используемое математиками-прикладниками «комплексирование», позволило комплексным числам «удержаться» в математическом анализе;

* О.Л.Коши. Алгебраический анализ. - Leipzig, 1864, с.164.

** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.193.

однако для кватернионов, не успевших «обрасти» подобными приложениями, изначально упрощённый взгляд на их возможности и основное предназначение имел драматические последствия.

Второй, и решающей, ошибкой Гамильтона явилось то, что он инициировал параллельное развитие векторного и кватернионного исчисления в рамках одного, кватернионного, не проведя чёткого разграничения их отличительных особенностей и сфер применения (достаточно сказать о его символическом дифференциальном операторе, который отнимал у кватернионов их главное достоинство – свойство представлять собой алгебру с делением, – однако долгое время формально входил в состав этого аппарата; с кватернионным анализом также не были связаны гамильтоновы канонические уравнения механики – с функцией Гамильтона или гамильтонианом, – давшие начало исследованиям широкого класса «гамильтоновых систем»; как не имеют отношения к кватернионам и появившиеся позднее «гамильтоновы уравнения гравитации»). Заставив кватернионы соперничать с векторами, «играя на чужом поле», Гамильтон привёл их к закономерному, пусть в историческом плане и временному, поражению.

Приведём наиболее характерные сообщения (похожие на фронтовые сводки), раскрывающие содержание развернувшейся вокруг кватернионов полемики.

«*Vectors versus Quaternions*» (Векторы против Кватернионов) – этой юридической формулой Хевисайд озаглавил свою полемическую статью. Разгоревшаяся в последнее десятилетие XIX века дискуссия сыграла важную роль в распространении векторного исчисления. К 1880 году было уже 298 публикаций по теории кватернионов, из которых 18 – книги, а теория кватернионов была окружена целым «выводком» незаконных отпрысков: системы Клиффорда, Гиббса, Хевисайда, Макфарлана – в Англии и Америке, Грассмана – в Германии, Беллавитиса – в Италии; развивалась школа во Франции во главе с Резалем (в основном под влиянием Сен-Веннана и Грассмана), а также в Петербурге – О.И.Сомова и в Бельгии – Ю.Массо. Таково было общее положение, когда Гиббс написал в письме (1888 г.): «Я думаю, что вот-вот начнётся Борьба за Существование между различными методами и обозначениями в краткой алгебре, особенно между идеями Грассмана и Гамильтона».*

«В 1885 году Хевисайд публикует первое общее изложение своей векторной системы. Он настаивал на том, что предлагаемая им система является «упрощением теории кватернионов». Собственно говоря, он ввёл два «упрощения» (или изменения):

1) Хевисайд положил $i^2=j^2=k^2=-1$. Это он считал существенным и принципиальным достоинством, позволяющим увязать векторные методы с физикой и с «общепринятой скалярной математикой»;

2) Хевисайд ввёл определением два вида произведений векторов, которые мы с ним вместе называем «скалярным и векторным произведениями».**

«Гиббс считал существенным преимуществом системы Грассмана и векторного анализа возможность легкого перехода к n -мерному случаю:

* Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, сс.236-237.

** Там же, сс.230-231.

“Понятие кватерниона неприменимо к такому пространству... Но векторы в таком пространстве существуют, и должен быть векторный анализ для таких пространств”. Введение пространства Гильберта через десять лет блестяще подтвердило правоту Гиббса*.

Из статьи Нотта «Недавние новшества в Векторной Теории»:“

«Итак, главные аргументы статьи могут быть кратко сформулированы так:

а) кватернион столь же фундаментальное геометрическое понятие, как и любое, названное Гиббсом;

б) в каждом векторном анализе, развитом до сих пор, явно или неявно сохраняется верзорный характер векторов в произведениях;

в) если это так, то отсюда следует естественное заключение, что квадрат единичного вектора равен -1 ;

г) предположение, что квадрат единичного вектора равен $+1$, приводит к алгебре неассоциативного характера, в которой ∇ не является реальной наблой теории кватернионов;

д) изобретение новых названий и новых обозначений практически не добавляет ничего существенного к тому, что мы уже знаем из теории кватернионов».

В разгар борьбы с кватернионистами Хевисайд писал:***

«Однако вопрос не заключается полностью в обозначениях. Я отбросил кватернионную основу векторного анализа... Я могу уверенно рекомендовать модификацию, сделанную мной, как практически работающую систему. Она имеет много преимуществ, и не последнее из них – тот факт, что кватернион в ней вовсе не появляется, а также что принятые обозначения гармонично согласованы с декартовой математикой».

«...Теория кватернионов – ассоциативная алгебра без делителей нуля. Операции же векторного анализа потеряли алгебраический характер, но это обстоятельство не казалось существенным ни Гиббсу, ни Хевисайду, для которых основным было “...приспособить наши обозначения к требованиям физики. Это очень важно. Большая часть вычислений есть и всегда будет скалярной”».****

«Тэт в 1890 году утверждал, что теории кватернионов мешает “крайне искусственный метод декартовых координат – одно из тех препятствий, которых можно полностью избежать и которые сегодня тормозят прогресс математической физики”».*****

«Хотя Гиббс никогда не ставил цели избежать употребления координат, однако он часто подчёркивал, что та или иная формула, понятие не зависят от системы координат. В 1881 году Гиббс привёл определение дивергенции как предела отношения потока через замкнутую поверхность к объёму,

* Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.241.

** Там же, 237.

*** Там же, с.231.

**** Там же, с.240.

***** Там же, с.237.

ограниченному этой поверхностью при $v=0$ (вместе с замечанием, что это определение не зависит от "используемой системы единичных векторов")».*

«После того, как вместе с теорией Максвелла векторные методы вошли в физику, векторное исчисление заняло бесспорное место в математике. К этому же времени относится и замечательное распространение языка и аппарата векторного исчисления на функциональный анализ и теорию интегрирования уравнений».**

О позиции Максвелла, как кватерниониста, следует сказать особо. Действительно, в его изданном в 1873 году «Трактате об электричестве и магнетизме» присутствует специальный параграф «Кватернионные выражения для электромагнитных уравнений»***. О своём отношении к кватернионам Максвелл писал:****

«Для многих целей физического обоснования желательно избегать явного введения декартовых координат, сосредоточивая внимание сразу же на точке в пространстве, а не на трёх её координатах, или на величине и направлении силы, а не на трёх её составляющих. Такой подход к рассмотрению геометрических и физических величин является более простым и естественным, хотя связанные с ним представления не получили полного развития до тех пор, пока Гамильтон не сделал следующего великого шага в обращении с пространством и не изобрёл своё Кватернионное Исчисление. Поскольку декартовы методы всё ещё остаются наиболее привычными для исследователей, занимающихся наукой, и они действительно являются наиболее удобными при вычислениях, мы тоже будем выражать все наши результаты в декартовой форме. Я убеждён, однако, что введение идей, извлечённых из кватернионных операций и методов, принесёт нам огромную пользу при изучении всех разделов нашего курса, особенно электродинамики, где приходится иметь дело с рядом физических величин, соотношения между которыми можно существенно проще представить при помощи нескольких выражений по Гамильтону, чем через обычные уравнения».

Противоречивость позиции Максвелла состоит в том, что взятое из теории кватернионов понятие вектора он трактует, как это затем и вошло в математическую традицию, в терминах действительных чисел (а не комплексных, как Гамильтон); в то же время он стремится сохранить связь используемого аппарата с кватернионами. В итоге оказалось, что его «очерк векторного исчисления даже внешне не похож на кватернионное исчисление, так как Максвелл не отказывается от декартовых координат. Максвелл взял минимум из теории кватернионов – векторы. Но эту часть теории кватернионов Максвелл перенёс в физику совершенно без изменений: он рассматривает не числа $u+ix+jy+kz$, а только частный случай – вектора $ix+jy+kz$, но правила операций (умножение главным образом) кватернионные, поэтому $i^2=j^2=k^2=-1$... Позиция Максвелла ... определённее ближе к взглядам Гиббса и Хевисайда, чем к принципам кватернионистов»*****

* Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.226.

** У.Р.Гамильтон. Избр. Труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. – М.: Наука, 1994, с.532.

*** Дж.К.Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. II. М.: Наука, 1989, сс.213-215.

**** Там же, Т. I. М.: Наука, 1989, с.35.

***** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, сс.214, 218.

«Синтез алгебры и геометрии кватернионов дал мощный толчок развитию более простой ветви математики – векторному исчислению. Его адепты Оливер Хэвисайд и Джозайя Гиббс жёстко боролись с последователями Гамильтона и своего добились: сложная математика кватернионов уступила место эклектичным, но технологичным векторам и надолго осталась на периферии большой науки. И только периодически возникающие в физических теориях странные объекты и физико-математические совпадения постоянно напоминали о полузабытой гамильтоновой алгебре».*

В таком состоянии «динамического неравновесия» математический аппарат теоретической физики вошёл в следующий век.

3. XX век - регресс математики

«- Какая медлительная страна, - сказала Королева. -
Ну а здесь, знаешь ли, приходится бежать со всех ног, чтобы только остаться на том же месте!»
Л.Кэрролл. Алиса в Зазеркалье. **

Некоторое время кватернионисты ещё продолжали вести «арьергардные» бои. «В начале XX века в Европе даже было создано "Международное общество содействия изучению кватернионов". Оно просуществовало до начала первой мировой войны, после чего по известным причинам распалось»***

В послевоенное время «векторная парадигма» уже окончательно овладела умами учёных во всём мире. Дискуссии проходили только в рамках этой парадигмы и касались, в основном, единообразия в использовании векторной символики и преподавания векторной алгебры в высшей школе. Такие дискуссии проходили и в Советском Союзе, отличаясь разве что несколько специфичной формой подведения итогов:****

«В России академик А.Н.Крылов говорил, что векторные методы экономят бумагу, но не помогают мышлению. Когда в середине 30-х годов обсуждался вопрос, вводить ли векторное исчисление в вузах СССР, почти единодушным было решение "нет". "За векторы" из крупных учёных высказывались только Н.С.Кошляков и Н.И.Идельсон. Вскоре пионеры преподавания векторного анализа в СССР были арестованы».

Чтобы получить более полное представление о развитии интересующей нас ветви математики как в СССР, так и за рубежом, обратимся к такому авторитетному учёному, как А.Н.Колмогоров (1903-1987), «величайший русский математик XX столетия, создатель современной теории вероятностей, автор классических результатов в теории функций, в математической логике,

* А.П.Ефремов. Законы физики ищите в математике кватернионов! - «Университетская набережная», вып.713, 15.03.2006.

** Л.Кэрролл. Приключения Алисы в стране чудес. Алиса в Зазеркалье. 2-е изд. – М.: «Наука», Физматлит, 1991, с. 138. – L.Carroll. Alice's Adventures in Wonderland. 1865. THROUGH the LOOKING-GLASS and what Alice found there. 1871.

*** А.П.Ефремов. Кватернионные пространства, системы отсчёта и поля. – М.: Изд-во РУДН, 2005, с.9.

**** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.242.

топологии, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе, в теории турбулентности, теории гамильтоновых систем».*

В только что переизданной работе А.Н.Колмогорова** «приводится краткий очерк основных этапов развития математики от её зарождения до второй половины XX века». Очерк датирован 1954 годом; он являлся «настойной книгой» для нескольких поколений молодых учёных, студентов вузов, учащихся школ, и автор до конца своих дней не считал необходимым вносить в него какие-либо коррективы. Таким образом, мы вправе принять позицию автора очерка в отношении итогов «борьбы математических идей» во второй половине XIX века за общепринятую или «официальную» точку зрения науки XX столетия.

Развитию математики в XIX и первой половине XX века посвящён третий, заключительный раздел очерка, называющийся «Современная математика» (сс.35-59, т.е. 24 страницы из всех 60-ти). Перечень учёных, внёсших заметный вклад в развитие современной математики, вместе с указанием существа их достижений, весьма внушителен (всего указано 169 имён). Естественно, в этом перечне нашлось место и для самого автора очерка (он упомянут дважды, на сс. 49 и 57).

Не вполне естественным, однако, представляется то, что автор, будучи специалистом по гамильтоновым системам, ни единым словом не обмолвился ни о Гамильтоне, ни о его (из многих хотя бы одном) главном математическом достижении. И это при том, что отмеченными оказались математические исследования, никакого следа в математике не оставившие:***

«Исследование философских проблем математики на основе сознательной материалистической диалектики было начато К.Марксом. Особенно детально К.Маркс разработал вопрос о содержании понятия дифференциала. Выдвинутая им концепция дифференциала как «оперативного символа» предвосхитила идеи, возрождённые только в 20 веке».

Приходится признать как факт: для кватернионов наука XX века места в истории математики не отвела. Более того, и их ближайшим историческим предшественникам – комплексным числам – повезло не намного больше. О комплексных числах в очерке говорится крайне скупо, а по существу, помимо исторических сведений об обстоятельствах их появления в математике, не говорится ничего.

Процитируем буквально всё сказанное:****

«Итальянский математик Дж.Кардано исследовал уравнения третьей степени, открыв так называемый неприводимый случай, в котором действительные корни уравнения выражаются комплексно. Это заставило Кардано, хотя и очень неуверенно, признать пользу вычислений с помощью комплексных чисел... Комплексные числа, по-прежнему оставаясь побочным продуктом алгебраического аппарата, продолжают быть по преимуществу лишь предметом бесплодных споров... Эйлер воспринимает законность оперирования с мнимыми числами как эмпирический факт, подтверждаемый правильностью получаемых при помощи подобных преобразований следствий... Постепенно укореняется убеждение, что вообще мнимые выражения (не только в алгебре, но и в анализе) всегда приводимы к виду $A+B\sqrt{-1}$...

* <http://www.biometrika.tomsk.ru/kolmogorov>.

** А.Н.Колмогоров. Математика. Исторический очерк. – М.: Анабасис, 2006. – 60с.

*** Там же, с.45.

**** Там же, сс.23, 29, 32, 34, 36, 46, 47, 51.

Формулы английского математика А.Муавра и Л.Эйлера, связывающие показательную и тригонометрическую функции комплексных аргументов, привели к дальнейшему расширению применений комплексных чисел в анализе... Открытие и введение в употребление геометрической интерпретации комплексных чисел (датский землемер К.Вессель, 1799г., и французский математик Ж.Арган, 1806г.),... создание французским математиком О.Коши основ теории функций комплексного переменного... — вот типичные примеры наметившихся на рубеже 18 и 19 веков новых тенденций в развитии математики. Связь математики с естествознанием, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы. Большие новые теории возникают не только в результате непосредственных запросов естествознания или техники, а также из внутренних потребностей самой математики. Таково в основном было развитие теории функций комплексного переменного, занявшей в начале и середине 19 века центральное положение во всём математическом анализе. Главная линия развития заключалась здесь в том, что переход в комплексную область делал более ясными и обозримыми свойства подлежащих изучению функций. Широкий интерес к непосредственному реальному применению функций комплексного переменного, например, как функций, задающих конформное отображение, развился позднее, хотя возможности таких применений были намечены ещё Эйлером... Работа датского землемера Весселя, содержащая геометрическую интерпретацию комплексных чисел, осталась незамеченной. Лишь значительно позже (1831г.) Гаусс явно изложил теорию комплексных чисел. Тем временем Арган опубликовал в 1806 году теорию комплексных чисел с их геометрической интерпретацией и доказательством леммы Д'Аламбера, а в 1815 году — доказательство основной теоремы алгебры, близкое по идее доказательству Коши (1821г.). На основе ясного понимания природы комплексных чисел возникает теория функций комплексного переменного... Общие основы теории были заложены Коши, теория эллиптических функций была развита Абелем и Якоби. Уже на этом этапе характерно, в отличие от чисто алгебраического подхода 18 века, сосредоточение внимания на выяснении своеобразия поведения функции в комплексной области и основных господствующих здесь геометрических закономерностей (начиная с зависимости радиуса сходимости ряда Тейлора от расположения особых точек, открытой Коши)... Этот в известном смысле слова «качественный» и геометрический характер теории функций комплексного переменного ещё усиливается в середине 19 века у немецкого математика Б.Римана. Здесь оказывается, что естественным геометрическим носителем аналитической функции в случае её многозначности является не плоскость комплексного переменного, а соответствующая «риманова поверхность» — образование, природа которого может быть понята лишь в рамках нового понимания геометрии... Геометрические идеи Римана оказываются в дальнейшем всё более определяющими весь стиль мышления в области теории функций комплексного переменного... В связи с развитием более общих точек зрения теории множеств и теории функций действительного переменного, теория аналитических функций в конце 19 века лишается того исключительного положения ядра всего математического анализа, которое намечалось для неё в начале и середине 19 века.

Итак, период «юношеского увлечения» комплексными числами остаётся позади, математика XX века открывает для себя новые горизонты ... в действительных числах. Конечно, и здесь всегда будет, что открывать, углубляя познание этого раздела математики. Но ведь надо бы иметь в виду и перспективу встречи с такими проблемами, которые на основе только действительных чисел решать либо неизмеримо труднее, чем, например, с использованием комплексных чисел, либо даже принципиально невозможно.

К сожалению, математика не осталась в стороне от того глобального эксперимента, которому подверглись все сферы жизни общества в XX веке и который состоял (и «по наследству» для нас всё ещё состоит) в том, чтобы естественное развитие событий предварять созданием на его пути искусственных препятствий, преодоление которых поневоле становится

основным смыслом человеческой деятельности.

Применительно к математике это выливается в «экономия» аксиоматических исходных данных и выбор «наиболее простых» математических средств на этапе постановки проблемы, чтобы потом, не считаясь с затратами времени и сил, отыскивать головоломной сложности, нередко и без гарантии адекватности, решения.

В отношении творческого наследия Гамильтона великая историческая несправедливость выразилась не только в «стерилизации» введённого им понятия вектора (как трёхчленного комплексного числа), но и в придании «редуцированным» векторам монопольного права являться предметом функционального анализа, без предоставления такой же возможности комплексным и гиперкомплексным числам. Вот как это выглядит в современном учебнике для вузов из серии «Классический университетский учебник»:^{*}

«Понятие линейного пространства относится к числу самых основных в математике... Определение 1. Непустое множество L элементов $x, y, z, \dots$ называется линейным, или векторным, пространством, если оно удовлетворяет таким условиям:

1. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определён третий элемент $z \in L$, называемый их суммой и обозначаемый $x+y$...

2. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определён элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента x на число α)...

В зависимости от того, какой запас чисел (все комплексные или только действительные) используется, различают комплексные и действительные линейные пространства (в сноске: можно было бы рассматривать и линейные пространства над произвольным полем)... Свойства линейного пространства – это свойства операций сложения элементов и умножения их на числа».

Известно, что линейная взаимосвязь математических объектов и величин в ходе постановки и решения задач приобретает вид конкретных линейных уравнений или, в частности, при исследовании динамических систем и характеристик движения, линейных дифференциальных уравнений. Понятно, что одними «операциями сложения элементов и умножения их на числа» ни при составлении, ни при решении таких уравнений не обойтись. Поэтому вслед за абстрагированием до наиболее простых математических объектов происходит обратный процесс синтеза с применением всего накопленного теоретико-методологического арсенала математики.

Но где находится нижний предел абстракции при определении элементов линейного пространства? Авторы учебника считают этот вопрос не требующим обсуждения и сообщают о решении, принятом «априорно и аксиоматически»: отождествляя понятия линейного и векторного пространств они фактически уподобляют функциональный анализ системе, у которой «на входе» может быть любой «запас действительных, комплексных чисел или произвольное поле», но «на выходе» будут только векторы.

Возникшая в конце XIX столетия неоднозначность в трактовках понятия

^{*} Колмогоров А.Н., Фомин С.В. «Элементы теории функций и функционального анализа». – М.: Физматлит, 2004, сс.130, 132.

вектора к началу XX века была преодолена, и теперь это понятие формируется только на основе множества действительных чисел, с возможностью удвоения этого множества путём комплексирования либо с многократным его использованием в n -мерном случае, включая бесконечное число измерений, как, например, в гильбертовом пространстве.

Для теоретической физики трактовка вектора как единственно возможного элемента линейного пространства приобрела силу жёсткого императива, переступить через который не решались даже выдающиеся физики-теоретики. Так, когда в 20-х годах XX столетия Полку Дираку (Dirac, 1902-1984) для построения квантовой механики потребовались элементарные математические объекты, обладающие свойствами и возможностями из числа тех, что изначально, можно сказать «по определению», присущи комплексным числам (фазовые множители, сопряжённые величины и т.п.) или кватернионам (некоммутативное умножение, повороты в трёхмерном пространстве и др.), он не взял в качестве исходных «заготовок» ни те, ни другие, а стал создавать уникальный и достаточно сложный для представления и применения теоретический аппарат из общепринятых («наиболее простых») элементов – векторов.*

«Мы начнём построение системы с рассмотрения математических соотношений между состояниями динамической системы в определённый момент времени... Состояния должны быть связаны с такими математическими величинами, которые можно складывать между собой, получая математические величины того же рода. Наиболее простыми и известными из таких величин являются векторы... Удобно иметь специальное обозначение для векторов, которые сопоставляются состояниям системы в квантовой механике независимо от того, будут ли это векторы в пространстве с конечным или бесконечным числом измерений. Мы будем называть их кет-векторами или просто кет... Кет-векторы можно умножать на комплексные числа и складывать между собой, получая другие кет-векторы... Если в какой-либо математической теории встречается совокупность векторов, мы можем всегда ввести вторую совокупность векторов, которые математики называют дуальными векторами... Новые векторы, очевидно, определены лишь условием, что их скалярное произведение с исходными векторами даёт заданные числа, однако этого достаточно для того, чтобы построить математическую теорию подобных векторов. Будем называть эти новые векторы бра-векторами или просто бра... В пространстве бра-векторов или в пространстве кет-векторов из любых двух векторов можно также построить число – скалярное произведение одного вектора на сопряжённый второй, но число это комплексное и переходит в комплексно-сопряжённое число, если поменять местами оба вектора... Вектор состояния мы... можем помножить... на любое число $e^{i\gamma}$ с вещественным γ , не изменяя длины вектора. Мы будем называть такое число фазовым множителем».

* П.А.М.Дирак. Собрание научных трудов. Том I. Квантовая теория (монографии, лекции). – М.: Физматлит, 2002, сс.28-34.

Вот как Дирак вводит в анализ поворот векторов в трёхмерном пространстве:

«Физический смысл оператора поворота заключается в переходе системы, находящейся в хорошо определённом состоянии, в другое состояние, определяемое исходным состоянием и величиной угла поворота вокруг некоторой оси вращения. Это линейный оператор, и его вид легко устанавливается, если мы работаем в координатном представлении. Для удобства записи рассмотрим случай одной частицы. Состояние частицы будет представляться шредингеровой волновой функцией $\psi(x_1, x_2, x_3)$. В результате вращения на угол θ вокруг оси x_3 состояние будет представляться новой волновой функцией ψ' , имеющей вид

$$\psi' = \psi(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, x_3).$$

Если считать угол поворота θ достаточно малым, так, чтобы можно было пренебречь квадратичными членами и членами более высоких степеней в аргументе функции ψ' , то

$$\psi' = \psi(x_1 + x_2 \theta, -x_1 \theta + x_2, x_3).$$

Использование разложения Тейлора в точке x_1, x_2, x_3 даёт

$$\psi' - \psi = \theta (x_2 \partial / \partial x_1 - x_1 \partial / \partial x_2) \psi.$$

Оператор $R_3 = x_2 \partial / \partial x_1 - x_1 \partial / \partial x_2$ можно назвать оператором поворота вокруг оси x_3 . Для системы частиц вместо этого выражения появится сумма операторов такого типа. В более общем случае, для всякого поворота (конечного или бесконечно малого) оператор, дающий новое состояние, имеет вид $e^{i\theta R_3}$.

Приведенный пример явного игнорирования преимуществ, предоставляемых кватернионами, примечателен тем, что Дирак был с кватернионами прекрасно знаком. «В статье, написанной к столетнему юбилею теории кватернионов, который отмечался в Англии в 1945 году, Дирак устанавливает связь между кватернионом q и вектором ξ в пространстве-времени таким образом, чтобы перенести в теорию относительности аппарат исчисления кватернионов. Оказалось, что уравнения Максвелла, записанные в кватернионной форме, являются аналогом условий Коши-Римана, т.е. условиями кватернионной аналитичности. Исследование её роли в физике ещё не завершено.» (Рискнём предсказать, что не преодоленную Дираком «реакцию отторжения» нового аппарата теорией относительности Эйнштейна когда-нибудь запишут в актив и отнесут к достоинствам исчисления кватернионов).

Итак, зададимся вопросом, всегда ли элементом линейного пространства, в результате абстрагирования от всех иных математических действий, кроме сложения и умножения на число, должен быть вектор (или множество действительных чисел, которое он фактически представляет)? В одномерном случае, это безусловно так и есть.

Однако уже в двумерном пространстве, например, на комплексной плоскости, возникают принципиально новые взаимоотношения элементов, которые не поддаются адекватному представлению действительными числами при любом используемом числе измерений (достаточно указать на теорию конформных отображений, теорию вычетов и др., оперирующие с такого рода закономерностями). Здесь, в результате максимального абстрагирования, элементом («атомом») линейного пространства становится комплексное число.

Что же касается трёхмерного физического пространства, то в нём проявляют себя закономерные взаимосвязи элементов, адекватное

* П.А.М.Дирак. Собрание научных трудов. Том IV. Гравитация и космология. Воспоминания и размышления (лекции, научные статьи 1937-1984). – М.: Физматлит, 2005, сс.42-43.

** Л.С.Полак. Уильям Гамильтон. – М.: Наука, 1993, с.248.

представление которых недоступно ни действительным, ни комплексным числам (за исключением вырожденных случаев, к примеру, «плоскостной» картины таких физических явлений, как вихревые движения, гироскопические эффекты, гравитация). Здесь элементарными «кирпичиками» линейного пространства оказываются кватернионы.

«Основная причина плодотворности применения кватернионов заключается в появлении бинарного линейного преобразования, и в сущности действия над кватернионами представляют собой не что иное, как операции над такими преобразованиями. По этой же причине кватернионы весьма пригодны для изображения вращения с растяжением».*

К сожалению, во исполнение принятой математиками методологической установки, всю первую половину XX века кватернионы оставались совершенно не востребованными ни в теоретических исследованиях, ни в практических разработках. Лишь «несколько позже кватернионные методы стали интенсивно применяться для решения практических задач ракетной и космической навигации; по понятным причинам это делалось совсем не гласно, а скорее в тайне».**

Приведём мнение известного математика и физика Ф.Дж.Дайсона, который ещё в конце 70-х годов прошлого столетия, будучи приглашённым прочитать традиционную «Гиббсовскую лекцию», оценил проявленное невнимание к кватернионам как одну из «упущенных возможностей математики»***

«Как действующий физик, я со всей остротой ощущаю, что брак математики с физикой, такой плодотворный в прошлые века, недавно пришёл к разрыву... Векторы образуют простейшее нетривиальное однозначное представление, а кватернионы – простейшее двузначное представление (группы трёхмерных вращений). Кватернионы – прототипы спинорных представлений в современной терминологии. Развитие спинорных представлений, фактически начатое Эли Картаном в 1913 году, завершилось в основном в 30-е годы при существенной поддержке физиков Паули и Дирака; оно могло бы начаться приблизительно на 40 лет раньше». (Здесь будет уместно отметить, что разработчики спинорных представлений также не воспользовались главным достоинством кватернионов, не решившись нарушить действовавшее «табу» на включение в функциональный анализ операции деления).

В теоретическом аппарате науки XX века лишь «в последние годы частичный возврат от векторов к кватернионам происходит в таких разделах физики, как квантовая электродинамика, теория элементарных частиц, теория твёрдого тела, теория калибровочных полей, которая является обобщением теории Максвелла»****. Однако многолетний период игнорирования данной области математических знаний останется «белым пятном» в истории математики XX

* Феликс Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. – М.-Л.: Объедин. н.-т. изд-во НКТП СССР, 1937, с.230.

** А.П.Ефремов. Законы физики ищите в математике кватернионов! - «Университетская набережная», вып.713, 15.03.2006.

*** Ф.Дж.Дайсон. Упущенные возможности. «Успехи математических наук», т.35, вып.1 (211), янв.-февр. 1980.

**** У.Р.Гамильтон. Избр. Труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. – М.: Наука, 1994, с.533.

века, с неизбежными последствиями для её развития и в новом столетии. В подтверждение того факта, что прошлый век не оставил научного задела для преодоления сложившегося положения, приведём важное свидетельство.

Известно, что по математике Нобелевская премия не присуждается; для математиков её заменяет премия (медаль) Филдса (с той особенностью, что возраст награждённых не превышает 40 лет). Представляет интерес тематическое распределение работ лауреатов этой премии.*

Отмеченные премией работы (за 1936-1998гг. - всего 42) охватывают восемь разделов: топологию, комплексный анализ, алгебраическую геометрию, теорию чисел, алгебру, анализ, физическую математику, математическую логику. По «невекторной» математике - комплексному анализу - удостоены медалей Филдса три работы.

Приведём краткие характеристики этих работ:**

«Именно за работы по комплексному анализу был удостоен первой филдсовской медали (1936г.) Ларс Альфорс, представитель блестящей школы финских математиков, основанной Эрнстом Линделефом и Ральфом Неванлиной... Л.Альфорс стал одним из создателей современной геометрической теории римановых поверхностей... Он построил теорию накрытий и показал, что соответствующие поверхности определяются более широким, чем конформные, классом отображений. Эти отображения он назвал квазиконформными... Особенно важными и красивыми представляются работы по теории клейновых групп. В течение полувека Л.Альфорс остаётся лидером в комплексном анализе, подтверждая правильность выбора первого Филдсовского комитета...

Спустя 18 лет на конгрессе в Амстердаме (1954г.) медаль Филдса была вручена Кунихико Кодaira. Его работы принадлежат сразу трём разделам математики: топологии, комплексному анализу и алгебраической геометрии... Работы Кодaira подвели итог под длительным периодом исследований алгебраических многообразий над полем комплексных чисел...

Крупным достижением Шинг-Тунг Яо (лауреат 1983г.) явилось доказательство гипотезы Е.Калаби... В последнее время интерес к многообразиям с плоской метрикой Риччи (первый класс Черна $C_1=0$) – многообразиям Калаби-Яо усилился в связи с новыми открытиями в физике – теорией струн и суперструн. В теории струн роль физического пространства-времени играет 26-мерное пространство (так называемая бозонная струна) и 10-мерное пространство (фермионная струна). При попытке перейти к 4-мерному пространству-времени возникают сложные проблемы компактификации дополнительных степеней свободы. Физические требования приводят к условию считать компактифицированные многообразия многообразиями Калаби-Яо... Нужно отметить, что, если доказательства, предложенные Яо, часто включают сложный аналитический аппарат (например, для доказательства гипотезы Калаби используются априорные оценки), сами результаты имеют алгеброгеометрическую или топологическую природу...

Современная теоретическая физика, особенно такие её разделы, как теория струн и конформная теория поля, всасывает новейшие математические достижения с поразительной скоростью, и возможны самые неожиданные приложения».

Не отрицая важности фундаментальных исследований в отмеченных премией Филдса направлениях (с конкретной ориентацией на проблемы физики микрочастиц или на более широкий круг проблем), заметим вместе с тем, что молодые гениальные умы могли бы принять активное участие, к примеру, в разработке теоретического аппарата для решения такой актуальной

* М.И.Монастырский. Современная математика в отблеске медалей Филдса. –М.: «Янус-К», 2000.

** Там же, сс.2, 90-94, 109.

глобальной проблемы, как проблема энергетического кризиса на планете. Если бы в своё время в повестку дня были поставлены работы по кватернионному анализу, к настоящему времени уже имела бы теоретико-методологическая база для ускоренного, с учётом реальной обстановки в мире, развития альтернативной энергетики, естественным образом включающей и вихревую технику, которая до сих пор разрабатывается и внедряется энтузиастами-изобретателями не только без поддержки, но и при упорном сопротивлении официальной науки.*

В целом, сколь бы впечатляющими ни были успехи развития «векторной» математики, отсутствие или недостаток исследований в важных для практики альтернативных направлениях не позволяет дать развитию этой науки в XX веке оценку иную, чем регресс.

4. Вихри – вечные двигатели Природы, Техники и ... Науки

«Еще же Академія повинна: всѣ декуверты (изобрѣтенія), которыя въ помянутыхъ наукахъ иногда предложены будутъ разсматривать и свою апробацію откровенно о томъ сообщать, сирѣчь вѣрны ли оныя изобрѣтенія, великой ли пользы суть или малой, извѣстны ли оныя прежде сего бывали или нѣтъ». **
(Указ Петра Великого об учреждении Академии наук).

Какие же новые результаты даёт кватернионный анализ вихревых движений? Тезисно ответим на этот вопрос, используя уже рассматривавшийся выше «учебный» пример движения по винтовой линии и, по необходимости, в целях экономии текстового пространства-времени, отсылая читателя за развёрнутым (или более подробным) ответом к другим публикациям автора.

Когда в математических выкладках мы оперируем с отдельной точкой физического трёхмерного пространства, то имеем в виду всю цепочку движущихся частиц, которые своим совокупным действием создают внешне наблюдаемый эффект вихревого движения. При этом прямолинейное (рассматриваемое как исходное) движение отдельной частицы в составе цепочки характеризуется нулевой кривизной, а вместе с этим и нулевым энергетическим уровнем (нулевым моментом импульса) по отношению к тому криволинейному движению, в которое исходное движение переходит под внешним воздействием. (Для упрощения расчётов массу материальной точки считаем единичной, так что величина её линейной скорости представляет также величину импульса, а половина квадрата скорости – величину энергии).

Первый важный результат кватернионного представления движения в трёхмерном пространстве состоит в обнаружении того, что преобразование прямолинейного движения в криволинейное, происходящее под действием внешней однонаправленной силы, является формой резонансного процесса

* Ю.С.Потапов, Л.П.Фоминский. Вихревая энергетика и холодный ядерный синтез с позиции теории движения. – Кишинёв-Черкассы: «ОКО-Плюс», 2000.

** Полн. собр. законов Российской империи с 1649 года. Том IV. 1723-1727. СПб, 1830, с.222.

концентрации и локализации энергии (момента импульса) в пространстве.* Это положение, в частности, объясняет факт широкого распространения и устойчивого характера криволинейных движений в природе, в первую очередь, круговых как исходной и основной формы вращательных движений.

Возвращаясь к уже рассмотренному выше примеру, в котором движение по винтовой линии изначально задано своими параметрическими уравнениями, мы не останавливаемся на вопросе о том, каким образом подобное движение формируется в природе, а приступим к исследованию его характеристик.

Если для прямолинейно движущейся цепочки частиц внешняя среда изотропна в том смысле, что отклонения в любую сторону от траектории движения ничем друг от друга не отличаются, то после первоначально возникшего (случайным образом и в случайном направлении) отклонения от прямолинейного движения и появившейся в результате кривизны траектории, внешняя среда для данного потока частиц перестаёт быть изотропной. Теперь любая из движущихся частиц оказывается в новом качестве и на новом уровне устойчивого движения: во внешних взаимодействиях она представляет не только точку своего местонахождения, но и соприкасающуюся плоскость** движения, определяемую скоростью, или направлением касательной к траектории, и кривизной, или направлением из данной точки к центру кривизны. Иначе говоря, движущаяся масса приобретает реактивные свойства.

В связи с необходимостью введения таких понятий и характеристик движения в трёхмерном пространстве, как скорость и кривизна, нельзя оставить без внимания вопрос о дифференцируемости функций кватернионного переменного. В отсутствие строгой математической теории таких функций можно воспользоваться «подсказкой» Леонарда Эйлера, который в своё время (задолго до Коши и Гамильтона) оперировал комплексными числами и кватернионами, решая проблему дифференцируемости путём применения гармонических экспоненциальных функций мнимого аргумента, связанных с тригонометрическими функциями.

Поступая аналогичным образом, мы представляем простейшую форму криволинейного движения в виде кватерниона $iRe^{t\omega}$, где i, j, k - единичные кватернионные координатные векторы (ордината j в данном выражении присутствует неявно), R - радиус и ω - угловая скорость вращения. В конкретном примере винтового движения первые два единичных вектора (i, j) будут определять горизонтальную плоскость, а третий (k) - вертикаль.

Такого вида кватернион подходит под определение элементарного вихря в трактовке существующей теории вихрей. Но, поскольку в кватернионном анализе не используются частные производные по координатам, а параметрами движения выступают радиус и угловая скорость вращения (в примере движения по винтовой линии оба эти параметра - постоянные величины), то двум операциям ротор и дивергенция векторной алгебры будет соответствовать одна кватернионная операция деления ускорения на скорость (в общем случае, с

* А.М.Петров. Гравитация и кватернионный анализ. - 3-е изд. - М.: Компания Спутник+, 2006, сс.21-26.

** М.Я.Выгодский. Справочник по высшей математике. - М.: Физматлит, 1995, с.520.

результатом в виде суммы скалярной и векторной составляющих).

У элементарного вихря $iRe^{k\omega}$ характеристика завихрённости (в трактовке существующей теории вихрей, но вычисленная в кватернионах) оказывается «чистым вектором» $k\omega$ (с нулевой скалярной частью и постоянным направлением в пространстве). При этом, равенство нулю скалярной части (в терминах векторной алгебры - равенство нулю дивергенции, при поле скоростей без источников и стоков) трактуется как отсутствие внутренних и внешних затрат энергии на осуществление данного движения или как чисто реактивная (в терминах электротехники) мощность данного вихря.

Уравнение движения, учитывающее внешнее воздействие на вращающийся объект, принимает вид баланса внешних моментов сил и внутренних моментов импульсов. Момент импульса элементарного вихря $iRe^{k\omega}$, в отсутствие внешних воздействий, оказывается величиной постоянной:

$$M = (iRe^{k\omega})(j\omega Re^{k\omega}) = k\omega R^2 = \text{const.}$$

Внешнее воздействие на вихрь приводит либо к повороту его исходной плоскости вращения (внешняя сила развивает реактивную мощность), либо к изменению внутренней скорости вращения (внешняя сила пополняет либо отбирает энергию вихря).

Попытки учёта внешнего воздействия на вихрь в невращающейся системе координат приводят к наложению двух одновременных вращений друг на друга и, как следствие, к нелинейному уравнению движения. Однако, «к счастью для исследователей», Природа предоставила возможность разнесения двух («собственного» и под внешним воздействием) вращений по разным, правой и левой, частям уравнения движения вихря.

Действительно, внешнее воздействие во многих случаях, по крайней мере, «в первом приближении», может считаться однонаправленным (наиболее характерный пример – гравитация), поэтому можно использовать в качестве системы координат и отсчёта сопутствующий трёхгранник в данной точке траектории движения, как бы «останавливая» собственное вращение исследуемого объекта, а вместо него «заставляя» вращаться внешнее воздействие. Тогда, дифференцируя по времени внутренний момент импульса (с фазовым множителем вращения), мы получаем линейное дифференциальное уравнение, которое в отсутствие внешнего воздействия (с нулевой правой частью) может трактоваться как уравнение свободных колебаний:

$$dM/dt + k\omega M = 0.$$

Легко убедиться в том, что данное уравнение адекватно отражает гироскопический эффект сохранения устойчивости соприкасающейся плоскости криволинейного движения. В условиях, когда вращающийся объект «сам для себя подбирает» частоту изменения внешнего воздействия, добавление к указанному выше уравнению ненулевой правой части превращает его в специфическое уравнение вынужденных колебаний, а, именно, в уравнение резонансных (или квазирезонансных) колебаний.

Возвращаясь к движению по винтовой линии, перейдём к новой системе координат и отсчёта, в которой единичные векторы (p, q, u) будут направлены соответственно по рёбрам сопутствующего трёхгранника в каждой точке

траектории. Тогда кватернион, представляющий данное движение, получает вид $-qRe^{i\Omega t}$ где R – мгновенный радиус кривизны, $\Omega=V/R$ – мгновенная угловая скорость (получаемая делением мгновенной линейной скорости на радиус кривизны), t – время.

Согласно проведённому выше расчёту, модуль линейной скорости движения по винтовой линии $V=\sqrt{a^2\omega^2+b^2}=\alpha$, радиус кривизны $R=\alpha^2/a\omega^2=a+b^2/a\omega^2$. Таким образом, угловая скорость $\Omega=a\omega^2/\alpha$ (заметим, что $\Omega<\omega$). Все эти величины – постоянные. Однако существенным является то, что вектор линейной скорости не лежит в горизонтальной плоскости (i,j), а бинормаль, соответственно, отклоняется от вертикали k , что означает наличие кручения, равного:^{*}

$$\sigma=b\omega/\alpha^2=b\omega/(a^2\omega^2+b^2).$$

В итоге, единичные векторы линейной скорости p , главной нормали q и бинормали u (вокруг которой вращается система координат в виде сопутствующего трёхгранника) оказываются переменными во времени:

$$p=-i(a\omega/\alpha)\sin(\omega t)+j(a\omega/\alpha)\cos(\omega t)+kb/\alpha,$$

$$q=-i\cos\omega t-j\sin\omega t,$$

$$u=i(b/\alpha)\sin(\omega t)-j(b/\alpha)\cos(\omega t)+ka\omega/\alpha.$$

При перемещении точки по винтовой линии бинормаль «прецессирует» вокруг вертикали, тогда как центр кривизны описывает винтовую линию с тем же шагом и тем же, горизонтально направленным, радиусом кривизны.^{**}

Дальнейший анализ требует некоторой конкретизации решаемой задачи, имея в виду возможность изменения параметров вихревого движения во времени. В одном случае мы получаем линейный во времени рост амплитуды резонансных колебаний (причём, в качестве амплитуды может выступать как радиус кривизны, так и обратная ему величина – кривизна, что существенно меняет картины вихрей).

В другом случае мы наблюдаем «разгон» линейной или угловой (возможно, той и другой вместе) скорости внутреннего движения вихря: в результате отклонения соприкасающейся плоскости винтового движения от горизонтальной активную мощность вихря может развивать гравитационная сила, что мы наблюдаем в различных природных явлениях. Но при любом вихревом движении мы имеем дело с реактивными свойствами вращающихся (и, в общем случае, колеблющихся) масс.

Заметим, что существующая теория поля, использующая понятие потенциала, заведомо готова оперировать только с пассивной массой. Для примера, определим темп накопления кинетической энергии свободно падающим телом в гравитационном поле у поверхности Земли. При ускорении свободного падения g пассивная масса накапливает импульс (скорость) пропорционально времени t :

$$V=gt.$$

При этом масса пробегает путь

$$S=gt^2/2=V^2/2g,$$

* М.Я.Выгодский. Справочник по высшей математике. – М.: Физматлит, 1995, с.531.

** Там же, с.528.

т.е. накапливает энергию пропорционально пройденному пути:

$$V^2/2 = gS.$$

Активная же масса, за счёт своего внутреннего движения, способна на порядок в более высоком темпе накапливать поступающую извне энергию, что позволяет (естественным или искусственным путём) часть получаемой извне энергии направлять на сохранение исходного потенциала массы во внешнем поле, служащем источником энергии.

Прецессирующий волчок даёт пример движения реактивной массы, в котором вся поступающая извне гравитационная энергия затрачивается на перемещение массы по поверхности равного потенциала. Кватернионный анализ показывает, что путём увеличения реактивных свойств массы (когда вращение дополняется собственными внутренними колебаниями массы на частоте вращения) на основе макроскопического гравитационного резонанса можно получать избыток энергии сверх необходимой для удержания массы на поверхности равного гравитационного потенциала.*

Существующая теория поля не имеет адекватного аппарата для исследования подобных явлений, попадая из-за этого в затруднительное положение. К примеру, как она объясняет наблюдаемое перемещение массы прецессирующего волчка (гироскопа) по поверхности равного гравитационного потенциала? Она предлагает считать прецессирующий волчок замкнутой системой, относя внешнюю гравитационную силу к её внутренним силам. Трудно придумать более нелогичный постулат, но именно на нём теоретическая физика строит векторную теорию гироскопа.

Давая адекватное описание подобных явлений, кватернионный анализ открывает возможность синтезировать динамические системы с энергетическими характеристиками, «не укладывающимися» в традиционную теорию поля с её ключевым понятием потенциала. Если в таких системах рабочей силой выступает гравитация, то создаётся принципиально новый тип рабочей машины, по своим признакам подпадающий под определение «вечного двигателя первого рода».

Известно, что ещё в 1755 году Парижская Академия наук вынесла решение впредь не принимать к рассмотрению проекты «вечных двигателей». Для закосневшей научной мысли этот прецедент представляется руководством к действию «на все времена». Но вот на что обращают внимание изобретатели-практики:

«Если бы в 18-м веке на суд Парижской Академии наук был представлен электромотор, то его проект был бы объявлен проектом «вечного двигателя», ибо тогда не знали, что энергию можно передавать по тонким металлическим проводам без видимого движения чего-либо».

«Вихревой теплогенератор ... появился лишь в конце XX века. Да и то эксперты патентных ведомств косились – уж не очередной ли проект Perpetuum mobile? Пришлось при оформлении заявки на патент умалчивать, что эффективность этого устройства для нагрева воды

* А.М.Петров. Гравитационная энергетика в кватернионном исчислении. – М.: Спутник+, 2006, сс.12-14.

** Ю.С.Потапов, Л.П.Фоминский. Вихревая энергетика и холодный ядерный синтез с позиции теории движения. – Кишинёв-Черкассы: «ОКО-Плюс», 2000, с.6.

механическим перемешиванием – свыше 100%, и скрывать, что тепла оно вырабатывает больше, чем потребляет электроэнергию двигатель насоса, подающего воду в устройство (единственный в нём потребитель энергии)... Официальная академическая наука “ничем помочь не могла”. А в кругах её оппонентов в это время витали идеи о “неиссякаемой энергии физического вакуума”, о холодном ядерном синтезе, о торсионных полях, солюминесценции и другие. И каждый из сторонников этих идей предлагал принять на веру, что именно данная идея работает в вихревом теплогенераторе, обеспечивая появление в нём “лишнего тепла”. Тем не менее, никто из них не мог представить конкретные расчёты, объясняющие если не количественно, то хотя бы качественно процесс рождения “лишнего” тепла.

Вихревая энергетика оказывается научно-технической областью, в которой практика явно опережает теорию. Возможно, практики-изобретатели и станут основной движущей силой процесса оздоровления отечественной науки.

Между тем, сложившееся положение, действительно, выглядит достаточно удручающим, поскольку все, без исключения, руководители и эксперты патентного ведомства, специалисты научных институтов и научных подразделений системы государственного управления знакомы только с «векторной» математикой (другой наша высшая школа не преподавала и не преподаёт). Несмотря на возрастающее количество научных академий и, соответственно, академиков, найти оппонента для разбора и адекватной оценки научной идеи или технической инновации, выходящей за пределы «векторной парадигмы», теперь практически невозможно.

В этой связи вспоминается реакция заведующей отделом главной редакции физико-математической литературы на просьбу автора помочь в распространении его книги. Прочитав название параграфа «Фиктивность аппарата лагранжианов и гамильтонианов, принципа наименьшего действия и законов сохранения для резонансных систем», она возмутилась: «И вы хотите, чтобы я это дала читать моим академикам?!». (Академиков у нас «опекают», как больных и немощных людей, чтобы с ними, упаси Бог, не случилось бы чего).

Нельзя не назвать и главных, в силу их ключевой роли в научно-техническом прогрессе, виновников явно не нормального положения. Отечественным «бермудским треугольником», в котором исчезают без следа новые научно-технические идеи (и странным образом находят поддержку лоббисты отечественного топливно-энергетического комплекса – главные противники развития альтернативной энергетики и сторонники превращения нашей страны в сырьевой придаток развитых стран мира) выступает общественно-государственная структура, в трёх «вершинах» которой находятся:

- Российская Академия наук;
- Российское агентство по патентам и товарным знакам;
- Федеральное агентство по науке и инновациям.

Очевидно, «косметическое» реформирование сложившейся структуре не поможет. Пользу Отечеству она принесла бы, передав основные из своих нынешних функций творческим союзам учёных, изобретателей, инженерно-технических работников (и, лучше всего, самоликвидовавшись).

* Ю.С.Потапов, Л.П.Фоминский. Вихревая энергетика и холодный ядерный синтез с позиции теории движения. – Кншинёв-Черкассы: «ОКО-Плюс», 2000, с.6.

Послесловие

К извечным российским бедам прошедшее столетие добавило ещё одну: поголовная математическая грамотность населения на деле обернулась лишь умением складывать и умножать. Деление пока ещё не освоили даже профессиональные математики. Тем не менее, надежда есть.

Почти всё изложенное в настоящей публикации давно известно и описано в общедоступной научной литературе. Во всяком случае, автор, не будучи математиком и физиком, «на досуге» нашёл время с этой литературой ознакомиться. Почему бы этим, наконец, не заняться и профессионалам?

Литература

1. Петров А.М. Заявка № 97111689/06 на изобретение «Способ получения и использования гравитационной энергии в форме движения рабочей машины, транспортного средства или летательного аппарата», с приоритетом от 15 июля 1997 года (архив Роспатента).

2. Петров А.М. Гравитационно-резонансные «вечные двигатели» в природе и технике: математическое описание, возможные технические решения для систем наземного и космического применения, расчёт эффективности. – М.: Компания Спутник+, 2001. – 58 с.

3. Петров А.М. Макроэффекты пространственной локализации, переноса на расстояние и резонансного накопления гравитационной энергии. – М.: Компания Спутник+, 2002. – 59 с.

4. Петров А.М. Гравитация: методологическая адекватность теории открывает доступ к новому виду энергии на практике. A.Pétrov. Gravitation: l'adéquation méthodologique de la théorie ouvre l'accès à la source énergétique nouvelle en pratique. – М.: Компания Спутник+, 2003. – 119 с.

5. Петров А.М. Векторная и кватернионная парадигмы точных наук. – М.: Компания Спутник+, 2005. – 14 с.

6. Петров А.М. Гравитация и кватернионный анализ. 3-е издание – М.: Компания Спутник+, 2006. – 52 с.

7. Петров А.М. Гравитационная энергетика в кватернионном исчислении. – М.: Компания Спутник+, 2006. – 16 с.

Содержание

стр.

Предисловие.....	3
1. Вихри – Неопознанные Вращающиеся Объекты науки.....	3
2. XIX век – начало и конец эры кватернионов.....	11
3. XX век – регресс математики.....	17
4. Вихри – вечные двигатели Природы, Техники и ... Науки	25
Послесловие.....	31
Литература.....	31



Уважаемые читатели!

**Издательство «Компания Спутник+»
и редакция журналов**

«Актуальные проблемы современной науки», «Аспирант и соискатель», «Вопросы гуманитарных наук», «Вопросы филологических наук», «Вопросы экономических наук», «Современные гуманитарные исследования», «Проблемы экономики», «Исторические науки», «Педагогические науки», «Юридические науки», «Естественные и технические науки», «Медицинские науки» и «Техника и технология»

предлагают Вам опубликовать:

-  монографии, научные труды любыми тиражами (от 50 экз.);
-  научные статьи для защиты диссертаций в наших журналах;
-  книги, стихи любыми тиражами (от 50 экз.);
-  авторефераты диссертаций (100 экз. за 1–3 дня).
- Все издания регистрируются в Книжной палате РФ и рассылаются по библиотекам России и СНГ.
- Осуществляем компьютерный набор и верстку, а также полиграфические работы (визитки, бланки, листовки, переплет).
- Оказываем помощь в реализации книжной продукции.

Тел. (495) 730-47-74, 778-45-60 (с 9 до 18)

<http://www.sputnikplus.ru> E-mail: sputnikplus2000@mail.ru

Научное издание

Петров Анатолий Михайлович

КВАТЕРНИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ

Издательство «Компания Спутник+»

109428, Москва, Рязанский проспект, д. 8а

Тел.: (495) 730-47-74, 778-45-60 (с 9 до 18)

ЛР № 066478 от 30.03.99

Налоговые льготы в соответствии с ОК 005-93

Том 2 95 3000 – Книги и брошюры

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.02.953.Д.009143.12.05 от 29.12.2005 г.

Подписано в печать 11.10.2006. Формат 60х90/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2. Тираж 50 экз. Заказ 304.

Отпечатано в ООО «Компания Спутник+»

ПД № 1-00007 от 28.07.2000