

А. К. ТИМИРЯЗЕВ

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933 — ЛЕНИНГРАД

Редакционную работу по этой книге провел *Н. А. Шишаков*, книгу оформил *А. И. Архангельский*, корректуру держал *С. Ф. Морошкин*, наблюдал за выпуском *В. П. Морев*. Рукопись сдана в производство 1 декабря 1932 г., листы подписаны к печати в июле 1933 г., книга вышла в свет в августе 1933 г. в количестве 5000 экземпляров, на бумаге формата 62×94/16, печатных знаков в листе 52000, листов в книге 27 $\frac{1}{4}$. Заказ № 4746, ГТТИ № 690. Уполномоченный Главлита. № Б-31051.

О Т И З Д А Т Е Л Ь С Т В А .

Книга А. К. Тимирязева „Введение в теоретическую физику“ отличается от ранее выходивших книг аналогичного содержания тем, что автор не игнорирует вопросов методологии и, ставя себе задачей борьбу за марксистско-ленинское мировоззрение, разбирает в тексте книги и в особенности в предисловии к ней вопросы методологического характера, полемизируя с идеологами буржуазной науки, стоящими на позициях идеализма.

Вместе с тем издательство не может не отметить и того факта, что автор не дал в этой книге того, чего должна была ожидать от него советская общественность. Методологическая сторона работы А. К. Тимирязева не может удовлетворить читателя, потому что автор не дал политической оценки позиций, которые он защищал в течение многих лет в философских дискуссиях. Автор обходит молчанием вопрос о своих ошибках и, таким образом, молчаливо на них настаивает.

Выходит, что автор считает все защищавшиеся им положения правильными, несмотря на ту оценку, которую они получили со стороны марксистской критики, несмотря на партийные решения, касающиеся философской дискуссии и указывающие на механицизм как на главную опасность на данном этапе. То обстоятельство, что автор не подвергает анализу свои ошибки и не признает, таким образом, что механистические взгляды находили свое выражение в его печатных и устных выступлениях, в значительной мере уменьшает ценность этой в других отношениях полезной книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемый вниманию читателя курс: „Введение в теоретическую физику“ вырабатывался в течение более чем десяти лет. Строго говоря, это — не курс лекций, так как постепенно, по мере разработки самого содержания, из года в год метод преподавания изменялся, причем центр тяжести переносился все больше и больше на самостоятельную работу студентов в аудитории. План каждого занятия составлялся обыкновенно следующим образом. Лектор излагал в начале занятия основные положения изучаемого вопроса, попутно ставя вопросы всей аудитории, и на этой основе задавал для самостоятельной проработки конкретные примеры, которые тут же решались студентами с помощью лектора. Полученные результаты сообща обсуждались, причем обсуждались и отдельные промахи (конечно, анонимно) и указывались способы, как, по возможности, избежать подобных промахов в дальнейшем. В целом ряде случаев оказалось возможным даже основные положения той или другой области давать студентам для самостоятельной проработки. Тогда дело во вступительном слове ограничивалось тем, что подробно и отчетливо формулировалась поставленная задача и указывалось не самое решение, а только план, следуя которому можно притти к решению поставленной задачи. Такой метод сопряжен с большими трудностями, но он, как показал опыт, приводит к очень хорошим результатам. Даже в тех случаях, когда поставленная задача оказывается непосильной и ее приходится решать самому руководителю в форме лекции, то и тогда, как показал опыт, лекция проходит очень оживленно: к ней возбуждается особый интерес, и лектора непрерывно прерывают, задавая всевозможные вопросы, так что лекция сама собой превращается в беседу, и аудитория проявляет при этом большую активность. Причина этого вполне понятна: раз учащийся хотя бы с помощью наводящих вопросов не смог справиться с поставленной задачей и тщетно искал выхода в течение хотя бы и короткого промежутка времени, то естественно, что он с напряженным вниманием будет следить за развертывающимся решением, которого он самостоятельно найти не мог, несмотря на большое напряжение мысли.

Основная задача курса заключается в том, чтобы, по возможности, более просто, начиная с простейших примеров, научить пользоваться математикой для решения вполне определенных и конкретных задач физики. В смысле возможного упрощения математической стороны при-

ходится делать большие усилия, особенно в первой части курса, так как обычно к моменту начала курса студентами еще как следует не усвоены элементы теории интегрирования дифференциальных уравнений. Вообще, весь курс построен на сравнительно простых примерах, так как рассматриваемый курс есть курс введения в теоретическую физику. Во всяком случае, главное внимание курса сосредоточено на том, чтобы у изучающего математика не заслонила физики. Во-первых, таким образом уничтожается искусственный разрыв, к сожалению, столь часто наблюдаемый, между теоретическими вопросами физики и теми мыслями, в которые погружается физик, работающий в лаборатории, и во-вторых, у студента будет тогда менее опасности впасть в одну из основных методологических ошибок, которыми сейчас страдают даже самые выдающиеся теоретики из числа оторвавшихся от „физики, разрабатываемой в лаборатории“, — ошибку, которую Ленин с изумительной меткостью охарактеризовал тем, что у этих физиков „материя исчезает, остаются одни уравнения“ (Ленин, том X, стр. 259). Вопреки установившемуся у нас с легкой руки доборинцев мнению, будто экспериментатор, работающий в лаборатории, является в огромном большинстве случаев „ползучим эмпириком“, — он обыкновенно, на самом деле, легче усваивает материалистическую диалектику, чем оторванный от жизни физик-теоретик, фактически заменяющий физику математикой. И это вполне понятно: физик-экспериментатор в своей работе, даже в тех случаях, когда он работает над вопросом, непосредственно не имеющим еще практического применения, во много раз ближе к „диалектике материальных превращений, проделываемых в лаборатории и на заводе“ (Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, стр. 236), чем теоретик, пытающийся объяснить противоречия, на которые он натолкнулся, тем, что в мире атомов и электронов перестает действовать ... закон причинности! Да, кроме того, только оторванный от жизни философ мог додуматься до того, что экспериментатор — узкий практик и эмпирик. Лабораторная экспериментальная работа есть сложнейшее сочетание практики с теорией, причем при помощи умело поставленного опыта решаются такие теоретические вопросы, к которым еще нельзя подойти с помощью математики. Наоборот, модные в настоящее время теории, несмотря на блестящий математический аппарат, построены часто на старенькой методологии чистого описания, полагающей в основу всей науки метод точного и экономного описания наших „переживаний“, наших „ощущений“, например знаменитое положение о принципиальной ненаблюдаемости. Вот здесь-то мы и встречаемся с подлинной „ползучей эмпирией“, с полным отсутствием теоретического мышления. На фронте естествознания сейчас одной из основных опасностей является, как и на других фронтах, отрыв теории от практики. В частности, в области физики

мы видим угрожающее пренебрежение к экспериментальному исследованию. Очень часто внимание нашей пролетарской аудитории отвлекается абстрактно-холастическими спорами, и мимо нее проходит вся та гигантская работа в области физики, на которой строится реальная техника, та техника, без усвоения которой мы не сумеем осуществить нашей пятилетки. Мы нисколько не хотим умалить значение таких областей нашей науки, которые непосредственного применения в нашей индустрии и сельском хозяйстве еще не имеют, но нельзя раздувать эти области так, чтобы они заслоняли те реальные конкретные задачи, которые стоят перед нами сейчас и решить которые мы должны теперь же, на данном этапе строительства социализма.

Вот почему, в особенности в курсе введения в теоретическую физику, необходимо на каждом шагу указывать и выявлять теснейшую связь теории и ее математической обработки с повседневной практикой того, кто работает в лаборатории, на заводе или в исследовательском институте. Этим же путем можно лучше всего подготовить почву для серьезного изучения материалистической диалектики и выковать борцов против идеалистической реакции, все шире и шире захватывающей теоретическое естествознание в капиталистических странах Европы и Америки. Самому курсу мы предпосылаем введение, которое касается общеметодологических вопросов, связанных с переживаемым очередным кризисом в физике. Руководством к анализу этого кризиса нам служила книга Ленина „Материализм и эмпириокритицизм“, которая должна быть настольной книгой всякого, кто хочет понять связь современной физики — современного естествознания — со всеми областями человеческой мысли, а не ограничиться одним только набором практических рецептов, как это часто случается даже при добросовестном изучении какого-либо рядового учебника.

А. Тимирязев.

Москва, июль 1931 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

От издательства	3
Предисловие	4
Введение. Кризис современной теоретической физики	11

Часть I.

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ.

Глава I. Теория гармонического колебания.

§ 1. Теория простого гармонического колебания	47
§ 2. Примеры на простое гармоническое колебание	52
§ 3. Можно ли вывести уравнения механики из закона сохранения энергии?	55

Глава II. Теория затухающего колебания.

§ 1. Уравнение затухающего колебания	58
§ 2. Примеры	64
§ 3. Применение теории затухающих колебаний к электромагнитным процессам	68

Глава III. Некоторые частные случаи общего уравнения затухающих колебаний.

§ 1. Экстракт. Опыт Тольмана. Сверхпроводимость	72
§ 2. Примеры	76
§ 3. Применение теории движения в сопротивляющейся среде к определению заряда электрона, массы атома и числа молекул в граммолекуле	78

Глава IV. Принужденные колебания.

§ 1. Система под действием постоянной силы и периодической силы, но в обоих случаях при отсутствии сопротивления	81
§ 2. Вынужденные колебания при наличии затухания	84
§ 3. Примеры	86
§ 4. Графическое решение уравнения вынужденного колебания	91
§ 5. Примеры	92
§ 6. Разбор явления резонанса	94

Глава V. Теория связанных колебаний.

§ 1. Два связанных маятника	98
§ 2. Примеры	104
§ 3. Колебания фундамента машины	111
§ 4. Несколько замечаний о центробежной силе	113
§ 5. Возбуждение колебаний с помощью постоянной силы	115

Часть II.

ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ И ВОЛНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ.

Глава I. Волны на струне.

§ 1. Учение о волнах на струне	116
§ 2. Решение задачи о струне, закрепленной в двух точках	120
§ 3. Некоторые замечания, касающиеся тригонометрических рядов	122
§ 4. Вычисление коэффициентов ряда для струны	125
§ 5. Вычисление коэффициентов ряда для струны на арфе	126

Глава II. Волны в непрерывных средах и уравнения гидродинамики.

§ 1. Продольные волны	128
§ 2. Уравнения гидродинамики	131
§ 3. Простейшие примеры на применение уравнений гидродинамики	134

Глава III. Звуковые волны, распространяющиеся в воздухе.

§ 1. Общее уравнение для волн, распространяющихся в газообразной среде	142
§ 2. Случай плоских волн	144
§ 3. Сферические волны	148
§ 4. Пульсирующий шар	150
§ 5. Колеблющийся (вибрирующий) шар	151

Глава IV. Электромагнитные волны.

§ 1. Уравнения Максвелля в интегральной форме	155
§ 2. Уравнения Максвелля в дифференциальной форме	161
§ 3. Электромагнитные волны в диэлектрике	164
§ 4. Краткие сведения из теории векторов	168
§ 5. Некоторые свойства электромагнитного поля	172
§ 6. Плоские волны. Отражение и преломление плоских волн на границе раздела двух диэлектриков	179

Часть III.

ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Глава I. Истолкование уравнений Максвелля.

§ 1. Истолкование первой группы уравнений Максвелля как уравнений движения фарадеевских трубок по работам Дж. Дж. Томсона	194
§ 2. Поле равномерно движущегося заряда. Понятие об электромагнитной массе	204
§ 3. Истолкование второй группы уравнений Максвелля	209
§ 4. Изменение массы со скоростью	211

Глава II. Некоторые приложения теории Томсона.

§ 1. Вывод выражения силы, действующей на элемент тока в магнитном поле	216
§ 2. Вывод формулы Лармора	219
§ 3. О натяжениях Максвелля	221

Часть IV.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ. ТЕОРИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕОРИЯ ДИФФУЗИИ. ПРИМЕРЫ НА ТЕОРИЮ ПОТЕНЦИАЛА.

Глава I. Электромагнитные волны в поглощающей среде.

§ 1. Плоские волны	226
§ 2. Отражение плоских волн от металлического зеркала	229
§ 3. Основное уравнение теплопроводности	232
§ 4. Примеры на теорию теплопроводности	235
§ 5. Уравнение диффузии. Дальнейшие решения уравнения теплопроводности и диффузии	240
§ 6. Некоторые методологические выводы	244

Глава II. Примеры на теорию потенциала.

§ 1. Потенциал шарового слоя, бесконечно тонкого и конечной толщины	245
§ 2. Метод электрических изображений	248
§ 3. Задача Лангмюра	250

§ 4. Шар в однородном поле	252
§ 5. Об однозначности решений уравнения Лапласа	256
§ 6. Аналогия с электромагнитной массой	257

Глава III. Взаимодействия пульсирующих шаров.

§ 1. Поле, вызванное несколькими движущимися шарами	260
§ 2. О некоторых свойствах сферических функций	262
§ 3. Связь падающего потока с отраженным и условия на поверхности шара	263
§ 4. Взаимодействие двух пульсирующих шаров, находящихся на расстоянии, большом по сравнению с их радиусами	265

Часть V.

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ.

Глава I. Первый принцип термодинамики.

§ 1. Основные задачи термодинамики и метод, которым она пользуется	270
§ 2. Применение первого принципа термодинамики к идеальному газу. Адиабатные и изотермические процессы	274
§ 3. Процесс Карно	277
§ 4. Примеры приложения первого принципа термодинамики	280
§ 5. Способы построения кривых вида pv^n	284

Глава II. Второй принцип и некоторые приложения первого и второго принципа термодинамики.

§ 1. Второй принцип термодинамики	285
§ 2. Второй принцип термодинамики в применении к более сложным циклам. Энтропия	287
§ 3. Приложение первого и второго принципа термодинамики к процессам перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое	292

Глава III. Общие уравнения термодинамики и их применение к физико-химическим процессам.

§ 1. Уравнения, вытекающие из обоих принципов термодинамики	294
§ 2. Теория разведенных растворов	295
§ 3. Примеры на теорию разведенных растворов	298

Глава IV. Связь термодинамики с механикой.

§ 1. Уравнения механики в форме Лагранжа и циклические координаты	299
§ 2. Выражение общих законов механики в уравнениях Лагранжа. Аналогии с термодинамикой	306
§ 3. Модель Больцмана для иллюстрации свойства энтропии	307

Часть VI.

СТРОЕНИЕ АТОМА. ТЕОРИЯ КВАНТ. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Глава I. Теория атома по Бору и Зоммерфельду.

§ 1. Строение атома водорода	309
§ 2. Дальнейшее развитие теории Бора Зоммерфельдом	316
§ 3. Общие выводы из теории Бора и Зоммерфельда	322

Глава II. Теория квант по Томсону. Исследование проф. Н. П. Кацерина.

§ 1. Основные предположения теории Томсона	323
§ 2. Максвелловы уравнения в криволинейных координатах	325
§ 3. Доказательство совместимости закона Планка с системой уравнений Максвелля	328
§ 4. Эффект Комптона	332

Глава III. Теория Шрёдингера.

§ 1. Затруднения, встречающиеся при разработке теории Бора, и дальнейшее развитие квантовой теории	334
§ 2. Волновая механика Шрёдингера	336
§ 3. Волновое уравнение Шрёдингера	342
§ 4. Примеры на вычисление шрёдингеровской функции	344

Глава IV. Теория дисперсии. Сверхдисперсионная среда, строение электрона и электронные волны по Томсону.

§ 1. Электромагнитная теория дисперсии	347
§ 2. Сверхдисперсионная среда	351
§ 3. Структура электрона по Томсону	353
§ 4. Электронные волны для электронов, движущихся равномерно и прямо-линейно	359

Глава V. Теория относительности.

§ 1. Общие основания специальной теории Эйнштейна	364
§ 2. Специальная теория относительности, теория электромагнитного поля и механика	371
§ 3. Эфир и специальный принцип относительности	377
§ 4. Опытные основания теории относительности (специальной)	378
§ 5. Всеобщая теория относительности Эйнштейна	383

Часть VII.**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ.****Кинетическая теория материи и связь между обратимыми и необратимыми процессами.****Глава I. Кинетическая теория материи.**

§ 1. Основные законы газового состояния	391
§ 2. Закон распределения скоростей Максвелля	396

Глава II. Наиболее вероятное распределение молекул и отступления от этого распределения. Максвеллевское распределение скоростей как наиболее вероятное. Энтропия и вероятность.

§ 1. Наиболее вероятное распределение молекул в пространстве	400
§ 2. Максвеллевское распределение скоростей как наиболее вероятное	405
§ 3. Связь со вторым принципом термодинамики	407

Глава III. Теория брауновского движения и связь обратимых и необратимых процессов по Смолуховскому.

§ 1. Элементарная теория брауновских движений	412
§ 2. Брауновская частица под действием упругой силы	416

Глава IV. Теория необратимых процессов.

§ 1. Подсчет времени возврата отступлений от наиболее вероятного состояния	424
§ 2. Вычисление вспомогательных функций	427
§ 3. Выводы, касающиеся необратимых процессов	430

ВВЕДЕНИЕ.

Кризис современной теоретической физики.

I. Гносеология — партийная наука.

Как среди специалистов, так и среди широкой массы читателей научно-популярных журналов очень часто говорят, что все естествознание, в особенности физика, переживает сейчас тяжелый кризис. Однако немногие отдают себе ясный отчет, в чем же этот кризис состоит, а еще в меньшей степени представляют себе причины как настоящего кризиса, так и тех кризисов, которые пережила физика наряду с другими ветвями естествознания в сравнительно недалеком прошлом.

Говорить о причинах кризиса в какой-либо науке, оставаясь на почве только этой науки и отрываясь от всей общественной обстановки, в которой живут и работают люди науки, значит, по существу, отказаться от мысли найти эти причины.

Роль науки (у нас речь идет о естествознании и по преимуществу о физике) — двоякая. Прежде всего наука необходима для овладения природой, для усовершенствования техники; в этом овладении природой кровно заинтересованы стоящие у власти классы. Но это еще не все: наука нужна и как основа, как опора господствующей в данную эпоху философии — как опора научного мировоззрения.

Поскольку всякая наука о природе имеет своей задачей подчинить природу, она должна отыскивать истинные законы природы, проверять их на практике, потому что подчинить себе природу можно, только подчинившись ее законам, т. е. узнав эти существующие вне нас и независимо от нашего сознания законы и направив их действие по своему желанию. Вот почему „всякой научной идеологии (в отличие, например, от религиозной) соответствует объективная истина, абсолютная природа“ (Ленин, т. X, стр. 109).

Но поскольку в задачу науки входят и задачи философские, задачи, связанные с мировоззрением, „ни единому из этих профессоров, способных давать самые ценные работы в специальных областях химии, истории, физики, нельзя верить ни в единственном слове, раз речь заходит о философии. Почему? По той же причине, по которой ни единому профессору политической экономии, способному давать самые ценные работы в области фактических специальных исследований, нельзя верить ни в одном слове, раз речь заходит об общей теории политической экономии. Ибо эта последняя — такая же партийная наука в современном обществе, как и гносеология“ (Ленин, т. X, стр. 290, разрядка Ленина).

Вот это противоречие между необходимостью давать верные, согласные с действительностью, картины окружающего нас мира и необходимостью проводить партийность в теории и приводить в рамках буржуазного общества к кризисам в науке.

По мере того как с каждым годом буржуазно-капиталистический мир все быстрее и быстрее склоняется к своему закату, противоречие это все более и более обостряется. Ведь для того, чтобы давать верную картину реально существующего мира, ученый должен быть материалистом, — хочет он того или нет. Далее, так как природа является, как говорит Энгельс, „пробным камнем диалектики“, — диалектика даже стихийно проникает в научное исследование. Ученый же буржуазного мира, стоящий, как правило, на стороне правящего класса, с ужасом отвертывается от материалистической диалектики, которая вывела бы его из целого ряда затруднений при решении любой научной и научно-технической задачи, но которая в то же самое время с полной очевидностью приводит к выводу о неизбежном крушении капиталистического мира и о наступлении пролетарской революции, что приводит ученого в ужас.

Но если в этом, все более и более углубляющемся, противоречии и заключается основная причина очередных кризисов физики и других областей естествознания, то, вне всякого сомнения, в самой науке должны существовать и непосредственные поводы, заставляющие кризис развиваться вокруг определенного ряда вопросов, вокруг определенных глав той или другой науки.

Ближайшим поводом к кризису физики конца XIX и начала XX вв., мастерски изученному Лениным в его „Материализм и эмпириокритицизме“, послужило то, что развитие науки и техники натолкнуло ученых на „новые формы материи, новые формы материального движения“ (Ленин, т. X, стр. 264).

Разобраться во всем этом, стоя на позиции старой формы материализма — материализма механического, — было невозможно. Вот почему та часть теоретиков, которая в конце концов примкнула к эмпириокритицизму, не будучи в состоянии преодолеть ограниченности механического материализма, отказалась от материализма вообще, так как в эту же сторону были направлены и мысли философов-идеалистов — представителей буржуазного общественного мнения.

Однако это сползание с материалистической позиции вызвало отпор со стороны ряда физиков в рамках того же капиталистического общества, как, например, Больцман, Лоренц, Лармор, Дж. Дж. Томсон и ряд других, которые сумели остаться материалистами и в то же время разобраться в новых задачах, поставленных перед физикой, несмотря на их философские ошибки и непоследовательность. Что такое течение должно было возникнуть, ясно из того, что, не будучи материалистом, нельзя вести научное исследование, а в практических выводах из целого ряда даже, казалось бы, узко теоретических исследований кровно заинтересован буржуазно-капиталистический мир. Вот почему борьба между школами в науке, которая будто бы объясняется разногласием в толкованиях тех или иных специальных текущих вопросов науки, по существу является отблеском классовой борьбы. Те, кто в рамках буржуазного общества стихийно становятся на рельсы, ведущие к диалектическому материализму, и тем самым ведут науку вперед, ведут к дальнейшему использованию природы человеком, с философской точки зрения идут, сами того не замечая, против своего класса. На этой почве дело доходит порой до трагических последствий, — например самоубий-

ство Больцмана, причем обе борющиеся стороны не отдают себе отчета в причинах их борьбы.

Что даже во время кризисов известной части физиков удается оставаться на материалистических позициях, было отмечено Лениным. „Следовательно, и по отношению к Германии подтверждается то, что по отношению к Англии признал спиритуалист Дж. Уорд, именно: что физики реалистической школы не менее удачно систематизируют факты и открытия последних лет, чем физики символистской школы, и что существенная разница состоит „только“ в гносеологической точке зрения“ (Ленин, т. X, стр. 244). Но, если наиболее выдающимся ученым и удается в общем удержаться на материалистических позициях, то „не надо только забывать, что кроме общих предрассудков всего образованного мещанства против материализма на самых выдающихся теоретиках сказывается полнейшее незнакомство с диалектикой“ (Ленин, т. X,-стр. 222). Это приводит к непоследовательности, а порой и к грубым методологическим ошибкам.

II. Кризис начала XX века.

Остановимся теперь на тех поводах, которые привели на рубеже двух столетий к кризису в физике.

В основном, дело сводилось к следующему. Старая механическая точка зрения, согласно которой атом должен быть построен по образу и подобию любого известного нам материального тела так, как его рассматривала классическая механика, потерпела поражение. Атом оказался сложной электромагнитной системой, построенной из электронов и протонов, масса которых возрастает со скоростью. Возрастание и убывание массы протонов и электронов, в зависимости от изменения скорости, по Томсону объясняется обменом между „невесомым“ эфиром и весомой матерierой. Таким образом старые формы привычной нам материи оказались составленными из новых форм электронов и протонов с меняющейся массой, причем эта масса черпается из „невесомой“ окружающей среды — эфира, в которой находятся эти электроны и протоны, представляющие части этой же самой среды и находящиеся в определенных состояниях движения.

Вот как об этом писал Дж. Дж. Томсон в своей книге „Корпускулярная теория материи“ (J. J. Thomson, The corpuscular Theory of Matter, 1907, стр. 28—30, 32, 34): „Происхождение массы корпускулы (Томсон Электрон называет корпускулой) очень интересно, так как доказано, что масса возникает исключительно от заряда электричества, сосредоточенного на корпускуле“. „Место, где сосредоточено возрастание массы, не совпадает с самим заряженным телом, но находится в пространстве вокруг заряда так, как если бы эфир, заполняющий пространство, был приведен в движение проходящими через него линиями сил, идущими от заряженного тела. Возрастание массы заряженного тела обусловлено массой эфира, приведенного в движение линиями электрической силы“. „Не существует для корпускулы никакой другой массы: вся масса — масса электрическая“.

„Итак, если значительная часть массы корпускулы электрического происхождения, масса быстро движущейся корпускулы будет больше,

чем для медленно движущейся; если же масса была бы в основной своей части механической, она бы не зависела от скорости". Опыты, как известно, подтвердили электрическую теорию материи и показали, что вся масса — масса электромагнитная. Все это, конечно, далеко не то, что думали об атомах в XIX в. те, кто стоял на точке зрения механического материализма. Посмотрим теперь, что писал об электрической теории материи Ленин¹. „Как ни диковинно с точки зрения „здравого смысла“ превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни „странно“ отсутствие у электрона всякой иной массы кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее подтверждение диалектического материализма“ (Ленин, т. X, стр. 219). Однако в первые годы XX в. только немногие физики, подобно Томсону, поняли, что новые открытия по существу дают нам возможность проникнуть глубже в самое строение вещества и развертывают перед нами новые формы материи и движения и что прежние наши грубые взгляды на вещество теперь должны уточниться. Значительная часть теоретиков провозгласила полное крушение материализма, так как материя по их мнению на основании новейших исследований оказалась нематериальным электричеством. Именно по этому поводу Ленин писал: „Если бы наши махисты, пишущие книги и статьи на философские темы, умели думать, то они поняли бы, что выражение „материя исчезает“, „материя сводится к электричеству“ и т. п. есть лишь гносеологически беспомощное выражение той истины, что удается открыть новые формы материи, новые формы материального движения, свести старые формы к этим новым и т. д.“ (Ленин, т. X, стр. 264). Так как вся материя, которую мы раньше изучали в механике, оказалась построенной из электронов и протонов, с легкой руки теоретиков, пошедших по пути Маха и Авенариуса, между механикой и электромагнетизмом стали строить непреодолимый барьер. Это течение сыграло весьма отрицательную роль в истории физики последних лет. Во-первых, между механикой и теорией электромагнитного поля очень много общего. Так, например, Абрагаму удалось выразить законы движения электрона в форме уравнений механики Лагранжа. Специфическое отличие динамики электрона от классической механики выражается в том, что кинетическая и потенциальная энергия (в динамике электрона — магнитная и электрическая) иначе выражаются, чем в классической механике².

Вследствие того, что эти специфические отличия не были замечены, мы имеем большое число неудачных механических моделей электромагнитного поля, которые, в лучшем случае, правильно изображают только часть электромагнитных процессов. Во-вторых, необходимо помнить, что основные законы электромагнитного поля были выведены Maxwellлом на конкретной модели с помощью уравнений механики. Наконец, аналогия между вихревыми движениями в жидкостях и газах и законами

¹ Книга Томсона (см. выше) указана у Ленина в числе книг, использованных им при работе над „Материализмом и эмпириокритицизмом“.

² Вот каким образом,— представляется пишущему эти строки,— надо вести борьбу на два фронта.

электродинамики используется сейчас на практике в расчетах подъемной силы аэропланов. Принципиально новое по сравнению с классической механикой в учении об электромагнитном поле есть указанное уже выше взаимодействие между электронами и протонами и окружающей их средой — эфиром. Эту связь надо учитывать в особенности при скоростях, сравнимых со скоростью света. Такой связи старая механика не знала. Некоторое подобие этой связи мы можем наблюдать при движении твердых тел в жидкостях. Любое тело, находящееся в жидкости, не может двигаться иначе, как заставляя двигаться и окружающую его жидкость. Однако форма этой связи с окружающей средой в электродинамике имеет не тот простой вид, как это имеет место в указанном примере из области классической механики. Далее, принципиально новым в новой физике является следующее. В классической механике любое тело рассматривается как совокупность так называемых „материальных точек“, имеющих исчезающие малые размеры. Эти материальные частицы, как предполагалось, имеют все механические свойства обычных тел, т. е. одинаковым с ними образом подчиняются действию сил, закону инерции и т. д. Вот именно здесь эта точка зрения старого механического материализма потерпела крушение: „материальными точками“, т. е. теми маленькими тельцами, из которых построено вещество, теперь, при настоящем уровне науки, являются электроны и протоны (согласно новейшим работам Томсона и эти элементы сложны и имеют определенную структуру).

И вот оказывается, что при изучении каждого отдельного электрона надо считаться с его электрическим полем, которое простирается теоретически на весь мир! Таким образом реальный элемент, из которого строится всякое тело, оказался не материальной точкой, не маленьким телом исчезающие малых размеров, а системой, распространяющейся на целый мир. „Итак, — замечает Дж. Дж. Томсон, — с нашей точки зрения каждая корпускула (электрон, *A. T.*) простирается на всю вселенную“, — результат, интересный в связи с догмой, что два тела не могут занимать одного и того же места (*Thomson J. J., Corpuscular Theory of Matter*, стр. 34, изд. 1907 г.). Ввиду того, что сходства и различия между механикой и электродинамикой еще полностью не изучены, среди значительной части физиков, находящихся под влиянием идеалистической философии, господствует течение, считающее необходимым совершенно отгородить теорию электромагнитного поля от механики. Это — явно антидиалектический путь, так как задача наша должна заключаться именно в том, чтобы выяснить, в чем заключается переход от более простых, частных законов, наблюдаемых в механике, к законам тех, более сложных, форм движения, которые представляют собой явления электромагнитного поля. Надо помнить, что электрон „двигается с быстротой до 270 000 км в секунду, его масса меняется с его быстротой, он делает 500 триллионов оборотов в секунду, — все это много мудренее старой механики, но все это есть движение материи в пространстве и во времени“ (*Ленин*, т. X, стр. 236). Таким образом мы, вне всякого сомнения, имеем дело с обобщением законов механики.

Против формализма современных теоретиков, правда, в очень скромной форме, выступал Лоренц. „В последнее время, — говорил он, — ме-

ханические объяснения того, что происходит в эфире, были фактически отодвинуты все более и более на задний план. Для многих физиков существенная часть теории состоит в точном, количественном описании явлений, т. е. так, как это сделано в уравнениях Максвелля.

Но, если мы даже будем придерживаться этой точки зрения, механические аналогии сохраняют часть своей ценности. Они помогают нам мыслить о явлениях и могут подсказать нам некоторые идеи для новых исследований¹. В самом деле, признание, что уравнения Максвелля дают точное описание явлений и не нуждаются ни в каких объяснениях, не нуждаются ни в каких указаниях на их связь с механикой, не нуждаются в указаниях, в чем их специфическое отличие от уравнений механики, — есть самый настоящий „ползучий эмпиризм“ — полный отказ от теоретического мышления.

Итак, не сумев преодолеть ограниченности старой формы материализма — материализма механического, значительная часть ученых в период кризиса физики конца XIX и начала XX вв. сползла на идеалистические позиции. Существуют ли, однако, сейчас сторонники механического материализма?

Отстаивать в области электронной теории старые позиции — изображать электрон с его полем как материальную точку старой механики — из современных физиков едва ли кто решится. Однако среди представителей естествознания, непосредственно и глубоко не изучавших теорию электромагнитного поля, как это наблюдается среди довольно значительной части физиологов, упорно держатся старые взгляды на материю; а самый материализм представляется им как схема, сводящая все явления в мире к движению однородных материальных точек. Всего несколько лет назад с подобными взглядами выступал наш выдающийся физиолог, покойный проф. А. Ф. Самойлов, причем высказанные им взгляды несомненно разделяются еще и сейчас весьма широкими кругами естественников. В этих взглядах проявляется ограниченность старой формы материализма, а именно, применение исключительно масштаба „механики к процессам химической и органической природы“ (Энгельс). Но не только эти проявления механицизма (т. е. отжившей, когда-то прогрессивной, а теперь реакционной формы материализма) сохранились сейчас в естествознании и, в частности, в физике. Методологическими ошибками механицизма преисполнены работы современных теоретиков в области теории относительности и теории квант и даже тех из них, которые многими своими сторонами примикают к идеалистическим течениям. Возьмем, например, признание абсолютной неделимости электрона (признавать неделимость атома теперь уже невозможно!) у М. Борна (см. ниже, стр. 24) и у нас в СССР у проф. Френкеля² и проф. Тамма (см. ниже, стр. 81). Как мы увидим, Борн считает даже, что если бы когда-нибудь случилось такое несчастье и электрон оказался состоящим из более мелких частиц, то это означало бы крушение атомизма! Наконец, в общей теории отно-

¹ „Лекции по теоретической физике“, London, Macmillan, Vol. I, 1927, стр. 68.

² Проф. Френкель „устраняет“ противоречие, состоящее в том, что части электрона отталкивают друг друга и в то же время электрон не разлетается, тем, что электрон не имеет протяжения — представляет собой точку и потому абсолютно неделим.

сительности вся физика „сводится“ к геометрии,— все силы объясняются кривизной пространства.

В этих рассуждениях проявляется другая ограниченность механицизма — его метафизичность в смысле антидиалектики. Далее, в теории относительности утверждение, что скорость света есть абсолютный предел скорости, признание абсолютно непрерывного эфира, к которому абсолютно неприложимо понятие движения как перемещения в пространстве, и по отношению к которому невозможно определить механического перемещения какого-либо тела, — все это методологические ошибки механистического характера.

Заслуживает внимания, что представитель меньшевистствующего идеализма т. Гессен в своей книге „Основные идеи теории относительности“, целиком присоединяется к этим механистическим ошибкам Эйнштейна, думая, что он борется против механицизма, очевидно, на том основании, что Эйнштейн для вводимого им заново эфира не допускает даже возможности механического перемещения и тем самым наделяет его мистическими свойствами.

Как механистические ошибки, в том числе в области физики, могут перерасти в методологию правого уклона — главную опасность на данном этапе, мы с особенной ясностью увидим в дальнейшем, при обсуждении проблемы необходимости и случайности.

III. Современный кризис в физике.

Переходим теперь к современному кризису физики, который связан с большими сдвигами в молодой еще области нашей науки — в области так называемой теории квант.

Начало этого кризиса можно отнести к периоду 1924—1927 гг. Этот период отмечен резко выраженным неудачами в теории квант — в той ее форме, которая была придана ей Бором и Зоммерфельдом, — эта пора неудач сменила пору бурных успехов периода 1913—1923 гг.

С внешней стороны кризис отличается от предыдущего тем, что идеалистические выводы переходят уже в самый открытый мистицизм. Научно-популярные книги, особенно в Англии, превращаются в самые отвратительные богословские трактаты. Пальма первенства в этом отношении принадлежит двум выдающимся теоретикам: Джинсу и Эдингтону.

Если уже в 1908 г., в эпоху первого кризиса текущего столетия, Ленин указывал, что эмпириокритицизм или маxизм во всех его разновидностях неизбежно должен привести к поповщине, то для этого все-таки надо было доказывать „куда растет эмпириокритицизм“. Надо было доказывать потому, что отдельные представители эмпириокритицизма, которых, как говорил Ленин „грех было бы обвинить в последовательности“, на словах решительно отмежевывались от тех выводов, которые неизбежно вытекают из всей их философской установки. Во всяком случае, в то время установилось своеобразное разделение труда: мистические выводы из идеалистической установки Маха делал не сам Мах, а например, Корнелиус¹,

¹ Корнелиус без всякого стеснения громит материалистов за то, что материализм „вместе с верой в свободу наших решений подрывает всю оценку нравственной ценности наших поступков и нашу ответственность“ (см. Ленин, т. X, стр. 181).

² Тимирязев, Введение в теорет. физику

который шел, по словам Маха, „если не теми же“ путями, как сам Мах, „то очень близкими“.

Не то мы видим теперь. Теперь самые выдающиеся теоретики выступают на богословские темы, якобы основанные „на последнем слове науки“. Прислушаемся немного к хору современных жрецов ... из числа ученых.

„Придется, пожалуй, сказать,— говорит Эддингтон,— в качестве вывода из этих аргументов, основанных на современной науке, что религия стала возможной для разумного человека науки только с 1927 г. ... Если наши чаяния окажутся хорошо обоснованными, именно, что в 1927 г. Гейзенберг, Бор, Борн и др. окончательно опрокинули строгую причинность, то этот год превратится в одну из величайших эпох в развитии научной философии ...“ „Другое обвинение, которое может быть брошено против этих лекций состоит в том, что я допускаю, в известной мере, элементы сверхъестественного, что в глазах многих ничем не отличается от суеверия. Постольку, поскольку сверхъестественное связано с отрицанием причинности, я могу ответить только тем, что к этому нас приводит современное научное развитие квантовой теории...“ „Мы с трудом в состоянии будем отрицать обвинение в том, что, уничтожая критерий причинности, мы открываем двери для демонов, признаваемых дикарями. Это серьезный шаг, но я не думаю, что он означает конец всякой истинной науки. В конце концов, если эти демоны попробуют войти, мы сможем их прогнать таким же путем, каким Эйнштейн прогнал уважаемого причинного демона, именуемого тяготением. Конечно, мы чувствуем лишене, потеряв возможность квалифицировать некоторые взгляды, как не научные, но ведь нам доволено, все-таки, если этого потребуют обстоятельства, отбрасывать эти взгляды в качестве плохой науки“ (Eddington, The Nature of the Physical Universe, p. 350, 347, 309). Та книга, из которой мы привели эти выдержки, с ноября 1928 г. по июль 1929 г. выдержала ... пять изданий. Это ясно показывает, что буржуазия до того перепугана надвигающейся революцией, что ищет утешения в том, что ученые начинают верить в чудеса, в надежде, что такое же чудо спасет погибающий капиталистический мир. Сравнительно совсем недавно (8 февраля 1931 г.) американская газета „Нью-Йорк Таймс“ напечатала ряд небольших статей крупнейших теоретиков в области физики, которые по содержанию ничем не отличаются от приведенных отрывков из книги Эддингтона и с несомненностью свидетельствуют о сильном разложении ученого мира в буржуазно-капиталистических странах. Начнем с выдающегося английского физика и астрофизика Джинса. „Моя склонность к идеализму,— говорит он,— в значительной степени обусловлена научными теориями ... как, например, принципом индетерминированности (неопределенности), который противоречит старой научной доктрине о том, что природа управляет строго детерминированными законами. Согласно современным научным (! A. T.) взглядам вселенная является, скорее, великой мыслью, чем великой машиной. Мне кажется, что каждое индивидуальное сознание есть мозговая клеточка всемирного разума“ (!! A. T.). К словам Джинса присоединяет свой голос Эрвин Шредингер — один из создателей волновой механики: „Мы не можем говорить о природе как о чем-то, существующем независимо от нашего ума. Природа, о которой мы говорим, есть природа, существующая для нашего разума“

возможно, что мы и не можем знать ни о какой другой природе". Далее, де-Бройль, который разделяет с Шрёдингером славу построения волновой механики, повторяет те же мысли: „Я рассматриваю,— говорит он,— принцип индетерминированности как основной принцип: его нельзя рассматривать как полезную выдумку для современной ступени знания. г. е. как нечто такое, что в будущем будет чем-то заменено. Этот принцип выражает основную характеристику вселенной. Старый взгляд ученых, согласно которому природа представляет собой строго детерминированную схему, должен быть окончательно оставлен". Но, что еще интересней,— Макс Планк, выступавший в 1910 г. с критикой Маха и защищавший в прошлом, по существу, материалистические позиции в науке, теперь под влиянием новейших работ современных теоретиков присоединяется также к общему хору. В той же самой газете от 8 февраля 1931 г. он пишет: „Я рассматриваю сознание как основу. Материя есть производная от сознания. Мы не можем попасть в то, что происходит позади сознания. Все, о чем мы говорим, все, что мы считаем существующим, предполагает существование сознания". Таких слов от столь многочисленной группы крупнейших ученых в 1908 г. никто не слыхал. Обострившаяся классовая борьба и страх за завтрашний день всего старого мира толкает ученых в области философии назад, что и мешает правильно истолковывать полученные ими ценные результаты, а порой и направляет их на ложный путь в процессе самого исследования.

Вне всякого сомнения, кризис сейчас захватил ученых гораздо глубже. Если в начале XX в. дело сводилось к неверным теоретическим выводам из, порой, хорошо сделанной работы, то теперь уже отчасти самое исследование, как мы увидим, фальсифицируется для того, чтобы из него можно было бы сделать желательный для идеалистической философии вывод. Правда, это делается только в таких областях, которые очень далеко стоят от техники, от производства и даже от большинства научно-теоретических вопросов, разрабатываемых в научно-исследовательских институтах.

Совершенно ясно, что и в переживаемом сейчас физикой кризисе в самой физике имеются непосредственные поводы, заставляющие разыгрываться связанные с кризисом события вокруг вполне определенных вопросов. Как уже было видно из приведенных цитат, вопрос вращается вокруг принципа причинности, а непосредственным поводом послужили спорные вопросы теории квант. Исторически дело началось с трудностей, на которые натолкнулась теория строения атома Бора.

Путем допущений, называемых постулатами Бора, физически не истолкованных, удалось на основе модели атома как планетной системы получить математическое выражение, с поразительной точностью изображающее излучаемый некоторыми атомами спектр.

Вот именно эта точность—это совпадение теории с измерениями и заставило, во-первых, примириться с физически непонятными постулатами. Раз Бор с помощью этих постулатов получил выводы, хорошо совпадающие с опытным материалом, то чего же еще желать? Победителей не судят.

Во-вторых, физики понемногу уверовали, что в теории уже заключено все, что нужно, и что если эта теория на какие-либо вопросы не дает ответа, значит, этого ответа и получить нельзя. А между тем, у тех физиков, которые работали в лаборатории, пользуясь этой теорией как руководством, возникли весьма существенные вопросы, на которые ответа не получалось.

Для того чтобы выяснить, в чем корень затруднений, послуживших поводом к кризису, рассмотрим эти затруднения на простейшем примере атома водорода. Модель Бора чрезвычайно проста: вокруг ядра, заряженного положительно, — вокруг протона, вращается единственный в атоме водорода электрон.

Для этого электрона с помощью первого постулата Бора подбирается целый ряд возможных „устойчивых“ орбит, на которых электрон может двигаться, не излучая энергии, вопреки всем законам электромагнитного поля¹. Энергия электрона на этих орбитах может быть легко вычислена. Мы имеем вполне определенные значения энергии на первой, второй и т. д. орбитах, начиная счет от ядра:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n.$$

(индекс означает порядок орбиты, начиная с самой близкой к ядру — первой). Числа колебаний, соответствующих спектру водорода, $\nu_{n,1} \nu_{n,2} \nu_{n,3}, \dots$ получаются из уравнения (1), выражающего второй постулат Бора

$$\hbar\nu_{n,1} = U_n - U_1, \quad \hbar\nu_{n,2} = U_n - U_2 \quad \text{и} \quad \hbar\nu_{n,3} = U_n - U_3. \quad (1)$$

Эти уравнения связываются с моделью Бора следующим образом: электрон может (от каких причин — неизвестно) перескакивать с более далекой орбиты на более близкую и при этом он излучает один квант лучистой энергии. Уравнения (1) дают частоты колебаний, соответствующие этим квантам, причем в приведенных трех „сериях“ спектральных линий мы имеем перескоки электронов с любой n -й орбиты на первую, вторую и третью.

Теперь, спрашивается, когда происходит процесс излучения?

Повидимому, начиная с того момента, когда электрон соскочит с n -й орбиты, и вплоть до того, как он попадет на вторую, первую или третью. Но во всех этих трех случаях числа колебаний будут разные, так что выходит так, как будто электрон заранее знает, где он остановится, и сообразно с этим он и начинает излучать!

Как выйти здесь из затруднения? По существу, совершенно ясно, что, так как мы не знаем еще физического смысла постулатов Бора и совсем не знаем, что происходит с электроном на орбитах, мы и не можем еще ответить на вопрос, почему электрон излучает по-разному, срываясь с одной и той же орбиты. Не так рассуждает эмпириокритик. Числа колебаний $\nu_{n,2}$ и т. д. мы легко можем измерить, а эти величины даются формулами (1) с изумительной точностью. Все же остальное, вплоть до закона причинности, есть материалистическая метафизика.

¹ В настоящее время Томсону удалось найти физическое объяснение для первого постулата Бора. Это объяснение в еще более строгой форме было дано проф. Н. П. Кастеринным на заседании Физ. о-ва имени Лебедева 20 января 1930 г. (см. ч. VI настоящей книги).

Таким образом воссозданные на Махе и Авенариусе современные теоретики „разрешили“ противоречие следующим образом никаких поисков физических причин предпринимать не следует, а просто никакого детерминизма не существует вообще.

В этом отношении вся дальнейшая история развития квантовой физики в высшей степени характерна. После обнаружения указанного выше противоречия усилия всех теоретиков-квантистов были направлены не на изучение движения электронов по орбитам и не на выяснение того, что происходит с электроном на орбите и что вызывает скачок. Нет, теоретики наперебой старались исключить из схемы Бора все, что в ней было наглядного, а главное, исключить из теории самое понятие об орбите, которая была признана несуществующим объектом потому, что она ... принципиально ненаблюдаема! Закономерности (1) были, конечно, сохранены, но наглядная картина модели атома, приведшая Бора к открытию этих закономерностей, была уничтожена и заменена туманными словесными рассуждениями о переходе атома с одной ступени энергии на другую.

Что здесь была произведена определенная фальсификация науки в угоду реакционной философии,— не подлежит никакому сомнению.

Как мы сейчас увидим, об этом совершенно прозрачно говорят сами теоретики-квантисты.

Интересующие нас сейчас методологические взгляды Гейзенберга и новейших теоретиков в области теории квант подробно изложены в речи А. Зоммерфельда „Современное состояние атомной физики“ (перевод: „Успехи физ. наук“, т. VII, вып. 3—4, стр. 166). Вот что мы читаем там о теории Гейзенберга: „Гейзенберг исходит из гносеологического принципа, согласно которому при описании явлений нужно пользоваться лишь элементами, доступными наблюдению. Таковыми у атома являются числа колебаний и интенсивности спектральных линий. Все остальные механические характеристики пути электрона, например, место электрона на орбите, продолжительность обращения, недоступны наблюдению и не входят в теорию“. Таким образом вопрос, который был поставлен физиками, современными теоретиками-квантистами отвергается по тем же мотивам, по каким Мах и Оствальд отвергали атомистику. Если сформулировать коротко, то аргументация тех, кто идет на поводу идеалистической философии, сводится к следующему: несколько лет назад, к великому несчастию, материалистам удалось доказать реальность атомов, но зато путей электронов в атоме они показать не смогли и никогда не смогут, а следовательно, таких вещей, как путь электронов в атоме, вообще нет! Хотя тот же Зоммерфельд и утверждает, что представления новой волновой механики де-Бройля-Шрёдингера, последовавшей за теорией Гейзенберга, „смело выходят за пределы опыта и конструируют волновые образы, которые лежат за пределами, доступными опыту...“, однако и эта теория отказывается от модели атома, как это вынужден признать и сам Зоммерфельд: „Но, если падает мантия, должен ли вслед за ней также погибнуть и герцог? Мантия — это квантовые условия, с одной стороны, и принцип соответствия, — с другой. Герцог — это модель атома Бора, хорошо известная всем планетная система ядер и электронов“. На вопрос: „погибнет ли герцог?“, т. е. модель

атома, Зоммерфельд отвечает: „Я думаю, что нет. До тех пор, пока существует химия и периодическая система элементов (мы думаем, что это еще продлится, по крайней мере, некоторое время!! A. T.), будет существовать также последовательное построение атомов из электронов, которые связываются с ядром в различных квантовых сочетаниях“. Однако после этих слов, на следующей странице (168), Зоммерфельд говорит уже прямо противоположное: „Поскольку новая механика правильно передает реальные факты, поскольку неразрывно связанная с ней модель атома реальна. Но есть ли это обычная реальность в пространстве и во времени? Согласно нашим современным знаниям мы должны ответить на этот вопрос отрицательно (!! A. T.). Модели атомов для атомов, построенных из нескольких электронов, реальны не в трехмерном, но в многомерном пространстве, причем здесь каждый электрон можно представить себе как настоящий точечный корпускул. Но в трехмерном пространстве электрон нельзя локализировать ... Так же, как и с пространством, обстоит дело и со временем. Элементарное представление временного обращения модели атома не может быть сохранено в новой теории. Чудесная наглядность микроскопической планетной системы согласно нынешнему состоянию теории квантов, повидимому, погибла безвозвратно“ (!A. T.). Итак, выражаясь словами Зоммерфельда: мы должны были сначала успокоиться, — герцог не погиб, а потом нам сказали всю правду: он погиб безвозвратно! Дело, однако, в следующем: для материалиста-диалектика слова Зоммерфельда содержат явное и притом не диалектическое противоречие. Не то для сторонника Маха. В махизме, во всех его разновидностях, процветает теория двойственной истины, унаследованная еще от средних веков. Мах, например, утверждал, что „правильность позиции детерминизма или индетерминизма не может быть доказана ... Но во время исследования всякий исследователь по необходимости является теоретически детерминистом.“ („Познание и заблуждение“, изд. 2-е, стр. 282—283). Таким образом для исследователя в процессе работы существует одна истина, но, когда тот же исследователь предается глубокомысленным рассуждениям о теории познания, ему нужна истина прямо противоположного свойства. Этот отрыв практики от „чистой возвышенной“ теории Ленин называл обскурантизмом.

В самом деле, в чем смысл рассуждения Зоммерфельда? Пока речь идет о химии, где обычная теория электронов (в пространстве и во времени) дает блестящие результаты, обычная пространственно-временная модель атома сохраняется, непрерывно совершенствуясь и приближаясь к тому, что есть в природе. Но как только речь заходит о возвышенной теории, так эти грубые модели исчезают, как злой дух¹. Отсюда ясно, что те недоумения, которые вызывались недостаточностью модели Бора, не могут быть разрешены такими теориями, в которых, по существу, исчезает всякая пространственно-временная модель. Как можно спрашивать объяснения у людей по таким вопросам, на которые они принципи-

¹ В области химии имеют часто большой успех даже самые грубые статистические модели, как, например, Лангмюра, Томсона и др. Это показывает, что целый ряд химических процессов зависит только от числа и расположения наружных электрочлов атома. В последнее время есть попытки объяснить ряд фактов и на основе волновой механики.

шиально отказываются отвечать? Что дело обстоит именно так, совершенно недвусмысленно высказал такой осторожный мыслитель, как покойный Г. А. Лоренц, в своей последней статье, напечатанной уже после его смерти. „Однако нельзя отрицать, что в вопросе о том, как атом излучает, мы сейчас отстоим дальше от решения, чем это было в то время, когда мы располагали теорией Бора; с самого начала (в новых теориях — А. Т.) эти вопросы умышленно избегнуты, так как они рассматриваются как лежащие вне того, что мы, вообще, можем знать или даже желаем знать“ („How can Atom radiate“, „Journal of the Franklin Institute“, Vol. 20, April 1928). Вот почему, если теория умышленно строится так, чтобы исключить ряд вопросов из рассмотрения, то напрасно ждать от нее ответов на вопросы, от которых она просто отмахивается. Настойчивость же, с которой часть физиков и химиков, с успехом использующая старую модель атома, продолжает ставить все те же вопросы, свидетельствует лишний раз о том, что решений этих вопросов добиваться необходимо, что отказ от модели Бора вместо ее усовершенствования есть шаг назад, есть отказ от теоретического мышления, каковы бы ни были формальные достоинства и даже достижения новых теорий. Кроме того, существенным недостатком новейших теорий являются их жесткие аксиоматические основные положения, придающие им метафизический законченный вид, не допускающий к усовершенствованию и предполагающий только дальнейшие применения одних и тех же положений.

Но, спрашивается, существуют ли физики, которые бы делали попытки дать физическую теорию тех явлений, которые теперь „объясняются“ с помощью теорий, порывающих с законом причинности? Надо сказать, что таких сейчас очень немного, и это объясняется тем, что большинство вопросов, о которых идет речь, далеко стоят от практических задач. К числу этих физиков необходимо, в первую очередь, отнести Дж. Дж. Томсона и Уайттекеров (отца и сына) в Англии и проф. Н. П. Кацерина у нас в СССР. Если кратко охарактеризовать повод рассматриваемого нами новейшего кризиса физики, связанного с теорией квантов, повод, коренящийся в самой физике, то можно сказать, что, с одной стороны, в теории квантов мы столкнулись с новой формой материи, представляющей собой замкнутые фарадеевы трубки, как их изображает Томсон. В обычной форме материи эти трубки, являющиеся носителями электрического поля, соединяют между собой электроны и протоны. Кванты же лучистой энергии представляют собой замкнутые части трубок, оторвавшиеся от зарядов. Отсутствие зарядов представляет собой качественное отличие этой формы материи от ее обычных видов, — это качественное отличие от привычных форм материи, сказывающееся в целом ряде удивительных свойств, и послужило поводом к тому, что лучистую энергию стали изображать как лишенную материального носителя, как чистую энергию без материи или движение без того, что движется.

С другой стороны, изучение квантовых законов привело нас к тому, что перед нами встал вопрос о строении электрона и протона. Подобно тому как метафизически настроенные умы не могли примириться с тем, что атомы, которые им хотелось бы видеть неделимыми, оказались

состоящими из электронов и протонов, так и теперь мысль, высказанная впервые и подкрепленная целым рядом веских аргументов Дж. Дж. Томсоном, о том, что электрон и протон должны иметь определенное строение, вызывает бешеное сопротивление со стороны антидиалектически настроенных умов современных теоретиков. Вот как сформулировал свою точку зрения Дж. Дж. Томсон: „Но, быть может, многие из вас могут меня спросить, не слишком ли далеко мы идем, вступая в область, лежащую по ту сторону электрона? Не следует ли где-нибудь провести черту? Очарование физики состоит именно в том, что для нее не существует твердых и жестких пограничных линий¹, что каждое новое открытие есть не предел, а путь, ведущий в неисследованную область, и сколько бы наука ни существовала, в ней всегда будет изобилие нерешенных вопросов, и физикам никогда не будет грозить опасность остаться безработными“ (J. J. Thomson, *Beyond the Electron*, p. 3).

А вот что почти одновременно писал Ма́кс Борн, один из выдающихся теоретиков, работающий в области квантовой механики: „Экспериментальные и теоретические исследования привели нас к убеждению, что материю нельзя произвольно делить на части, но что существуют последние единицы вещества, которых дальше нельзя уже делить. Однако это — не химические атомы, которым мы отказываем в праве называться „неделимыми“; наоборот, согласно новым исследованиям химические атомы представляют весьма сложные структуры, построенные из более мелких элементарных частиц. С точки зрения современных исследований эти частицы представляют собой атомы электричества: отрицательные — электроны и положительные — протоны.“

Можно было бы, пожалуй, склониться к убеждению, что в более позднюю эпоху наука преодолеет и эту точку зрения и проникнет в область еще более мелких частиц. В этом случае философское значение атомистики заслуживало бы не очень высокой оценки; последние единицы материи не представляли бы собой тогда чего-либо абсолютного, но оказались бы символами данного состояния исследования. Но я не думаю, что так случится, а думаю, можно высказать надежду, что здесь дело идет не о бесконечной цепи, но что мы близки уже к концу, а может быть, его уже достигли“ (M. Born, *Probleme der Atomsdynamik*, p. 3). Сопоставление взглядов Томсона и Борна очень поучительно, как сопоставление двух образцов мышления: одного приближающегося к диалектическому материализму и другого чисто метафизического и притом еще с уклоном в идеализм, так как атомы и электроны (по Борну) — не отражения независимо от нас существующего мира, а всего только символы, изображающие данную ступень нашего исследования.

Любопытно отметить, что взгляды Томсона были навеяны работами радиотехников, изучающих распространение радиоволн в окружающей земной шар ионизированной среде.

Подобно тому, как радиоволны отражаются от слоя ионизированного воздуха (слой Гевисайда) и движутся, фактически не удаляясь от поверхности земли, как бы скользя в относительно тонком слое атмосферы, так и волны, играющие роль в так называемом явлении дифракции

¹ Это выражение почти буквально совпадает со словами Энгельса: *hard and fast lines* [у Томсона вместо *lines* (линий) стоит *boundaries* (границ)]

электрона, не покидают „атмосферы“ электрона, состоящей из электрически заряженных частиц. В теории Томсона эти волны — реальные, электромагнитные, в теории же де-Бройля-Шредингера эти волны не имеют материального носителя и не получили физического истолкования. Таким образом на этот сугубо теоретический вопрос Томсона натолкнула практика радиотехников. Не потому ли и разработанная им теория (см. ч. VI настоящего курса) не порывает с законом причинности и является образцом блестящей физической мысли?

Конечно, никто не станет выдавать теорию Томсона за окончательное решение, но все дело в том, что она так построена, что позволяет развивать ее и притом развивать даже основные ее положения, чем она выгодно отличается от метафизической догматики основных положений волновой механики.

Теория Томсона, которая, в основном, предполагает только наличие заряженных частиц или диполей (противоположные заряды, связанные между собой в пару) в атмосфере электрона, дает возможность объяснить первый постулат Бора, для которого до сих пор не существовало физического объяснения. Томсон в настоящее время подходит в своих работах к выяснению второго постулата Бора. Если это ему удастся, — тогда удастся установить диалектический переход от обычной классической физики к атомной, причем мы будем в состоянии не только констатировать переход от одной области явлений к другой, но и объяснить те качественные различия, которые присущи этим двум ветвям физики.

IV. „Кризис“ закона причинности.

Теория Шредингера, как мы уже говорили, не разрешила тех сомнений на счет закона причинности, какие возникли еще при разработке теории Бора. Посмотрим, что говорит по этому поводу Зоммерфельд.

„Мы уже говорили раньше о, быть может, лишь статистическом, т. е. некаузальном истолковании величин состояния в волновой механике. Такое истолкование принесло бы с собой известный индетерминизм в наши воззрения..., сохранится ли при этом привычная форма (!? A. T.) причинности, — сомнительно. Эта форма основывается на классической механике. Напротив, более тонкие данные квантового мира указывают на одинаковую роль начального и конечного состояния“ (!A. T.).

Если в наших формулах мы пишем, что количество излученной энергии $h\nu_{\text{,}} = U' - U$, определяется начальным и конечным состоянием, то это вовсе не значит, что конечное состояние определяет собой процесс с самого начала. Это значит, что приведенная нами формула констатирует то, что обычно происходит, но не содержит в себе еще причинного объяснения, — это объяснение мы найдем лишь тогда, когда вопреки модным теориям, займемся вопросом об устойчивости движения электронов в атоме и выясним условия перехода из одного устойчивого состояния в другое.

Остановимся теперь подробнее на вопросе о „кризисе“ закона причинности.

Самое удивительное во всем, что называется современным кризисом физики, это — резкое, доходящее до полного разрыва, противоположение

динамической, или причинной, закономерности — закономерности статистической. Начиная с конца XVIII в. статистические исследования всегда выдвигались как доказательство существования закономерности там, где, на первый взгляд, господствует слепой случай. Эти открываемые статистическим методом закономерности выдвигались даже как аргумент против религии в ту пору, когда буржуазия была революционным классом. Так, у Лапласа, в его „Опыте философии теории вероятностей“ (курс лекций, прочитанный в 1795 г.), мы читаем следующие мысли: „Припомним, что в былое время, в эпоху не очень от нас отдаленную, на дождь или чрезвычайную засуху, на комету с сильно растянутым хвостом, на солнечное затмение, на северное сияние смотрели как на знак небесного гнева. Взвали к небу, чтобы отвратить их пагубное влияние. Небо не молили остановить движение планет или Солнца: наблюдение скоро дало бы почувствовать всю бесполезность таких молений“ (стр. 10). Для Лапласа не было беспричинных явлений. „Все явления, даже те, которые по своей незначительности, как будто, не зависят от великих законов природы, суть столь же неизбежные следствия этих законов, как обращение Солнца“ (стр. 8).

„Всякое, имеющее место, явление связано с предшествующим на основании того очевидного принципа, что какое-либо явление не может возникнуть без производящей его причины“. „Правильность, которую обнаруживает нам астрономия, без всякого сомнения, имеет место во всех явлениях. Кривая, описанная простой молекулой воздуха или пара, определена так же точно, как и орбиты планет: разницу между ними делает только наше незнание. Вероятность обусловливается отчасти этим незнанием, а отчасти знанием“. Таких же, в общем, воззрений придерживался и Гельмгольц. „Вообще, необходимо заметить, что мы можем заранее рассчитать и понять во всех наблюдавших нами подробностях только такие процессы в природе, у которых сделанные нами при вычислениях в основных посылках маленькие ошибки приводят к маленьким же ошибкам и в окончательных результатах.

Как только в дело замешивается неустойчивое равновесие,— это условие более не выполняется.

Таким образом в нашем поле зрения остается еще случайность; в действительности же эта случайность является выражением недостаточности наших знаний и неповоротливости наших способностей соображать. Ум, который имел бы точные знания фактической стороны дела, и у которого мыслительные процессы совершились бы достаточно быстро и точно с тем, чтобы опережать события, увидел бы в диких капризах погоды не в меньшей степени, чем в движении светил, гармоническое действие вечных законов, которые мы только предполагаем и предчувствуем“ („Vorträge und Reden“, Bd. II s. S. 163; „Wirbelstürme und Gewitter“, 1875)

Сопоставим с этими взглядами взгляд современного теоретика Э Шредингера, работающего в области волновой механики:

„Откуда происходит широкое распространенная уверенность в абсолютной причинной детерминированности молекулярных процессов и уверенность в немыслимости противоположной точки зрения? Единственно благодаря унаследованной тысячелетиями привычке мыслить причинным образом. Эта привычка изображает нам недетерминиро-

ванный процесс или абсолютную первичную случайность, как полный ионсенс, как логическую бессмыслицу. Но откуда берется эта привычка? Из столетиями продолжавшихся наблюдений над естественными закономерностями, о которых мы теперь с достоверностью знаем, что они не являются причинными,—во всяком случае, непосредственно. Более того, эти закономерности являются непосредственно статистическими закономерностями. Но этот вывод устраняет всякую рациональную почву у нашей привычки мыслить. Для практики мы, не колеблясь, можем сохранить эту привычку, так как, в конечном счете, она приводит к истине. Однако позволять этой привычке принуждать нас в качестве необходимого вывода постулировать за спиной наблюдаемых статистических процессов абсолютно причинные закономерности было бы совершенно ошибочным умозаключением” (!!! A. T.) (E Schrödinger, *Was ist ein Naturgesetz, „Die Naturwissenschaften“*, Nr. 1, 1929).

Здесь в этих рассуждениях Шрёдингера — одного из творцов волновой механики — мы видим вновь ту же средневековую „теорию“ двойственной истины и, что еще хуже, отказ от всего, что было создано человечеством за тысячелетия! Для практики можно оставить причинность, „так как она, в конечном счете, приводит к истине“. Но теория — это особая статья! Это — новое издание Маха, но, пожалуй, еще значительно ухудшенное. О том, что Шрёдингер здесь замалчивает неоспоримые факты, касающиеся молекулярной теории, мы увидим дальше. Для нас важно здесь, что выдающийся теоретик договорился фактически до упразднения науки.

Что же, спрашивается, за последнее время были открыты какие-либо исключительные статистические явления? Отрицательный ответ на это дает Мизес, утверждающий, что физиками, разрушившими впервые закон причинности, были Бернулли в 1738 г. и Больцман во второй половине XIX в., т. е. как раз те физики, которые о так называемых „случайных“ явлениях думали, примерно, так же, как думал Лаплас и Гельмгольц (см. приведенные нами отрывки). Конфликт с принципом причинности для нас понятен потому, что современные теоретики фактически в значительной степени повторяют Маха, являющегося по вопросу о причинности последователем Юма, но надо сказать, что последователи Маха пошли еще дальше самого Маха.

Мах, вообще, заявлял, что для него принцип причинности не нужен и он для себя его заменяет понятием функции. С другой стороны, он не делал никаких различий в смысле закона причинности между так называемыми статистическими и динамическими закономерностями. „Но во время исследования всякий мыслитель, — говорит Мах, — по необходимости теоретически детерминист. Это имеет место и тогда, когда он рассуждает лишь о вероятном. Принцип Якова Бернулли — „закон больших чисел“ может быть выведен только на основе детерминистических предпосылок... Правила теории вероятностей имеют силу только в том случае, если случайности — еще скрытые усложнениями закономерности“ (Мах, *Познание и заблуждение*).

Таким образом Мах, не признавший закона причинности с точки зрения теории познания, честно разрешает пользоваться им на практи-

тике в области того, что Деборин называет „гнусными фактами“ пользоваться принципом причинности, т. е. оставаться детерминистом независимо от того, имеем ли мы дело с так называемой динамической закономерностью или со статистической. Это для нас очень важно, важно в том отношении, что даже Мах, стоявший на идеалистической позиции и на той, именно, на которой стоят современные теоретики, не отрывал „каузальную“ — причинную закономерность от статистической.

Но почему Мах и эмпириокритики всех оттенков, вообще, восстают против принципа причинности? Потому что для них „элементами мира“ являются, по существу, наши ощущения. Независимо от нашего сознания существующих вещей и связей между ними для этой философии нет; поэтому истинная наука, по Маху и Авенариусу, заключается в чистом описании данного, т. е. ощущений.

„Всякому, кто только не слеп, не глух и не загипнотизирован теорией элементов, должно быть ясно, что метод чистого описания исключает точку зрения развития. Между фазами развития нельзя признать, исходя из метода чистого описания, никакой тесной внутренней связи. Видеть в настоящем будущее в скрытом виде значит. метод чистого опыта ставить на „метафизическую почву“. Дело истинного последователя теории чистого опыта — регистрировать каждую отдельную fazu истории вида или индивида...“ (Л. И. Аксельрод-Ортодокс, Сборник „Против идеализма“, „Вещи в себе — не пустяки“, стр. 226).

„А раз не принимается во внимание момент развития, то вполне естественно, что отношение между причиной и следствием становится эмпириокритицисту ясным только тогда, когда исчезает промежуток времени, т. е. тогда, когда причина перестает существовать и растворяется в следствии... Совершено понятно, при таком взгляде на причинность эмпириокритицизму ничего не остается, как описать совершившееся. Эмпириокритицизм только этого и требует“ (там же, „Мещанский мистицизм“, стр. 142). Много путаницы было внесено тем, что эмпириокритицизм выдавал как за великое открытие введение понятия „функциональное соотношение“, что избавляет якобы от „фетишизма“, выражений вроде „необходимость“, „закон“ и поясняет это тем, что в некоторых случаях функциональное огношение может быть выражено точной математической формулой. Ленин вскрывает объективный смысл этой путаницы. „Действительно важный теоретико-познавательный вопрос, разделяющий философские направления, состоит не в том, какой степени точности достигли наши описания причинных связей и могут ли эти описания быть выражены в точной математической формуле,— а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы или свойства нашего ума, присущая ему способность познавать известные априорные истины и т. п. Вот что бесповоротно отделяет материалистов Фейербаха, Маркса и Энгельса от агностиков (юмистов) Авенариуса и Маха“ (Ленин, т. X, стр. 129). Что не в степени точности наших познаний тех или иных причинных связей суть дела, лучше всего доказывается практикой ма-хистов; в этом отношении очень любопытное явление представляет собой статья Эдгарда Цильзеля („Naturwissenschaften“, 1927, Heft 12, стр. 280), посвященная кризису закона причинности. Он сначала повторяет то, что хорошо известно, именно, что Мах „с особенной настойчивостью“ от-

вергал „обыденное представление о причинности“ и настаивал на том, что законы связывают состояния и процессы, наблюдаемые в природе как функции. Далее Цильзель поясняет, что функциональная зависимость вполне симметрична: если A есть функция B , то и B есть функция A . „Обыденная“ же причинная связь по необходимости асимметрична в данном явлении, выделенном из общей связи, одна сторона есть причина, другая — следствие. Все это поясняется примерами: „Данному расстоянию планеты от Солнца соответствует по третьему закону Кеплера определенное время обращения, и наоборот, каждому времени обращения соответствует определенное расстояние планеты от Солнца. Любому числу элементарных зарядов, по закону Мозли, соответствует определенная частота колебаний испускаемых рентгеновых лучей. И наоборот, каждой частоте рентгеновского спектра соответствует определенное число единиц заряда в ядре атома. Что является зависимым и что независимым, — нельзя узнать на основании данного закона“.

Какой смысл этих глубокомысленных рассуждений? Здесь молчаливо отрицается объективное существование атомного ядра, планеты и т. д., так как иначе разве можно было сомневаться, что частоты рентгеновского спектра определяются зарядом ядра, и никак не наоборот, или разве может ядро или электрические заряды возникнуть под влиянием испускаемой данным атомом лучистой энергии, или разве может время обращения планеты создать определенное расстояние ее (планеты) от Солнца? Таким образом как и раньше, так и в наше время, последователи Маха отрицают объективную реальность мира, а поэтому они вынуждены отрицать и объективно существующие закономерности — причинные связи. Но мы знаем, что „в отдельных местах своих сочинений Мах, которого грех было бы обвинить в последовательности, нередко „забывает“ о своем согласии с Юмом и о своей субъективистской теории причинности, рассуждая „просто“ как естествоиспытатель, т. е. со стихийно материалистической точки зрения“ (Ленин, т. X, 129).

Точно так же и современные махисты „забывают“, чему их учитель учил о законе причинности, и признают принцип причинности для динамической закономерности, но только не признают его в отношении статистических законов. Ход этой мысли (или недомыслия) мы можем выяснить, разобрав, постановку задачи, хотя бы в вопросе о движениях каждой отдельной молекулы.

В любом вопросе молекулярной физики мы предполагаем, что движение каждой молекулы причинно обусловлено, но так как мы эти закономерности не можем непосредственно учитывать и так как кроме законов движения молекул, которые мы предполагаем известными, нам еще требуется, для полного решения задачи, точно знать начальные положения и скорости всех молекул, так как, далее, этого мы не знаем, — то нам и необходимо прибегать к статистическим подсчетам: в зависимости от различных начальных условий самый характер движений, определяемых точными законами динамики, может очень сильно изменяться.

Совершенно ясно, что в статистическом результате совершенно слажены те отдельные процессы, которые происходят с каждой отдельной молекулой и которые, тем не менее, своим переплетением и опре-

деляют получаемый статистический результат. Но так как эти отдельные процессы не видны в общем результате, то монист, верящий только в свои ощущения, сомневается: а существуют ли на самом деле эти составные части общего процесса? И если существуют, то почему эти составные части подчиняются закону причинности? В этом суть приведенного выше рассуждения Шрёдингера. На это можно, прежде всего, возразить, что в опытах Блаккета (1922 г.), т. е. за семь лет до опубликования мыслей Шрёдингера, с помощью метода Вильсона на кинематографической ленте были сняты моменты столкновения α -частиц с атомами азота, причем на этих фотографиях было констатировано, что для движения осколков, получающихся в результате одного столкновения, подтверждаются основные законы механики, следовательно, мы имеем непосредственное подтверждение того, о чем думали все действительно крупные мыслители, создавшие статистику молекулярных процессов.

Можно с уверенностью сказать, что нет ни единого факта, который заставлял бы нас видеть за спиной статистической закономерности наличие того, что Шрёдингер называет абсолютной случайностью, т. е. какое-либо отрицание причинной связи. Все спасение Шрёдингера в том, что в физике еще много неразгаданного, много непознанного и что в области непознанного можно, с одной стороны, довольно безнаказанно фантазировать, а с другой,— ввиду сложности процессов, происходящих внутри атома, можно еще довольно долго ждать, пока новые факты вскроют все недочеты излюбленной Шрёдингером теории.

Мы отнюдь этим не хотим сказать, что работы Шрёдингера нужно целиком отвергнуть. Весьма возможно, что многие выводы из его теории сохранятся, но поскольку в этой теории ставится умышленно барьер, запрещающий рассматривать движение электронов в атоме, можно заранее сказать, что это — крупный недочет теории, и в этом смысле эта теория есть определенный шаг назад по сравнению с теорией Бора.

Как бы в подтверждение развиваемой нами точки зрения другой модный теоретик Мизес, который претендует на то, что ему удалось философски обосновать теорию вероятностей, признается, что нет принудительных оснований для отказа от закона причинности, но ... „закон причинности, в случае статистических законов, идет на холостом ходу“ (к этому пришел, как мы видели, и Шрёдингер с его милостивым разрешением на практике пользоваться законом причинности).

Рассмотрим вкратце аргументацию Мизеса. Мы увидим опять целый ряд непоследовательностей и опять увидим, что ничего нового, заставляющего как-то иначе посмотреть на статистическую закономерность, не случилось. С одной стороны, Мизес заверяет, что, по существу, нет никаких явлений, которые принудительно заставляли бы нас отказаться от закона причинности. „Необходимо обратить внимание на одно обстоятельство,— говорит он,— никогда речь не шла о противоречии между рядом наблюдений и классической теорией, никогда мы не были вынуждены говорить, что при каком-либо единичном процессе был опровергнут какой-либо закон детерминистической физики. Одно такое

предположение было сделано за последние годы в известной работе Бора, Крамерса и Слатера, но скоро оно было отброшено, как необоснованное. Систематическая теория, которую я разрабатываю вот уже более чем десять лет, хотя она и открывает широкий простор для индетерминизма, все-таки не знает иных форм отказа от детерминистической физики, кроме того, что эта детерминистическая физика вынуждена итти в известных случаях на холостом ходу и потому ее недостаточно для решения задач“ (R. v. Mises, „Die Naturwissenschaften“, 14 Febr. 1930). Но тот же Мизес в статье от 24 октября 1930 г. („Naturwissenschaften“) уже утверждает другое.

„Положение о том, что причина идет перед следствием, что она ему предшествует, несомненно, проистекающее из наивных воззрений и принимаемое философами как нечто непосредственно очевидное, не находит себе более места в точных науках о природе“ (разрядка наша — A. T.).

Предполагать, что в феврале 1930 г. Мизес еще не знал новейших достижений естествознания, которые дошли до него только в октябре того же года, едва ли кто решится. Но зато в этой второй статье Мизес с полной откровенностью вскрывает, откуда он почерпнул свою премудрость. „Между той порой,— говорит он,— когда всякое естественно-научное объяснение во всех случаях сводилось к движению атомов, и нашим временем находится пора 'великой просветительной работы физика и философа Эрнста Маха, которая после короткого забвения теперь опять начинает проявляться в действии в самом широком масштабе. Всеобщая теория относительности выросла из взглядов Маха на принцип инерции, а при возникновении новой квантовой механики путеводной нитью были идеи Маха о том, что при построении понятий необходимо ограничиваться только отношениями между тем, что доступно наблюдению“. Надо отдать справедливость Мизесу он вскрыл всю тайну современных теоретиков!

Однако едва ли не самое поучительное читаем мы у Мизеса в заключительной части его статьи. „Если последовательное применение статистических положений в физике приводит к отказу от детерминизма (!!! A. T.) (о чем, кстати сказать, все великие основатели статистического метода в физике никогда не помышляли), т. е. к отказу от признания всеобъемлющего значения закона причинности, то это вовсе не значит, что в сколько-нибудь заметной области нашей практической деятельности что-то должно измениться. Теперь, как и раньше, Земля остается в виде диска, и сохраняется в силе закон, что каждому изменению соответствует своя причина, причем все это остается в силе не только в области повседневной жизни практика, но и почти во всех поступках и сопротивлениях ученого, какие он предпринимает в процессе исследования“.

Если в последней, подчеркнутой нами, фразе вычеркнуть слово „почти“, то с Мизесом можно согласиться, так как эти слова бывают его же самого! Какой же, спрашивается, объективный смысл всей хитроумной „теории“ Мизеса? Отказ от закона причинности нужен для обработки буржуазного общественного мнения. Если железная цепь причин и

следствий приводит к пролетарской революции, то теоретика, руководящегося теорией „только чудо меня спасет“¹, конечно, встречает в буржуазном обществе живейший отклик, в какой бы области науки он ни проповедывал. Но, с другой стороны, попробуйте убедить такого напуганного революцией буржуа, что когда у него на трамвайной площадке исчез из кармана кошелек, то это всего только следствие крушения детерминизма в современной физике. Попробуйте убедить его в этом и тогда увидите, что он найдет способ прекратить проповедь подобной теории с университетских кафедр.

К чему же приводит теория Мизеса?

К новому расцвету теории двойственной истины: на практике и в лаборатории при исследовательской работе мы — детерминисты, но зачем нам оставаться детерминистами в философии и в возвышенной теории, непосредственно не связанной с техникой — с производством.

Что отвечает на это материалист?

„Разве это не обскурантизм, когда чистая теория заботливо отгораживается от практики? Когда детерминизм ограничивается областью „исследования“, а в области морали, общественной деятельности, во всех остальных областях кроме „исследования“, вопрос предоставляется „субъективной“ оценке. В моем кабинете, — говорит ученый педант, — я детерминист, а о том, чтобы философ заботился о цельном, охватывающем и теорию и практику, миросозерцании, построенном на детерминизме, нет и речи. Мах говорит пошлости, потому что теоретически вопрос о соотношении свободы и необходимости совершенно ему неясен“ (Ленин, т. X, стр. 157).

Таким образом в смысле оценки статистических процессов у новейших теоретиков ровным счетом никаких новых аргументов не прибавилось к тем, которые были известны „добрым старым маистам“. Недоразумение с квантовыми законами, как мы выяснили, заключается в том, что, умышленно желая исключить „материалистическую метафизику“ в виде орбит электронов в атоме, создали такую теорию, которая привела к принципу „индетерминированности“ (неопределенности), согласно которой нельзя определить одновременно и положение электрона и его скорость.

Словом, в теории с самого начала отмахнулись от ряда вопросов, а потом к удивлению заметили, что теория не дает ответа на те вопросы, на которые заранее отказались давать ответ. Под эту теорию теперь подводят и якобы экспериментальное основание. Почему, в самом деле, это так? Что мы должны сделать, чтобы заметить электрон в атоме? Мы должны осветить атом светом, но обычный свет для этого груб: у него длины волн много больше, чем ядро и электроны и предполагаемые орбиты. Но это не беда: у нас есть проникающее излучение с очень короткой волной, с такой волной, которая, будучи применена в качестве орудия исследования, должна была бы обнаружить электрон на его орбите. Но тут-то и возникает новая беда: у проникающего излучения „кванты“ лучистой энергии настолько велики, что, как только

¹ Слова Лепорелло, переодетого в костюм Дон-Жуана и окруженного врагами последнего

квант попадает на электрон, сейчас же происходит так называемый эффект Комптона: энергия кванта преобразуется в квант с меньшим запасом энергии, а электрон, кружившийся на орбите, срывается и улетает. Следовательно, в тот же момент, когда мы его увидели в какой-то точке его орбиты, орбита разрушена, электрон с нее навсегда улетел. И как нам узнать его скорость на орбите, когда процесс исследования, т. е. освещение короткими волнами, нарушает самый изучаемый нами процесс? Если же мы выберем теоретически такую лучистую энергию, которая не даст эффекта Комптона и которая могла бы несколько раз показать нам электрон на орбите, то вследствие грубости (большой длины) этих волн нельзя было бы определить с точностью место электрона на орбите. На этой основе даже такой большой физик, как Бор, стал развивать идеалистические взгляды о том, что объект существует постолку, поскольку существует наблюдающий его субъект, который в процессе наблюдения самым фактом наблюдения его изменяет, и что, следовательно, мы не знаем, как происходят процессы сами по себе тогда, когда мы их не изучаем, и существует ли, вообще, что-либо, что не служит объектом для наблюдающего его субъекта.

Этот идеалистический лепет, представляющий попытку, искусственно созданное в угоду махистской теории познания, „узкое место“ теории квантов изобразить как неизбежную границу нашей науки, за которой на нас надвигается мистика беспричинности, представителями меньшевистующего идеализма изображается как новое препятствие, которое, как они говорят, можно преодолеть только с помощью диалектического материализма. Что преодолеть идеализм целиком и полностью можно только с помощью диалектического материализма,— это совершенно верно, но чтобы в вопросах о принципиальной наблюдаемости, связанной с принципом индетерминированности, выросла перед нами какая-то новая методологическая проблема,— это может вызвать только улыбку. Послушаем т. Гессена: „В принципе неопределенности Гейзенберга с поразительной четкостью выступает ограниченность механического принципа причинности и необходимость введения взаимодействия. В классической физике принципиальная возможность измерения состояния с любой степенью точности скрыто предполагает, что влияние измеряющего инструмента на измеряемый объект в принципе может быть сведено до нуля“¹. Мы должны порадовать т. Гессена, что то взаимодействие, о котором он говорит, не только предполагалось, а и принималось в расчет даже теми из физиков, которые стояли на самом деле на чисто механической точке зрения. Механицизм состоит совсем не в этом: во всех сколько-нибудь точных калориметрических измерениях, еще со временем Реньо, учитывается влияние самого измеряющего термометра, не говоря уже о мешалках. Когда мы включаем в цепь амперметр, мы тоже увеличиваем сопротивление цепи и изменяем силу того тока, который хотели измерить.

Все это давно хорошо известно, и принципиально методологически в этом отношении задача, которая стоит перед физиками в области микрокосмоса, ничем не отличается от тех, которые были благополучно

¹ Предисловие к книге А. Гааз, Волны материи.

³ Тикирлез, Введение в теоретическую физику.

решены много лет назад. Другое дело, что мы сейчас, в особенности пока еще в нашем воображении (так как опыты, о которых у нас шла речь, с освещением атома и милостью Шредингера „в бозе почивающих“ электронных орбит,— пока что только воображаемые опыты), не можем в этих процессах отделить измеряемое от измерителя. Не забудем, что руководящие теории в этой области, как мы видели, умышленно построены так, чтобы исключить возможность ответа на поставленные вопросы.

Наконец, разве мы можем ставить границы экспериментальному искусству? Разве до тех пор, пока Вильсон, Рутефорд, Перрен, Регенер и др. не показали нам действие отдельных атомов, атом не считался принципиально ненаблюдаемым? Разве не считали мы, что предел разрешающей способности микроскопа и телескопа обусловлен длиной волны ультрафиолетового света? И в относительном смысле этот предел существует и сейчас, т. е. именно в том смысле, что этим методом действительно нельзя увеличить разрешающую способность оптического прибора. Но в 1920 г. Майкельсон присоединил к телескопу интерферометр, и разрешающая способность этого нового сложного инструмента перешагнула, шутя, за все эти пределы. Тов. Гессен не решается считать

и п индетерминированности (неопределенности) абсолютной границей познания, но все-таки рассматривает его „как предел, до которого в настоящее время познана материя“. Мы же продолжаем думать на основании фактов, что этот „принцип“ есть несовершенство, изъян, в общем, стройной математической теории, который получился благодаря руководившей ее авторами махистской философии, стремящейся вычеркнуть из теории „материалистическую метафизику“.

Принцип „индетерминированности“ (или неопределенности) есть не предел, до которого в настоящее время познана материя, а есть искусственная преграда, поставленная антинаучной методологией для того, чтобы задержать развитие атомной физики, выключив из нее ряд очередных вопросов. Это—не что иное, как добровольная капитуляция перед стоящими на пути трудностями. В этом отношении на правильной позиции стоит т. Ю. Шайн в статье „Метафизика физики“ (в № 2 „Проблемы марксизма“, стр. 100—101).

Более того, т. Гессен только слегка поправляет физиков, собравшихся в поход против детерминизма. „Случайность, — говорит он, — есть анти-теза не причинности, а необходимости“, а потому, мол, А. Гааз неправ, когда он говорит о недетерминированности — случайности в теории квантов света¹.

Беда заключается только в том, что для материалиста-диалектика причинность, необходимость и закономерность — синонимы! В самом деле, вот что мы читаем у Ленина: „Что касается Энгельса, то ему не приходилось, если я не ошибаюсь, специально по вопросу о причинности противопоставлять свою материалистическую точку зрения иным направлениям. В этом для него не было надобности, раз он по более коренному вопросу об объективной реальности внешнего мира вообще отме-

¹ А. Гааз. Волны материи, 1930 г. Предисловие т. Гессена, стр. XIX

жевал себя вполне определенно от всех агностиков. Но кто сколько-нибудь внимательно читал его философские сочинения, тому должно быть ясно, что Энгельс не допускал и тени сомнения насчет существования объективной закономерности, причинности, необходимости природы" (Ленин, т. X, стр. 125, разрядка наша—А. Т.). „Признание объективной закономерности, причинности, необходимости в природе совершенно ясно у Энгельса наряду с подчеркиванием относительно характера наших, т. е. человеческих, и приблизительных отражений этой закономерности в тех или иных понятиях" (там же, стр. 127).

„Признавать необходимость природы и из нее выводить необходимость мышления есть материализм. Выводить необходимость, причинность, закономерность и пр. из мышления—есть идеализм" (там же, стр. 135). Таким образом ясно, что для материалиста-диалектика причинность, необходимость и закономерность—сионимы.

Сторонники деборинского учения (а не марксистско-ленинского) об антитезе случайности и необходимости или случайности как объективной категории фактически впадают в метафизику, мало чем отличающуюся от высмеянной Лениным метафизики Петцольда. „Однозначной определенности психических явлений,— поучает нас И. Петцольд далее,— быть не может: роль фантазии, значение великих изобретателей и т. п. создают тут исключения, а закон природы или закон духа не терпит... „никаких исключений" (Ленин, т. X, стр. 65). „Перед нами чистейший метафизик, который понятия не имеет об относительности различия случайного и необходимого" (Ленин, т. X, стр. 132, разрядка наша—А. Т.). Вот этим Ленин не в бровь, а в глаз бьет сторонников объективной случайности.

Петцольд противопоставляет деятельность великих людей, заключающую в себе элемент „случайности", как нечто противоречащее детерминизму. Он, как и современные нам деборинцы и младодеборинцы, не поняли диалектики случайного и необходимого, на которую указывает в приведенных словах Ленин и которую подробно изложил Энгельс в „Диалектике природы".

Только метафизик, неспособный к диалектическому мышлению, противополагает друг другу случайность и необходимость, как застывшие неподвижные категории, забывая, что „случайное" в одной связи, становится необходимым в другой. При вычислении давления газа, заполняющего какой-либо сосуд, отступления от средней плотности „случайны" не только потому, что, не зная положений и скоростей всех молекул в какой-либо момент, мы не сможем узнать, где, когда и какое произойдет отступление от средней плотности, но и потому, что это отступление несущественно при подсчете давления газа, но эти же самые отступления от средней плотности объясняют синий цвет неба,— они являются основой закономерности и постольку в этой связи они не случайны. Теперь спрашивается: а чем одно и то же отступление от средней плотности, являющееся „случайностью" в одном ряду, отличается от самого себя, когда мы его же рассматриваем как необходимое звено другого причинного ряда?

В целом ряде случаев — в измерительных инструментах, имеющих так называемое электромагнитное затухание, немагнитные вещества

часто, как оказывается, содержат примеси железа, вследствие чего проходит намагничение, вносящее ошибки в измерение. Это— „случайность“, потому что на нее не рассчитывали и потому что эта „случайность“ есть помеха и, кроме того, в других образцах металла этой примеси нет. Но допустим, что мы изучаем магнитные свойства этих веществ, тогда то же самое намагничение, которое только что явилось неприятной помехой в работе и притом „случайной“, поскольку изучаемое явление могло протекать и без него, теперь, когда мы изучаем магнитные свойства вещества, является звеном в необходимой цепи. Спрашивается, а чем объективно различается намагничение, допустим, совершенно одинаковое, в этих приведенных нами двух примерах, когда оно в первом случае было случайной и неприятной помехой, и во втором, когда оно было желанным и необходимым результатом? И разве в этих обоих случаях намагничение не протекало по одним и тем же законам, разве и в случае, когда это намагничение было случайным, оно не было строго необходимым следствием независимо от нашего сознания существующих законов природы?

Переходим теперь к вопросу о случайности, так как этот вопрос играет громадную роль в выяснении статистической закономерности.

V. Случайность и необходимость.

Говоря о случайности, обычно смешивают две вещи, придавая этому понятию то один, то другой смысл. Прежде всего, мы случайными называем те явления, причины которых мы полностью не знаем ввиду их сложности, большого их числа и неясного для нас их сплетения. Кроме того, случайным мы называем то, что в данной изучаемой нами связи является несущественным.

Тов. Гессен утверждает, что только теперь, при появлении на первом плане статистической закономерности в физике, стали различать между существенными и несущественными закономерностями, а что „динамическая закономерность не делает различия между существенными и несущественными закономерностями“. Если бы это было так, то, стало быть, в очень недалеком прошлом не существовало вообще никаких физических исследований. В самом деле, ведь любое явление тысячами нитей связано со всем окружающим миром. Когда мы хотим установить, найти какую-либо определенную закономерность, мы как раз выделяем все наиболее существенное. (Это нам, как правило, гораздо легче удается в теории, чем на опыте.) Вот почему мы иногда так долго бьемся над тем, что опыт не дает нам того, что требует теория, или, как мы говорим, „опыт не удается“. Все дело в том, что в этих случаях, как правило, мы не сумели устраниТЬ того, что нам казалось несущественным, и не заметили присутствия этого несущественного, а оно, как оказалось, весьма существенным образом повлияло на результат. Это ведь азбука исследовательской работы, и никакого тут открытия ни Гейзенберг, ни Шрёдингер, ни их толкователи тт. Гессен и Максимов не сделали.

Теперь с легкой руки как деборинской школы, так и младодеборинской, вошло в обиход считать, что подобные, приведенные нами, при-

меры и определения случайности представляют собой „механизм“, „восходящее к Плеханову и еще дальше — к Курно и Спинозе понимание случайности как пересечения двух причинно-следственных рядов, повторенное т. Бухарином“ (Э. Кольман, К вопросу о динамической и статистической закономерности, „Под знаменем марксизма“, № 1—2, 1931, стр. 215.) Однако при этом забывают, что Энгельс таким же точно образом определял случайность. Вот, что мы можем прочесть в письме Энгельса к И. Блоху от 21 сентября 1890 г. „Тут имеется налицо взаимодействие всех этих моментов, в которых, в конце концов, экономическое движение, как необходимое, прокладывает себе дорогу сквозь бесконечную толпу случайностей (т. е. вещей и событий, внутренняя связь которых настолько отдалена или настолько трудно определима, что мы можем забыть о ней, считать, что ее не существует)“ (разрядка наша — А. Т.).

Кажется, яснее трудно сказать. Но именно теперь, искажая взгляды Энгельса, его выдвигают как автора деборинской объективной, а по Шрёдингеру — даже абсолютной случайности, т. е. „теории“ абсолютного чуда.

Далее в этом же письме Энгельс излагает и теорию перекрещающихся причинных рядов. „История делается таким образом, что конечный результат получается от столкновения множества отдельных воль, причем каждая из этих воль становится тем, чем она является опять-таки благодаря массе особых жизненных обстоятельств (т. е., следовательно, причинно обусловлена — А. Т., разрядка наша). Таким образом имеется бесконечное количество перекрещающихся сил, бесконечная группа параллелограмов сил (вот механизм с точки зрения деборинцев и младодеборинцев! — А. Т.), и из этого перекреивания выходит один общий результат — историческое событие“.

Таким образом в этой части Плеханов стоял на той же точке зрения, что и Энгельс, и ошибки Плеханова лежат не здесь. Во-первых, все события детерминированы, но связь между отдельными рядами может быть настолько слаба, что ею можно пренебречь, и кроме того, он может быть трудно определима. Вытекает ли отсюда отрицание случайности или ее роли в истории и естествознании? Или вытекает ли отсюда фатализм? Разберем эти вопросы. Прежде всего, все эти сомнения вытекают из того, что деборинская школа не поняла простого смысла возражений Энгельса против взглядов материалистов XVIII в. на случайность. Стоя на позиции детерминизма, материалисты XVIII в. и их современные последователи отрицают случайность, полагая, что газовая туманность, из которой возникла солнечная система, была так устроена, что из нее вытекают все события до числа горошин в том или в другом стручке включительно. Энгельс совершенно правильно указывает, что все это только фраза: „Ни в одном из этих случаев не может быть и речи об изучении причинной цепи, ни в одном из этих случаев мы не двигаемся с места. Так называемая необходимость остается простой фразой, благодаря чему и случай остается тем, чем был.“

Do тех пор, пока мы не можем показать, от чего зависит число горошин в стручке, оно остается случайным, а от того, что нам

скажут, что этот факт предвиден уже в первичном устройстве солнечной системы, мы ни на шаг не подвигаемся дальше» (курсив наш—А. Г.) (Энгельс, Диалектика природы, стр. 193).

Таким образом дело заключается в следующем: Энгельс совершенно правильно указывает, что, пока мы не можем определить, отчего зависит число горошин, — это для нас случайное событие. Но, более того, если бы мы занялись прослеживанием цепи причинных сцеплений для одного только стручка, то наука превратилась бы в игру, „ибо этот самый стручок имеет еще бесчисленные другие индивидуальные — *каждые* имеющиеся у него свойства” (разрядка наша—А. Г., там же). „Таким образом с одним стручком нам пришлось бы проследить больше каузальных связей, чем в состоянии решить их все ботаники на свете”.

Что все это значит? Одним голым отрицанием случайности ее не уничтожишь, пока мы не обнаружим причинной цепи, явление для нас остается случайным; более того, сколько бы мы ни распутали причинных цепей для явлений, „каждые имеющиеся у него свойства”, всегда останется неизмеримое количество явлений, для которых причинная связь еще не найдена или которые между собой так слабо связаны, что об этой связи можно забыть. Где здесь обоснование теории случайности как объективной категории? И неужели всякий раз, когда для явления, считавшегося нами случайным, бывает найдено строго причинное объяснение, самое явление объективно в чем-нибудь должно измениться?

Переходим теперь к вопросу о фатализме. Если,—говорят деборинцы старой и новой формации,—все явления необходимы, т. е. детерминированы, то, стало быть, все предопределено, и остается только плыть по течению. Такие „рассуждения” показывают полное непонимание диалектического превращения необходимости в свободу. „Гегель первый правильно понял и отношение между свободой и необходимостью. Для него свобода — это понимание необходимости. Необходимость слепа лишь постольку она непонята.

Свобода заключается не в воображаемой независимости от законов природы, а в познании этих законов и в возможности поэтому паномерно пользоваться ими для определенных целей. Это верно как о законах внешней природы, так и о тех, которые регулируют физическую и духовную жизнь самого человека, — о двух классах законов, которые мы можем отделять друг от друга разве только в идее, но не в действительности. Поэтому свобода воли означает не что иное, как способность принимать решения со знанием дела. Следовательно, чем свободнее суждение какого-нибудь человека по отношению к известной проблеме, с тем большую необходимость будет определено содержание этого суждения; а, наоборот, вытекающая из незнания неуверенность, которая выбирает якобы произвольно между многими различными и противоположными решениями, этим именно доказывает свою несвободу, свою подчиненность объекту действительности, который она должна была бы как раз подчинить себе” (Энгельс, Антидюринг, стр. 103, подчеркнуто Энгельсом). По поводу этого отрывка Ленин со всей ясностью указывал, что „Энгельс не сомневался в существовании „слепой необходимости”. Он признает существование необходимости, не познанной человеком”. (Ленин, т. X, стр. 155).

Таким образом Энгельс доказал, что как раз слепая необходимость, слепой случай ведет к фатализму, а не наоборот. Далее, в цитированном нами письме Энгельса говорится о перекрещивании воли отдельных людей, которое не приводит к осуществлению их желаний, „но сливаются в нечто общее, в один результат, из чего не следует заключать, что эти воли равны нулю. Наоборот, каждая воля вносит свою долю в общий результат и постольку включена в него“. Мы сделали это отступление потому, что вопрос о „случайном“ и необходимом играет огромную роль в выяснении специфических отличий закономерности статистической от динамической.

Прежде всего, оба вида закономерностей основываются на одном и том же признании вне нас существующей в природе „причинности, необходимости, закономерности“. Не существует никаких событий беспричинных. Все события детерминированы. Чем же тогда отличается статистическая закономерность? Рассмотрим прежде всего какой-либо простейший процесс в газе. Известны ли нам, скажем, в любом кубическом сантиметре воздуха, находящегося в нашей комнате, положения и скорости молекул в любой данный момент? Конечно, нет. Но, как показывает кинетическая теория газов, мы все-таки можем, предполагая, что к отдельным молекулам приложимы все законы механики, вывести целый ряд законов, оправдывающихся на опыте и притом таких, которые являются полярной противоположностью законам механики, на которых они все-таки основываются. Вот как обстоит дело с диалектикой, стоящей на ногах, а не на голове!

Именно, уравнения механики обладают свойством обратимости, а кинетическая теория в руках Больцмана и Смолуховского привела к стройной теории необратимых процессов. Откуда получилось это новое качество? Оно получилось потому, что при рассмотрении взаимодействия громадного количества молекул для решения механической задачи требуется знание положений молекул и их скоростей в какой-либо данный момент, т. е. то, что не входит в уравнения механики. Так как ни положений, ни скоростей молекул мы не знаем, то с помощью статистического метода мы выводим те наиболее вероятные следствия, которые могут получиться из этих взаимодействий при условии, что эти скорости и положения молекул могли быть любой комбинацией из всего огромного числа возможных при данных условиях.

Более того, если бы мы умели определять положение и скорость любой молекулы и в любой момент и имели бы достаточно досуга, чтобы проследить причудливейшую траекторию, которую каждая молекула проделает в данном объеме газа, то мы все-таки для решения ряда вопросов прибегали бы к статистическому подсчету. Почему?

А по той простой причине, что, проследив подобную индивидуальную историю всей группы молекул, заключающихся в данном куб. сантиметре, мы не сможем ничего сказать о том, что произойдет с другой группой, у которой начальные условия будут иные, так как при небольших даже изменениях в начальных условиях взаимодействия молекул изменяются самым решительным образом: те молекулы, которые столкнулись, могут пролететь мимо, не задев друг друга, и наоборот. Словом, для того чтобы найти те закономерности, которым подчиняется сово-

купность молекул, пришлось бы проследить громадное количество отдельных „индивидуальных“ скоплений молекул и подвергнуть их длительному сравнительному изучению, на что, вероятно, не хватило бы продолжительности жизни всех физиков, когда-либо существовавших на земном шаре, предполагая, что все они только этим занимались.

Вот в этом кроется ошибка, которая была у философов-материалистов в XVIII в., в том числе и у Лапласа. Они думали, что если бы знать положение всех атомов и их скоростей и законы взаимодействия, то можно было бы знать все будущее и узнать, в том числе, почему в данном стручке четыре горошины, а не пять. Они не понимали и не могли в то время знать о диалектике динамических и статистических закономерностей, как будто, исключающих друг друга. А на деле динамические закономерности, дополненные условием „хаотического“ распределения начальных данных, т. е. начальных положений и скоростей молекул, превращаются в законы статистические. Причем это „хаотическое“ распределение не заключает в себе ничего мистического: просто отдельные частицы практически можно считать независимыми друг от друга.

Все это верно, но вот еще в чем дело: в лапласовой туманности данные атомы, составляющие данный стручок, могли быть расположены не так, как они фактически были расположены, и все-таки стручок мог вырасти с четырьмя горошинами, а не с пятью. Все дело в том, что любое макроскопическое событие, например наличие данного числа горошин, перемещение данной частицы в брауновском движении и т. д., может осуществиться с помощью огромного числа комбинаций скоростей, положений и движений молекул, из которых составлен или может быть составлен данный макроскопический объект. Поэтому знание чрезмерного числа подробностей судьбы каждой индивидуальной молекулы и ее траектории не даст ответа на общий вопрос, когда такое макроскопическое событие вообще происходит. На этот вопрос мы получаем ясный для нас ответ, исследуя статистическим методом „поведение“ скоплений молекул и исходя при этом из предположения, что молекулы могут иметь любые положения и любые скорости в известных, конечно, пределах. Такое изучение приводит нас к открытию того, что есть общего во всех подобных совокупностях молекул, и эти законы, хотя они указывают на то, что бывает в огромном большинстве случаев, но не всегда, все-таки имеют для нас большее значение, чем подробная история какой-либо отдельной индивидуальной молекулы. Дальнейшее развитие статистического метода, изучение так называемых флюктуаций, привело нас к тому, что мы не только можем определить наиболее вероятное состояние в какой-либо изучаемой нами системе, но и в состоянии предсказать, какое мы будем наблюдать наиболее вероятное отступление от этого наиболее вероятного состояния, если мы возьмем наудачу какое-либо отдельное измерение, отдельное наблюдение.

Но если нам для статистического исследования совершенно не нужна индивидуальная „история“ отдельных элементов, отдельных молекул, то отсюда вовсе не следует, что для этих составных частей, составных процессов, из переплетения которых слагается данный статистический результат, не имеют места строгие динамические закономерности. Только

злостный махист может говорить: раз я этих закономерностей не вижу, и раз они мне не нужны для моих выводов, то их все нет.

Поясним сказанное, быть может, грубым примером. Известно, что малярия распространяется укусами комара „*Anopheles*“. Каждое заболевание,—разве оно не „случайно“? Надо, чтобы данный человек проходил мимо данной лужи, над которой летал данный комар, который должен заметить данного человека, который, в свою очередь, не должен заметить этого комара. Попробуйте проследить всю историю человека и комара и найти причины. А все это ведь строжайше детерминировано. Но, спрашивается, надо ли все это изучать и распутывать бесконечно сложные причинные ряды для борьбы с малярией? Дело решается много проще: в малярийной местности заливают лужи керосином и уничтожают комаров, и всей этой тяжелой болезни конец! Таким образом даже для радикального решения задачи совершенно не важно знать индивидуальные истории развития отдельных комаров, надо знать общие законы, определяющие их развитие, для которых совершенно не важно знание родословных отдельных комаров.

Если глубже вникнуть в любое явление природы, то мы увидим самое причудливое переплетение динамических и статистических закономерностей, и разделить эти два вида закономерностей друг от друга мы можем только в процессе исследования, так как в действительности они образуют иерархическое единство. Надо только помнить, что никакого противоречия детерминизму статистическая закономерность не представляет, наоборот, она предполагает существующую в природе объективную причинную связь.

Разобрав сущность идеалистических извращений проблемы случайного и необходимого, рассмотрим в общих чертах, в чем заключаются ошибки механицизма в этой области и где они проявляются. „Главный недостаток всего предшествующего материализма, до фейербаховского включительно, заключается в том, что предмет, действительность, чувственность рассматривается только в форме объекта или в форме созерцания, а не как чувственно человеческая деятельность, не в форме практики, не субъективно“ (К. Маркс, Тезисы о Фейербахе, разрядка Маркса).

Поэтому механический материализм, стоявший твердо на позиции детерминизма, но в такой же мере сохранявший свой созерцательный характер, неизбежно приводил к фатализму.

Только диалектический материализм, объясняющий, как понятая необходимость превращается из слепой необходимости в свободу, и показывающий, что „чем свободнее суждение какого-нибудь человека по отношению к известной проблеме, с тем большей необходимостью будет определено содержание этого суждения“ (Энгельс, Антидюринг, стр. 104, изд. 1928 г.), может дать возможность не только объяснять мир, но и изменять его.

А чтобы эта возможность стала действительностью,—нужна революционная практика. „Совпадение изменения обстоятельств и человеческой деятельности или самоизменение может быть достигнуто и рационально понято только как революционная практика“ (Маркс, Тезисы о Фейербахе, тезис III). Вот почему механицизм, будучи, по существу,

антидиалектическим и не принимая вследствие этого диалектического учения о превращении необходимости в свободу и возможности в действительность, в этих вопросах прямой дорогой ведет к всевозможным „теориям“ самотека и всевозможных врастаний, в том числе и врастания кулака в социализм.

Именно по этой причине механицизм на данном этапе является главной опасностью. Покажем это на нескольких примерах. В „Теории исторического материализма“ т. Н. Бухарина (гл. II, „Детерминизм и индетерминизм, необходимость и свобода воли“) нет упоминания теории диалектического превращения понятой необходимости в свободу; поэтому там и не дается объяснения, почему марксизм-ленинизм как мировоззрение, основанное на детерминизме, ничего общего с фатализмом не имеет. На стр. 50 мы читаем в книге т. Бухарина следующее: „Это учение (т. е. фатализм—А. Т.) отрицает волю людей как фактор развития, чего отнюдь не делает детерминизм“. В том-то и дело, что с одним голым детерминизмом без учения о диалектическом превращении необходимости в свободу и возможности, котораядается этой свободой, в действительность мы из фаталистических выводов и таборий самотека не выскочим. А этой диалектики как раз и нет в книге „Теория исторического материализма“, почему она и служит теоретическим обоснованием правового уклона.

Далее, в статье т. Деборина („Под знаменем марксизма“ № 1—2, стр. 76, 1926) мы читаем следующее: „Поэтому возможность есть внутреннее, но обнаруживающееся, внутреннее, становящееся внешним. Например, семя есть реальная возможность дерева; стало быть, дерево в семени есть еще внутреннее, становящееся вследствие своего развития обнаружения внешним“. Или: „Нэп есть реальная возможность социализма. Социализм в нэпе есть внутренняя сторона, еще не развившаяся, но в процессе дальнейшей эволюции становящаяся внешним, т. е. осуществляющимся“.

Этот пример интересен еще тем, что элемент фатализма — самотека (социализм вырастает из нэпа также неизбежно, как дерево из семени!) тесно связан с другой ошибкой механицизма: перенесение биологических категорий — рост дерева из семени в область общественных явлений (развитие социализма).

Как надо решать вопрос о превращении возможности в действительность, было с замечательной ясностью указано т. Сталиным в его речи на XVI съезде партии: „Но возможность не есть еще действительность. Чтобы возможность превратить в действительность, надо прежде всего отбросить теорию самотека, надо перестроить (реконструировать) народное хозяйство и повести решительное наступление на капиталистические элементы города и деревни“.

Вот почему механицизм, не принимающий диалектики необходимости и свободы, возможности и действительности и правильной диалектической теории необходимости и случайности, является главной опасностью на данном этапе. Мы ограничились сейчас только теми политическими сторонами механицизма, которые связаны с механистическими ошибками в области физики, и не касались вопросов, связанных с механицизмом в экономических дисциплинах, так как это выходит за пределы той темы, которая разбирается в настоящем введении.

VI. Связи между отдельными главами физики.

Подведем теперь некоторые итоги, касающиеся связей, открытых в настоящее время, между отдельными областями физики. Между механикой и учением о звуке, оставляя в стороне физиологический процесс восприятия звука, связь установлена уже давно, и она никаких сомнений не возбуждает. Много споров вызвала противоположность между обратимыми механическими процессами и необратимыми тепловыми. Это противоречие разрешено, главным образом, благодаря работам Больцмана и Смолуховского. Суть заключается в следующем: тепловые процессы, объясняемые молекулярной механикой, не сводятся к одним только уравнениям механики. В них существенную роль играют так называемые начальные данные. Ведь во всякой механической задаче, скажем, в падении камня, задача решается не одним только уравнением движения, но и начальным положением камня и его начальной скоростью (без знания этих данных задача будет неопределенна). И однако эти начальные данные не вытекают из самих уравнений механики, и об этом никто не беспокоится, так как в каждой задаче эти данные известны.

Другое дело, когда мы рассматриваем большое число молекул и рассматриваем их совокупное действие; тогда, так как мы не имеем возможности определять эти начальные данные, приходится рассматривать большое число возможных предположений, обсуждать вероятность этих предположений и на основе этих данных, плюс уравнения механики, выводить общие законы, которые не будут следствиями одних только уравнений механики. То качественно новое, что вносится статистическими законами при подсчете начальных данных, и является самым существенным отличием тепловых явлений и, вообще, так называемых статистических закономерностей. Таким образом диалектический переход от „молярной“ механики, т. е. механики больших видимых масс, к молекулярной механике, вполне понятен: мы воочию видим, как обратимые механические процессы при рассмотрении движений большого числа молекул, в силу того, что необходимо дополнительно учитывать разные возможные способы распределения начальных данных, изменяющих самый характер взаимодействий превращаются в свою полярную противоположность, в процессы необратимые. Этому вопросу, можно сказать, в основном, решенному современной теоретической физикой, посвящены дополнительные главы настоящего курса.

В гораздо менее благоприятном положении стоит еще и сейчас вопрос о диалектическом переходе от обычной механики к электродинамике, или, как ее называл Энгельс, к „механике эфира“. Мы уже указывали на некоторые специфические особенности, отделяющие электродинамику от обычной механики. Здесь, как и в молекулярной механике, сохраняют силу уравнения механики, но, с другой стороны, те физические особенности, которые определяют собой математическое выражение кинетической энергии и потенциальной, в электродинамике уже не те, что в обычных механических системах. Это стоит в связи с тем, что в механике можно отвлечься от влияния движущихся тел на окружающую среду — эфир. В динамике электрона эта связь играет основную роль, объясняя тем качественное отличие электродинамики

от обыкновенной классической механики. Эти вопросы даны в нашем курсе на основе теории Томсона вовсе не потому, что мы считаем ее окончательным решением вопроса, а только потому, что, пока что, это есть единственная материалистическая теория, т. е. теория, пытающаяся дать картину того, что есть. Все остальные теории не делают даже попытки установить хоть какие-либо связи с законами механики. На теории Томсона мы хоть в самом общем виде можем проследить, в чем заключаются специфические особенности электромагнитных систем.

Теория Томсона дает, кроме того, возможность материалистически объяснить инерцию лучистой энергии. По Томсону кванты лучистой энергии, как мы уже говорили об этом, представляют собой замкнутые фарадеевы трубы, которые при обычных условиях соединяют между собой электроны и протоны. При быстрых движениях электрона и протона навстречу друг другу на фарадеевой трубке образуется петля, которая отрывается и движется со скоростью света. Эта петля несет с собой энергию и переносит с собой известную часть массы эфира, связанной с этой замкнутой трубкой. Таким образом эта замкнутая трубка и есть носитель электромагнитной лучистой энергии. На языке теоретиков-махистов эта энергия не имеет материального носителя, так как она локализуется, „так сказать, в пустоте“ (Френкель).

Основанием для этих рассуждений служит то, что замкнутая трубка не связана с электроном и протоном, как это имеет место в обычной материи. Это и есть качественное отличие. Таким образом квант является формой материи, качественно отличной от обычных форм материи, что и послужило поводом к тому, чтобы ему вообще отказали в материальности. И формы движения этого кванта отличаются от обычных, хотя бы потому, что такой квант может двигаться, не изменяя своей формы, только со скоростью света, тогда как трубы, соединенные с электронами и протонами, могут двигаться с любой скоростью.

В связи с этим вопросом стоит модный сейчас у астрофизиков процесс „уничтожения материи“. С точки зрения теории Томсона картина предстает следующая. Когда электрон падает на протон, то между ними остается очень короткая фарадеева трубка: мы получаем так называемый „диполь“ с очень малым моментом. Большая же часть фарадеевой трубы превращается в замкнутое кольцо, заключающее в себе в форме лучистой энергии почти всю энергию системы протон-электрон и почти всю их массу. На языке современных идеалистов это означает полное уничтожение материи: когда $+e$ -протон соединяется с $-e$ -электроном, то получается нуль.

С другой стороны, при этом освобождается энергия в форме лучистой, т. е. в форме энергии, не имеющей якобы материального носителя.

Проф. Кастерин высказал предположение, что такие осколки — короткие диполи, обломки систем электрон-протон, — составляют ту атмосферу электрона и протона, о которой Томсон говорит в своей теории электронных волн, подводящей физическую базу под теорию де-Бройля-Шредингера, о которой даже сами авторы признаются, что она физически еще не объяснена.

В настоящее время, на основе исследований проникающего космического излучения, Милликан, исходя из наблюдаемых фактов, высказал предположение, что в междузвездном пространстве происходит обратный процесс: квант лучистой энергии, налетая на диполь, получившийся вследствие падения электрона на протон, восстанавливает прежнюю систему электрон-протон. Тот же Милликан показал, что проникающее излучение более длинной волны, наблюдавшееся и изучавшееся уже несколько лет, по всем вероятностям, является следствием возникновения атомов гелия, кислорода, железа и кремния из электронов и протонов в междузвездном пространстве.

Эти данные, доказывая существующий в мире гигантский круговорот материи и энергии, подрывают в корне все рассказы о конце мира в целом и развертывают перед нами величественную картину непрерывного разрушения материи, т. е. ее превращения в кванты лучистой энергии (т. е. материи в иной форме), и такого же непрерывного ее возникновения из этих квантов. Милликан, явно испугавшись тех аргументов, какие он дал атеистам, нарочно оговаривается, что его данные противоречат только взглядам одной (!) богословской школы — школы изначального творчества, но что все эти данные нисколько не противоречат богословской имманентной школе, согласно которой творец все время творит!

Этот пример наглядно показывает, в каких жестких тисках находится в настоящее время наука в капиталистических странах.

На основании того, что было сказано о переживаемом нашей наукой кризисе, мы вынуждены с большой осторожностью относиться к современным теориям — теории квант и теории относительности. Хотя в этих теориях и заключаются здоровые зерна, но ввиду того, что авторы этих теорий руководились ошибочными методологическими взглядами, в самое содержание теорий проникли чуждые науке элементы.

Вот почему разумное использование этих теорий, основанное на применении диалектического метода, потребует длительной работы. В этих теориях идеалистические философские выводы нелегко смахнуть, как простую механическую накипь. Эти выводы успели уже в значительной степени исказить самое содержание, и так как в отдельных частях мы имеем несомненные успехи, то именно эти успехи могут заслонить те недочеты, которые заведомо поведут исследователя по ложному пути. Вот почему на протяжении всего курса мы везде указываем на опасные места, которые могут начинавшего повести по неправильному пути.

За последние годы вошло почти в привычку сильно сокращать даже в курсах введения то, что сейчас принято называть „классической физикой“. Это, конечно, большая ошибка, так как в практике научно-исследовательской работы и на заводе эти области продолжают играть руководящую роль. Вот почему мы на эту сторону обратили особенное внимание в нашем курсе. Как и всякому курсу, который является записью того, что фактически выполнялось, можно бросить немало упреков за то, что иногда большие области оказывались не затронутыми. На это можно возразить, что стремление к возможно более широкому охвату неизбежно привело бы к очень поверхностному рассмотрению.

ВВЕДЕНИЕ

рению излагаемого материала, а кроме того, в конечном счете, надо научить пользоваться методами теоретической физики, а предусмотреть заранее все, что потребуется исследователю, все равно невозможно.

Наконец,—относительно самого плана изложения. Мы не проводили деления курса по главам, как обычно делается в курсах физики. За основу классификации положены те методы, которыми ведется исследование. Так, например, в главе, посвященной методам изучения колебательного процесса, даются в качестве примера задачи из области механики, акустики, электромагнитных колебаний, теории переменного тока и т. д. Тот же прием проводится в других областях. Таким путем лучше всего можно установить связь между отдельными, на первый взгляд совершенно не связанными друг с другом физическими явлениями, а это имеет большое значение для тех, кто связывает занятие специальной дисциплиной с изучением материалистической диалектики.

В заключение мы настойчиво рекомендуем читателю изучать настоящий курс одновременно с изучением основных работ по материалистической диалектике Энгельса и Ленина. Только таким путем, помимо приобретения специальных знаний, можно получить общую методологическую установку, которая наравне со специальными знаниями является единственным верным руководством к действию — единственным верным оружием строителя социализма.

Часть I.

Теория колебаний.

Глава I.

Теория гармонического колебания.

§ 1. Теория простого гармонического колебания.

Наши занятия мы начнем с изучения колебательного движения. Область применения теории колебаний поистине огромна. С этой теорией необходимо освоиться всякому, кто будет работать в области машиностроения. Вся электротехника переменного тока основана на теории колебательного процесса.

Радиотехника, учение о свете и звуке представляют собой применение этой теории. Наконец, если бы мы захотели познакомиться сейчас же с модной теорией волновой механики де-Бройля-Шредингера, то нам пришлось бы начать с учения о колебаниях и с изучения законов их распространения.

Словом, нет почти ни одной области физики или ее приложений, где бы мы ни сталкивались с этой теорией. Вот почему особенно удобно начать изложение курса теоретической физики именно с этой главы. На ней особенно ярко можно будет заметить, как самые разнообразные, на первый взгляд не имеющие ничего общего между собой явления оказываются связанными между собой. На примере теории колебаний можно легко, изучая специфические отличия физических явлений, научиться вскрывать то, что в них есть общего, т. е. научиться находить единство в подавляющем на первый взгляд разнообразии.

Мы начнем с простейшего из колебательных процессов — с теории гармонического колебания.

Представим себе, что по окружности радиуса R двигается какое-либо тело M_0 (рис. 1). Поместим в центре окружности начало прямоугольной системы координат XY . Пусть в момент времени $t = 0$, от которого мы ведем счет времени, движущееся по окружности тело находится в положении M_0 и пусть при этом радиус OM_0 образует с осью Y угол γ . Пусть тело движется по окружности равномерно, причем через время T (период) оно возвращается на прежнее место. Отсюда мы можем определить угловую скорость движения нашего тела. Так как угол, соответствующий всей окружности, в абсолютной мере равный 2π , проходит равномерно за время T , то угловая скорость $n_0 = \frac{2\pi}{T}$. Эту величину мы будем также называть „частотой“ кругового колебания; ее надо отличать от v , числа колебаний в единицу времени, которое равняется $v = \frac{1}{T}$ (числу, показывающему, сколько раз период обращения уклады-

вается на протяжении 1 сек.). Частота связана с числом колебаний соотношением $n_0 = 2\pi\nu$. Скорость движения тела по окружности при данных условиях будет равна $v_0 = \frac{2\pi R}{T} = n_0 R$ и будет иметь направление, совпадающее с направлением касательной, проведенной в той точке окружности, где в данный момент находится движущееся тело.

Если от начала счета, т. е. от $t = 0$, протекло t секунд, то радиус, проведенный к той точке M_1 , где находится тело, при принятых нами

условиях будет образовывать с осью Y угол $\gamma + n_0 t$. Опустим из точки M_1 перпендикуляр $M_1 A_1$ на ось X (ось X представляет собой один из диаметров нашей окружности, так как начало координат мы помещаем в центре окружности). Точка A_1 будет служить проекцией точки M_1 на ось X — диаметр. Если тело M_1 , как мы уже сказали, движется равномерно, то движение проекции этого тела, т. е. движение точки A_1 , есть простое гармоническое колебание.

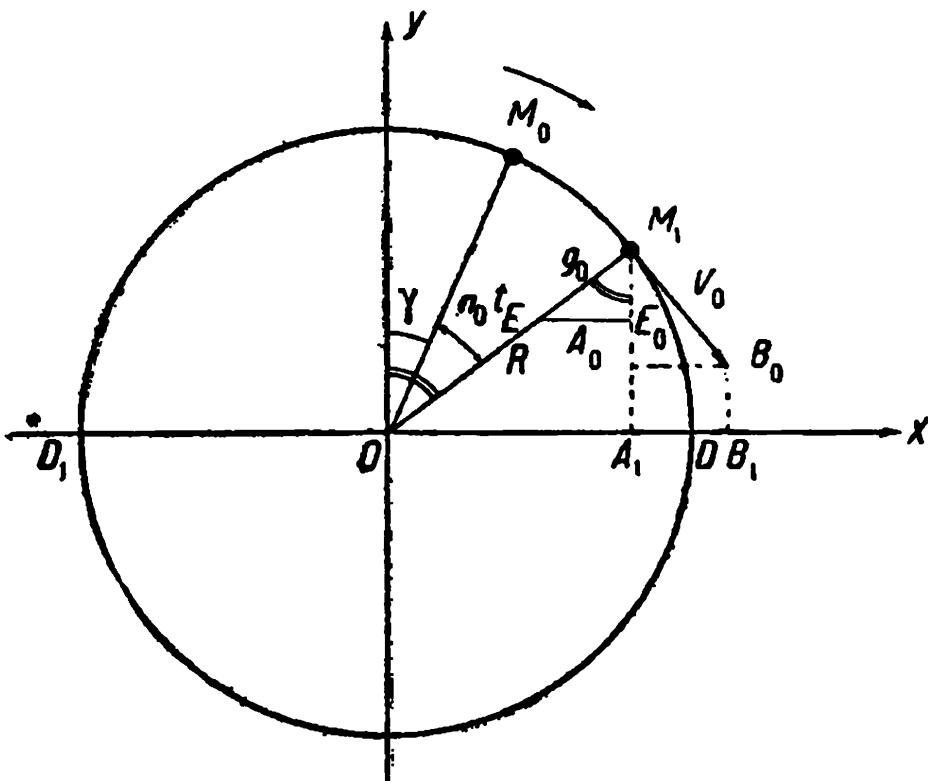


Рис. I.

Из чертежа ясно, что за время полного оборота по окружности „проекция“, т. е. точка A_1 , пройдет вперед и назад по оси X , совершая колебания между D и D_1 .

Определим абсциссу точки A_1 . Из прямоугольного треугольника $OM_1 A_1$ имеем:

$$x = R \sin(n_0 t + \gamma). \quad (1)$$

Так как скорость можно получить, взяв первую производную от проходящего движущимся телом пути по времени, а ускорение есть скорость изменения скорости, то мы без труда получаем:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = R n_0 \cos(n_0 t + \gamma) \quad (2)$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g_x = -R n_0^2 \sin(n_0 t + \gamma) = -n_0^2 x. \quad (3)$$

Знак минус показывает, что ускорение всегда направлено к центру, где оно равно нулю (при $x = 0$ имеем $g_x = 0$). В самом деле, когда

точка A_1 движется от O к D , она имеет замедленное движение и в D останавливается. Следовательно, ускорение направлено к O , т. е. в сторону, обратную возрастанию x .

Точно так же, когда A_1 движется от O к D_1 , скорость ее также убывает по мере приближения к D_1 , следовательно, ускорение для отрицательных значений x (на чертеже слева от O будут расположены отрицательные значения x) будет иметь положительное значение, т. е. будет направлено к началу O . Величины скорости и ускорения (2) и (3) мы можем получить также и другим путем: спроектировав на ось X величину скорости кругового движения

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T} = n_0 R$$

и центростремительного ускорения

$$g_0 = \frac{v_0^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R = n_0^2 R.$$

В самом деле: из $\triangle A_0M_1B_0$ и $\triangle E_0M_1E$ имеем:

$$v_x = Rn_0 \cos(n_0 t + \gamma) \quad (2')$$

и

$$g_x = -g_0 \sin(n_0 t + \gamma) = -n_0^2 R \sin(n_0 t + \gamma) = -n_0^2 x. \quad (3')$$

Сравнение (2) и (3) с (2') и (3') показывает, что проекция скорости и ускорения тела, равномерно движущегося по окружности, на какой-либо из диаметров этой окружности равняется скорости и ускорению проекции этого движущегося тела на диаметр.

Мы имеем здесь дело с частным случаем общей теоремы из области теоретической механики: „проекция скорости равна скорости проекции“.

Умножим теперь уравнение (3) на m , и пусть m изображает собой массу тела, которое мы предполагаем заставить двигаться по оси X . Получается:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mn_0^2 x = -a^2 x, \quad (4)$$

где

$$a^2 = mn_0^2. \quad (4')$$

В левой части уравнения (4) мы имеем произведение массы на ускорение. Но по второй аксиоме механики Ньютона¹ произведение из массы на ускорение должно равняться силе, которая вызывает данное движение. Таким образом, если мы хотим заставить двигаться какое-либо тело так, как двигалась в нашем примере точка A_1 , служившая проек-

¹ В этой форме обычно приводится вторая аксиома Ньютона, что, впрочем, неточно. По Ньютону „изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по прямой линии, куда направлена эта сила“ („Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur“). Это определение сохраняет свою силу, как мы увидим в дальнейшем, даже для случая переменной массы, чего не знала механика Ньютона. В этом сказалась удивительная проницательность Ньютона.

цией двигавшегося равномерно по окружности тела M_1 , т. е. если мы хотим, чтобы масса m совершила „гармоническое колебание“, необходимо, чтобы на нее все время действовала сила, величина которой была бы пропорциональна смещению x из начала координат. Это начало координат в нашем случае совпадает с „положением равновесия“ тела m , так как при $x = 0$ сила, действующая на m , равна нулю. Мы можем привести громадное количество примеров, когда такая сила имеет место. Возьмем любую деформацию упругого твердого тела. По хорошо известному закону Гука при небольших деформациях появляющаяся сила упругости пропорциональна вызванному изменению формы (деформации). Причем эта сила всегда направлена так, что она стремится вернуть тело в исходное положение, когда и деформация и вызванная ею сила равны нулю.

Докажем теперь обратное, а именно, что всякий раз, когда сила равна $-a^2x$, где a^2 — постоянная (положительная), а x равно смещению тела из некоторой точки, движение тела будет простым гармоническим колебанием по закону (1) вокруг положения равновесия $x = 0$. Для этой цели нам придется проинтегрировать уравнение (4):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x, \quad (4)$$

что мы сделаем возможно более простым способом.

Так как

$$\frac{dx}{dt} = v_x,$$

то, заменяя

$$\frac{a^2}{m} = n_0^2 \quad (4')$$

и вводя v_x , получаем:

$$\frac{dv_x}{dt} = -n_0^2 x. \quad (4'')$$

Далее, это уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -n_0^2 x,$$

или

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -n_0^2 x,$$

откуда

$$v_x dv_x + n x_0^2 dx = 0. \quad (5)$$

Но из основ дифференциального исчисления ясно, что уравнение (5) можно изобразить как

$$d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{n x_0^2}{2}\right) = 0. \quad (5')$$

Далее, так как известно, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов, имеем:

$$d \left\{ \frac{v_x^2}{2} + \frac{n_0^2 x^2}{2} \right\} = 0. \quad (5'')$$

Это условие показывает, что стоящее под знаком дифференциала выражение должно быть величиной постоянной. Откуда и находим:

$$\frac{v_x^2}{2} + \frac{n_0^2 x^2}{2} = c_1. \quad (6)$$

или, вставляя вместо n_0^2 ее выражение по (4'):

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{a^2 x^2}{2} = c_1 m = c'. \quad (6')$$

Нетрудно сообразить, что (6') есть уравнение энергии. Что первый член есть кинетическая энергия, это, конечно, пояснений не требует. В том, что второй член выражает потенциальную энергию, легко убеждаемся следующим приемом. Чтобы составить величину работы силы при перемещении из положения равновесия до какого-либо смещения x_1 , надо элемент пути dx помножить на величину силы $-a^2 x$ (знак минус, так как сила направлена в сторону, противоположную перемещению) и проинтегрировать от 0 до x_1 .

Выполняя интегрирование, мы получаем:

$$-\int_0^{x_1} a^2 x \, dx = -\frac{a^2 x_1^2}{2}. \quad (6'')$$

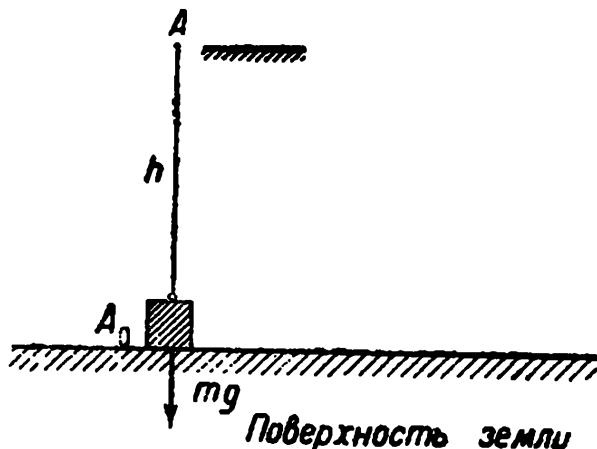


Рис. 2.

Но прирост потенциальной энергии (или энергии положения) равен этой работе (6'') с обратным знаком. Что это действительно так, убеждаемся на простом примере. Пусть мы поднимаем груз массы m на высоту h (рис. 2). Работа силы тяжести будет $-mgh$ (сила направлена против перемещения). Но при подъеме груза на высоту h потенциальная энергия увеличивается на $+mgh$.

Необходимо, однако, помнить, что мы решение задачи не довели до конца, так как в уравнении (6) $v_x = \frac{dx}{dt}$, а нам надо найти $x = f(t)$.

Вводя вместо $2c_1 = c$ в уравнение (6), находим, решая полученное уравнение относительно $v_x = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{c - n_0^2 x^2}, \quad (7)$$

откуда (взяв знак +) имеем:

$$\frac{dx}{\sqrt{c - n_0^2 x^2}} = dt$$

или

$$\frac{\frac{n_0 dx}{\sqrt{c}}}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2 x^2}{c}}} = n_0 dt. \quad (7')$$

Вводя в уравнение (7') переменное $z = \frac{n_0 x}{\sqrt{c}}$ и производя перегруппировку членов, мы получаем:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} - n_0 dt = d(\arcsin z) - d(n_0 t) = d(\arcsin z - n_0 t) = 0, \quad (7'')$$

т. е. опять, как и в случае (5''),

$$\arcsin z - n_0 t = \gamma \quad (8)$$

(где γ — постоянная), или

$$z = \sin(n_0 t + \gamma) \quad (8')$$

Переходя к прежней переменной x и заменяя постоянную $\frac{\sqrt{c}}{n_0} = R$, мы приходим к выводу, что

$$x = R \sin(n_0 t + \gamma), \quad (8'')$$

т. е. к выражению (1).

Итак, мы доказали, что всякий раз, когда сила пропорциональна смещению, тело будет совершать гармоническое колебание. Знак минус в уравнении (7) не дает нам ничего нового, только вместо γ у нас будет другая постоянная.

§ 2. Примеры на простое гармоническое колебание.

На ряде примеров мы сейчас убедимся, сколько самых разнообразных физических рассуждений нам придется проделать с тем, чтобы иметь возможность применить к этим примерам изложенную в § 1 элементарную теорию гармонических колебаний.

Пример 1. Определить период вертикальных колебаний ареометра (рис. 3), если пренебречь движением жидкости, вызванным этим колебанием, и если мы погрузим, надавливая пальцем на ареометр сверху, его цилиндрическую часть еще на x см и, отпустив потом палец, предоставим, его самому себе. При этом пусть масса ареометра $m = 30$ г, а диаметр цилиндрической его части $D = 0,8$ см, и пусть плотность жидкости равна единице ($\rho = 1$).

Решение. Если мы погружаем ареометр на глубину x , то этим мы вытесняем дополнительно объем $\pi \frac{D^2}{4} x$ и при плотности $\rho = 1$ — массу

$\pi \frac{D^2}{4} x$ г жидкости; дополнительная потеря в весе будет $P = -\pi \frac{D^2}{4} gx$ (знак минус, так как сила при погружении будет направлена вверх). Так как масса ареометра равна $m = 30$ г, то уравнение движения будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\pi \frac{D^2}{4} gx,$$

откуда квадрат частоты колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{\pi D^2 g}{4m},$$

частота

$$\omega_0 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\pi g}{m}}$$

и период

$$T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{g}} \approx 1,54.$$

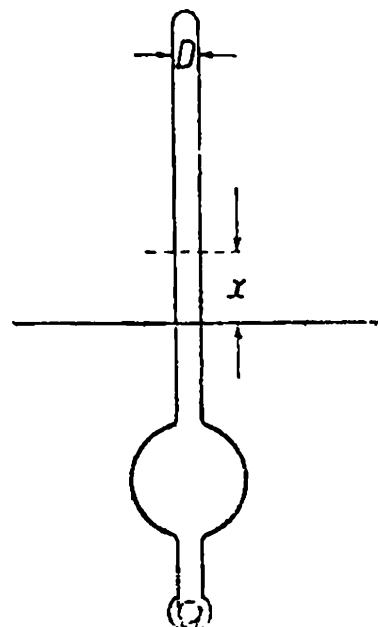


Рис. 3.

Пример 2. Математический маятник. Пусть отклонение маятника настолько мало, что дугу x можно считать равной хорде x . Определить период колебания, если длина маятника равна l , а ускорение силы тяжести равно g .

Решение. Движущей силой будет $mg_x = -mg \sin \alpha = -mg \frac{x}{l}$ (рис. 4). Уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \frac{x}{l}.$$

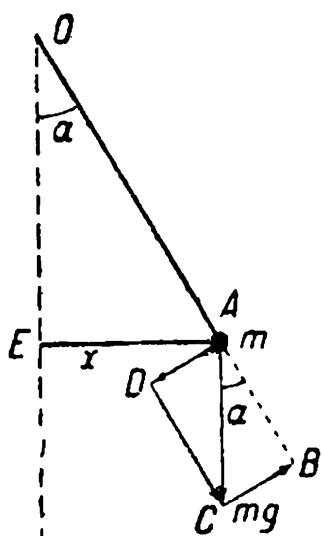


Рис. 4.

Отсюда квадрат частоты $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, а период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 3. На спирально свернутую проволоку подведен груз $M = 20$ г (рис. 5), вследствие чего длина спирали увеличивается на $C = 1$ см. Как велик период колебания, если массу M взять в два раза больше? При вычислении мы пренебрегаем массой пружины.

Решение. Так как для малых деформаций пружины имеет место закон Гука, то уравнение движения груза будет:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2 x. \quad (a)$$

Кроме того, так как груз M растягивает пружину на C см, то мы имеем:

$$a^2 C = Mg. \quad (b)$$

Из (a) и (b) находим:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -M \frac{g}{C} x,$$

откуда

$$n_0^2 = \frac{g}{l} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{c}{g}}, \quad (\text{c})$$

т. е. мы получаем формулу математического маятника, где роль длины маятника играет величина растяжения пружины. В этом проявляется сходство с теорией маятника. Специфическое же отличие заключается в том, что в случае колебания груза на пружине период зависит от массы.

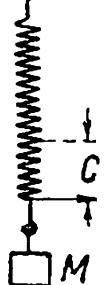


Рис. 5.

В самом деле, если груз M заменить другим, скажем, M_1 , то по (b) получим $a^2 C_1 = M_1 g$, т. е. другое значение C . Подставляя данные значения $M = 20 \text{ г}$ и $C = 1 \text{ см}$ и в другой раз $M_1 = 40 \text{ г}$ и $C_1 = 2 \text{ см}$, находим, соответственно: $T \approx 0'',20$ и $T_1 \approx 0'',282$.

Пример 4. Пусть масса m струны AB (рис. 6) в первом приближении сосредоточена в ее середине между закрепленными точками A и B . Пусть эта масса оттягивается из положения равновесия в горизонтальной плоскости на расстояние x . Пусть отклонение x настолько мало, что

- a) для угла α имеет место условие $\alpha \approx \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ и
- b) натяжение струны P остается постоянным.

Найти число колебаний струны, если длина ее равна L .

Решение. Из $\triangle EC_1D$ находим равнодействующую, направленную к положению равновесия $R_x = 2P \sin \alpha \approx 2P \operatorname{tg} \alpha = 2P \frac{2x}{L} = \frac{4x}{L} P$, откуда уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4P}{L} x \quad \text{и}$$

$$n_0^2 = \frac{4P}{mL},$$

или

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P}{mL}}. \quad (\text{a})$$

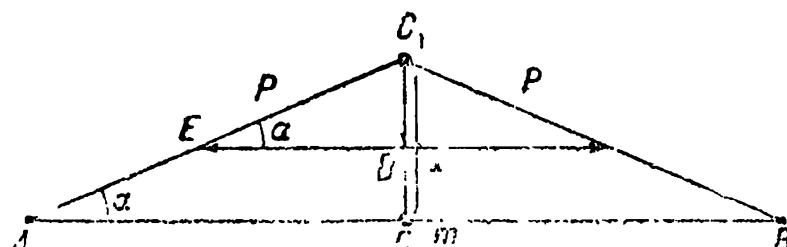


Рис. 6.

Выражение (a) можно переписать следующим образом:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi L} \sqrt{\frac{P}{m/L}}$$

или, заменяя $\frac{m}{L} = \rho$ (масса, рассчитанная на единицу длины, т. е. линейная плотность струны), получаем:

$$N = \frac{1}{\pi L} \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (\text{b})$$

Строгое решение этой задачи дает:

$$N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (b')$$

Таким образом, внесенное нами упрощение выразилось в неточном числовом факторе: π вместо 2. Зависимость же числа колебаний струны от ее длины, натяжения и плотности получилась вполне правильная. Эта зависимость была установлена на опыте аббатом Мерсеном в 1635 г.

Во всех рассмотренных нами примерах, в конечном счете, дело сводилось к уравнению простого гармонического колебания, — это и было то общее, что имело место во всех разобранных нами процессах, но в то же время в каждом отдельном случае были свои специфические особенности, которых не было в других примерах и которые составляют их качественные отличия: ведь плавающий ареометр и струна, — несомненно две разные вещи. Таким образом процесс „сведения“, которым широко пользуется естествознание, вовсе не означает „отождествления“, как думают многие философы. Наоборот, для того чтобы „свести“ к теории гармонического колебания задачу о струне и задачу об ареометре, мы должны были изучить законы упругости (закон Гука), законы равновесия жидкостей (закон Архимеда) и закон действия силы тяжести (маятник) и, только изучив специфические качественные отличия, мы могли найти то общее, что есть в этих разнообразных случаях.

§ 3. Можно ли вывести уравнения механики из закона сохранения энергии?

Вернемся к уравнению (6') § 1. Если мы его проинтегрируем по t , то мы получаем:

$$mv \frac{dv}{dt} + a^2 x \frac{dx}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{dx}{dt} \left\{ m \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x \right\} = 0. \quad (9)$$

Ясно, что уравнение (9) удовлетворяется или при условии $\frac{dx}{dt} = 0$, что значит $x = \text{const}$ (отсутствие движения), или при условии $m \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2 x$, а это ведь и есть уравнение движения. Таким образом, как будто, можно получить дифференциальное уравнение движения, исходя из одного только принципа энергии. Однако дело не так просто. Если мы предположим, что движущееся тело может двигаться не в одном только направлении (в нашем случае ось X), то такой вывод будет уже невозможен. В самом деле, пусть проекции смещения данного тела на оси координат будут x, y и z ; тогда для энергии мы получим вместо (6') § 1 следующее выражение:

$$\frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{a^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = c'. \quad (10)$$

Дифференцирование дает:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x \right) + \frac{dy}{dt} \left(m \frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y \right) + \frac{dz}{dt} \left(m \frac{d^2z}{dt^2} + a^2 z \right) \right\} = 0. \quad (11)$$

Вывести отсюда, что все выражения в скобках должны равняться нулю, можно, только исходя из заведомо ложного заключения: если алгебраическая сумма равна нулю, следовательно, каждое слагаемое должно равняться нулю. Больцман показал (L. Boltzmann, Populäre Schriften, стр. 104, 137), что все попытки „энергетиков“, пытавшихся построить все естествознание, исходя из одного только понятия энергии, терпят уже крушение даже в области механики. Он показал, что все доказательства возможности вывода уравнений механики из принципа энергии основываются на приведенном нами ложном заключении.

Дело, по существу, сводится к тому, что энергия — величина „скалярная“, т. е. величина, не имеющая направления. Ведь не только в физике, но даже и в механике на каждом шагу приходится иметь дело с векторами, т. е. с величинами, которые характеризуются не только числовой величиной, но и направлением.

Отсюда ясно: из скаляра вектора не построишь.

Рис. 7.

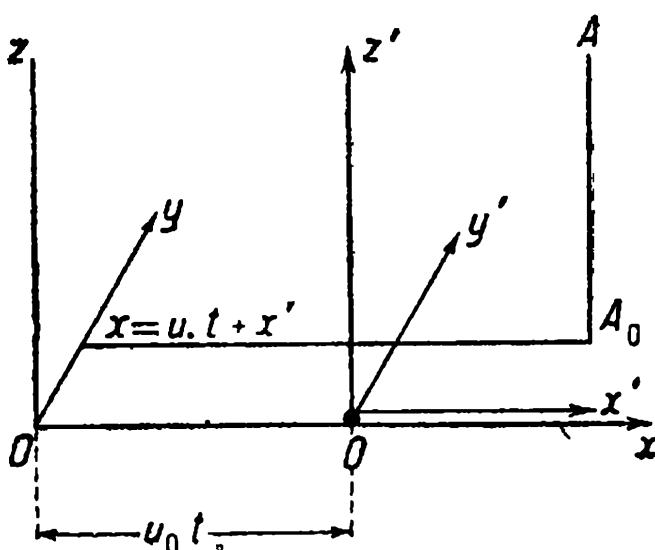
Однако в очень распространенной книжке M. v. Laue, Die Relativitätstheorie (I. Band, стр. 12) дается вывод уравнений механики, и даже для механики системы, из уравнения энергии. И притом вывод правильный. Противоречие, однако, разрешается в данном случае очень просто: Лауэ кроме уравнения энергии пользуется еще в своем выводе принципом относительности Галилея-Ньютона. Таким образом, по существу, это и не является выводом уравнений механики из закона сохранения энергии.

Рассмотрим это доказательство.

Прежде всего, пусть у нас имеется „неподвижная“ система координат $X'Y'Z'$ (связанная с нашей аудиторией) и движущаяся $X'Y'Z'$, т. е. движущаяся по отношению к первой со скоростью u_0 , параллельной оси x , и пусть начало подвижной системы O' в момент $t=0$ совпадает с началом неподвижной O (рис. 7). Формулы преобразования координат будут следующие:

$$\left. \begin{array}{l} x = x' + u_0 t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Последнее из равенств (12) показывает, что в отличие от теории Эйнштейна в формулах преобразования Галилея-Ньютона счет времени в обеих системах координат одинаков.



Нетрудно показать, что уравнения механики, как, например, изученное нами уравнение гармонического колебания, не изменяются при переходе от системы координат XYZ к системе $X'Y'Z'$.

В самом деле, так как u_0 , скорость движения системы $X'Y'Z'$ по отношению к системе XYZ есть величина постоянная, мы имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}.$$

Точно так же выражение упругой силы a^2x не изменяется. Ведь x есть смещение из положения равновесия $x=0$. Из формул преобразования имеем: $x' = x - u_0t$ и $x_0 = 0 - u_0t$, $x = x' + x_0$. Это и показывает, что для данного случая оправдывается принцип относительности Галилея-Ньютона, который в общем случае формулируется так: все механические процессы в данной системе будут протекать одинаково, независимо от того, будет ли вся эта система в целом покояться по отношению к выбранной нами системе координат или будет двигаться прямолинейно и равномерно.

Итак, уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} mv = P$$

при преобразовании координат переходит в

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d}{dt} mv' = P'.$$

Если речь идет о системе тел, то уравнение движения можно написать:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_i = R = \sum P_i, \quad (13)$$

где R — равнодействующая, а знак \sum обозначает геометрическую сумму, т. е. сложение по правилу параллелограмма. Обозначая для сокращения общее количество движения через $\mathfrak{G} = \sum m_i v_i$, мы приводим уравнение (13) к виду:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = R. \quad (13')$$

И вот это, уравнение, как оказывается, можно получить из закона сохранения энергии плюс принцип Галилея-Ньютона. Дифференцируя первое из уравнений (12), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u_0,$$

или, если, вообще, скорость v не совпадает по направлению с осью x :

$$v = u_0 + v', \quad (14)$$

где мы имеем дело с векторами и где произведено векторное сложение. Вставляем (14) в выражение количества движения:

$$\mathfrak{G} = \sum m_i v_i = \sum m_i v'_i + u_0 \sum m_i = \mathfrak{G}' + u_0 M, \quad (15)$$

где M — масса всей системы. Производим эту же подстановку в выражение кинетической энергии системы:

$$U_k = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \cdot \mathfrak{V}'^2}{2} + u_0 \sum m_i \cdot v'_i + \frac{u_0^2}{2} M,$$

или

$$U_k = U'_k = u_0 \mathfrak{G} + \frac{u_0^2}{2} M. \quad (16)$$

Дифференцируем (16) по времени:

$$\frac{dU_k}{dt} = \frac{dU'_k}{dt} + u_0 \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \quad (17)$$

С другой стороны, по закону сохранения энергии, прирост энергии в единицу времени:

$$\frac{dU_k}{dt} = \sum P_i v_i \quad (18)$$

равен работе всех сил в единицу же времени. Точно так же и

$$\frac{dU'_k}{dt} = \sum P'_i v'_i. \quad (18')$$

Вставляя в уравнение (18) уравнение (14) и принимая во внимание уравнение (18'), находим:

$$\frac{dU_k}{dt} = \frac{dU'_k}{dt} + u_0 \sum P_i. \quad (19)$$

Сравнивая же уравнения (19) и (17), получаем: $\frac{d\mathfrak{G}'}{dt} = \sum P_i$, или, так как на основании (15) $\frac{d\mathfrak{G}'}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ и $\sum P'_i = \sum P_i$, приходим к выводу:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \sum P_i,$$

что и требовалось доказать. Во всяком случае, возможность этого вывода уравнений механики основана на том, что отправным пунктом является не только принцип энергии, но и совершенно независимый от него принцип относительности Галилея-Ньютона.

Глава II.

Теория затухающего колебания.

§ 1. Уравнение затухающего колебания.

Уравнение энергии (6) § 1 показывает, что наша система, совершающая гармоническое колебание, сохраняет свою энергию. На самом деле энергия системы убывает, и если у нас в наших расчетах этого не получилось, то только потому, что мы не приняли во внимание силы со-

противления, которая всегда налицо. В так называемых незатухающих колебаниях, которыми сейчас широко пользуются на практике, потери, чем бы они ни были вызваны, непрерывно возмещаются притоком энергии извне, вследствие чего колебание и может продолжаться в течение длительного промежутка времени. В других же случаях — маятник, колебание груза на пружине, струна и т. д.— колебания более или менее быстро затухают. Наиболее простое предположение, хорошо оправдывающееся на опыте, заключается в том, что силу сопротивления предполагают пропорциональной первой степени скорости: $-b \frac{dx}{dt}$ ¹ (при больших скоростях это предположение уже не годится). Знак минус показывает, что сила сопротивления направлена в сторону, обратную скорости.

Если мы предположим, что у нас та же самая система, которую мы рассматривали раньше, но только теперь мы стали учитывать и силу сопротивления, с которой мы до сих пор не считались, то уравнение движения примет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b \frac{dx}{dt}. \quad (20)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\frac{a^2}{m} = n_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{b}{m} = k. \quad (21)$$

Тогда наше уравнение может быть представлено так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n_0^2 x = 0. \quad (22)$$

Покажем, что это новое уравнение при некоторых условиях может быть „сведено“ к уравнению простого гармонического колебания. Введем вместо x новое переменное:

$$x = ye^{\lambda t}, \quad (23)$$

где λ — постоянная величина, которую мы пока не определяем. Составляя

$$\frac{dx}{dt} = e^{\lambda t} \left(\frac{dy}{dt} + \lambda y \right)$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{\lambda t} \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \lambda^2 y \right\}$$

и вставляя в уравнение (22), мы после приведения получаем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2\lambda + k) \frac{dy}{dt} + (n_0^2 + \lambda^2 + k\lambda) y = 0. \quad (24)$$

¹ Само собой разумеется, что $b \frac{dx}{dt}$ имеет размерность силы.

Так как λ нами не была определена, то мы можем так ее подобрать, чтобы у нас исчез коэффициент при $\frac{dy}{dt}$; тогда $\lambda = -\frac{k}{2}$, и уравнение (24) принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(n_0^2 - \frac{k^2}{4}\right)y = 0. \quad (24')$$

Если $n_0^2 > \frac{k^2}{4}$, то уравнение действительно совпадает полностью с уравнением гармонического колебания. В самом деле, полагая

$$n_0^2 - \frac{k^2}{4} = n_1^2 \quad (24'')$$

$\left(n_1^2 — положительная величина при n_0^2 > \frac{k^2}{4}\right)$, мы имеем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -n_1^2 y,$$

что, как мы видели, дает решение:

$$y = R \sin(n_1 t + \gamma). \quad (24''')$$

Переходя на основании уравнений (23) к прежней переменной x , мы находим:

$$x = R e^{-\frac{k}{2}t} \sin(n_1 t + \gamma). \quad (25)$$

Ясно, что по мере возрастания t амплитуда колебания будет убывать, так как R умножается на показательную функцию, значение которой убывает по мере возрастания времени t .

Таким образом нам удалось „свести“ интегрирование уравнения более сложного — уравнения (20) — к интегрированию уравнения простого гармонического колебания. Но ясно также, что этим новая задача не отождествляется со старой. Прежде у нас амплитуда была постоянна — теперь она убывает, стремясь к нулю. Но что же является в нашем решении специфичным для этого более сложного случая? Специфичным является подстановка $u e^{\lambda t} = x$, которой мы раньше не делали. Кроме того ясно, что свести решение более сложного уравнения (22) к более простому (4) можно только тогда, когда $n_0^2 > \frac{k^2}{4}$. Если это условие не выполнено, то и сведение не удается.

Кроме того, и частота колебаний в уравнении (25) отличается от частоты колебаний в уравнении (4), именно:

$$n_1^2 = n_0^2 - \frac{k^2}{4}, \quad (24'')$$

где n_1 называется частотой „свободных“, n_0 — частотой „собственных“ колебаний, а коэффициент $\frac{k}{2}$ носит название коэффициента затухания.

Действительно, чем больше k , тем быстрее убывает амплитуда колебаний (25) и тем сильнее затухание.

К более подробному исследованию полученного решения мы еще вернемся, а пока рассмотрим, что получится, если

$$n_0^2 = \frac{k^2}{4}$$

или

$$n_0^2 < \frac{k^2}{4}.$$

При

$$n_0^2 = \frac{k^2}{4}$$

уравнение (24') принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad (26)$$

откуда находим, что

$$y = At + B,$$

а переходя с помощью уравнения (23) к прежней переменной x , мы получаем:

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} (At + B). \quad (27)$$

Решение — качественно отличное от (25). В самом деле, вследствие того, что уравнение (25) содержит $\sin(n_1 t + \gamma)$, мы с течением времени периодически будем получать через промежутки времени $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{n_1}$ (так как $n_1 = \frac{2\pi}{T_1}$) значения $x = 0$, т. е. наша система будет проходить через положение равновесия. В случае же (27) движение будет апериодическое, причем при неограниченном возрастании t x будет стремиться к нулю (неопределенность $e^{-\frac{k}{2}t} \cdot t$ легко раскрывается).

Третий случай, именно, $n_0^2 < \frac{k^2}{4}$, решается следующим путем. Обозначим через $p^2 = \frac{k^2}{4} - n_0^2$ (это в данном случае будет положительная величина); тогда вместо уравнения (24') получаем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - p^2y = 0, \quad (28)$$

т. е. уравнение, отличающееся от (24') (при $n_0^2 > \frac{k^2}{4}$) только знаком при коэффициенте члена с y . Решение его, однако, будет существенно отличным от решения уравнения гармонического колебания. Для решения подставим e^{rt} вместо y ; в результате подстановки имеем $r^2 - p^2 = 0$,

откуда $r = \pm p$. Поэтому решениями уравнения (28) будут e^{pt} и e^{-pt} . Путем подстановки убеждаемся, что

$$y = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$$

удовлетворит уравнению (28). Переходя опять с помощью уравнения (23) к прежней переменной x , находим:

$$x = c_1 e^{-\left(\frac{k}{2} - p\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{k}{2} + p\right)t} \quad (29)$$

Будет ли x , по мере возрастания t , стремиться к нулю? Что касается второго члена уравнения (29), то это не подлежит сомнению. Нетрудно, однако, сообразить, что и первый член представляет убывающую функцию. В самом деле, $p = \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - n_0^2}$ по абсолютной величине меньше $\frac{k}{2}$, поэтому $\frac{k}{2} - p > 0$, откуда и следует, что и первая функция в уравнении (29) — функция убывающая.

Все разобранные три случая можно представить себе следующим образом: пусть мы имеем систему с постоянным значением $n_0^2 = \frac{a^2}{m}$, и пусть возрастает $\frac{k}{2} = \frac{b}{2m}$. Наглядно можно это себе представить так: обыкновенный маятник погружается в жидкость, вязкость которой мы все более и более увеличиваем, подливая в нее густой сироп. По мере увеличения k от значений, близких к нулю, при постоянном значении n_0^2 , мы подходим к значению $\frac{k}{4} = n_0^2$, когда скачком мы переходим в область качественно другого типа движения. До этого момента движение было периодическое в том смысле, что маятник через промежутки времени $\frac{T_1}{2}$ (по мере увеличения k T_1 медленно возрастает) проходил через положение равновесия. При $\frac{k}{4} = n_0^2$ мы переходим от периодического к апериодическому движению, непрерывное изменение количества (изменение сопротивления) вызвало появление нового качества.

Займемся теперь более детальным изучением затухающего колебания

$$x = Re^{-\frac{k}{2}t} \sin(n_1 t + \gamma). \quad (25)$$

Посмотрим, при каких значениях t система проходит через положение равновесия. Соответствующие моменты t_0^0 , t_1^0 , t_2^0 и т. д. определяются из условий $n_1 t + \gamma = 0$ или $n_1 t + \gamma = n\pi$, где n — целое число:

$$t_0^0 = -\frac{\gamma T_1}{2\pi}, \quad t_1^0 = -\frac{\gamma T_1}{2\pi} + \frac{T_1}{2}, \quad t_2^0 = -\frac{\gamma T_1}{2\pi} + 2\frac{T_1}{2} \text{ и т. д.} \quad (29')$$

Словом, через каждые $\frac{T_1}{2}$ секунд наша система проходит через положение равновесия.

Находим теперь моменты, соответствующие наибольшим отклонениям от положения равновесия. Для этого, пользуясь общим правилом нахождения максима и минима, составляем:

$$\frac{dx}{dt} = Re^{-\frac{k}{2}t} \left\{ -\frac{k}{2} \sin(n_1 t + \gamma) + n_1 \cos(n_1 t + \gamma) \right\} = 0. \quad (30)$$

Положим

$$n_1 = D \cos \epsilon \text{ и } \frac{k}{2} = D \sin \epsilon,$$

тогда

$$D = \sqrt{n_1^2 + \frac{k^2}{4}} \text{ и } \operatorname{tg} \epsilon = \frac{k}{2n_1}.$$

Выполняя эту подстановку, находим:

$$\frac{dx}{dt} = R D e^{-\frac{k}{2}t} \cos(n_1 t + \gamma + \epsilon) = 0.$$

Это и есть условие для определения „точек поворота“, соответствующих экстремальным значениям. Условие это приводится к тому, что

$$n_1 t_i^{(m)} + \gamma + \epsilon = \frac{\pi}{2} (2i + 1).$$

Таким образом для последовательных моментов прохождения системы через точки поворота мы получаем следующий ряд:

$$t_0^{(m)} = \frac{T_1}{4} - \frac{T_1(\gamma + \epsilon)}{2\pi}, \quad t_1^{(m)} = 3 \frac{T_1}{4} - \frac{T_1(\gamma + \epsilon)}{2\pi}, \\ t_2^{(m)} = 5 \frac{T_1}{4} - \frac{T_1(\gamma + \epsilon)}{2\pi}, \quad t_3^{(m)} = 7 \frac{T_1}{4} - \frac{T_1(\gamma + \epsilon)}{2\pi} \text{ и т. д.} \quad (31)$$

Из сопоставления двух рядов (29') и (31) ясно, что моменты, соответствующие точкам поворота, не приходятся посередине промежутков времени, отделяющих два последовательных прохождения системы через положение равновесия. Если бы моменты точек поворота делили эти последние промежутки пополам, то в ряде (31) не было бы добавочных членов $-\frac{T_1 \epsilon}{2\pi}$, зависящих от затухания (ведь $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{k}{2\pi}$, следовательно, ϵ зависит от k).

Это смещение моментов, соответствующих точкам поворота, к началу счета на $\frac{T_1 \epsilon}{2\pi}$ обусловлено тем, что амплитуда $Re^{-\frac{k}{2}t}$ непрерывно убывает и что, чем ближе к началу счета t , тем множитель $e^{-\frac{k}{2}t}$ больше. Вот почему вследствие умножения ординат синусоиды $\sin(n_1 t + \gamma)$ на этот переменный во времени множитель вызывается смещение максимальных и минимальных значений кривой, выраженной в функции t , к началу $t = 0$.

Это явление схематически изображено на рис. 8. Сплошной линией изображена синусоида и ординаты ее экстремальных значений, а пунктиром кривая $e^{-\frac{k}{2}t} \sin(n_1 t + \gamma)$, причем ясно, что, так как ординаты непрерывно убывают, экстремальные значения должны перемещаться в сторону, указанную стрелкой.

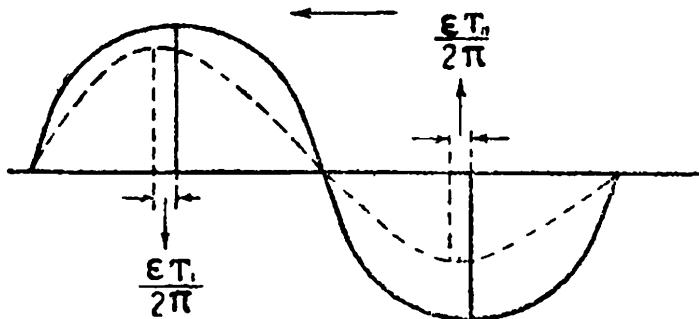


Рис. 8.

Обозначим момент, соответствующий первой точке поворота, через τ . Тогда ряд (31) можно переписать в виде:

$$t_0^{(m)} = \tau, \quad t_1^{(m)} = \tau + \frac{T_1}{2}, \quad t_2^{(m)} = \tau + 2 \frac{T_1}{2} \text{ и т. д.} \quad (31')$$

Отсюда получаем последовательно отклонения от положения равновесия $x=0$ (точки поворота):

$$\begin{aligned} x &= Re^{-\frac{k}{2}\tau} \sin n_1 \tau = a_0, \quad x_1 = Re^{-\frac{k}{2}\tau} \cdot e^{-\frac{k}{4}T_1} \sin \left(n_1 \tau + n_1 \frac{T_1}{2} \right) = \\ &= Re^{-\frac{k}{2}\tau} \cdot e^{-\frac{k}{4}T_1} \sin (n_1 \tau + \pi) = -Re^{-\frac{k}{2}\tau} \sin n_1 \tau \cdot e^{-\frac{k}{4}T_1} = \\ &= a_0 e^{-\frac{k}{4}T_1} = -a_0 \beta, \end{aligned}$$

где

$$\beta = e^{-\frac{kT_1}{4}}. \quad (31'')$$

Итак, мы получаем ряд:

$$x = a_0, \quad x_1 = -a_0 \beta, \quad x_2 = a_0 \beta^2, \quad x_3 = -a_0 \beta^3, \quad x_n = (-1)^n a_0 \beta^n. \quad (32)$$

Отсюда ясно, что при затухающих колебаниях абсолютные значения последовательных размахов убывают в геометрической прогрессии.

Отношение двух следующих друг за другом отклонений в одну сторону [т. е. через одно место в ряде (32)]:

$$\frac{x_0}{x_2} = \frac{x_1}{x_3} = \dots = \frac{1}{\beta^2} = e^{\frac{kT_1}{2}}$$

называется декрементом затухания. Натуральный логарифм этой величины носит название логарифмического декремента:

$$\sigma = \frac{kT_1}{2}. \quad (33)$$

§ 2. Примеры.

Пример 1. На шкале (при зеркальном отсчете отклонений гальванометра) отмечаются три последовательных точки поворота y_1 , y_2 и y_3 (рис. 9). Определить на шкале положение равновесия y_0 .

Решение. Согласно уравнению (32) имеем:

$$x = y_1 - y_0 = a_0, \quad x_1 = y_2 - y_0 = -a_0\beta \quad \text{и} \quad x_2 = y_3 - y_0 = a_0\beta^2.$$

Отсюда находим:

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = -\beta \quad \text{и} \quad \frac{y_3 - y_0}{y_2 - y_0} = -\beta.$$

Далее, имеем:

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{y_3 - y_0}{y_2 - y_0},$$

или

$$y_0^2 - 2y_0 y_2 + y_2^2 = y_0^2 - y_0 y_1 - y_0 y_3 + y_1 y_3.$$

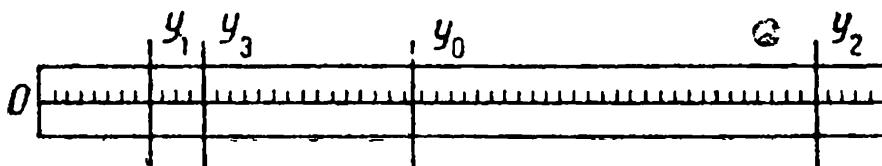


Рис. 9.

Решая это уравнение относительно y_0 , находим:

$$y_0 = \frac{y_2^2 - y_1 y_3}{2y_2 - y_1 - y_3}. \quad (34)$$

Пример 2. При взвешивании на весах положение равновесия определяется из трех последовательных точек поворота по формуле:

$$y_0 = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}. \quad (34')$$

Определить для конкретного примера $y_1 = 12,5; y_2 = 8,0; y_3 = 12,0$, как велика ошибка при пользовании упрощенной формулой (34') вместо формулы (34).

Решение. Упрощенная формула (34') получается в том случае, если принять декремент затухания $\beta \approx 1$. В самом деле, тогда мы имеем:

$$y_1 - y_0 = a_0, \quad y_2 - y_0 = -a_0 \quad \text{и} \quad y_3 - y_0 = a_0.$$

Умножая второе из этих уравнений на 2 и складывая их все вместе, получаем выражение (34').

Вставляя в выражения (34') и (34) заданные величины y_1, y_2, y_3 , находим по (34') $y_0 = 10,125$, а по (34) $y_0 = 10,117$. Так как при взвешивании точность не превосходит одной десятой деления шкалы, то совершенно ясно, что не имеет смысла вести вычисление с помощью более строгой формулы (34): приближенная формула (34') дает вполне достаточное приближение.

Пример 3. Пусть мы имеем апериодическое движение по закону

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} (At + B). \quad (27)$$

Требуется: а) определить постоянные A и B по значениям $x=x_0$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$, имеющим место при $t=0$, и б) найти, при каких условиях x принимает значение $x=0$ для конечных значений времени t .

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\frac{k}{2}t} - \frac{k}{2}e^{-\frac{k}{2}t}(At + B),$$

откуда $v_0 = A - \frac{k}{2}B$ и по (27) $x_0 = B$. Для A находим: $A = v_0 + \frac{k}{2}x_0$.

Следовательно, уравнение (27) принимает вид:

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} \left\{ \left(v_0 + \frac{k}{2}x_0 \right) t + x_0 \right\}; \quad (27')$$

x может обратиться в нуль при конечном значении t только при

$$t_1 = -\frac{x_0}{v_0 + \frac{k}{2}x_0}. \quad (27'')$$

Если x_0 и v_0 обе имеют одинаковые знаки, то для t_1 получается отрицательная величина, а так как у нас счет ведется с $t=0$, то решение смысла не имеет.

Если же при $x_0 > 0$ $v_0 < 0$ и по абсолютной величине $v_0 > \frac{k}{2}x_0$,

то для t_1 получаем положительное значение. Какой это имеет физический смысл? Представим себе, что мы поместили маятник в сопротивляющейся среде, причем вязкость



Рис. 10а.

жидкости мы подобрали так, что движение как раз удовлетворяет условию $n_0^2 = \frac{k^2}{4}$. Если начальное отклонение было $x = x_0$ и скорость была направлена в ту же сторону (x_0 и v_0 имеют одинаковый знак), то ясно, что

система будет некоторое время удаляться от положения равновесия и, достигнув некоторого максимального значения (можно определить, найдя корень $\frac{dx}{dt} = 0$) начнет асимптотически приближаться к положению равновесия (рис. 10а). С другой стороны, если при начальном отклонении $x = x_0$ сообщить ей скорость по направлению к положению равновесия,

то система может (при условии $v_0' > \frac{k}{2}x_0$) перейти через положение равновесия и подходить асимптотически к $x = 0$, но уже с другой стороны: со стороны отрицательных значений x (рис. 10б).

Разобранный нами случай $n_0^2 = \frac{k^2}{4}$ — предельный, при котором только

что периодическое движение превращается в апериодическое, и он представляет большой интерес и значение для техники измерительных приборов. В самом деле, когда мы включаем, скажем, электрический ток, мы, естественно, желаем, чтобы стрелка измерительного прибора как можно скорее установилась на том месте шкалы, которое соответствует силе тока или напряжению, имеющим место в данный момент в цепи. Если вращающаяся часть нашего измерительного прибора, соединенная со стрелкой, будет построена так, что $n_0^2 > \frac{k^2}{4}$,

то стрелка будет качаться вокруг положения равновесия, соответствующего данной силе тока. Скажем, если измеряемая сила тока равна 10 амперам, то при включении стрелка будет качаться вокруг 10-го деления, что крайне затрудняет отсчет инструмента, заставляя нас выждать, пока колебания не затухнут.



Рис. 10б.

Если наша система будет удовлетворять условию, что $n_0^2 < \frac{k^2}{4}$, тогда колебаний не будет, но зато стрелка будет сначала быстро, а затем все медленнее и медленнее подходить к положению равновесия, соответствующему данной силе тока: опять придется выжидать момента, когда можно сделать отсчет. Случай же $n_0^2 = \frac{k^2}{4}$ наиболее выгоден: колебаний уже нет, а вследствие относительно еще небольшой величины k приближение к положению равновесия будет самым быстрым из вообще возможных. Вот почему при постройке измерительных инструментов затухание подбирается так, чтобы $\frac{k^2}{4} = n_0^2$.

Пример 4. Показать, что общее решение уравнения гармонического колебания $x = R \sin(n_0 t + \gamma)$ можно получить с помощью двух частных решений $\sin pt$, $\cos pt$ наподобие того, как было решено уравнение (28).

Решение. Подставляя $\sin pt$ и $\cos pt$ в уравнение гармонического колебания, мы приходим к выводу, что эти функции только при условии $p = n_0$ будут служить решениями данного уравнения. Далее, доказываем простой подстановкой, что $x = A \sin pt + B \cos pt$ также удовлетворяет данному уравнению. Полагая же $A = R \cos \gamma$ и $B = R \sin \gamma$, приводим полученное решение к прежнему виду.

На основе только что доказанного мы можем представить выражение для затухающего колебания в таком виде:

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} \left(A \cos n_1 t + B \sin n_1 t \right). \quad (a)$$

Нельзя ли из этого периодического решения получить решение не-периодическое для случая $n_1 = 0$, т. е. $n_0^2 = \frac{k^2}{4}$?

Представим (a) в следующем виде:

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} \left(A \cos n_1 t + B n_1 t \frac{\sin n_1 t}{n_1 t} \right). \quad (a')$$

Если мы предположим, что при беспредельном уменьшении n_1 B изменяется так, что $n_1 B = D$, где D — конечная величина, тогда в пределе из (a') при $n_1 = 0$ получим:

$$x = e^{-\frac{k}{2}t} (A + Dt),$$

т. е. случай аperiодического движения.

Таким образом аperiодическое движение получается из своей полярной противоположности, из периодического процесса. Мы здесь имеем хорошую иллюстрацию одного из основных законов диалектики — закона взаимного проникновения противоположностей.

§ 3. Применение теории затухающих колебаний к электромагнитным процессам.

Напомним вкратце, как выражается электродвижущая сила индукции. Пусть в однородном магнитном поле у нас расположены два проводя-

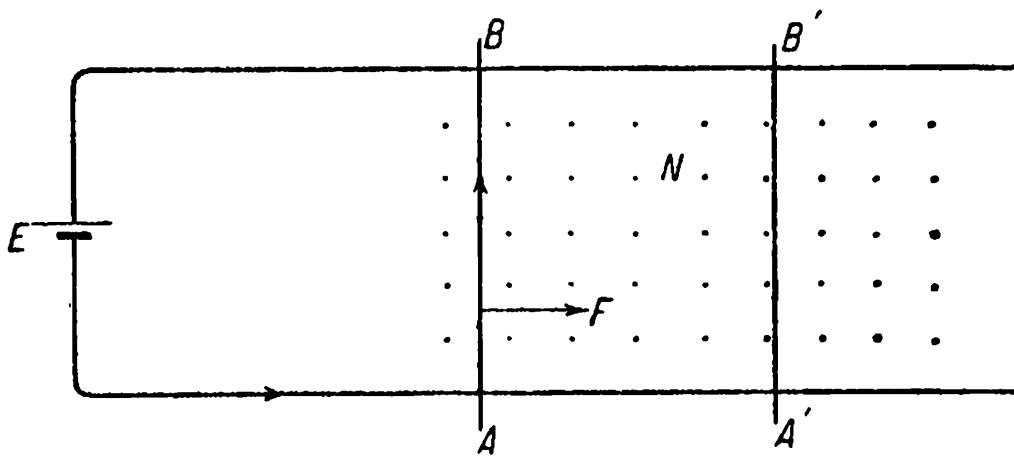


Рис. 11.

щих рельса (рис. 11), по которым скользит стержень AB (длины l). Рельсы соединены с полюсами батареи, дающей электродвижущую силу E . Нетрудно сообразить, что на стержень AB , по которому идет ток I , будет действовать электромагнитная сила

$$F = l \cdot I \cdot B \quad (35)$$

(B — величина индукции в данном однородном поле).

Правильность указанного на рис. 11 направления силы F легко может быть проверена правилом трех пальцев левой руки, если принять во внимание, что северный полюс лежит за плоскостью чертежа. Работа, даваемая батареей в единицу времени, как известно, равна EI , тогда, на основании закона сохранения энергии, имеем¹:

$$EI = RI^2 + IUB \cdot v, \quad (36)$$

где R — сопротивление всей цепи и v — скорость перемещения стержня AB . Нетрудно сообразить, что $IUB = \frac{d\Phi}{dt}$ рав-

но приросту числа линий индукции, охватывающих данным контуром EAB , в единицу времени. Решая уравнение относительно I , находим:

$$I = \frac{E - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (37)$$

Таким образом сила тока вычисляется по закону Ома, с той только разницей, что к данной электродвижущей силе батареи присоединяется электродвижущая сила индукции.

Если мы имеем какой-либо контур C (рис. 12), в который мыпускаем ток, то самый факт появления тока вызывает магнитный поток, линии которого пронизывают данный контур. Если контур расположен вдали от железа или, вообще, ферромагнитных тел, то величину этого потока Φ можно считать пропорциональной силе тока:

$$\Phi = LI, \quad (38)$$

где множитель пропорциональности L (коэффициент самоиндукции) зависит от формы и размеров контура C .

Рассмотрим теперь следующий случай. Пусть конденсатор V (рис. 13) заряжается от какого-либо источника. Когда разность потенциалов V достигает определенной величины, появляется в F искра, и конденсатор начинает разряжаться; сила тока

$$I = -C \frac{dV}{dt} \quad (39)$$

будет равна убыли заряда пластинки конденсатора

$$Q = CV, \quad (40)$$

отнесенной к единице времени.

Как определить силу тока? Для этого к разности потенциалов конденсатора V , вызывающей ток, надо будет добавить (алгебраически)

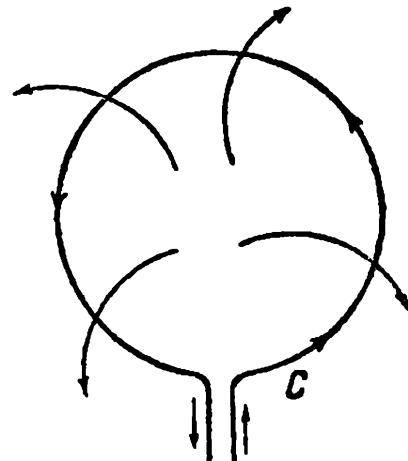


Рис. 12.

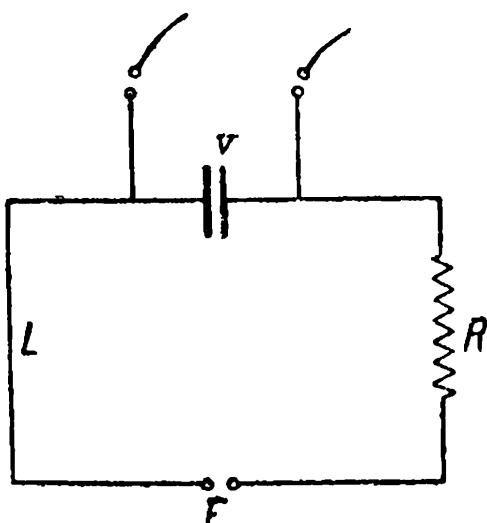


Рис. 13.

¹ Уравнение (36) имеет тот физический смысл, что вся работа, доставляемая батареей, идет на нагревание + работу перемещения проводника AB .

электродвижущую силу самоиндукции

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}$$

и приравнять произведению RI (обобщенный закон Ома).

Итак,

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (41)$$

Но ведь V с I связано еще уравнением (39). Дифференцируем уравнение (41) по t и заменяем $\frac{dV}{dt}$ через $-\frac{I}{C}$; тогда вместо уравнения (41) получаем:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (42)$$

Мы получаем уравнение, формально совпадающее с уравнением (20).

В этом уравнении самоиндукция играет роль массы. В самом деле, чем больше масса, тем больше инерция системы, тем труднее ее привести в движение и тем труднее затормозить уже существующее ее движение. Точно так же, чем больше самоиндукция цепи, тем медленнее в ней устанавливается ток; с другой стороны, при размыкании тока в цепи с большой самоиндукцией ток продолжается еще некоторое время в прежнем направлении и вызывает этим повышение напряжения и сильную искру при размыкании.

Эта аналогия имеет весьма глубокие корни, она связана с инерцией движущихся в электрическом токе электронов. Далее, сопротивление R определяет собой переход энергии электрического тока в тепловую энергию; точно так же коэффициент b в выражении силы сопротивления определяет собой, какая доля механической энергии переходит в тепло.

Наконец, $\frac{1}{C}$ играет роль a^2 в выражении упругой силы. Чем больше a^2 , тем больше упругая сила, вызванная данным смещением x . Точно так же, чем меньше емкость C , тем большее напряжение появится на обкладках конденсатора при введении на его обкладки каждой единицы заряда, и тем большее будет вызвано препятствие для введения каждой следующей единицы заряда.

Так как формально уравнения (20) и (42) совпадают, то мы по аналогии с тем, что было сказано об уравнении (20), можем решить целый ряд вопросов, связанных с уравнением (42).

В самом деле, мы без труда находим частоту собственных колебаний и собственный период (формула Томсона):

$$n_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (a)$$

Частота свободных колебаний:

$$n_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}. \quad (b)$$

Условие, при котором возможны колебания, в данном случае принимает вид:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}. \quad (c)$$

При этом условии, решение уравнения (42) можно написать так:

$$I = A e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot t + \gamma \right). \quad (d)$$

Остановимся на специфических особенностях данной задачи. Прежде всего из уравнений (39) и (41) мы находим уравнение, определяющее V :

$$L \frac{d^2 V}{dt^2} + R \frac{dV}{dt} + \frac{1}{C} V = 0, \quad (42')$$

а умножив это равенство на C , получаем уравнение, определяющее изменение заряда $Q = CV$:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (42'')$$

Можно ли сразу написать для V решение в виде функции (d)? Это было бы большой ошибкой, так как I и V между собой не независимы: они связаны соотношением (39). Поэтому, если мы для V напишем решение в виде (d), то решение для I получится, если мы функцию (d) вставим в уравнение (39). Нетрудно показать, что это решение удовлетворяет уравнению (42).

Поразительное сходство между явлениями электромагнитных колебаний и простым колебанием какой-либо упругой системы указывает на единство материального мира, проявляющегося в бесконечно разнообразных формах. Не так думают идеалисты, как, например, А. Богданов в своем „Эмпирионизме“. По Богданову непосредственно нам даны ощущения, область же физических явлений есть то, что мы сами подставляем в природу. „Область подстановки,— пишет Богданов,— совпадает с областью физических явлений; под явления психические ничего подставлять не требуется, ибо это — непосредственные комплексы“ (стр. XXXIX). Эту „теорию“ Ленин изобличает как самый настоящий идеализм: „Вот это и есть идеализм, ибо психическое, т. е. сознание, представление, ощущение и т. п. берется за непосредственное, а физическое выводится из него, подставляется под него“ (Ленин, т. X, стр. 189). В „Материализме и эмпириокритицизме“ Ленин, излагая взгляды Больцмана на тот же вопрос об удивительной связи между самыми, казалось бы, разнородными явлениями, пишет следующее: „Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений. Теми же самыми уравнениями можно решать вопросы гидродинамики и выражать теорию потенциалов. Теория вихрей в жидкостях и теория трения в газах (Gasreibung) обнаруживают поразительную аналогию с теорией электромагнетизма и т. д.“.

„Люди, признающие «теорию всеобщей подстановки», никак не увернутся от вопроса: кто же это так единообразно догадался «подставить» физическую природу?“ (Ленин, т. X, стр. 243).

Таким образом отмеченные нами аналогии между самыми разнообразными явлениями свидетельствуют о единстве мира, изучаемого нами, о его материальности.

Глава III.

Некоторые частные случаи общего уравнения затухающих колебаний.

§ 1. Экстраток. Опыт Тольмана. Сверхпроводимость.

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть в замкнутой цепи с гальваническим элементом (электродвижущая сила E) установилась сила тока I_0 . Предположим, далее, что гальванический элемент в некоторый момент времени, от которого мы будем вести счет времени, выключается из цепи (рис. 14). Что произойдет дальше в цепи с самоиндукцией L и сопротивлением R ?

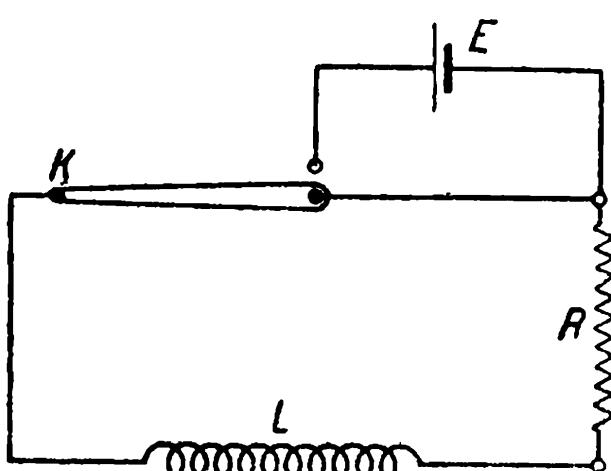


Рис. 14.

После выключения элемента в цепи остается только одна электродвижущая сила самоиндукции. Таким образом закон Ома придется написать в следующем виде:

$$E_s = RI, \text{ или } -L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (43)$$

Это уравнение получается из прежнего уравнения $E_s + V = RI$, если $V = 0$. Оно, далее, может быть переписано следующим образом:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt, \text{ или } d\left(\log I + \frac{R}{L} t\right) = 0,$$

т. е.

$$\log I = -\frac{R}{L} t + \log C,$$

где C — постоянная. Итак,

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (44)$$

Но ведь мы знаем, что в момент размыкания, от которого мы ведем счет времени, сила тока $I = I_0$; отсюда

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (44')$$

Это есть выражение силы „экстратока“ размыкания в зависимости от времени. В нашем примере (рис. 14) при выключении элемента E цепь сейчас же замыкалась, в ней появляется сейчас же ток, протекающий по закону (44'). Если бы мы только разомкнули цепь, не производя

переключения, то электродвижущая сила самоиндукции вызовет на разомкнутых концах цепи высокое напряжение, которое приведет к большой искре, переходящей в дугу при значительных величинах L по сравнению с R . Вообще, (44') будет изображаться графически в виде убывающей кривой (рис. 15), асимптотически подходящей к оси t , причем чем больше L по сравнению с R , тем медленнее будет убывать I с увеличением t , и тем более значительные разности потенциалов получаются при размыкании. Это обстоятельство еще в первые годы XX в. заставляло включать параллельно рубильнику¹, выключающему электромагниты динамомашин, два толстых угля, которые можно было раздвигать. Операция производилась таким образом: размыкали сначала рубильник, тогда между концами углей появлялась дуга, дугу постепенно растягивали до тех пор, пока она не слабела и не прерывалась. Эта неудобная операция заменяется простым выключением с помощью весьма острумной схемы проф. Г. Гёргеса (рис. 16). Если нам надо выключить электромагнит, включенный в ответвление динамомашины (шунтовое включение), то мы поворачиваем рукоятку K реостата, постепенно включая новые и новые части сопротивления r_1, r_2, r_3, r_4 . Наконец, передвигая рукоятку с контактом a на контакт b , мы одновременно с разрыванием цепи замыкаем магнит M на себя через b и d при полном отсутствии какой бы то ни было искры.

Изложенная нами теория экстратока размыкания поможет нам сейчас разобраться в теории исключительно интересного опыта, осуществленного впервые Тольманом и Стюартом в 1916 г. в Америке. Схема этого опыта изображена на рис. 17. Цилиндр A с навитой на него проволокой соединяется с помощью длинного и гибкого

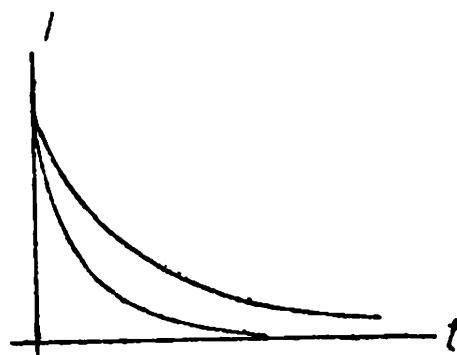


Рис. 15.

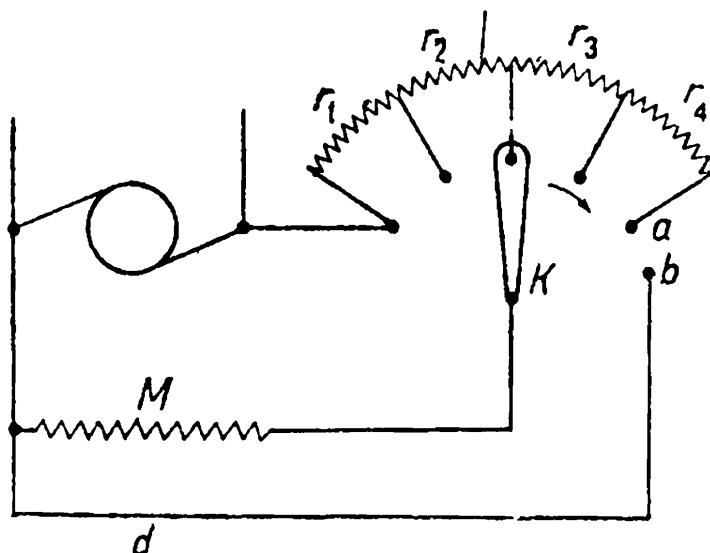


Рис. 16.

появлялась дуга, дугу постепенно растягивали до тех пор, пока она не слабела и не прерывалась. Эта неудобная операция заменяется простым выключением с помощью весьма острумной схемы проф. Г. Гёргеса (рис. 16). Если нам надо выключить электромагнит, включенный в ответвление динамомашины (шунтовое включение), то мы поворачиваем рукоятку K реостата, постепенно включая новые и новые части сопротивления r_1, r_2, r_3, r_4 . Наконец, передвигая рукоятку с контактом a на контакт b , мы одновременно с разрыванием цепи замыкаем магнит M на себя через b и d при полном отсутствии какой бы то ни было искры.

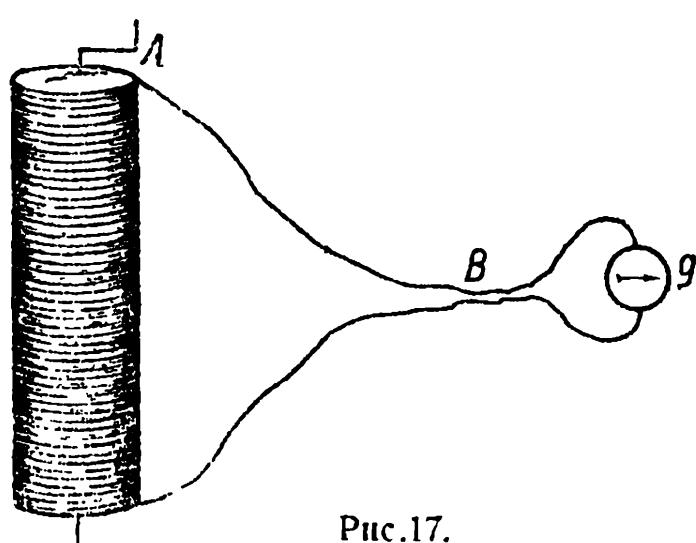


Рис. 17.

¹ Пишущему эти строки довелось видеть этот процесс на электрической станции в Москве весной 1902 г., на экскурсии студентов-физиков Московского университета под руководством покойного проф. П. Н. Лебедева.

шнура с гальванометром. Цилиндр приводится во вращение и при некоторой скорости внезапно тормозится. Тогда находящиеся в проволоке электроны по инерции продолжают двигаться в направлении движения. Появляющаяся в момент торможения сила тока равна

$$I_0 = \sigma v n e. \quad (45)$$

(Через любое сечение проходит в единицу времени число электронов, заключенное в объеме σv , где σ — сечение, v — скорость электронов, n — число электронов в единице объема, а e — заряд электрона.) Ток будет продолжаться, вообще, недолго, если $\frac{R}{L}$ — величина малая. Зависимость его от времени будет выражена уравнением (44'). Гальванометр, включаемый в цепь, берется так называемый балистический с большим периодом колебания. Делается это для того, чтобы подвижная его часть заметным образом не успела еще повернуться за то время, в течение которого вызванный торможением цилиндра ток уже практически иссякает. При этих условиях отклонение гальванометра α пропорционально полному количеству протекшего электричества Q , что можно выразить так:

$$C_1 \alpha = Q = I_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t} dt = \frac{I_0 L}{R}. \quad (46)$$

Далее, вся энергия электронов (кинетическая) в конце концов перейдет в джаулево тепло:

$$U_0 = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{I_0^2 L}{2} = \sigma l \cdot n \frac{mv^2}{2}, \quad (47)$$

где l — длина навитой на цилиндр проволоки, а m — масса электрона. Вставляя в уравнение (47) вместо $I_0 L = R C_1 \alpha$ из (46) и I_0 из (45), находим:

$$\frac{e}{m} = \frac{lv}{C_1 \alpha R}. \quad (48)$$

Произведенные Тольманом измерения показали, что для $\frac{e}{m}$ получается та же величина, что и в случае катодных лучей. Следовательно, в металлах мы имеем дело с электронами, которые могут перемещаться между атомами металлов. Кроме того, опыт проделывался с проволоками из различных металлов, причем для $\frac{e}{m}$ получились те же значения. Таким образом мы приходим к доказательству того, что электроны во всех металлах одни и те же.

По своей схеме опыт Тольмана очень прост, но его осуществление потребовало упорной работы около десяти лет. Трудность заключается в том, чтобы устранить посторонние влияния и, в первую очередь, влияние магнитного поля земли. Для этой цели Тольману пришлось оборудовать комнату, в которой была сделана специальная проводка. Ток в

этой проводке подбирался так, чтобы компенсировать магнитное поле земли, действие которого во много раз больше искомого эффекта инерции электронов. В настоящее время Тольманом поставлены еще более точные опыты: получаемые токи, вызванные движением электронов, по инерции усиливаются ламповыми усилителями, наподобие того, как это делается в радио. Поставленная теперь задача состоит в том: не изменяется ли масса электронов в зависимости от соседства с другими электронами, движущимися в металлическом проводе (о причине этого явления см. ч. III).

Другое интересное приложение разобранной нами теории экстраполяции размыкания состоит в изучении явления так называемой „сверхэлектропроводности“. Явление это состоит в том, что для некоторых металлов, в том числе для свинца, сопротивление при температуре, близкой к абсолютному нулю, становится очень малым. Это явление было открыто Каммерлинг-ОНнесом в Лейдене в 1911 г. На рис. 18 изображена схема одного из этих опытов. Свинцовая спираль, концы которой спаяны между собой (спираль навита на латунный цилиндр; число оборотов 1000, сечение $\frac{1}{70} \text{ мм}^2$), погружалась в жидкий гелий. При комнатной температуре сопротивление ее равнялось 734 ома. Если в такой спирали получить индукционный ток, то величина его падает до величины $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,718}$ своей первоначальной величины (в выражении $I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$ полагаем $\frac{R}{L} t = 1$) в $\frac{1}{70000}$ секунды. Эта величина получается на основании подсчета коэффициента самоиндукции и сопротивления. При охлаждении до $1,8^\circ$ абсолютной шкалы сопротивление уменьшается приблизительно в $2 \cdot 10^9$ раз. Индукционный ток при этих условиях уменьшается на $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,71828} = 0,3678$ часть своей величины в течение промежутка времени, измеряемого сутками. Опыт производится следующим образом: спираль помещается в магнитное поле, действие которого внезапно прекращается; тогда появившийся индукционный ток будет изменяться со временем

по закону $I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$. О силе тока судят по действию этого тока на помещенную в соседстве магнитную стрелку. Абсолютная величина силы тока измеряется с помощью вспомогательной спирали, одинаковой формы и размеров (не охлаждаемой), по которой пропускают ток такой силы, чтобы производимое им действие было одинаково с действием спирали, погруженной в жидкий гелий. Наконец, наличие тока было констатировано и непосредственно. В одном из опытов к спирали напаивались концы a и b , которые шли к измерительному прибору. После получения индукционного тока под жидким гелием между a и b проволока перерезалась. Измеритель при этом показывал кратковременный сильный ток.

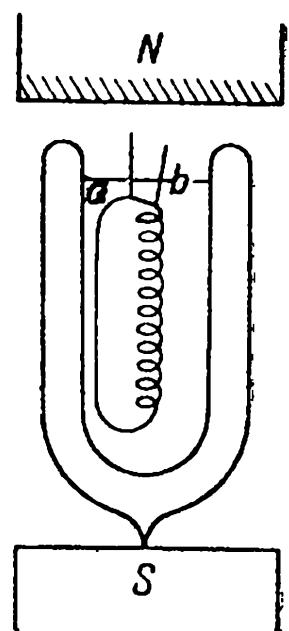


Рис. 18.

Кратковременность объясняется тем, что теперь (после перерезывания) цепь состоит только отчасти из сверхпроводящего вещества. Мы видим, на основе изложенных примеров, что разобранной нами элементарной теорией экстратока размыкания широко пользуются в целом ряде интересных исследований, раскрывающих новые свойства материи.

§ 2. Примеры.

Пример 1. Какому частному случаю уравнения (20) соответствует задача об экстратоке размыкания, и какой физической задаче этот случай соответствует?

Решение. Уравнение получается следующее:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0, \quad (a)$$

или

$$m \frac{dv}{dt} + bv = 0. \quad (a')$$

Решение этого уравнения будет (по аналогии с предыдущей задачей):

$$v = Ae^{-\frac{b}{m}t}. \quad (b)$$

Если при $t = 0$ $v = v_0$, то мы получим:

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (b')$$

По смыслу (a) ясно, что данное уравнение соответствует случаю тела, имеющего некоторую начальную скорость и движущегося в сопротивляющейся среде, при условии, конечно, что сила сопротивления пропорциональна скорости.

Так как $v = \frac{dx}{dt}$, то мы можем проинтегрировать выражение (b') еще раз. Выполняя интегрирование, находим:

$$x = C - v_0 \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (c)$$

Если при $t = 0$ $x = 0$, то для C получаем $C = -\frac{m}{b}v_0$, откуда

$$x = v_0 \frac{m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (c')$$

Если мы в (c') положим $t = \infty$, мы найдем длину пути

$$x_e = \frac{v_0 m}{b}, \quad (d)$$

который будет пройден телом с начальной скоростью v_0 в сопротивляющейся среде. Вопроса, аналогичного этому, мы не ставили в задаче об экстратоке; таким образом, эта часть задачи представляет собой специфическую особенность движения в сопротивляющейся среде.

Пример 2. Пусть дана та же цепь, что и в рассмотренном нами ранее случае (рис. 14). Пусть тока в цепи нет, и мы при помощи ключа K включаем постоянную электродвигущую силу E . Спрашивается, как буде изменяться сила тока со временем?

Решение. По обобщенному закону Ома имеем:

$$E - L \frac{dI}{dt} = RI, \quad (a)$$

или

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E. \quad (a')$$

Отыскиваем частное решение данного уравнения, оно имеет вид:

$$I_0 = \frac{E}{R}. \quad (b)$$

Далее, пусть искомая функция I имеет вид:

$$I = I_0 + y,$$

или

$$I = \frac{E}{R} + y. \quad (c)$$

Подставляем (c) в (a'), находим:

$$L \frac{dy}{dt} + Ry = 0, \quad (a'')$$

т. е. уравнение рассмотренного в § 1 типа ¹. Итак, общее решение:

$$I = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (c')$$

Определим произвольную постоянную C из условия, что при замыкании тока, т. е. при $t=0$, $I=0$. Это условие дает нам:

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (c'')$$

При $t=\infty$ имеем $I = \frac{E}{R}$; таким образом, данное частное решение соответствует установившемуся состоянию в нашей цепи.

Величина $\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$, вычитающаяся из этого предельного значения в (c''), есть так называемый „экстраток“ замыкания.

¹ Решать уравнение (a') можно очень большим числом способов. Мы даем разобранный в тексте способ потому, что найденное нами частное решение $I_0 = \frac{E}{R}$ есть сила установившегося тока; таким образом, это частное решение имеет определенный физический смысл.

Пример 3. Как будет происходить движение тела в сопротивляющейся среде при действии постоянной силы тяжести mg , где m — масса тела? Уравнение движения будет следующее:

$$m \frac{dv}{dt} + bv = mg, \quad (a)$$

или

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} v = g. \quad (a')$$

Это уравнение решается по аналогии с уравнением (a) в примере 2:

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{mg}{b} t} \right). \quad (b)$$

При $t = \infty$ получается предельное значение скорости

$$v = \frac{mg}{b}. \quad (c)$$

Это предельное значение соответствует постоянному току при установившемся состоянии. Таким образом мы и здесь имеем далеко идущую аналогию с электромагнитными процессами.

§ 3. Применение теории движения в сопротивляющейся среде к определению заряда электрона, массы атома и числа молекул в граммолекуле.

В опытах Милликана, дающих наиболее точные данные для рассматриваемых величин, широко используется теория движения капли в сопротивляющейся среде (воздух). В конденсатор $ABCD$ (рис. 19) через трубку E вводятся микроскопические капли масла, которые под действием силы тяжести медленно (с предельной скоростью $v = \frac{mg}{b}$) падают по направлению к CD . Через щель, закрываемую заслонкой H ,

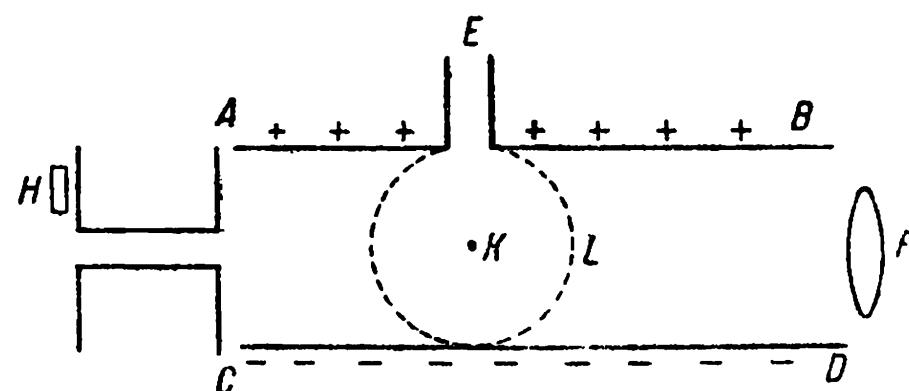


Рис. 19.

движением. Знак и величину заряда конденсатора можно по произволу изменять.

Пусть поле равно нулю, тогда капля, несмотря на свой заряд, будет падать. Ее скорость:

$$v_0 = \frac{mg}{b}. \quad (49)$$

воздух в конденсаторе освещается лучами Рентгена, причем происходит ионизация этого воздуха. Ионы попадают в капли и заряжают их. Выбрав одну из капель, при помощи микроскопа L (расположен перпендикулярно плоскости чертежа) следят за ее движением.

Когда капля начнет выходить из поля зрения, производят ионизацию, включают поле и подбирают знак и величину его так, чтобы капля начала подниматься. Тогда скорость ее определится из уравнения:

$$bv_1 = Ee - mg. \quad (49')$$

Операцию эту повторяют несколько раз над одной и той же каплей и при одном и том же значении напряжения поля E .

Для того чтобы найти абсолютное значение заряда электрона e , требуется знать величины b и m . Доказать, что заряд капли равен целому числу e , можно гораздо проще, как мы сейчас и покажем. Делим (49') на (49):

$$\frac{Ee_1 - mg}{mg} = \frac{v_1}{v_0}, \text{ или } Ee_1 = mg \frac{v_0 + v_1}{v_0}. \quad (50)$$

Так как при втором, третьем и т. д. подъеме капли в конденсаторе заряд капли будет, вообще говоря, другой, то, следовательно, и скорости подъема будут другие: v_2, v_3 . Из выражения (50) и ему подобных находим:

$$e_1 : e_2 : e_3 : \dots = (v_0 + v_1) : (v_0 + v_2) : (v_0 + v_3) : \dots$$

Если действительно

$$e_1 = n_1 e, e_2 = n_2 e, e_3 = n_3 e, \quad (51)$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа, а e — элементарный заряд, то суммы $v_0 + v_1, v_0 + v_2, v_0 + v_3$ должны относиться, как эти целые числа, т. е. можно найти число, умножив которое на ряд целых чисел, мы получим данные из опыта суммы $v_0 + v_1, v_0 + v_2$ и т. д.

Таким образом для проверки этого основного положения теории электронов достаточно измерить скорости v_0 и v_1, v_2 и т. д., а это достигается с помощью секундомера, определяющего время прохождения капли через две последовательные нити в поле зрения трубы, что соответствует известному расстоянию.

Для абсолютных измерений требуется знать величину b . Считая каплю шарообразной, мы по теории Стокса можем принять $b = 6\pi\mu a$, где a — радиус капли, а μ — коэффициент внутреннего трения воздуха.

Тогда для массы капли надо взять $\frac{4}{3}\pi a^3(D - d)$, где D — плотность капли, а d — плотность воздуха (поправка на закон Архимеда).

Вставляя эти данные в уравнение (49), находим:

$$v_0 = \frac{2}{9} \frac{a^2 (D - d) g}{\mu}. \quad (52)$$

Уравнение (52) позволяет найти a , с помощью же a находим m и b ; тогда любое из уравнений (49) даст нам возможность найти абсолютное значение заряда e . В приведенном расчете мы не вводим ряда поправок, принятых во внимание Милликаном, и в частности, не приводим поправки на скольжение в газе (при этой поправке вместо коэффициента $b = 6\pi\mu a$ вводится несколько более сложное выражение).

Если принять во внимание все эти поправки, то для заряда электрона получается следующая величина:

$$e = (4,774 \pm 0,005) \cdot 10^{-10} \text{ электростатических единиц.}$$

Нетрудно показать, что величина заряда электрона дает нам сейчас же возможность найти массу любого атома и число атомов или молекул в любом объеме.

В самом деле, если мы подвергли электролизу подкисленную воду и получили одну граммолекулу водорода, то, обозначая через m массу молекулы, через N — число их в граммолекуле, через e — заряд электрона и через E и Q — общий заряд, прошедший через электролит и массу выделившегося водорода, мы получим следующие соотношения:

$$E = e \cdot N \quad (a)$$

и

$$Q = mN. \quad (b)$$

Отсюда ясно, что всякий способ, дающий нам возможность измерить какую-либо из трех величин e , m или N , с помощью (a) и (b) дает нам возможность найти и две другие величины, так как E и Q легко непосредственно измерить. С помощью этого приема мы получаем по найденной Милликаном величине e следующие значения:

масса атома водорода: $m = (1,662 \pm 0,002) \cdot 10^{-24} \text{ г,}$

число молекул в граммолекуле: $N = (60,62 \pm 0,006) \cdot 10^{22}.$

Опыты Милликана не раз пробовал опровергнуть проф. Эренгафт в Вене: он целым рядом весьма остроумных опытов пытался доказать, что не существует заряда электрона как некоторого элементарного заряда, что можно получить дробные заряды электрона. Однако при ближайшем анализе каждый раз оказывалось, что у Эренгафта не были соблюдены некоторые условия. Так, в одной серии опытов с ультрамикроскопическими каплями не были приняты надлежащие меры для предохранения капель от пыли, которая наседала на капли и вызывала изменение формы капель, и следовательно, нельзя было уже, по существу, применять закон Стокса. Точно так же в опытах с твердыми распыленными хлопьями металла (ультрамикроскопическими) нельзя считать, как это делает Эренгафт, что частицы имеют шарообразную форму.

Спор Милликана с Эренгафтом представляет большой интерес с чисто методологической точки зрения. Милликан совершенно правильно критиковал и критикует Эренгафта, считая, что ему не удалось разделить электрон; но в то же время Милликан твердо стоит на той точке зрения, что нельзя считать электрон, так же как и атом, неделимы. Посмотрим, что писал еще в 1912 г. Милликан по поводу неделимости атома: „Атомистическая теория материи, например, ни в малейшей степени не была затронута открытием радиоактивных веществ и делимости атома, так как никто, прошедший в науке курс высшей школы, никогда и не думал утверждать неделимость атома, и это по той простой причине, что у нас не было никаких оснований высказывать какие-либо утверждения относительно внутреннего строения атома. Мы знали, что имеется какое-то мельчайшее нечто, участвующее в химических реак-

циях, и мы назвали это нечто атомом, оставляя вопрос о его внутреннем строении будущему, которое вполне оправдало оказанное ему доверие".

Точно так же Дж. Дж. Томсон в своей речи „По ту сторону электрона“ определенно говорит о том, что пришло время теперь поставить вопрос, из чего построены протоны и электроны; и тем не менее, и Томсон и Милликан спорят против Эренграфта, и они кругом правы.

Признание электрона как некоторой „неделимой“ элементарной частицы нисколько не противоречит возможности разделить его на части при соответствующих условиях. Электрон, как и атом, неделим в известном смысле: ведь при химических реакциях атом не расщепляется (если отвлечься от перегруппировок его внешних электронов). Таким образом на вопрос, — делимы или неделимы электрон и атом, мы должны отвечать диалектически: и да и нет. В целом ряде случаев электрон ведет себя, как неделимая единица, в том числе и в опытах Эренграфта, вопреки его собственному мнению. Но можно ли сказать, что электрон абсолютно неделим? Всякий, кто даже стихийно приближается к диалектическому мышлению, как, например, Милликан или Дж. Дж. Томсон, отвечает решительно — нет. А Томсон в своих позднейших работах указывает даже на наиболее вероятную структуру электрона, о чем у нас будет речь в VI части курса.

Однако среди физиков, особенно среди современных теоретиков, есть очень много таких, которые придерживаются иных взглядов. Так, Макс Борн в своих лекциях по атомной динамике высказывает мысль, что электрон — это окончательная элементарная частица, которую дальше делить нельзя. На этой же позиции стоит и проф. И. Е. Тамм, который начинает свои „Основы теории электричества“ следующим утверждением: „Согласно современным воззрениям электричество состоит из неделимых частиц, или атомов электричества: электронов (атомов отрицательного электричества) и протонов (атомов положительного электричества)“.

Глава IV.

Вынужденные колебания.

§ 1. Система под действием постоянной силы и периодической силы, но в обоих случаях при отсутствии сопротивления.

В гл. I мы рассмотрели идеальный случай колебания системы, не связанной, если так можно выразиться, с окружающим миром. На ряде примеров мы могли убедиться, что в первом приближении эта абстрактная теория правильно изображает реальные процессы. В дальнейшем (гл. II) мы рассмотрели влияние окружающей среды, но оно выражалось только в виде сопротивления движению и имело своим результатом переход механической энергии в энергию тепловую. Переходим теперь к более сложному случаю — к изучению воздействий внешних сил на систему, в которой возможны гармонические колебания.

Начнем с простейшего случая — с действия постоянной силы.

Пусть на систему, рассмотренную нами в гл. I, действует постоянная сила X_0 :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x + X_0. \quad (53)$$

Делим обе части уравнения на m и вводим прежнее обозначение $n_0^2 = \frac{a^2}{m}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n_0^2 \left(x - \frac{X_0}{mn_0^2} \right). \quad (53')$$

Так как X_0 — величина постоянная, то, вводя новое переменное $y = x - \frac{X_0}{mn_0^2}$, мы приводим уравнение к виду (4) гл. I. Поэтому решением уравнения (53) будет:

$$y = R \sin(n_0 t + \gamma),$$

или

$$x = \frac{X_0}{mn_0^2} + R \sin(n_0 t + \gamma). \quad (53'')$$

Таким образом влияние внешней силы сводится к тому, что происходит смещение положения равновесия. Положение равновесия вместо $x=0$ получается $x_0 = \frac{X_0}{mn_0^2}$. Величину этого смещения можно получить следующим образом. Ставим вопрос: при каких условиях силы, действующие на систему, дадут равновесие? Ответ: если имеет место $-a^2x + X_0 = 0$, т. е. если

$$x_0 = \frac{X_0}{a^2} = \frac{X_0}{mn_0^2}. \quad (54)$$

Пусть теперь на ту же систему действует периодическая сила $X_0 \cos pt$, где p , вообще говоря, не равно частоте n_0 собственных колебаний данной системы.

При этих условиях получим уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = X_0 \cos pt,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n_0^2x = X_1 \cos pt, \quad (55)$$

где $X_1 = \frac{X_0}{m}$.

Посмотрим, при каких условиях функция

$$x = A \cos pt \quad (56)$$

будет служить решением, хотя бы и частным, для (55). Выполняя подстановку, находим:

$$A(n_0^2 - p^2) = X_1. \quad (56')$$

Итак, если A удовлетворяет условию (56'), то (56) будет решением (55). Чтобы найти общее решение, поступаем так же, как и в соответствующем случае при решении уравнения (а) (гл. III, пример 2).

Заменяя

$$x = \frac{X_1}{n_0^2 - p^2} \cos pt + y,$$

находим для y :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n_0^2 y = 0,$$

откуда вытекает и общее решение уравнения (55):

$$x = \frac{X_0}{m(n_0^2 - p^2)} \cos pt + A \sin n_0 t + B \cos n_0 t. \quad (57)$$

Первый член (57) представляет собой вынужденное колебание с частотой p , равной частоте призывающей силы, второй и третий представляют собой собственное колебание.

Если n_0^2 больше p^2 , т. е. если собственный период меньше периода призывающей силы, то знак множителя при $\cos pt$ положительный, т. е. фаза призывающей силы совпадает с фазой вынужденного колебания. Если же n_0^2 меньше p^2 , т. е. если период колебания призывающей силы

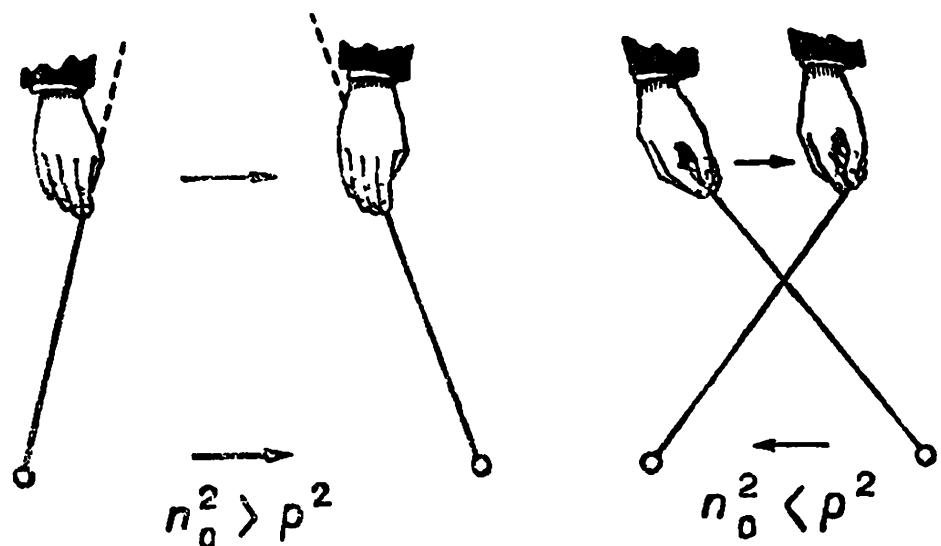


Рис. 20a.

Рис. 20b.

меньше, чем собственный период системы, тогда знак множителя при $\cos pt$ будет отрицательный, а это значит, что фаза колебания отстает на 180° , или на величину π , от фазы призывающей силы.

Этот вывод легко можно проверить на опыте, перемещая точку привеса небольшого маятника, как указано на рис. 20a и 20b.

Нам остается исследовать случай $n_0^2 = p^2$. В этом случае x обращается в бесконечность. Для того чтобы выяснить, какой физический смысл имеет этот случай, определим произвольные постоянные A и B , полагая, что, при $t = 0$, $x = x_0$ и $\frac{dx}{dt}_{t=0} = v_0$. Эти условия дают:

$$x_0 = \frac{X_0}{m(n_0^2 - p^2)} + B \quad \text{и} \quad v_0 = A n_0, \quad (58)$$

откуда, после некоторых преобразований, находим:

$$x = \frac{X_0}{m(n_0^2 - p^2)} (\cos pt - \cos n_0 t) + \frac{v_0}{n_0} \sin n_0 t + x_0 \cos n_0 t. \quad (57')$$

Выражение (57') можно представить следующим образом:

$$x = \frac{X_0 t \sin \frac{p+n_0}{2} t \sin \frac{n_0-p}{2} t}{(n_0+p) \frac{(n_0-p)}{2} t} + \frac{v_0}{n_0} \sin n_0 t + x_0 \cos n_0 t. \quad (57'')$$

Если мы перейдем к пределу, полагая $p = n_0$, то у нас получается.

$$x = \frac{X_0 t}{2n_0} \sin n_0 t + \frac{v_0}{n_0} \sin n_0 t + x_0 \cos n_0 t. \quad (57''')$$

Таким образом оказывается, что по мере возрастания времени неопределенно возрастает амплитуда колебания, но, во всяком случае, при конечных значениях t амплитуда в бесконечность не обращается. Физический смысл этого решения следующий. Внешняя сила, производя над данной системой работу, увеличивает ее запас энергии. Так как мы не включили в уравнение (65) силу сопротивления, то, следовательно, наша система энергии не теряет: поступающая в нее энергия в ней накапливается, отчего и возрастает амплитуда и притом неограниченно. На практике сопротивление всегда налицо, поэтому рассмотренный нами случай можно рассматривать только как первое приближение, годное для тех случаев, когда сопротивление очень мало, и для небольшого промежутка времени t .

§ 2. Вынужденные колебания при наличии затухания.

Рассмотрим теперь систему, находящуюся под действием периодической силы, — стало-быть, совершающую вынужденные колебания, — при условии, что принято во внимание и сопротивление движению. В этом случае уравнение движения примет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + a^2 x = X_0 \cos pt,$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n_0^2 x = X_1 \cos pt, \quad (59)$$

где $X_1 = \frac{X_0}{m}$. Остальные же обозначения совпадают с теми, какими мы пользовались в предыдущем. Для решения уравнения поступим следующим образом: возьмем еще уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + n_0^2 y = X_1 \sin pt, \quad (59')$$

где все коэффициенты и p те же самые, что в (59). Если мы умножим

(59') на $i = \sqrt{-1}$ и сложим с (59), то мы получим уравнение для комплексной переменной $z = x + iy$ вида:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k \frac{dz}{dt} + n_0^2 z = X_1 e^{ipt}, \quad (59'')$$

так как $e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$. Если мы найдем решение для уравнения (59'') в комплексной форме, то, отделив в этом решении действительную часть от мнимой, мы получим решения уравнений (59) и (59'), в чем можно будет убедиться путем подстановки. В качестве решения (59'') полагаем

$$z = Be^{ipt}, \quad (60)$$

подставляем в (59'') и находим условие, при котором (60) будет служить решением для (59''). Производя операцию подстановки, находим:

$$B(n_0^2 - p^2 + ikp) = X_1,$$

откуда

$$B = \frac{X_1}{n_0^2 - p^2 + ikp}. \quad (60')$$

Преобразуем выражение (60'), полагая

$$n_0^2 - p^2 = D \cos \epsilon \quad \text{и} \quad kp = D \sin \epsilon.$$

Отсюда

$$D = \sqrt{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{kp}{n_0^2 - p^2}. \quad (60'')$$

Для (60') находим:

$$B = \frac{X_1}{\sqrt{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} e^{i\epsilon}.$$

Вставляя эту величину в (60) и отделяя действительную часть, находим частное решение уравнения (59):

$$x_1 = \frac{X_1}{\sqrt{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} \cos(pt - \epsilon),$$

где

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{kp}{n_0^2 - p^2}. \quad (61)$$

Общее решение получится путем присоединения к (61) общего решения (59) без второй части. Путь решения такой же, как в предыдущем параграфе.

Итак, общее решение (59) будет:

$$x = \frac{X_1}{\sqrt{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} \cos(pt - \epsilon) + e^{-\frac{k}{2}t} \left(A \sin n_1 t + B \cos n_1 t \right). \quad (61')$$

где $n_1 = \sqrt{n_0^2 - \frac{k^2}{4}}$ — частота свободных колебаний. Это общее решение представляет собой наложение двух движений: принужденного с частотой p , равной частоте внешней приводящей силы, и свободных затухающих колебаний. По истечении достаточно большого промежутка времени затухающие колебания исчезнут, и останется только первый член. Если мы положим $k=0$, то (61') принимает вид (57) предыдущего параграфа, так как ϵ при этом условии обращается в нуль, а n_1 в n_0 .

Займемся теперь изучением изменения разности фаз ϵ вынужденного колебания и возбуждающей его силы в зависимости от $\xi = \frac{p}{n_0}$ — отношения частоты приводящей силы к частоте собственных колебаний.

Вводим ξ в (60'):

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\frac{k}{n_0} \xi}{1 - \xi^2}.$$

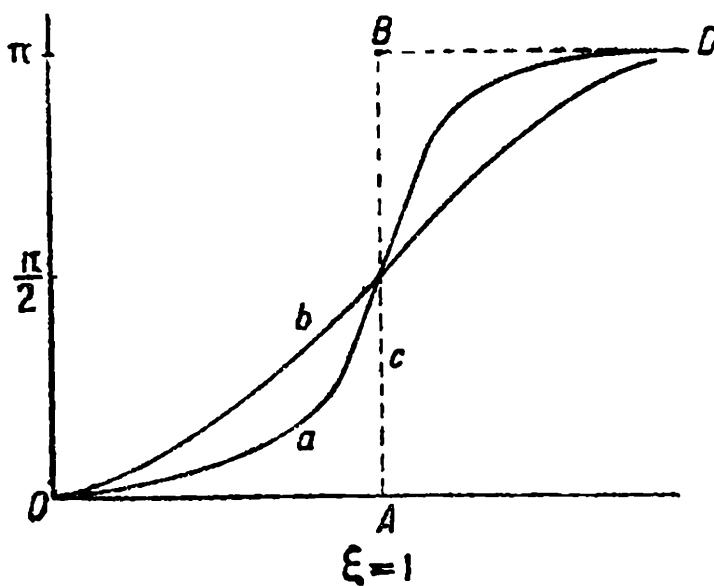


Рис. 21.

вблизи $\xi=0$ и тем быстрее будет возрастать ϵ по мере приближения ξ к $\xi=1$. В предельном случае $k=0$ (§ 1 настоящей главы) мы имели $\epsilon=0$ для $\xi < 1$ и $\epsilon=\pi$ для $\xi > 1$. На рис. 21 изображены две кривые a и b , из которых b соответствует более сильному затуханию, чем a . Пунктиром обозначен ход кривой для случая $k=0$.

§ 3. Примеры.

Пример 1. Пусть мы имеем систему, которая может совершать колебания по закону $m \frac{d^2x}{dt^2} = -m n_0^2 x$ к которой находится в положении равновесия. Пусть с момента $t=0$ до $t_1 = \frac{T_0}{6}$ на систему действовала постоянная сила X_0 . Далее, с момента $t_1 = \frac{T_0}{6}$ до $t_2 = \frac{T_0}{3}$ действие силы прекращается. Наконец, с момента $t_2 = \frac{T_0}{3}$ сила X_0 начинает действовать непрерывно. Спрашивается, как велико будет в момент t_2 смещение системы из положения равновесия и как велика ее скорость?

В этой задаче указан способ, как можно „успокоить“ около нового „положения“ равновесия систему с очень малым затуханием. В нашем примере взят предельный случай затухания, равного нулю.

Решение. Разделяем все движение на три интервала: а) от $t=0$ до $\frac{T_0}{6}$, б) от $\frac{T_0}{6}$ до $\frac{T_0}{3}$, с) после $\frac{T_0}{3}$. В первый интервал сила X_0 налицо, поэтому на основании § 1 имеем:

$$x = \frac{X_0}{mn_0^2} + A \sin n_0 t + B \cos n_0 t,$$

так как при $t=0$ система была в покое. Мы имеем для $t=0$ $x=0$ и $\frac{dx}{dt}=0$, или $\frac{X_0}{mn_0^2} + B = 0$ и $An_0 = 0$. Поэтому для первого интервала имеем:

$$x = \frac{X_0}{mn_0^2} (1 - \cos n_0 t)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = n_0 \frac{X_0}{mn_0^2} \sin n_0 t. \quad (\text{а})$$

Вставляя в (а) вместо t значение $t = \frac{T_0}{6}$, мы получаем к началу следующего интервала:

$$x_0 = \frac{X_0}{2mn_0^2}$$

и

$$v_0 = \frac{X_0}{2mn_0} \sqrt{3}. \quad (\text{б})$$

Эти величины будут служить начальными данными для того, чтобы определить произвольные постоянные для движения, происходящего в течение второго интервала движения (когда действие силы X_0 выключено), и когда движение будет происходить по закону:

$$x = A_1 \cos n_0 t + B_1 \sin n_0 t$$

и

$$v = -n_0 A_1 \sin n_0 t + n_0 B_1 \cos n_0 t. \quad (\text{с})$$

Принимая во внимание (б), имеем:

$$x = \frac{1}{2} \frac{X_0}{mn_0^2} \cos n_0 t + \frac{X_0}{2mn_0} \sqrt{3} \sin n_0 t$$

и

$$v = -\frac{X_0}{2mn_0} \sin n_0 t + \frac{X_0}{2mn_0} \sqrt{3} \cos n_0 t. \quad (\text{д})$$

Подставляя в (д) вместо $t = \frac{T_0}{6}$ (мы во втором интервале времени начинаем счет его с начала второго интервала), приходим к выводу, что $x_1 = \frac{X_0}{mn_0^2}$ и $v_1 = 0$; но это совпадает с положением равновесия для

случае, когда налицо сила X_0 . Поэтому наша система должна оставаться в покое, если сила X_0 будет включена в момент $\frac{T_0}{3}$. Посмотрим, как можно легко решить эту задачу путем геометрического построения. Отложим от начала координат O (рис. 22) (положение равновесия при отсутствии силы) отрезок $\frac{X_0}{mn_0^2} = OB$ и из B радиусом OB проведем окружность OA .

В первый интервал движение начинается из точки $x=0$ и $v_0=0$. Следовательно, равномерно движущаяся точка, проекцией которой служит рассматриваемое движение, пройдет за $\frac{T_0}{6}$ путь по дуге OA . В этот момент действие силы X_0 прекращается, а следовательно, положение равновесия перемещается в $x=0$. Теперь движение вспомогательной точки будет происходить по дуге AB .

За время $\frac{T_0}{6}$ пройденный путь будет $AB=OA$. Но в этот момент как раз включается сила X_0 ; система же будет находиться к этому моменту в положении равновесия, соответствующем наличию силы X_0 : ведь B есть положение равновесия при наличии силы X_0 . Скорость же будет равна нулю, потому что точка B

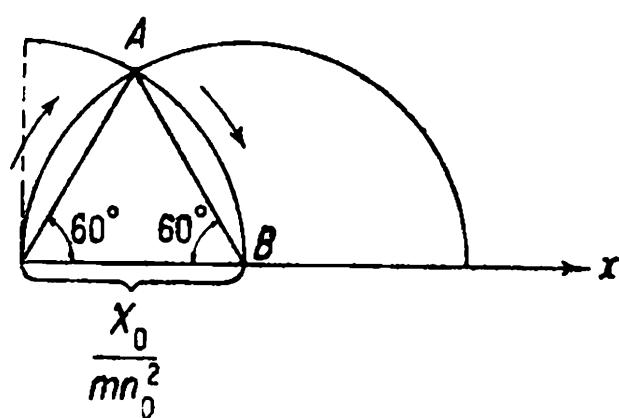


Рис. 22.

служила точкой поворота для движения во „втором интервале“ (с положением равновесия в $x=0$).

Пример 2. Масса $m=981 \text{ кг}$ совершает вынужденные колебания при следующих условиях: а) упругая сила такова, что смещение из положения равновесия $l=1 \text{ см}$ требует силы $P=10 \text{ кг}$; б) затухание определяется тем, что при скорости $v=1 \text{ м/сек}$ сила сопротивления $F=20 \text{ кг}$; в) амплитуда вынуждающей силы $X_0=0,5 \text{ кг}$. Требуется: 1) выразить все величины в системе единиц CGS; 2) определить период T при резонансе; 3) определить амплитуды колебаний при $T_1=3''$, $T_2=2,2''$ и при резонансе.

Решение. Имеем $al=P$, $bv=F$ и $X_1=\frac{X_0}{m}$. Подставляя заданные величины и переводя их в единицы CGS, имеем:

$$\text{а)} n_0^2 = \frac{a^2}{m} = \frac{P}{lm} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 981}{981 \cdot 10^3} = 10 \text{ CGS},$$

$$\text{б)} \frac{m}{b} = k = \frac{F}{m \cdot v} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 981}{10^2 \cdot 981 \cdot 10^3} = 0,2 \text{ CGS},$$

$$\text{в)} X_1 = \frac{X_0}{m} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 981}{981 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ CGS}.$$

Далее, определяем период силы при резонансе: $T = \frac{2\pi}{n_0} \approx 1'',98$.

Амплитуда определяется по (61'):

$$A = \frac{X_0}{m} \sqrt{\frac{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}}.$$

При резонансе имеем:

$$A_2 = \frac{X_1}{kn_0} \approx 0,79 \text{ см} \approx 7,9 \text{ мм.}$$

Для $A_{2'',2} \approx 2,54 \text{ мм}$, для $A_{3''} \approx 0,89 \text{ мм}$.

Мы видим, как вблизи резонанса малое изменение периода с $2'',2$ до $1'',98$ вызывает резкое изменение амплитуды с 2,5 до 8 мм.

Пример 3. Данна цепь с омическим сопротивлением R и самоиндукцией L . В цепь включен конденсатор ёмкости C и введена внешняя электродвижущая сила $E = E_0 \sin pt$ ¹. Определить силу тока.

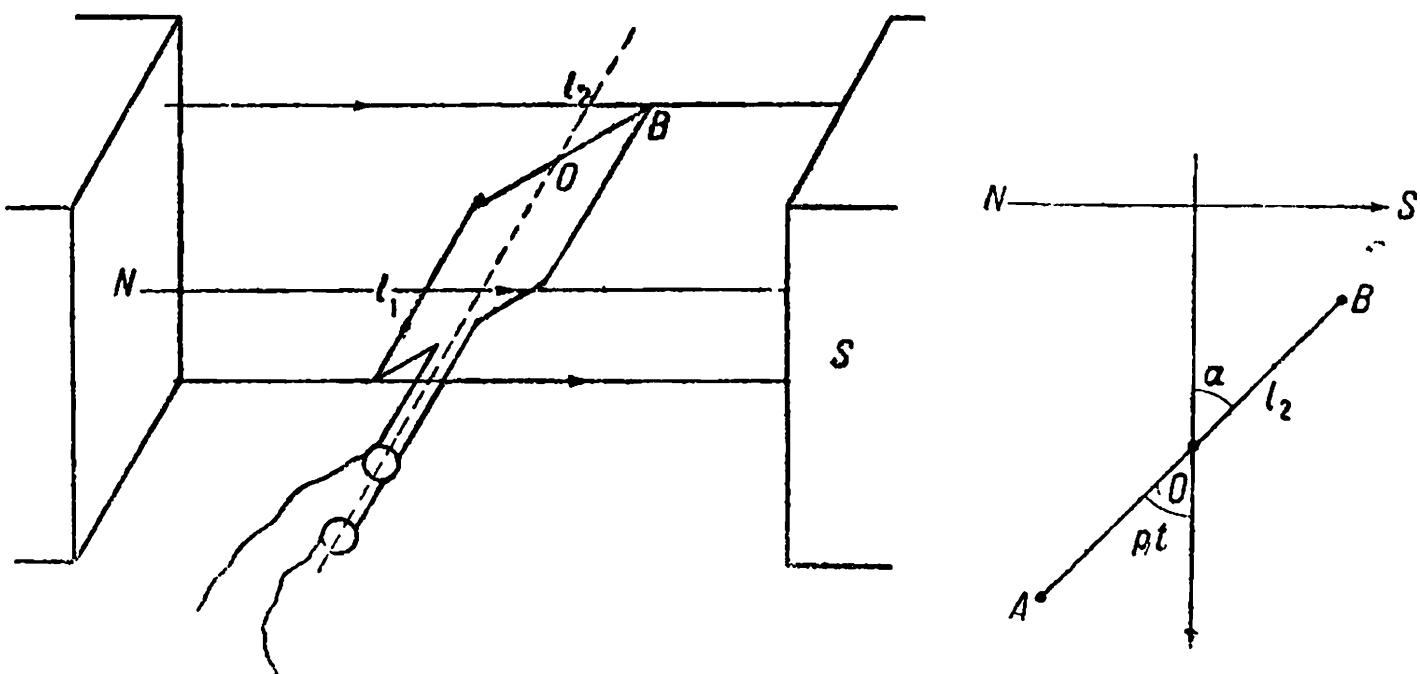


Рис. 23а.

Рис. 23б.

По обобщенному закону Ома имеем:

$$RI = E + V + E_s. \quad (\text{a})$$

Кроме того, попрежнему имеем:

$$I = -C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{b})$$

¹ Простейшим источником синусоидальной электродвижущей силы является плоская рамка AB , обернутая изолированной проволокой, равномерно вращающаяся в однородном магнитном поле (рис. 23а и 23б). Величина потока Φ , пронизывающего рамку AB , как это ясно из чертежей, выражается: $\Phi = \Phi_0 l_1 l_2 \cos pt$, где Φ_0 — число линий сил, рассчитанных на 1 см² плоскости, перпендикулярной к линиям сил. Электродвижущая сила, как мы видели (гл. II, § 3):

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0 l_1 l_2 p \sin pt = L_0 \sin pt.$$

Таким образом изменение электродвижущей силы со временем формально подчиняется законам простого гармонического колебания.

т. е. сила тока равна убыли заряда конденсатора, отнесенного к единице времени; точно так же

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Подставляя эти величины в (a) и дифференцируя (a) по t , находим:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E_0 p \cos pt. \quad (\text{c})$$

Решение. На основании изложенного в § 2 настоящей главы для силы тока I находим следующую величину:

$$I = \frac{\frac{E_0 p}{L} \cos(pt - \epsilon)}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - p^2\right)^2 + \frac{R^2 p^2}{L^2}}} + A e^{-\frac{R}{L}t} \sin(n_1 t + \gamma), \quad (\text{d})$$

где ϵ определяется из условия

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\frac{R p}{L}}{\frac{1}{LC} - p^2}. \quad (\text{d}')$$

Первый член (d) можно переписать в следующем виде:

$$I_1 = \frac{E_0 \cos(pt - \epsilon)}{\sqrt{\left(Lp - \frac{1}{Cp}\right)^2 + R^2}}, \quad (\text{d}'')$$

а также

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{R}{\frac{1}{Cp} - Lp}. \quad (\text{d}''')$$

Всякий, знакомый с элементарной теорией переменных токов, сразу заметит, что выражение для $\operatorname{tg} \epsilon$ не дает тангенса смещения фазы тока и электродвижущей силы. Мы сейчас увидим — почему. Ведь данная нам электродвижущая сила выражалась через $E_0 \sin pt$. Вместо $\sin pt$ у нас в уравнении получился $\cos pt$ потому, что мы данное уравнение проинтегрировали один раз по t .

Обозначая амплитуду силы тока через I_0 (d''), мы можем написать:

$$I_1 = I_0 \cos(pt - \epsilon) = I_0 \sin\left(pt - \epsilon + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin(pt - \varphi). \quad (\text{e})$$

Вот величина φ будет показывать действительное смещение фазы тока по сравнению с электродвижущей силой $E = E_0 \sin pt$.

Из сопоставления выражений (e) ясно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\epsilon - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \epsilon} = -\frac{Lp - \frac{1}{Cp}}{R}, \quad (\text{f}).$$

т. е. выражение, знакомое хорошо всем электротехникам. Нетрудно убедиться, что разобранный нами пример представляет собой основную задачу теории переменного тока. Мы видим, кроме того, что эта основ-

ная задача из теории переменного тока до поразительного сходна с задачей о принужденных колебаниях. Конечно, эти две задачи вовсе не тождественны, и если бы мы стали изучать те электронные процессы, которые происходят в проводах, по которым идет переменный ток, мы нашли бы много специфических отличий от рассмотренной нами механической задачи, но в тех пределах, в каких задача решается обычно электротехниками, процесс решения задачи один и тот же.

§ 4. Графическое решение уравнения вынужденного колебания.

Представим себе часовую стрелку, которая вращается с частотой p вокруг оси O (рис. 24). Пусть в момент $t=0$ стрелка занимает положение OA_0 , а в момент t — положение OA , повернутое на угол pt . Возьмем отрезок $I_0 = OB$, отложенный под прямым углом к нулевому положению стрелки OA_0 (вправо на рис. 24). Условимся проектировать точку B на вращающуюся стрелку. Из чертежа ясно, что $Ob = I_0 \sin pt$. Таким образом всякий отрезок Ob , отложенный, как уже было указано, в нашей диаграмме, изображает величину, изменяющуюся по закону $\sin pt$. Нетрудно убедиться, что OB_1 представляет собой величину, меняющуюся по закону $-\sin pt$, а OC по закону $+\cos pt$.

Теперь посмотрим, как решить графически уравнение (59) § 2. Мы возьмем его в форме, данной в примере 2 (§ 3). Обобщенный закон Ома можно написать в следующем виде:

$$E = RI_0 - E_s - V. \quad (62)$$

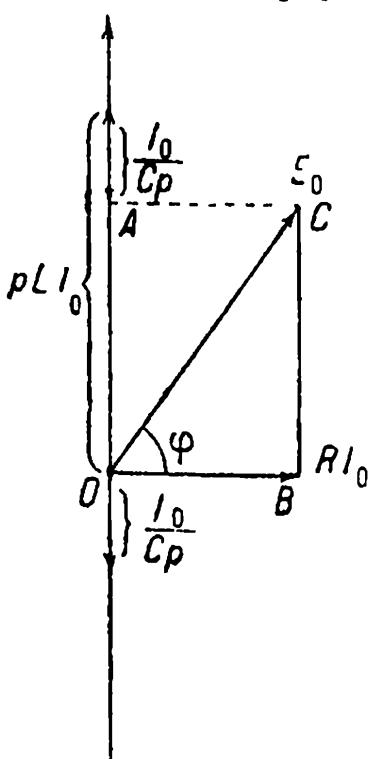


Рис. 25

Будем исходить из того, что $I = I_0 \sin pt$; тогда ясно, что на диаграмме (рис. 25) надо отложить RI_0 вправо от начала O , т. е. перпендикулярно нулевому положению часовой стрелки. Далее, $E_s = -L \frac{dI}{dt}$, откуда $-E_s = pLI_0 \cos pt$, поэтому pLI_0 откладываем на диаграмме вверх от O (по направлению нулевого положения стрелки). На основании условия $I = -C \frac{dV}{dt}$ находим, что $V = V_0 \cos pt$, так как тогда $I = pCV_0 \sin pt = I_0 \sin pt$ и, следовательно, амплитуда $V_0 = \frac{I_0}{Cp}$. Так как в (62)

стоит $-V$, то, следовательно, $V_0 = \frac{I_0}{Cp}$ надо отложить вниз от O . Вычитая $\frac{I_0}{Cp}$ из $I_0 p L$, получаем отрезок $OA = I_0 \left(pL - \frac{1}{pC} \right)$.

Чтобы получить мгновенное значение (для момента времени t) величины E_0 , надо взять, как сумму, проекции на часовую стрелку величин OA и OB , но это значит, что надо сложить по правилу параллелограмма OA и OB . Эта геометрическая сумма, следовательно, и будет величиной E_0 .

Из прямоугольного треугольника OCB имеем:

$$E_0^2 = R^2 I_0^2 + \left(Lp - \frac{1}{pC} \right)^2 I_0^2,$$

или

$$I_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\left(Lp - \frac{1}{pC} \right)^2 + R^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Lp - \frac{1}{pC}}{R},$$

т. е. мы получаем решение уравнения принужденного колебания или решение уравнения из теории переменного тока. Необходимо отметить слабую сторону нашего решения: графически мы можем найти только частный интеграл, который представляет собой установившийся процесс. В начальный момент к найденному решению

$$I = \frac{E_0 \sin(pt - \varepsilon)}{\sqrt{\left(Lp - \frac{1}{pC} \right)^2 + R^2}}$$

прибавляется

$$+ A e^{-\frac{R}{2L} t} \sin(n_1 t + \gamma).$$

Вот эту дополнительную функцию, играющую большую роль в неустановившемся процессе, мы получить графическим путем не можем.

§ 5. Примеры.

Пример 1. Эффективное напряжение $E = 120$ вольт. Омическое сопротивление $R = 5$ ом. Эффективная¹ сила тока $I = 20$ ампер. Как велик $\cos \varphi$, если емкость $C = \infty$?

¹ Эффективную силу тока можно определить так: это сила такого постоянного тока, который вызывает такое же тепловое действие, как и данный переменный ток:

$$Q = RI^2 = RI_0^2 \int_0^T \sin^2 pt dt \cdot \frac{1}{T} = \frac{RI_0^2}{2} = RI_{eff}^2,$$

откуда $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Это дает возможность во всех выражениях заменить амплитуды силы тока и напряжения эффективными значениями для этого надо обе части равенства делить на $\sqrt{2}$.

Решение.

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + p^2 L^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{pL}{R},$$

откуда

$$I = \frac{E}{R \sqrt{1 + \frac{p^2 L^2}{R^2}}} = \frac{E}{R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{E}{R} \cos \varphi.$$

Решая относительно $\cos \varphi$, имеем:

$$\cos \varphi = \frac{IR}{E} = \frac{100}{120} = 0,833.$$

Геометрически эту задачу можно решить так. Откладываем отрезок $OA = RI_0$ (рис. 26), из точки A восставляем к OA перпендикуляр, а из точки O радиусом $OC = E$ описываем окружность. Соединяя O с точкой C пересечения перпендикуляра с окружностью, получаем треугольник OAC . Искомый $\cos \varphi$ находится как отношение OA к OC .

Пример 2. Электродвижущая сила (эффективная) машины переменного тока $E = 10^4$ вольт. Самоиндукция машины $L = 0,4$ генри. Машина замкнута на конденсатор емкости $C = 2,5 \cdot 10^{-6}$ фарад. Омическое сопротивление $R = 2,5$ ом (главным образом соединительных проводов). Число периодов $v = 50$.

При какой частоте будет явление резонанса? Как велика сила тока при резонансе? Как велико напряжение на обкладках конденсатора при резонансе?

Решение. Резонанс будет иметь место при

$$Lp - \frac{1}{pC} = 0,$$

или при

$$p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi v,$$

откуда

$$v = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28} \cdot \frac{10^3}{\sqrt{2,5 \cdot 0,4}} = 159,5 \approx 160.$$

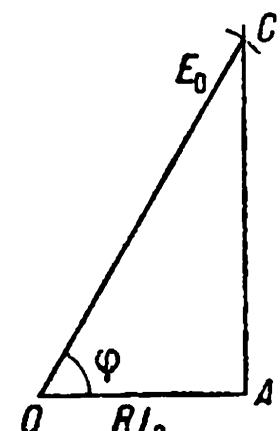


Рис. 26.

Сила тока $I_r = \frac{E_0}{R} = 400$ ампер. Напряжение на обкладках конденсатора $V_0 = \frac{I_0}{pC} = \frac{4 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}} = 1,6 \cdot 10^6$ вольт!

На первый взгляд, может показаться непонятным, как при электродвижущей силе $E_0 = 10^4$ вольт на одной части цепи может появиться напряжение, в 160 раз большее. Не надо, однако, забывать, что величина E_0 складывается из величин RI_0 , LpI_0 и $\frac{I_0}{pC}$ геометрически. Если мы будем разбирать на диаграмме этот случай резонанса, то мы увидим, что $\frac{I_0}{pC}$ и pLI_0 равны и противоположны. Тогда E_0 по величине и по фазе совпадает с RI_0 (рис. 27). Из сказанного ясно, какие предосторожности надо соблюдать при работе с переменными токами. При включении в цепь последовательно конденсатора и самоиндукции легко может получиться резонанс если и не для основного числа колебаний, то для какого-либо обертона, так как, вообще, наши динамомашины не дают строго синусоидального тока. Поэтому периодическая кривая тока вообще может быть разложена на ряд синусоид, периоды которых относятся, как $T: \frac{T}{2}: \frac{T}{3}: \frac{T}{4}$ и т. д.

[О разложении периодических функций см. настоящий курс, ч. II, гл. I, § 3.]

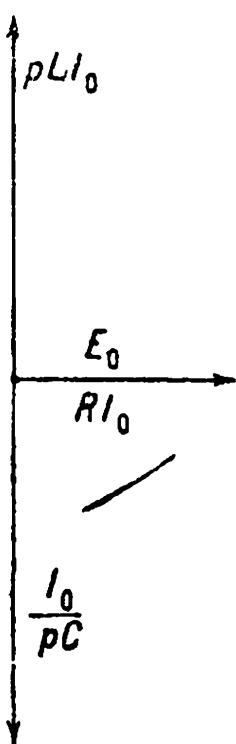


Рис. 27.

§ 6. Разбор явления резонанса.

Вернемся к уравнению вынужденного колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n_0^2 x = \frac{X_0}{m} \sin pt. \quad (63)$$

Мы видели, что частным решением этого уравнения будет функция:

$$x = \frac{\frac{X_0}{m}}{\sqrt{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} \sin(pt - \varepsilon),$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{kp}{n_0^2 - p^2}, \quad (64)$$

причем это решение соответствует установившемуся состоянию, при котором свободные колебания уже практически исчезли.

Определим теперь кинетическую энергию нашей системы:

$$U_k = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

$$U_k = \frac{\left(\frac{X_0}{m} \right)^2 p^2}{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2} \cdot \frac{m}{2} \cos^2(pt - \epsilon). \quad (65)$$

Эта величина обращается в максимум при $\cos(pt - \epsilon) = 1$. Но в колебательном движении максимум кинетической энергии сопровождается нулевым значением потенциальной энергии $U_p = \frac{a^2 x^2}{2}$ (при $x = 0$). Таким образом максимум кинетической энергии дает в то же время полную энергию нашей системы. Итак, полная энергия

$$U_{\tau} = \frac{X_0^2}{2m} \frac{p^2}{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2} \cdot \frac{k^2}{k^2} = \frac{X_0^2}{2mk^2} \sin^2 \epsilon. \quad (66)$$

Наибольшее значение энергии получится при резонансе; тогда ведь $p = n_0$ и $\sin \epsilon = 1$. Таким образом условие резонанса определяет собой максимум энергии нашей системы. Это надо понимать так. Пусть на нашу систему действует принуждающая сила $X_0 \sin pt$. Будем непрерывно менять p , сохраняя X_0 неизменным, тогда наибольшая энергия в колеблющейся системе окажется при $p = n_0$. Итак:

$$U_{\tau} = U_0 \sin^2 \epsilon. \quad (66')$$

Если мы условимся выражать энергию волях максимальной, то уравнение (66) принимает вид:

$$\eta = \frac{U_{\tau}}{U_0} = \sin^2 \epsilon = \frac{k^2 p^2}{(n_0^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}. \quad (66'')$$

Это есть уравнение так называемой резонансной кривой.

Введем в это уравнение новую переменную $\xi = \frac{p}{n_0}$ (отношение частоты принуждающего колебания к частоте собственных колебаний), для чего разделим числитель и знаменатель на n_0^4 :

$$\eta = \frac{\left(\frac{k}{n_0} \right)^2 \xi^2}{(1 - \xi^2)^2 + \xi \left(\frac{k}{n_0} \right)^2}. \quad (66''')$$

Это выражение еще более упрощается, если ввести так называемый логарифмический декремент затухания [гл. II, уравнение (33)]:

$$\sigma = \frac{kT_1}{2}.$$

В самом деле, из соотношения

$$n_1^2 = n_0^2 - \frac{k^2}{4}$$

находим:

$$\left(\frac{n_1}{k}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{k}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

или

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2 k^2} = \left(\frac{n_0}{k}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Заменяя $\sigma = \frac{kT_1}{2}$, находим:

$$\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{k}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

откуда

$$\left(\frac{k}{n_0}\right)^2 = \frac{4\sigma^2}{4\pi^2 + \sigma^2}.$$

Вставляя эту величину в (66'') и освобождаясь от знаменателя $4\pi^2 + \sigma^2$, мы находим:

$$\eta = \frac{4\sigma^2 \xi^2}{(4\pi^2 + \sigma^2)(1 - \xi^2)^2 + 4\sigma^2 \xi^2}. \quad (67)$$

Это уравнение резонансной кривой получено без всякого пренебрежения малыми величинами. На практике σ^2 — величина очень малая по сравнению с $4\pi^2$, а потому в первом члене в знаменателе (67) можно величиной σ^2 пренебречь. Тогда получаем следующее приближенное выражение:

$$\eta = \frac{\sigma^2 \xi^2}{\pi^2 (1 - \xi^2)^2 + \sigma^2 \xi^2}, \quad (67')$$

приближение, вполне достаточное для значительной части исследований рассматриваемой области. В случае же каких-либо сомнений необходимо прибегать к уравнению (67).

Рассмотрим нашу кривую (по ее уравнению) вблизи резонанса, т. е. вблизи $\xi = 1$. Возьмем для этой цели $\xi = 1 + \delta$, где δ — малая по сравнению с единицей положительная или отрицательная величина, тогда $\xi^2 \approx 1 + 2\delta$. Так как и σ^2 — малая величина, то $\sigma^2 \delta$ будет величина третьего порядка, поэтому в числителе остается только один член σ^2 . Итак:

$$\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4\pi^2 \delta^2}. \quad (67'')$$

Из (67'') видно, что кривая симметрична по отношению к точке максимума $\eta = 1$, $\xi = 1$. Действительно, η от знака δ не зависит. Кривая тем круче поднимается к максимуму, чем меньше декремент затухания σ (рис. 28). На этом рисунке сплошная кривая представляет собой кривую для малого затухания резонанс резко выражен, — энергия

быстро падает по обе стороны от резонанса. Пунктиром обозначена кривая резонанса в случае большого затухания. Когда радио было основано на затухающих волнах, все усилия инженеров были обращены на то, чтобы уменьшить затухание, так как при малом затухании установка будет отвечать на узкий интервал частот. При сильном затухании две пары установок, хотя и настроенные на разные частоты, при своей работе сильно друг другу мешают. При так называемых „незатухающих“ колебаниях резонанс выражен очень резко, а потому возможно одновременное действие нескольких станций, настроенных даже на близкие друг к другу частоты.

Из полученной экспериментальным путем резонансной кривой легко найти логарифмический декремент затухания. Обыкновенно этим способом и находят логарифмический декремент.

Решая (67") относительно σ , находим:

$$\sigma = 2\pi\delta \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}. \quad (68)$$

Таким образом, если для какого-либо значения η мы проводим линию, параллельную оси ξ (рис. 28), то эта линия даст нам хорду 2δ . Умножая ее на π и на $\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}$, мы находим величину σ . Особенно простой

результат получается, если задаться значением $\eta = \frac{1}{2}$, тогда

$$\sigma = 2\delta\pi, \quad (68')$$

т. е. величина хорды 2δ , соответствующая $\eta = \frac{1}{2}$, должна быть помножена на π , и тогда мы получаем величину логарифмического декремента σ .

До введения ламповых генераторов колебаний, т. е. в то время, когда пользовались источниками так называемых затухающих колебаний, скажем, например, волны в проволоках, получаемые в системе Лехера, — все внимание было обращено на возможно большее уменьшение затухания. Наименьшее затухание $\sigma = 0,0035$ было получено проф. В. И. Романовым в Москве в работе, опубликованной в 1918 г. Романову удалось показать, что полученные им затухания на 30% больше тех наименьших теоретических значений, какие вообще можно получить. Таким образом в использовании метода уменьшения затухания в системах с затухающими колебаниями мы, можно сказать, дошли до конца. Дальнейшее развитие учения об электромагнитных колебаниях пошло по линии изучения так называемых незатухающих волн, получаемых с помощью электронных ламп.

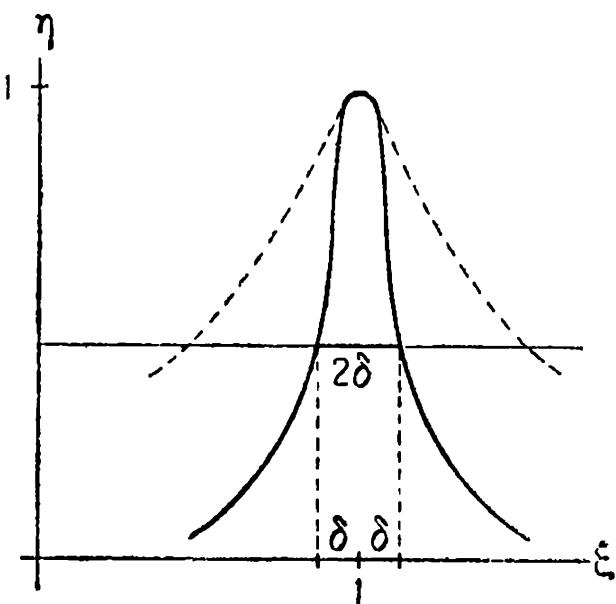


Рис. 28.

Глава V.

Теория связанных колебаний.

§ 1. Два связанных маятника.

В последней главе мы рассмотрели влияние внешней периодической силы на систему, в которой могут возникать колебания определенного периода. Однако мы не можем сказать, что если на данную систему действует внешняя сила, то этим дело ограничивается. Данная

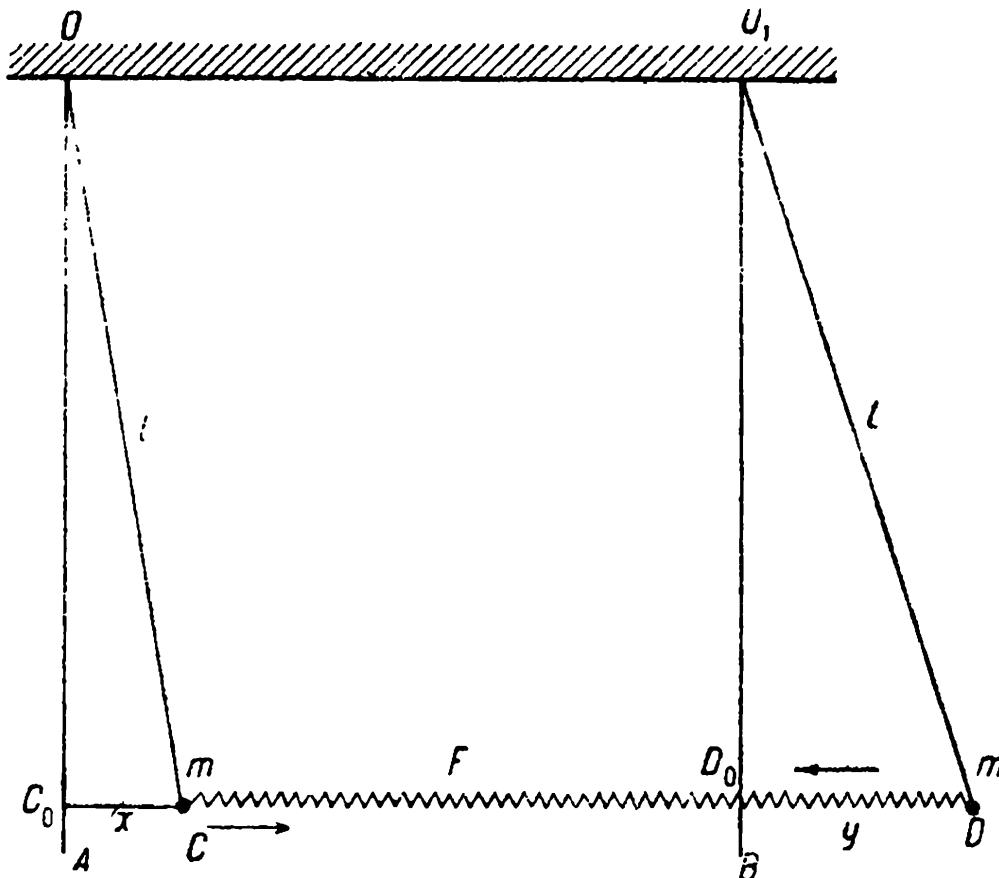


Рис. 29.

система, получающая воздействие извне, сама, в свою очередь, оказывает воздействие на то тело, которое является источником внешней силы. Это взаимодействие двух систем мы рассмотрим на ряде простейших примеров.

Рассмотрим два маятника одинаковой длины l и массы m (рис. 29), связанные между собой слабой пружинкой F . Пружина рассчитана так, что, когда маятники находятся в положении равновесия,— ее деформация равна нулю. Пусть упругая сила пружины $P = -c\xi$, где ξ —растяжение или сжатие пружины. Если смещения маятников из положения равновесия таковы, как указано на рис. 29, то сила, с которой будет укорачиваться пружина, притягивая друг к другу шарики маятника, будет равна $c(y - x)$. Поэтому уравнения движения обоих маятников будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -mg \frac{x}{l} + c(y - x), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \frac{y}{l} - c(y - x). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\frac{g}{l} = n_0^2, \quad \frac{c}{m} = a_0^2, \quad a_0^2 + n_0^2 = a_1^2. \quad (70)$$

Тогда уравнения (69) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a_1^2 x + a_0^2 y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a_1^2 y + a_0^2 x. \end{aligned} \right\} \quad (69')$$

Решить эту систему уравнений было бы всего проще, складывая и вычитая оба уравнения (69'). Но это не общий способ. В самом деле, если, например, длина маятников не одинакова, тогда для двух уравнений n_0^2 , и стало быть, и a_1^2 будут неодинаковы в обоих уравнениях (69'), а тогда при сложении и вычитании нельзя будет выделить алгебраические суммы $x+y$ и $x-y$ во всех членах.

Наиболее общий способ будет следующий: определить y из первого уравнения (69') и подставить во второе:

$$y = \frac{1}{a_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a_1^2}{a_0^2} x,$$

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a_1^4}{a_0^2} x - a_0^2 x = 0,$$

или

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2a_1^2 \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1^4 - a_0^4) x = 0. \quad (71)$$

Подставляем в это уравнение один раз $\sin pt$, в другой раз $\cos pt$. В результате подстановок мы получаем в первом случае $\sin pt$, во втором $\cos pt$, умноженный на

$$p^4 - 2a_1^2 p^2 + (a_1^4 - a_0^4) = 0, \quad (71')$$

так как ни $\sin pt$ ни $\cos pt$ нулю равняться при всех значениях t не могут. Итак, $\sin pt$ и $\cos pt$ удовлетворяют уравнению (71), если p удовлетворяет (71').

Решая биквадратное уравнение (71'), мы находим:

$$p_1^2 = a_1^2 \pm \sqrt{a_1^4 - a_1^4 + a_0^4} = a_1^2 \pm a_0^2,$$

откуда, принимая во внимание (70), находим:

$$p_1^2 = a_1^2 + a_0^2 \text{ и } p_2^2 = a_1^2 - a_0^2,$$

или

$$p_1^2 = n_0^2 + 2 \frac{c}{m} \text{ и } p_2^2 = n_0^2. \quad (72)$$

Итак, мы имеем четыре решения: $\sin p_1 t$, $\cos p_1 t$, $\sin p_2 t$, $\cos p_2 t$. Поэтому общее решение можно представить в виде:

$$x = A_1 \cos p_1 t + A_2 \cos p_2 t + B_1 \sin p_1 t + B_2 \sin p_2 t, \quad (73)$$

где A_1 , A_2 , B_1 и B_2 — произвольные постоянные. Что (73) удовлетворяет (71), можно убедиться простой подстановкой.

Составим теперь \dot{x} и \ddot{x} из (73):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -p_1 A_1 \sin p_1 t - p_2 A_2 \sin p_2 t + p_1 B_1 \cos p_1 t + p_2 B_2 \cos p_2 t, \\ \ddot{x} &= +p_1^2 A_1 \cos p_1 t + p_2^2 A_2 \cos p_2 t - p_1^2 B_1 \sin p_1 t - p_2^2 B_2 \sin p_2 t. \end{aligned} \right\} (73')$$

Вставляя (73) и (73') в выражение для y (71), имеем, принимая во внимание (72):

$$y = -A_1 \cos p_1 t + A_2 \cos p_2 t - B_1 \sin p_1 t + B_2 \sin p_2 t. \quad (74)$$

Таким образом задача наша решена. Для того чтобы более конкретно представить себе характер движения, зададимся определенными начальными данными. Пусть при $t=0$ будет $x=x_0$ и $y=0$, и пусть начальные скорости и того и другого маятника равны нулю.

Первое условие дает $x_0 = A_1 + A_2$ и $-A_1 + A_2 = 0$, что приводит к выводу: $A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$. Два оставшихся условия $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$, $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = 0$ приводят, как нетрудно убедиться, к $B_1 = B_2 = 0$.

Итак, при этих условиях (73) и (74) приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_0}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = x_0 \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t, \\ y &= \frac{x_0}{2} (\cos p_1 t - \cos p_2 t) = x_0 \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t. \end{aligned} \right\} (75)$$

Принимая во внимание, что в обычных случаях, когда связь (в данном случае пружина) слабая, величина $\frac{c}{n_0}$ мала по сравнению с единицей, — можно ограничиваться первой степенью $\frac{c}{n_0}$. Тогда для p_1 и p_2 имеем:

$$p_1 = n_0 \left(1 + 2 \frac{c}{mn_0^2} \right)^{1/2} = n_0 \left(1 + \frac{c}{mn_0^2} \right) = n_0 + \frac{c}{mn_0} \quad \text{и} \quad p_2 = n_0.$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1 + p_2}{2} &= n_0 + \frac{c}{2mn_0}, \\ \frac{p_1 - p_2}{2} &= \frac{c}{2mn_0}. \end{aligned} \right\} (76)$$

Вставляя эти величины в (75), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \left(n_0 + \frac{c}{2mn_0} \right) t \cdot \cos \frac{c}{2mn_0} t, \\ y &= x_0 \sin \left(n_0 + \frac{c}{2mn_0} \right) t \cdot \sin \frac{c}{2mn_0} t. \end{aligned} \right\} \quad (75')$$

Так как $\frac{c}{2mn_0}$ величина малая, — это значит, что и $\cos \frac{c}{2mn_0} t$ и $\sin \frac{c}{2mn_0} t$ изменяются очень медленно. Наоборот, $\cos \left(n_0 + \frac{c}{2mn_0} \right) t$ и $\sin \left(n_0 + \frac{c}{2mn_0} \right) t$ изменяются значительно быстрее. Поэтому обе величины x и y в. (75') можно рассматривать как периодические функции с медленно изменяющейся амплитудой

$$\pm x_0 \cos \frac{c}{2mn_0} t$$

и

$$x_0 \sin \frac{c}{2mn_0} t. \quad (75'')$$

Изобразим „ход“ этих амплитуд со временем (рис. 30) и, пользуясь этими амплитудами, изобразим и быстро меняющиеся периодические величины. Из сопоставления кривых x и y (рис. 30) видно, что при данном способе возбуждения первый маятник качается с все уменьшающейся амплитудой. По мере уменьшения амплитуды первого маятника увеличивается амплитуда второго. Наконец, первый маятник останавливается. В это время второй качается с максимальной амплитудой. Вся энергия колебания первого передалась второму. Далее второй маятник начинает колебаться с уменьшающейся амплитудой, зато первый раскачивается все больше и больше, и наконец, вся энергия переходит опять в первый маятник и т. д. Вообще, энергия в этой системе все

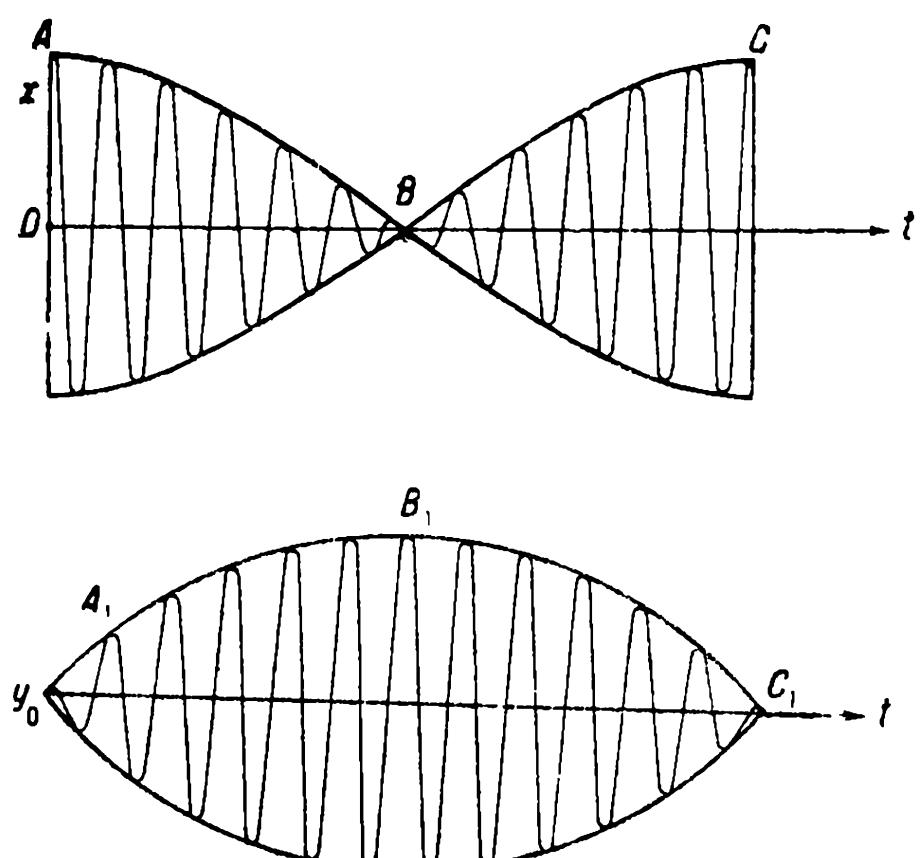


Рис. 30.

время переходит от одного маятника к другому. Как объяснить это явление? Из (75) мы видим, что в связанных маятниках каждый из них одновременно качается с двумя близкими друг к другу частотами p_1 и p_2 . Вследствие этого различия одно из колебаний отстает. Когда оно отстанет по фазе на 180° , или на π , то маятник в каждом из этих составных движений должен был бы двигаться в двух взаимно противоположных направлениях и притом одновременно и с одинаковой амплитудой, так как $A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$. Ясно,

что в этот момент маятник должен остановиться. У другого же маятника в этот же момент фазы обеих составных частей p_1 и p_2 совпадают. Это явление хорошо известно в акустике под названием биений; разница только в том, что в акустике, в обычных, по крайней мере, условиях, мы наблюдаем биения при совместном действии двух источников, притом отдельных: двух камертонов, двух органных труб, дающих близкие друг к другу частоты. В данном случае один источник колебаний — один маятник — одновременно участвует в двух колебательных движениях. Однако и в области акустики, например, в тех случаях, когда звук голоса, как говорят, вибрирует, или дрожит, голосовые связки одновременно дают два близких друг другу тона.

Нетрудно показать, что можно в нашем примере с двумя маятниками добиться того, чтобы оба маятника качались с одной из возможных частот p_1 или p_2 . В самом деле, отведем оба маятника в одну сторону на одну и ту же величину $x = y$. При этом пружина не растягивается и не сжимается. Если мы предоставим маятникам колебаться, мы увидим, что они будут качаться непрерывно, без разности фаз. Следовательно, пружина не будет играть никакой роли, и оба маятника будут качаться с частотой n_0 , как будто бы они не были связаны. В самом деле, вставляя в (69') $x = y$ и принимая во внимание (70), находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n_0^2 x \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -n_0^2 y,$$

т. е. колебания будут с частотой $p_2 = n_0$. Возьмем теперь $x = -y$, тогда получаем два уравнения типа:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(n_0^2 + 2\frac{c}{m}\right)x$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(n_0^2 + 2\frac{c}{m}\right)y,$$

т. е. оба маятника будут колебаться с частотой $p_1^2 = n_0^2 + 2\frac{c}{m}$ — второй из возможных частот.

В нашем анализе явлений в связанных маятниках мы предполагали, что затухание отсутствует. Это мы сделали для упрощения задачи, так

как иначе получаются очень сложные вычисления. Вообще же, если мы связываем две системы, имеющие одна большое затухание, другая — малое, то эти системы до известной степени „обмениваются“ своими затуханиями. Так, например, отдельно взятый (без резонансного ящика) камертон имеет очень малое затухание. Резонансный ящик имеет большое затухание. Когда мы ставим камертон на ящик, мы эти две системы связываем, причем, как все хорошо знают, звук камертона на ящике значительно сильнее, чем без ящика. Раз звук хорошо слышен, — это, значит, энергия колебания камертона передается в воздух — в те волны, которые достигают и нашего уха. Вот почему эта потеря энергии обуславливает большое затухание у камертона, — у резонансного же ящика затухание, благодаря связи с камертоном, становится меньше.

Мы не имеем возможности проследить это на уравнениях, так как это заняло бы очень много места.

Далее, принципом связанных колебаний очень остроумно пользуются для получения слабо затухающих колебаний. Так, если мы возьмем два связанных контура *I* и *II* (рис. 31), причем контур *I* содержит искровой промежуток и питается каким-нибудь внешним источником, связь¹ же между контурами *I* и *II* обусловлена общим магнитным потоком, пронизывающим обе катушки самоиндукции, то в системе возникают связанные колебания. Если же к моменту, когда в контуре *I* колебания прекратятся (благодаря биениям, как мы видели в примере с маятниками), искра исчезнет, то тогда контур *I* выключается. Вся энергия находится в контуре *II*, а так как контур *II* не содержит искрового промежутка, имеющего большое сопротивление и вызывающего большое затухание, то мы получим слабо затухающие колебания (см. кривую B_1C_1 на рис. 31). Этот прием, предложенный Максом Вином, разработанный у нас покойным проф. А. Р. Колли и усовершенствованный проф. В. И. Романовым, носит название „ударного возбуждения“. Искры в контуре *I* должны быть в виде коротких ударов; они должны потухать к тому моменту, когда энергия связанных колебаний сосредоточится в контуре *II* со слабым затуханием.

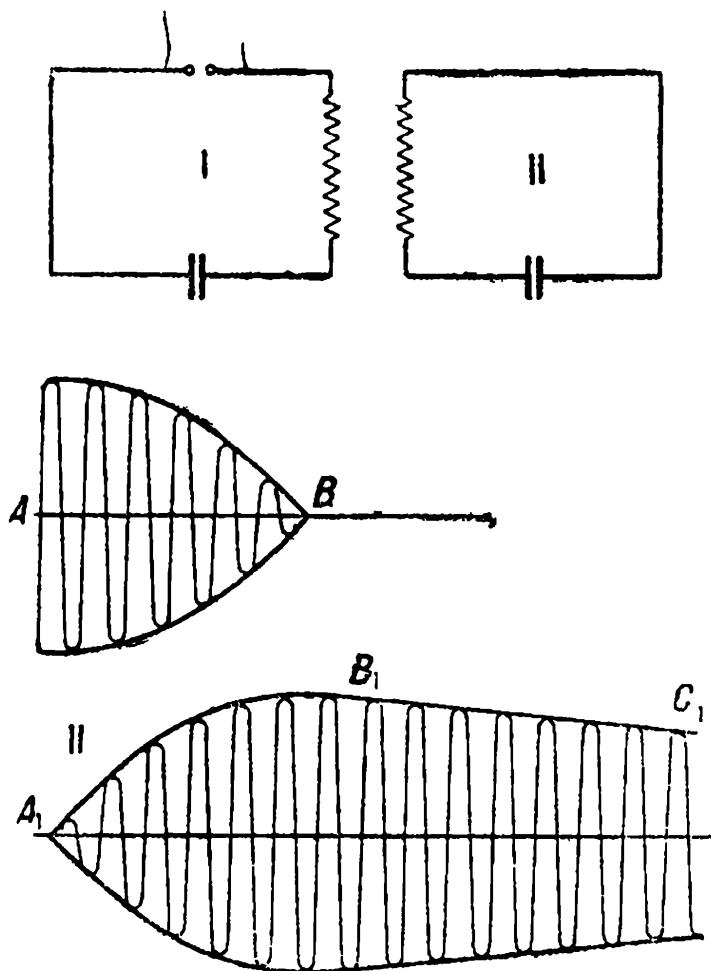


Рис. 31.

¹ О связи этого типа см. ниже, § 2, пример 3.

§ 2. Примеры.

Пример 1. Пусть масса струны сосредоточена в двух точках на расстояниях a от закрепленных концов струны (рис. 32). Далее, пусть колебания происходят в горизонтальной плоскости, что позволяет отвлечься от действия силы тяжести. Отклонения струны предполагаются малыми; α , β и γ поэтому настолько малы, что синусы могут быть заменены тангенсами. Спрашивается: а) какие периоды будут получаться на струне, и б) как надо возбудить струну, чтобы получить один из двух возможных периодов (см. пример 4 гл. I)?

Решение. Определив силы, действующие на каждую из масс, находим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -P \frac{x}{a} + P \frac{y-x}{b}$$

и

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -P \frac{y}{a} - P \frac{y-x}{b},$$

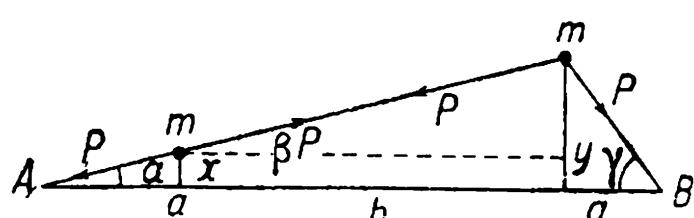
или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P}{m} \frac{a+b}{ab} x + \frac{P}{mb} y$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{P}{m} \frac{a+b}{ab} y + \frac{P}{mb} x.$$

Рис. 32.



Вводим следующие сокращенные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{m} \frac{a+b}{ab} &= \alpha_1^2 \\ \frac{P}{mb} &= \alpha_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и

Тогда уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\alpha_1^2 x - \alpha_2^2 y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\alpha_1^2 y - \alpha_2^2 x. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Сложим уравнения (b) и вычтем из первого второе, заменив в первом случае $x+y=u$ и во втором $x-y=v$; кроме того, положим:

$$\omega_1^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \frac{P}{m} \frac{1}{a}$$

и

$$n_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{P}{m} \frac{2a+b}{ab}. \quad (\text{c})$$

Принимая во внимание все сказанное, находим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -n_1^2 u \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= -n_2^2 v, \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

откуда получаются решения:

$$\left. \begin{aligned} u &= x + y = 2A_1 \cos n_1 t + 2B_1 \sin n_1 t, \\ v &= x - y = 2A_2 \cos n_2 t + 2B_2 \sin n_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{e})$$

Складывая и вычитая (e), находим:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t + A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t, \\ y &= A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t - A_2 \cos n_2 t - B_2 \sin n_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{f})$$

Обе возможные частоты определяются из (c), именно:

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{m} \frac{1}{a}}$$

и

$$n_2 = \sqrt{\frac{P}{m} \frac{2a+b}{ab}},$$

откуда

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{b}{2a+b}}.$$

Если $a=b$, то $n_1:n_2=1:\sqrt{3}$.

Чтобы получить первое из возможных колебаний с частотой n_1 , надо положить $x=y$ (рис. 33). Чтобы получить вторую частоту, надо принять $x=-y$.

Пример 2. Масса струны разделена на три равные части m , причем эти массы делят всю струну на четыре равные части a . В остальном условия те же, что в первом примере. Требуется найти возможные периоды и указать, как надо возбуждать струну, чтобы получить каждую из возможных частот в отдельности.

Решение. Подсчитываем величины сил, действующих на каждую из трех масс (рис. 34), и составляем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -P \frac{x}{a} + P \frac{y-x}{a} = -P \frac{2x}{a} + P \frac{y}{a}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -P \frac{y-x}{a} - P \frac{y-z}{a} = +P \frac{x}{a} + P \frac{z}{a} - 2P \frac{y}{a}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= P \frac{(y-z)}{a} - P \frac{z}{a} = +P \frac{y}{a} - 2P \frac{z}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

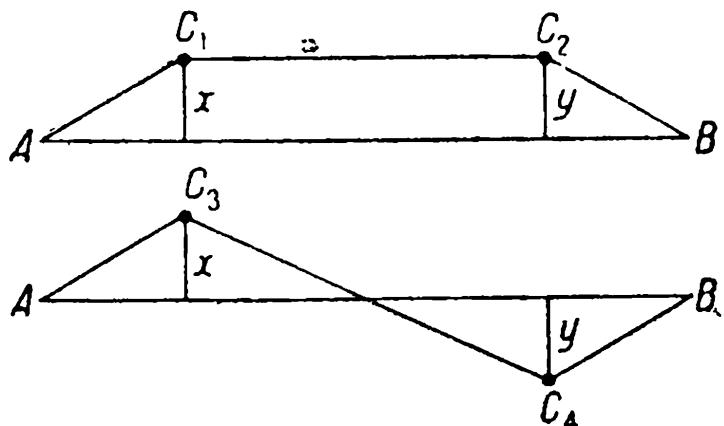


Рис. 33.

Если исключить из этих уравнений две переменные, скажем, y и z , то для x получаем уравнение 6-го порядка. Так как нам требуется найти только возможные периоды, то можно решить дело проще. Надо задаться такими значениями для x , y и z , чтобы все три уравнения (а) превратились в независимые друг от друга уравнения, так чтобы первое зависело только от x , второе только от y и третье только от z и чтобы числовые коэффициенты всех трех были одинаковы.

Одно из возможных колебаний получится при условии $y=0$, $x=-z$; тогда уравнения (а) принимают вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -P \frac{2x}{a} \quad \text{и} \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -P \frac{2z}{a}. \quad (\text{a}')$$

Частота, соответствующая этому типу колебаний, равна $n_2^2 = P \frac{2}{am}$, т. е.

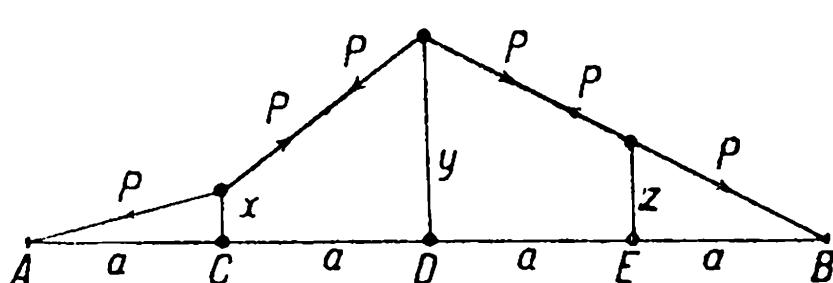


Рис. 34.

$$n_2 = \sqrt{\frac{2P}{am}}. \quad (\text{b})$$

— Другие два типа колебаний получаются следующим образом: полагаем $z=x$ и $y=ax$. Тогда уравнения (а) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -P \frac{x}{a} (2-a), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -P \frac{y}{a} \left(2 - \frac{2}{a}\right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -P \frac{z}{a} (2-a). \end{aligned} \right\} \quad (\text{a}'')$$

Для того чтобы все три уравнения имели одинаковые коэффициенты, необходимо, чтобы $2-a=2-\frac{2}{a}$, или $a^2=2$, откуда для a имеем: $a_1=+\sqrt{2}$, $a_2=-\sqrt{2}$.

Соответственно с этим решением находим:

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{a} (2 - \sqrt{2})}$$

и

$$n_3 = \sqrt{\frac{P}{a} (2 + \sqrt{2})}.$$

Отношение чисел колебаний, или, что то же самое, отношение частот, будет:

$$n_1 : n_2 : n_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} : \sqrt{2} : \sqrt{2 + \sqrt{2}} = v_1 : v_2 : v_3.$$

На рис. 35 изображены начальные отклонения, требуемые для получения этих основных частот. Для n_1 необходимо, чтобы $x=z$ и $y=$

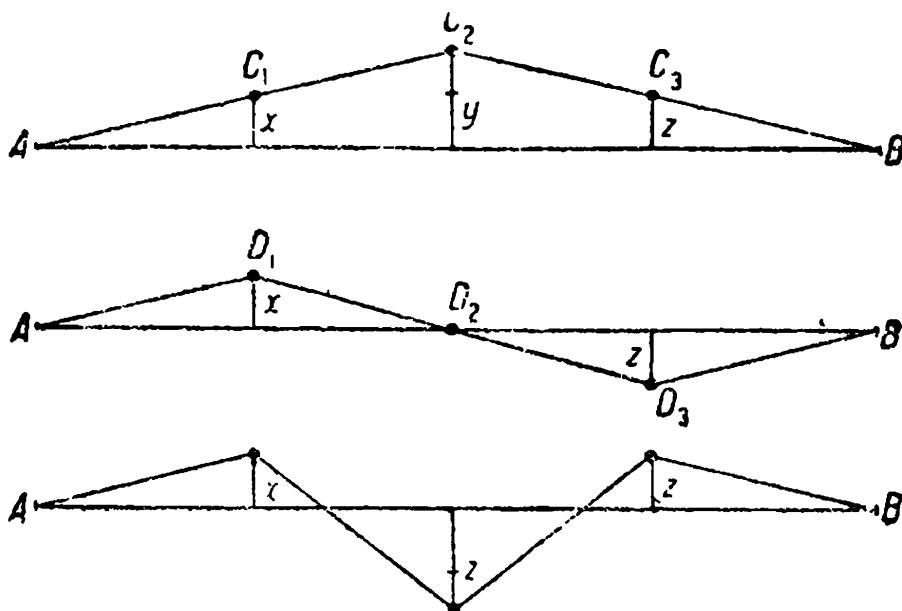


Рис. 35.

$=\sqrt{2} \cdot x$. Для получения n_2 надо, чтобы $y=0$, а $z=-x$, и наконец, для получения n_3 надо, чтобы $x=z$, а $y=-\sqrt{2} \cdot x$.

Пример 3. Теория трансформатора Тесла. Представим себе, что у нас имеются два контура, содержащие емкость, самоиндукцию и очень малое омическое сопротивление, которым мы будем пренебрегать. Пусть, кроме того, в одном из контуров имеется искровой промежуток. Этот контур соединяется с каким-либо источником, дающим соответствующее напряжение. Требуется определить ход напряжения в том и другом контуре.

Решение. Уравнения, определяющие напряжение и в том и в другом контуре, при условии, что омическим сопротивлением можно пренебречь, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} V_1 - \frac{d}{dt} (L_1 I_1 + M_{12} I_2) &= 0 \\ V_2 - \frac{d}{dt} (L_2 I_2 + M_{21} I_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и кроме того,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -C_1 \frac{dV_1}{dt} \\ I_2 &= -C_2 \frac{dV_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Поток, пронизывающий контур и в том и в другом случае, состоит из потока самоиндукции, вызванного тем, что в данном контуре возбуждается ток, а также из потока, вызванного током другого контура, отчасти проходящего через рассматриваемый. Коэффициенты M_{12} и M_{21} называются коэффициентами взаимной индукции. Нетрудно показать, что

$M_{12} = M_{21}$. В самом деле, пусть в контуре I поддерживается сила тока I_1 , а в контуре II I_2 , и пусть контур I из бесконечности приведен в положение A (рис. 36). Тогда работа выразится так:

$$W_{12} = I_1 \int \frac{d\Phi_2}{dt} dt = I_1 \Phi_2 = I_1 I_2 M_{12}$$

(поток Φ на расстоянии ∞ мы предполагаем равным нулю), если M_{12} обозначает коэффициент взаимной индукции при расположении обоих контуров в A и B (рис. 36). Но ясно, что работа зависит только от относительного положения, и она будет иметь ту же величину, если контур II из бесконечности будет приведен в положение B. Тогда работа выразится:

$$W_{21} = I_2 I_1 M_{21}.$$

Так как по закону сохранения энергии $W_{12} = W_{21}$, то $M_{21} = M_{12}$. Вставляем (b) в (a) и вводим следующие сокращенные обозначения:

$$\frac{C_1 M_{12}}{L_2 C_2} = k_2, \quad \frac{C_2 M_{12}}{L_1 C_1} = k_1, \quad \frac{1}{L_1 C_1} = n_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{L_2 C_2} = n_2^2. \quad (\text{c})$$

Тогда уравнения (a) принимают вид:

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} + k_1 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + n_1^2 V_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 V_2}{dt^2} + k_2 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + n_2^2 V_2 = 0. \quad (\text{a}')$$

Мы получили уравнения связанных колебаний, но только связь выражена здесь иначе, чем в случае связанных маятников: именно, в данном случае (индуктивная связь) связь осуществляется через общий магнитный поток. Такого же типа связь может быть осуществлена и в системе маятников, на чем мы сейчас останавливаться не можем¹.

На электромагнитных системах легко видеть, какие могут быть вообще связи. Кроме рассмотренной индуктивной связи у обоих контуров может быть некоторая общая часть, тогда по одному отрезку провода сопротивления R_1 будет идти общий ток $I_1 + I_2$.

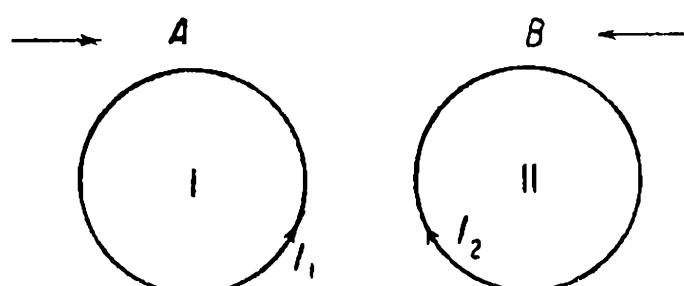


Рис. 36.

Связь тогда будет выражаться членом вида $R' \frac{dV_2}{dt}$ или $R' \frac{dI_2}{dt}$. Такая связь называется „прямой“, или „гальванической“. Наконец, емкости обоих контуров могут влиять друг на друга, тогда мы будем иметь дело с „электростатической“ связью, — она по форме уравнения совпадает с рассмотренной уже связью маятников.

¹ Проф. Ф. Браун, Мои работы по беспроволочной телеграфии и по электроптике, изд. «Матезис», Одесса 1910. Модель, предложенная проф. Л. И. Мандельштамом, стр. 55—62.

Решим систему уравнений (a') по методу Абрагама. Полагаем в уравнениях (a'):

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= A_1 e^{ip t} \\ V_2 &= A_2 e^{ip t}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

и

где A_1 и A_2 — постоянные, которые могут, вообще говоря, быть величинами комплексными.

Результат подстановки (d) в (a') дает нам условия, которые должны быть наложены на p и на A_1 и A_2 для того, чтобы (d) служили решениями (a').

Выполняя подстановку, находим:

$$A_1(n_1^2 - p^2) = A_2 k_1 p^2, \quad A_2(n_2^2 - p^2) = A_1 k_2 p^2. \quad (\text{e})$$

Из этих уравнений мы можем найти значения для p и величину отношения $\frac{A_2}{A_1}$. Перемножая почленно уравнения (e), находим:

$$(n_1^2 - p^2)(n_2^2 - p^2) = k_1 k_2 p^4. \quad (\text{f})$$

Вводим в это биквадратное уравнение вместо частот периоды, пользуясь соотношениями $n_1^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$, $n_2^2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}$, $p^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$, и обозначаем $k_1 k_2 = k^2$. После подстановок и соответствующих упрощений находим:

$$T^4 - (T_1^2 + T_2^2) T^2 + (1 - k^2) T_1^2 T_2^2 = 0. \quad (\text{g})$$

Решая это биквадратное уравнение, получаем:

$$T^2 = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2 - T_2^2}{4} + k^2 T_1^2 T_2^2}; \quad (\text{h})$$

Полагая, что k — величина малая, мы получаем два решения вида:

$$T'^2 = T_1^2 + \epsilon \quad \text{и} \quad T''^2 = T_2^2 - \epsilon. \quad (\text{h}')$$

Таким образом в общем случае, при установлении связи, изменяются оба периода, которые раньше были у каждой системы в отдельности.

Рассмотрим частный случай резонанса, т. е. случай, когда $n_1^2 = n_2^2 = n_0^2$. Это условие приводит к выводу:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2. \quad (\text{i})$$

На основании (h) мы тогда имеем:

$$T' = T_0 \sqrt{1+k} \quad \text{и} \quad T'' = T_0 \sqrt{1-k}, \quad (\text{h}'')$$

или

$$p'^2 = \frac{n_0^2}{1+k} \quad \text{и} \quad p''^2 = \frac{n_0^2}{1-k}. \quad (\text{h}''')$$

Определяем теперь отношение $\frac{A_2}{A_1}$ из любого из уравнений (e) при условии,

что p имеет одно из значений (h'''). Подстановка дает:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k}{k_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad \text{и} \quad \frac{A_2'}{A_1'} = -\frac{k}{k_1} = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \quad (k)$$

где $k^2 = k_1 k_2$.

Полагаем вместо $A_1 = B_1 e^{i\delta_1}$ и $A_2 = B_2 e^{i\delta_2}$; тогда с помощью этих величин и выражений (k) находим окончательное решение:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= B_1 \cos(p't + \delta) + B_2 \cos(p''t + \delta), \\ V_2 &= \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} [B_1 \cos(p't + \delta) - B_2 \cos(p''t + \delta)]. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Если мы подставим k_1 и k_2 из (c), то

$$\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}. \quad (m)$$

Уравнения (h''') показывают любопытный факт: строго говоря, мы никогда не можем получить резонанса, так как у двух связанных систем в общем случае не получается колебания с периодом T_0 . Это явление некоторыми физиками совершенно неудачно называется „боязнью резонанса“.

И тем не менее, в согласии с законом диалектики, именно законом отрицания отрицания, мы, при соблюдении известных условий, получаем при резонансе максимальное напряжение во вторичном контуре. В самом деле, если C_1 значительно больше C_2 , то по уравнениям, имеющим место только при резонансе, V_2 может достигнуть весьма больших значений по сравнению с V_1 . Как правило, в первичном контуре самоиндукция со-

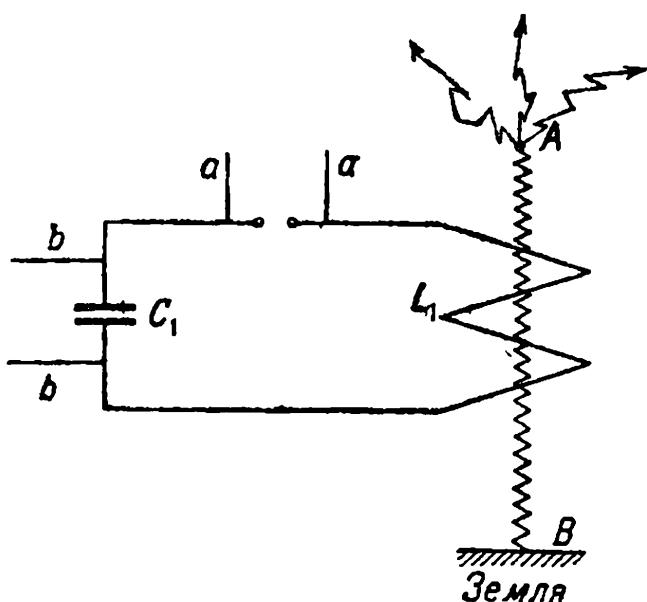


Рис. 37.

стоит из немногих оборотов толстой проволоки, а в качестве конденсатора берется лейденская банка. Вторичный контур состоит из катушки AB (рис. 37) с большим числом оборотов и, следовательно, имеющей большую величину самоиндукции. Емкость же (небольшую) составляет изолированный провод самой катушки; все подбирается так, чтобы $L_1 C_1 = L_2 C_2$. Один конец B катушки отводится к земле. Напряжение при большом

значении $\frac{C_1}{C_2}$ настолько велико, что воздух уже не является изоляцией

и с конца катушки A искры разлетаются во все стороны. Если число колебаний порядка 10^5 в 1 сек., то эти колебания можно пропускать безболезненно через человеческое тело до силы тока в 0,8 ампер, тогда как при частоте в 100 или 50 герца ток в 0,1 ампера уже безусловно смертелен.

Действие этих быстропериодических колебаний, повидимому, обусловлено тем, что за короткое время в один полупериод не могут накопиться в сколько-нибудь значительной концентрации ионы, находящиеся в жидкостях, пропитывающих ткани организма. Быстропеременные токи трансформатора Тесла широко применяются в медицине. При пользовании трансформатором нужно остерегаться, чтобы в пользующегося током высокой частоты не попал ток, вызванный источником, приводящим всю систему в действие. Чтобы избежать этого, надо подводить напряжение к обкладкам конденсатора (*b* на рис. 37), а не к искровому промежутку, так как в случае, если конденсатор будет пробит в первом случае, ток может дать лишь небольшое ответвление в L_1 .

§ 3. Колебания фундамента машины.

В тех случаях, когда вал машины в процессе работы дает значительный прогиб, как это имеет место в паровых турбинах, в машине могут возникнуть сильные колебания, которые передаются фундаменту; тогда фундамент и машина представляют собой связанную систему.

Прежде чем перейти к рассмотрению этого типа колебаний, рассмотрим вопрос о прогибе вала самым элементарным способом, так как теория быстро вращающегося вала — вопрос очень сложный. Пусть эксцентриситет части, насаженной на вал турбины, равен e , и пусть под действием тяжести этой части (масса M) получается прогиб x (рис. 38); так как в машинах допускаются очень малые прогибы, то мы можем быть уверены, что упругая сила, направленная к положению равновесия, будет пропорциональна смещению, именно, будет равна $P = -a^2x$. Уравнение колебания получится следующее:

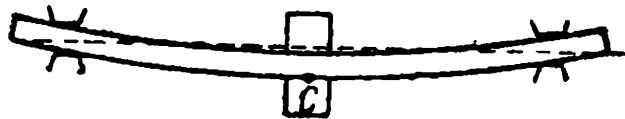


Рис. 38.

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x,$$

откуда частота:

$$n_0^2 = \frac{a^2}{M}.$$

При вращении вала мы получаем равновесие между центробежной силой $M\omega^2$ и упругой силой a^2x . Так как r , расстояние центра тяжести от оси вращения, будет $e + x$ ¹, то при вращении равновесие получается при следующем условии:

$$a^2x = M\omega^2(x + e), \text{ или } x = \frac{e\omega^2}{n_0^2 - \omega^2}. \quad (77)$$

Таким образом, если угловая скорость совпадает с частотой собственных колебаний, то должен получиться бесконечно большой прогиб. На

¹ Вследствие эксцентриситета e вал располагается так, чтобы центр тяжести занимал наиболее низкое положение, т. е. был смещен на величину e от оси, проходящей через центры подшипников; добавляя к этому прогиб x , находим r .

самом деле этого никогда не получается благодаря затуханию. Турбины обыкновенно работают в области $\omega > n_0$, так что при пуске в ход ее надо проводить возможно быстрее через критическую скорость $\omega = n_0$.

Рассмотрим машину, стоящую на фундаменте M (рис. 39). Как показывает практика, очень часто фундамент с прилегающей к нему частью почвы образует одну общую массу M_1 , которая может совершать колебания с некоторым собственным периодом. Мы это условно изображаем на чертеже пружинами, находящимися под массой M . Если теперь мы начнем изучать колебание какой-либо части m , посаженной на вал нашей машины, то смещение массы m сложится из прогиба вала x (при колебании он может быть направлен в какую угодно сторону) и из смещения X всего фундамента.

Отсюда первое уравнение мы получим в таком виде:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (X + x) = -a^2 x + A \sin pt, \quad (78)$$

где $(-a^2 x)$ — упругая сила, вызванная прогибом, $\sin pt$ — внешняя вынуждающая сила, вызванная какими-либо толчками от асимметрии самой машины.

Для второй массы имеем:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = -a_1^2 X + a^2 x. \quad (78')$$

Строго говоря, надо было бы написать $m + M$, но так как масса фундамента велика, то можно массой m пренебречь; $a_1^2 X$ есть упругая сила

при смещении фундамента, $a^2 x$ — противодействие по отношению к упругой силе, приложенной к валу (противодействие это приложено к фундаменту).

Мы получаем систему уравнений связанных колебаний, которую можно решать разобранными нами способами. При резонансе энергия машины будет передаваться фундаменту, расшатывая его, и кроме того, фундамент поглощает значительную долю энергии самой машины. До сих пор еще не найдено простых способов рассчитывать заранее фундамент так, чтобы избежнуть этих неприятных последствий.

Самое явление можно демонстрировать на следующей модели. На закрепленную к полу табуретку устанавливается мотор с переменным числом оборотов и с несимметричной нагрузкой оси.

Вследствие этой асимметрии получаются колебания самого мотора, частота которых зависит от числа оборотов. По мере увеличения числа

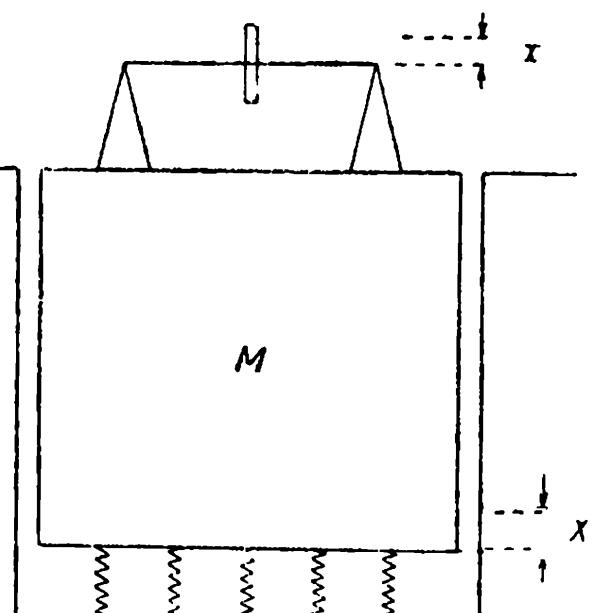


Рис. 39.

оборотов может наступить момент, когда число колебаний оказывается в резонансе с периодом колебания доски на табуретке (колебания могут быть вертикальные и горизонтальные: доска подпрыгивает или качается на ножках табуретки). При этом трудно удастся дальнейшее увеличение числа оборотов, так как вся энергия уходит на энергию колебания табуретки; только сильным изменением нагрузки тока можно скачком вызвать переход к другой частоте и выйти из области резонанса.

§ 4. Несколько замечаний о центробежной силе.

При обсуждении вопроса о прогибе вращающегося вала мы рассматривали равновесие между упругой и центробежной силой. Так как

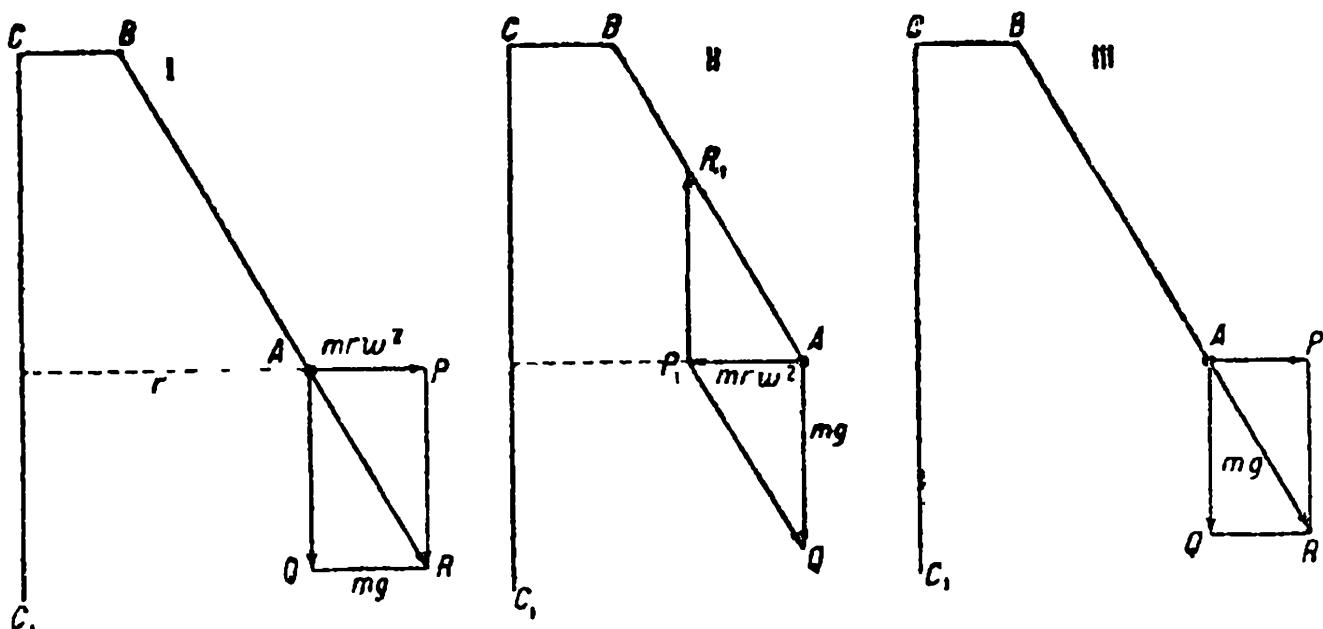


Рис. 40.

в вопросе о центробежной силе мы встречаемся с самой удивительной путаницей, нам необходимо сосредоточить внимание на этом вопросе. Оперировать с центробежной силой можно двояким путем. Первый путь состоит в следующем. Мы предполагаем, что система остановлена и к *самому движущемуся по окружности телу приложена фиктивная центробежная сила, равная массе этого тела, умноженной на радиус и квадрат угловой скорости в направлении от центра (центробежное направление)*. При этих условиях ищется равновесие (центробежная сила плюс все остальные действующие в данном случае силы).

Этот прием ведет свое начало от Даламбера. Второй прием, ведущий свое начало от Ньютона, состоит в отыскании действительной силы, действующей на данное тело (центростремительной), так как только при наличии центростремительной силы может происходить движение по кривой (по кругу).

Центробежная же сила — *реальная есть противодействие движущегося по кругу (или, вообще говоря, по кривой) тела на те тела, которые заставляют данное тело двигаться по кругу (кривой)*. Для примера разберем случай маятника, вращающегося на центробежной машине. На рис. 40, I изображен расчет по Даламбери. Маятник предполагается

остановленным, к шарику его массы m приложена сила тяжести Q и фиктивная центробежная сила AP . В сумме обе силы дают равнодействующую R , которая уравновешивается сопротивлением нити. На рис. 40, II изображен расчет по Ньютону. Какие силы реально действуют на массу m ? Сила тяжести Q и сила натяжения нити R . Обе эти силы дают равнодействующую P_1 , направленную к центру, эта сила и дает необходимое центростремительное ускорение $r\omega^2$. Это — сила реальная. Где же будет реальная центробежная сила? Это будет реакция движущегося по кругу тела на нить маятника AP (рис. 40, III). Нить будет растягиваться как силой тяжести (весом массы m), что будет иметь место и при отсутствии вращения, так и реальной центробежной силой AP , представляющей реакцию движущегося тела на нить, заставляющую данное тело двигаться по окружности.

По Ньютону действительная сила отличается от фиктивной тем, что действительной силе всегда можно найти противодействие по третьему закону Ньютона. Фиктивная же сила противодействия не имеет.

Это особенно ясно можно видеть на следующем примере. Пусть с вращающегося вокруг точки O (рис. 41) стержня груз m в точке A срывается и летит по

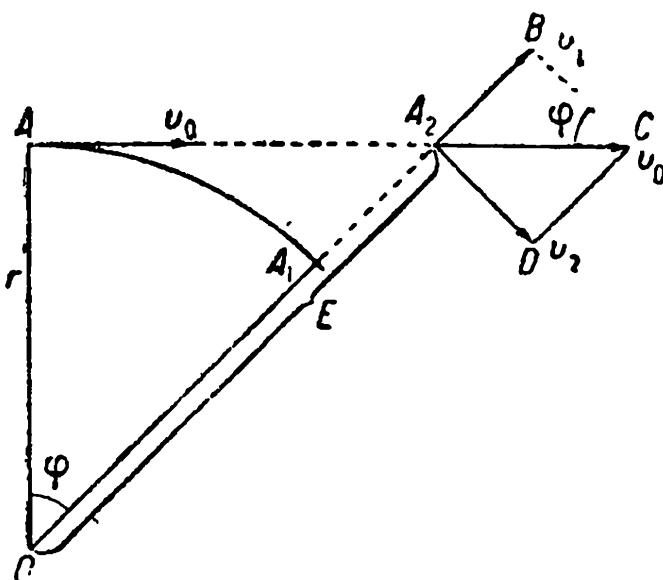


Рис. 41.

инерции по касательной AA_2 . Пусть стержень продолжает вращаться, и пусть наблюдатель, связанный со стержнем, не замечает своего вращения. Разложим скорость $A_2C = v_0$ на две слагающие: v_2 , перпендикулярно стержню (эту слагающую наблюдатель не замечает) и v_1 , направленную вдоль r' . Из $\triangle OAA_2$ и $\triangle A_2BC$ имеем:

$$v_1 = v_0 \sin \varphi = v_0 \frac{AA_2}{r'} = \frac{v_0^2 t}{r'}, \quad (79)$$

так как $AA_2 = v_0 t$, где t — время, в течение которого стержень повернулся из положения OA в положение OA_1 .

Из (79) находим „ускорение“ в движении вдоль стержня:

$$g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_0^2 t / r'}{t} = \frac{v_0^2}{r'}, \quad (79')$$

т. е. величину, равную центробежному ускорению, вызванному направленной от центра „силой“, т. е. „центробежной“ силой.

Теперь, спрашивается, реальна ли эта сила? Где противодействие, требуемое третьей аксиомой Ньютона? Ясно, что эта фиктивная сила появилась потому, что мы отвлекались от слагающей v_2 : слагающая v_2 , сложенная геометрически со слагающей v_1 , дает постоянную скорость v_0 ; следовательно, реальное движение будет движение по инерции без участия сил.

Приведенная здесь иллюстрация принадлежит проф. Н. П. Кацерину.

§ 5. Возбуждение колебаний с помощью постоянной силы.

В рассмотренных нами видах колебаний колебательный процесс поддерживался за счет той работы, которая пошла на первоначальное возбуждение. Это было или отклонение из положения равновесия, или в форме толчка, данного извне и сообщающего начальную скорость колеблющейся системе. Наконец, в принужденных колебаниях энергия черпается из внешнего периодического, источника. Однако очень часто колебания возбуждаются действием непрерывной силы, например в случае смычка. Рассмотрим действие смычка. Когда ведут смычок CD (рис. 42) по струне со скоростью v_0 , то струна сначала следует за смычком; относительная скорость будет $v_0 - v_1$, где v_1 — скорость струны (она, вообще говоря, меняется). Далее, под влиянием упругой силы, вызванной отклонением струны, струна срывается и движется в сторону, обратную движению смычка. Относительная скорость будет теперь $v_0 + v_1$. Если бы сила трения была одинакова и при скорости $v_1 + v_0$, и при скорости $v_0 - v_1$, то положительная и отрицательная работа силы трения, т. е. работа в сторону движения струны и в противоположном направлении, была бы одинакова, и никакой поддержки колебания не получилось бы.

Однако оказывается, что когда смычок натерт канифолью, сила трения убывает со скоростью, поэтому отрицательная работа, т. е. когда смычок тормозит струну, бывает меньше положительной, т. е. в тех случаях, когда смычок подгоняет струну. За счет этой разницы и могут существовать длительные колебания. При этом избыток положительной работы смычка покрывает потери струны на затухание, т. е. трение и излучение звуковых волн.

Если смазать смычок маслом, то трение не будет зависеть от скорости, и, как показывает опыт, таким смычком нельзя заставить струну колебаться. Подобными асимметрическими процессами, т. е. асимметрией действия силы, объясняется действие электромагнита в электрическом звонке, возбуждение органных труб при вдувании в них воздуха, колебания в электронных лампах и т. д. Но в нашем курсе введения в теоретическую физику мы не имеем возможности останавливаться на этих сложных вопросах, равно как и на вопросах об устойчивости колебаний.

Затронутый нами вопрос о колебании струны с помощью смычка интересен с методологической точки зрения. Мы имеем здесь дело со случаем получения принципиально нового качества. Движение смычка поступательное, и вот, при соблюдении ряда условий, о которых мы говорили, это поступательное движение преобразуется в качественно другое движение — колебательное.

В этом случае особенно важно то, что это появление нового качества может быть объяснено во всех деталях.

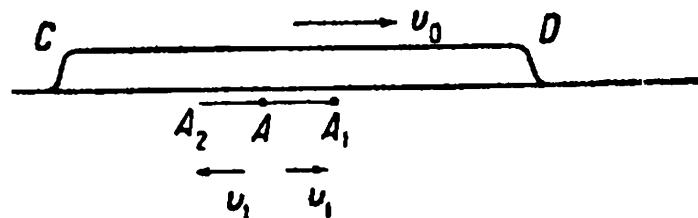


Рис. 42.

Часть II.

Волны в упругой среде и волны электромагнитные

Глава I.

Волны на струне.

§ 1. Учение о волнах на струне.

При изучении связанных колебаний мы рассмотрели случаи, когда масса струны распределена на несколько частей. В этом случае мы получаем систему со связанными колебаниями. Если масса струны распределялась на две части, то получились два возможных типа колебаний. Если же масса распределялась на три части, то получаются три возможных периода.

В общем случае, если мы разделим массу на n равных частей и равномерно распределим по всей струне, то мы получим n возможных периодов. Увеличивая беспрепятственно n , мы подойдем к теории струны с непрерывным распределением массы. Такой путь будет, од-

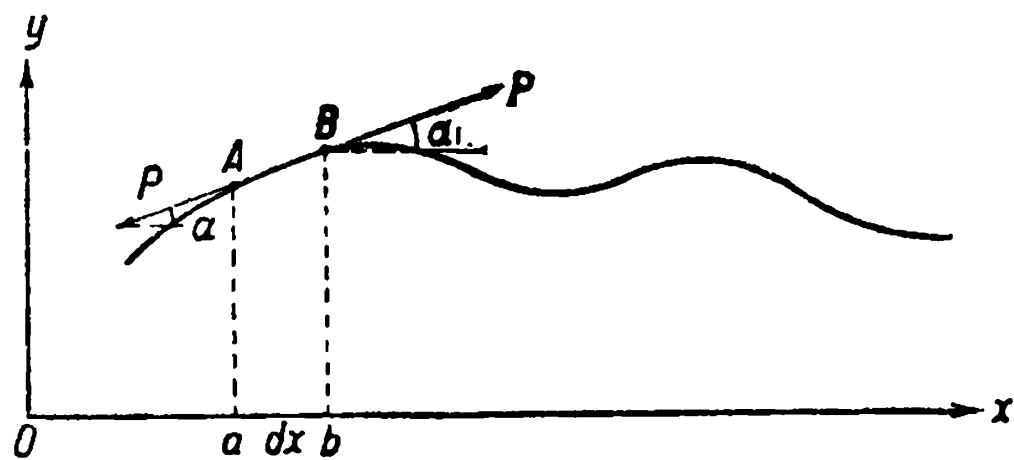


Рис. 43.

нако, сложен. Теорию струны можно дать и в значительно более простом виде, хотя вывод будет не вполне строг: результат ничем не будет отличаться от результата более строгого вывода.

Пусть мы имеем струну, которая как-нибудь деформирована в горизонтальной плоскости. Мы выбираем горизонтальную плоскость для того, чтобы отвлечься от действия силы тяжести. Форма струны будет со временем изменяться, — струна ведь колеблется, — поэтому кривая, изображающая деформированную струну (рис. 43), может быть выражена как функция двух переменных x и t :

$$y = f(x, t). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение движения небольшой части AB струны, имеющей массу ρdx , где ρ — масса единицы длины струны. Равнодействующая натяжений, направленная к положению равновесия, будет $P \sin \alpha_1 - P \sin \alpha = Q$. Если отклонения струны очень малы, то углы α и α_1 настолько малы, что их можно заменить через тангенсы. Итак,

$$Q = P (\tan \alpha_1 - \tan \alpha). \quad (2)$$

Далее, так как $\operatorname{tg} \alpha$ есть тангенс угла наклонения касательной к кривой в точке A и так как этот угол изменяется непрерывно, то уравнение (2) можно представить в виде:

$$Q = P \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \frac{\partial y}{\partial x} \right) = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (2')$$

Мы пишем $\frac{\partial y}{\partial x}$ как частную производную потому, что y зависит не только от x , но и от t . Масса, умноженная на ускорение, выразится $\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Поэтому уравнение движения может быть представлено:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где

$$V^2 = \frac{P}{\rho}. \quad (4)$$

Уравнение (3) называется волновым уравнением. Это уравнение есть уравнение в частных производных и притом второго порядка. Решение этого уравнения не представляет, однако, особых трудностей. Мы рассмотрим два способа решения: прежде всего, способ, предложенный знаменитым философом и математиком Даламбером (1717—1783). Он заключается в преобразовании уравнения (3) с помощью новых переменных

$$u = x - Vt \quad \text{и} \quad v = x + Vt. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что y уже выражено через u и v . Преобразуем уравнение (3) с помощью уравнений (5), получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}$$

и

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$$

Точно так же

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} (-V) + \frac{\partial y}{\partial v} (V)$$

и

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right).$$

Подставляя эти величины в уравнение (3) и производя сокращения, находим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = 0. \quad (3')$$

Это уравнение нетрудно проинтегрировать: в самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Это значит, что $\frac{\partial y}{\partial u}$ не может быть функцией v , а так как мы заранее

знаем, что y есть функция только u и v , то $\frac{\partial y}{\partial u} = f_1'(u)$, откуда

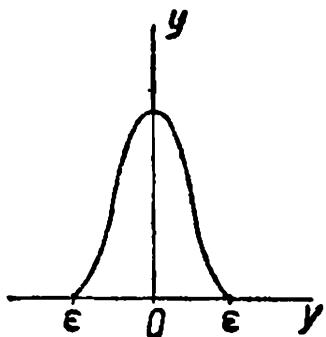


Рис. 44.

$$y = f_1(u) + f_2(v), \quad (6)$$

потому что вместо получающейся при интегрировании $\frac{\partial y}{\partial u} = f_1'(u)$ произвольной постоянной мы должны взять функцию другой переменной, так как по условию y есть функция двух переменных u и v . На первый взгляд может показаться, что решение (6) нам ничего не дает. Однако, вставив с помощью (5) прежние переменные x и t , мы видим следующее: хотя функции f_1 и f_2 могут быть какие угодно, но зато переменные x и t входят в них не как угодно, а в виде комбинаций (5), т. е.

$$y = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt), \quad (6')$$

причем решение (6') представляется как сумма двух решений f_1 и f_2 . В частном случае каждая из функций может в отдельности равняться нулю.

Рассмотрим частный случай:

$$y = f_1(u) = f_1(x - Vt). \quad (6'')$$

Пусть функция f_1 обладает тем свойством, что при любых значениях u она равна нулю за исключением области от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$, где ε — малая величина. В этих же пределах пусть функция эта может быть изображена кривой, которая у нас дана на рис. 44. Теперь посмотрим, что это значит. Если мы выберем $t = 0$, то, согласно (6''), мы получаем изгиб на струне вблизи точки O , т. е. начала координат, в пределах $\pm \varepsilon$ (рис. 45, кривая $t = 0$). Если мы возьмем какой-либо момент $t_1 > 0$, то область $u = 0$ будет в точке $x_1 = Vt_1$ с пределами $x = x_1 \pm \varepsilon$ (рис. 45, кривая $t = t_1$). Что же все это значит? Изгиб струны, находившийся в момент $t = 0$ в $x = 0$, за время t_1 переместился в другую область струны — в область $x_1 = Vt_1$ со скоростью $V = \frac{x_1}{t_1}$. Таким об-

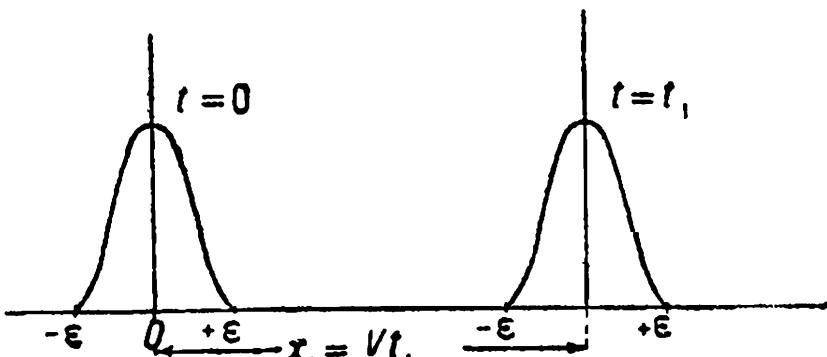


Рис. 45.

разом (6") представляет собой любое возмущение, т. е. возмущение любой формы, определяемой видом функции f_1 , распространяющееся со скоростью V вдоль струны в сторону положительных значений x . Нетрудно убедиться, что $f_2(x + Vt)$ представляет собой также произвольное возмущение, но распространяющееся в сторону убывающих значений x . Итак, решение (6') представляет собой сумму двух возмущений, бегущих по струне в противоположных направлениях со скоростью

$$V = \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad (4')$$

зависящей от натяжения струны и ее линейной плотности, т. е. от массы единицы ее длины. Вид функций определяется начальным смещением, т. е. смещением в какой-либо определенный момент всей струны, и распределением скорости отдельных частей струны по всей ее длине.

Другое решение уравнения (3) принадлежит Даниилу Бернулли и относится к 1753 г. В решении Даламбера мы исходили из предположения, что переменные x и t входят не порознь, а в виде комбинаций $x - Vt$ и $x + Vt$. Решение Бернулли исходит из прямо противоположного предположения, именно, из того, что искомая функция может быть представлена, как произведение двух функций X и T , из которых первая является функцией только переменной x , а вторая функцией только времени t . Но, несмотря на эту полярную противоположность, эти решения при известных условиях могут быть тождественными, подтверждая один из основных законов диалектики — закон единства противоположностей. Итак, полагая вместе с Бернулли

$$y = XT \quad (7)$$

и подставляя в (3), мы находим:

$$X \frac{d^2T}{dt^2} = V^2 T \frac{d^2X}{dx^2},$$

или

$$\frac{1}{V^2 T} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha_t^2. \quad (8)$$

Так как в выражении (8) мы имеем равенство двух функций, из которых одна есть функция только t , другая — только x , то отсюда ясен вывод, что условие может быть выполнено только в том случае, когда эти функции в отдельности равны постоянной. Так как на струне мы ищем, вообще, периодические решения, то мы должны считать постоянную величиной отрицательной — α_t^2 , причем абсолютное значение может быть какое угодно. Отсюда ясно, что мы получаем, вообще говоря, бесконечное число решений, т. е. решение в виде бесконечного ряда. Итак, уравнение (8) распадается на два уравнения, частными решениями которых будут следующие четыре функции:

$$\cos \alpha_t x, \quad \sin \alpha_t x, \quad \cos \alpha_t Vt \quad \text{и} \quad \sin \alpha_t Vt. \quad (9)$$

Поэтому решение уравнения (3) можно представить:

$$y = \cos \alpha_i Vt (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) + \sin \alpha_i Vt (C_i \cos \alpha_i x + D_i \sin \alpha_i x). \quad (9')$$

Так как величина α_i — произвольная, то решений (9') может быть бесконечное множество; мы подходим, таким образом, к решению с помощью рядов.

§ 2. Решение задачи о струне, закрепленной в двух точках.

Пусть струна имеет длину L , пусть оба конца ее $x=0$ и $x=L$ закреплены. Условие того, что струна закреплена, выражается в том, что при $x=0$ и $x=L$ $y=0$ при всяком t .

Вставляя в уравнение (9') $x=0$, находим:

$$y = \cos \alpha_i Vt \cdot A_i + \sin \alpha_i Vt C_i. \quad (10)$$

По условию $y=0$ при любых значениях t , а это равносильно условию $A_i=C_i=0$. Поэтому, если конец $x=0$ закреплен, мы в качестве решения имеем:

$$y = \sin \alpha_i x (B_i \cos \alpha_i Vt + D_i \sin \alpha_i Vt). \quad (11)$$

Далее, нам надо еще учесть условие, что и при $x=L$ $y=0$ при всяком t , а это, в свою очередь, приводит к условию:

$$\sin \alpha_i L = 0, \text{ или } \alpha_i L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, i\pi. \quad (12)$$

Отсюда:

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{L} \quad (13)$$

Таким образом условие это при $x=L$, $y=0$ при всяком t сразу приводит нас к отбору значений постоянной α_i и определяет собой характер ряда.

Вставляем (13) в (11) и распространяем сумму на все согласные с условием задачи значения постоянной α_i :

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} i \sin \frac{i\pi}{L} x \left(B_i \cos \frac{i\pi Vt}{L} + D_i \sin \frac{i\pi Vt}{L} \right). \quad (14)$$

Таким образом вопрос о движении струны, натянутой между двумя точками, приводится к решению, имеющему вид тригонометрического ряда. Посмотрим теперь, какие возможны числа колебаний.

Ясно, что для определения числа колебаний или периодов надо обратиться в (14) к тригонометрическим функциям, содержащим время. Ясно, что эти функции должны иметь вид:

$$\cos 2\pi N_i t, \quad \sin 2\pi N_i t,$$

или

$$\cos \frac{2\pi}{T_i} t \quad \text{и} \quad \sin \frac{2\pi}{T_i} t,$$

откуда находим:

$$2\pi N_t = \frac{i\pi V}{L},$$

или

$$N_t = \frac{i}{2L} V = \frac{i}{2L} \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad (15)$$

так как по (4):

$$V = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Таким образом возможные колебания на нашей струне образуют гармонический ряд: числа колебаний $N_1, N_2, N_3\dots$ относятся, как целые числа $1:2:3:\dots$ Для того чтобы показать возможность изображения решения (14) по методу Дадамбера, рассмотрим какой-либо из членов ряда (14), например:

$$B_n \sin \alpha_n x \cos \alpha_n Vt + D_n \sin \alpha_n x \sin \alpha_n Vt. \quad (14')$$

Напишем также четыре следующих выражения:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_n (Vt - x) = \cos \alpha_n Vt \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n Vt \sin \alpha_n x, \\ \cos \alpha_n (Vt + x) = \cos \alpha_n Vt \cos \alpha_n x - \sin \alpha_n Vt \sin \alpha_n x, \\ \sin \alpha_n (Vt - x) = \sin \alpha_n Vt \cos \alpha_n x - \cos \alpha_n Vt \sin \alpha_n x, \\ \sin \alpha_n (Vt + x) = \sin \alpha_n Vt \cos \alpha_n x + \cos \alpha_n Vt \sin \alpha_n x. \end{array} \right\} \quad (14'')$$

Умножим первое из уравнений (14'') на $\frac{D_n}{2}$, второе на $-\frac{D_n}{2}$ и складываем; в результате получаем:

$$\frac{D_n}{2} \cos \alpha_n (Vt - x) - \frac{D_n}{2} \cos \alpha_n (Vt + x) = D_n \sin \alpha_n x \sin \alpha_n Vt. \quad (16)$$

Умножим теперь третье уравнение (14'') на $-\frac{B_n}{2}$ и четвертое на $+\frac{B_n}{2}$ и складываем; тогда находим:

$$\frac{B_n}{2} \sin \alpha_n (Vt + x) - \frac{B_n}{2} \sin \alpha_n (Vt - x) = B \sin \alpha_n x \cos \alpha_n Vt. \quad (15')$$

Складывая (15) и (15'), имеем:

$$\begin{aligned} B_n \sin \alpha_n x \cos \alpha_n Vt + D_n \sin \alpha_n x \sin \alpha_n Vt &= \frac{D_n}{2} \cos \alpha_n (Vt - x) - \\ &- \frac{B_n}{2} \sin \alpha_n (Vt - x) - \frac{D_n}{2} \cos \alpha_n (Vt + x) + \frac{B_n}{2} \sin \alpha_n (Vt + x). \end{aligned} \quad (14''')$$

Ясно, что два первых члена правой части представляют собой функцию комбинации $Vt - x$, а два вторых — функцию $Vt + x$, и в правой части нигде переменные не встречаются иначе, как в указанных комбинациях. С другой стороны, левая часть содержит произведения функций.

из которых каждая зависит только от одной переменной. Таким образом эти, казалось бы, полярные противоположности могут быть тождественны. Прежде чем заняться определением коэффициентов ряда (14), рассмотрим некоторые вопросы, связанные с тригонометрическими рядами.

§ 3. Некоторые замечания, касающиеся тригонометрических рядов.

Мы не будем касаться вопроса о том, какие функции могут быть представлены в виде тригонометрических рядов. Точно так же мы не будем затрагивать вопроса о сходимости этих рядов. Эти вопросы излагаются

в соответствующих курсах математики. Мы ограничимся лишь указаниями на то, как надо определять коэффициенты этих рядов, что мы сделаем на ряде примеров.

Пример 1. Пусть в пределах от $x = 0$ до $x = \pi$, $y = \frac{\pi}{4}$ (рис. 46) требуется

изобразить функцию $y = \frac{\pi}{4}$ в указанных

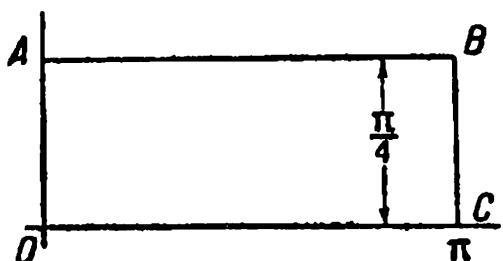


Рис. 46.

пределах в виде ряда:

$$y = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_n \sin nx + \dots \quad (a)$$

Решение. Умножаем обе части равенства (a) на $\sin mx dx$ и интегрируем в пределах от 0 до π . В левой части мы получаем интеграл:

$$\int_0^\pi y \sin mx dx = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi \sin mx dx = \frac{\pi}{4m} \left[-\cos mx \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4m} (1 - \cos m\pi). \quad (b)$$

В правой части мы будем иметь один интеграл в виде:

$$A_m \int_0^\pi \sin^2 mx dx = A_m \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx = \frac{\pi}{2} A_m. \quad (c)$$

Все остальные будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A_n \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} A_n \int_0^\pi [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx = \\ &= A_n \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right]_0^\pi = 0, \end{aligned}$$

так как $m \neq n$. Итак:

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \sin mx dx = \frac{1}{2m} \left[-\cos mx \right]_0^\pi. \quad (d)$$

Если $m = 2k$ четное, то $\int_0^\pi \cos 2kx = 0$. Если m нечетное, т. е. $m = 2k + 1$, то $\int_0^\pi -\cos(2k+1) = 2$.

Поэтому $A_{2k} = 0$ и $A_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$. Ряд получается следующий:

$$y = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \quad (a')$$

На рис. 47 изображены последовательно первый член, сумма первого плюс второго и т. д. до суммы четырех первых членов ряда (a') включительно. Мы видим, что ряд сходится не очень быстро и сумма первых четырех членов довольно значительно еще расходится с заданной функцией.

Пример 2. Пусть в пределах от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ функция $y = x$, а в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до π будет $y = \pi - x$ (рис. 49). Требуется выразить эту сложную функцию в пределах от $x = 0$ до $x = \pi$ в виде ряда

$$\sum_n A_n \sin nx.$$

Решение. Выписываем ряд, аналогичный (a), в только что рассмотренном примере. Умножаем этот ряд на $\sin mx dx$ и интегрируем от 0 до π . Тогда, принимая во внимание указанное в первом примере, имеем:

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin mx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin mx dx. \quad (a)$$

Вычисляем интегралы, входящие в состав (a):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin mx dx = \left[-\frac{1}{m} \cos mx \cdot x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{m^2} \sin mx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2m} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin mx dx = \left[-\frac{x}{m} \cos mx + \frac{1}{m^2} \sin mx \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{\pi}{m} \cos m\pi + \left[-\frac{\pi}{2m} \cos m\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right],$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin mx dx = \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{\pi}{m} \cos m\pi + \frac{\pi}{m} \cos \frac{m\pi}{2}.$$

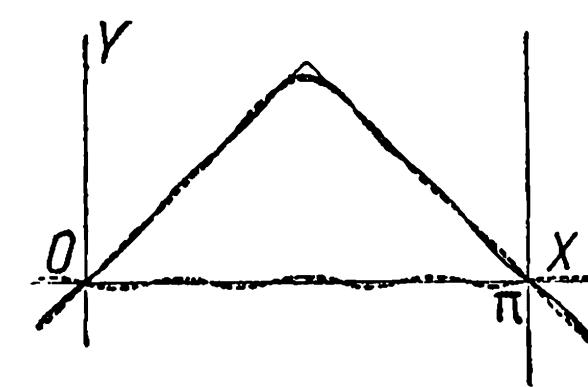
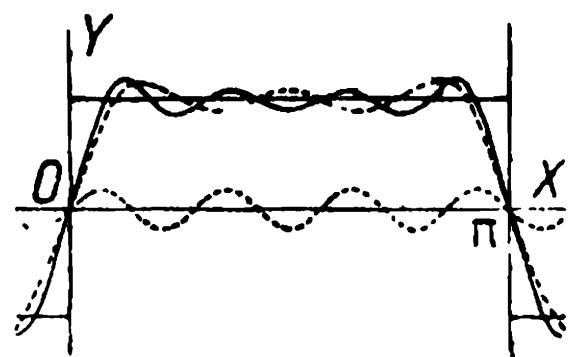
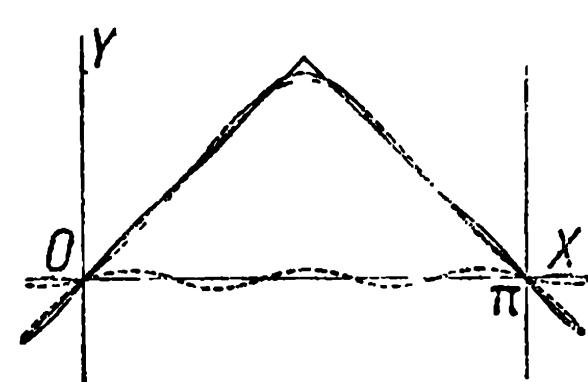
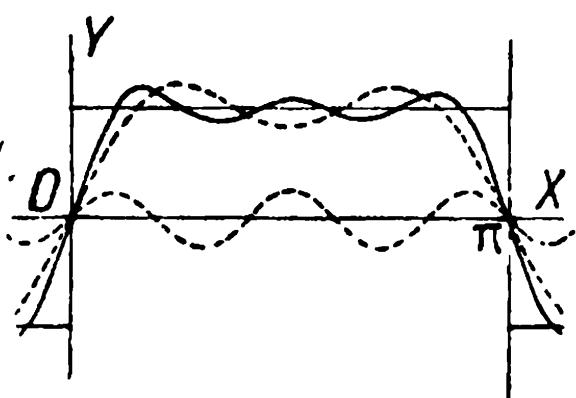
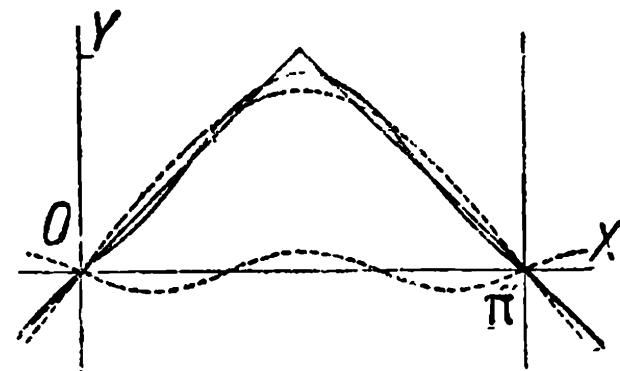
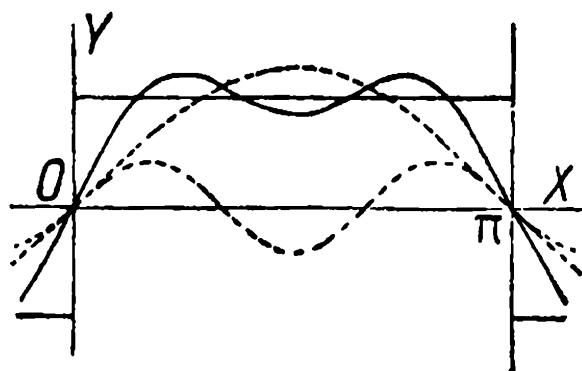
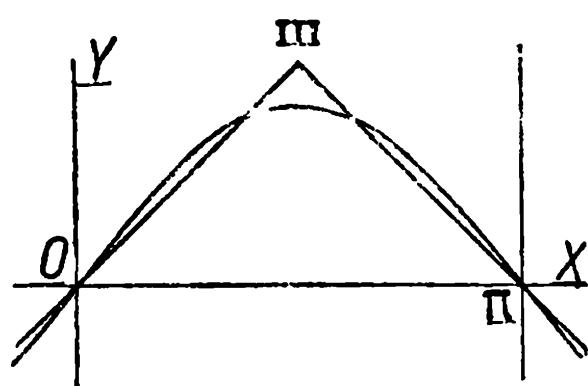
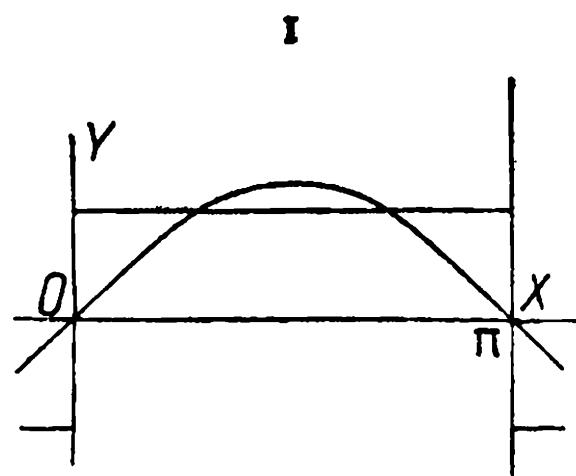


Рис. 47.

Рис. 48.

Вставляя эти величины в (а), мы находим:

$$A_m = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2m} \cos \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{m} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{m} \cos m\pi - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{m} \cos m\pi + \frac{2}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2},$$

откуда:

$$A_{2i} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2i)^2} \sin 2i\pi = 0 \quad \text{и} \quad A_{2k-1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k-1)^2} (-1)^{k+1}.$$

Поэтому искомый ряд представится в следующем виде:

$$y = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x + \dots \right). \quad (\text{б})$$

На рис. 48 показаны графики первого члена, сумма первых двух, суммы первых трех и, наконец, четырех членов. Мы видим, что в данном случае ряд быстро сходится. Это непосредственно видно из того, что амплитуды последовательных синусоид очень быстро убывают.

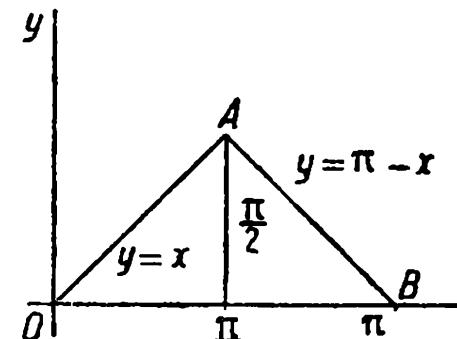


Рис. 49

§ 4. Вычисление коэффициентов ряда для струны.

Мы видели в § 1, что уравнение движения струны может быть выражено:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} i \sin \frac{i\pi}{L} x \left(B_i \cos \frac{i\pi Vt}{L} + D_i \sin \frac{i\pi Vt}{L} \right). \quad (14)$$

Для того чтобы определить постоянные B_i и D_i , нам должно быть известно, как выражается для $t = 0$

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}_{t=0} = F(x).$$

Произведя те же операции, какие мы проделали в примерах 1 и 2, мы приходим к выводу:

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx. \quad (17)$$

Мы должны в наших выражениях заменить π на L , так как в прежних примерах функция y рассматривалась в пределах от 0 до π , а на струне мы имеем дело с пределами 0 и L .

Для $\frac{dy}{dt}$ имеем:

$$\frac{dy}{dt} = F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} iD_i \frac{i\pi V}{L} \sin \frac{i\pi}{L} x, \quad (18)$$

откуда находим:

$$D_m = \frac{2}{L} \frac{L}{m\pi V} \int_0^L F(x) \sin \frac{m\pi}{L} x \, dx. \quad (19)$$

Если $f(x) = 0$, то исчезают все B_m , если $F(x) = 0$, то исчезают все D_m .

В общем же случае придется вычислять и те и другие коэффициенты.

§ 5. Вычисление коэффициентов ряда для струны на арфе.

Пусть в начальный момент струна оттянута в точке E ($x = a$) (рис. 50) на расстояние h и затем предоставлена самой себе. Так возбуждают струну на арфе, цитре, мандолине, гитаре и балалайке. Так как мы не сообщаем в начальный момент скорости, то $F(x) = 0$, и следовательно, все $D_m = 0$.

Так как в интервале от 0 до a $y = \frac{h}{a} x$, а в интервале,

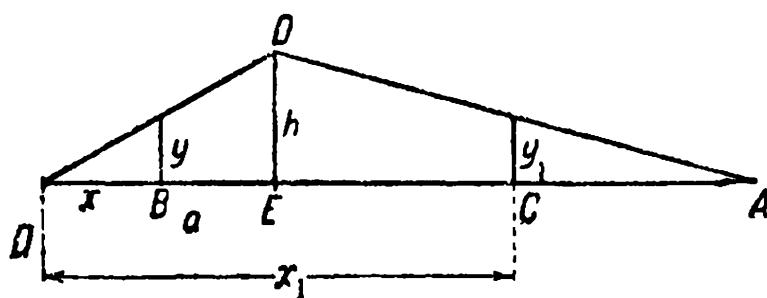


Рис. 50.

от a до L $y = \frac{h}{L-a} (L-x)$, то для B_m имеем:

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{h}{a} x \sin \frac{\pi mx}{L} dx + \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h}{L-a} (L-x) \sin \frac{\pi mx}{L} dx, \quad (20)$$

или

$$B_m = \frac{2h}{aL} \int_0^a x \sin \frac{\pi mx}{L} dx + \frac{2h}{L-a} \int_a^L \sin \frac{\pi mx}{L} dx - \frac{2h}{L(L-a)} \int_a^L x \sin \frac{\pi mx}{L} dx. \quad (20')$$

Вычисляем входящие в состав (20') интегралы:

$$\int_a^L \sin \frac{\pi mx}{L} dx = \left[-\frac{L}{m\pi} \cos \frac{\pi mx}{L} \right]_a^L = -\frac{L}{m\pi} \cos m\pi + \frac{L}{m\pi} \cos \frac{\pi ma}{L},$$

$$\int_0^a x \sin \frac{\pi mx}{L} dx = \left[-\frac{xL}{\pi m} \cos \frac{\pi mx}{L} + \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi mx}{L} \right] = -\frac{La}{m\pi} \cos \frac{m\pi a}{L} + \frac{L^2}{\pi^2 m^2} \sin \frac{m\pi a}{L},$$

$$\begin{aligned} \int_a^L x \sin \frac{\pi mx}{L} dx &= \left[-\frac{xL}{m\pi} \cos \frac{\pi mx}{L} + \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \sin \frac{\pi mx}{L} \right] = \\ &= -\frac{L^2}{m\pi} \cos m\pi + \frac{aL}{m\pi} \cos \frac{\pi ma}{L} - \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi a}{L}. \end{aligned}$$

Вставляя эти выражения в (20'), мы находим:

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2h}{aL} \left(-\frac{La}{m\pi} \cos \frac{m\pi a}{L} + \frac{L^2}{\pi^2 m^2} \sin \frac{m\pi a}{L} \right) + \frac{2h}{L-a} \left(-\frac{L}{m\pi} \cos m\pi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{m\pi} \cos \frac{\pi ma}{L} \right) - \frac{2h}{L(L-a)} \left(-\frac{L^2}{m\pi} \cos m\pi + \frac{aL}{m\pi} \cos \frac{\pi ma}{L} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi a}{L} \right). \end{aligned} \quad (20'')$$

Группируем подобные члены:

$$\begin{aligned} B_m &= \cos \frac{m\pi a}{L} \left(-\frac{2h}{m\pi} + \frac{2hL}{m\pi(L-a)} - \frac{2ha}{L-a} \frac{1}{m\pi} \right) + \\ &+ \sin \frac{m\pi a}{L} \cdot \frac{L^2}{m^2 \pi^2} \left(\frac{2h}{aL} + \frac{2h}{L(L-a)} \right) = \frac{2hL}{m^2 \pi^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} \right) \sin \frac{m\pi a}{L}. \end{aligned} \quad (20''')$$

Отсюда находим искомое решение, т. е. уравнение движения струны на арфе:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{2h}{\pi^2 m^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} \right) \sin \frac{m\pi a}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{\pi m Vt}{L}. \quad (21)$$

Из полученного решения выводим целый ряд следствий. Прежде всего, при одном и том же значении величины h , т. е. при одном и том же „оттягивании“ струны, множитель $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} \right)$ тем больше, чем ближе к закрепленному концу производится оттяжка, т. е. чем a ближе к 0 или к L , следовательно, тем сильнее будет звук. Далее, чем больше m , т. е. чем более далекий член ряда мы берем, тем меньше будет ему соответствующая амплитуда, так как амплитуда убывает как $\frac{1}{m^2}$. Отсюда гармонические обертоны будут тем слабее, чем выше их порядок.

Наконец, нетрудно показать, что от выбора места возбуждения струны будет зависеть качество звука, т. е. его состав из обертонов. Предположим, например, что $a = \frac{1}{7} L$, и вставим это выражение

в седьмой член ряда в множитель $\sin \frac{m\pi a}{L}$, получаем: $\sin \frac{7\pi L}{7L} = \sin \pi = 0$.

В этом случае пропадает седьмой член, вызванный им звук находится в диссонансе с другими и поэтому его исчезновение улучшает качество звука.

Таким же путем, как мы исследовали движение струны на арфе, можно изучать движение струны на скрипке и на фортепиано. Вся задача сводится к нахождению функций $f(x)$ и $F(x)$ для соответствующих случаев, а это достигается изучением физических условий возбуждения струны.

Глава II.

Волны в непрерывных средах и уравнения гидродинамики.

§ 1. Продольные волны.

Представим себе, что нам дана среда, обладающая следующими упругими свойствами. Если мы выделим из нее некоторый объем v и хотим изменить этот объем на Δv , то этого можно достичь изменением давления на некоторую величину Δp , пропорциональную отношению $\frac{\Delta v}{v}$, т. е. относительному сжатию. Короче, мы предполагаем, что

среда обладает свойством

$$\Delta p = -a^2 \frac{\Delta v}{v}, \quad (22)$$

где a^2 — существенно положительная постоянная; знак минус показывает, что при увеличении объема давление падает: если мы хотим заставить данный объем увеличиться, то мы должны убавить давление,

и наоборот, чтобы уменьшить объем, надо увеличить давление.

Теперь представим себе, что данным веществом наполнен громадных размеров цилиндр, закрытый с одной стороны поршнем AB (рис. 51). Пусть этот поршень приводится в движение. Ясно, что движение поршня передается тому веществу, которое заключено в цилиндре, и так как мы предполагаем размеры цилиндра (сечение его) очень большими, то в частях, далеких от его боковых стенок,

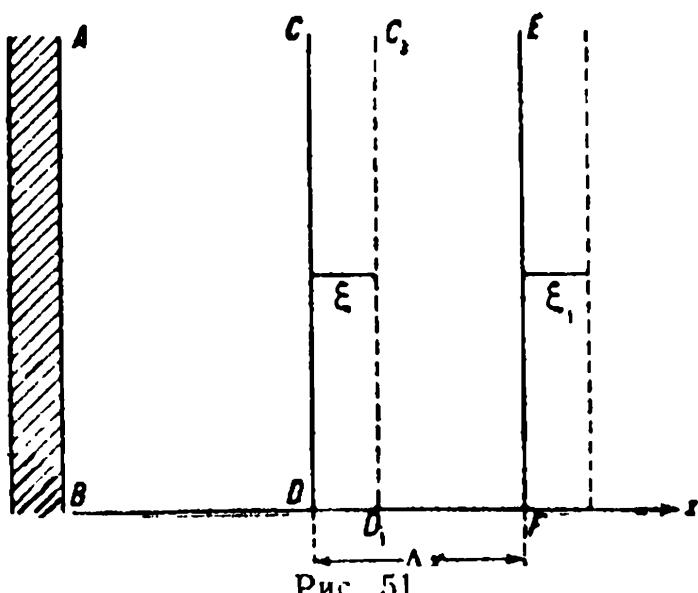


Рис. 51.

можно считать, что в параллельных плоскостях AB , CD , EF все частицы в любой момент будут смещены на одну и ту же величину. Попробуем составить уравнение движения для данной среды. Выделим из слоя $CDEF$ часть с площадью, равной единице. Тогда выделенный нами объем будет равен $v = \Delta x$ (рис. 51). Пусть все частицы в плоскости CD в рассматриваемый момент смещены на величину ξ , а в плоскости EF — на ξ_1 , причем ξ и ξ_1 являются функциями x и t . Разлагая ξ_1 в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, находим:

$$\xi_1 = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x.$$

Измененный объем:

$$v + \Delta v = \Delta x + \xi_1 - \xi = \Delta x \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (23)$$

Отсюда находим:

$$\Delta p = -a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (24)$$

Далее, рассмотрим в данной среде небольшой цилиндрический элемент с основанием в 1 см^2 и высотой dx . Масса, заключенная в этом элементе, будет ρdx . Чтобы отыскать равнодействующую, приложенную к этому элементу, надо представить себе, что данный элемент объема выделен из всей среды, и действие, оказываемое на него соседними частями, заменено соответствующими силами Δp и $\Delta p'$ (рис. 52). Так как ξ есть функция x , то ясно, что и $\frac{\partial \xi}{\partial x}$,

а следовательно, и Δp , будет функцией x .

По этой причине, разлагая $\Delta p'$ в ряд и ограничиваясь опять первым членом разложения, мы находим для равнодействующей, приложенной к элементу, содержащему массу ρdx , следующую величину:

$$\Delta p - \Delta p' = -\frac{\partial \Delta p}{\partial x} dx = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

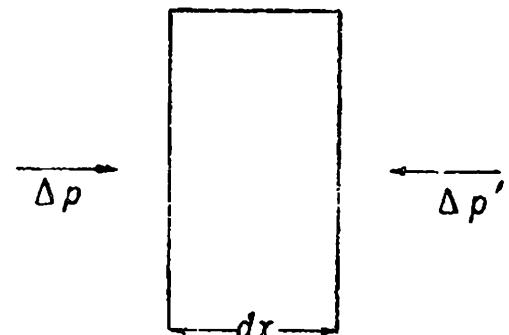


Рис. 52.

Тогда уравнение движения принимает вид:

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (25)$$

где

$$\frac{a^2}{\rho} = V^2, \quad (26)$$

т. е. получаем волновое уравнение такого же типа, как и уравнение движения струны, причем скорость распространения волны определяется, так же как и в случае струны, через коэффициент, характеризующий упругие свойства среды (для струны это была величина ее натяжения), и через плотность.

Рассмотрим теперь полученное уравнение для того случая, когда данной упругой средой является идеальный газ при условии, что температура его остается все время постоянной. Для идеального газа имеем $pv = p_0 v_0 = RT$, или $p = RT\rho$, если объем взят для единицы массы.

Отсюда находим $\frac{dp}{dv} = -\frac{p_0 v_0}{v^2}$, а из уравнения (22) имеем $\frac{dp}{dv} = -\frac{a^2}{v}$.

Сравнивая эти две величины, находим $a^2 = p$. Поэтому скорость распространения волн:

$$v = \sqrt{\frac{a^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{RT}. \quad (27)$$

Мы получаем для скорости звуковых волн в газах формулу, выведенную Ньютона. Рассмотренные нами волны — продольные, потому что смещение любой частицы среды происходит в направлении, в котором распространяются и волны.

Как известно, уравнение (27) не вполне точно изображает наблюдаемую скорость звука. Скорость звука на самом деле несколько больше. Лаплас объяснил причину этого явления. Дело в том, что при распространении волны сжатия и разрежения воздуха следуют с такой быстрой друг за другом, что температуры, вследствие выделяющегося и поглощающегося тепла, не успевают выровняться, поэтому процесс нельзя считать, как это делал Ньютон, идущим при постоянной температуре. Вот почему во время самого процесса необходимо принять не закон Бойля-Мариотта, а закон адиабатного процесса:

$$\frac{p}{v^k} = \frac{p_0}{v_0^k}.$$

или

$$pv^k = p_0 v_0^k. \quad (28)$$

Если мы примем (28), то

$$\frac{dp}{dv} = -k \frac{p_0 v_0^k}{v^{k+1}} = -k \frac{p}{v}.$$

Сравнивая это выражение с

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{a^2}{v},$$

находим $a^2 = kp$. Поэтому мы имеем для скорости волн:

$$v = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (29)$$

Эта формула, выведенная Лапласом, хорошо подтверждается на опыте.

С ее помощью мы всегда вычисляем скорость звука в воздухе и газах. Однако надо иметь в виду, что для распространения очень сильных звуков, например взрывных волн, имеют место другие законы для распространения волн, так что в этих случаях нельзя уже пользоваться выражением (29).

§ 2. Уравнения гидродинамики.

В жидкостях и газах нам приходится встречаться с очень большим числом самых разнообразных видов волнового движения, причем в некоторых случаях скорость распространения волн зависит от периода этой волны. В конечном счете, задача приводится обычно к волновому уравнению, причем это уравнение получается всегда из общих уравнений гидродинамики, которые дают громадное количество решений, не имеющих отношения к распространению волн.

Вот почему мы вкратце покажем, как получаются уравнения гидродинамики, и рассмотрим попутно ряд решений простейших задач из области гидродинамики, останавливаясь более подробно на тех случаях, когда уравнения гидродинамики приводят к волновому уравнению.

Рассмотрим прежде всего бесконечно малый элемент объема внутри жидкости $d\tau = dx dy dz$, содержащий в себе $\rho d\tau$ граммов данной жидкости (ρ — плотность).

На жидкость, заключенную в этом элементе, могут действовать силы двух родов. Прежде всего, силы, приложенные к каждой частице жидкости, находящейся внутри этого элемента, как, например, сила тяжести. Слагающие по осям координат сил такого типа будут: $X\rho d\tau$, $Y\rho d\tau$ и $Z\rho d\tau$ (X , Y , Z — компоненты силы, отнесенные к единице массы).

Далее, на элемент $d\tau$ будут действовать силы давления со стороны соседних частей жидкости. Надо представить себе, что вся жидкость, окружающая $d\tau$, удалена, но ее действие заменено действием сил, производящих в точности то давление, какое производит данная жидкость. Если мы отвлекаемся от явления вязкости, то, как известно, действие частей жидкости друг на друга приводится к давлению, нормальному к любому элементу поверхности ds . Таким образом слагающая этих сил давления параллельно оси X (рис. 53) будет: $dy dz (p - p')$. Так как давление будет функцией координат и притом в обычных случаях такой, какую можно разложить в ряд, то, ограничиваясь первым членом разложения, мы получим для равнодействующей параллельно оси X для сил этой группы величину $-\frac{\partial p}{\partial x} d\tau$. Сказанное относительно слагающих

по оси X можно распространить и на все другие оси. Поэтому, если жидкость находится в равновесии, то мы получим следующий ряд уравнений:

$$X\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial x} d\tau = 0, \quad Y\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial y} d\tau = 0, \quad Z\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial z} d\tau = 0,$$

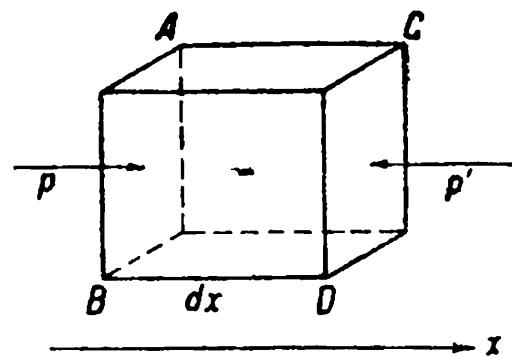


Рис. 53.

или

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (30)$$

Это представляет собою уравнения гидростатики.

Если же равновесия не получается, т. е. если элемент $\rho d\tau$ приходит в движение со скоростью, слагающие которой будут u, v, w , то на основе второй аксиомы динамики Ньютона мы приходим к следующим уравнениям:

$$\rho d\tau \frac{Du}{Dt} = X_\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial x} d\tau, \quad \rho d\tau \frac{Dv}{Dt} = Y_\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial y} d\tau,$$

$$\rho d\tau \frac{Dw}{Dt} = Z_\rho d\tau - \frac{\partial p}{\partial z} d\tau,$$

или

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (31)$$

Уравнения (31) представляют собой уравнения гидродинамики.

Почему мы написали ускорение в виде $\frac{Du}{Dt}$ и какой это имеет смысл, мы сейчас увидим. Рассмотрим движение жидкости в трубе с неодинаковым сечением (рис. 54). Если мы будем следить за движением любой частицы, мы заметим, что ее скорость будет меняться от двух причин. Если, например, в данном водопроводе напор изменяется, то в зависимости от этого в каждой данной точке, например A , скорость проходящих через нее частиц будет разная в различные моменты времени. С другой стороны, когда какая-либо частица

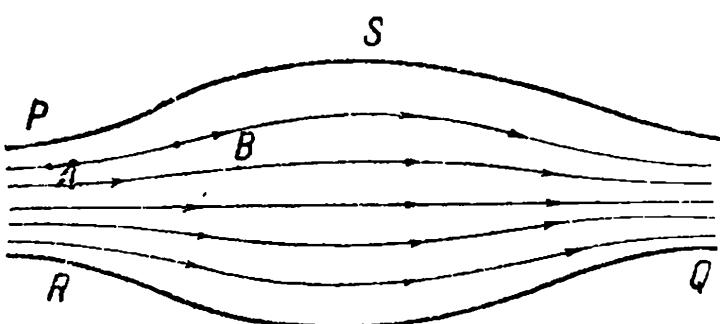


Рис. 54.

жидкости при своем движении перемещается, скажем, из A в B (рис. 54), то она попадает в область, где скорость течения будет другая (в данном случае будет меньше потому, что B находится в более широкой части трубы, где скорость течения меньше). Таким образом слагающие скорости любой частицы, заключенной в элементе $d\tau$, будут функциями не только времени, но и координат, причем за элемент времени Δt , в течение которого мы определяем изменение скорости, координаты любой частицы изменяются на $u \Delta t, v \Delta t$ и $w \Delta t$.

Итак:

$$\frac{Du}{Dt} = \lim \frac{u(t + \Delta t, x + u \Delta t, y + v \Delta t, z + w \Delta t) - u(t, x, y, z)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{A})$$

Таким образом уравнения гидродинамики (31) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (31')$$

Это так называемые уравнения Эйлера. Однако этих уравнений еще недостаточно, так как они в числе трех содержат пять неизвестных функций u , v , w , p и ρ . Правда, связь между p и ρ предполагается заданной в виде так называемого уравнения состояния: для газов это будет уравнение Бойля-Мариотта или уравнение Ван-дер-Ваальса (последнее приложимо также при известных условиях и к жидкостям). Если же жидкость предполагается несжимаемой, то мы имеем $\rho = \text{const}$. Тем не менее, одного уравнения нам все-таки не хватает.

Это недостающее нам уравнение мы получаем из условия непрерывности движения — из условия, что движущаяся жидкость не может ни возникать, ни исчезать.

Рассмотрим опять элемент объема dt (рис. 55); на этот раз пусть этот элемент находится в покое, и пусть жидкость течет через него. Величина скорости потока, а также и направление его, могут быть различны в разных частях этого элемента, например на грани $ABCD$ и на грани $EFGH$. Рассмотрим, какое количество жидкости пройдет сквозь две противоположные грани $ABCD$ и $EFGH$ за время dt . Пусть скорость вблизи $ABCD$ имеет значение $v(u, v, w)$ и вблизи $EFGH$ значение $v'(u', v', w')$. Вся жидкость, которая за время dt пройдет через эти грани, будет заключена в объемах двух призм с основанием $dy dz$ и боковыми ребрами $v dt$ и $v' dt$. Эти призмы заключают в себе следующие количества жидкости: $(\rho u) dy dz dt$ и $(\rho u') dy dz dt$. Считая, как это мы и раньше делали, что ρ , u , v , w — функции координат, которые можно разложить в ряды, мы получаем для избытка вошедшей жидкости над вышедшей $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$.

Составляя такие же выражения для оставшихся двух пар граней, находим для общего избытка вошедшей жидкости над вышедшей следую-

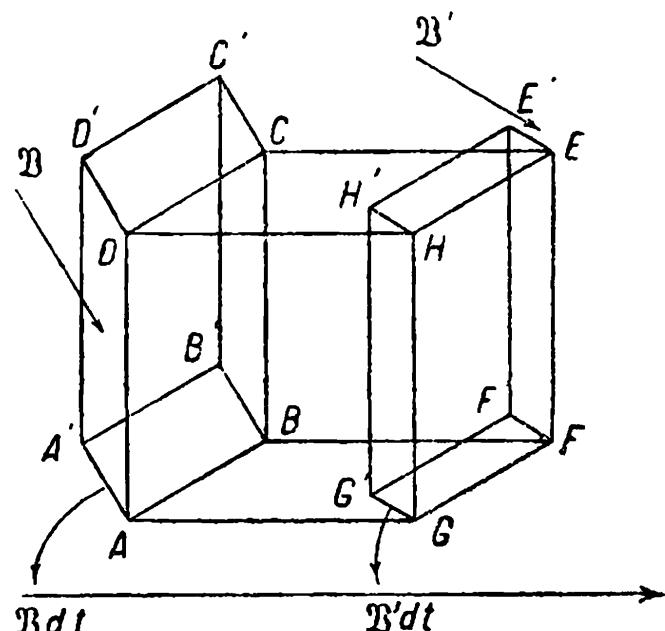


Рис. 55.

шее выражение, равное увеличению общего количества жидкости в данном элементе (так как жидкость исчезнуть не может):

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] d\tau dt = d\rho dt,$$

или

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = \frac{d\rho}{dt}. \quad (32)$$

Мы имеем $\frac{d\rho}{dt}$, а не $\frac{d\rho}{dt}$, потому что ρ — функция не только времени.

Полученное уравнение есть уравнение непрерывности. Это уравнение, пользуясь обозначениями (A), можно написать еще следующим образом:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (32')$$

или, пользуясь векторными обозначениями¹:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (32'')$$

Наконец, для несжимаемой жидкости уравнение непрерывности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (32''')$$

§ 3. Простейшие примеры на применение уравнений гидродинамики.

Пример 1. Пусть внешние силы имеют потенциал, т. е. пусть

$$X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

где Ψ — функция координат.

Далее, пусть скорости могут быть представлены как частные производные по координатам от некоторой функции координат и времени, т. е.

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{и} \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Функция Φ носит название потенциала скоростей. Требуется найти при этих условиях интеграл уравнений гидродинамики.

Решение. Прежде всего замечаем, что при указанных условиях второй, третий и четвертый члены левой части первого из уравнений (31) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} v^2. \end{aligned}$$

¹ О векторных обозначениях см. ниже, часть II, глава IV, § 4.

Принимая во внимание это выражение, а также и аналогичные выражения в основных уравнениях (31), мы приходим к выводу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}$$

Умножая эти уравнения последовательно на dx , dy , dz , складывая их вместе и интегрируя, приходим к следующему результату:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 = -\Psi - \int \frac{dp}{\rho} + c(t). \quad (33)$$

Произвольная постоянная может быть функцией времени t , так как в наших уравнениях были дифференциалы по координатам, считая время за параметр. Это и есть искомый интеграл.

Пример 2. Пусть мы имеем установившееся движение, т. е. движение, не зависящее от времени, и пусть силы имеют потенциал. Требуется найти интеграл уравнений гидродинамики.

Решение. Если движение установившееся, то это значит, что в жидкости устанавливаются постоянные линии тока ABC (рис. 56), по которым будут двигаться одна за другой частицы жидкости. Поэтому в каждый данный момент направление скорости всегда совпадает с направлением касательной к линии тока, ввиду чего косинусы углов скорости v с осями координат будут $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$.



Рис. 56.

В уравнениях гидродинамики для случая стационарного движения исчезнут члены $\frac{du}{dt}$ и т. д.

Помня, что $u = v \frac{dx}{ds}$ и т. д., мы приходим к выводу:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) = v \frac{du}{ds},$$

а поэтому уравнения гидродинамики принимают в этом случае вид:

$$\begin{aligned}v \frac{\partial u}{\partial s} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v \frac{\partial v}{\partial s} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}$$

Умножая эти уравнения последовательно на

$$\frac{dx}{ds} ds, \quad \frac{dy}{ds} ds \quad \text{и} \quad \frac{dz}{ds} ds$$

и складывая, мы находим:

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + w \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \dots \right) ds, \end{aligned} \quad (34)$$

откуда, интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2} v^2 = - \Psi - \int \frac{dp}{\rho} + C. \quad (35)$$

Если мы в выражении (33) предположим, что состояние, а следовательно, также и $C(t)$ от времени не зависит, то мы получаем, как будто, то же самое выражение, что и в (35).

Однако выражение (35) — более общее, и при его выводе не предполагается, что функция Φ существует. Поэтому C имеет разное значение в (33) и (35). Если мы возьмем частный случай (33), считая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, то $C(t)$ будет постоянной для всей области, занятой движущейся жидкостью, тогда как в (35), как это особенно ясно из (34), интеграция берется по одной из линий тока. Поэтому в общем случае выражение (35), верное для всех линий тока, будет отличаться только тем, что для различных линий тока постоянная может иметь различное значение.

Пример 3. Пусть в горизонтальной плоскости расположена труба $ABCD$ (рис. 57), по которой протекает несжимаемая жидкость, и

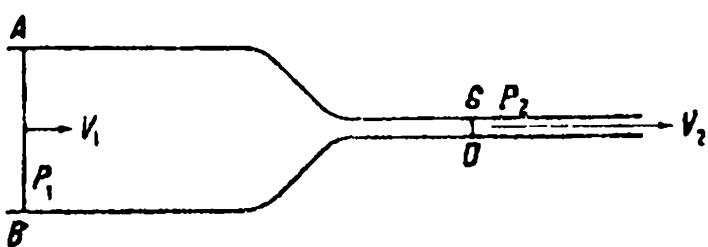


Рис. 57.

пусть сечение AB настолько велико, что скоростью течения в этой части можно пренебречь, т. е. положить, что $V_1 = 0$. Спрашивается, как будет связано давление p_1 в широкой части трубы с давлением p_2 в узкой части CD ?

Решение. Используем найденный (пример 2) интеграл для установившегося движения. Так как единственной внешней силой у нас будет сила тяжести и так как трубка $ABCD$ лежит в горизонтальной плоскости, то в обоих сечениях функция Ψ будет иметь одно и то же значение. Итак, на основании (35), при условии $\rho = \text{const}$, имеем:

$$0 = -\Psi - \frac{p_1}{\rho} + C \quad \text{и} \quad \frac{V_2^2}{2} = -\Psi - \frac{p_2}{\rho} + C,$$

откуда получаем закон Бернулли, определяющий так называемое гидродинамическое давление:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho V_2^2}{2}. \quad (36)$$

Чем скорость V_2 больше, тем меньше гидродинамическое давление, которое при $\frac{\rho V_2^2}{2} > p_1$ может стать даже отрицательным.

Уравнение (36) объясняет действие так называемых гидродинамических насосов, инжекторов и т. д., т. е. присасывающее действие быстро текущей струи. Уравнение (36) можно вывести на основании совершенно элементарных соображений, но нам важно, что оно является следствием общих уравнений гидродинамики.

Пример 4. Пусть из большого сосуда $ABCD$ (рис. 58), в котором уровень поддерживается на постоянной высоте AB , вытекает вода через отверстие D_1D , находящееся на глубине h под уровнем AB . Пусть отверстие настолько мало по сравнению с сечением AB , что скоростью в сечении AB можно пренебречь. Определить скорость вытекающей струи (теорема Торричелли)?

Решение. Так как движение установившееся, то можно опять применить (35). Поместим начало координат в плоскости AB и направим ось Z по вертикали вниз. Тогда $\frac{d\Psi}{dz} = g$, откуда $\Psi = -gz$. Подставляем это значение в (35) для $z = h$ и для $z = 0$, тогда, обозначая атмосферное давление через p_0 , находим:

$$\frac{V^2}{2} = gh - \frac{p_0}{\rho} + C \quad \text{и} \quad 0 = -\frac{p_0}{\rho} + C,$$

откуда

$$V = \sqrt{2gh}. \quad (36')$$

Теорема Торричелли, т. е. соотношение (36'), выводится в общих курсах физики более упрощенными приемами. Для нас же важно опять то, что это соотношение вытекает непосредственно из уравнений гидродинамики.

Пример 5. Пусть в цилиндрическом сосуде налита жидкость. Пусть сосуд с жидкостью вращается вокруг оси Z цилиндра (рис. 59а), и пусть при установившемся состоянии вся жидкость вращается, как сплошное тело, вокруг OZ с постоянной угловой скоростью ω . Определить форму поверхности.

Решение. При установившемся состоянии ясно, что не может быть движения параллельно оси цилиндра, поэтому $w = 0$. Далее, из условия, что жидкость вращается, как сплошная масса, следует, что $u = -\omega r \frac{v}{r}$ и $v = \omega r \frac{x}{r}$, как это следует из рис. 59б, где скорость ωr

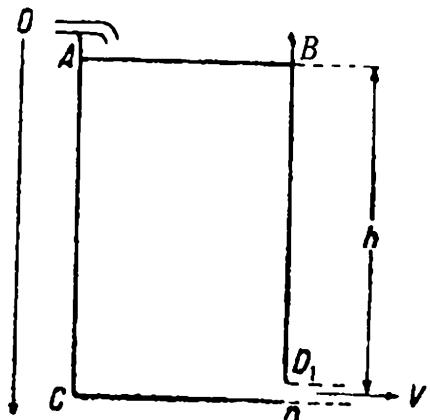


Рис. 58.

постоянна при установившемся состоянии. Вставляя в уравнения гидродинамики (31) $u = -\omega y$, $v = \omega x$ и $w = 0$, а также замечая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -g$, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

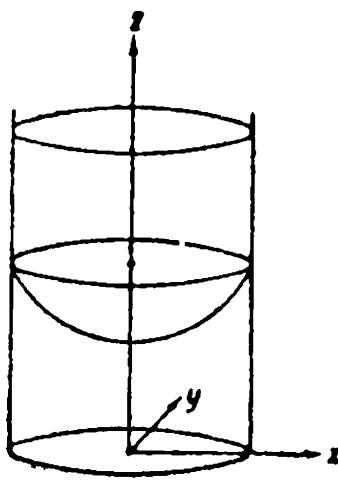


Рис. 59а.

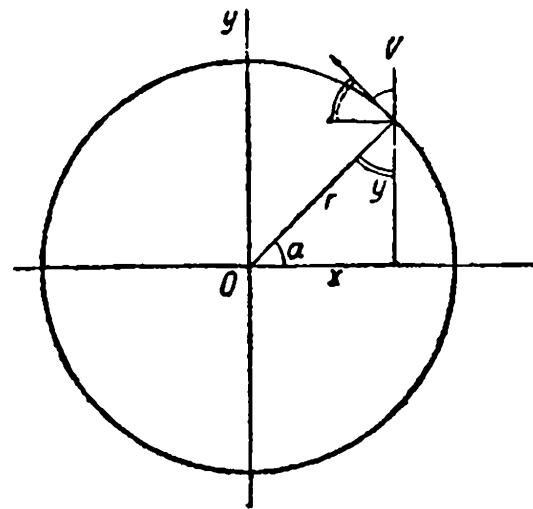


Рис. 59б.

Умножая (37) последовательно на dx , dy , dz , складывая и интегрируя и полагая $\rho = \text{const}$, мы приходим к выводу:

$$\frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} = gz + \frac{p}{\rho} + C. \quad (37')$$

Для того чтобы найти форму поверхности, надо вместо p подставить величину атмосферного давления p_0 .

Для того чтобы определить форму поверхности, берем совместно с (37') после подстановки в него $p = p_0$, уравнение плоскости $x = 0$ или $y = 0$; получаем уравнение параболы.

Итак, поверхность будет параболоид вращения.

Пример 6. Рассмотрим теперь один из случаев волн, распространяющихся в несжимаемой жидкости. Пусть волны параллельны оси z и простираются неопределенно далеко. Тогда задачу можно решать в двух измерениях. Пусть, кроме того, существует потенциал скоростей. В этом случае уравнения, с которыми нам придется иметь дело, имеют вид:

$$-\frac{\delta \Phi}{\delta t} + \frac{1}{2} v^2 = -\frac{p}{\rho} - gy \quad (38)$$

и

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (39)$$

Мы в первом уравнении полагаем $C(t) = 0$ [ср. уравнение (33)]. Кроме того, мы в дальнейшем будем предполагать $v^2 = 0$, т. е. считать, что скорости частиц, принимающих участие в волновом движении, очень малы.

Решение. Предположим, что искомая функция

$$\Phi = Y \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right), \quad (40)$$

где Y — функция только координаты y . Подставляя (40) в (39) и сокращая на $\cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right)$, так как последняя величина не может равняться нулю при всех значениях t и x , находим:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 Y = 0. \quad (41)$$

С таким уравнением мы встречались в ч. I, гл. II. Общее решение его будет:

$$Y = A e^{ky} + B e^{-ky}, \quad (42)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (43)$$

Предположим, что дно находится при $y = 0$. Тогда скорость $v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ при $y = 0$ должна обратиться в нуль. Условие $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, на основании (42) и (40), принимает вид: $k(A - B) = 0$, т. е. $A = B$.

Для какой-нибудь определенной глубины $y = h$ давление p будет постоянным, тогда, дифференцируя (38) по t и заменяя $\frac{dy}{dt} = v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, находим:

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = g \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (38')$$

Вместо Φ подставляем сюда найденную величину:

$$\Phi = A(e^{ky} + e^{-ky}) \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right). \quad (40')$$

Заменив после подстановки y на h , в результате подстановки находим:

$$gk(e^{kh} - e^{-kh}) = (e^{kh} + e^{-kh}) \frac{4\pi^2}{T^2} = V^2(e^{kh} + e^{-kh})k^2,$$

откуда для скорости распространения волн мы находим:

$$V = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}}, \quad (44)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Если λ — величина большая (волны — длинные), то k мало, тогда при достаточно малом h мы имеем $e^{kh} \approx 1 + kh$ и, далее:

$$V = V\overline{gh}, \quad (44')$$

т. е. скорость распространения волны не зависит от ее периода. Если величина k — большая, то мы имеем другой предельный случай:

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} , \quad (44'')$$

— скорость зависит от длины волны, так же как и в общем случае (44). Отсюда следует, что сложная волна, состоящая из нескольких периодических волн различных периодов, при своем движении изменяет, вообще говоря, свою форму. Любое возмущение, как мы видели, может быть изображено с помощью тригонометрического ряда. Так как составные части (волны определенных периодов) бегут с разной скоростью, то ясно, что составленное из них возмущение не может перемещаться, сохраняя свою форму. Подобным образом, между прочим, объясняется падение гребня волны — те белые гривки, или „барашки“, которые бывают видны во время сильных волнений на море, озерах и реках.

Пример 7. Случай длинных волн в каналах. Представим себе жидкость в канале ширины a (рис. 60). Пусть уровень жидкости в канале, не возмущенной волнами, находится на высоте z_0 , считая от дна канала. Далее, пусть в любой плоскости, перпендикулярной к длине канала (ось X), все частицы находятся в одинаковой фазе движения. Далее, предполагается, что вследствие того, что волны длинные, скорости

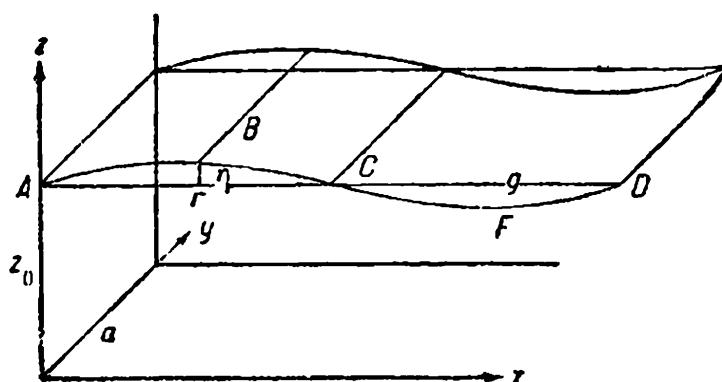


FIG. 60a.

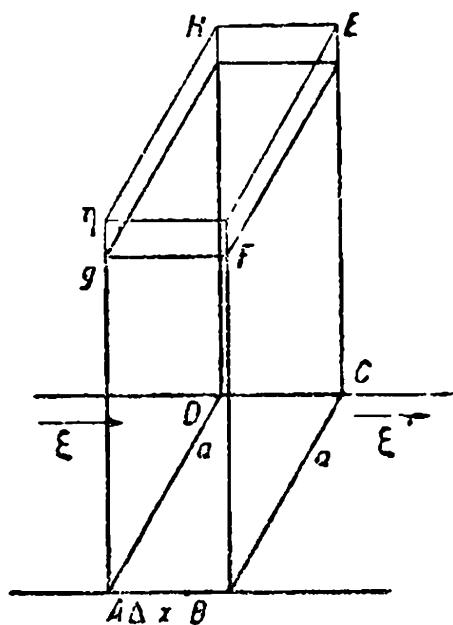


Рис. 60б.

частичек параллельно оси Z (рис. 59а) очень медленно меняются, и поэтому можно считать $\frac{dw}{dt} = 0$. Вообще, мы принимаем, что все скорости движения

частинц настолько малы, что членами типа $u \frac{du}{dx}$ можно пренебречь, а то значит, что не только u и w ($v = 0$ по предположению) малы, но и их пространственные изменения очень малы, т. с. малы величины $\frac{du}{dx}$,

$$\frac{d\omega}{dx} \text{ и г. д.}$$

Решение. При указанных условиях уравнения движения принимают вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0^1, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0, \quad (45)$$

где ξ есть смещение, параллельное оси X . Интегрируя третье из уравнений (45), мы находим:

$$p = -gpz + C. \quad (46)$$

Рассмотрим какую-нибудь область, где проходит волна; пусть там уровень поднят на величину η , тогда мы имеем:

$$p_0 = -gp(z_0 + \eta) + C \quad (46')$$

(p_0 — атмосферное давление). Поэтому из (46) и (46') находим

$$p = p_0 + gp(z_0 + \eta - z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = gp \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (46'')$$

Вставляя найденное значение (46'') в первое из уравнений (45), получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (47)$$

Выводим теперь условие непрерывности для данного случая; возьмем два отстоящих друг от друга на расстоянии Δx сечения нашего канала и подсчитаем баланс втекающей и вытекающей жидкости для этого слоя толщиной Δx . Опять предполагая, что смещение ξ есть функция x , мы находим для перевеса вошедшей жидкости над вышедшей следующее выражение:

$$\rho az_0 \xi - az_0 \xi' \rho = -az_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \rho. \quad (48)$$

Так как жидкость несжимаема, то ясно, что это количество жидкости, подсчитанное в (48), должно выступить над поверхностью z_0 , т. е. это будет:

$$a \Delta x \cdot \eta \cdot \rho. \quad (48')$$

Сравнивая эти два выражения, мы находим:

$$\eta = -z_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (48'')$$

Вставляя это в (47), имеем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g z_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (49)$$

¹ Уравнение $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ дает указание на то, что p не изменяется в зависимости от y , что непосредственно вытекает из условий задачи.

т. е. получаем волновое уравнение. Скорость распространения волн будет:

$$V = \sqrt{g z_0}. \quad (49')$$

Как мы видим, это совпадает с предельным выражением (44'), которое мы получили для волн совершенно другого типа. Мы рассмотрели целый ряд самых разнообразных задач, на первый взгляд не имеющих ничего общего между собой, и все-таки оказалось, что теория всех этих разнообразных процессов вытекает из одной системы уравнений. Мы видим, что в некоторых случаях уравнения гидродинамики приводят нас к волновому уравнению, но они не сводятся к нему. Уравнения гидродинамики значительно шире: они только в некоторых частных случаях приводят нас к волновому уравнению.

Глава III.

Звуковые волны, распространяющиеся в воздухе.

§ 1. Общее уравнение для волн, распространяющихся в газообразной среде.

Предположим, что внешнего поля силы нет, т. е. что X , Y и Z все равны нулю. Предположим, далее, что все скорости и все изменения скоростей $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, ... настолько малы, что члены вида $u \frac{\partial v}{\partial x}$ можно рассматривать как исчезающе малые. Тогда уравнения гидродинамики принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

и уравнение непрерывности в этом случае сводится к

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (50)$$

Далее, пусть связь между p и ρ будет та самая, которая принята при выводе формулы Лапласа для скорости звука, — ведь мы уже знаем, что она подтверждается на опыте. Итак,

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}. \quad (51)$$

Из (51) мы находим:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^k} k \rho^{k-1} - k \frac{p}{\rho^k} \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho}. \quad (51')$$

Но мы видели [§ 1, уравнение (29)], что $k \frac{p}{\rho} = V^2$, поэтому:

$$\frac{dp}{d\rho} = V^2. \quad (51'')$$

Принимая во внимание (51''), мы можем уравнения гидродинамики в форме (50) привести к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot V^2 = - \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\rho}{\rho_0} \cdot V^2. \quad (52)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Аналогично преобразуются два другие уравнения.

Интегрируем эти уравнения по времени:

$$\left. \begin{aligned} u &= - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\rho}{\rho_0} \cdot V^2 dt + f_1(x, y, z), \\ v &= - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\rho}{\rho_0} \cdot V^2 dt + f_2(x, y, z), \\ w &= - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\rho}{\rho_0} \cdot V^2 dt + f_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Мы интегрируем по t , считая x, y, z за параметры. Если мы выберем начальный момент t_0 , так что в этот момент у нас еще нет изучаемого нами движения, т. е. u, v и w во всех точках равны нулю, то это приводит нас к выводу, что все три функции f_1, f_2 и f_3 равны нулю. При этом условии ясно, что скорости u, v и w можно представить:

$$u = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

где

$$\Phi = \int_{t_0}^t V^2 \log \frac{\rho}{\rho_0} dt. \quad (53')$$

Таким образом функция Φ есть потенциал скоростей, с которым мы встречались в гл. I (примеры 1 и 6). Дифференцируем выражение Φ из (53') два раза по времени:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V^2 \log \frac{\rho}{\rho_0} \quad (53'')$$

и

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (53''')$$

Вставляя (53'') и (53'') в (50), мы находим уравнение, определяющее функцию Φ , т. е.

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (54)$$

Это есть волновое уравнение, но для случая волн, распространяющихся в трех измерениях. Если бы функция Φ зависела только от одной координаты и от времени, то мы получили бы точь в точь такое же уравнение, как уравнение движения для струны.

Таким образом для решения любой задачи необходимо сначала найти решение уравнения (54) и, кроме того, надо знать как начальные условия для функции Φ , так и условия, которые должны соблюдаться на границе той области, для которой отыскивается функция Φ . Когда функция Φ найдена, сейчас же с помощью дифференцирования по координатам мы находим для любой точки значения u , v и w . Кроме того, как мы сейчас покажем, та же функция Φ позволит нам найти выражения для изменения плотности среды в любой момент и в любом месте той области или того поля, для которого определена функция Φ . В выражении (53'') можно заменить ρ через $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, где $\Delta\rho$ есть отступление от средней плотности, вызванное проходящей волной. Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V^2 \log \frac{\rho_0 + \Delta\rho}{\rho_0}$ или, если $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ величина малая, то $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V^2 \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$, откуда $\Delta\rho = \rho_0 \frac{1}{V^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$; но так как $V^2 = \frac{dp}{d\rho}$ или приближенно $\frac{\Delta\rho}{\Delta p}$, то

$$\Delta p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (55)$$

Поэтому $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, умноженная на среднюю плотность, дает выражение избыточного давления или, в зависимости от знака, уменьшения среднего давления, вызванного волнами сгущения и разрежения. Таким образом (54), (53) и (55), вместе с указанными дополнительными условиями, необходимыми для отыскания функции Φ , решают поставленную задачу. Как пользоваться этим приемом, всего лучше будет видно при подробном изучении простейших примеров.

§ 2. Случай плоских волн.

Пусть нам дана твердая стенка AB очень больших размеров, — мы ее можем считать практически бесконечной, — которая с момента $t=0$ приходит в: колебательное движение по закону:

$$u_0 = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (56)$$

причем колебания происходят по направлению нормали, по которой мы направим ось x (рис. 61). Пусть справа от AB находится воздух, который при $t=0$ находился в покое. Требуется определить движение воздуха для любого момента $t > 0$.

Из условий задачи (бесконечные размеры и направление движения AB) ясно, что функция Φ может зависеть только от одной координаты x , а потому уравнение (54) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (54')$$

Кроме того, мы имеем еще три дополнительных условия:

Первое: при $t = 0$, когда еще нет никакого движения, вызванного колеблющейся стенкой, во всей области справа от AB :

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (a)$$

Второе: точно так же никаких отклонений от среднего давления быть не должно, т. е.

$$\Delta p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (b)$$

Наконец, третье условие: начиная с момента $t = 0$:

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (c)$$

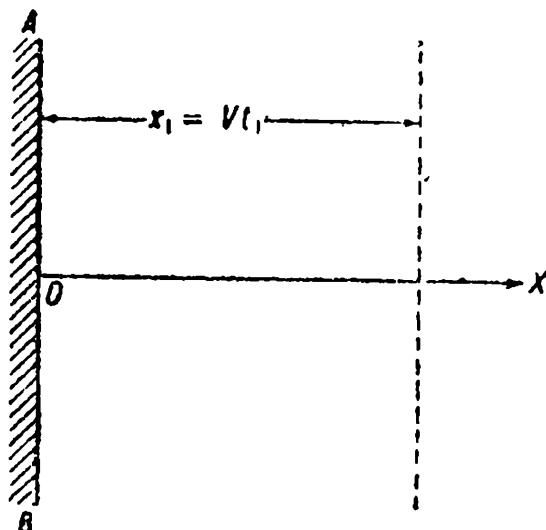


Рис. 61.

так как частицы, непосредственно прилегающие к твердой стенке, должны все время двигаться так, как она сама движется.

Попытаемся найти решение (54') при этих дополнительных условиях. По методу Даламбера, как мы знаем, можно показать, что решением (54') будет служить сумма двух каких угодно функций от следующих комбинаций переменных: $t - \frac{x}{V}$ и $t + \frac{x}{V}$, т. е. мы будем иметь:

$$\Phi = f_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{V}\right). \quad (55)$$

Составляем $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{t=0} = 0$ и $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$, помня, что переменные входят в виде группы $t - \frac{x}{V}$ и $t + \frac{x}{V}$. Поэтому f'_1 и f'_2 будут обозначать производные по всему аргументу. Выполняя эти операции, мы приходим к выводу:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{t=0} = -\frac{1}{V} f'_1\left(-\frac{x}{V}\right) + \frac{1}{V} f'_2\left(\frac{x}{V}\right) = 0,$$

или

$$f'_1\left(-\frac{x}{V}\right) - f'_2\left(\frac{x}{V}\right) = 0 \quad (a')$$

и

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f'_1\left(-\frac{x}{V}\right) + f'_2\left(\frac{x}{V}\right) = 0. \quad (b')$$

Из этих условий мы получаем:

$$f_1' \left(-\frac{x}{V} \right) = 0$$

и

$$f_2' \left(\frac{x}{V} \right) = 0,$$

т. е.

$$f_1 = \text{const} \quad \text{и} \quad f_2 = \text{const.}$$

Но так как эти функции входят в выражение потенциала и так как и скорость и изменения давления определяются через производные от потенциала, то отсюда получается, что, как будто, вообще, не может быть никакого движения при этих условиях.

Не будем, однако, поспешны. Что нам говорит условие

$$f_1 \left(-\frac{x}{V} \right) = \text{const?}$$

При наших условиях x может быть только положительным: мы рассматриваем только то, что происходит (рис. 61) справа от AB . Поэтому условие $f_1 \left(-\frac{x}{V} \right) = \text{const}$ говорит только о том, что для отрицательных значений аргумента функция f_1 постоянна. Но что значит отрицательное значение аргумента $t - \frac{x}{V}$? Это значит, что x для этого

должно быть больше Vt , так как и x и t могут быть только больше нуля. А что значит $x > Vt$? Движение начинается на стенке при $t = 0$: оно распространяется со скоростью V , как нам говорит решение Даламбера, и следовательно, к моменту t оно распространяется только до области $x = Vt$; до областей $x > Vt$ движение, вызванное колебанием AB , еще не дошло. Вот что говорит нам $f_1' \left(-\frac{x}{V} \right) = 0$ или

$f_1 \left(-\frac{x}{V} \right) = \text{const.}$ Другое полученное нами условие $f_2' \left(\frac{x}{V} \right) = 0$ показывает, что функция f_2 , вообще, в нашей задаче не может играть никакой роли, так как аргумент $t + \frac{x}{V}$ может быть только положительным, и это понятно физически.

Мы ведь знаем, что $f_2 \left(t + \frac{x}{V} \right)$ представляет собой волну, бегущую в сторону убывающих значений x , но откуда у нас может появиться такая волна? Только если волна $t - \frac{x}{V}$ отразится от какого-нибудь препятствия. Но ведь мы не предполагаем существования такого препятствия, вследствие чего волны, идущие от AB , будут уходить в бесконечность и не будут оттуда возвращаться. Итак, функция f_2 все время равна постоянной; что касается f_1 .

то для отрицательных значений аргумента эта функция также равна постоянной. Остается использовать последнее из условий — условие:

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = A \sin \frac{2\pi}{T} t = f_1'(t) \cdot \frac{1}{V},$$

откуда

$$f_1(t) = -A \frac{VT}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Но, так как мы знаем, что f_1 должна быть функцией $t - \frac{x}{V}$, то в окончательном виде мы находим решение нашей задачи:

$$\Phi = -A \frac{\lambda}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V}\right). \quad (56)$$

При этом надо твердо помнить, что (56) верно лишь для $t - \frac{x}{V} > 0$.

Теперь посмотрим, как выражается скорость u .

Мы получаем:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{TV} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V}\right) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V}\right), \quad (57)$$

причем для $x = 0$ это переходит, как следовало ожидать, в (с). Избыток давления определяется по (55):

$$\Delta p = \rho_0 A V \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V}\right). \quad (55')$$

Самое интересное здесь то, что в распространяющейся волне как скорость, так и избыток давления, во всех точках имеют одинаковую фазу. В системе стоячих волн этого не получается. Рассмотрим сейчас случай волн, идущих и в том и в другом направлениях и дающих систему стоячих волн. Тогда:

$$\begin{aligned} \Phi = -A \frac{\lambda}{4\pi} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{V}\right) + A \frac{\lambda}{4\pi} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{V}\right) = \\ = -A \frac{\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2\pi}{\lambda} x, \end{aligned} \quad (57')$$

откуда находим:

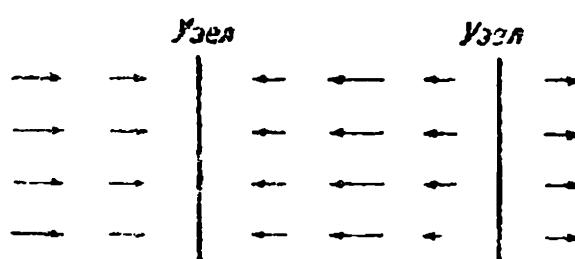
$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

и

$$\Delta p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -A \rho_0 V \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Отсюда ясно, что в тех местах, где получается минимум скорости, получится максимум давления и наоборот. В самом деле, если в трубку Кундта ввести слуховую трубку, то звук будет слышен только в тех

случаях, когда трубка будет вставлена в область узла, где пылинки не двигаются; там же, где пылинки разбрасываются и где, следовательно, наибольшее движение, там нет колебаний давления Δp , и нет звука. Это



особенно ясно на рис. 62, где изображены стрелками движения частиц воздуха. Размер стрелок показывает размах, или амплитуду, смещений. Из рисунка ясно, что наибольшие изменения плотности должны быть в узлах.

Рис. 62.

§ 3. Сферические волны.

Пусть функция Φ зависит только от времени t и от расстояния r , отсчитанного от начала координат. Таким образом координаты входят в функцию Φ только через посредство r . В этом случае удобно преобразовать уравнение (54), выразив его через переменные r и t . Для этого предполагаем, что функция Φ уже выражена через r и t , тогда:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x}{r}$$

и

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Составляя аналогичные выражения для $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ и складывая все три вместе, мы получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Итак, уравнение (54) принимает вид:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Умножаем обе части равенства на r :

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Phi) = r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi). \quad (54'')$$

Уравнение (54) показывает, что мы получаем формально такое же уравнение, как и для плоской волны, но с той только разницей, что искомой функцией здесь является не функция Φ , а произведение из Φ на r . Здесь мы опять имеем пример „сведения“. Хотя уравнение получается буквально то же самое, но окончательное решение вовсе не совпадает с прежним решением, так как одинаковое решение получается в первом случае для функции Φ , а во втором — для $r\Phi$. В этом, именно, и заключается специфическое отличие одного явления по сравнению с другим. Применяя метод Даламбера, находим для функции Φ следующее решение:

$$\Phi = \frac{f_1(Vt - r) + f_2(Vt + r)}{r}. \quad (58)$$

При использовании решения (58) могут встречаться следующие затруднения. В точке $r=0$ Φ обращается, вообще, в бесконечность или становится неопределенной, когда $f_1(Vt)+f_2(Vt)$ стремится к нулю, при $r=0$. Эта неопределенность может, впрочем, разрешиться в конечное значение. Чаще всего, однако, бывает так, что область $r=0$ занята источником звука, например пульсирующим шаром, т. е. шаром с переменным радиусом, или колеблющимся твердым шаром. Но тогда к области, занятой шаром, уравнение (54), вообще, неприменимо. Эта область исключается из рассмотренных, так как в ней нет волн, распространяющихся в воздухе.

Для того чтобы определить вид функций, надо знать значение $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ как функции r для всего пространства, занятого исследуемым полем в момент $t=0$.

На основании (58) имеем:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{t=0} = \frac{d}{dr} \left[\frac{f_1(-r)}{r} + \frac{f_2(r)}{r} \right]$$

и

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = V \left[\frac{f_1'(-r)}{r} + \frac{f_2'(r)}{r} \right].$$

Второе из этих равенств можно представить так:

$$\frac{1}{V} r \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{d}{dr} \left[-f_1(-r) + f_2(r) \right].$$

Интегрируя эти уравнения по r и полагая произвольные постоянные равными нулю, так как в выражении потенциала для нас постоянные роли не играют, мы находим:

$$f_1(-r) + f_2(r) = r \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)_{t=0} dr, \quad (a)$$

$$-f_1(-r) + f_2(r) = \frac{1}{V} \int r \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{t=0} dr. \quad (b)$$

Если в начальный момент $t=0$ во всем поле:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)_{t=0} = 0$$

и

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0,$$

то, как и в случае плоских волн, мы получаем $f_2(r) = \text{const}$ для всех значений аргумента (они могут быть только положительные) и $f_1(-r) = \text{const}$ для всех отрицательных значений аргумента¹. Для решения поставленной задачи необходимо знать еще одно условие, именно, для определения вида f_1 при положительных значениях аргумента. Таким

¹ Если область $r=0$ выделена, скажем, до $r=R$, то отрицательные значения $f_1(-r)$ начинаются с $r=R$.

условием обычно является условие на границе звучащего тела. Рассмотрим это условие на конкретных примерах.

§ 4. Пульсирующий шар.

Предположим, что у нас имеется шар с периодически изменяющимся радиусом, например, пусть мы имеем резиновый шар, в котором периодически изменяется давление и который то расширяется, то сжимается. Пусть этот процесс идет по закону:

$$\frac{dR}{dt} = u_0 = A \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Тогда условие на поверхности:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r}_{r=R} = A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

или в раскрытом виде:

$$\frac{1}{R} \frac{df_1}{d\xi} + \frac{f_1}{R^2} = A \cos \frac{2\pi}{T} \frac{\xi + R}{V},$$

или

$$\frac{df_1}{d\xi} + \frac{f_1}{R} = RA \cos \frac{2\pi}{T} \frac{\xi + R}{V}, \quad (59)$$

где

$$\xi = Vt - r. \quad (60)$$

Вводим для сокращения:

$$\frac{2\pi}{TV} = k, \quad (60')$$

и переходим к уравнению относительно комплексной функции так, как это мы делали при решении вопроса о принужденном колебании. Уравнение (54) принимает вид:

$$\frac{df_1}{d\xi} + \frac{f_1}{R} = RAe^{ik(\xi + R)} \quad (59')$$

Пробуем найти решение в виде функции

$$f_1 = Be^{ik\xi}. \quad (61)$$

В результате подстановки находим:

$$B \left(ik + \frac{1}{R} \right) = AR e^{ikR}.$$

Поэтому (61) будет служить частным решением (59'), если только

$$B = \frac{AR^2}{1 + kRi} e^{ikR}.$$

Преобразуем комплексную величину, приведя ее к тригонометрическому виду:

$$\rho \cos \epsilon = 1 \quad \text{и} \quad \rho \sin \epsilon = kR,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varepsilon = kR \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt{1 + k^2 R^2}.$$

Вставляя найденное значение B в (61) и отделяя действительную часть от мнимой, находим:

$$f_1 = \frac{AR^2}{\sqrt{1+k^2 R^2}} \cos [k(Vt - r + R) - \varepsilon], \quad (61')$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = kR. \quad (61'')$$

Но это решение есть частное решение. Чтобы найти общее решение, надо по общему правилу (как мы видели в первой части курса) к этому частному решению прибавить общее решение (59) без второй части, т. е. общее решение уравнения:

$$\frac{df_1}{d\xi} + \frac{f_1}{R} = 0. \quad (62)$$

Решением этого уравнения, как нетрудно убедиться, будет

$$f_1 = Ce^{-\frac{\xi}{R}} = Ce^{-\frac{Vt-r}{R}}. \quad (63)$$

Итак, для потенциала Φ в данном случае мы находим:

$$\Phi = \frac{AR^2}{\sqrt{1+k^2 R^2}} \frac{1}{r} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (Vt - r + R) - \varepsilon \right] + \frac{C}{r} e^{-\frac{Vt-r}{R}}. \quad (64)$$

Так как t изменяется от 0 до ∞ , то ξ изменяется от $-R$ до ∞ . Постоянную C можно определить, например, из условия, что

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=0}$$

для $r=R$ обращается в нуль, т. е. что у нас в начальный момент на поверхности шара нормальное (неизмененное) давление. Таким образом движение у нас будет сложное: оно будет состоять из периодического процесса и из апериодического, который с течением времени замирает.

§ 5. Колеблющийся (вибрирующий) шар.

Из полученного нами решения

$$\Phi = \frac{f_1(Vt-r) + f_2(Vt+r)}{r} \quad (58)$$

очень легко получить решение для твердого шара, совершающего гармонические колебания вокруг некоторого положения равновесия. Рассмотрим сначала одно общее свойство решений волнового уравнения. Если мы доказали, что некоторая функция Φ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

то совершенно ясно, что равенство не изменяется, если мы продифференцируем его по любой из переменных x, y, z , скажем, по x . Но так как у частных производных можно всегда изменить порядок, то из полученного равенства мы находим:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right),$$

т. е. $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ также удовлетворяет уравнению волны. Итак,

$$\Phi_1 = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (65)$$

представит собой решение волнового уравнения. Нетрудно, однако, убедиться, что это решение будет соответствовать шару, движущемуся

по оси X . В самом деле, так как функция Φ зависит от координат только через посредство r , то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \vartheta \quad (65')$$

(рис. 63 и 64).

Если шар движется по оси X со скоростью v , то

нормальная слагающая скорости $v_n = v \cos \vartheta$, но, с другой стороны, она выражается так:

$$\begin{aligned} v_n &= \left(- \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=R} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \vartheta \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \cos \vartheta = v \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (65'')$$

т. е. выполняется необходимое условие, чтобы нормальная скорость частиц среды, непосредственно прилегающих к поверхности шара, совпадала со скоростью соответствующих частей шара.

Кроме условия (65) необходимы еще начальные условия. Положим, что при $t = 0$:

$$\left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0, \right\} \quad (65''')$$

а также

$$\left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r \partial \vartheta} = 0. \right\} \quad (65''')$$

Последнее условие есть равенство нулю тангенциальной слагающей скорости (вдоль поверхности шара). Эти условия должны иметь место для $r > R$ и $r < \infty$. Пространство, занятное шаром, исключается из звукового поля. Приведенные условия совершенно таким же путем, как

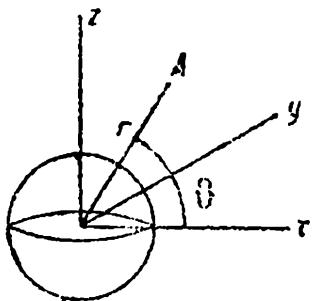


Рис. 63.

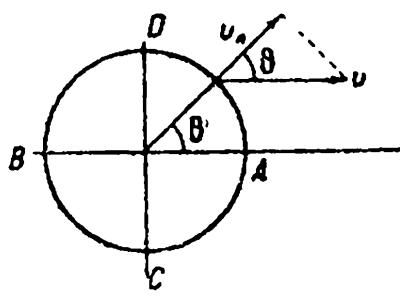


Рис. 64.

и в разобранных нами случаях, приводят к тому, что функция f_2 обращается в нуль при всех положительных значениях аргумента, а функция f_1 — для всех значений от $-R$ до $-\infty$. Вид же функции f_1 в пределах от $-R$ до $+\infty$ определяется из условия

$$A \cos \frac{2\pi}{T} t = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_{r=R}. \quad (65''')$$

Составляем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{f'_1}{r} - \frac{f_1}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{f''_1}{r} + \frac{2}{r^2} f'_1 + \frac{2f_1}{r^3}.$$

Вводим новое переменное $\eta = Vt - R$ и приводим уравнение к комплексному виду, полагая

$$\frac{2\pi}{VT} = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогда уравнение (65''') принимает вид:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{2}{R} \frac{df}{d\eta} + \frac{2f}{R^2} = A R e^{ik(\eta+R)}. \quad (66)$$

Как и в предыдущей задаче, отыскиваем решение в виде:

$$f = B e^{ik\eta}.$$

Находим следующие условия для B :

$$B = \frac{A R e^{ik(R-\varepsilon)}}{\sqrt{\left(\frac{2}{R^2} - k^2\right)^2 + \left(\frac{2k}{R}\right)^2}},$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{2k}{R}}{\frac{2}{R^2} - k^2}. \quad (67)$$

Отделяем действительную часть, которая и представляет собой решение поставленной задачи:

$$f_1 = \frac{A R \cos [k(\eta+R) - \varepsilon]}{\sqrt{\left(\frac{2}{R^2} - k^2\right)^2 + \left(\frac{2k}{R}\right)^2}} = \frac{A R \sin \varepsilon}{2 \frac{k}{R}} \cos [k(\eta+R) - \varepsilon]. \quad (68)$$

Но полученное нами решение есть решение частное. Чтобы получить общее решение, надо, как мы это уже неоднократно делали, прибавить

к (68) общее решение (66) без второй части, но это — знакомое нам уравнение затухающего колебания. Его решением будет служить функция

$$Ce^{-\frac{1}{R}\eta} \cos\left(\frac{k}{R} - \gamma\right).$$

Поэтому искомый потенциал (65) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f_1(Vt - r)}{r} \right] = \\ &= -\cos \vartheta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{AR}{3 \frac{k}{R} r} \sin \epsilon \cos [k(Vt - r + R) - \varepsilon] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \frac{C}{r} e^{-\frac{1}{R}(Vt - r)} \cos \left[\frac{1}{R}(Vt - r) - \gamma \right] \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Для определения C и γ надо еще знать начальные условия

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=R}$$

и

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{r=R}$$

при $t=0$, а это зависит от состояния движения нашего шара.

Мы видим, что движение воздуха получается весьма сложное; оно состоит из двух движений: из движения периодического с периодом колебания шара T и из затухающего движения с периодом, не зависящим от T . Невольно напрашивается сравнение с принужденными колебаниями, где также наблюдалось два периода: период принужденных колебаний и собственный период. В данном случае роль собственного периода будет играть величина T' , определяемая из условия

$$\frac{2\pi}{T'} = \frac{V}{R},$$

т. е.

$$T' = 2\pi \frac{R}{V}. \quad (70)$$

В нашем решении получается одно кажущееся противоречие. В самом деле, пусть A равно нулю, но $C \neq 0$, тогда у нас остается одно затухающее движение, но в то же время движения шара нет. Осуществляется этот случай следующим образом: шар должен был двигаться и внезапно остановился. Тогда частицы воздуха, продолжая двигаться по инерции, дадут на поверхности шара сгущение и разрежение сзади и спереди шара, если считать по направлению движения, что и вызовет затухающее движение. Затухание производится здесь не трением, а тем,

что движение распространяется на все большее и большее пространство. Это так называемое „консервативное трение“. Разобранный случай тем интересен, что в первом приближении источники звука могут быть сведены к двум или нескольким вибрирующим шарам. Так, например, действие камертонов (рис. 65) может быть сведено к двум вибрирующим шарам. Поэтому в целом ряде практических важных случаев приходится пользоваться приведенными нами расчетами. Интересно отметить, что все рассмотренные нами разнообразные случаи были „сведены“ к одному уравнению, — все это были видоизменения одного и того же решения. Но совершенно ясно, что эти решения вовсе не были тождественны друг другу.



Рис. 65.

Глава IV. Электромагнитные волны.

§ 1. Уравнения Максвелля в интегральной форме.

Так же как в гидродинамике теоретическое изображение разнообразных типов волн представляло частные решения общих уравнений гидродинамики, в области электромагнетизма те решения, которые соответствуют волнообразным процессам — волнам радио, световым волнам и волнам рентгеновского излучения, — являются частными случаями, частными решениями общей системы уравнений Максвелля. В настоящее время установилась традиция считать за теорию Максвелля систему уравнений Максвелля, не давая им ни теоретического вывода, ни даже теоретического истолкования. Исторически эта традиция сложилась по следующей причине. Максвелль впервые вывел свои знаменитые уравнения, исходя из определенной модели электромагнитного поля. Впоследствии Максвелль положил в основу уравнения механики в форме Лагранжа, соответственно, обобщив выражение для энергии системы, причем в этой последней форме в теории Максвелля не дается конкретной картины электромагнитного поля, предполагается только, что поле является системой, в известном смысле, более общей, чем рассматривавшиеся до сих пор в механике.

В этом обобщении и заключались те специфические особенности, которые отличают „механику эфира“, как ее называл Энгельс, от обычной механики. Но выводы Максвелля оказались не во всех частях безупречными. Что же касается самих уравнений, то оказалось, что они с удивительной точностью и гибкостью изображают реальные электромагнитные процессы.

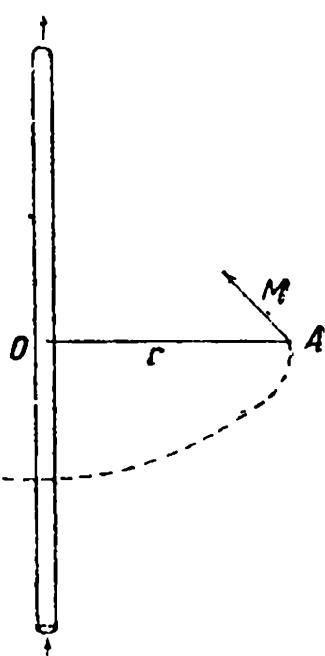
Область применений уравнений Максвелля огромна. Вот почему наука пошла по линии наименьшего сопротивления — по линии всестороннего применения и использования этих уравнений. Что же касается вывода этих уравнений, то с течением времени стали смотреть на дело так, что эти уравнения невозможно вывести из уравнений механики даже ценой каких бы то ни было обобщений, и большинство современных теоретиков сейчас твердо стоит на той точке зрения, что эти уравнения и не надо выводить, что их надо рассматривать как очень удачное,

почти идеально точное „описание“ электромагнитных процессов. Однако есть все-таки крупные ученые, как, например, Лоренц, которые понимают ошибочность этой точки зрения, хотя и не решаются выступить против нее открыто. Вот, например, что пишет Лоренц в своих замечательных лекциях по теоретической физике: „Для многих физиков основная часть теории состоит в точном количественном описании явлений так, как это, например, дается в максвеллевских уравнениях. Но, если даже придерживаться этой точки зрения, механические аналогии сохраняют часть своего значения. Они помогают нам мыслить о явлениях, и подсказывают нам некоторые идеи для новых исследований“. Совершенно ясно, что отказ от вывода и истолкования тех основных уравнений, которыми мы на каждом шагу пользуемся, есть чистый и самый грубый эмпиризм и, в сущности, полный отказ от теоретического мышления. В следующей части нашего курса мы покажем, какое физическое истолкование дается в настоящее время уравнениям Максвелля знаменитым английским физиком Дж. Дж. Томсоном, и мы увидим, что именно это физическое истолкование позволило ему дать простую и наглядную и, главное, физическую теорию для целого ряда явлений, относящихся к области теории квантов, где в настоящее время господствующим является чисто идеалистическое течение, ограничившее физическую теорию формальным математическим описанием.

Но прежде всего мы рассмотрим, какую связь имеют максвеллевские уравнения с самыми распространенными электромагнитными явлениями. Другими словами, мы укажем, обобщением каких фактов являются эти уравнения; далее, мы познакомимся с целым рядом применений этих уравнений и тогда уже приступим к их более глубокому теоретическому истолкованию. Первое уравнение Максвелля в интегральной форме, или группа первых трех уравнений в дифференциальной форме, по существу, является обобщением открытого Эрштедом в 1820 г. свойства электрического тока вызывать вокруг себя магнитное поле. Свойства этого поля были изучены Ампером, а также Био и Саваром. Из этих опытов следует, что в случае бесконечно длинного проводника, обтекаемого постоянным током силы I , напряжение магнитного поля выражается следующим образом:

$$M = \frac{2I}{r}. \quad (71)$$

Рис. 66.



Коэффициент 2 получается в том случае, если мы выражаем силу тока в электромагнитных единицах. Далее, напряжение поля M , т. е. сила, отнесенная к магнитному полюсу +1, перпендикулярно направлению проводника, по которому идет ток, и радиусу-вектору, проведенному от оси провода (предполагается, что линейные размеры сечения провода малы по сравнению с r) (рис. 66). Представим себе, что мы взяли

магнитный полюс $+1$ и обвели его по окружности радиуса r вокруг провода. Ясно, что M будет всегда направлена по касательной, и величина работы выразится:

$$\oint M_l dl = 2\pi r M = 2\pi r \frac{2I}{r} = 4\pi I. \quad (72)$$

Нетрудно показать, что если замкнутый путь вокруг проводника представит собой не окружность, а любую пространственную кривую, то результат получится тот же самый. В самом деле, в эту кривую мы можем вписать ломаную, состоящую из звеньев следующего вида: а) из отрезков радиусов r_l , б) из дуг радиусов r_l и с) из отрезков, параллельных проводу, по которому идет ток. В пределе при бесконечном числе сторон ломаная как угодно близко подойдет к кривой. Далее, работа на отрезках и б) и с) будет равна нулю, так как направление M перпендикулярно этим отрезкам. Работы же на элементах дуги будут иметь вид $\frac{2I}{r_l} r_l d\phi_l$, что в сумме даст $4\pi I$.

Рассмотрим теперь сечение провода, по которому течет ток силы I . Пусть σ_0 — площадь этого сечения, перпендикулярного оси цилиндрического провода. Тогда можно представить силу тока как произведение плотности тока j на площадь сечения:

$$I = \sigma_0 j. \quad (73)$$

При этом мы предполагаем, что ток распределяется равномерно по всей площади, в противном случае надо было бы принять:

$$I = \int j d\sigma_0. \quad (73')$$

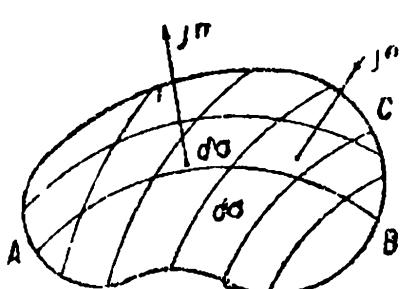


Рис. 68.

Дальнейшее обобщение заключается в том, что мы через произвольный замкнутый путь вокруг провода ABC (рис. 68) проводим любую поверхность, а ток пусть идет через эту поверхность с любым распределением плотности j . Тогда уравнение (72) принимает вид:

$$\oint M_l dl = 4\pi \int_j d\sigma. \quad (I)$$

Здесь σ означает поверхность, ограниченную замкнутой кривой. Это уравнение представляет собой первое уравнение Максвелля в интегральной форме и при самом общем выражении плотности тока. Как

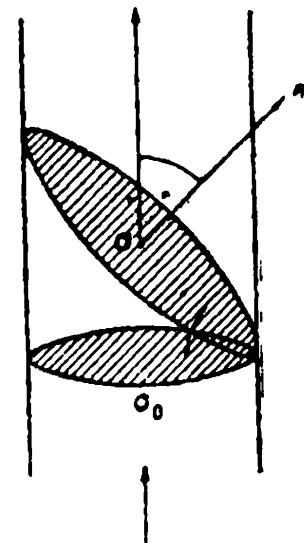


Рис. 67.

мы скоро увидим, оно распадается на три уравнения, если мы от интегральной формы перейдем к дифференциальной.

Второе уравнение Максвелля (в дифференциальной форме тоже распадающееся на три) является обобщением закона индукции, открытого Фарадеем. Мы уже видели, что для замкнутого контура электродвижущая сила:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (74)$$

где Φ — магнитный поток (поток индукции), охватываемый этим замкнутым контуром. По определению электродвижущая сила равна работе, которая производится при обходе единицы заряда по всему контуру, т. е. $\mathcal{E} = \oint E_l dl$. Обозначая через B магнитную индукцию и проводя через контур поверхность σ , мы по аналогии с (I) получаем из (74) следующее выражение:

$$\oint E_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} B_n d\sigma. \quad (II)$$

Мы берем здесь частную производную потому, что B зависит и от координат. В выражение $\oint E_l dl$ входит напряжение поля, обусловленное явлением индукции, но нетрудно убедиться, что E может здесь обозначать и полное напряжение, обусловленное еще статическим полем, так как статическое поле всегда имеет потенциал, т. е. E_{sl} всегда можно представить как $-\frac{d\Phi}{dl}$, что при интегрировании по замкнутому контуру всегда дает нуль. Итак, в уравнении (II) мы можем считать, что E_l представляет напряжение поля, вызванного индукцией, плюс поле электростатическое.

Далее, если среда, в которой протекают электромагнитные процессы, обладает диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , числовые значения которых больше единицы, то нам придется иметь дело, наряду с векторами E и M (напряжениями электрического и магнитного поля), еще и с векторами D и B — электрической и магнитной индукцией, которые, как известно из общих курсов физики, связаны с первыми двумя следующими соотношениями:

$$D = \epsilon E \quad \text{и} \quad B = \mu M. \quad (75)$$

Теперь нам остается рассмотреть еще два дополнительных уравнения. Представим себе статическое поле, вызванное электрическим зарядом, сосредоточенным на проводнике малых размеров, скажем, на маленьком шаре. Опишем вокруг этого шара сферическую поверхность радиусом r , большим по сравнению с заряженным шаром. Тогда в любой точке поверхности шара радиуса r величина индукции и напряжения поля выразится:

$$D = \frac{e}{r^2} \quad \text{и} \quad E = \frac{e}{\epsilon r^2}. \quad (76)$$

Если мы теперь составим поток вектора D через шаровую поверхность r , то получим величину, равную $4\pi e$. Нетрудно показать, что этот результат будет верен для любой поверхности. Уже из сказанного ясно, что поток не зависит от радиуса той шаровой поверхности, для которой он вычисляется. Представим себе, что из заряда e равномерно во все стороны проведено $4\pi e$ линий, так называемых линий индукции. Тогда на каждый кв. сантиметр поверхности шара радиуса r их придется $\frac{4\pi e}{4\pi r^2} = \frac{e}{r^2} = D$. Таким образом поток через любую замкнутую поверхность равен числу линий индукции, проходящих через эту поверхность. Совершенно ясно, что раз поток не зависит от радиуса шара, то число линий, проходящих через любую шаровую поверхность, равно числу проходящих через замкнутую поверхность любой формы, заключенную между двумя шаровыми поверхностями. Отсюда следует, что, в какой бы части области, охваченной этой поверхностью, ни лежало наше заряженное тело, — величина потока остается та же. Далее, нетрудно показать, что потоки, вызванные несколькими зарядами, складываются алгебраически. Это происходит потому, что поток определяется величиной $D_n d\sigma = D \cos(D, n) d\sigma$, т. е. величиной скалярной, не имеющей направления. Ведь если векторы D , вызванные разными зарядами, имеют различные направления, то для составления потока надо будет брать их проекции на направление нормали к $d\sigma$, а проекция всякой ломаной равна проекции замыкающей. Так что геометрическое сложение превращается здесь в алгебраическое.

Итак, мы можем сказать, что для всякой замкнутой поверхности имеет место теорема Гаусса:

$$\oint D_n d\sigma = 4\pi \sum e_i \text{ или } = 0 \quad (\text{III})$$

(нуль в том случае, если внутри замкнутой поверхности алгебраическая сумма зарядов равна 0). Так как мы не можем отделить друг от друга магнитные полюсы и не можем зарядить ими тела так, как мы заряжаем тела электричеством, то для соответствующего вектору D вектора B мы имеем:

$$\oint B_n d\sigma = 0. \quad (\text{IV})$$

Система уравнений (I), (II), (III) и (IV) представляет собой систему уравнений Максвелля в интегральной форме. Однако, прежде чем перейти к преобразованию этих уравнений в дифференциальную форму, остановимся еще на одной весьма существенной стороне теории Максвелля — на выражении плотности тока в диэлектрике или, выражаясь словами Максвелля, — плотности тока „смещения“.

Представим себе (рис. 69) небольшой изолированный проводник A , к которому по тонкой проволоке BC подводятся заряды. Если на проводнике A находится заряд e , то по теореме Гаусса (III), входящей в состав системы уравнений Максвелля, для всякой замкнутой поверхности, охватывающей проводник A , мы имеем:

$$\oint D_n d\sigma = 4\pi e, \text{ или } e = \frac{1}{4\pi} \int D_n d\sigma.$$

Теперь пусть по проволоке BC мы подводим новые заряды. Сила заряженного тока будет равна $I = \frac{de}{dt}$, но по только что доказанному мы будем иметь также:

$$I = \frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial D_n}{\partial t} d\sigma \quad (77)$$

(в том случае, если замкнутая поверхность сама не изменяется). Но ведь из определения плотности тока (73') следует, что $I = \int j_n d\sigma$. Сравнивая с этим выражением (77), мы приходим к выводу, что

$$j_n = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E_n}{\partial t}. \quad (78)$$

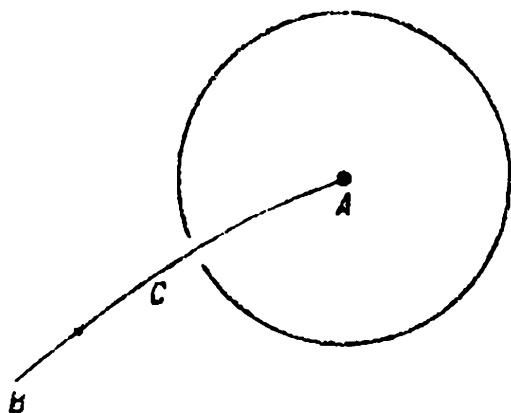


Рис. 69.

Эту величину можно рассматривать как плотность тока в диэлектрике. Введение этого тока в диэлектрике является существеннейшей составной частью теории Максвелля. Максвелль предположил, что

этот ток в диэлектрике обладает основным свойством всякого электрического тока

вызывать магнитное поле в окружающей среде. Эта смелая гипотеза оказалась чрезвычайно плодотворной и целиком подтвердилась; можно сказать, что с ее помощью было построено все учение об электромагнитном поле, которое дало все современные блестящие практические приложения до радио включительно.

Когда мы перейдем к физическому истолкованию уравнений Максвелля, мы увидим, что эта гипотеза вытекает сама собой из общей физической картины электромагнитного поля. Заметим еще, что введение тока в диэлектрике, или, по выражению Максвелля, тока смещения (почему он так назвал его,— мы увидим в дальнейшем) приводит нас к выводу, что все токи замкнуты, что незамкнутых токов вообще не существует. В самом деле, пусть в цепь тока вставлен конденсатор: по проводам, идущим к пластинкам конденсатора, перемещаются заряды, но по мере зарядения или разряжения конденсатора изменяется в диэлектрике, разделяющем пластины конденсатора, электрическое поле, а это изменение со временем величины поля и есть то, что называет Максвелль током смещения. Таким образом ток „смещения“ замыкает в данном случае ток, идущий по проводам к пластинкам конденсатора. Отсюда ясно, что ток смещения существует только тогда, когда поле изменяется со временем. Теоретики, целиком принимающие современную абстрактную форму изложения теории электромагнитного поля, пытаются отрицать самый факт тока смещения и считают, что его нельзя даже и называть электрическим током. Вот что, например, пишет проф. Я. И. Френкель: „То обстоятельство, что магнитное поле может быть связано не только с движением электронов, но и с переменным электрическим полем, — это обстоятельство никакого значения для определения электрического тока не имеет“.

„Назвать переменное электрическое поле „электрическим током“ или „причиной“ магнитного поля, по моему мнению, нет никакого основания“ („Электричество“, № 10, май 1930 г., стр. 430). Здесь явное стремление прежде всего свести на нет все физическое содержание теории Максвелля и ограничить все дело формальным математическим рецептом и полный отказ от какой бы то ни было попытки теоретически мыслить.

Итак, плотность тока в диэлектрике, если мы разложим векторы на их слагающие по осям координат, может быть представлена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_y}{\partial t}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ & \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (78')$$

или

Рассмотрим теперь, как выражается плотность тока в проводнике. Вырежем из какого-либо проводника элемент объема $dx dy dz$. Пусть ток идет по направлению x . Применяя к элементу закон Ома, мы находим следующее (рис. 70):

$$I = j_x dy dz = \frac{V_A - V_B}{\rho \frac{dx}{dy dz}},$$

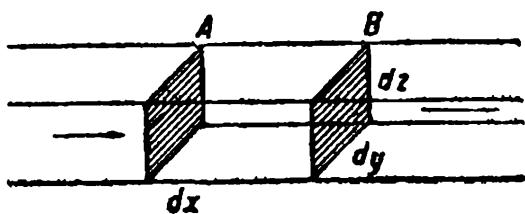


Рис. 70.

или, заменяя $V_A - V_B$ через $E_x dx$, что всегда можно сделать, так как сечения A и B (см. рис. 70) бесконечно близки друг к другу, мы, после сокращения, находим:

$$i_k = \frac{1}{\rho} E_x \text{ или } j_x = kE_x, \quad j_y = kE_y \text{ и } j_z = kE_z, \quad (79)$$

где $k = \frac{1}{\rho}$ — удельная проводимость.

В общем случае, когда среда обладает одновременно как свойствами проводника, так и свойствами диэлектрика, в качестве плотности тока надо взять сумму выражений (78) и (79).

§ 2. Уравнения Максвелля в дифференциальной форме.

Представим себе, что сечение провода, направление которого совпадает с осью X , представляет собой бесконечно малый прямоугольник $dy dz$. Применим к этому случаю уравнение (I). Правая часть (I) принимает вид:

$$4\pi j_x dy dz;$$

знак интеграла отпадает, так как у нас площадь состоит из одного элемента $dy dz$. Что же касается $\oint M_e dl$, то этот интеграл в данном случае распадается на четыре элемента, если в качестве замкнутого контура

мы выбираем путь $OABC$ (рис. 71). Подсчитываем теперь эти четыре элемента. На участке OA мы получим $M_y dy$, причем M_y есть значение, взятое для точки $(0, 0, 0)$, т. е. для начала координат, потому что отрезок dy бесконечно мал и один его конец совпадает с началом координат. На участке AB мы будем иметь:

$$\left(M_z + \frac{\partial M_z}{\partial y} dy \right) dz.$$

Мы предполагаем, что M_y и M_z можно разложить в ряд, и берем значение функции M_z для точки $(0, dy, 0)$. Таким же путем находим для отрезка:

$$BC = - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz \right) dy,$$

и для CO : $-M_z dz$; знак минус потому, что на этих участках мы идем в сторону убывающих значений y и z . Соединяя все эти величины вместе и приравнивая найденную нами величину правой части (1), мы находим:

$$4\pi j_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z};$$

аналогично можно получить два сходных уравнения для двух других осей.

Практически мы часто измеряем магнитные величины в электромагнитной системе единиц, а электрические, например плотность тока, в электростатических единицах; тогда у нас неизбежно должен появиться переводной множитель $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

В этом случае первая группа уравнений Максвелля принимает следующий вид, если в качестве плотности тока мы поставим сумму тока проводимости и тока смещения, считая, что в общем случае вещество обладает и теми и другими свойствами, т. е. свойствами проводника и свойствами диэлектрика:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c} E_x &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c} E_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c} E_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (II')$$

Аналогичным образом преобразуем в дифференциальную форму и уравнение (II).

Если мы и в этом уравнении будем выражать величины, касающиеся электрического поля в электростатической системе единиц, то у нас и в этой группе уравнений появится величина c .

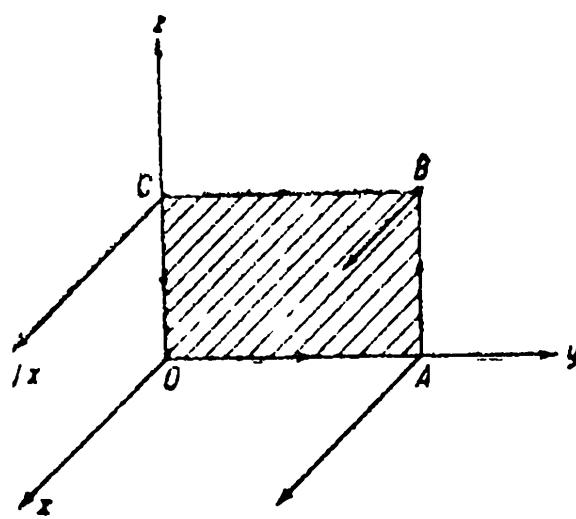


Рис. 71.

Итак, после преобразования уравнения (II) мы приходим к выводу:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}')$$

Если мы воспользуемся обозначениями векторного исчисления, то уравнение (I') и (II') можно сокращенно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi k}{c} \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \mathbf{M}, \\ -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}} &= \operatorname{rot} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (80)$$

где точка над \mathbf{M} и \mathbf{E} обозначает производную по времени, а $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ представляют так называемую операцию вращения, которая может быть изображена символически в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right).$$

Здесь \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} представляют собой единичные векторы, направленные последовательно по осям X , Y и Z . Нетрудно убедиться, что стоящие в скобках выражения действительно представляют собой правые части трех уравнений группы (II').

Переход к дифференциальной форме уравнений (III) и (IV) получается таким же образом, как это было сделано при выводе уравнения непрерывности, в гидродинамике. Составляем выражение потока $\oint D_n d\sigma$ для элемента объема $dx dy dz$, считая за положительное — внешнее направление нормали; мы получаем сначала:

$$\left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx \right) dy dz - D_x dy dz = \frac{\partial D_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Составляя такие же выражения для двух остающихся пар граней элемента $dx dy dz$ и предполагая, что заряд распределен по всему объему $dx dy dz$ с плотностью ρ , мы получаем:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (\text{III}')$$

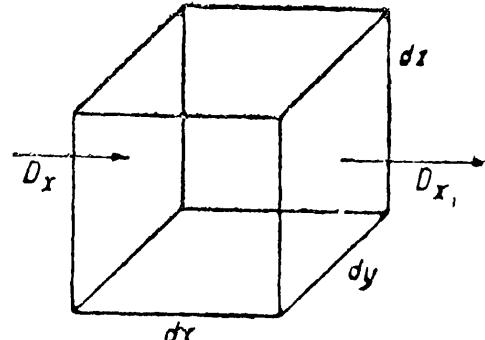


Рис. 72.

или, если зарядов нет, это выражение равно нулю.

Если диэлектрическая постоянная не зависит от координат, то уравнение можно написать еще и так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (\text{III}'')$$

По аналогии для (IV) находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu M_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu M_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu M_z) = 0,$$

или

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{IV}')$$

причем второе выражение (IV) применимо тогда, когда μ от координат не зависит.

§ 3. Электромагнитные волны в диэлектрике.

Предположим, что среда является чистым диэлектриком (проводимость $k=0$). Пусть ϵ и μ не зависят от координат, а $\rho=0$, и наконец, пусть только $E_x \neq 0$ и $M_y \neq 0$. Все же остальные слагающие обращаются в нуль. Посмотрим прежде всего, что остается от всей системы уравнений Максвелля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{d})$$

Рассмотрим сначала, что дают последние из уравнений группы (a) и (b), а также (c) и (d). Эти уравнения показывают, что в любой плоскости, параллельной плоскости $z=0$, как E_x , так и M_y , для данного момента имеют одно и то же значение во всех точках этой плоскости. В самом деле, эти уравнения показывают, что E_x и M_y не зависят ни от x , ни от y .

Умножаем теперь первое из уравнений (а) на $\frac{\mu}{c}$ и диференцируем по t . В результате имеем:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} \right).$$

Вставляем сюда величину, стоящую в скобках, из первого из уравнений (б). После подстановки имеем:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (81)$$

Ясно, что это — волновое уравнение, причем скорость распространения волны:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (82)$$

Поэтому решение (81) будет иметь следующий знакомый нам уже вид:

$$E_x = f_1 \left(t - \frac{z}{V} \right) + f_2 \left(t + \frac{z}{V} \right). \quad (83)$$

Предположим, что в частном случае $f_2 = 0$, и подставляем (83) с условием $f_2 = 0$ в первое из уравнений (б):

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} = f_1' \left(t - \frac{z}{V} \right) \frac{1}{V}.$$

Отсюда для M_y находим:

$$M_y = f_1 \left(t - \frac{z}{V} \right) \frac{c}{V\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1 \left(t - \frac{z}{V} \right). \quad (84)$$

Точно так же, если мы положим, что $f_1 = 0$ в (83), то аналогичным путем приходим к выводу:

$$M_{y_1} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_2 \left(t + \frac{z}{V} \right). \quad (84')$$

Мы уже видели при обсуждении волн других типов, что

$$f_1 \left(t - \frac{z}{V} \right)$$

представляет собой возмущение — волну, распространяющуюся в сторону положительных значений z , функция же

$$f_2 \left(t + \frac{z}{V} \right)$$

представляет собой возмущение, распространяющееся в противоположную сторону. Если мы отметим направления электрического и магнит-

ного вектора в этих двух распространяющихся в противоположных направлениях волнах, то мы увидим, что связь трех направлений (электрический и магнитный вектор и направление распространения волны) одна и та же. Это можно всего проще показать, повернув систему E_x , M_y и z вокруг оси X на 180° (рис. 73).

Обратимся теперь к вопросу о скорости распространения волн. Если среда, в которой бегут волны, обладает свойствами $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, что практически с большим приближением осуществляется для воздуха, то из (82) мы получаем:

$$V = c. \quad (82')$$

А c показывает, сколько электростатических единиц заключается в одной электромагнитной. Эта величина получается самыми разнообразными

способами на основе всевозможных измерений, ничего общего со светом не имеющими — за исключением того, как говорил Максвелль, что свет помогает в этих измерениях видеть приборы и делать отсчеты измерительных инструментов!

Величина c , оказывается, имеет размерность скорости и числовую величину $3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$. Отсюда сама собой напрашивается мысль, что не является ли и свет электромагнитной волной. Эта мысль и послужила основой, на которой Максвелль развил свою знаменитую электромагнитную теорию света.

Но Максвеллю удалось сейчас же еще и дальнейшие доказательства этой замечательной мысли. Рассмотрим какое-либо тело с диэлектрической постоянной ϵ ,

значительно отличающейся от 1, но магнитная проницаемость которого равна 1. Тогда для скорости волны V_1 мы будем иметь по (82):

$$V_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Если мы теперь возьмем абсолютный показатель преломления n для данного тела, т. е. отношение скорости света в чистом эфире c к скорости света в данном теле V_1 , то мы находим:

$$\frac{c}{V_1} = n = \sqrt{\epsilon}, \quad \text{или} \quad n^2 = \epsilon. \quad (85)$$

Надо сказать, что по поводу этого соотношения вплоть и до настоящего времени во многих учебниках и руководствах приводятся совершенно неверные объяснения. Так, например, в „Основах теории электричества“ проф. И. Е. Тамма (т. I, стр. 436) сказано следующее: „Впрочем, уже самый факт существования дисперсии света, т. е.

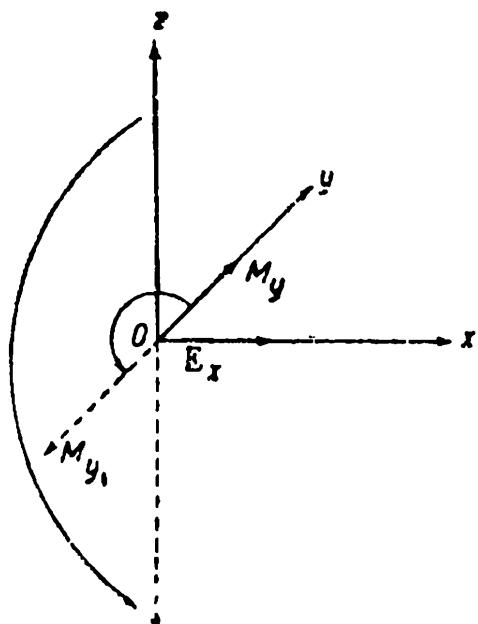


Рис. 73.

зависимости коэффициента преломления от длины волны, доказывает несостоительность формул (325) и (325'):

$$\left[n_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (325) \quad \text{и} \quad n = \sqrt{\epsilon} \quad (325') \right],$$

согласно которым n должно было бы иметь постоянное значение для всех электромагнитных волн".

„Таким образом феноменологическая максвеллова теория макроскопического поля приводит, вообще говоря, к неправильным значениям показателя преломления". Для контраста приведем слова самого Максвелля из главы его знаменитого трактата (т. II, гл. XX, изд. I, 1874), носящей заглавие „Электромагнитная теория света" (эта глава содержит всего 20 страниц). „Поэтому, согласно нашей теории, диэлектрическая емкость прозрачной среды должна равняться квадрату показателя преломления. Но показатель преломления имеет большее значение для более быстрых колебаний. Поэтому мы должны выбрать показатель преломления, соответствующий наиболее длинным периодам: это — единственные волны, движение которых можно сравнивать с медленными процессами, при помощи которых мы определяем диэлектрическую емкость (по нашей современной терминологии: диэлектрическая постоянная — A. T.).

„Единственный диэлектрик, емкость которого была до сих пор измерена (это относится к 1874 г. — A. T.), это — парафин, для которого в его твердом состоянии Гибсон и Барклей нашли $k = 1,975$ (по нашим обозначениям ϵ — A. T.). Доктор Гладстон нашел следующие значения показателя преломления (уд. вес 0,779) для линий А, Д и Н (в красной, желтой и сине-фиолетовой части спектра — A. T.):

Температура	A	D	N
в °C			
54	1,4306	1,4357	1,4499
57	1,4294	1,4343	1,4493

Из них я нахожу для показателя преломления волн бесконечной длины величину около 1,422. Квадратный же корень из k равен 1,405. Различие между этими числами больше, чем можно было бы приписать ошибкам наблюдения; оно показывает, что наши теории строения тел должны быть значительно усовершенствованы, прежде чем мы будем в состоянии выводить их оптические свойства из электрических.

В то же время, я думаю, что согласие чисел таково, что если не будет найдено больших расхождений между числами, полученными на основе изучения как оптических, так и электрических свойств значительного числа веществ, мы получим гарантию для нашего заключения о том, что квадратный корень из k составляет, по меньшей мере, наиболее существенную часть показателя преломления, хотя, быть может, он и не дает полного его значения" (стр. 437, цит. по III англ. изд.).

Таким образом для Максвелля, в отличие от современных теоретиков, физическое содержание не было заслонено формально математической стороной дела, и кроме того, всякое противоречие служило лишь

толчком для изучения строения тел (из этого и выросла теория электронов) и не препятствовало видеть закономерности, затушеванные тем, чего мы еще, как следует, не знаем. В настоящее время мы можем сказать, что для тел, у которых в инфракрасной и электрической частях спектра (т. е. спектра электромагнитных волн) нет собственных периодов, вызывающих поглощение этих волн, можно бывает легко рассчитать показатель преломления для бесконечно длинных волн, и он в этих случаях действительно с большой точностью совпадает с квадратным корнем из диэлектрической постоянной.

Надо заметить, что взгляды Максвелля долго не получали никакого распространения. Одним из первых, оценивших значение работ Максвелля, был Ф. Энгельс. В главе „Электричество“ („Диалектика природы“) Энгельс следующим образом характеризует взгляды Максвелля: „У эфирной теории можно отметить бесспорный успех...¹ Клерк Максвелль, опираясь на свою вышеприведенную теорию, вычислил, что удельная диэлектрическая постоянная какого-нибудь тела равна квадрату его показателя преломления света. Больцман исследовал различные непроводники для определения их диэлектрической постоянной и нашел, что для серы, канифоли и парафина квадратный корень из этой постоянной равен их показателю преломления света. Наибольшее наблюдавшееся при этом отклонение — в случае серы — равнялось только 4%. Таким образом специально максвеллевская эфирная теория была подтверждена экспериментальным образом“.

По выражению страстного последователя Максвелля — Лудвига Больцмана, эта теория была долгое время для физиков „книгой за семью печатями“.

Пишуший эти строки слышал от покойного проф. Н. Н. Лебедева следующий интересный рассказ. Как известно, правильность максвеллевской теории была доказана знаменитыми опытами Герца, опубликованными в 1888 г. За год перед тем известный теоретик Э. Кон читал в Страсбурге курс теоретической оптики в течение целого семестра, причем взгляды Максвелля в этом курсе передавались как курьез на одной из заключительных лекций. В 1889 г. тот же проф. Кон читал курс теоретической оптики уже полностью на основе теории Максвелля!

§ 4. Краткие сведения из теории векторов.

Целый ряд вопросов, связанных с изучением электромагнитных процессов, решается гораздо проще, если при вычислениях пользоваться методами теории векторов. Хотя мы не имеем возможности вдаваться сколько-нибудь обстоятельно в теорию векторов и отсылаем для этого читателей к какому-нибудь руководству, например к прекрасному и, вместе с тем, сжатому курсу „Основ векторного и тензорного анализа“ проф. И. А. Черданцева, тем не менее, мы приведем сейчас в самой краткой форме ряд основных положений теории векторов.

Любой вектор мы можем изобразить с помощью трех слагающих, трех проекций на какую-либо произвольно взятую систему координат.

¹ Перевод в т. II „Архива Маркса и Энгельса“ сделан исправлено: слово „einmal“ (неопределенный член) заменено числительным „один“.

Например,

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z, \quad (\text{a})$$

где i , j и k представляют собой векторы, равные единице, и направления которых совпадают, соответственно, с положительными направлениями осей координат X , Y и Z . Если мы возьмем второй вектор

$$\mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z \quad (\text{b})$$

и построим сумму (a) и (b), то слагающие этой суммы

$$\mathbf{C} = i(A_x + B_x) + j(A_y + B_y) + k(A_z + B_z) \quad (\text{c})$$

оказываются слагающими геометрической суммы векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} (рис. 74).

В теории векторов основную роль играют два произведения векторов — скалярное и векториальное.

Скалярное произведение определяется как

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A \cdot B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (\text{I})$$

Из этого определения следует, что для единичных векторов i , j и k мы будем иметь:

$$(ii) = 1, (jj) = 1, (kk) = 1 \text{ и } (ij) = 0, (ik) = 0, (jk) = 0. \quad (\text{d}).$$

Эти правила умножения дают нам для

$$(iA_x + jA_y + kA_z)(iB_x + jB_y + kB_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

что, как нетрудно убедиться, совпадает с определением (I). В самом деле:

$$\begin{aligned} A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= AB \left(\frac{A_x}{A} \cdot \frac{B_x}{B} + \frac{A_y}{A} \cdot \frac{B_y}{B} + \frac{A_z}{A} \cdot \frac{B_z}{B} \right) = \\ &= AB (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1) = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где α , β , γ и α_1 , β_1 и γ_1 — углы между векторами и осями координат.

Векторное произведение двух векторов определяется следующим условием:

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = nAB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (\text{III})$$

где n — единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой находятся векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} , причем положительное направление этого вектора связано с направлением обхода параллелограмма, образованного векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} , как вращение и поступательное перемещение в правом винте.

При этом порядок обхода определяется порядком множителей (рис. 75).

Отсюда ясно, что

$$[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}]. \quad (\text{e})$$

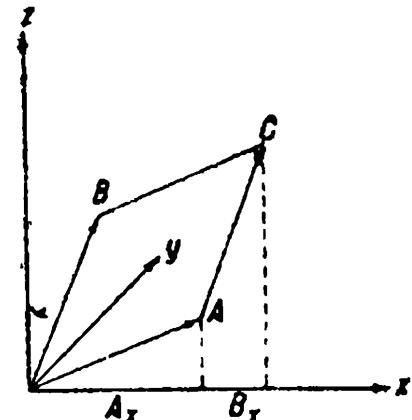


Рис. 74.

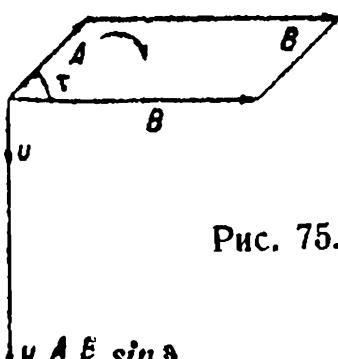


Рис. 75.

$$[AB] = nAB \sin \theta$$

Применяя указанное правило к единичным векторам, мы приходим к выводу:

$$[\mathbf{i}\mathbf{i}] = 0, [\mathbf{j}\mathbf{j}] = 0, [\mathbf{k}\mathbf{k}] = 0, [\mathbf{i}\mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{j}\mathbf{k}] = \mathbf{i}, [\mathbf{k}\mathbf{i}] = \mathbf{j}, \dots \quad (\text{f})$$

Применяя эти правила, мы находим следующее выражение для векторного произведения:

$$[(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)] = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \\ + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x). \quad (\text{II''})$$

Это же выражение можно представить в виде детерминанта:

$$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{II''})$$

В сущности, к этим двум выражениям приводятся почти все векторные операции. Очень часто один из векторов заменяется „оператором“ Гамильтона, или „набла“¹:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Само собой разумеется, что при действиях с операторами надлежит помнить, что векторные операции с операторами могут быть лишены смысла, например:

$$[\mathbf{A}\nabla] = \mathbf{i}(A_y \frac{\partial}{\partial x} - A_z \frac{\partial}{\partial y}) + \dots$$

Вот почему работа с операторами должна всегда тщательно проверяться.

Скалярное произведение оператора Гамильтона на вектор носит название расходимости, или „дивергенции“, от вектора:

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) = \\ = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (\text{III})$$

Скалярное произведение оператора Гамильтона на скалярную функцию называется „градиентом“ этой функции:

$$(\nabla \varphi) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (\text{IV})$$

Векторное произведение оператора Гамильтона на какой-либо вектор называется вращением данного вектора:

$$[\nabla \mathbf{A}] = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{V})$$

¹ Слово „набла“ означает древнеегипетский инструмент вроде лиры, имевший форму ∇ .

Скалярное произведение двух операторов Гамильтона называется оператором Лапласа и есть величина скалярная:

$$(\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{VI})$$

Рассмотрим теперь ряд следствий:

1. Если какой-либо вектор \mathbf{A} можно представить как градиент от скалярной функции φ , короче, если вектор \mathbf{A} есть потенциальный вектор, то вращение от этого вектора тождественно равно нулю. В самом деле:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

2. Расходимость от вращения какого бы то ни было вектора всегда равна нулю:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

3.

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{IX})$$

Доказательство. Берем слагающую по оси X вектора, входящего в состав (IX) в левой части.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

прибавляем и вычитаем по $-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x}$ и убеждаемся в правильности (IX).

4.

$$\text{div } |AB| = B \text{rot } A - A \text{rot } B. \quad (\text{X})$$

Для доказательства выписываем правую часть в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x) = \\ &= B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} = \\
 & = B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \\
 & - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right),
 \end{aligned}$$

чем и доказывается предложение (X).

§ 5. Некоторые свойства электромагнитного поля.

Обратимся сначала к первому из уравнений (80), представляющему собой первую группу уравнений Максвелля в дифференциальной форме в кратком векторном обозначении. Возьмем от этого уравнения операцию div ; тогда по уравнению (VIII) § 4 находим:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi k}{c} \mathbf{E} \right) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M} = 0. \quad (86)$$

В левой части под знаком div стоит величина 4π , умноженная на общую плотность тока. Равенство нулю этого выражения показывает, что поле вектора плотности тока таково, что линии этого вектора, начерченные в поле, представляют собой систему замкнутых кривых. В самом деле, мы получили уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ или 0 из уравнения (III), § 1, т. е. из $\oint D_n d\sigma = 4\pi \sum e_i$, или равно 0. А уравнение $\int D_n d\sigma = 0$, верное для любой замкнутой поверхности в любой части поля, указывает, что линии индукции нигде не оканчиваются. Таким образом уравнение (86) показывает, что, согласно теории Максвелля, не существует вообще незамкнутых токов. Там, где мы видим перерыв тока проводимости, его заменяет ток смещения, пропорциональный D .

Предположим, далее, что ϵ и k представляют собой постоянные, не зависящие от координат. Так как операция div заключает в себе операции частной производной и так как $\dot{\mathbf{E}}$ есть частная производная по времени, то после перестановки порядка этих производных и после замены $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$ и соответствующих сокращений мы находим:

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho + 4\pi k \cdot \rho = 0. \quad (86')$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\rho = \rho_0 c^{-\frac{4-k}{\epsilon} t}, \quad (87)$$

где ρ_0 — функция координат, выражающая собой распределение зарядов в момент $t=0$. Уравнение (87) показывает, что, каково бы ни было

распределение к моменту $t=0$, с течением времени ρ стремится к нулю. В самом деле, если мы имеем среду, простирающуюся до бесконечности во все стороны, то заряды, подчиняясь силам отталкивания и могущие беспрепятственно двигаться благодаря проводимости среды, будут стремиться удалиться друг от друга возможно дальше и собраться на поверхности тела, которая в данном случае находится в бесконечности. Таким образом уравнение (87) выражает тот известный факт, что на заряженном изолированном проводнике заряды скопляются на поверхности, внутри же проводника их нет.

Если же мы предположим, что среда не проводит, что $k=0$, то (87) дает нам $\rho=\rho_0$, т. е. заданное распределение зарядов с течением времени не изменяется, и это понятно, так как при отсутствии электропроводности никаких перемещений зарядов через толщу данного тела быть не может. Мы в данном случае не предполагаем, что внутри данной среды происходят какие-либо перемещения вроде, например, перемешивания жидкости и т. п.

Рассмотрим теперь один общий вопрос, связанный с процессами, протекающими в электромагнитном поле,—именно, вопрос о движении энергии в электромагнитном поле. Вспомним, как выражается электромагнитная энергия в поле. Эта задача рассматривается в общих курсах физики, поэтому мы ограничимся самыми краткими замечаниями.

Рассмотрим поле, вызванное двумя бесконечными плоскими проводниками, заряженными равномерно зарядами противоположных знаков.

На основании теоремы Гаусса и исходя из симметрии поля, полученного от бесконечной равномерно заряженной плоскости, можно сказать, что поле такой плоскости однородно и численно равно $D_1=2\pi\sigma$. Случай двух противоположно заряженных плоскостей можно рассматривать как наложение полей, вызванных каждой плоскостью в отдельности.

Так как направление поля определяется направлением движения положительного заряда, то мы без труда отмечаем (рис. 76) направления составных частей поля в трех частях, на которые распадается в данном случае поле. Отсюда ясно, что в областях I и III поле будет равно нулю; в промежутке между AB и CD мы будем иметь:

$$D=4\pi\sigma \quad \text{и} \quad E=\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}. \quad (88)$$

Теперь рассмотрим, какая доля работы придется на каждые S квадратных сантиметров площади данной пары пластин, если пластины сначала почти соприкасались, а затем пластина AB была отодвинута от CD на расстояние l .

На каждый кв. сантиметр AB действует притяжение второй пласти-

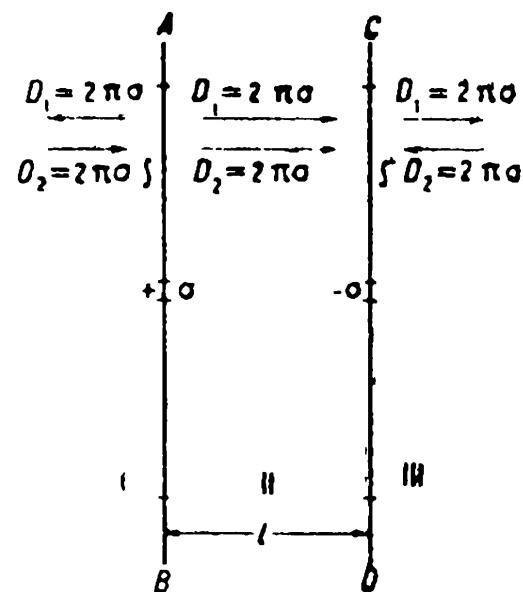


Рис. 76.

ны CD , равное $\sigma E_2 = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon}$, потому что составная часть поля, вызванная пластиной AB , на нее самоё действовать не может. Итак, сила, приложенная к площади S , выразится:

$$F = S\sigma E_2 = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S. \quad (89)$$

Далее, работа, которую придется затратить для того, чтобы обе пластины раздвинуть на расстояние l , выразится:

$$A = Fl = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} l \cdot S. \quad (90)$$

Благодаря затрате этой работы у нас появилось электрическое поле между двумя данными пластинами. В самом деле, мы ведь предположили, что заряженные пластины почти соприкасались: они были отделены бесконечно тонким непроводящим слоем, следовательно, поле занимало бесконечно малый объем. Поэтому затраченная работа превратилась из механической работы в энергию электрического поля U_e . Итак, выражение (90) представляет собой энергию поля конденсатора, образованного двумя параллельными пластинами с площадью S , причем предполагается, что пластины дальше простираются до бесконечности.

Мы сейчас увидим, что выражение (90) можно преобразовать двояким способом: во-первых, в соответствии с дофараадеевскими взглядами на электрические процессы как на действие на расстоянии и, во-вторых, с точки зрения Фарадея-Максвелля. Вставляем прежде всего (88) в (90) и заменяем $S\sigma = Q$ величиной заряда на площади S . Тогда (90) примет вид:

$$U_e = Fl = \frac{E}{2} l \cdot Q, \quad (90')$$

но $Fl = V_1 - V_2$, т. е. Fl равно разности потенциалов между пластинами AB и CD . Если же пластина CD соединена с землей, то $El = V_1$, и тогда

$$U_e = \frac{V \cdot Q}{2}. \quad (90'')$$

Это есть выражение энергии конденсатора в духе теорий, принимающих действие на расстоянии. Здесь все величины, входящие в (90''), относятся только к проводникам: ни одной величины, характеризующей самое поле, в это выражение не входит.

Перейдем теперь к другому истолкованию выражения (90). Определяя σ из уравнения (88), т. е. $\sigma = \frac{\epsilon E}{4\pi}$, вставляя это выражение в (90) и замечая, что $l \cdot S = \tau$ — объему всего поля между пластинами, — мы приходим к выводу:

$$U_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \tau = u_e \tau, \quad (91)$$

где $u_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$ — „плотность энергии“.

В этом выражении, как мы видим, вся энергия конденсатора сосредоточена в поле, и так как поле однородно, то везде плотность одинакова. Такое толкование соответствует взглядам Фарадея-Максвелля. Причем, если не относиться формально, это решение показывает, что среда, в которой имеет место поле, является средой материальной, так как для материалиста всякая энергия предполагает ту или другую форму материи, как бы эта материя ни отличалась от привычных форм, и ту или другую форму движения этой материи.

Для современной же схоластически формальной физики различие между (90'') и (91) заключается только в форме „математического описания“.

По аналогии считаем плотность магнитной энергии равной:

$$u_m = \frac{\mu M^2}{8\pi}. \quad (92)$$

Таким образом в электромагнитном поле общая энергия, заключенная в каком-либо объеме τ , выразится так:

$$U_{em} = \int \left[\frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu M^2}{8\pi} \right] d\tau. \quad (93)$$

Рассмотрим теперь, как выражается убыль энергии в данном объеме, т. е. $-\frac{dU_{em}}{dt}$.

На основании (93) имеем:

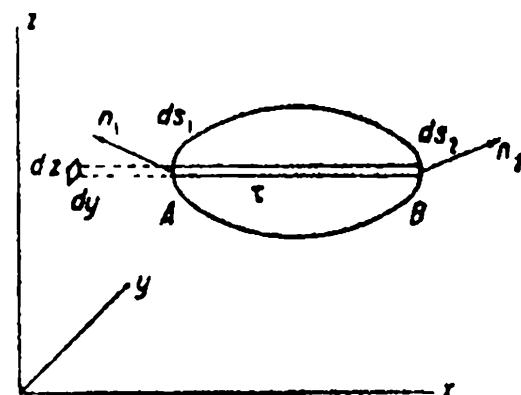


Рис. 77.

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int \left(-\frac{\epsilon \dot{E}}{c} E - \frac{\mu \dot{M}}{c} M \right) d\tau, \quad (93')$$

или, внося вместо $\frac{\epsilon \dot{E}}{c}$ и $\frac{\mu \dot{M}}{c}$ их выражения $\text{rot } M$ и $-\text{rot } E$ из уравнений Максвелля и применяя доказанную нами в § 4 теорему (Х), мы находим:

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (M \text{rot } E - E \text{rot } M) d\tau = \frac{c}{4\pi} \int \text{div} [E \cdot M] d\tau. \quad (93'')$$

Последний интеграл в (93'') можно легко преобразовать в интеграл по поверхности S , ограничивающей данный объем. В самом деле, пусть мы имеем интеграл по объему τ (рис. 77):

$$\int_{\tau} \text{div } A \cdot d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Рассмотрим первый из этих интегралов. Интегрируя по x , мы находим:

$$\iiint \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \iint (A_{x_1} - A_{x_1}) dy dz,$$

где A_{x_2} — значение слагающей A_x в B и A_{x_1} — значение той же слагающей в A (см. рис. 77). Далее:

$$dy dz = -ds_1 \cos(n_1 x) = ds_2 \cos(n_2 x).$$

Таким образом:

$$(A_{x_2} - A_{x_1}) dy dz = A_{x_2} \cos(n_2 x) ds_2 + A_{x_1} \cos(n_1 x) ds_1.$$

Распространение интеграла по y и z будет равносильно собиранию всех выражений вида: $A_x \cos(nx) ds$. Поэтому:

$$\iiint \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \int_A A_x \cos(nx) dS.$$

Производя такую же операцию с двумя другими интегралами, мы получаем:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \int_S (A_x \cos nx + A_y \cos ny + A_z \cos nz) dS = \int_S A_n dS. \quad (94)$$

Необходимо заметить, что это преобразование возможно, если внутри всего объема τ функции A_x , A_y и A_z конечны, непрерывны и однозначны.

Применим теперь преобразование (94) к (93'). Мы без труда получаем:

$$-\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \int_S [\mathbf{EM}]_n dS = \int_S P_n dS, \quad (95)$$

где

$$P = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}]$$

— так называемый вектор Пойнтинга. Правая часть представляет собой поток вектора P через поверхность S . Левая представляет собой убыль энергии в единицу времени внутри объема τ . Таким образом $\int_S P_n dS$

представляет собой количество электромагнитной энергии, „вытекающей“ через поверхность в единицу времени. В каком направлении движется энергия? Ясно, что это движение совпадает с направлением вектора P , а вектор P по определению перпендикулярен \mathbf{E} и \mathbf{M} . Это дает нам возможность в электромагнитном поле находить направления, по которым движется энергия.

Если бы у нас речь шла о среде с некоторой конечной проводимостью k или удельным сопротивлением ρ , то при преобразовании (93') у нас войдет еще один член. В самом деле: $\frac{e\dot{\mathbf{E}}}{c} = \operatorname{rot} \mathbf{M} - \frac{4\pi}{c} k\mathbf{E}$, следовательно, в правой части у нас будет еще выражение:

$$\int_{\tau} k\mathbf{E}^2 d\tau = \int_{\tau} \frac{j^2}{k} d\tau = \int_{\tau} \rho j^2 d\tau, \quad (96)$$

а это — не что иное, как количество выделенного в единицу времени джаулея тепла.

Таким образом с этим дополнением у нас получается следующий результат: убыль электромагнитной энергии в объеме τ равна количеству ее, превратившемуся в другую форму — в форму тепла, качественно отличного от электромагнитной энергии, плюс та энергия, которая уходит в виде потока энергии через поверхность.

Проверим сейчас полученные результаты на примере, разобранном в § 3. Для волны, бегущей в сторону $+z$, мы имеем:

$$E_x = f_1 \left(t - \frac{x}{V} \right) \text{ и } M_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1 \left(t - \frac{x}{V} \right).$$

Для плотности электромагнитной энергии мы получаем:

$$U_{em} = \frac{\epsilon}{8\pi} E_x^2 + \frac{\mu}{8\pi} M_y^2 = \frac{\epsilon}{4\pi} f_1^2.$$

Так как волна бежит со скоростью V , то через 1 кв. сантиметр поверхности (полагая, что поле плоской волны остается везде без изменения) в единицу времени пройдет количество энергии

$$U_{em} V = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \frac{f_1^2}{4\pi} c. \quad (97)$$

Нетрудно, однако, показать, что тот же результат мы получим, определяя поток энергии через кв. сантиметр, перпендикулярный оси Z . В самом деле, при условиях, что только $E_x \neq 0$ и $M_y \neq 0$, мы имеем, на основе $P = \frac{c}{4\pi} [EM]$, что только $P_z \neq 0$, а эта последняя величина равна

$$P_z = \frac{c}{4\pi} E_x M_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{f_1^2}{4\pi} c, \quad (97')$$

т. е. выражение, одинаковое с (97). Итак, на этом простом примере убеждаемся, что вычисления по методу Пойнтинга приводят нас к тем же результатам, как и обычные приемы.

Как известно, установление волновой теории света (все равно — старой механической или современной электромагнитной) привело к серьезным затруднениям с вопросом о лучах. Понятие о луче, устанавливаемое на ряде элементарных опытов в геометрической оптике, совершенно расплывается в тех случаях, когда размеры препятствий, стоящих на пути волн, оказываются соизмеримыми с длинами волн. С другой стороны, при условии, что все отверстия и препятствия, стоящие на пути распространения света, по линейным своим размерам во много раз превышают длину волны, понятие о луче напрашивается само собой: хотя бы в первом приближении, свет самым несомненным образом распространяется по прямым линиям. Это обстоятельство вызывает большие затруднения у тех, кто не может мыслить диалектически. Лучи света или существуют или нет! Введение в науку учения о потоке энергии дает синтез этих, казалось бы, несовместимых противоположностей. Как бы свет ни распространялся, он всегда несет с собой

энергию, и направление этого потока определяется направлением вектора Пойнтинга. Этот вектор мы можем определить всегда, но не всегда линии поля этого вектора прямые, т. е. не всегда мы имеем резко выраженные лучи!

В целом ряде явлений, например при полном внутреннем отражении, мы имеем случаи, когда лучи представляют собой сложные кривые; таким образом, теория доказывает возможность того, что для эмпирика

представляется идущим в разрез с самим определением луча: луч ведь, по обыденным представлениям, совпадает с прямой.

Очень интересная картина получается, если рассмотреть движение энергии в случае тока, идущего по проводу, где согласно обычным представлениям энергия тока должна бы двигаться по самому проводу. Однако с точки зрения теории поля энергия без потерь может двигаться только в диэлектрике. Рассмотрим, в самом деле, как распределяется магнитное и электрическое поле вокруг и на поверхности цилиндрического проводника, по которому идет ток. Рассмотрим отрезок провода AB . Ток пусть идет от A к B ; этим сразу задается направление магнитного поля: линии сил охватывают провод системой колец, их направление определяется правилом штопора.

Далее, так как по проводу все время движутся заряды, то, следовательно, мы имеем одну слагающую поля, направленную радиально, E_1 (рис. 78). Совокупность направлений E_1 и M дает направление для P_1 — потока энергии вдоль провода.

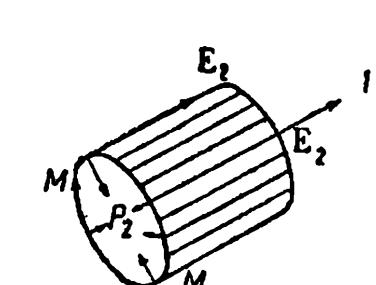


Рис. 78а.

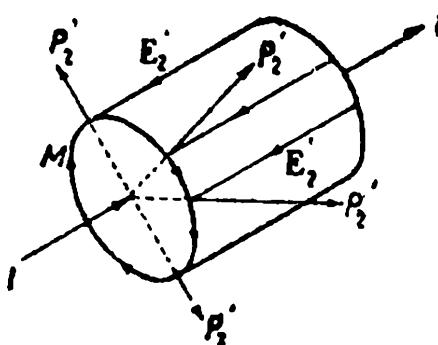


Рис. 78б.

Но ведь, кроме того, во всяком проводнике мы имеем падение потенциала вдоль по направлению тока; это падение, а следовательно, и напряжение поля, будет тем меньше, чем меньше сопротивление,

потому что ток данной силы может быть получен при тем меньшем напряжении поля, чем меньше сопротивление данного провода. Направления слагающей E_2 и M дают для P_2 направление внутрь провода, но внутри провода электромагнитная энергия должна непрерывно исчезать, превращаясь в другую форму — в энергию тепловую (рис. 78а). Если мы рассмотрим участок провода, в котором находится внешняя электродвигущая сила (гальванический элемент, термоэлектрический спай), то там направление тока будет против направления поля, поэтому знак E_2' изменяется, и направление потока энергии будет совпадать с внеш-

ней нормалью к проводу (рис. 78б). Сопоставляя все сказанное, мы видим, что в тех местах, где мы имеем внутреннюю электродвижущую силу, энергия вытекает в окружающее поле и скользит вдоль цепи, отчасти просачиваясь в провод и превращаясь при этом в тепло.

На практике мы стараемся, чтобы именно эта часть была всего меньше, чтобы насколько возможно больше энергии шло вдоль и вне провода. Отсюда роль провода — направлять поток энергии и возможно меньше забирать ее в себя. Проводник электрического тока есть в то же время непроводник переносимой им энергии, и наоборот, проводники энергии — диэлектрики — являются непроводниками тока.

Но, как бы ни было полезно в ряде теоретических исследований пользоваться вектором Пойнтинга, он все-таки не дает нам еще физической картины электромагнитного поля, и кроме того, поток энергии, по крайней мере, как он определяется до сих пор, значительно уступает в наглядности, скажем, потоку жидкости в гидродинамике. Раз речь идет о движении жидкости, мы можем отметить какую-либо частицу, — пусть только теоретически, — следить за нею и в любое время сказать, что это именно та частица, которую мы видели раньше там-то. Что же касается электромагнитной энергии, то, скажем, данное ее количество, находившееся в данном месте, мы не можем признать как раз за ту же самую энергию, если она переместится в другую часть поля.

Другими словами, если я в какой-либо части поля A для объема B подсчитаю некоторое количество энергии, то я не могу сказать, что именно это определенное количество энергии находилось в каком-то определенном месте C перед тем.

Дело объясняется тем, что мы пока что подходили к вопросу чисто внешне, чисто описательным путем, не пытаясь рассмотреть, какова же форма движения того, что своим движением дает нам электромагнитную энергию. В следующей главе мы укажем, какие попытки были сделаны в настоящее время в смысле изображения конкретной картины электромагнитных процессов. Формальный же подход к делу, как мы указывали, часто приводит к тому, что физик подпадает под влияние философа-идеалиста, как на это и было указано Лениным: „Всякий физик и всякий инженер знает, что электричество есть (материальное) движение, но никто не знает толком, что тут движется, следовательно, заключает идеалистический философ, можно надуть философски не образованных людей соблазнительно «экономным» предложением: давайте мыслить движение без материи“ (Ленин, т. X, стр. 238).

§ 6. Плоские волны. Отражение и преломление плоских волн на границе раздела двух диэлектриков.

Предположим, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, обладает диэлектрической постоянной ϵ , не зависящей от координат, и проводимостью $k=0$; пусть, кроме того, плотность заряда $\rho=0$. Тогда ясно, что уравнение (III) из системы уравнений Максвелла будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Первые же два уравнения обратятся в

$$\frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad \text{и} \quad -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}} = \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Умножая первое из них на $\frac{\mu}{c}$, дифференцируя по времени и заменяя $\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}}$ соответствующим выражением из второго, мы приходим к выводу:

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} \frac{\mu \dot{\mathbf{M}}}{c} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Далее, применяя преобразование (IX) § 4 и (98), находим:

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \nabla^2 \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (99)$$

Если от векторов перейдем к слагающим, то получим три уравнения:

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}_x = \nabla^2 \mathbf{E}_x, \quad \frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}_y = \nabla^2 \mathbf{E}_y, \quad \frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}_z = \nabla^2 \mathbf{E}_z. \quad (99')$$

Покажем, что этой системе уравнений можно удовлетворить, если мы положим:

$$\left. \begin{array}{l} E_x = A \cos a \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c_1} \right), \\ E_y = A \cos b \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c_1} \right), \\ E_z = A \cos c \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c_1} \right), \end{array} \right\} \quad (100)$$

причем α, β и γ и a, b, c должны удовлетворять условиям $\cos^2 a + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$.

Какой смысл имеют α, β, γ и a, b и c ? Из рассмотрения (100) ясно, что a, b и c представляют собой углы, которые образует вектор \mathbf{E} с осями координат. Что же касается $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$, то это есть нормальное уравнение плоскости; во всех точках данной плоскости величина p имеет одно и то же значение. Уравнение (100) показывает, что фаза в этой плоскости будет одна и та же. Таким образом указанное уравнение плоскости есть уравнение плоскости волны, причем p есть расстояние плоскости от начала координат, отсчитанное по нормали к плоскости, проходящей через начало.

Углы α, β и γ представляют собой углы, которые образует нормаль к плоскости с осями координат.

Составляем сначала, на основании (100), выражение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Подстановка дает:

$$A \frac{2\pi}{T} \frac{1}{c_1} \left\{ \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma \right\} = 0. \quad (98')$$

Для того чтобы это условие удовлетворилось, необходимо, чтобы $\cos \alpha \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = 0$, т. е. чтобы направление вектора E было перпендикулярно направлению нормали к плоскости волны, т. е. необходимо, чтобы вектор E лежал в плоскости волны, чтобы волна была поперечная. Итак, $\operatorname{div} E = 0$ есть условие поперечности волны. В тех случаях, когда $\operatorname{div} E \neq 0$, на поле волны, дающей $\operatorname{div} E = 0$, накладывается еще статическое поле, которое в распространении волны никакой роли не играет. Подставляем теперь (100) в одно из уравнений (99'). Результат подстановки будет:

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon \mu}{c^2} A \cos \alpha \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p}{c_1} \right) &= \\ = -A \cos \alpha \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) \left\{ \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{c_1^2} \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} = \frac{1}{c_1^2}, \quad \text{т. е. } c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Итак, скорость распространения волны будет $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$.

Рассмотренный случай отличается от случая, рассмотренного в § 3, только тем, что направление нормали волны не совпадает ни с одной из выбранных нами осей координат.

Рассмотрим теперь случай отражения плоских волн от плоской границы раздела, отделяющей два диэлектрика с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 .

Магнитная проницаемость μ пусть у них будет одна и та же. Для удобства расчетов направим ось Y параллельно плоскости волны, и пусть начало координат находится на границе раздела, а сама граница раздела совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 79).

Так как в плоскости волны все величины E_x, E_y, E_z, M_x, M_y и M_z не изменяются и так как ось Y параллельна плоскости волны, то все производные по Y в уравнениях Максвелля обращаются в нуль. Это дает нам возможность разбить уравнения Максвелля на две группы, из которых первая будет заключать в себе только три переменные: E_x, E_z и M_y , а вторая E_y, M_x и M_z . Поэтому мы можем рассматривать решения этих двух групп уравнений в отдельности. В самом деле, уравнения Максвелля при указанном условии можно разбить на следующие две группы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial M_y}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial M_y}{\partial x}, \\ -\frac{\mu_1}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

Далее, мы можем упростить уравнение плоскости волны

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p.$$

В самом деле, так как ось Y параллельна плоскости волны, то $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \beta = 0$. Кроме того, $\cos \gamma = \cos \varphi$, где φ — „угол падения“ (рис. 79 и 80), а следовательно, $\cos \alpha = \sin \varphi$. Итак, величина, стоящая под знаком \cos в (100), для данного случая может быть представлена:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1} \right). \quad (101)$$

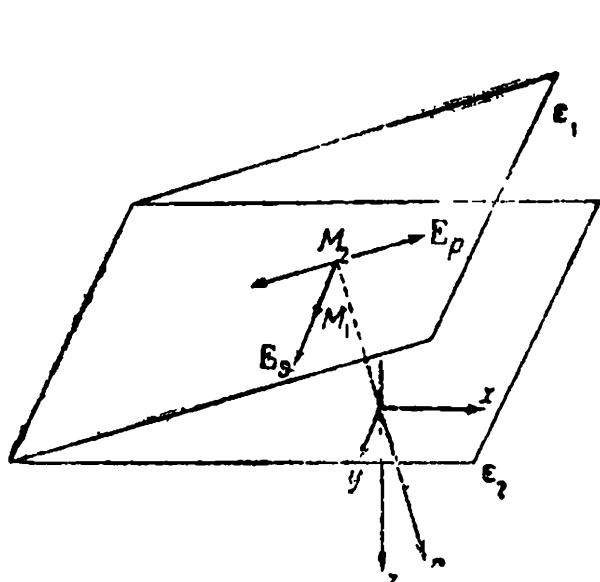


Рис. 79.

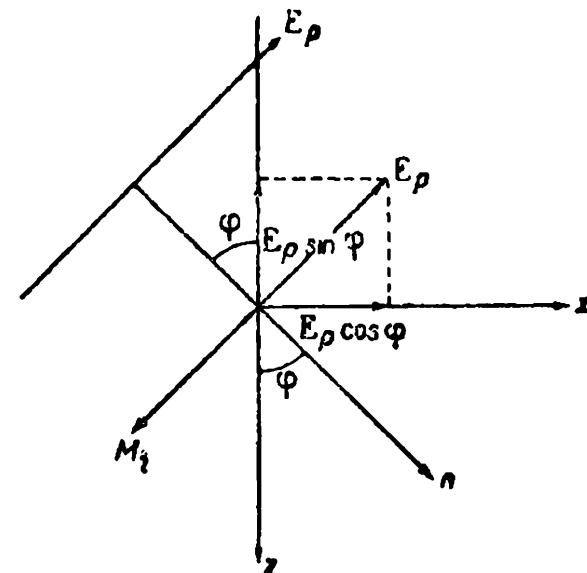


Рис. 80.

Поэтому решения уравнений (A) и (B) в комплексной форме на основе решений (100) можно представить:

$$\left. \begin{array}{l} E_x = Ae^{ia}, \\ E_y = Be^{ia}, \\ E_z = Ce^{ia}, \end{array} \quad \begin{array}{l} M_x = Le^{ia}, \\ M_y = Me^{ia}, \\ M_z = Ne^{ia}. \end{array} \right\} \quad (102)$$

В этих выражениях $\cos a$, $\cos b$ и $\cos c$ включены в A , B и C ; мы их определим в дальнейшем.

Подставляем сначала (102) в (A) и выражаем все постоянные в (102) через $A = E_p \cos \varphi$ (мы увидим, какой смысл имеет E_p). Результат подстановки принимает вид:

$$\frac{\epsilon_1}{c} A = \frac{\cos \varphi}{c_1} M, \quad \frac{\epsilon_1}{c} C = -\frac{\sin \varphi}{c_1} M,$$

$$\frac{\mu}{c} M = -A \frac{\cos \varphi}{c_1} + C \frac{\sin \varphi}{c_1}.$$

Отсюда, выражая все величины через $A = E_p \cos \varphi$, находим:

$$C = -A \operatorname{tg} \varphi = -E_p \sin \varphi, \quad M = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} A \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_p. \quad (103)$$

Нетрудно сообразить (рис. 79 и 80), что E_p есть вектор, лежащий в плоскости падения, соответствующий ему магнитный вектор M_y , направлен по оси Y , т. е. перпендикулярно плоскости падения. Таким образом решение уравнений (A) представляет собой плоскую волну, поляризованную в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. Мы за основной вектор принимаем вектор электрического поля. Таким же точно путем, подставляя (102) в (103) и выражая все постоянные (102) через $B = E_s$, мы приходим к выводу:

$$-\frac{\mu}{c}L = B \frac{\cos \varphi}{c_1}, \quad -\frac{\mu}{c}N = -B \frac{\sin \varphi}{c_1}$$

И

$$\frac{e_1}{c} B = L \frac{\cos \varphi}{c_1} + N \frac{\sin \varphi}{c_1},$$

откуда находим: $N = -L \operatorname{tg} \varphi$ и $E_v = E_s$, а также

$$L = -E_s \cos \varphi \sqrt{\frac{s}{\mu}}$$

И

$$M = E_s \sin \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}}. \quad (103')$$

В этом случае электрический и магнитный вектор обмениваются местами (рис. 79, 80).

Выражения (103') представляют собой плоскую волну, поляризованную в плоскости падения. Итак, для той и другой системы волн мы получаем следующие решения, если мы отделим действительную часть полученных нами комплексных решений:

для одной группы:

для другой группы:

$$E_x = E_p \cos \varphi \cos \alpha, \quad E_y = E_s \cos \alpha$$

$$E_z = -E_a \sin \varphi \cos \alpha,$$

$$M_y = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_p \cos \alpha,$$

$$E_u = E_s \cos a,$$

$$M_x = -E_s \sqrt{\frac{e_1}{\pi}} \cos \varphi \cos \alpha,$$

$$M_z = E_s \frac{\epsilon_1}{\mu} \sin \varphi \cos \alpha,$$

где

$$a = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1} \right).$$

Для того чтобы решить вопрос об отражении и преломлении волн, необходимо знать, что происходит на границе раздела двух диэлектриков. Наиболее простое предположение, оправдывающееся на опыте, состоит в том, что уравнения Максвелля должны сохранить свое значение и в самом переходном слое, т. е. они должны давать конечные значения и для самой поверхности раздела. А это, как мы сейчас увидим, приводит к совершенно определенным условиям, какие должны

соблюдаются на поверхности раздела. Рассмотрим производную $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ на самой границе раздела. Производная определяется как предел отношения (рис. 81):

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{E_{x_2} - E_{x_1}}{\Delta z}.$$

Пусть Δz неопределенно убывает, но так, что точки A и B остаются по разные стороны от плоскости $z=0$, тогда ясно, что производная не обратится в бесконечность только

при условии, что $E_{x_1} = E_{x_2}$, т. е. при условии, что тангенциальная слагающая электрического поля непрерывно переходит через границу раздела. Это относится ко всем „тангенциальным“ слагающим, т. е. к E_y , к M_x и M_y . Итак, в качестве пограничных условий мы имеем прежде всего:

$$\left. \begin{array}{l} E_{x_1} = E_{x_2}, \\ E_{y_1} = E_{y_2}, \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{x_1} = M_{x_2}, \\ M_{y_1} = M_{y_2}. \end{array} \right\} \quad (105)$$

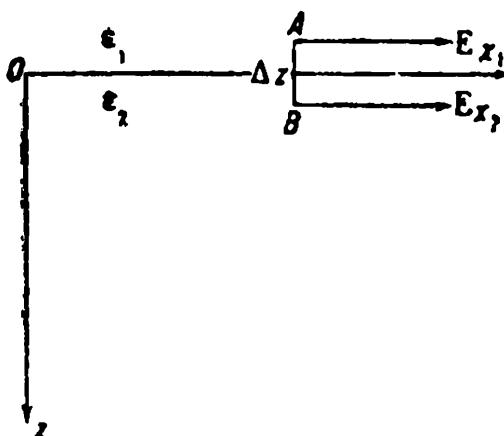


Рис. 81.

Максвелля в дифференциальной форме и напишем его для двух областей, непосредственно прилегающих к границе раздела:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial t} = \frac{\partial M_{y_1}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x_1}}{\partial y} \\ \frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial E_{z_2}}{\partial t} = \frac{\partial M_{y_2}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x_2}}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (106)$$

и

Если мы берем эти уравнения в двух точках, бесконечно близких друг к другу, но лежащих по разные стороны плоскости, совпадающей с границей раздела, то на основании (105) правые части обоих уравнений (106) одинаковы, и тогда мы будем иметь:

$$\frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial E_{z_2}}{\partial t} = \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial t},$$

что после сокращения и интегрирования по t дает:

$$\epsilon_2 E_{z_2} - \epsilon_1 E_{z_1} = \text{const.} \quad (107)$$

Возьмем на плоскости $z=0$ площадь, равную единице, и построим цилиндр, длина образующей которого будет бесконечно мала, но ци-

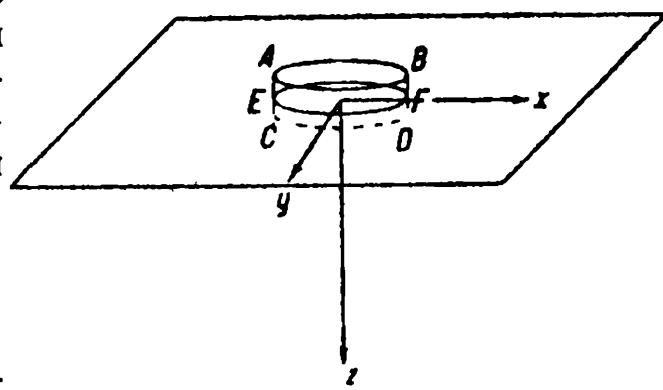


Рис. 82.

цилиндр пусть будет расположен так, что верхнее и нижнее основания будут лежать по разные стороны от границы раздела (рис. 82).

Подсчитаем поток вектора индукции D . Принимая во внимание, что площадь боковой поверхности цилиндра при беспределном укорочении образующей стремится к нулю, мы приходим к выводу, что в результате весь поток сводится к потокам через верхнее и нижнее основания, которые по площади равны единице. Если мы направление (положительное) векторов $\epsilon_1 E_{z_1}$ и $\epsilon_2 E_{z_2}$, будем считать совпадающим с положительным направлением оси Z , то для потока через всю поверхность цилиндра получим:

$$\epsilon_2 E_{z_2} - \epsilon_1 E_{z_1} = 4\pi\sigma,$$

где σ — сумма всех зарядов внутри цилиндра. Если на поверхности нет свободных зарядов и нет их ни в первой, ни во второй среде, то ясно, что $\epsilon_1 E_{z_1} = \epsilon_2 E_{z_2}$ или $D_{z_1} = D_{z_2}$, т. е. что постоянная в (107) равна нулю. Если бы даже заряды и были, то при рассмотрении волн надо было бы выделить постоянное поле, которое пришлось бы рассматривать отдельно: в периодическом процессе волны это поле роли не играет. Итак, для нормальной слагающей мы имеем условие:

$$\epsilon_1 E_{z_1} = \epsilon_2 E_{z_2}. \quad (108)$$

Таким образом при переходе через границу тангенциальная слагающая напряжения поля изменяется непрерывно, нормальная же претерпевает скачок. Для вектора индукции условия получаются как раз наоборот: нормальная слагающая изменяется при переходе непрерывно, тангенциальная же скачком. Мы видим, что эти условия представляют диалектическое единство прерывного и непрерывного. Из условий на границе (105) и (108) вытекает закон преломления силовых линий (рис. 83). Так как тангенциальная слагающая вектора E непрерывна, то мы имеем $E_{n1} = E_{n2}$. Далее, угол направления линии E_1 с осью Z определяется из равенства $\tan \alpha_1 = \frac{E_{n1}}{E_{t1}}$, а для второй среды: $\tan \alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$,

откуда $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}$, или, на основании (108),

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (109)$$

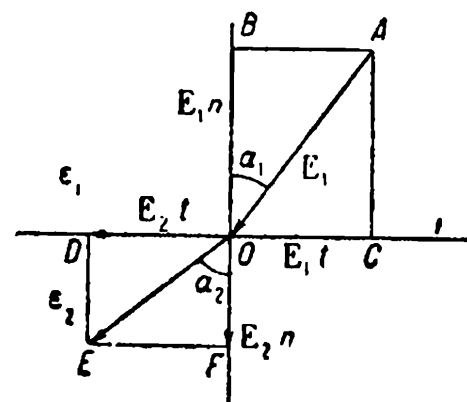


Рис. 83.

Формула (109) и представляет собой закон преломления линий сил.

На основе разобранных условий на границе мы сейчас найдем основные законы отражения и преломления. Если от плоской границы раздела происходит отражение и преломление, то в случае плоской волны естественно ожидать и плоскую отраженную волну и такую же плоскую преломленную. Это можно показать, исходя из принципа Гёйгенса, как это и делается в общих курсах физики.

Итак, пусть мы имеем кроме падающей волны еще и отраженную и преломленную, которые мы изобразим таким же образом, как изобразили падающую волну (104).

Отраженная волна:

$$\left. \begin{aligned} E_{rx} &= E_{rp} \cos \varphi_1 \cos \alpha_1, & E_{ry} &= E_{rs} \cos \alpha_1, \\ E_{rz} &= -E_{rp} \sin \varphi_1 \cos \alpha_1, & M_{rx} &= -E_{rs} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} \cos \varphi_1 \cos \alpha_1, \\ M_{yr} &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_{rp} \cos \alpha_1, & M_{rz} &= E_{rs} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} \sin \varphi_1 \cos \alpha_1, \end{aligned} \right\} (104')$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi}{c_1} \right).$$

Волна преломленная:

$$\left. \begin{aligned} E_{dx} &= E_{dp} \cos \phi \cos \alpha_2, & E_{dy} &= E_{ds} \cos \alpha_2, \\ E_{dz} &= -E_{dp} \sin \phi \cos \alpha_2, & M_{dx} &= -E_{ds} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}} \cos \phi \cos \alpha_2, \\ M_{dy} &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}} E_{dp} \cos \alpha_2, & M_{dz} &= E_{ds} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu}} \sin \phi \cos \alpha_2, \end{aligned} \right\} (104'')$$

где

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right).$$

(104') и (104'') предполагают, что преломленная и отраженная волны будут плоские, но относительно направления их нормалей мы ничего не знаем и обозначаем углы этих нормалей с осью Z через φ_1 и ϕ . Напишем одно из условий на границе (105) — возьмем самое простое из них, которое не содержит при амплитудах множителей $\cos \varphi$, $\cos \varphi_1$ и $\cos \phi$. Таким условием будет $E_{y_1} = E_{y_2}$. Для данного случая его надо будет написать в раскрытом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} E_s \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi}{c_1} \right) + E_{rs} \cos \frac{2\pi}{t_1} \left(t - \frac{x \sin \varphi_1}{c_1} \right) &= \\ = E_{ds} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \phi}{c_2} \right). \end{aligned} \quad (110)$$

Необходимо помнить, что это условие годится только для $z = 0$. Кроме того, мы в левой части берем сумму E_{y_1} для падающей и отраженной волн, потому что они ведь существуют одновременно: поле в первой среде составляется из суммы полей падающей и отраженной волн. Нетрудно сообразить, что уравнение (110) будет верно для любого момента времени t , если выполняется условие:

$$\frac{\sin \varphi}{c_1} = \frac{\sin \varphi_1}{c_1} = \frac{\sin \phi}{c_2}. \quad (111)$$

Если мы возьмем первое и третье отношение в (111) и вспомним, что мы приняли $\mu_1 = \mu_2$, то мы без труда находим закон преломления Декарта-Снеллиуса, если можно так выразиться, в электромагнитной транскрипции:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n_{1,2}. \quad (112)$$

Если мы берем первое и второе из отношений (111), то мы получаем:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_1. \quad (113)$$

Простейшее из решений (113) будет $\varphi = \varphi_1$, но это решение, явным образом, не годится; оно показывает, что нормаль отраженной волны образует тот же угол с положительным направлением оси Z (рис. 84), а это значит, что волна идет по тому же направлению и никакого отражения вообще не произошло. Другое решение трансцендентного уравнения будет:

$$\varphi_1 = \pi - \varphi. \quad (114)$$

Действительно:

$$\sin \varphi_1 = \sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi.$$

Строим от положительного направления оси Z угол $\pi - \varphi$ и получаем для отраженной волны обычный закон: угол падения равен углу отражения. Итак, основные законы преломления и отражения являются в электромагнитной теории следствием условий на границе. От условия (110) остается, следовательно, уравнение:

$$E_s + E_{rs} = E_{ds}. \quad (110')$$

Напишем теперь условия (105) для E_x , M_x и M_y , заменяя на основе (114):

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi_1 = -\cos \varphi$$

и

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

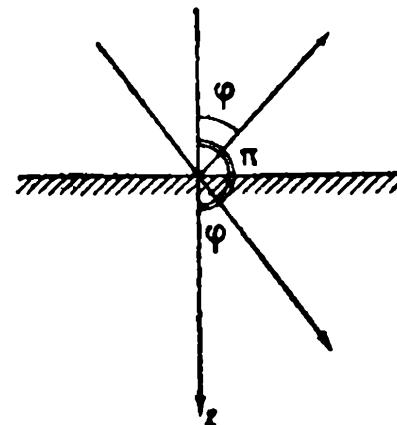


Рис. 84.

После очень простых преобразований получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_p - E_{rp} &= E_{dp} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \\ E_\varphi + E_{rp} &= E_{dp} \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}, \\ E_s - E_{rs} &= E_{ds} \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\sin \psi \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (110'')$$

С помощью четырех уравнений (110'') и (110') можно выразить E_{rs} , E_{dp} , E_{rs} и E_{ds} через E_p и E_s . Складывая (110') и последнее из (110''), мы приходим к выводу:

$$2E_s = E_{ds} \frac{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi}{\sin \psi \cos \varphi}. \quad (115)$$

Вставляя (115), решенное относительно E_{ds} , в (110'), находим

$$E_{rs} = E_s \left[\frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \cos \psi \sin \varphi} - 1 \right] = E_s \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (116)$$

E_{ds} можно привести к виду:

$$E_{ds} = E_s \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (117)$$

Проделываем сейчас сходную же операцию с двумя первыми из уравнений (110'').

Прежде всего получаем:

$$2E_p = E_{dp} \frac{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi}{\sin \psi \cos \varphi}. \quad (118)$$

Вставляем E_{dp} из (118) в первое из уравнений (110''):

$$E_{rp} = E_p - E_p \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi},$$

откуда без труда находим:

$$E_{rp} = E_p \frac{\sin(\varphi - \psi) \cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi) \sin(\varphi + \psi)} = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \quad (119)$$

и

$$E_{dp} = E_p \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}. \quad (120)$$

Сопоставляя все найденные значения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_{dp} &= E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}, \\ E_{rs} &= -E_s \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \\ E_{dp} &= E_p \frac{2 \cos \psi \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}, \quad E_{ds} = E_s \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Выражения (A) представляют собой так называемые формулы Френеля, которые были выведены Френелем на основе ряда предположений, оказавшихся весьма спорными. В электромагнитной теории они получаются как простое следствие пограничных условий.

Займемся теперь исследованием формул Френеля.

Посмотрим, не могут ли при каких-либо частных значениях φ и ψ обратиться в нуль какие-либо из четырех величин: E_{rp} , E_{rs} , E_{ds} и E_{dp} .

На первый взгляд кажется, что E_{rp} и E_{rs} должны обратиться в нуль при $\varphi = \psi$. Но может ли такой случай осуществиться? Ведь это условие означает, что никакого преломления не происходит, т. е. что луч, войдя во вторую среду, продолжает идти по тому же направлению. Правда, есть один случай, который возможен для любой среды с любым показателем преломления, это — случай, когда волна падает нормально, т. е. когда нормаль к волне совпадает с нормалью к плоской границе раздела; тогда действительно $\varphi = \psi = 0$. Но тогда E_{rp} и E_{rs} обращаются в неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Мы этот случай разберем в дальнейшем, заметив пока, что неопределенность эта разрешается в конечную величину, а не в нуль.

Остается случай $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \infty$, или $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$;

тогда $E_{rp} = 0$. Рассмотрим, какой смысл имеет это условие. Если угол падения, или, что то же самое, угол отражения плюс угол преломления, равен $\frac{\pi}{2}$, то это значит (рис. 85), что отраженный и преломленный лучи образуют друг с другом прямой угол. Далее, из соотношения $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ находим $\sin \psi = \cos \varphi$, а тогда

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = n_2, \quad (121)$$

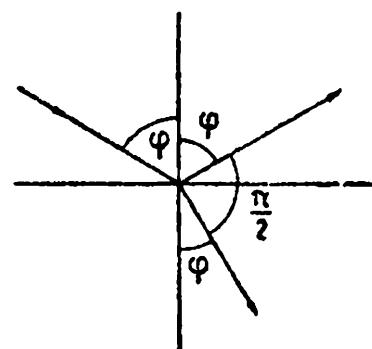


Рис. 85.

т. е. E_{rp} обратится в нуль тогда, когда угол падения удовлетворяет равенству (121). Угол φ , определяемый равенством (121), называется углом полной поляризации, а самое соотношение (121) называется законом Брюстера, по имени Брюстера, который нашел его из опыта. Углом полной поляризации угол φ называется по следующим соображениям: всякий естественный, т. е. неполяризованный, луч можно представить как совокупность двух поляризованных E_p и E_s с постоянно меняющейся фазой между E_p и E_s . Ведь в выражениях (A) у нас даны только амплитуды, фазы же входят в выражение

$$\cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1} + \alpha \right).$$

Если фазы этих слагающих непрерывно меняются, то это значит, что сам вектор поворачивается. Таким образом волна остается поперечной, но направление вектора постоянно меняется. При отражении под углом полной поляризации слагающая E_{rp} будет всегда выпадать, следовательно, остается только E_{rs} , и таким образом, естественный свет превращается в плоско поляризованный. Если угол отличается немного от угла φ , то E_{rp} представляет собой очень малую величину, и поэтому свет будет только отчасти поляризован. Так как ни E_{ds} , ни E_{dp} не обращаются в нуль ни при каких условиях, то в проходящем свете не получается полной поляризации, однако, с помощью ряда прозрачных пла-

стинок (стопа пластин) можно в значительной степени усилить поляризацию, не доводя, однако, ее до полной. К стопе пластин прибегают потому, что в проходящем свете заключается больший процент падающей энергии, в отраженном энергии меньше.

Рассмотрим теперь случай $\varphi = \psi = 0$. Прежде всего напишем в раскрытом виде E_{rs} . Раскладывая синусы, находим:

$$E_{rs} = -E_s \frac{\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi}{\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi} = -E_s \frac{\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \cos \psi - \cos \varphi}{\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \cos \psi + \cos \varphi},$$

и, заменяя

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12}, \cos \psi = 1 \text{ и } \cos \varphi = 1,$$

так как $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, мы получаем:

$$E_{rs} = -E_s \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}. \quad (122)$$

Для E_{rp} получаем сходное выражение. В самом деле:

$$E_{rp} = E_p \frac{\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi} = E_p \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}. \quad (123)$$

Если n_{12} — большая величина, то $\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}$ будет близко к единице, и тогда значительный процент энергии будет отражаться от границы раздела. Таким образом количество отраженного света зависит от показателя преломления. Все сказанное относится, конечно, только к диэлектрикам.

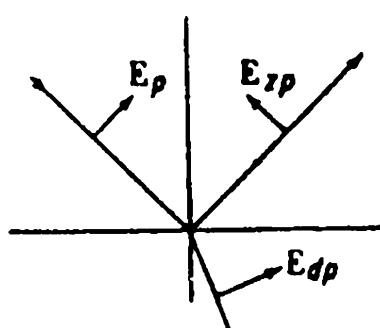


Рис. 86.

Если мы рассмотрим падающую и отраженную волну, то на границе раздела фазы их будут противоположные: $E_r = -E_s \frac{n-1}{n+1}$ (это будет при $n > 1$). Но нетрудно сообразить, что и для $E_{rp} = E_p \frac{n-1}{n+1}$ получатся также противоположные фазы. В самом деле, как показывает чертеж (рис. 86), одинаковый знак E_{rp} и E_p равносителен противоположной фазе, когда $\varphi = \psi = 0$.

Все это приводит к тому, что на границе образуется узел стоячей волны для электрического вектора. Аналогичные рассуждения показывают, что для магнитного вектора получается пучность на той же границе (вспомним о фазах перемещения и сгущения в звуковых стоячих волнах). Винеру с помощью тончайшего фотографического слоя, толщина которого была менее половины длины световой волны, удалось получить стоячие волны и доказать, что на поверхности образуется узел, следовательно, фотографическое действие обусловлено, несомненно, электрическим вектором; позднейшие опыты

показали, что и явление флуоресценции вызывается также электрическим вектором. До появления электромагнитной теории шел большой спор между сторонниками Френеля, которые считали, что самый процесс колебания происходит в плоскости, перпендикулярной той, которую называют плоскостью поляризации, и сторонниками теории Неймана, которые, наоборот, полагали, что колебательный процесс происходит в самой плоскости поляризации. Электромагнитная теория дает синтез этих двух теорий в том смысле, что она рассматривает два взаимно перпендикулярных вектора — электрический и магнитный. Но, вместе с тем, она ставит вопрос в каждом частном случае: что оказывает действие — магнитный вектор или электрический? Как мы видели в опытах со стоячими волнами, вопрос решается так, что флуоресценция и фотохимическое действие обусловлены электрическим вектором. Так как на сетчатке глаза происходит фотохимический процесс — выцветание глазного пурпурна, то много данных за то, что и зрение обусловлено электрическим вектором.

Рассмотрим еще некоторые из опытов Винера. Пусть система плоских волн $ABCD$ падает на плоскую поверхность стекла (рис. 87). На поверхности образуется система отраженных волн a, b, c, d . Если волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, т. е. если вектор лежит в самой плоскости падения E_p , то, как ясно из рис. 87, интерференция волн не может произойти, так как направления колебаний в падающей и отраженной волне не совпадают.

Если же волны поляризованы в плоскости падения, т. е. если мы пустим на отражающую поверхность волны, отразившиеся, например, от другой такой же поверхности под углом полной поляризации, — у этой волны слагающая E_p будет отсутствовать, — то тогда в точках пересечения падающих и отраженных волн возможна будет интерференция. Винер показал, что это именно так; фотографическая пластишка с тончайшей эмульсией при наличии вектора E_p чернела равномерно, при наличии E_s давала чередующиеся области. Подобные же опыты с флуоресцирующими экранами обнаружили те же самые явления. Само собой разумеется, что изучать чередование светлых и темных пятен можно только под микроскопом ввиду того, что световые волны очень коротки. Очень интересный вывод в том же направлении можно сделать из опытов Поля и Принггейма над нормальным и селективным фотоэффектом.

Если металлическую поверхность зарядить отрицательным зарядом (опыт делается в эвакуированном сосуде) и осветить поверхность, то количество электронов, выделяемых поверхностью, будет расти по мере уменьшения длины волны возбуждающего света. Это — так называемый нормальный фотоэффект. Но у ряда металлов, например у K, Na, Rb, в видимой части спектра на этот нормальный эффект накладывается так называемый „селективный“, обусловленный специфическим поглощением света данным металлом (рис. 88), причем этот селективный эффект обладает удивительным свойством: он наблюдается в поляризованном

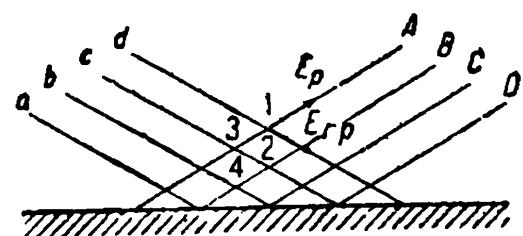


Рис. 87.

свете только тогда, когда вектор расположен в плоскости падения (E_p , по нашим обозначениям), и кроме того, действие тем сильнее, чем угол падения больше: он достигает максимума при условии, что нормаль к волне идет почти вдоль поверхности. Если в падающих волнах одна только слагающая E_s , то селективный эффект вообще не наблюдается. Зависимость эффекта от угла падения изображена на диаграмме (рис. 89). Объяснение этого явления становится ясным при одном взгляде на чертеж (рис. 90). В самом деле, каков бы ни был угол падения, если вектор лежит перпендикулярно плоскости падения, то на поверхности

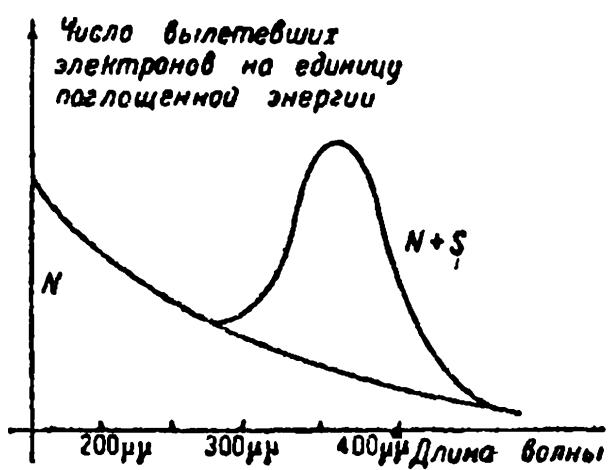


Рис. 88.

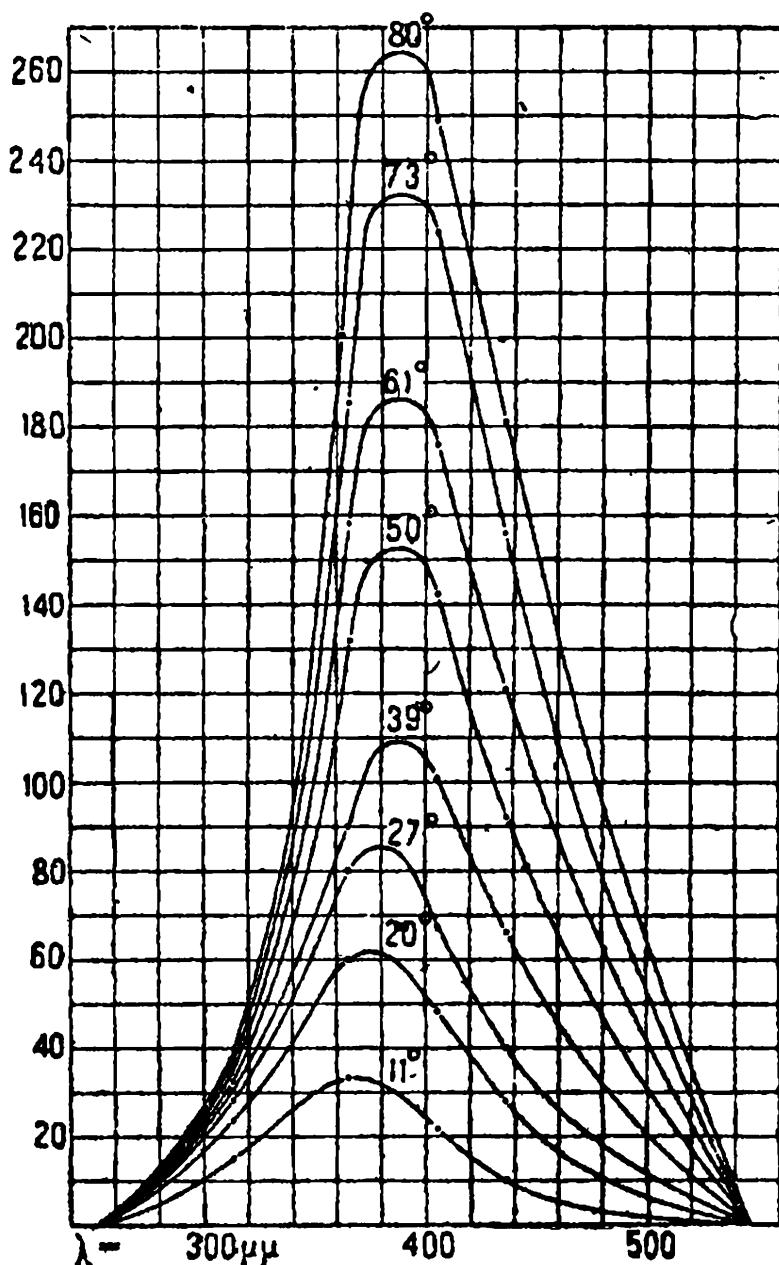


Рис. 89.

металла он всегда будет параллелен самой поверхности и не даст слагающей, которая могла бы вырвать электрон с поверхности: эта слагающая раскачивает его только параллельно поверхности. Наоборот, при наличии E_p слагающая по нормали будет тем больше, чем больше угол падения; все это и подтверждается на опыте.

В связи с рассмотренными вопросами отражения и преломления очень интересен случай полного внутреннего отражения, который был впервые во всех деталях разобран проф. А. А. Эйженвальдом. В этом явлении интересно то, что световая энергия при полном внутреннем отражении все-таки входит в ту среду, от границы которой она отражается,

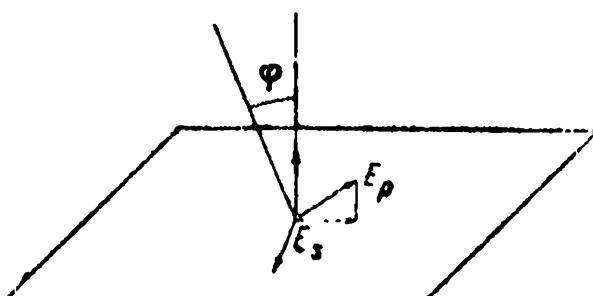


Рис. 90.

движется она там по кривой линии (кривые лучи — линии вектора Пойнтинга) и снова выходит в первую среду. Но мы не имеем возможности останавливаться на этом интересном явлении и отсылаем читателя к статье Эйхенвальда („Известия Инст. инжен. путей сообщ.“, 1910)¹.

Точно так же мы не можем останавливаться на интересной теории, объясняющей отступления от формул Френеля. Эти отступления объясняются тем, что резкой границы между двумя веществами с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 , как оказывается, не существует; на границе всегда есть слой адсорбированных веществ, так что, строго говоря, существует очень тонкий слой, где диэлектрическая постоянная очень быстро меняется, переходя от ϵ_1 к ϵ_2 .

¹ Этот вопрос разобран также в курсе Эйхенвальда „Теоретическая физика“, ч. VI, § 213, 214, 216 и 217.

Часть III.

Физическая теория электромагнитного поля.

Всякий физик и всякий инженер знает, что электричество есть (материальное) движение, но никто не знает толком, *что* тут движется, — следовательно,— заключает идеалистический философ, — можно надуть философски не образованных людей соблазнительно „экономным“ предложением: *давайте мыслить движение без материи...* (Ленин, т. X, 238).

В результате современная электродинамика вынуждена была сохранить ма́ксвеллевское представление об энергии как некоторой величине, разлитой в пространстве, с объемной плотностью, пропорциональной квадрату электрического и магнитного напряжения, но уже *не связанной ни с каким материальным субстратом*. Таким образом энергия, а следовательно, и масса систем электронов, непосредственно связывается не с самой системой, а с возбуждаемым ею электромагнитным полем, локализуясь, так сказать, в пустоте. (!! A. T.) (Проф. Я. И. Френкель, Строение материи, изд. „Сеятель“, 1922, стр. 109; курсив автора.)

Стремление прикрывать невежество под покровом математических формул уже появилось, но открыто не проповедовалось. Поэтому студентов продолжали учить, как надо составлять определенные взгляды на процессы, протекающие в природе. [А. Шустер, Прогресс физики (The Progress of Physics), стр. 3, Кембридж 1911.]

Глава I.

Истолкование уравнений Максвелля.

§ 1. Истолкование первой группы уравнений Максвелля как уравнений движения фарадеевых трубок.

В настоящее время не найдется на земном шаре физика, который стал бы отрицать значение теории Максвелля, основанной на выводах, к которым пришел Фарадей в результате своих знаменитых исследований в области электромагнитного поля, и однако, почти все теоретики, за немногими исключениями, стоят на чисто формальной точке зрения, считая, что все, что нам дали Фарадей и Максвелль, заключено в системе уравнений Максвелля, что те пути, по которым шли оба великих физика, оказались неправильными, и что все физические истолкования, предложенные ими, в лучшем случае, можно считать лесами, которые

нужны были при постройке здания, но которые, после его завершения, необходимо убрать. Отказ от построения модели, т. е. „снимка“, „изображения“ действительности, равносильно отказу от познания существующего независимо от нас мира. У нас очень часто думают, что всякая модель есть непременно модель механическая; думают, что переход к высшей ступени материализма — материализма диалектического — знаменует собой необходимость отказаться от модели. А разве химик, создающий искусственно, одно за другим, „органические вещества“, которые многими считались секретом „жизненной силы“, или физиолог, в искусственной среде заставляющий действовать изолированный орган, — не создают „моделей“ того, что происходит в природе? „В мире нет ничего кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени“ (Ленин, т. X, 143). Если мы заранее не откажемся от того, чтобы, изучив данное явление, создать его искусственно и использовать для себя, если мы не откажемся от высшей ступени познания — от синтеза, мы не можем отказываться от моделей, которые вовсе не обязаны быть механическими. Но они должны быть сделаны из материи, движущейся в пространстве и во времени, каковы бы ни были формы этого движения и ее носителя — материи. В частности, в вопросе о природе электромагнитных явлений материалист-диалектик, конечно, не должен ставить знака равенства между механикой и электродинамикой, но в то же время он должен помнить, что „механика была снимком с медленных реальных движений, а новая физика есть снимок с гигантски быстрых реальных движений“ (Ленин, т. X, стр. 222). Точка зрения, что те конкретные представления, те модели, которыми пользовались Фарадей и Максвелль, — только леса, необходимые для постройки, свидетельствуют также об антидиалектическом мышлении: леса ведь убирают, когда построено здание, а про какое здание науки можно сказать, что оно завершено? Ведь каждая теория должна непрерывно перестраиваться, чтобы все точнее и вернее изображать то, что есть, т. е. природу.

В настоящей главе мы изложим взгляды Дж. Дж. Томсона на природу электромагнитного поля. Построенная им, начиная с 1881 г., теория представляет гораздо более близкий перевод на язык математики взглядов самого Фарадея.

Но сначала несколько слов из истории. В тот же год, когда было открыто Эрстедом магнитное действие тока, т. е. в 1820 г., Био и Савар, а вслед за ними Ампер, поставили себе задачу найти такой закон действия элементов тока, который позволял бы находить магнитное поле любого тока. Эти теории, равно как и последовавшие за ними теории Франца Неймана, Клаузиуса, Вильгельма-Вебера, Гаусса и Римана, базировались, в основном, на теории действия на расстоянии и строили свои элементарные законы, из которых выводилось все, что было до тех пор известно в области электродинамики, по образу и подобию ньютона закона притяжения. Ньютон же сам считал свой закон только временным предположением, физически не обоснованным. Только Гаусс и Риман исходили из предположения, что электромагнитные действия передаются не мгновенно, так что этих исследователей отчасти можно рассматривать как предшественников Максвеля.

Крутую ломку установившихся традиционных взглядов, окончательно примирившихся с действием на расстоянии, произвел Фарадей. Все его исследования проникнуты одной мыслью, что действовать друг на друга могут тела только через посредство промежуточной материальной среды и что материя не может действовать там, где ее нет. Изучая магнитное и электрическое поле, он научился получать картины этого поля с помощью силовых линий, которые для него указывали на некоторую реальную физическую связь между частями поля и в которых он искал объяснения всем изучаемым явлениям.

Максвелль в первом своем большом труде „О фарадеевых линиях сил“ (1855—1856), рассматривает чисто геометрические свойства электромагнитного поля, проводя внешнюю аналогию между электромагнитным полем и полем текущей жидкости.

В следующем цикле работ самого Максвелля (1855—1856) „О физических линиях сил“ проводится более глубокая аналогия между вихрями и магнитными линиями сил. Как раз об этой работе Энгельс писал в „Диалектике природы“, что вихри старого Декарта снова находят почетное место в новых областях знания“ („Диалектика природы“, стр. 299). К этому исследованию примыкают работы академика В. Ф. Миткевича в наше время.

Математический анализ приводит Максвелля в этой работе к установлению его знаменитых уравнений, но в выводах его оказались некоторые скачки и неясность. Так, Пуанкаре не раз повторял, что, читая Максвелля, он так и не понял, что представляет собой по Максвеллю заряженный шар. Как бы то ни было, все-таки в теории существенную роль играли фарадеевы линии сил, впрочем, только магнитные.

В дальнейших работах „Динамическая теория электромагнитного поля“ (1864—1865) и „Трактат об электричестве и магнетизме“ (1873, изд. I) Максвелль не пользуется конкретными моделями и предполагает, что электромагнитное поле представляет собой систему, к которой приложимы уравнения механики Лагранжа, причем свойства этой системы отличны от обычных механических систем: общей остается только возможность применения уравнений Лагранжа (о специфических особенностях электромагнитных систем по сравнению с механическими — см. ниже). В такой форме теория Максвелля начала распространяться, пока от нее не отпало все кроме формальной системы уравнений. Но даже и в последней редакции теории самого Максвелля из нее почти выпали основные представления Фарадея о линиях сил. Начиная с 1881 г. Дж. Дж. Томсон в ряде работ показывает, что уравнения Максвелля можно истолковать как уравнения движения фарадеевых трубок. Эта мысль оказалась удивительно плодотворной. Томсону удалось не только объяснить известные факты, но и ввести новое понятие об электромагнитной массе, изменяющейся со скоростью. Это и заставило нас от старой механики перейти к электромагнитной картине мира. Это понятие было настолько ново, что на него не обратили почти внимания, и когда этот вопрос был вновь поставлен в 1902 и 1903 гг., работа Томсона была уже почти забыта. Далее, Томсон первый установил выражение для массы, связанной с электромагнитной энергией: $m = \frac{E}{c_1^2}$, которое

$$m = \frac{E}{c_1^2}$$

обычно приписывается Эйнштейну, хотя это выражение можно найти в работах Томсона, начиная с 1881 г., т. е. еще в ту пору, когда Эйнштейну было всего два года от роду!

Наконец, в 1924 г. с помощью этой же теории Томсон дал блестящий синтез квантовой и волновой теории света, а в 1928—1930 гг. дал теорию электронных волн, удивительно просто объясняющую явление „дифракции электрона“, и наконец, дал простое, вытекающее из уравнений Максвелля, объяснение 1-го постулата Бора.

Уже на основании одних этих фактов взгляды Томсона заслуживают большого внимания.

Изучая форму линий сил, Фарадей пришел к выводу, что если рассматривать линии сил как реально существующие физические образования, то они должны обладать следующими механическими свойствами: они должны укорачиваться и стягиваться по длине, как растянутые резиновые шнуры, и раздаваться в бок, оказывая друг на друга давление. Так, искривление линий в области PQ (рис. 91) обусловлено тем, что между A и B по одну сторону от PQ линий сил больше — они гуще расположены, чем с другой стороны. Поэтому неодинаковое давление и вызывает изгиб PQ . Линии сил, отталкиваясь друг от друга и, вместе с тем, укорачиваясь, приближают заряженные тела друг к другу. Таким образом притяжение неразрывно связано с отталкиванием. На рис. 92 изображено поле одноименных зарядов; линии сил в E и F , укорачиваясь, увлекают за собой тела A и B .

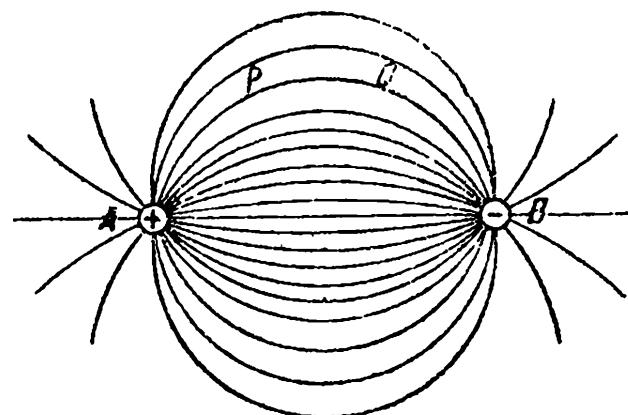


Рис. 91.

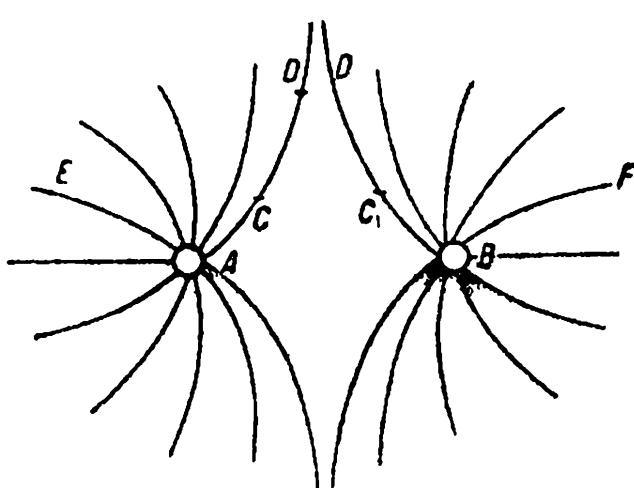


Рис. 92.

Таким образом отталкивание в областях CD и C_1D_1 происходит одновременно с притяжением в областях E и F . В теории Фарадея полярные противоположности — притяжение и отталкивание — переходят диалектически друг в друга, причем и то и другое неразрывно между собою связано. Кроме того, теория Фарадея дает диалектический синтез прерывности и непрерывности. В самом деле, поле непрерывно по длине линий, с другой стороны, отдельные линии друг от друга обособлены, —

поле представляет прерывистую волокнистую структуру. По обычным же установившимся теперь среди теоретиков воззрениям поле представляется как нечто непрерывное, „локализующееся, так сказать, в пустоте“ (Френкель).

Рассмотрим теперь, каким образом можно получить величину натяжений и давлений в отдельных фарадеевых трубках. Мы рассмотрим

пока самый элементарный, упрощенный способ доказательства, оставив пока для дальнейшего вывод этих натяжений и давлений из уравнений Максвелля.

При подсчете силы, действующей на пластинку конденсатора площади S [ч. II, гл. IV, § 5, формула (89)], мы видели, что эта сила равна

$$F = \frac{S\epsilon}{2} E = S \frac{\epsilon E^2}{8\pi}. \quad (1)$$

Таким образом на единицу площади приходится сила

$$P = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}. \quad (1')$$

Теперь рассмотрим случай поля маленького заряженного шара, который мы можем представить себе как занимающий бесконечно малый объем. Напряжение поля будет

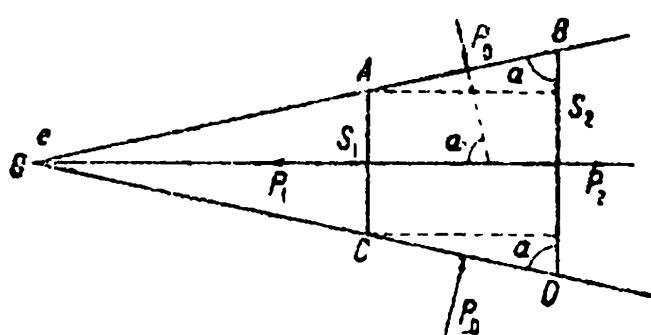


Рис. 93.

в первом приближении, плоскости AC и BD , то нетрудно сообразить, что под действием одного натяжения вдоль трубки равновесия быть не может. В самом деле, части трубки, лежащие между O и AC , должны

действовать с силой $P_1 = S_1 \frac{E^2}{8\pi}$ по направлению к O . части же трубки

справа от BD (рис. 93) действуют с силой $P_2 = S_2 \frac{E^2}{8\pi}$ в сторону от центра. Нетрудно сообразить, что P_1 больше P_2 ; как мы уже видели, $E^2 \sim \frac{1}{r^4}$, а $S \sim r^2$. Таким образом $\frac{E^2}{8\pi}$ убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Равновесие оказывается возможным, если принять что соседние трубки оказывают давление на данную. Пусть это давление будет равно p_0 . Тогда сила, приложенная ко всей боковой поверхности трубки, будет $p_0 S_0$, где S_0 — боковая поверхность нашей конической трубки. Эта сила даст равнодействующую $p_0 S_0 \cos \alpha$ в сторону от центра O .

Обозначим теперь через $\frac{\epsilon E_m^2}{8\pi}$ среднее значение для величин $\frac{\epsilon E_1^2}{8\pi}$ и $\frac{\epsilon E_2^2}{8\pi}$. Тогда равновесие будет возможно, если

$$(S_1 - S_2) \frac{\epsilon E_m^2}{8\pi} + p_0 S_0 \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Но ясно, что $S_0 \cos \alpha = S_2 - S_1$, откуда

$$(S_1 - S_2) \left[\frac{E_m^2}{8\pi} - p_0 \right] = 0, \quad (2')$$

или

$$p_0 = \frac{E_m^2}{8\pi}, \quad (3)$$

т. е. боковое давление численно равно величине натяжения в трубке. Этот результат, полученный элементарным путем, как мы покажем в дальнейшем, чисто аналитически вытекает из уравнений Максвелля, а это доказывает, что представления Фарадея о трубках, находящихся в состоянии натяжения и раздающихся в поперечном направлении, свободно укладываются в систему уравнений Максвелля.

Если мы выделим небольшую площадку S_1 (рис. 94) на заряженном проводнике и с каждой точки ограничивающей ее замкнутой кривой проведем линии сил и доведем их до другого проводника, то, замыкая эту трубку поверхностями a и b , проходящими внутри проводников A и B , мы получим замкнутую поверхность, поток индукции через

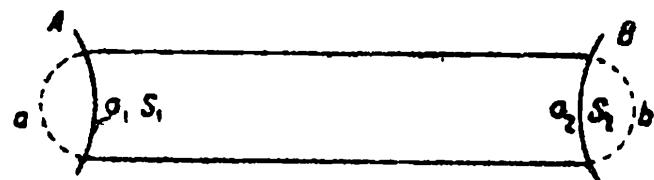


Рис. 94.

которую равен нулю. В самом деле, для боковой поверхности поток будет равен нулю, потому что вектор D совпадает с образующей и не дает нормальной слагающей для поверхности a и b , потому что поле внутри проводника равно нулю. Отсюда делаем вывод, что алгебраические суммы зарядов $S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2 = 0$, т. е. что на концах любой силовой трубы — равные и противоположные заряды. Строя по Фарадею трубы так, чтобы на концах у них были одинаковые заряды, мы, казалось бы, могли дробить эти заряды до бесконечности и число трубок увеличивать до бесконечности; но если мы считаем эти трубы физическими реальностями, то ясно, что они должны иметь какой-то определенный заряд на концах. Исходя из представлений Фарадея, мы приходим естественным путем к представлению об атомном строении электричества. Приведем слова Томсона, взятые из гл. I его книги „Новейшие исследования в области электричества и магнетизма“ („Recent researches on Electricity and Magnetism“, Oxford 1893) ¹: „В математической теории электричества нет указаний на то, что есть предел, до которого поле электрической силы может быть подразделяемо на трубы постоянно уменьшающейся силы, но дело обстоит иначе, если считать эти силовые трубы не только формой математического выражения, но и реальными физическими количествами, имеющими определенные размеры и формы“. Надо иметь в виду, что эти строки были написаны тогда, когда электронной теории еще не было. Однако и сейчас мы не можем сказать, что каждый элементарный заряд электрона является началом одной трубы: их может быть несколько, даже очень много, но, во вся-

¹ Вступительная часть этой главы переведена в приложении к книге Томсона „Электричество и материя“, Гиз, 1928.

ком случае, это должно быть определенное число и одинаковое для всех электронов, в пределах точности наших современных измерений.

Теория Томсона, которую мы сейчас разбираем, является сходной с кинетической теорией газов, причем в ней роль молекул выполняют фарадеевы трубы.

Посмотрим теперь, как можно истолковать первое из уравнений Maxwell'a.

Если мы станем на точку зрения Фарадея-Томсона, то под вектором D мы должны разуметь число трубок, проходящих через единицу поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению D . Если площадка, перпендикулярно расположенная к направлению трубок D , равна S_0 , то поток, или общее число трубок D , проходящее через S_0 ,

будет $S_0 D$. Если мы теперь подсчитаем, сколько придется трубок на единицу площади площадки S (рис. 95), расположенной под углом α , то получаем следующее:

$$\frac{S_0 D}{S} = \frac{S \cos \alpha D}{S} = D \cos \alpha = D_x,$$

где D_x — проекция вектора D на ось X .

Итак, проекция вектора D на какую-либо ось, с точки зрения взглядов Фарадея-Томсона, есть число трубок, проходящих через 1 кв. сантиметр, расположенный перпендикулярно к данной оси.

Пусть мы имеем поле, заполненное двигающимися фарадеевыми трубками, и посмотрим, как будет меняться число трубок, проходящих через неподвижно расположенный элемент $dy dz$.

Это число по только что доказанному будет равно

$$D_x dy dz. \quad (4)$$

Рассмотрим изменение этого числа δD_x за время δt . Прежде всего, от каких причин может произойти такое изменение? Раз трубы в поле двигаются, то за время δt те трубы, которые проходили через $dy dz$, уйдут и заменятся теми, которые были расположены в области, отстоящей, в среднем, от вершины A (x, y, z) (рис. 96) на расстоянии — $—u \delta t$, $—v \delta t$, $—w \delta t$, и которые могли быть расположены там гуще или реже. При этом предполагается, что все трубы переносятся как одно целое. Это будет первая часть $\delta_1 D_x$ изменения величины D_x .

Вторая причина обусловлена тем, что в разных частях поля скорости трубок могут быть разные. Так, например, если движение идет по направлению от A к B (рис. 96), то, если в точке A трубы будут двигаться быстрее, чем в B , они будут набегать друг на друга, и плотность D_x будет увеличиваться. Эта вторая часть изменения D_x есть $\delta_2 D_x$. Наконец, число $D_x dy dz$ может изменяться вследствие изменения наклона трубок по отношению к данной площадке $dy dz$. Это — третья причина изменения D_x , которую мы обозначим $\delta_3 D_x$.

Рассмотрим по очереди все эти три причины.

В результате общего движения, как мы видели, число трубок $D_x (x, y, z) dy dz$ заменяется числом $D_x (x - u \delta t, y - v \delta t, z - w \delta t) dy dz$

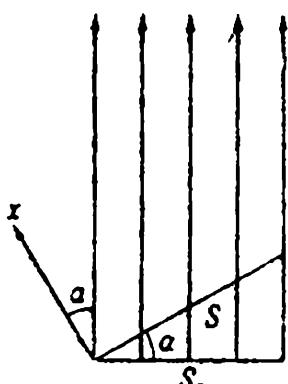


Рис. 95.

тех трубок, которые за время δt успеют дойти до данного элемента $dy dz$. Изменение:

$$\begin{aligned}\delta_1 D_x &= D_x(x - u \delta t, y - v \delta t, z - w \delta t) - D_x(x, y, z), = \\ &= - \left(u \frac{\partial D_x}{\partial x} + v \frac{\partial D_x}{\partial y} + w \frac{\partial D_x}{\partial z} \right) \delta t.\end{aligned}\quad (5)$$

Обсудим теперь изменение, вызванное второй причиной.

Пусть в точке A (рис. 96) трубы движутся со скоростью v параллельно оси Y и за время δt проходят путь $v \delta t$. Так как скорость движения трубок — функция координат, то после разложения в ряд и ограничения первой степенью разложения мы для точки B найдем $\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \delta t$. То же самое мы будем иметь для слагающей движение по оси Z . Вблизи точки A перемещение будет $w \delta t$, а вблизи C оно будет $\left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) \delta t$.

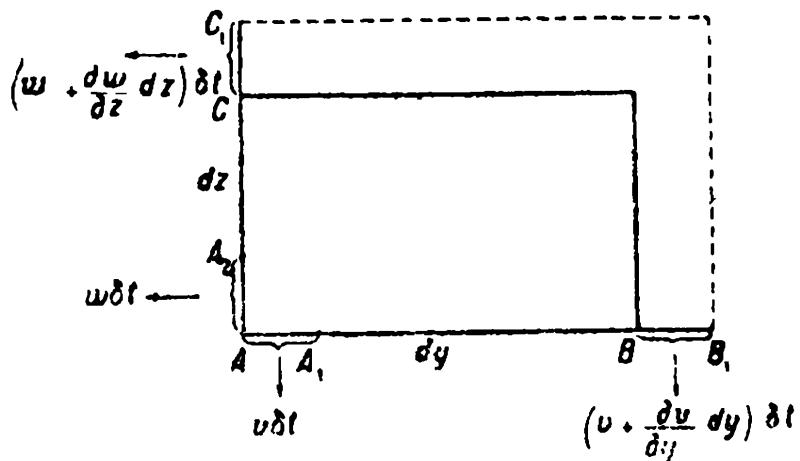


Рис. 96.

Итак, все трубы, которые располагались по длине dy , теперь расположатся по длине

$$dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \delta t - v \delta t = dy \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t \right). \quad (a)$$

Точно так же по оси Z , вместо длины dz , они будут занимать длину

$$dz \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t \right). \quad (b)$$

Итак, вместо площади $dy dz$ все трубы расположатся на площади

$$dy dz \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t \right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t \right) \approx dy dz \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t \right].$$

Мы откидываем здесь члены более высокого порядка, содержащие δt^2 .

Итак, изменение от этой причины значения D_x будет:

$$\frac{D_x dy dz}{dy dz \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t \right]} = D_x \left\{ 1 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t \right\},$$

и следовательно, величина изменения:

$$\delta_2 D_x = - D_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta t. \quad (c)$$

Переходим теперь к выяснению того изменения, которое получится при изменении наклона трубок. Наклон получается потому, что различные части трубы движутся с неодинаковой скоростью. Пусть в A (рис. 97) трубка движется со скоростью u и проходит путь $u\delta t$, а на расстоянии dy пусть перемещение равно $(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy)\delta t$. Тогда наклон определяется из условия: $\frac{\partial u}{\partial y} dy \delta t = dy \alpha$, или

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t. \quad (d)$$

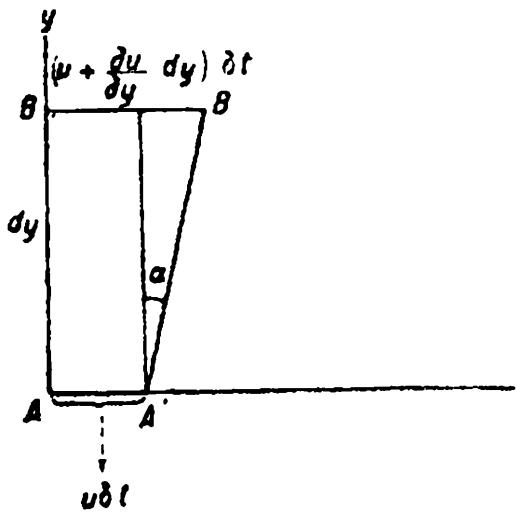


Рис. 97.

Вследствие этого те трубы, которые проходили через площадь $dx dz$ и которые не проходили через $dy dz$, пройдут теперь через $dy dz$ в доле, определяемой величиной $D_y \sin \alpha \approx D_y \alpha$. Если мы подсчитаем теперь аналогичное выражение для оси Z , то получим $D_z \beta$, где $\beta = \frac{\partial u}{\partial z} \delta t$. Итак, изменение, вызванное наклоном трубок:

$$\delta_3 D_x = \left(D_y \frac{\partial u}{\partial y} + D_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta t. \quad (6)$$

Подсчитаем теперь, какое получается общее изменение в числе трубок $D_x dy dz$ за время δt , причем мы все выражение разделим на $dy dz$ и δt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = - & \left(u \frac{\partial D_x}{\partial x} + v \frac{\partial D_x}{\partial y} + w \frac{\partial D_x}{\partial z} \right) - D_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & + D_y \frac{\partial u}{\partial y} + D_z \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Прибавим и вычтем в правой части $u \frac{\partial D_y}{\partial y}$ и $u \frac{\partial D_z}{\partial z}$, причем получающуюся величину — $u \operatorname{div} D$ перенесем в левую часть. Тогда (8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial t} + u \operatorname{div} D = & u \frac{\partial D_y}{\partial y} + D_y \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial D_z}{\partial z} + D_z \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial D_x}{\partial y} - D_x \frac{\partial v}{\partial y} - \\ & - D_x \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial D_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (uD_y) + \frac{\partial}{\partial z} (uD_z) - \frac{\partial}{\partial y} (vD_x) - \frac{\partial}{\partial z} (wD_z) = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} [uD_y - vD_x] - \frac{\partial}{\partial z} [wD_x - uD_z]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что выражения, стоящие в скобках, представляют собой слагающие векторного произведения $[w \cdot D]$. В самом деле,

$$[w \cdot D] = I (vD_z - wD_y) - J (wD_x - uD_z) + K (uD_y - vD_x),$$

а в (7) как раз и стоят слагающие по оси Z и Y . Введем обозначение

$$M = \frac{1}{c} [w \cdot D], \quad (9)$$

где c — скорость света, а также заменим $\operatorname{div} D$ через $4\pi r$.

Тогда (8) принимает вид:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi r}{c} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad (10)$$

т. е. первое уравнение первой группы уравнений Максвелля. Прежде всего, может возникнуть сомнение: почему мы выражение (9) приравняли напряжению магнитного поля?

Для того чтобы рассеять сомнения, предположим, что поле образовано движущимся заряженным шаром O (рис. 98), который переносит с собой заряд и связанные с ним фараадеевы трубки. Подсчитаем по (9) M для какой-либо точки поля A . Из чертежа ясно, что направление вектора M будет из-за плоскости чертежа вперед к читателю, а величина будет:

$$M = \frac{1}{c} \frac{e}{r^2} u \sin \theta, \quad (11)$$

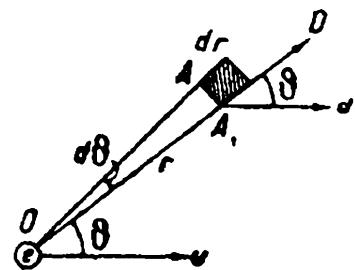


Рис. 98.

т. е. мы получаем здесь закон Био-Савара для движущегося заряда.

Это выражение можно преобразовать и привести к виду, совершенно тождественному с обычным выражением закона Био-Савара. В самом деле:

$$M = \frac{1}{c} \frac{e \frac{\Delta s}{\Delta t} \sin \theta}{r^2} = \frac{1}{c} \frac{\frac{e}{\Delta t} \cdot \Delta s \sin \theta}{r^2} = \frac{1}{c} \frac{J \Delta s \sin \theta}{r^2}. \quad (12)$$

Нетрудно, однако, сообразить, что (9) представляет собой формулировку, гораздо более общую, чем закон Био-Савара. Для того чтобы перейти к теории Максвелля, необходима была, как мы видели, гипотеза о том, что изменение вектора D , т. е. ток смещения, вызывает магнитное поле. Выражение же (9) показывает, что всякий раз и от какой бы причины трубки ни начали двигаться, — появляется магнитное поле, которое и является следствием движения фараадеевых трубок. Вот почему у Томсона за основу взяты трубы электрической индукции: покоящиеся трубы объясняют статическое поле; движущиеся дают начало магнитному полю, и следовательно, никаких новых специальных образований для объяснения магнитного поля не надо. Магнитное поле есть свойство, обусловленное движением фараадеевых трубок.

Далее, плотность тока проводимости представлена у нас в (10) как w , т. е. как количество электричества, переносимое в единицу времени через 1 квантиметр (со скоростью u). В таком виде плотность тока изображают в современной теории электронов. Любопытно, что

уравнение (10) было получено Томсоном задолго до формулировки теории электронов. Таким образом мы видим, что уравнения Максвелля (пока первая группа) могут быть истолкованы с помощью свойств движущихся фарадеевых трубок.

§ 2. Поле равномерно движущегося заряда. Понятие об электромагнитной массе.

Как мы видели в случае равномерно движущегося заряженного шарика, напряжение магнитного поля, подсчитанное по (9), принимает вид (11). Подсчитаем теперь плотность магнитной энергии $\frac{1}{8\pi} M^2$ (мы полагаем, что $\mu = 1$); вставляя сюда (11), мы находим:

$$u_m = \frac{1}{8\pi c^2} u^2 \frac{e^2}{r^4} \sin^2 \vartheta. \quad (13)$$

Для того чтобы определить энергию всего поля, надо (13) проинтегрировать по всему полю, а поле простирается от поверхности заряженного шара радиуса a (внутри поля равно нулю) до ∞ . Так как плотность зависит от угла ϑ , образуемого направлением r и направлением движения, то за элемент объема при интегрировании надо будет взять $d\tau = 2\pi r \sin \vartheta \cdot r d\vartheta \cdot dr$ (рис. 98). Итак, общая энергия поля:

$$U_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^2 e^2}{c^2} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{e^2 u^2}{3 a c^2}. \quad (14)$$

Мы видим, что магнитная энергия, наподобие кинетической, пропорциональна квадрату скорости. Пусть шар имеет массу m_0 , и пусть мы его хотим привести в движение со скоростью u . Какую для этого потребуется затратить энергию? Так как движущийся со скоростью u шар создает поле с магнитной энергией U_m , то, для того чтобы пустить шар со скоростью u , надо затратить энергию:

$$U = \frac{m_0 u^2}{2} + U_m = \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{e^2 u^2}{3 a c^2} = \frac{u^2}{2} \left(m_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{a c^2} \right). \quad (15)$$

Таким образом дело происходит так, как будто благодаря заряду e к телу присоединилась добавочная „электромагнитная“ масса:

$$m_{em} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{a c^2}. \quad (16)$$

Из опыта установлено, что для электрона $m_{em} = 8,96 \cdot 10^{-28} \text{ г}$, а так как из опытов Милликана известно, что $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ эл.-ст. единиц и $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$, то на основе (16) мы находим радиус:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(4,774)^2 \cdot 10^{-20}}{8,96 \cdot 10^{-28} 9 \cdot 10^{20}} = \\ &= 0,188 \cdot 10^{-12} = 1,88 \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \end{aligned} \quad (17)$$

Необходимо, однако, заметить, что согласно нашим предположениям заряд распределяется на шаре, как на проводнике, и кроме того, мы предполагали, что поле заряженного шарика переносится без всяких изменений, т. е. что движение не вызывает никаких перемен в поле. Что касается первого предположения, то оно, наверное, не имеет места для электрона. Что же касается второго, то оно верно для движений, при которых $\frac{u}{c}$ — малая величина. Так как m_{em} определена при малых скоростях, то это условие выполнено. Ввиду же того, что мы не знаем, как распределен заряд на электроне, у нас может быть несколько иной числовой фактор вместо $\frac{2}{3}$. Поэтому числовая величина (17) может считаться только ориентировочной.

Когда выражение электромагнитной массы было выведено Томсоном в 1881 г., в распоряжении физиков не было таких маленьких заряженных тел, для которых m_{em} имела сколько-нибудь доступную измерениям величину. В самом деле, радиус шара входит в знаменателе, — поэтому масса будет тем больше, чем при данном заряде радиус будет меньше. Только после открытия электрона вопрос об определении электромагнитной массы стал на реальную почву. Но тут оказалось, что для электрона вся масса является массой электромагнитной.

Этот результат был сформулирован следующим образом: масса электрона „кажущаяся“ — электромагнитная; материальная же масса электрона равна нулю. Следовательно, электрон не материален. А так как вся материя построена из электронов и положительных зарядов, то, стало быть, и материя нематериальна. Против этих „теорий“ в 1908 г. выступил Ленин в своей книге „Материализм и эмпириокритицизм“, причем в качестве материала для возражений идеалистическим течениям Ленин использовал книгу Томсона „Корпускулярная теория материи“, в которой изложена в доступной форме разбираемая нами сейчас теория. Однако, прежде чем приступить к выяснению этих важных методологических вопросов, познакомимся детальнее с вопросом об электромагнитной массе.

Прежде всего, выразим плотность магнитной энергии через соотношение (9):

$$U_m = \frac{1}{8\pi c^2} \{(vD_z - wD_y)^2 + (wD_x - uD_z)^2 + (uD_y - vD_x)^2\}. \quad (18)$$

Мы видим, что плотность магнитной энергии представляет собою однородную функцию второй степени от скоростей движения фарадесовых трубок и может быть принята как некоторая кинетическая энергия. Если мы теперь продифференцируем (18) по какой-либо из слагающих скоростей, мы получим количество движения; так, например, в простейшем случае, когда мы имеем для материальной точки

$$U_k = \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2),$$

то производная по u равна mu , т. е. количеству движения.

Дифференцируя (18) по u , получаем:

$$G_x = \frac{\partial U_m}{\partial u} = \frac{1}{4\pi c^2} \{ D_y(uD_y - vD_v) - D_z(wD_x - uD_z) \}, \quad (19)$$

или

$$G_x = \frac{1}{4\pi c^2} \{ D_y M_z - D_z M_y \} = \frac{1}{4\pi c} [DM]. \quad (19')$$

Если мы положим, что $\epsilon = 1$, то

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EM}]. \quad (19'')$$

Нетрудно установить связь между вектором \mathbf{G} , т. е. „электромагнитным количеством движения“, и вектором Пойнтинга

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [EM].$$

Действительно,

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}. \quad (19''')$$

Выражения (19') и (19'') позволяют в любом электромагнитном поле определить направление количества движения. В поле движущегося за-

ряда вследствие симметрии поля, как это ясно из рис. 99, слагающая количества движения для всего поля движущегося заряженного шара будет равна нулю для любого направления, перпендикулярного направлению движения, т. е. направлению скорости¹.

Таким образом нам необходимо вычислить только слагающую, параллельную скорости u , распространив интеграл на все поле. За элемент объема нам придется взять тот же самый объем, что и в предыдущем расчете.

Попрежнему находим (полагая $\epsilon = 1$):

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad M = \frac{1}{c} \frac{e}{r^2} u \sin \vartheta,$$

Рис. 99.

и кроме того,

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \frac{e^2}{r^4} u \sin \vartheta.$$

¹ Изложенная особенность представляет собой специфическое отличие электромагнитных явлений от классической механики.

В самом деле, вектор „электромагнитного количества движения“ \mathbf{G} не совпадает по направлению со скоростью. Если мы рассматриваем симметричное поле, то общее количество движения совпадает по направлению со скоростью. Таким образом в этих случаях различие с классической механикой пропадает. Однако в отдельных полях количество движения не совпадает по направлению со скоростью, чего, конечно, не бывает в обычных механических системах.

Так как нам нужна только слагающая по оси X , то для вычисления мы берем:

$$G_x = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{e^2}{r^4} u \sin^2 \vartheta.$$

Отсюда:

$$G_x = \frac{e^2 u}{4\pi c^2} \int_0^\pi d\vartheta \int_a^\infty \frac{\sin^2 \vartheta}{r^4} 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} u = m_{em} u. \quad (20)$$

Таким образом масса электрона или, вообще, движущегося заряда (электромагнитная) оказывается распределенной во всем поле вокруг заряда. Эту массу переносят с собой движущиеся фараадеевы трубы. Выражение „материальная масса электрона равна нулю“ означает, что вся движущаяся масса при движении электрона находится вокруг электрона и переносится фараадеевыми трубами. Нечто похожее имеет место, когда, например, пузырек воздуха или болотного газа поднимается со дна реки или пруда. Для того чтобы двигаться, пузырек должен приводить в движение окружающую воду, и масса этой движущейся вместе с пузырьком воды во много раз больше массы воздуха или газа, заключенного в пузырьке. Мы этот вопрос разберем в дальнейшем более подробно. Итак, масса электрона распределена во всем беспредельном пространстве, хотя, как мы увидим, подавляющая ее часть находится неподалеку от электрона. По этому поводу Томсон в своей „Корпускулярной теории материи“ пишет: „С нашей точки зрения каждая корпускула (Томсон называет электрон корпускулой), можно сказать, простирается на всю вселенную. Этот результат интересен в связи с догмой о том, что два тела не могут занимать одно и то же пространство“ (J. J. Thomson, The Corpuscular Theory of Matter, 1907, p. 341). Далее, интересно отметить, что в классической механике дело представляется так, что вся материя построена из материальных точек, имеющих малую массу и занимающих исчезающе малый объем. Физически же оказывается, что материя построена из электронов и протонов, которые являются мельчайшими, доступными нам при настоящем уровне науки, частицами; они-то и должны были играть роль физических „материальных точек“. И вот оказывается, что каждая такая „точка“ представляет собой систему фараадеевых трубок, простирающуюся теоретически на весь мир! Ясно, что наши обычные представления подвергаются крутой ломке и что те тела, движения которых мы хорошо изучили, на самом деле составлены не из материальных точек, а из сложных систем фараадеевых трубок, которые представляют собой электроны и протоны. Поэтому Ленин указывал, что выражение „материя исчезает“, „материя сводится к электричеству“ и т. п. есть лишь гносеологически беспомощное выражение той истины, что удается открыть новые формы материи, новые формы материального движения, свести старые формы к этим новым и т. д.

Посмотрим теперь, какая масса заключена во всем пространстве вне двойного радиуса заряженного тела ($2a$). Ясно, что в выражение для электромагнитной массы надо будет вместо a подставить $2a$, так как интегрирование надо теперь произвести не от a до ∞ , а от $2a$ до ∞ . Отсюда:

ла искомая масса оказывается равной $\frac{m_{em}}{2}$. Таким образом половина всей массы будет заключена в шаровом слое с радиусами a и $2a$. Посмотрим, какова будет плотность Δ :

$$\Delta = \frac{\frac{m_{em}}{2}}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{4,48 \cdot 10^{-28}}{194,8 \cdot 10^{-39}} \approx 2,3 \cdot 10^9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

т. е. получается плотность в сто миллионов с лишним раз больше, чем плотность платины. Другими словами, 1 куб. сантиметр вещества такой плотности будет заключать в себе массу в 2,3 т. Если верны расчеты астрономов для плотности спутника Сириуса и других карликовых звезд того же типа, дающих цифры 53 кг, то, повидимому, ядра протонов и электронов в этой звезде должны быть расположены гораздо ближе друг к другу, чем это имеет место в наиболее плотных из известных нам форм материи.

Рассмотрим теперь несколько детальнее выражение для количества движения в рассмотренном нами случае поля равномерно движущегося заряженного шара. Пусть для простоты расчетов попрежнему $\epsilon = 1$. Тогда для „плотности“ количества движения мы получим:

$$g = \frac{1}{4\pi c^2} E^2 \sin \vartheta u . \quad (21)$$

Если трубка движется перпендикулярно своей длине, то

$$g_0 = \frac{1}{4\pi c^2} E^2 u . \quad (21')$$

Если же трубка движется параллельно своей длине, то $\vartheta = 0$ и

$$g = 0. \quad (21'')$$

Томсон следующим образом поясняет подобное распределение количества движения в электромагнитном поле. „Это есть в точности то количество движения, которое появилось бы, если бы трубки, двигаясь под прямым углом к своей длине, увлекали с собой из окружающей среды массу, равную $\frac{E^2}{4\pi c^2}$ на единицу объема, причем сами трубки совсем не обладали бы массой и не увлекали с собой массы из среды, когда они скользят параллельно своей длине. Предположим, в самом деле, что трубки ведут себя приблизительно так же, как длинные, узкие цилиндры, движущиеся в воде; последние, двигаясь концами вперед, т. е. параллельно своей длине, увлекают очень малое количество воды, тогда как при боковом движении, т. е. перпендикулярно оси, каждая единица длины трубки увлекает с собой некоторую конечную массу воды. Когда длина цилиндра очень велика сравнительно с его шириной, то можно массой воды, увлекаемой им при движении концом вперед, пренебречь в сравнении с той, которая увлекается им при движе-

ний под прямым углом к его оси. Если трубка не имеет другой массы кроме той, которую она получает вследствие смещения воды, то она будет иметь массу только при движении в сторону, но не при движении концом вперед".

Массу

$$m = \frac{E^2}{4\pi c^2}, \quad (22)$$

увлекаемую трубками в единице объема, Томсон называет „массой связанного эфира“. Вводя в (22) выражение $U_e = \frac{E^2}{8\pi}$ „плотности“ электрической энергии, мы находим:

$$m = \frac{2U_e}{c^2}, \quad (23)$$

т. е. „массу“, связанную с энергией U_e . Эта формула обычно приписывается Эйнштейну, хотя она непосредственно вытекает из работ Томсона, опубликованных в 1881 г. В тех случаях, когда $U_e = U_m$, например в электромагнитной волне, выражение (23) принимает вид обычной формулы Эйнштейна:

$$m = \frac{U_{em}}{c^2} = \frac{U_e + U_m}{c^2}. \quad (23')$$

В толковании Томсона массу энергии надо понимать так, что с определенной энергией связана определенная масса связанного эфира, так что энергия есть свойство определенным образом движущейся материи, какова бы ни была форма этой материи.

Но из (22) вытекает еще один важный результат: величина E пропорциональна числу трубок, проходящих через 1 кв. сантиметр, масса же связанного ими эфира пропорциональна квадрату этого числа. Таким образом масса зависит от густоты расположения трубок и не является простой арифметической суммой. Этот результат имеет громадное значение в теории строения вещества. Как известно, камнем преткновения для теории, согласно которой все виды атомов построены из электронов и протонов, было отсутствие целых чисел в отношениях между атомными весами. Правда, сравнительно недавно еще казалось, что с открытием изотопов вопрос решили окончательно: именно, отдельные изотопы подчинялись, казалось, правилу целых чисел. Однако недавние измерения Астона показали, что это не так и что в ядрах, различным образом построенных, протон имеет слегка отличную массу по сравнению с массой единственных протонов. С точки зрения теории Томсона это понятно: при различном распределении трубок связанная с ними масса должна быть различной.

§ 3. Истолкование второй группы уравнений Максвелля.

Остановим наше внимание сначала на выяснении понятия „смещения“ у Максвелля. Если мы потенциальную энергию для колеблющегося тела,

равную $\frac{a^2 x^2}{2}$, продифференцируем по величине смещения x , то мы получим количественное выражение для силы $a^2 x$. Если мы введем вместо вектора D связанный с ним вектор

$$\mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}}{4\pi} \quad (24)$$

в выражении для плотности энергии $U_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$, то, как нетрудно показать, этот вектор будет играть ту же роль, как и величина смещения в выражении потенциальной энергии. В самом деле:

$$U_e = \frac{2\pi}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon^2 E^2}{16\pi^2} = \frac{2\pi}{\epsilon} D'^2. \quad (25)$$

Если мы продифференцируем по D' величину U_e , то мы получаем напряжение поля, играющее ту же роль, что и сила в обычной механике:

$$\frac{\partial U_e}{\partial D'} = \frac{4\pi}{\epsilon} D' = \frac{4\pi}{\epsilon} \cdot \frac{D}{4\pi} = E. \quad (26)$$

Так как величина смещения входит в выражение магнитной энергии, то производная по смещению магнитной энергии должна дать то электрическое поле, которое обусловлено движением трубок, т. е. мы получаем, таким образом, поле индукции.

Вводим D' в выражение магнитной энергии:

$$U_m = \frac{2\pi}{c^2} \{ (vD_z' - wD_y')^2 + (wD_x' - uD_z')^2 + (uD_y' - vD_x')^2 \}. \quad (27)$$

Составляем производную по D'_x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial D'_x} &= E_{lx} = \frac{4\pi}{c^2} \{ w(wD_x' - uD_z') - v(uD_y' - vD_x') \} = \\ &= \frac{1}{c} (wM_y - vM_z) = \frac{1}{2} [\mathbf{Mv}]_x. \end{aligned} \quad (28)$$

Итак, поле, вызванное индукцией:

$$\mathbf{E}_l = \frac{1}{c} [\mathbf{Mv}]. \quad (28')$$

Составим теперь выражение для $\text{rot } \mathbf{E}_l$. Мы можем, конечно, ограничиться одной слагающей по оси X :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{lx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ly}}{\partial z} &= \frac{1}{c} \left\{ v \frac{\partial M_x}{\partial y} + M_x \frac{\partial v}{\partial y} - u \frac{\partial M_y}{\partial y} - M_y \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial M_z}{\partial z} - \right. \\ &\quad \left. - M_z \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial M_x}{\partial z} + M_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = \frac{1}{c} \left\{ -u \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + w \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(u \frac{\partial M_x}{\partial x} + v \frac{\partial M_x}{\partial y} + w \frac{\partial M_x}{\partial z} \right) + M_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ - \left(M_y \frac{\partial u}{\partial y} + M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \} .$$

Мы прибавили и вычли в последней строке $u \frac{\partial M_x}{\partial x}$. Первые три члена дают нуль, так как $\operatorname{div} M = 0$, последние три группы членов построены совершенно так, как было построено $\frac{\partial D_x}{\partial t}$ (§ 1), только знак у нас противоположный. Мы можем здесь приложить рассмотренное в § 1 преобразование, так как магнитное поле обусловлено теми же трубками, какими обусловлено и D . Поэтому мы находим:

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial t} = \frac{\partial E_{tx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ty}}{\partial z}. \quad (29)$$

Так как электростатическое поле выводится всегда из потенциала и, стало быть, E_s — потенциальный вектор и его вращение всегда равно нулю, поэтому можно к E_t прибавить E_s и написать в первой части вращения от общего поля:

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (30)$$

Таким образом и вторая группа уравнений истолковывается движением фарадеевых трубок.

§ 4. Изменение массы со скоростью.

Рассмотрим теперь случай движения заряженного шара со скоростью, сравнимой со скоростью света. Пусть шар движется по оси X . Составим, прежде всего, слагающие напряжения магнитного поля $M = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$, причем $\frac{u}{c}$ положим равным β . Далее, с помощью найденных значений M_y и M_z , составим из (28) выражение E_t . Получим следующую таблицу:

$$\left. \begin{array}{l} M_x = 0, \quad E_{tx} = 0, \\ M_y = -\beta E_z, \quad E_{ty} = \beta^2 E_y, \\ M_z = \beta E_y, \quad E_{tz} = \beta^2 E_z. \end{array} \right\} \quad (31)$$

Из табл. 31 ясно, что, когда β — величина малая и когда β^2 можно пренебречь, все электрическое поле обусловлено статическими зарядами; движение на нем не оказывается. Поэтому мы были в праве в § 2 считать, что поле переносится заряженным шаром в том виде, в каком оно было, когда шар не двигался.

Общее поле E_x , E_y , E_z составится из суммы E_x , E_y и E_z и E_{tx} и т. д., причем статическое поле можно представить как $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $-\frac{\partial \psi}{\partial y}$.

и $-\frac{\partial\psi}{\partial z}$. В членах, содержащих множитель β^2 , мы E_y и E_z заменим через близкие им величины E_{y1} и E_{z1} . Решая относительно E_{y1} и т. д. и опуская индекс, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ E_{y1} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \beta^2 E_{1y}, \\ E_{z1} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta^2 E_{1z}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ E_{y1} &= -\frac{1}{1-\beta^2} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ E_{z1} &= -\frac{1}{1-\beta^2} \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Далее, вне заряженного шара, так как там нет зарядов, мы имеем: $\operatorname{div} E = 0$, откуда после простого преобразования:

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (34)$$

Уравнение (34) определяет потенциальную функцию для нашей движущейся системы. Функция ψ носит название „конвекционного“ потенциала. Оказывается, что с помощью простого преобразования

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

можно уравнение (34) „свести“ к обыкновенному уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$.

В самом деле:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Поэтому, после преобразования, мы получаем:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2} = 0. \quad (34')$$

Простейшее решение (34'), как нетрудно показать, будет:

$$\psi = \frac{A}{r'} = \frac{A}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad (35)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{A}{r'^3} x' \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{A}{r'^3} y', \\ -\frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{A}{r'^3}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Далее, вставляем (35) и (36) в (33) и переходим к старым координатам x , y и z :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{A}{1-\beta^2} \frac{x}{\left(\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ E_y &= -\frac{1}{1-\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{A}{1-\beta^2} \frac{y}{\left(\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ E_z &= -\frac{1}{1-\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{A}{1-\beta^2} \frac{z}{\left(\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (36')$$

На основании (36) заключаем, что

$$E_x : E_y : E_z = x : y : z,$$

т. е. что фарадеевы трубы располагаются по радиусам, так как ведь x , y и z — проекции на оси координат радиуса-вектора r . Возведем (36') в квадрат, складываем и извлекаем корень. Тогда получаем величину напряжения поля E_r .

Заменяя в (36') $x = r \cos \vartheta$ (рис. 100), мы после легких преобразований находим:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{A}{1-\beta^2} \frac{r}{\left(\frac{x^2}{1-\beta^2} - x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ E_r &= \frac{A}{1-\beta^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \cos^2 \vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (37)$$

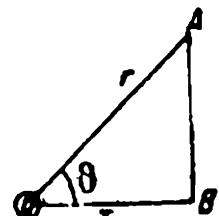


Рис. 100.

Если $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, т. е. если мы рассматриваем экваториальную плоскость (за полюсы шара мы считаем точки пересечения шара с осью X , по которой происходит движение), то мы получаем максимальное значение для $E_r = \frac{A}{1-\beta^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, а это значит, что в экваториальной плоскости

фарадеевы трубы будут расположены гуще. При $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$ мы будем иметь минимальное значение для E_r , именно:

$$E_r = \frac{A}{1-\beta^2} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{r^2} \sqrt{1-\beta^2}, \quad (37')$$

причем различие между наибольшим и наименьшим значением будет тем больше, чем ближе β к единице. Случай $\beta = 1$ требует особого исследования. Рассмотренный нами метод исследования для этого случая не годится. Итак, результат получается следующий. По мере увеличения скорости фарадеевы трубы, сначала равномерно распределенные, сохраняя радиальное направление, скучиваются в экваториальную плоскость. Отсюда мы сейчас же выводим заключение о том, как изменяется масса. В самом деле, при малой скорости трубы были расположены равномерно по всем направлениям. По мере же увеличения скорости, все большая и большая их часть собирается в экваториальной области. Так как масса связанного эфира пропорциональна E^2 , т. е. квадрату числа трубок, приходящихся на единицу площади, расположенной перпендикулярно направлению трубок, то масса должна возрастать со скоростью. Это изменение массы со скоростью было подтверждено впервые на опыте Кауфманом в 1902 г. Вычислив на основании найденных нами выражений (36) магнитное поле и магнитную энергию во всем поле движущегося заряженного шара, Томсон нашел следующее выражение для изменения массы со скоростью:

$$m = \frac{e^2}{a} \frac{1}{\beta \sqrt{1-\beta}} \left\{ \vartheta \left(1 - \frac{1}{4\beta^2} \right) + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \left(1 - \frac{\cos 2\vartheta}{4\beta^2} \right) \right\}, \quad (38)$$

где

$$\vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В следующей таблице приведено сравнение результатов вычисления по (38) с данными опытов Кауфмана:

Таблица I.

Скорость электрона	Наблюдаемое отношение массы к массе медленно движущегося электрона	Вычисленное значение отношения
$2,85 \cdot 10^{10}$ см/сек	3,09	3,10
$2,72 \cdot 10^{10}$ "	2,43	2,42
$2,59 \cdot 10^{10}$ "	2,04	2,0
$2,48 \cdot 10^{10}$ "	1,83	1,66
$2,36 \cdot 10^{10}$ "	1,65	1,50

Надо заметить, что выражение для электромагнитной массы, а также и закон изменения массы со скоростью, зависит от того, как мы представляем себе распределение зарядов в самом электроне. До настоящего времени, к сожалению, нет еще тщательно сделанных измерений для быстро движущихся β -частиц радия, а между тем, только в этих областях скоростей выступают во всей силе различия в законах изменения массы со скоростью, построенных на основе различных предположений. Так, например, в работах Ги и Леванши, которые многими физиками считаются как решающие вопрос окончательно, кривая изменения массы со скоростью прослежена только до $\beta = 0,5$, а между тем, быстрое изменение массы со скоростью начинается как раз за этой областью в сторону более высоких значений β . Таким образом мы не имеем еще данных для решения вопроса о том, по какому закону изменяется масса со скоростью. Из полученного нами вывода, показывающего, что фарадеевы трубы, при увеличении скорости движения заряженного тела, собираются в экваториальную область, вытекает еще одно важное следствие. Представим себе, что на быстро движущееся заряженное тело, у которого трубы уже в заметной степени собрались в экваториальной области, подействует какая-нибудь сила в направлении DC (рис. 101) под прямым углом к направлению его движения. Какую массу „связанного“ эфира возьмет собой наша система в этом новом движении? Из сказанного ясно, что масса должна быть меньше той, которую мы нашли при движении по оси X с данной скоростью, потому что при новом „поперечном“ движении фарадеевы трубы будут двигаться почти параллельно своей длине, а тогда количество увлекаемого ими эфира будет значительно меньше. Таким образом для быстрых движений мы должны различать между „продольной“ и „поперечной“ массой. Посмотрим, как характеризует эти особенности электромагнитной механики Томсон в своей книге „Корпускулярная теория материи“. „Область, в которой происходит возрастание массы, находится не в самом наэлектризованном теле, а в окружающем пространстве, так, как если бы эфир был приведен в движение силовыми линиями, идущими от заряженного тела, а возрастание массы заряженного тела было бы обусловлено массой эфира, приведенного в движение силовыми линиями“ (стр. 29). „Мы сейчас покажем, что это именно так. Действительно, корпускулы не имеют никакой другой массы: вся масса их — электрическая“ (стр. 30). „Итак, если значительная часть массы корпускулы электрического происхождения, масса быстро движущейся корпускулы будет больше, чем у медленно движущейся, в то время как если бы масса была, в основном, механическая, то она была бы независима от скорости“ (стр. 32). Посмотрим теперь, как оценивал эти результаты Ленин. „Как ни диковинно с точки зрения „здравого смысла“ превращение невесомого эфира

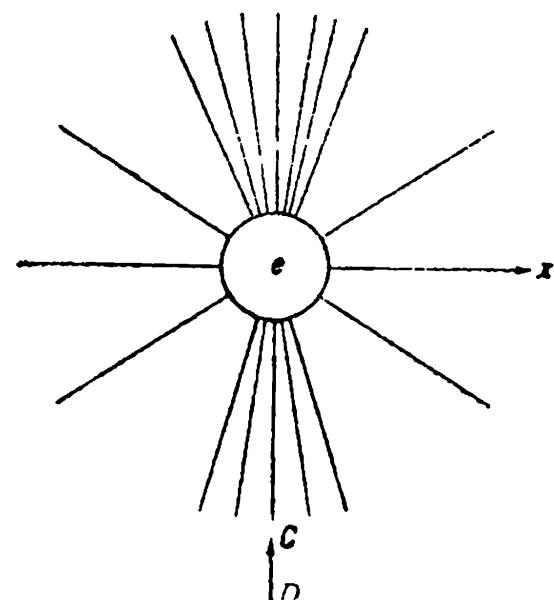


Рис. 101.

в весомую материю и обратно, как ни „странно“ отсутствие у электрона всякой иной массы кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее подтверждение диалектического материализма“ (Ленин, т. X, стр. 219). Почему Ленин считает, что все эти исследования — лишнее подтверждение диалектического материализма? Потому, что вся эта теория изучает новые формы материи и новые формы движения, представляющие отражения вне нас существующей реальности, как бы эти формы ни отличались от „привычных“ нам форм, а не ведет речь, как это делает современная формальная физика, об энергии и поле без всяких материальных носителей, „локализующихся, так сказать, в пустоте“.

Глава II.

Некоторые приложения теории Томсона.

§ 1. Вывод выражения силы, действующей на элемент тока в магнитном поле.

Рассмотрим, как распределяется электромагнитное количество движения в поле, состоящем из электрического заряда e и магнитного „полюса“ m . Пусть в O (рис. 102) находится магнитный полюс, а в O_1 — заряд e . Расстояние $OO_1 = a$. Определяем для какой-нибудь точки поля, скажем, A , величины напряжений электрического и магнитного поля и определяем величину электромагнитного

$$\text{количества движения } G = \frac{1}{4\pi c} [\text{ЕМ}].$$

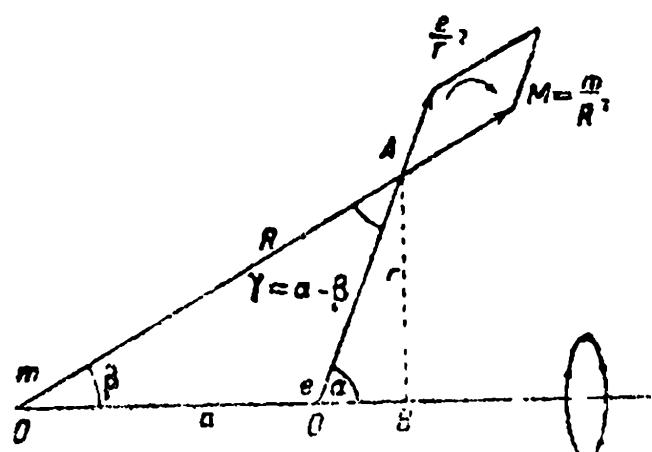


Рис. 102.

в результате получим нуль. Зато, чаем конечную величину момента количества движения по отношению к оси OO_1 . Возьмем за начало координат O_1 , тогда момент количества движения для элемента объема $2\pi r \sin \alpha dr da dr$ будет следующий:

$$dL = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{e}{r^2} \cdot \frac{m}{R^2} \sin \gamma r \sin \alpha 2\pi r \sin \alpha dr da dr = \frac{ema}{2c} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{R^3} da dr. \quad (39)$$

В этом выражении использовано известное соотношение: $\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin \gamma}{a}$,

из $\triangle OO_1A$.

Для того чтобы найти L , надо проинтегрировать по α от 0 до π и по r от 0 до ∞ .

Разбиваем второй интеграл на две части: от 0 до a и от a до ∞ . Необходимость этого выяснится особенно ясно после введения новых переменных. Итак:

$$L = \frac{em}{2c} \int_0^a ar dr \int_0^\pi \frac{\sin^3 \alpha}{R^3} d\alpha + \frac{em}{2c} \int_a^\infty ar dr \int_a^\pi \frac{\sin^3 \alpha}{R^3} d\alpha. \quad (40)$$

Вместо α вводим в качестве переменной интеграции R , исходя из
 $R^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \alpha$. (a)

Из (a) находим:

$$R dR = -ar \sin \alpha d\alpha, \quad (b)$$

а также

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{[R^2 - (a^2 + r^2)]^2}{4a^2r^2}. \quad (c)$$

Пределы для R находим из (a): при $\alpha = 0$ для R имеем $R = a + r$, при $\alpha = \pi$ имеем для R или $a - r$ или $r - a$; так как R должно быть величиной положительной, то для точек, для которых $r < a$, т. е. для первого из интегралов (40), надо взять в качестве верхнего предела $a - r$; для второго же из интегралов берем $r - a$. Итак, (40) после преобразования принимает вид:

$$L = -\frac{em}{2c} \int_0^a dr \int_{a+r}^{a-r} \frac{dR}{R^2} \left\{ 1 - \frac{[R^2 - (a^2 + r^2)]^2}{4a^2r^2} \right\} - \\ - \frac{em}{2c} \int_a^\infty dr \int_{a+r}^{r-a} \frac{dR}{R^2} \left\{ 1 - \frac{[R^2 - (a^2 + r^2)]^2}{4a^2r^2} \right\}. \quad (40')$$

Раскрываем скобки в подинтегральной функции интеграла по dR :

$$\left[-\frac{(a^2 - r^2)^2}{4a^2r^2} \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{R^2}{4a^2r^2} + \frac{2(a^2 + r^2)}{4a^2r^2} \right] \cdot dR,$$

что после интегрирования дает:

$$\frac{(a^2 - r^2)^2}{4a^2r^2} \cdot \frac{1}{R} - \frac{R^2}{12a^2r^2} + \frac{2(a^2 + r^2)}{4a^2r^2} R. \quad (d)$$

Для первого из интегралов (40') подставляем пределы $a + r$ и $a - r$, для второго $a + r$ и $r - a$. В результате несложных преобразований имеем: для первого интеграла $-\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{a^2}$ и для второго $-\frac{4}{3} \cdot \frac{a}{r^2}$. Умножая на dr и интегрируя первое выражение в пределах от 0 до a и второе от a до ∞ , умножая на $-\frac{em}{2c}$ и складывая, находим:

$$L = \frac{em}{c}. \quad (41)$$

Представим себе, что заряженное тело e из O_1 передвинулось на бесконечно малое расстояние $u dt$ в A (рис. 103). Тогда момент электромагнитного количества движения попрежнему остается по величине равным $L = \frac{em}{c}$, но направление его изменилось: вектор будет направлен теперь по AO (рис. 103). Следовательно, момент L получил приращение dL . Так как во всей системе момент количества движения измениться не может, то должно произойти для заряженного тела e противоположное изменение момента dL_1 , численно равное dL (полюс мы предполагаем неподвижным).

Если угол поворота β мал, то

$$dL_1 = dL = \frac{em}{c} \beta. \quad (42)$$

С другой стороны,

$$AA_1 = u dt \sin \vartheta \approx OO_1 \beta, \quad (43)$$

откуда, вставив β в (42), находим:

$$dL = \frac{em}{c} \cdot \frac{u dt \cdot \sin \vartheta}{OO_1}. \quad (42')$$

Далее, момент $dL = OO_1 \cdot dG$, где dG — количество движения заряженного тела e , направленное за плоскость чертежа. Итак,

$$\frac{dG}{dt} = \frac{em}{c} \frac{u \sin \vartheta}{OO_1^2} = \frac{euM \sin \vartheta}{c} = F,$$

или

$$\frac{e}{c} [Mv] = F, \quad (43')$$

где F — сила, приложенная к заряженному телу, так как $\frac{dg}{dt}$, прирост

количества движения в единицу времени, есть сила, а M — напряжение

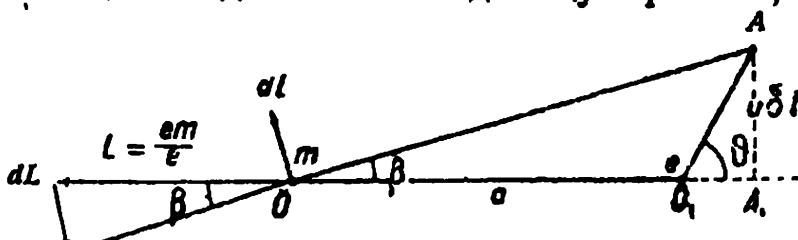


Рис. 103.

количества движения в данном поле будет такое же, как в системе с вращающимся гироскопом (рис. 104). Роль заряда играет груз A . Если при указанном на рисунке направлении вращения переместить груз по u , то груз будет отброшен по направлению F . На рис. 103 нетрудно проверить направление электромагнитной силы при помощи правила трех пальцев левой руки. Томсон на ряде примеров показал, как целый ряд сложнейших задач можно очень просто решить с помощью вычисления момента электромагнитного количества движения. Приведем только один

магнитного поля в точке, где находится заряд. Совершенно ясно, что (43') есть обычное выражение для электромагнитной силы, действующей на движущееся заряженное тело (элемент тока) в магнитном поле. Распределение

случай. Пусть мы имеем проводящий шар и в центре его B (рис. 105) магнитный полюс. На расстоянии AB от центра пусть расположен заряд $+e$. Тогда на изолированном шаре распределяются наведенные заряды так, как будто в некоторой точке C внутри шара находился отрицательный заряд $-e$ (как найти положение C и величину e , мы увидим в одной из следующих глав, см. метод электрических изображений). Вычисления, аналогичные тем, какие были нами проделаны, дают:

$$L = \frac{em}{c} \left\{ 1 - \frac{a^2}{AB^2} \right\}. \quad (\text{A})$$

Теперь предположим, что заряд приближается или удаляется от проводящего шара. Тогда, обозначая $\frac{dAB}{dt} = u$, мы находим:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2em}{c} \cdot \frac{a^2}{AB^3} u. \quad (\text{B})$$

Раз электромагнитный момент изменяется, и раз общий момент изменяться не может, то должна произойти полная компенсация изменения (B).

Эта компенсация выражается в том, что проводящий шар поворачивается вокруг оси AB . Почему происходит этот поворот? Если заряд e приближается к шару, то на поверхности шара произойдут перемещения зарядов по меридианам (линия AB — линия полюсов). Мы получим систему „токов“, которые находятся в магнитном поле. Электромагнитная сила будет направлена по „параллелям“, — эти силы и вызывают вращение.

Но поставим себе вопрос: насколько сложнее

было бы вычисление этого момента, если бы мы пошли прямым путем: вычислили бы перемещения зарядов и подсчитали результирующий момент вращения? Таким же путем Томсон решает целый ряд сложнейших вопросов.

§ 2. Вывод формулы Лармора.

Предположим, что двигавшийся равномерно со скоростью v заряд внезапно затормозился в точке O (рис. 106). Пусть движение было настолько медленно, что фарадеевы трубы распределялись равномерно во все стороны. Пусть начало торможения произошло в момент $t=0$, а

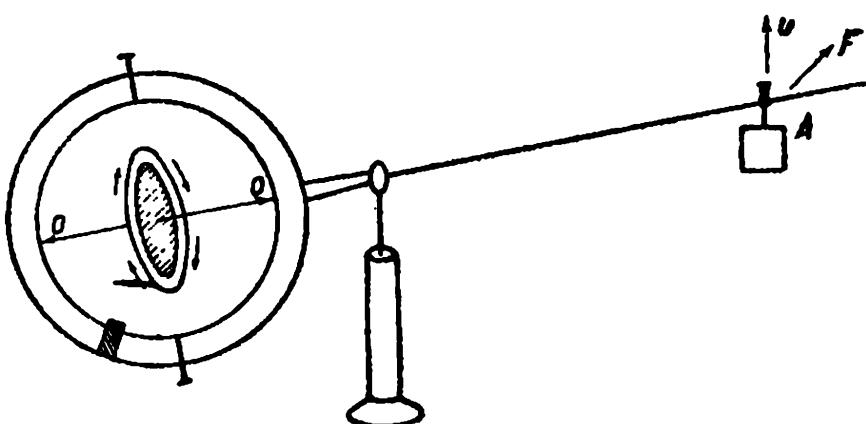


Рис. 104.

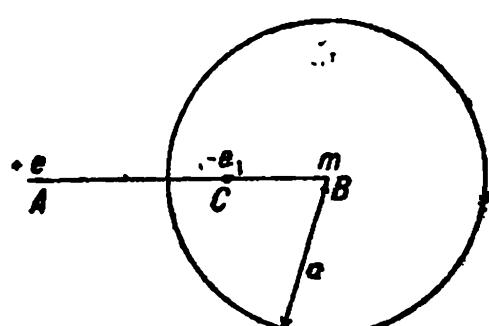


Рис. 105.

закончилось оно к моменту $t = \tau$, и пусть за время τ заряд заметным образом не передвинулся. Поэтому можно сказать, что торможение произошло в точке O . Построим для момента времени t_1 две шаровых поверхности с радиусами $c(t_1 - \tau)$ и ct_1 . Так как всякие возмущения бегут вдоль фарадеевых трубок со скоростью c , то вне шара ct_1 фарадеевы трубы двигаются так, как будто заряд не затормозился: они будут расходиться лучами из точки O_1 , куда переместился бы заряд, двигаясь со скоростью v ; отсюда $OO_1 = vt_1$. Далее, внутри шара $c(t_1 - \tau)$ все обстоит так, как будто заряд был неподвижен. Возмущение, соответствующее моменту окончания торможения, успело уже дойти до поверхности шара радиуса $c(t_1 - \tau)$. Ясно, что фарадеевые трубы должны изогнуться в области между A и B , и следовательно, должна появиться тангенциальная

слагающая напряжения поля E , которая будет перемещаться со скоростью света вдоль фарадеевой трубы. Отношение между нормальной слагающей E_N и E_τ получается из ΔACB . В самом деле,

$$E_\tau : E_N = CB : AC = \frac{vt_1 \sin \vartheta}{ct}. \text{ Отсюда:}$$

$$E_\tau = \frac{e}{r^2} \frac{vt_1 \sin \vartheta}{ct}. \quad (44)$$

(Ввиду малости ΔACB мы положим $CB \approx O_1 D = OO_1 \sin \vartheta$.) Так как изгибы трубок двигаются со скоростью c и направление движения перпендикулярно E_τ , то соответствующая E_τ величина: $M_\tau = E_\tau$, как это следует из того, что $M = \frac{l}{c} [c E]$.

Вектор Пойнгинга в данном случае получает следующее выражение:

$$P = \frac{c}{4\pi} [E_\tau \cdot M_\tau] = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{r^4} \cdot \frac{v^2 t_1^2 \sin^2 \vartheta}{c^2 \tau^2}. \quad (45)$$

Для подсчета всего потока энергии умножаем (45) на элемент поверхности $2\pi r \sin \vartheta \cdot r d\vartheta$ и интегрируем от 0 до π , заменяя в знаменателе $r^2 = c^2 t_1^2$:

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{e^2 v^2}{2c^3} \cdot \frac{s}{\tau^2} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \left(\frac{v}{\tau} \right)^2. \quad (46)$$

Выражение (46) представляет собой количество энергии, излучаемой в единицу времени. Далее, $\frac{v}{\tau}$ представляет собою среднее замедление (отрицательное ускорение). Обозначая его через g , мы получаем известную формулу Лармора:

$$U_{rm}' = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} g^2, \quad (46')$$

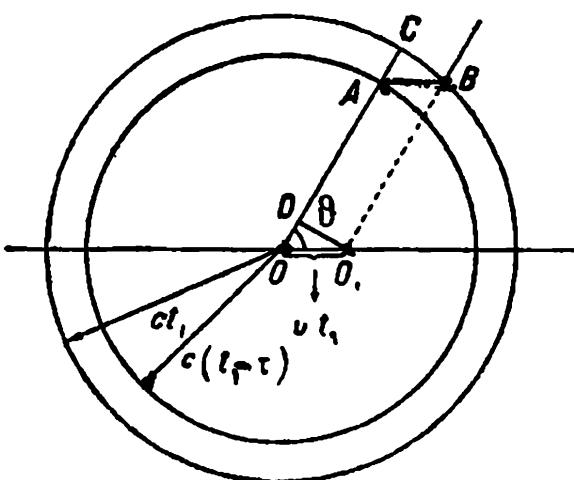


Рис. 106.

представляющую собою излучаемую в единицу времени энергию, в зависимости от ускорения движущегося заряда.

§ 3. О натяжениях Максвелля.

Пусть электрический заряд движется в электрическом и магнитном поле. Тогда сила, рассчитанная на единицу объема, согласно (43'), будет иметь вид:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} [\mathbf{M}] . \quad (47)$$

Чтобы преобразовать это выражение, рассмотрим сначала следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_x \operatorname{div} \mathbf{E} - [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) . \end{aligned} \quad (a)$$

Точно так же:

$$\begin{aligned} M_x \operatorname{div} \mathbf{M} - [\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (M_x^2 - M_y^2 - M_z^2) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (M_x M_y) + \frac{\partial}{\partial z} (M_x M_z) . \end{aligned} \quad (a')$$

С другой стороны:

$$E_x \operatorname{div} \mathbf{E} - [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]_x = E_x 4\pi\rho + \frac{1}{c} \left[E \frac{\partial M}{\partial t} \right]_x \quad (b)$$

и также:

$$M_x \operatorname{div} \mathbf{M} - [\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}]_x = -\frac{1}{c} \left[M \frac{\partial E}{\partial t} \right]_x - \frac{4\pi}{c} [M \rho v]_x . \quad (b')$$

Вводим следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + M_x^2 - M_y^2 - M_z^2), \\ X_y &= \frac{1}{8\pi} (2E_x E_y + 2M_x M_y), \\ X_z &= \frac{1}{8\pi} (2E_x E_z + 2M_x M_z). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Вводя эти обозначения в сумму (a) и (a') и принимая во внимание (b) и (b'), мы находим:

$$F_x = E_x \rho + \frac{\rho}{c} [v M]_x = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \mathbf{M}]_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} . \quad (49)$$

Таким образом мы получили иное выражение для слагающей по оси X силы. Пусть заряды расположены в объеме τ (рис. 107). Тогда общая слагающая равнодействующей по оси X будет:

$$F_x = \int_{\tau} F_x d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{P_x}{c^2} d\tau + \int \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau. \quad (50)$$

Предположим, что процесс или стационарный или периодический; тогда первый член правой части исчезает, и мы имеем:

$$\begin{aligned} F_{x1} &= \int \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau = \\ &= \int_s (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz) dS. \end{aligned} \quad (50')$$

Итак, равнодействующая сил, приложенных к зарядам, заключенным

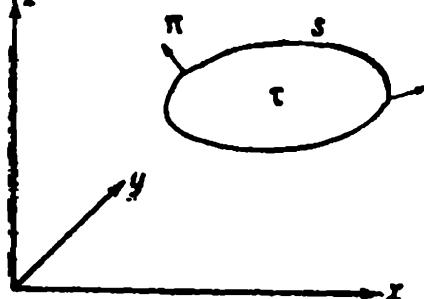


Рис. 107.

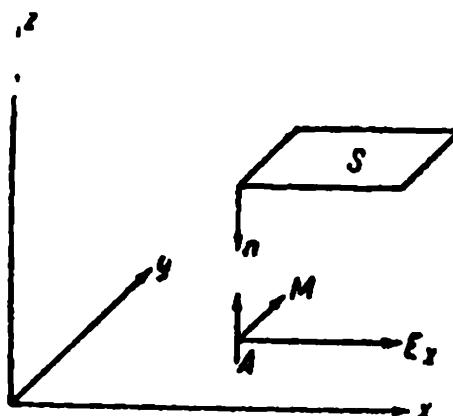


Рис. 108.

в объеме τ , приводится к равнодействующей сил давления на поверхность S , окружающую объем τ .

На основании (50') и (48) слагающая давления p на 1 см² поверхности и параллельная оси X имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{8\pi} \{ [E_x^2 - E_y^2 - E_z^2] \cos nx + 2E_x E_y \cos ny + 2E_x E_z \cos nz + \\ &+ [M_x^2 - M_y^2 - M_z^2] \cos nx + 2M_x M_y \cos ny + 2M_x M_z \cos nz \}, \end{aligned} \quad (51)$$

или, вообще,

$$p = \frac{1}{8\pi} (2EE_n + 2MM_n - nE^2 - nM^2), \quad (51')$$

где n — единичный вектор, направленный по нормали.

Пусть падает плоская волна на элемент поверхности S (рис. 108). В данном случае (рис. 108) n , т. е. единичный вектор по нормали, равен $-k$ — единичному вектору по оси Z с обратным знаком. Тогда имеем:

$\frac{1}{8\pi} k \{E^2 + M^2\} = p_z$, т. е. мы получаем давление, пропорциональное плотности энергии. Это давление лучистой энергии было выведено впервые Максвеллом, а на опыте обнаружено покойным проф. П. Н. Лебедевым в 1901 г., а в следующем году — Никольсом и Гуллем в Америке.

Лебедев действительно показал, что давление p численно равно плотности энергии или количеству энергии U_{em} , падающей на 1 см² в течение одной секунды и деленной на скорость света c . Ведь, в самом деле, энергия, падающая в 1 сек. на 1 см², находится в объеме призмы высотою c . Поэтому плотность энергии будет $\frac{U_{em}}{c}$. Заметим мимоходом, что давление есть количество движения, сообщаемое в единицу времени, и так как лучистая энергия движется со скоростью света, то естественно это количество движения выразить через mc . Приравнивая эту величину $p = \frac{U_{em}}{c}$, мы опять получаем так называемую Эйнштейнову формулу $m = \frac{U_{em}}{c^2}$. Мы в дальнейшем (ч. VI) увидим, что это за масса движется с волнами лучистой энергии. Заметим, что если бы свет представлял собой поток обычных частиц, то не получилось бы такого соотношения между плотностью энергии и давлением.

Действительно, если число „световых“ частиц в единице объема будет n , то в объеме с основанием в 1 см² и высотой c их будет nc . Все эти частицы сообщают в единицу времени свое количество движения mc данному кв. сантиметру. Итак, давление

$$p = nc\mu c = n\mu c^2. \quad (52)$$

Энергия этих частиц будет:

$$U = nc \frac{\mu c^2}{2} = \frac{n\mu c^3}{2}. \quad (53)$$

Соединяя (53) и (52), мы находим:

$$p = \frac{2U}{c}, \quad (54)$$

т. е. при данной энергии, падающей на кв. сантиметр, давление было бы вдвое больше, если бы оно было обусловлено бомбардировкой частиц. Возвращаясь к выведенной величине давления (остановимся пока на одном электрическом поле), мы таким же путем, как для волны, покажем, что если напряжение поля (фарадеевы трубки) имеет направление, параллельное поверхности с нормалью n (рис. 108), то мы получим давление $p = \frac{1}{8\pi} E^2$, т. е. то, что мы получили элементарным путем в § 1.

Нетрудно показать, что по длине трубки будет действовать натяжение, равное численно той же величине. В самом деле, пусть фарадеева трубка совпадает с направлением нормали, тогда

$$\rho = \frac{1}{8\pi} (2nE^2 - nE^2) = \frac{1}{8\pi} nE^2,$$

но попрежнему $n = -k$. Таким образом $p_s = -\frac{E^2}{8\pi}$, т. е. мы получаем натяжение вдоль фарадеевой трубки. Отсюда ясно, что представления о натяжениях и давлениях, присущих фарадеевым трубкам, совершенно естественно укладываются в схему уравнений Максвелля.

Нам остается рассмотреть, что представляет собой первый член (50):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{P_x}{c^2} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EM}]_x d\tau. \quad (55)$$

Для этого, прежде всего, рассмотрим общее выражение (50):

$$\begin{aligned} F_x = \int F_x d\tau &= \int \rho \left\{ E_x + \frac{1}{c} [\mathbf{vM}]_x \right\} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{EM}]_x d\tau + \\ &+ \int_s (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz) dS = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{EM}]_x d\tau + \\ &+ \int_s p_x dS. \end{aligned} \quad (50'')$$

Сила, действующая на объем τ , складывается из поверхностных сил давления, которые, по Максвеллю и Фарадею, истолковываются как действия окружающей среды, а также из сил, действующих на весь объем. Если в объеме τ нет, вообще, заряженных тел, т. е. там находится один эфир, то $P_x = 0$, и мы имеем:

$$\int p_x dS = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{EM}]_x d\tau, \quad (50''')$$

т. е. равнодействующая сил давлений на область, занятую эфиром, не дает равновесия, а сообщает количество движения $\frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{EM}] d\tau$. Лоренц

предлагает два толкования. Первое состоит в том, что так как эфир, без сомнения, отличается от обыкновенной материи, то, быть может, не имеет смысла говорить о его движении, скорости и ускорении и поэтому не имеет смысла говорить о силах, действующих на него; но тогда нельзя, вообще, и говорить о максвеллевских натяжениях, потому что эти натяжения должны передаваться от одной части к другой, а мы, по предположению, отрицаем вообще всякое воздействие на отдельные части эфира. Другое толкование, предлагаемое Лоренцом, заключается в том, что эфир, действительно, приводится в движение, но только движение это очень медленно, ввиду его большой плотности. Это находится в полном согласии с приведенными нами в § 2 вычислениями, и таким образом, количество движения, определяемое по $\frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EM}]$, есть

самое настоящее количество движения, но благодаря большой массе скорость его ничтожно мала. Таким образом можно говорить, что „эфир только приблизительно неподвижен“. Тогда в общем случае (50") максвеллевские давления частью приводят в движение заряженные тела, частью приводят в движение эфир. Сопоставим с этими глубоко продуманными рассуждениями одного из основателей теории электронов формально-идеалистические рассуждения современных теоретиков. „Конечно, с точки зрения современной теории, отрицающей существование материального эфира (!A. T.), лишено, в сущности, смысла говорить о натяжениях в вакууме, т. е. о силах взаимодействия смежных элементов вакуума. С точки зрения этой теории пондеромоторные силы электрического поля могут быть приложены лишь к электрическим зарядам и к материальным телам, несущим эти заряды, или, точнее, состоящим из электрических зарядов (электронов и протонов). Однако, по доказанному, результирующая сила, действующая на тела, находящаяся в произвольном объеме V , может быть формально представлена в виде суммы натяжений, „испытываемых“ поверхностью этого объема S (могущей, конечно, проходить как в вакууме, так и в материальных телах). Следовательно, мы можем оперировать с этими фиктивными натяжениями, будучи уверенными в правильности окончательных результатов“ (И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гиз, стр. 167, 1929). Фактически такой формализм равносителен отказу от теоретического мышления и сводит науку к формальным рецептам эмпирика.

В последних двух главах мы использовали метод, предложенный Томсоном. К нему нам придется вернуться еще в дальнейших частях нашего курса. Никому, конечно, не придет в голову выдавать эту теорию за окончательное решение задачи об электромагнитном поле, но эта теория имеет те преимущества, что в ней основные элементы — фарадеевы трубы, играющие ту же роль, что и молекулы газа в кинетической теории, в достаточной мере остаются неопределенными, чтобы, по выражению Ленина, „помешать“ „превращению науки в догму в худом смысле этого слова, в нечто мертвое, застывшее, закостенелое...“ (Ленин, т. X, стр. 109).

В самом деле, хотя кинетическая теория газов все время оперирует молекулами, но в ней воздерживаются приписывать молекулам какие-нибудь резко определенные свойства; наоборот, для выяснения взаимодействия между молекулами предлагаются различные варианты, которые в дальнейшем сравниваются между собой и с опытным материалом, и таким путем, шаг за шагом, строится модель газа. По этому пути, именно, и идет Томсон в своей теории электромагнитного поля.

С другой стороны, эта теория определенным образом отмежевывается от современных формально-идеалистических построений. Ведь при всей своей неопределенности фарадеевы трубы — материальные образования, находящиеся в состоянии движения, как бы эти формы материи и движения ни отличались от обычных известных нам форм. Мы здесь, выражаясь словами Ленина, стоим достаточно твердо, достаточно „определенno“, „чтобы отмежеваться самым решительным и бесповоротным образом от философизма и от агностицизма, от философского идеализма и от софистики последователей Юма и Канта“. (Там же.)

Часть IV.

Электромагнитные волны в поглощающей среде. Теория теплопроводности и теория диффузии. Примеры на теорию потенциала.

Глава I.

Электромагнитные волны в поглощающей среде.

§ 1. Плоские волны.

Для того чтобы выяснить все особенности распространения электромагнитных волн в поглощающей среде, мы остановимся на простейшем случае — случае плоской волны. Исключая из уравнений Максвелля напряжение магнитного поля так, как это мы делали для случая диэлектрика, мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi k\mu}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \nabla^2 \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E},$$

или, полагая, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$,

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi k\mu}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (1)$$

Предположим, далее, что ось X направлена по вектору \mathbf{E} и что \mathbf{E} зависит только от t и z . Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi k\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (1')$$

Это уравнение отличается от волнового уравнения присутствием члена, содержащего $\frac{\partial E_x}{\partial t}$. Уравнения такого типа очень часто встречаются в теоретической физике. Так, например, распространение электромагнитных возмущений по проводу приводится к уравнению такого именно типа, почему уравнение (1') часто называется „уравнением телеграфистов“. Далее, к уравнению сходного типа, при условии $\epsilon = 0$, приводятся уравнения теории диффузии и теплопроводности.

Переходим теперь к отысканию решения для (1'). Посмотрим, при каких условиях функция

$$E_x = A e^{i \frac{2\pi}{T} (t - mz)} \quad (2)$$

будет служить решением (1'). В результате подстановки находим:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} - i \frac{2k\mu T}{c^2} = m^2 = \frac{(p - iq)^2}{c^2}. \quad (3)$$

Из условия (3) ясно, что m в выражении (2) должна быть величиной комплексной. Полагаем ее равной $\frac{p - iq}{c}$. Подставив это значение в (2) и отделив действительную часть, мы находим:

$$E_x = Ae^{-\frac{2\pi q z}{cT}} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{pz}{c} \right). \quad (2')$$

Ясно, что мы получаем уравнение волны с убывающей, по мере распространения, амплитудой. Вследствие конечного значения проводимости k часть электромагнитной энергии переходит в джаулево тепло. Таким образом энергия электромагнитной волны убывает по мере ее распространения. Вот в чем заключается физический смысл решения (2). Скорость волн, как это непосредственно видно из (2'), равна $\frac{c}{p}$, абсолютный показатель преломления $n = c : \frac{c}{p} = p$.

Величина q определяет собой затухание. Если мы положим в (3) $k = 0$, то m становится действительной величиной $m = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{c}}$ и, следовательно, $q = 0$. Таким образом, как и следовало ожидать, затухание волны определяется электропроводностью. Определим теперь на основании (3) выражения p и q через ϵ , μ , k и T . Раскрывая (3), находим:

$$\epsilon \mu = p^2 - q^2 \quad \text{и} \quad k \mu T = pq, \quad (3')$$

откуда получаем:

$$p^4 - \epsilon \mu p^2 - k^2 \mu^2 T^2 = 0, \quad (4)$$

что, в свою очередь, дает совместно с (3):

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{\mu}{2} [\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}] \\ q^2 &= \frac{\mu}{2} [-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}] \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

и

Знак минус перед корнем надо отбросить, так как p и q должны быть величинами действительными. Любопытно отметить, что если мы положим $\epsilon = 0$, то решение (2') сохраняет силу; только p и q получают более простые выражения:

$$p = \sqrt{\mu k T} \quad \text{и} \quad q = \sqrt{\mu k T}. \quad (4'')$$

Но даже и в этом случае как показатель преломления $n = p$, так и показатель q , определяющий поглощение, зависят от периода волны.

Вычислим теперь величину магнитного поля на основании максвеллевского уравнения:

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial E_r}{\partial z}.$$

Вставляем в это уравнение

$$E_x = A e^{i \frac{2\pi}{T} (t - mz)}$$

и

$$M_y = B e^{i \frac{2\pi}{T} (t - mz)}.$$

Подстановка дает:

$$B = A \frac{c}{\mu} m = A \frac{p - iq}{\mu}. \quad (5)$$

Покажем, что комплексное отношение двух амплитуд означает, что между двумя волнами есть разница фаз. В самом деле:

$$\frac{p - iq}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} e^{-i \frac{2\pi}{T} \delta},$$

где

$$p = \rho \cos \frac{2\pi \delta}{T}$$

и

$$q = \rho \sin \frac{2\pi \delta}{T},$$

откуда

$$\rho^2 = p^2 + q^2.$$

Из (4') имеем:

$$p^2 + q^2 = \mu \sqrt{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}.$$

Все это дает:

$$B = A \sqrt[4]{\frac{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}{\mu^2}} e^{-i \frac{2\pi \delta}{T}}.$$

Вставляя это выражение в M_y и отделяя действительную часть, мы находим:

$$E_x = A e^{-\frac{2\pi qx}{\lambda}} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{pz}{c} \right)$$

и

$$M_y = A \sqrt[4]{\frac{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}{\mu^2}} e^{-\frac{2\pi qx}{\lambda}} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{pz}{c} - \delta \right). \quad (6)$$

Итак, мы видим, что напряжение магнитного поля отличается не только величиной амплитуды, но и фаза магнитного поля запаздывает на величину δ , определяемую из соотношения:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi \delta}{T} = \frac{q}{p}. \quad (5')$$

Если $k = 0$, то это влечет за собой $q = 0$ и $\delta = 0$. Следовательно, для диэлектрика мы получаем прежнее решение, а также и амплитуда напря-

жения магнитного поля будет в этом частном случае прежняя:

$$\sqrt[4]{\frac{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}{\mu^2}}$$

при $k=0$ обращается в $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$. Перед нами встает принципиальный вопрос: что брать в качестве ϵ для металла? Ввиду большой электропроводности все экспериментальные методы, предложенные для определения ϵ , не годятся, но из этого не следует, что ϵ должно быть мало. Как показывают расчеты, во всех выражениях, где входит ϵ , она входит наряду с такими большими величинами, что довольно значительная величина ϵ или ϵ^2 не отразится заметным образом на результатах.. Поэтому возможно, что в металлах ϵ очень велико. Это подало повод Яницкому выступить с очень интересной теорией. По его предположению металл, если он чистый, является диэлектриком с очень большой диэлектрической постоянной. Вследствие этого легко растворяющийся в нем газ при растворении сейчас же диссоциирует. В самом деле, чем выше диэлектрическая постоянная среды, тем слабее притяжение между электрически заряженными частями атомов, — тем легче отщепляются электроны от атомов (сила притяжения равна $-\frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}$). Поэтому электропроводность металла зависит от свободных электронов, образующихся от диссоциации растворенных в металле атомов газа. Получается любопытное взаимное проникновение противоположностей: металл хорошо проводит потому, что он обладает свойством непроводника — большой диэлектрической постоянной. Взгляды Яницкого подтверждаются тем, что сильно прокаленные и пробомбардированные катодными частицами тонкие листки металла, освобожденные от части растворенного газа, на несколько процентов хуже проводят. Далее, всем работающим в области вакуум-техники известно, что хорошо отожженные металлические электроды, впаянные в эвакуированную трубку, плохо проводят, вследствие чего трубы часто пробиваются¹.

§ 2. Отражение плоских волн от металлического зеркала.

Предположим, что поверхность (плоская) металлического зеркала совпадает с плоскостью $z=0$, что среда, откуда падает электромагнитная волна на зеркало, имеет диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость, равные единице. Пусть волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, и пусть она падает по нормали к зеркалу. Тогда, принимая во внимание расположение электрического и магнитного векторов (рис. 109 и 109а), мы для первой среды имеем:

$$E_z = M_y = A_e e^{i \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{c} \right)}, \quad -E_{rx} = M_{yr} = A_r e^{i \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{z}{c} \right)}. \quad (7)$$

¹ См. A. Janitzki, Über die Bedeutung des Gasgehalts von Metallen für einige elektrische Erscheinungen, „Zeitschr. für Physik“, 31. Band, 1925.

Для второй среды, согласно (6), находим:

$$E_{dx} = A_d e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} e^{i \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p z}{c} \right)}$$

и

$$M_{dy} = A_d \sqrt{\frac{\epsilon^2 + 4k^2 T^2}{\mu^2}} \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot e^{-i \frac{2\pi \delta}{T}} \cdot e^{i \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p z}{c} \right)}. \quad (7')$$

Пограничные условия сохраняются здесь те же, что и на границе двух

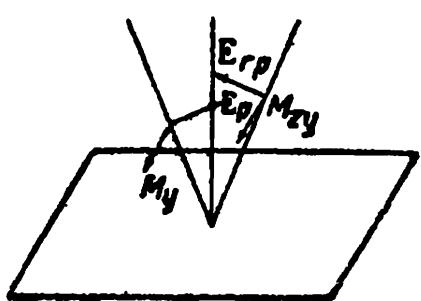


Рис. 109.

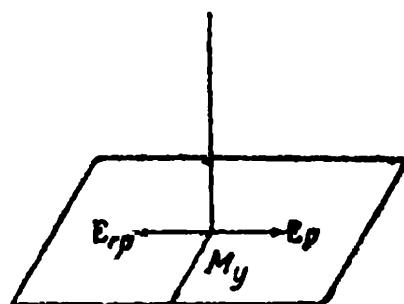


Рис. 109а.

диэлектриков. Полагая $z=0$ в (7) и (7'), пишем условия непрерывности для E_x и M_y :

$$A_e - A_r = A_d \quad (8)$$

и

$$A_e + A_r = A_d \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\mu^2}} \frac{p - iq}{\sqrt{p^2 + q^2}} = A_d \frac{p - iq}{\mu}. \quad (9)$$

Из этих двух уравнений находим:

$$2A_e = A_d \left(1 + \frac{p - iq}{\mu} \right)$$

и

$$2A_r = A_d \left(\frac{p - iq}{\mu} - 1 \right),$$

откуда для отношения $\frac{A_r}{A_e}$ имеем:

$$\frac{A_r}{A_e} = \frac{p - iq - \mu}{p - iq + \mu}. \quad (10)$$

То, что это отношение получилось комплексным, показывает, что на границе раздела при отражении происходит изменение фазы. В уравнении (10) правую часть можно представить как $\rho e^{i\delta}$, где ρ будет отношение амплитуд, а δ представит собой смещение фазы. Так как при подсчете количества отраженной энергии фаза не играет роли, нам надо отыскать ρ . Это всего проще сделать, умножив (10) на сопряженную величину $\rho e^{-i\delta}$.

Итак,

$$\rho^2 = \frac{|A_r|^2}{|A_e|^2} = \frac{p^2 + q^2 + \mu^2 - 2\mu p}{p^2 + q^2 + \mu^2 + 2\mu p}. \quad (11)$$

Отношение квадрата амплитуд равно отношению напряжений света. Поэтому ρ^2 есть коэффициент отражения. Для видимой, а также инфракрасной частей спектра, можно считать $\mu = 1$. Предположим, далее, что $\epsilon = 0$ и что, следовательно, $p = q = \sqrt{kT}$. Тогда:

$$R = \rho^2 = \frac{2kT + 1 - 2\sqrt{kT}}{2kT + 1 + 2\sqrt{kT}} = 1 - \frac{4\sqrt{kT}}{1 + 2\sqrt{kT} + 2kT}. \quad (12)$$

Далее, так как kT — большая величина, то в знаменателе можно откинуть $1 + 2\sqrt{kT}$ по сравнению с $2kT$. Тогда получаем следующую приближенную формулу, позволяющую связать электрические свойства тел — электропроводность с оптическими — с коэффициентом отражения:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{kT}}. \quad (12')$$

Это соотношение было проверено Рубенсом в целом ряде замечательных исследований. Рубенс, в сотрудничестве с Гагеном, использовал для этой цели разработанный им совместно с Никольсом в 1897 г. метод так называемых остаточных лучей. Метод заключается в следующем: ряд веществ, как, например, кварц, сильвин, каменная соль, плавиковый шпат, в далекой инфракрасной части в очень узких спектральных полосах обладают сильным „металлическим“ отражением. Заставляя пучок света отражаться несколько раз от поверхности таких отражающих веществ, мы получаем однородный пучок света с длиной волны, соответствующей узкой полосе металлического отражения, так называемые „остаточные“ лучи. Для данной длины волны (или периода) произведение из $(1 - R)$ на \sqrt{k} должно быть величиной постоянной. Рубенс проделал измерения для целого ряда металлов и для целого ряда „остаточных“ лучей и вывел среднее значение постоянной $(1 - R)\sqrt{k}$ и сравнил со значением, полученным по приближенной формуле $(12')$. Результаты сопоставлены в табл. II:

Таблица II.

λ	4 μ	8 μ	12 μ	25,5 μ
Наблюдения	19,40	13,0	11,0	7,34
Вычисления	18,25	12,9	10,54	7,23

Как видно, чем дальше мы удаляемся в область инфракрасного спектра, тем лучше совпадение вычислений с наблюдением, и тем лучше мы можем, на основании оптических свойств, предсказывать электрические или наоборот. Отступления объясняются тем, что мы не приняли в расчет собственные периоды колебания в молекулах и атомах, т. е., когда мы подсчитывали „плотность“ тока, мы подсчитывали только влияние свободных электронов и не учитывали тока, обусловленного колебаниями заряженных частей атомов, имеющих собственные периоды¹.

¹ Как учитывается плотность тока, обусловленная колебаниями заряженных частей атома, — см. VI часть настоящего курса.

§ 3. Основное уравнение теплопроводности.

Теория теплопроводности принадлежит к числу тех немногих областей физики, которые в числе первых были развиты до большого совершенства уже в начале XIX в. Так, например, теория теплопроводности Фурье вышла уже в 1820 г. („Théorie analytique de la chaleur“). Вся теория основана на очень небольшом количестве допущений, не вызывающих споров, почему и вся теория в целом произвела глубокое впечатление на ряд поколений физиков и привела к ошибочным взглядам в области методологии, хотя, по существу, эта теория сохранила свое положительное значение и сейчас. К разбору этого интересного вопроса мы вернемся в конце главы. Теория Фурье вытекает из следующего предположения. Если мы имеем стену толщиной $x_2 - x_1$ и если температура по обе стороны от этой стены поддерживается на уровне ϑ_1 и ϑ_2 , то, как показывает опыт, количество тепла Q , передаваемое за время t через стену, рассчитанное на $S \text{ см}^2$ ее поверхности, равняется:

$$Q = kSt \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{x_2 - x_1}. \quad (13)$$

Здесь k — постоянная, устанавливаемая на опыте (так называемый коэффициент теплопроводности).

В справедливости этой эмпирически установленной закономерности едва ли кто усомнится. Фурье сделал дальнейшее предположение: он принял, что закономерность (13), установленная для стенок конечной толщины, верна и для бесконечно малых размеров. Введем понятие „теплового потока“:

$$q_x = -k \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (14)$$

Эта величина получилась из (13), предполагая $t = 1$ сек., $S = 1 \text{ см}^2$ и предполагая, что поток тепла, обусловленный падением температуры в бесконечно близких друг к другу слоях, выражается тем же законом, что в (13). Знак минус получается потому, что положительное направление теплового потока всегда бывает в сторону убывающей температуры. Подсчитаем теперь поток тепла через боковую поверхность элемента объема $d\tau = dx dy dz$ совершенно так же, как мы подсчитывали поток вектора скорости в гидродинамике или поток вектора D или B в учении об электромагнитном поле. Для двух граней $dy dz$, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , находим:

$$dy dz \left\{ -k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \left[-k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx$$

Прикладывая к этому выражению то, что получается для оставшихся двух пар граней $dx dz$ и $dx dy$, мы получаем:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right\} d\tau.$$

Эта величина представляет собой избыток вошедшего в единицу времени тепла в объем $d\tau$ над вышедшим. Это „избыточное“ тепло

в данную единицу времени пошло на повышение температуры, и поэтому данный избыток можно выразить еще и иначе:

$$\rho dt c \cdot \frac{d\vartheta}{dt},$$

где ρ — плотность, а c — удельная теплота вещества, в котором выделен объем dt . Сравнивая два полученные выражения, мы находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = \rho c \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (15)$$

Если коэффициент теплопроводности не зависит от координат, то, вводя обозначение $a^2 = \frac{k}{\rho c}$, мы, вместо (15), получаем:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = a^2 \nabla^2 \vartheta = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right\}. \quad (15')$$

Для тех случаев, когда мы имеем дело с кристаллическими телами, у которых коэффициент k различен по различным направлениям, и когда мы направим оси координат по главным осям кристалла, то вместо (15) мы получим уравнение вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = \rho c \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (15'')$$

Мы в дальнейшем будем предполагать, что рассмотренные нами тела изотропны и что коэффициент теплопроводности не зависит от координат.

Пример 1. Рассмотрим прежде всего случай, когда ϑ зависит от времени и еще только от одной координаты, скажем, z . Уравнение (15') принимает следующий вид:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}. \quad (16)$$

Мы уже видели, что решение (2) для уравнения (1') ($\S 1$) не изменяется, если в (1) исчезает первый член при $\epsilon = 0$. Поэтому для уравнения (16) мы можем испытать решение того же типа, как и рассмотренное в $\S 1$, т. е.

$$\vartheta = A e^{i \frac{2\pi}{T} (t - mz)}. \quad (17)$$

Подставив (17) в (16), мы находим:

$$m^2 = -i \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{a^2}. \quad (18)$$

Заменяя $-i$ через $c^{-i \frac{\pi}{2}}$, получаем для $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Итак,

$$m = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{T}{\pi}} (1 - i). \quad (18')$$

Далее, вставляя (18') в (17) и отделяя действительную часть, мы получаем:

$$\vartheta = Ae^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}\cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{2a}\sqrt{\frac{T}{\pi}} \right). \quad (19)$$

Применим это решение к случаю, когда твердое тело расположено в области $z > 0$, начиная с плоскости $z = 0$. Для $z = 0$ получаем:

$$\vartheta_0 = A \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (19')$$

Полученное решение в первом приближении может служить для изображения распределения температуры в почве. В самом деле, температура на поверхности почвы является периодической функцией с суточным периодом, а также и с периодом годичным. Совершенно ясно, что решение типа (19) годится для любого T . Поэтому можно как и для струны найти решение в виде ряда и приспособить этот ряд к любой периодической функции. Рассмотрим детальнее полученное нами решение. Прежде всего, с какой скоростью распространяются колебания температуры? Из (19) ясно, что скорость

$$V = 2a\sqrt{\frac{\pi}{T}}. \quad (20)$$

Отсюда ясно, что скорость обратно пропорциональна квадратному корню из периода. Далее, величина затухания определяется функцией $e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$. Размах колебания достигнет e -й части, где $e = 2,71\dots$ (основание неперовых логарифмов), когда $\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}$ будет равно единице; это произойдет на глубине z , зависящей от периода. Если мы сравним годичные колебания с суточными, то получается следующее соотношение:

$$\frac{z_{\text{годичн.}}}{z_{\text{суточн.}}} = \frac{\sqrt{T_{\text{год}}}}{\sqrt{T_{\text{сутки}}}} = \sqrt{365} \approx 19.$$

Таким образом годичные колебания, при прочих равных условиях, проникают в двадцать раз глубже. Результаты измерений показывают, что суточные колебания практически затухают на протяжении около 1 м. Годичные — на глубине 20 м. Таким образом теория подтверждается. Выявленная нами закономерность имеет место и в области электромагнитных колебаний. Известно, что быстрые колебания не проникают на такую же глубину в толщу металла, как более медленные. Это явление носит название поверхностного эффекта (Skinneffekt). Если решать эту задачу для цилиндрического провода, как это обычно делается, то вычисления получаются очень сложные; самый же характер явления можно легко обнаружить на следующем простом примере. Пусть мы имеем металлическую массу с проводимостью k , которая простирается неопределенно далеко от плоскости $z = 0$ в сторону $z > 0$. Пусть напря-

жение поля направлено по оси X и пусть $E_x(t, z)$. Тогда, пренебрегая током смещения в металле, мы имеем $\frac{4\pi j}{c} = \text{rot } M$ и $-\frac{\mu \dot{M}}{c} = \text{rot } E$. Исключая, как обычно, M , мы находим:

$$\frac{4\pi\mu}{c^2} \cdot \frac{dj}{dt} = -\text{rot rot } E = \nabla^2 E, \quad (21)$$

так как мы, как обычно, полагаем $\text{div } E = 0$. Далее, умножая на k обе части равенства (21), мы получаем:

$$\frac{4\pi\mu k}{c^2} \cdot \frac{dj_x}{dt} = \frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2}, \quad (21')$$

т. е. уравнение, которое формально совпадает с (16) с той только разницей, что вместо a^2 надо поставить $\frac{c^2}{4\pi\mu k}$. Поэтому решением (21') будет служить функция типа (17), показывающая, что чем быстрее колебания, тем быстрее они затухают и тем больше они сосредоточиваются на поверхности.

§ 4. Примеры на теорию теплопроводности.

Задача Томсона-Кельвина. Виллиаму Томсону удалось несколько искусственным путем найти такое решение для уравнения (16), с помощью которого можно было изобразить закон остывания земного шара и подсчитать промежуток времени, протекший с момента отвердевания расплавленной массы земли до наших дней, т. е. определить возраст земли.

Следуя за Томсоном, предположим, что функция ϑ зависит от z и t только в форме комбинации

$$u = \frac{z}{2a\sqrt{t}}. \quad (22)$$

Преобразуем, исходя из этого предположения, уравнение (16):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d\vartheta}{du} \cdot \frac{z}{2at\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\vartheta}{du} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{d^2 \vartheta}{du^2} \cdot \frac{1}{4a^2 t}.$$

Вставляя все эти величины в (16), мы приходим к выводу:

$$-2u = \frac{\frac{d^2 \vartheta}{du^2}}{\frac{d\vartheta}{du}} \quad (23)$$

Интеграл будет:

$$\frac{d\vartheta}{du} = Ae^{-u^2}. \quad (24)$$

Интегрируя второй раз, находим:

$$\vartheta = A \int_{u_0}^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du. \quad (25)$$

Сделаем теперь следующее предположение: во-первых, пусть тело, для которого мы ведем расчет, простирается от $z=0$ до $z=\infty$ в область $z>0$, и пусть для всех моментов $t>0$ для $z=0$ температура равна 0. Мы предполагаем, что с момента отвердения коры температура на ее поверхности не изменяется, и эту среднюю температуру мы условно принимаем за 0. Тогда, на основании (25),

$$A \int_{u_0}^0 e^{-u^2} du = 0, \quad (25')$$

что вместе с (25) дает:

$$\vartheta = A \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du. \quad (25'').$$

Полученное решение обладает замечательным свойством. В самом деле, ϑ сохраняет одно и то же значение, каково бы ни было значение z (конечное), если $t=0$.

А это значит, что все точки нашего тела в начальный момент $t=0$ находятся при одной и той же температуре, как это и должно быть для расплавленной массы. Обозначая эту начальную температуру через ϑ_0 , мы находим:

$$\vartheta_0 = A \int_0^\infty e^{-u^2} du = A \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому для (25'') мы находим:

$$\vartheta = \frac{2\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-u^2} du. \quad (25''')$$

Составим теперь выражение для градиента температуры — для повышения температуры с глубиной, которое наблюдается при прорывании глубоких шахт или тоннелей в горах. По общему правилу имеем:

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{2\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}}. \quad (26)$$

Так как наша задача — найти время t , протекшее с момента отвердения земного шара, которое очень велико, и так как градиент $\frac{d\vartheta}{dz}$ мы определяем не

для большой глубины, то $e^{-\frac{z^2}{4at^2}} \approx 1$. Поэтому для вычислений у нас остается:

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{2\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2a\sqrt{t}}. \quad (26')$$

Для расчета воспользуемся следующими данными. Известно, что скорость суточных колебаний равна приблизительно $1 \frac{m}{сутки}$, поэтому, измеря время сутками, а длины метрами, мы на основании (20) имеем:

$$1 \frac{m}{сутки} = 2a\sqrt{\pi}.$$

Далее, из наблюдений установлено, что $\frac{d\vartheta}{dz} = \frac{1^\circ C}{25 m}$, и наконец, темпе-

ратура остивающей лавы (которая должна быть близка к температуре затвердевающего земного шара) может быть принята равной $\vartheta_0 = 4000^\circ C$. Вставляя эти данные, мы находим для $t = 4 \cdot 10^{10}$ суток, или $t \approx 10^8$ лет, т. е. сто миллионов лет. Необходимо указать, что Виллиам Томсон-Кельвин всячески пытался уменьшить эту цифру, так как ему из религиозных соображений хотелось уменьшить время, предоставленное для эволюции органического мира, чтобы выдвинуть „научное“ возражение против атеистического дарванизма. Кельвин в своей деятельности никогда не связывал себя какими-либо религиозными взглядами, пока дело шло о космических процессах и о физике, но, как только дело касалось биологии, он становился на сторону самых диких предрассудков. Эта двойственность крайне характерна даже для крупнейших естествоиспытателей буржуазного мира: она, несомненно, могла выработаться только в обществе, где разделение труда проводится часто до абсурда. Дальнейшее развитие науки, как оказалось, с легкостью отбросило недостойные хитросплетения знаменитого физика. В самом деле, весь приведенный нами расчет основан на том, что земля остывает, и что тепло ниоткуда не пополняется. Однако вскоре после открытия радиоактивных процессов стало ясно, что везде, где есть радиоактивное вещество, непрерывно происходит выделение тепловой энергии, а при этом условии, как показывают подсчеты, цифра в 10^8 лет должна быть увеличена. Кроме того, на основании теории приливов Дж. Дарвина мы имеем теперь веские указания, что Луна отделилась от Земли (а это должно было произойти, когда с поверхности Земля только начала затвердевать), примерно, от $5 \cdot 10^8$ до $50 \cdot 10^8$ лет назад, так что выведенная Томсоном цифра, несомненно, играет роль низшего предела. Но все это нисколько не умаляет огромного значения приведенных нами расчетов.

Пример 2. Остыивание шара. Эта задача играет довольно большую роль в практике при изучении теплопередачи. Уравнение (15') мы

преобразуем так, как мы преобразовывали уравнение потенциала скоростей (ч. II, гл. II, § 3), исходя из предположения, что ϑ — функция только t и z .

Итак, уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial(r\vartheta)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2(r\vartheta)}{\partial r^2}. \quad (27)$$

Попробуем в качестве решения испытать следующую функцию:

$$r\vartheta = Ae^{-a^2t^{1/2}} \cdot e^{i\beta z}. \quad (28)$$

Подстановка в (27) дает в качестве условия, при котором (28) становится решением (27): $a^2\gamma^2 = a^2\beta^2$, откуда $\beta = \gamma$. Отделив от действительной части мнимую и взяв сумму действительной и мнимой части, мы приходим к выводу, что

$$r\vartheta = e^{-a^2\gamma^2 t} (A \cos \gamma z + B \sin \gamma z) \quad (28')$$

будет таким решением (27), в чем нетрудно также убедиться с помощью простой подстановки.

Рассмотрим теперь дополнительные условия, которые необходимо должны быть выполнены с тем, чтобы (28') действительно было решением поставленной задачи.

Прежде всего займемся условием на границе: пусть температура поверхности шара будет ϑ , а температура окружающей среды пусть условно будет равна нулю. Передача тепла от поверхности твердого тела окружающей среде обычно принимается пропорциональной разнице температур оставшего тела и среды — $h(\vartheta - \vartheta')$ (закон Ньютона), и так как мы условно считаем $\vartheta' = 0$, то, следовательно, тепловая отдача тела будет $h\vartheta$. Далее, в слое, непосредственно примыкающем к поверхности, поток тепла будет $-k \frac{d\vartheta}{dr}$, так как температура должна убывать по мере возрастания радиуса (рис. 110). Вводя для сокращения $b = \frac{h}{k}$, мы находим в качестве условия на поверхности:

$$\left. \frac{d\vartheta}{dr} \right|_{r=R} = -b\vartheta_{r=R}. \quad (29)$$

Далее, необходимо знать начальное распределение температуры в самом шаре, т. е.

$$\vartheta_0 = \phi(r). \quad (30)$$

При этом мы предполагаем, на основании соображений, вытекающих из симметрии, что на каждой поверхности любого радиуса r температура во всех точках поверхности одна и та же. Наконец, необходимо, чтобы в точке $r = 0$ ϑ не обращалась в ∞ . Это условие равносильно условию:

$$r\vartheta_{r=0} = 0. \quad (31)$$

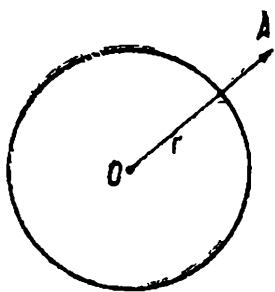


Рис. 110.

Условие (31) будет выполнено, если $A = 0$. Рассмотрим теперь условие (29).

Составляем прежде всего $\frac{\partial}{\partial r} (r\vartheta)_{r=R} = \vartheta_R + R \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r=R}$, вставляем $\left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=R}$ из (29):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\vartheta) = \vartheta_R - Rb\vartheta_P = -R\vartheta_R \left(b - \frac{1}{R} \right) = -R\vartheta_R b', \quad (29')$$

где

$$b' = b - \frac{1}{R}. \quad (29'')$$

Вставляем в это выражение

$$r\vartheta = e^{-a^2 t^2} B \sin \gamma r, \quad (28'')$$

$$\gamma \cos \gamma R = -b' \sin \gamma R, \quad (32)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \gamma R = -\frac{\gamma R}{b'R}. \quad (32')$$

Таким образом величина γ уже не остается произвольной, но должна удовлетворять трансцендентному уравнению (32'). Уравнение (32') всего проще решить графически, построив кривую $Y = \operatorname{tg} \gamma R$ и найдя ее точки пересечения с прямой $Y = -\frac{\gamma R}{b'R}$ (рис. 111).

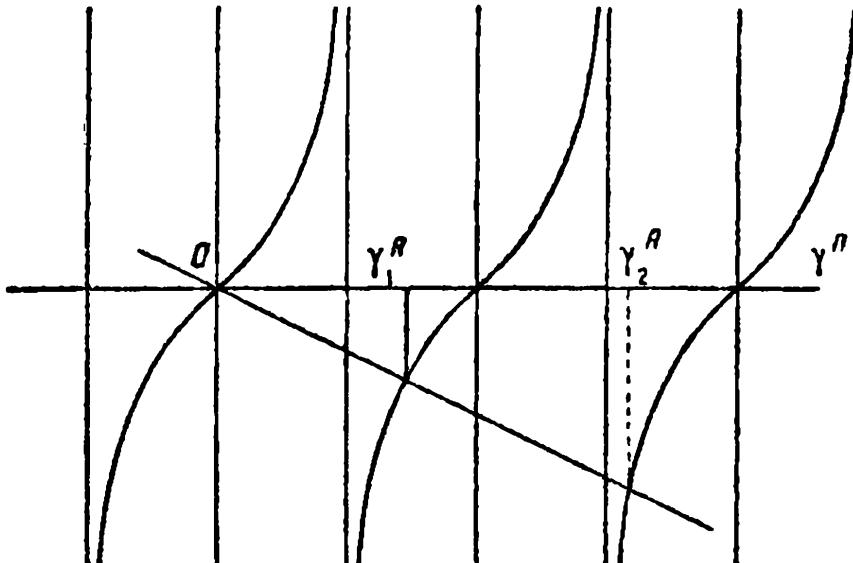


Рис. 111.

Абсциссы точек пересечения и дадут нам искомые значения $\gamma_n R$. Поэтому решение (28'') принимает вид:

$$r\vartheta = \sum_1^\infty B_n e^{-a^2 \frac{r^2}{n}} \sin \gamma_n r. \quad (28'')$$

Остается последнее условие $\vartheta_0 = \psi(r)$, т. е. распределение температуры при $t = 0$. Из (28'') находим:

$$r\psi(r) = \sum_1^\infty B_n \sin \gamma_n R. \quad (33)$$

Таким образом мы должны с помощью заданной функции $\psi(r)$ найти коэффициент ряда (33) так же, как это мы делали в задаче о колебании струны.

§ 5. Уравнение диффузии. Дальнейшие решения уравнения теплопроводности и диффузии.

Уравнения, изображающие процессы диффузии, имеют совершенно сходный вид с уравнением теплопроводности. В самом деле, на основе чисто эмпирических данных для потока растворенного вещества мы имеем выражение $-D \frac{dc}{dx}$, где D — коэффициент диффузии, а c — концентрация, т. е. количество граммов растворенного вещества, приходящееся на единицу объема. Так как выражение этого потока тождественно с выражением потока тепла, мы получаем для потока через поверхность элементарного объема $d\tau$ величину $d\tau D \nabla^2 c$. Это представляет собой избыток количества растворенного вещества, вошедшего в элемент $d\tau$, над вышедшим за единицу времени; так как вещество исчезнуть не может, то этот избыток пошел на увеличение концентрации в $d\tau$, и поэтому $d\tau \cdot D \nabla^2 c = d\tau \frac{dc}{dt}$, откуда находим:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c. \quad (34)$$

Рассмотрим случай, когда c является функцией t и x ; тогда вместо (34) получим: $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ [(34')]. Нетрудно показать, что

$$c = \int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 Dt} d\lambda \quad (35)$$

(где A и B — произвольные функции λ) удовлетворяет уравнению (34). В этом можно убедиться простой подстановкой. Мы уже видели, что произвольную функцию можно представить в виде тригонометрического ряда. Математически такое разложение в ряд законно при соблюдении некоторых условий, но, как правило, в физических задачах эти условия бывают сами собой выполнены. Точно так же можно показать, что произвольная функция $\Phi(x)$ может быть изображена в виде интеграла Фурье, а именно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cos \lambda (a - x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) (\cos \lambda a \cos \lambda x + \sin \lambda a \sin \lambda x) dx. \end{aligned} \quad (36)$$

Об ограничениях, накладываемых на функцию $\Phi(x)$, необходимых для того, чтобы (36) было законно, мы распространяться не будем, отослав читателя к соответствующим руководствам по математике (например, Frieske, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen), и напомним, что и в данном случае встречающиеся в физике функции необходимыми условиями для (35) в подавляющем числе случаев обладают.

При $t=0$ выражение (36) дает:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) d\lambda. \quad (35')$$

A и B по предположению — функции λ . Сравнивая теперь (35) с (36), мы находим:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cos \lambda a \cdot da \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \sin \lambda a \cdot da. \quad (37)$$

Вставляя (37) в (35'), мы находим:

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 D t} \cdot d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cos \lambda (a-x) da. \quad (35'')$$

Это выражение при $t=0$ обращается согласно (36) в $\Phi(x)$. Таким образом $\Phi(x)$ действительно представляет собой начальное распределение концентрации. Выражение (35'') можно еще несколько преобразовать, вычислив интеграл по λ . Для этой цели преобразуем известный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\beta z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \beta^{-\frac{1}{2}},$$

который, как известно, получается из

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вводим вместо $z = u \pm \delta$. В результате подстановки мы имеем:

$$\int_0^\infty e^{-\beta u^2 \mp \beta 2u\delta - \beta \delta^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}},$$

или

$$\int_0^\infty e^{-\beta u^2 \mp \beta 2u\delta} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} e^{\beta \delta^2},$$

что можно, в свою очередь, представить:

$$\int_0^\infty e^{-\beta u^2} \frac{e^{2u\delta\beta} + e^{-2u\delta\beta}}{2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} e^{\beta \delta^2}.$$

Заменяя также $\delta = i\delta_1$, где $i = \sqrt{-1}$; тогда

$$\int_0^\infty e^{-\beta u^2} \frac{e^{i2u\delta_1} + e^{-i2u\delta_1}}{2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta\delta_1^2},$$

или

$$\int_0^\infty e^{-\beta u^2} \cos 2u\delta_1 \beta du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta\delta_1^2}. \quad (38)$$

Поэтому, полагая $u = \lambda$, $\beta = Dt$ и $\delta_1 = \frac{a-x}{2Dt}$, мы находим:

$$\int_0^\infty e^{-Dtu^2} \cos \lambda(a-x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Dt}} \cdot e^{-\frac{(a-x)^2}{4Dt}},$$

а вставляя эту величину в (35''), получаем для C :

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a)e^{-\frac{(a-\xi)^2}{4Dt}} d\xi. \quad (35''')$$

Путем простой проверки убеждаемся, что (35''') удовлетворяет уравнению (34'). Чтобы убедиться, получим ли мы то же самое начальное условие, положим $\xi = \frac{a-x}{2\sqrt{Dt}}$, или $a = x + 2\sqrt{Dt}\xi$, откуда $da = 2\sqrt{Dt} d\xi$.

После этого преобразования имеем:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x + 2\sqrt{Dt}\xi) e^{-\xi^2} 2\sqrt{Dt} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x + 2\sqrt{Dt}\xi) e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

При $t = 0$ мы получаем $C = \Phi(x)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь следующий частный случай. Пусть в области $a < 0$ до $a = 0$ $\Phi(a) = C$, а для $a > 0$ $\Phi(a) = 0$. Этот случай соответствует тому, что в одном сосуде мы имеем раствор с концентрацией C (рис. 112), а в другом $C = 0$.

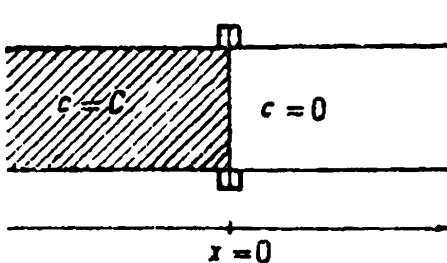


Рис. 112.

Пусть эти два соприкасающиеся сосуда разделены перегородкой, которая выдергивается, вслед за чем и начинается диффузия, определяемая величиной (35'''). Для данного случая (35''') принимает вид:

$$c = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (39)$$

Предел $\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ соответствует $x = 0$. Далее, (39) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \frac{C}{V\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \frac{C}{V\pi} \int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{C}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{V\pi} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right\} = \\ &= \frac{C}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{V\pi} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (39')$$

где Φ — гауссов интеграл, применяемый в теории ошибок. Теперь предположим, что после снятия перегородки между двумя сосудами через

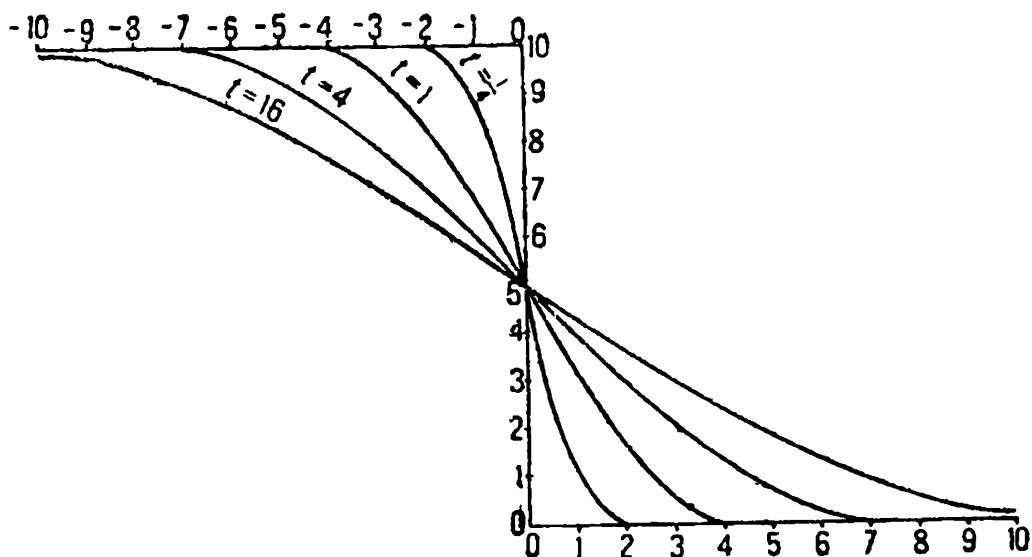


Рис. 113.

T секунд перегородка вновь задвинута, тогда, на основании измерения количества растворенного вещества, перешедшего во второй сосуд, можно определить коэффициент диффузии. Количество вещества, переходящее за время dt в сосуд с концентрацией, равной 0, выражается следующим образом:

$$dq = -D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x=0} S dt,$$

где S — площадь сечения сосуда. Из (39') находим:

$$-\frac{\partial c}{\partial x} = +\frac{C}{V\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}, \quad \text{а } \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{C}{V\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{Dt}}.$$

Вставляем эту величину в

$$dq = \frac{C}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{t}} S dt.$$

Общее количество, продиффундированное за время T , будет.

$$Q = \frac{CV\bar{D}}{2\sqrt{\pi}} S \int_0^T t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{CS}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \sqrt{DT}.$$

Таким образом:

$$Q = \frac{C\delta}{V\pi} V \overline{DT}. \quad (40)$$

Найденное нами решение годится и для теории теплопроводности, причем рассмотренный случай соответствует тому, что в области, занятой первым раствором, находится твердое тело постоянной температуры, а в области, занятой вторым, находится тело при температуре 0°. Распределение температуры или концентрации в рассмотренном случае для последовательных моментов времени t изображено на рис. 113.

§ 6. Некоторые методологические выводы.

Изложенные нами теории теплопроводности и диффузии носили чисто описательный характер. С точки зрения эмпириокритической философии задача науки только в том и должна состоять, чтобы давать точное математическое описание нашим непосредственным переживаниям. Сторонники чистого описания не раз ставили в пример теории рассмотренного типа, считая, что они являются идеалом научной теории, освобожденным от всяких „метафизических“ представлений. Дело все в том, что сами по себе приведенные нами рассуждения не заключают в себе ничего предосудительного, поскольку мы считаем их первым этапом теории. В самом деле, мы в настоящее время уже поставили вопрос (он отчасти уже разрешен) о теплопроводности с точки зрения электронной теории. Это позволило установить теоретическую связь между теплопроводностью и электропроводностью в том смысле, что между коэффициентами тепло- и электропроводности устанавливается глубокая внутренняя связь, позволяющая по одному коэффициенту находить другой. Этого совершенно не в силах дать описательные теории, так как для установления этой связи необходимо более глубокое проникновение в самый механизм процесса, необходима конкретная модель, т. е. как раз то, от чего описательные теории открешиваются, считая свое неведение в этой области за достижение. Поэтому описательными теориями можно и должно пользоваться, если только мы рассматриваем их как необходимую ступень для разработки более глубокой теории. Беда начинается с того момента, когда трудности построения более глубокой теории, основанной на теории строения вещества, начинают казаться непреодолимыми; когда появляется искушение довольствоваться имеющимися уже хорошими методами расчета, когда дело доходит до отказа от теоретического мышления, когда роль науки низводится до уровня технических ремесленных вычислений. Такое положение обыкновенно приводит исследователя в колею какой-либо разновидности эмпириокритической философии. Для эмпириокритицизма, отрицающего все кроме ощущений, единственным методом является метод чистого описания данных ощущений и переживаний. Но обратного, конечно, сказать нельзя. Если пользоваться описательным методом, но твердо помнить, что это только первая ступень исследования, то можно всецело оставаться на здоровой материалистической позиции. В тех же случаях, когда из страха перед трудностями

настоящей глубокой теоретической работы мы добровольно ограничиваем себя методом чистого описания, то тогда мы невольно втягиваемся и в ту философию, для которой метод чистого описания является единственным методом, которым она может работать, при условии, конечно, что наши рассуждения останутся, в известном смысле, последовательной системой. Тогда и только тогда мы вступаем на неправильный путь.

Глава II.

Примеры на теорию потенциала.

§ 1. Потенциал шарового слоя бесконечно тонкого и конечной толщины.

В настоящей главе мы рассмотрим ряд примеров из самых разнообразных областей физики, которые формально подходят под решение уравнения Лапласа $\nabla^2\Phi=0$ или Пуассона $\nabla^2\Phi=-4\pi\rho$. Мы увидим на этих примерах, как единство,

т. е. то, что все эти случаи являются решением одних и тех же уравнений, сочетается с почти бесконечным разнообразием, характеризующим и выделяющим каждый данный конкретный случай из ряда других.

Известно, что решением уравнения Лапласа является $\frac{e}{r}$,

где e — постоянная, а r — расстояние от заданной точки (начала координат).

(Проверить это можно, заменив r через $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и подставив $\frac{e}{r}$

в уравнение Лапласа.) Это — потенциал заряда e , имеющего исчезающие малые размеры. Рассмотрим теперь потенциал шарового слоя, заряженного равномерно по всей поверхности с плотностью σ . Рассчитаем потенциал для внешней точки A_e (рис. 114). За элемент поверхности мы берем $2\pi R \sin \vartheta R d\vartheta$, для всех точек этого элемента расстояние от A_e будет одно и то же, т. е. r (рис. 114). Итак, потенциал для внешней точки будет:

$$\varphi_A = \int_0^\pi \frac{2\pi\sigma R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{r}. \quad (41)$$

Из $\triangle A_eOB$ находим: $r^2 = p^2 + R^2 - 2pR \cos \vartheta$, откуда:

$$r dr = pR \sin \vartheta d\vartheta.$$

Вводя вместо ϑ переменную r , мы находим в качестве пределов $p-R$ и $p+R$, тогда (41) принимает вид:

$$\varphi_A = \frac{2\pi\sigma R}{p} \int_{p-R}^{p+R} dr = \frac{4\pi R^2 \sigma}{p} = \frac{e}{p}. \quad (41')$$

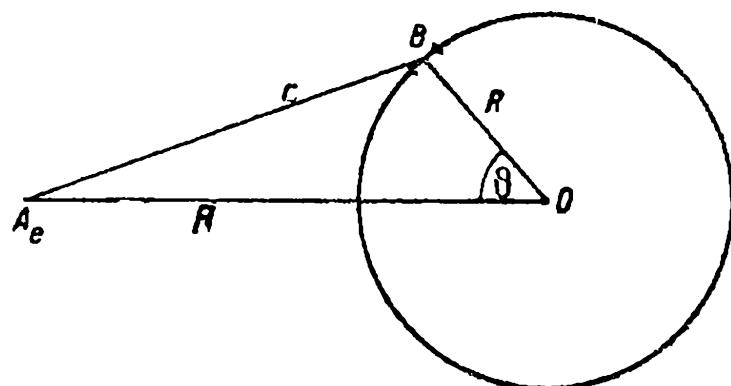


Рис. 114.

Таким образом для внешней точки дело обстоит так, как будто весь заряд e был сосредоточен в центре шара в одной точке. Для внутренней точки мы получаем:

$$\varphi_i = \frac{2\pi\sigma R}{p} \int_{R-p}^{R+p} dr = 4\pi\sigma R. \quad (41'')$$

Различие с (41') заключается в том, что нижний предел оказывается $R-p$ вместо $p-R$ (рис. 115). При $p=R$ (41') непрерывно переходит в (41''). Так как для всех внутренних точек получается одно и то же значение потенциала, то, следовательно, внутри шарового слоя напряжение поля равно нулю. Для напряжения поля во внешней точке получаем:

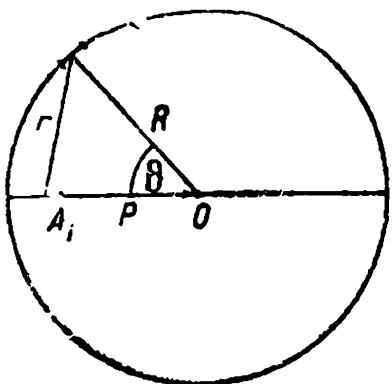


Рис. 115.

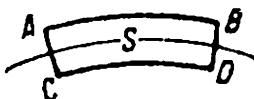


Рис. 116.

каковым образом [(42)]. На самой поверхности, где $p=R$, мы будем иметь:

$$-\frac{\partial \varphi_A}{\partial p} = 4\pi\sigma. \quad (42')$$

Для внутренней точки:

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = 0. \quad (42'')$$

Таким образом напряжение поля на поверхности шара претерпевает скачок. Выражение (42') может быть получено из общих соображений. Возьмем на границе какого-либо проводника бесконечно короткую си-ловую трубку $ABCD$ (рис. 116), вырезающую площадку S с зарядом $S\sigma$. Поток через боковую поверхность равен нулю, так как образующие направлены по линиям сил; поток через CD равен нулю, так как внутри проводника поле равно нулю, а при малости AC и BD можно сказать, что площадь $AB \approx S$, а тогда весь поток равен $-\frac{\partial \varphi_A}{\partial p} S = 4\pi S\sigma$, т. е. мы получаем (42'). Ввиду постоянства φ_i мы имеем $\nabla^2 \varphi_i = 0$. Предполагая, далее, в O (рис. 115) начало координат, имеем:

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial x} = -\frac{4\pi R^2 \sigma}{p^2} \cdot \frac{x}{p}$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi_A}{\partial x^2} = -\frac{4\pi R^2 \sigma}{p^3} + \frac{12\pi R^2 \sigma x^2}{p^5}.$$

Составляя $\frac{\partial^2 \varphi_A}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi_A}{\partial z^2}$ и складывая, находим: $\nabla^2 \varphi_A = 0$.

Рассмотрим теперь потенциал сферического слоя толщины $R_2 - R_1$ с объемной плотностью ρ . Берем бесконечно тонкий слой между двумя концентрическими шаровыми поверхностями q и $q + dq$ (рис. 117). По аналогии с предыдущей задачей имеем, заменяя через $r dr = \rho q \sin \theta d\theta$:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_{R_1}^{R_2} \rho dq \int_{p-q}^{p+q} \frac{2\pi q^2}{pq} dr = \frac{2\pi\rho}{p} \int_{R_1}^{R_2} q dq (p+q-p+q) = \frac{4\pi\rho}{p} \int_{R_1}^{R_2} q^2 dq = \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{p}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для внутренней точки имеем:

$$\varphi_I = \frac{2\pi\rho}{p} \int_{R_1}^{R_2} q dq (p+q-q+p) = 2\pi\rho (R_2^2 - R_1^2). \quad (44)$$

Совершенно ясно, что $\nabla^2 \varphi_I = 0$ и $\nabla^2 \varphi_A = 0$. Рассмотрим теперь выражение потенциала для промежуточного слоя, т. е. для точки, лежащей между шаровыми поверхностями R_1 и R_2 . Пусть данная точка лежит на расстоянии p от центра. Тогда для нее слой $p - R_1$ будет внутренним, т. е. точка по отношению к нему будет внешней. По отношению же к слою $R_2 - p$ точка будет внутренней. Поэтому для любой точки промежуточного слоя имеем:

$$\varphi_m = 2\pi\rho (R_2^2 - p^2) + \frac{4}{3}\pi\rho (p^3 - R_1^3) \frac{1}{p}. \quad (45)$$

При $p = R_1$ (45) переходит непрерывно в (44), при $p = R_2$ (45) переходит в (43). Таким образом потенциал изменяется непрерывно. Предоставляем читателю доказать, что в данном случае и напряжение поля непрерывно.

Составляем теперь выражение $\nabla^2 \varphi_m$. Выражение (45) можно разбить на три части: первая $2\pi\rho R_2^2$ — она, несомненно, даст в выражении $\nabla^2 \varphi_m$ нуль. Последний член $-\frac{4}{3}\pi\rho \frac{R_1^3}{p}$ также даст нуль. Соединяя второй и третий член

вместе, получаем $-\frac{2}{3}\pi\rho p^2$. Составляем производную по x , — получается

$-\frac{4}{3}\pi\rho x$, вторая производная даст $-\frac{4}{3}\pi\rho$. Сумма же трех частных производных даст $-4\pi\rho$. Итак, $\nabla^2 \varphi_m = -4\pi\rho$, т. е. φ_m удовлетворяет уравнению Пуассона, как это и следовало ожидать.

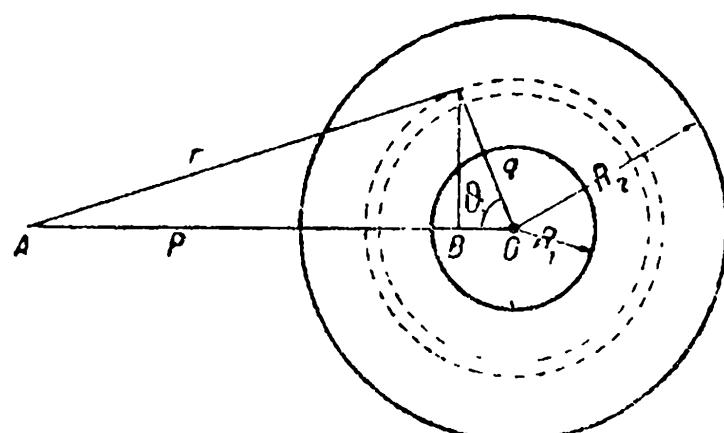


Рис. 117.

§ 2. Метод электрических изображений.

Пример 1. Пусть мы имеем маленькое заряженное тело $+e$ в O (рис. 118), которое мы можем рассматривать как точечный заряд, и пусть в AB мы имеем проводящую бесконечных размеров плоскость, соединенную с землей. Спрашивается, какое будет поле, и какова будет плотность наведенных зарядов на поверхности AB ?

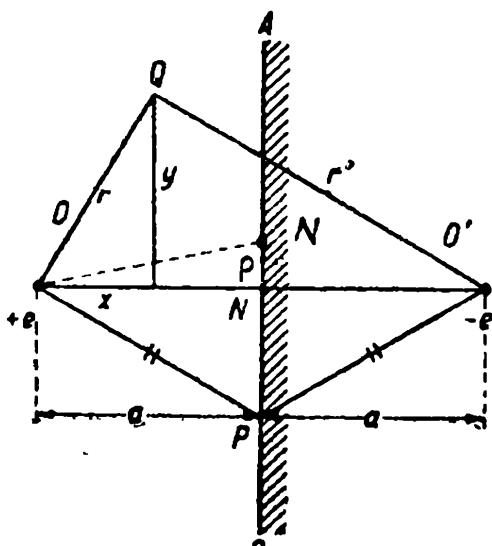


Рис. 118.

Поле мы определяем только в области, лежащей слева от AB , т. е. с той же стороны, где находится заряд. Мы сразу удовлетворим условию на плоскости AB , если представим себе в точке O' , симметрично расположенной по отношению к AB , заряд $-e$, или зеркальное „изображение“ заряда в металлическом листе, как в зеркале. В самом деле, тогда для любой точки P на плоскости AB мы будем иметь: $\varphi = \frac{e}{OP} - \frac{e}{O'P} = 0$, так как $OP = O'P$. Таким образом основное условие выполнено. Что же касается условия $\nabla^2\varphi = 0$, то оно удовлетворяется выражениями вида $\frac{C}{r}$.

Составим теперь выражение потенциала для какой-нибудь точки поля Q (рис. 118):

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{e}{\sqrt{y^2 + (2a - x)^2}}. \quad (46)$$

Составляем:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{e}{r^3} x + \frac{e(2a - x)}{r_1^3}. \quad (47)$$

Подсчитаем $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ для стенки AB , т. е. когда $r = r_1$, тогда $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}_{x=a} = -\frac{2ae}{r^3}$. На основании соотношения $-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma$, о котором была речь в предыдущем параграфе, в связи с уравнением (42'), мы получаем, принимая во внимание, что направление нормали считается положительным внаружу:

$$4\pi\sigma = -\frac{2ae}{r^3}. \quad (48)$$

Обведем из основания перпендикуляра N радиусом ρ окружность и дадим приращение $d\rho$. Тогда весь заряд на плоскости AB получится как следующий интеграл:

$$e = +2\pi \int_0^\infty \sigma \rho d\rho = -ae \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{r^3}. \quad (49)$$

На основании $r^2 = a^2 + \rho^2$ мы имеем: $r dr = \rho d\rho$, откуда для (49) получаем:

$$e = -ae \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = -ae \left| \frac{1}{r} \right|_a^\infty = -\frac{1}{r} = -e.$$

Таким образом сумма зарядов на стенке равна по величине заряду e в точке O , но имеет противоположный знак. Это показывает, что все фарадеевы трубы, выходящие из заряда e , оканчиваются на отведенном к земле металлическом листе. По поводу этой задачи покойный Г. А. Лоренц предложил на конференции по вопросам кинетической теории, происходившей в Гётtingене в 1913 г., следующую задачу: что получится, если на заряженном теле, находящемся перед металлическим листом, будет находиться один элементарный положительный заряд — один протон? Так как меньше одного электрона заряда мы не знаем, то как может осуществиться сложное распределение (48)? Лоренц предложил следующий ответ: из металлического листа на поверхность в разных местах будут высказываться свободные электроны металла и будут оставаться на небольшую долю секунды. Поэтому, если подсчитать за промежуток времени, скажем, за секунду, средний заряд (средний по времени), тогда для средних величин распределение (48) может оказаться выполненным, несмотря на то, что этот средний заряд составит только долю элементарного заряда электрона, и несмотря на то, что каждый заряд, высказывающий хотя и на короткое время, имеет заряд, равный полному заряду электрона.

Пример 2. Пусть мы имеем заряд e , помещенный в точке P (рис. 119) около изолированного шарообразного проводника OS с центром O . Пусть радиус шара равен a . Отыщем на линии OP точку Q , которая удовлетворяла бы следующему соотношению:

$$OQ \cdot OP = a^2. \quad (50)$$

Соединим произвольно выбранную на поверхности шара точку S с точками P , O и Q . Так как на основании (50):

$$\frac{OQ}{a} = \frac{a}{OP}, \quad (50')$$

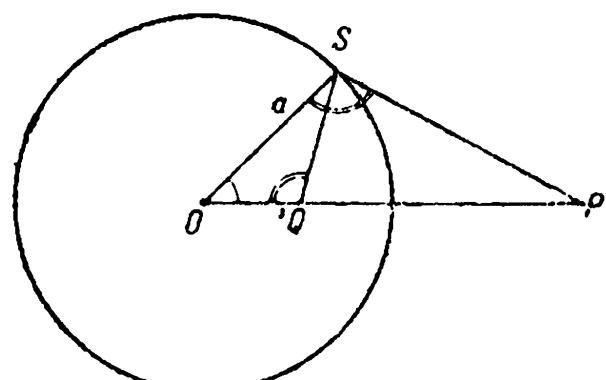


Рис. 119.

то $\triangle QOS$ подобен $\triangle POS$, потому что равные углы треугольников находятся между пропорциональными сторонами. Из этого условия вытекает следующее:

$$\frac{PS}{OS} = \frac{QS}{OQ},$$

или

$$\frac{PS}{QS} = \frac{OS}{OQ} = \frac{OP}{a}.$$

Обозначим для сокращения $OP = f$.

Далее, предположим, что в точке Q находится заряд e' ; тогда потенциал в точке S выразится:

$$\Phi = \frac{e}{PS} + \frac{e'}{QS} = \frac{1}{PS} \left(e + e' \frac{f}{a} \right), \quad (51)$$

причем это соотношение верно для любой точки поверхности шара, так как точка S была взята произвольно. Следовательно, при выбранных условиях потенциал шаровой поверхности постоянен. Если шар отведен к земле, то Φ должно равняться нулю, а тогда $e' = -e \frac{a}{f}$. Заряд e' называется „изображением“ заряда в шаровой поверхности. Аналогичным способом можно без особого труда решить ряд очень интересных и сложных задач.

§ 3. Задача Лангмюра.

Задача Лангмюра представляет большой интерес для всех, кому приходится иметь дело с испусканием электронов накаленными телами, — этот процесс сейчас положен в основу технических применений, поскольку им объясняются явления в электронных трубках, на которых

построена вся современная радиотехника. Мы рассмотрим эту задачу для простейшего случая плоских электродов, так как вычисления в этом случае значительно проще, а самый характер закономерности остается тот же, что и для цилиндрических поверхностей, для которых задача была решена самим Лангмюром и которые ближе подходят к реальным условиям, в которых приходится работать, но вычисления для которых значительно сложнее. Условия задачи следующие: накаленная пластинка, отведенная к земле ($\varphi = 0$) (рис. 120), испускает электроны по направлению к пластинке CD , находящейся при положительном потенциале φ_0 . Из соображений симметрии (пластинки предполагаются очень большими, а поле рассматривается в области, далекой от их краев) потенциал зависит только от координаты x . Так как все пространство между AB и CD заполнено летящими электронами, то, следовательно, в поле в каждой точке мы будем иметь так называемый „пространственный“ заряд. Поэтому для данного случая уравнение Пуассона принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho - 4\pi\rho_1, \quad (52)$$

где $\rho = -\rho_1$ — плотность отрицательных зарядов. Так как ток состоит в переносе зарядов, то

$$I_0 = \rho_1 v \quad (53)$$

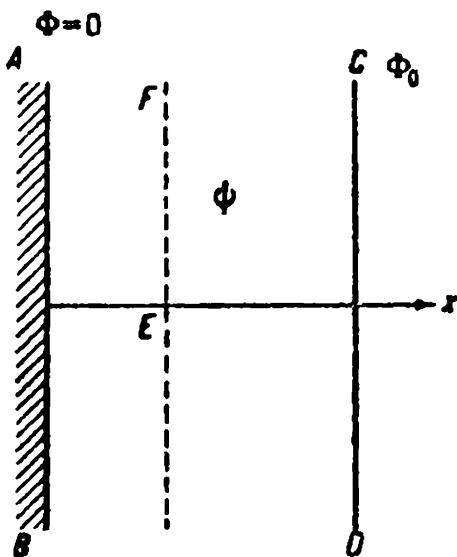


Рис. 120.

Скорость электрона v определяется из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi, \quad (54)$$

где m — масса электрона, e — заряд, а φ — разность потенциалов между той областью ϵ , где потенциал равен φ , и пластинкой, испускающей электроны. При этом делается молчаливое предположение, что электрон вылетает со скоростью, равной нулю. Это предположение допустимо потому, что скорости, сообщаемые в поле конденсатора, действительно, во много раз больше той, с которой электрон выделяется из накаленного тела. Принимая во внимание (53) и (54), мы можем преобразовать (52) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4\pi I_0}{\sqrt{2\frac{e}{m}}} \cdot \varphi^{-\frac{1}{2}}. \quad (55)$$

Полученное уравнение интегрируем следующим образом: умножаем обе части равенства на $\frac{d\varphi}{dx} \cdot dx$. Тогда получается:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{16\pi I_0}{\sqrt{2\frac{e}{m}}} \varphi^{\frac{1}{2}} + C_1. \quad (56)$$

Для определения произвольной постоянной мы предполагаем, что на накаленной пластинке не только $\varphi = 0$, но и $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, т. е. и напряжение поля на поверхности равно нулю, и что, следовательно, электроны вылетают вследствие той скорости, какую они имеют благодаря тепловому движению, а не вытягиваются, так сказать, внешним полем. При этом условии $C_1 = 0$, и тогда из (56) находим:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 4 \sqrt[4]{\frac{\pi I_0}{2\frac{e}{m}}} \varphi^{\frac{1}{4}}. \quad (56')$$

Интегрируя это выражение, что не представляет труда, так как переменные разделяются, находим:

$$\sqrt[4]{\varphi} = 3 \sqrt[4]{\frac{\pi I_0}{2\frac{e}{m}}} x + C. \quad (57)$$

При принятых нами условиях $C=0$, и тогда (57) можно представить следующим образом:

$$\varphi = \frac{9\pi I_0}{\sqrt{\frac{2e}{m}}} \cdot x^2, \quad (58)$$

или в форме:

$$I_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{1}{9\pi} \cdot \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{x^2}. \quad (58')$$

Это и есть формула Лангмюра. Мы вывели эту формулу для плоских электродов. Для цилиндрических получается:

$$I_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\beta r}. \quad (58'')$$

Здесь r — радиус цилиндра, по оси которого натянута накаленная нить, а β — числовой коэффициент. Величина тока взята в (58') на 1 см^2 , а в (58'') на 1 см , т. е. единицу длины накаленной нити.

§ 4. Шар в однородном поле.

До сих пор мы рассматривали самые разнообразные примеры частных решений уравнения Лапласа и Пуассона. Теперь рассмотрим случаи, когда одно и то же решение, удовлетворяющее уравнению Лапласа при различии дополнительных условий, представляет собой решение совершенно, на первый взгляд, разных физических вопросов.

Рассмотрим прежде всего однородное электрическое поле, причем пусть напряжение его E_0 имеет направление оси Z . Потенциал:

$$\varphi = -E_0 z + A. \quad (59)$$

Действительно, (59) дает:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_0.$$

Если мы в этом поле поместим проводящий шар, то, как мы сейчас докажем, решение будет иметь следующий вид:

$$\varphi = -\left(E_0 + \frac{B}{r^3}\right) z + A. \quad (60)$$

Мы помещаем центр шара в начале координат, а r есть расстояние от центра шара. Что (60) удовлетворяет всем требуемым условиям, вытекает из следующих соображений. На очень большом расстоянии от шара ($r = \infty$) (60) переходит в (59): искажающее влияние проводящего шара на больших расстояниях ничтожно; поле вдали от шара

остается однородным. Далее, (60), несомненно, удовлетворяет уравнению Лапласа, потому что $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{z}{r^3} \right) = 0.$$

Наконец, потенциал всех точек проводящего шара должен быть одним и тем же. Этому условию можно удовлетворить, положив

$$E_0 + \frac{B}{R^3} = 0,$$

или

$$B = -E_0 R^3$$

(где R — радиус шара). В самом деле, тогда, согласно (60):

$$\varphi_R = A. \quad (60')$$

Поэтому решением нашей задачи будет

$$\varphi = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) z + A. \quad (60'')$$

С помощью (60'') решим ряд вопросов. Прежде всего рассмотрим, как распределяется плотность заряда на поверхности шара. Для этого прежде всего введем в (60'') полярные координаты (рис. 121):

$$\varphi = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta + A. \quad (60''')$$

Составим

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2R^3}{r^3} E_0 \cos \theta.$$

Для поверхности шара:

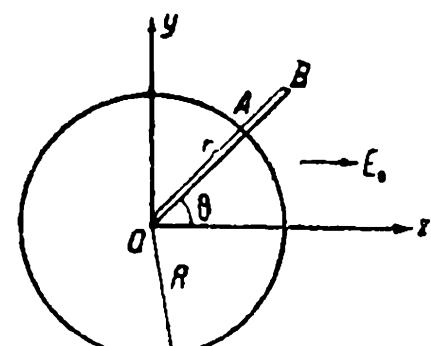


Рис. 121.

$$E_R = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 3E_0 \cos \theta.$$

Но мы уже знаем, что для поверхности проводника $-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 4\pi\sigma$, откуда для плотности заряда находим:

$$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta. \quad (61)$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ имеем: $\sigma_0 = \frac{3E_0}{4\pi}$ и $\sigma_\pi = -\frac{3E_0}{4\pi}$. Для $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. на экваторе, имеем $\sigma = 0$. Это — область, где отрицательные наведенные заряды переходят в положительные. Подсчитаем теперь поток вектора E , проходящий через шар. Так как заряд шара вызван через

влияние, то общий заряд его равен нулю. Поэтому, сколько фарадеевых трубок входит со стороны, где наведены отрицательные заряды, столько их выйдет с противоположной стороны. Составляем величину потока — $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R} 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$ и интегрируем его от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3E_0 \cos \vartheta 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = 3\pi R^2 E_0. \quad (62)$$

Если бы мы взяли шар непроводящий, с той же самой диэлектрической постоянной $\epsilon = 1$, какую имеет среда, где располагается изученное нами однородное поле, то поле останется однородным. Фарадеевые трубы останутся в виде параллельных линий и через шар они пройдут в числе $\pi R^2 E_0$. Через проводящий же шар, как видно из (62), проходит втрое более трубок. Таким образом, проводящий шар изменяет распределение трубок в частях поля, близких к его поверхности.

Рассмотрим теперь в однородном же поле шар, но не проводящий, а сделанный из диэлектрика с постоянной $\epsilon = \epsilon_1$. Пусть среда, в которую он помещен, попрежнему имеет $\epsilon = 1$. Различие с предыдущим случаем заключается в том, что внутри шара поле не равно нулю. Для внешней точки потенциал попрежнему будет равным:

$$\varphi_a = -E_0 z \left(1 + \frac{B}{r^3}\right) = -E_0 \left(r + \frac{B}{r^2}\right) \cos \vartheta. \quad (63)$$

Для внутренней полагаем:

$$\varphi_i = Cz = Cr \cos \vartheta. \quad (63')$$

При $r = R$:

$$(\varphi_a)_{r=R} = (\varphi_i)_{r=R}, \quad (64)$$

так как иначе на границе получается бесконечное значение для напряжения поля. Условие (64), если мы выразим (63) и (63') в полярных координатах, принимает вид:

$$-E_0 R - \frac{BE_0}{R^2} = CR,$$

или

$$-E_0 - \frac{E_0 B}{R^3} = C. \quad (64')$$

Так как на границе нет свободных зарядов, то $D_a = D_i$, т. е.

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=R} = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R}. \quad (65)$$

Подставляя сюда (63) и (63'), находим:

$$\epsilon_1 C = -E_0 + \frac{2B}{R^3}. \quad (65')$$

Из двух уравнений (64') и (65') мы получаем:

$$C = -\frac{3E_0}{\epsilon_1 + 2}$$

и

$$B = -\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} R^3. \quad (66)$$

С помощью этих значений находим окончательное выражение для (63) и (63'):

$$\psi_a = -E_0 \left(r - \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} \cdot \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \vartheta$$

и

$$\psi_i = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} r \cos \vartheta. \quad (67)$$

По аналогии с предыдущей задачей составляем поток вектора

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)_{r=R}$$

через половину поверхности шара:

$$Q = \frac{3E_0}{\epsilon_1 + 2} \epsilon_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{3E_0}{\epsilon_1 + 2} \epsilon_1 \pi R^2. \quad (68)$$

Таким образом поток в этом случае больше в $\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2}$ раз, чем для шара $\epsilon = 1$. При $\epsilon_1 = 1$ имеем: $\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2} = 1$. Если же $\epsilon_1 = \infty$, то мы получаем:

$$Q = 3E_0 \pi R^2, \quad (68')$$

т. е. то же самое, что и в предыдущем случае.

Нетрудно показать, что то же самое решение уравнения Лапласа решает задачу об обтекании несжимаемой жидкостью твердого шара, — только дополнительные условия здесь будут иные. Пусть жидкость, обтекающая шар, есть жидкость несжимаемая, и пусть имеет место потенциал скоростей, т. е. скорости могут быть выражены следующим образом:

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Так как жидкость предполагается несжимаемой, то от уравнения непрерывности остается $\nabla^2 \varphi = 0$. По аналогии с предыдущими задачами имеем:

$$\varphi = -w_0 z \left(1 + \frac{B}{r^3} \right), \quad (69)$$

или в полярных координатах:

$$\varphi = -w_0 \cos \vartheta \left(r + \frac{B}{r^2} \right). \quad (69')$$

Здесь w_0 — скорость потока. Жидкость во всех удаленных от шара областях течет параллельно оси Z со скоростью w_0 . Так как шар предполагается твердым, то на поверхности нормальная составляющая скорости должна равняться нулю. На основании (69') имеем:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = w_0 \cos \vartheta - w_0 \cos \vartheta \frac{2B}{R^3} = 0,$$

откуда: $B = \frac{1}{2} R^3$. Итак,

$$\varphi = -w_0 \cos \vartheta \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right). \quad (69'')$$

Мы видим отсюда, что одно и то же решение уравнения Лапласа является решением для целого ряда задач. Специфические же отличия отдельных физических задач выражаются, главным образом, в граничных условиях. В случае проводящего шара значение потенциала должно было оставаться постоянным по всей поверхности шара. Для шара из диэлектрика, внесенного в однородное поле, условия сводились к непрерывному переходу через границу потенциала φ и величины $\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

Наконец, для шара, обтекаемого несжимаемой жидкостью, $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ на поверхности шара должно было равняться нулю.

§ 5. Об однозначности решений уравнения Лапласа.

Мы до сих пор отыскивали решение уравнения Лапласа и приспособляли к заданным граничным условиям. Но, естественно, возникает вопрос: нельзя ли найти еще и другое решение того же уравнения Лапласа, которое можно приспособить к тем же граничным условиям? Доказать невозможность других решений можно следующим путем. Преобразуем интеграл

$$\int_{\tau} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau,$$

распространенный на всю область, для которой вычисляется функция φ , производя интегрирование по частям по схеме:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi \cos nx ds - \int \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} d\tau, \quad (a)$$

где S — поверхность, охватывающая область τ . Выражения, аналогичные (a), получаем для всех трех интегралов, на которые распадается данное

интеграл. Соединяя все три выражения вместе, получаем:

$$\int_{\tau} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\tau} \varphi \nabla^2 \varphi d\tau. \quad (70)$$

Для того чтобы преобразование (70) можно было выполнить, функция φ должна быть конечна, непрерывна и однозначна в области τ . Теперь предположим, что нам удалось для данной задачи найти две функции φ_1 и φ_2 , отличные друг от друга и являющиеся решением задачи. Составим функцию $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ и применим для нее (70). Так как и φ_1 , и φ_2 должны удовлетворять уравнению Лапласа, то последний член (70) обращается в нуль. Так как функции φ_1 и φ_2 должны на поверхностях удовлетворять одним и тем же условиям, т. е. иметь одни и те же значения на поверхности S , равно как и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то и первый интеграл правой части (70) должен обратиться в нуль. Остается

$$\int_{\tau} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^2 \right\} d\tau = 0. \quad (70')$$

Так как все элементы подинтегральной функции (70') положительны, то (70') может быть удовлетворено только при условии:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Это значит, что значения φ_1 и φ_2 могут отличаться только на постоянную величину, которая в выражении потенциала роли не играет. Таким путем можно доказать однозначность решения наших задач.

§ 6. Аналогия с электромагнитной массой.

Рассмотрим теперь случай твердого шара, движущегося в несжимаемой жидкости. Этот случай отличается от рассмотренного нами лишь тем, что ко всей системе надо прибавить скорость w_0 , а к потенциалу $w_0 z = w_0 r \cos \vartheta$. Таким образом решением нашей задачи будет функция

$$\varphi = w_0 \frac{A}{r^3} z = w_0 \frac{A}{r^2} \cos \vartheta. \quad (71)$$

Проверим, выполнится ли требуемое условие на границе. Нормальная слагающая скорости частиц жидкости на поверхности шара будет:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 2w_0 \frac{A}{R^3} \cos \vartheta,$$

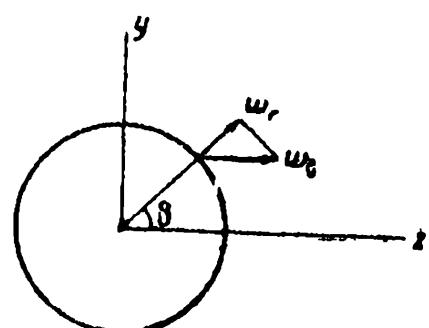


Рис. 122.

а слагающая по радиусу скорости самого шара будет $w_0 \cos \vartheta$ (рис. 122).

Отсюда $w_0 \cos \vartheta = 2w_0 \frac{A}{R^3} \cos \vartheta$, или $A = \frac{R^3}{2}$. Таким образом (71) принимает вид:

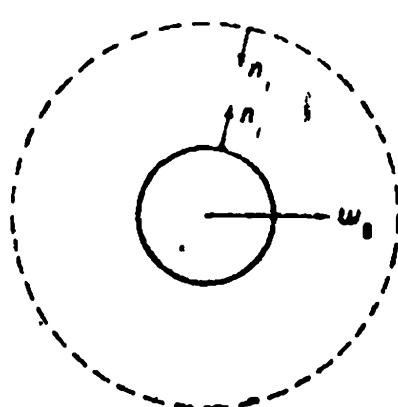
$$\varphi = w_0 \frac{R^3}{2r^2} \cos \vartheta. \quad (71')$$

Составляем выражение кинетической энергии для всей массы жидкости, окружающей шар:

$$U_k = \frac{1}{2} \rho_0 \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau. \quad (72)$$

Но интеграл, входящий в это выражение, совпадает с (70). А потому к нему применимы те преобразования, которые мы выполнили над (70). В качестве поверхности, ограничивающей объем, у нас будет поверхность шара R и поверхность бесконечно удаленной сферы (рис. 123). Примем за положительную нормаль, направленную внутрь области τ . Тогда, принимая во внимание, что на бесконечно удаленной от шара поверхности φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ стремятся к нулю и что φ удовлетворяет уравнению Лапласа, мы приходим к выводу, на основании (72) и (70), что кинетическая энергия всей жидкости, окружающей шар, может быть выражена следующим образом:

Рис. 123.



Жидкость, окружающая шар, может быть выражена следующим образом:

$$U_k = -\frac{1}{2} \rho_0 \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (72')$$

причем поверхность S есть поверхность шара радиуса R . За элемент поверхности берем $2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Вставляя в (72') выражение ds и (71'), мы находим:

$$U_k = \frac{1}{2} \pi \rho_0 w_0^2 R^3 \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} \pi R^3 \rho_0 w_0^2, \quad (72'')$$

или

$$U_k = \frac{1}{2} w_0^2 \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 \right) = \frac{1}{2} w_0^2 \left(\frac{M'}{2} \right). \quad (72''')$$

Таким образом энергия всей жидкости, приведенной в движение движущимся шаром, количественно равна кинетической энергии половины массы вытесняемой шаром жидкости и движущейся со скоростью, с которой движется шар. Отсюда шар, перемещающийся без трения в несжимаемой жидкости, движется так, как будто он находился не в жидкости, причем к его массе добавлена масса половины вытесняемой им жидкости. Эта добавочная масса аналогична электромагнитной массе. Можно составить из твердых гел такую систему, которая

ири движении в жидкости, в зависимости от скорости, меняла бы свою поверхность, которой она рассекает жидкость. Тогда добавочная масса будет изменяться со скоростью, и мы получим аналогию еще более полную с электромагнитной массой, изменяющейся со скоростью.

Рассмотрим теперь, как движется жидкость в соседстве с движущимся шаром. Для этого составим уравнение линий тока. Под линией тока мы будем разуметь линии, касательные к которым в каждой точке дают направление скорости находящихся в этом месте частиц жидкости. Если мы через dx , dy и dz обозначим проекции элемента ds линии тока, то дифференциальное уравнение линии тока будет $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, или в полярных координатах,

применительно к данному случаю (поле в данном случае обладает симметрией тела вращения):

$$\frac{r d\vartheta}{\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}} = - \frac{dr}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}. \quad (73)$$

После подстановки (71') и соответствующих сокращений находим:

$$\frac{2r d\vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{dr}{\cos \vartheta}, \quad (73')$$

или

$$2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta = \frac{dr}{r}, \quad (73'')$$

что после интегрирования дает:

$$r = C \sin^2 \vartheta. \quad (74)$$

Это и есть уравнение линий тока. Линии тока (74) можно получить простым геометрическим

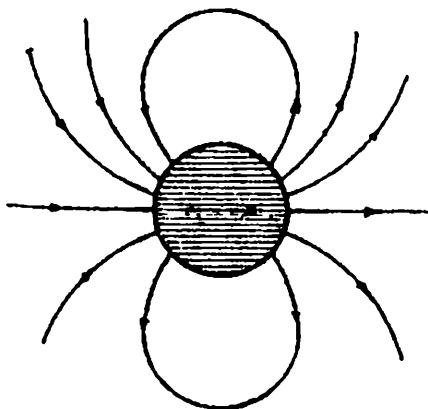


Рис. 125.

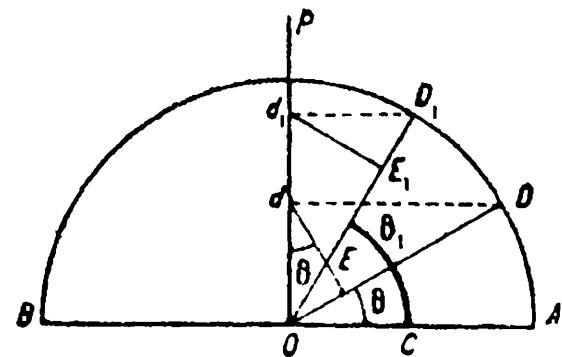


Рис. 124.

построением. Строим окружность радиуса $OA = C$ (рис. 124). Откладываем от AOB как от полярной оси угол ϑ , из точки пересечения OD с окружностью опускаем перпендикуляр Dd на OP (OP перпендикулярно к BOA), $Od = C \sin \vartheta$, из точки d опускаем перпендикуляр на сторону угла OD . Полученный отрезок $OE = r = Od \sin \vartheta = C \sin^2 \vartheta$. Таким образом E есть точка кривой, соответствующая углу ϑ . Точно так же E_1 будет точкой нашей кривой, соответствующей углу ϑ_1 . На рис. 125 изображены эти линии

тока. Из чертежа ясно, что движение шара в жидкости происходит таким образом, что шар вытесняет жидкость спереди, — эта жидкость, обтекая шар, становится на его прежнее место. Таким образом шар и жидкость обмениваются местами.

Глава III.

Взаимодействия пульсирующих шаров.

§ 1. Поле, вызванное несколькими движущимися шарами.

В настоящей главе мы рассмотрим интересный случай взаимодействия движущихся в несжимаемой жидкости шаров, причем мы, главным образом, остановимся на взаимодействии двух пульсирующих шаров, т. е. шаров с периодически меняющимися радиусами (резиновые шары с периодически меняющимся внутренним давлением воздуха). Случай взаимодействия шаров очень интересны потому, что мы при этом обнаруживаем замечательную аналогию этих взаимодействий с электрическими притяжениями и отталкиваниями, и кроме того, эти взаимодействия объясняют ряд процессов, имеющих исключительно важное практическое значение: тут мы воочию видим, что действия двух или нескольких тел не просто складываются, а что в результате взаимодействия получаются качественно новые явления, которых не было, когда мы рассматривали в отдельности действия каждой составной части данной системы.

Пусть мы имеем шар радиуса R , причем величина радиуса меняется периодически, так что \dot{R} будет скорость изменения радиуса¹. Нетрудно показать, что потенциал скоростей для данного случая будет:

$$\Phi = + \frac{R^2 \dot{R}}{r}. \quad (75)$$

Действительно, (75) удовлетворяет уравнению Лапласа, и кроме того, как мы сейчас увидим, выполняется и условие на границе шара. В самом деле,

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = \left(\frac{R^2 \dot{R}}{r^2}\right)_{r=R} = R, \quad (76)$$

т. е. скорость частиц жидкости совпадает на поверхности со скоростью частиц поверхности шара. Таким образом поле единственного пульсирующего шара имеет очень простой вид. Во всей жидкости вокруг шара частицы жидкости совершают колебания взад и вперед по направлениям радиусов. Теперь представим себе, что в данное поле внесен другой шар. Ясно, что характер движения должен измениться. Рассмотрим движение частиц по направлению радиуса, идущему от первого шара ко второму (рис. 126). Толчки, идущие от первого шара, дойдут, наконец, до второго и тут встретят препятствие, от которого

¹ Радиус R может быть выражен $R_0 + r_0 \sin nt$, тогда R будет колебаться в пределах $R_0 \pm r_0$, а скорость будет выражаться.

$$R = nr_0 \cos nt$$

дошедшая от первого шара волна должна отразиться. Эта отраженная волна, в отсутствии второго шара, не могла бы образоваться. Таким образом эта отраженная волна есть существенно новое, что вносит с собой второй шар. Но это еще не все. Отраженное от второго шара движение дойдет до первого, где произойдет второе отражение, волна пойдет ко второму шару и т. д., теоретически без конца, хотя на практике эти отраженные волны очень быстро ослабевают, и если шары находятся далеко друг от друга по сравнению с их радиусами, то уже даже вторым отражением, в первом приближении, можно пренебречь. Мы предположили, что второй шар не пульсирует; если и он будет пульсировать, то идущие от него волны дадут после отражения от первого такую же систему падающих и отраженных волн. В случае двух шаров мы должны поступать, согласно изложенному, следующим образом. Рассматриваем движение, вызванное первым шаром, как будто он был только в единственном числе. Пусть потенциал, соответствующий этому движению, будет Φ_1 . Далее, рассмотрим, какое получится движение, обусловленное отражением движения с потенциалом Φ_1 от второго шара, считая, что второй шар неподвижен. Пусть это отраженное движение выражается потенциалом Φ_{II} . Это отраженное движение дойдет до первого шара и даст начало отраженному движению с потенциалом Φ_{III} , причем при отражении от первого шара мы предполагаем, что отражение происходит от неподвижной поверхности, но эта поверхность находится в том положении, в каком ее застиг приход падающей волны. Итак, мы получаем для потенциала первого шара ряд:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_{II} + \Phi_{III} + \dots \quad (77)$$

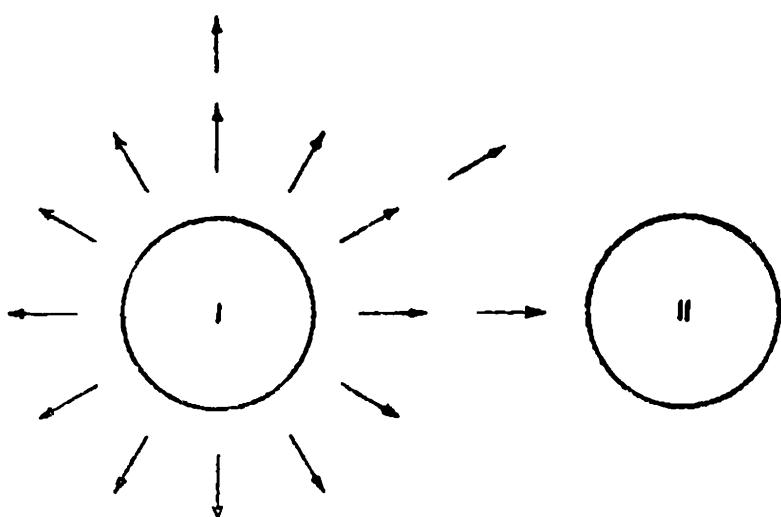


Рис. 126.

Такой же ряд составляем и для второго шара, предполагая, что второй шар двигается, а первый неподвижен. Общее движение выражается суммой двух рядов вида (77). Аналогичным путем можно решить и задачу о любом числе движущихся шаров. Мы будем рассматривать пульсирующие шары, но ясно, что разобранный метод применим и к движениям любого типа. Из сказанного ясно, что результат, вызванный движением нескольких тел, вовсе не равняется арифметической сумме. Мы видим, что действия даже только двух шаров, оказывается, выражаются бесконечным рядом двух типов членов, а вовсе не суммой двух первых членов ряда типа (77), выражающих действие, вызванное данными шарами в отдельности. Но, что особенно важно, мы здесь, шаг за шагом, наблюдаем, где и как происходит появление нового качества.

§ 2. О некоторых свойствах сферических функций.

Мы знаем, что функция $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от данной точки, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$. Мы уже видели, что и всякая функция, получающаяся путем дифференцирования $\frac{1}{r}$ по координатам, также удовлетворяет уравнению Лапласа. В общем случае, в качестве решения уравнения Лапласа, мы, следовательно, будем иметь:

$$V_k = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_k} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (78)$$

где h_1, h_2 и т. д. отмерены по произвольным направлениям, — они могут совпадать и с направлениями осей координат. В раскрытом виде (78), отвлекаясь от числового коэффициента, будет иметь вид:

$$\frac{1}{r^{k+1}} h_1 h_2 \dots h_k, \text{ или } \frac{1}{r^{k+1}} \cdot \frac{h_1 \dots h_k}{r^k},$$

т. е. V_k можно представить как произведение $r^{-(k+1)}$ на Y_k , т. е. на однородную функцию (сферическую) нулевой степени. В самом деле,

$$V_1 = (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

и

$$V_2 = \frac{(-1)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{xy}{r^2}.$$

Следовательно, в качестве Y_k мы получаем:

$$Y_1 = \frac{x}{r}, \quad Y_2 = \frac{3}{2} \frac{xy}{r^2}.$$

Итак,

$$V_k = \frac{1}{r^{k+1}} \cdot Y_k,$$

или

$$Y_k = r^{k+1} \cdot V_k. \quad (79)$$

Введем функцию

$$H_k = r^k Y_k = r^{2k+1} \cdot V_k. \quad (80)$$

Из сказанного ясно, что H_k — однородная функция степени k , которую можно выразить целой алгебраической функцией от координат. В самом деле, для рассмотренных нами примеров Y_1 и Y_2 мы получаем $H_1 = x$ и $H_2 = xy$. Функция $H_k = r^{2k+1} \cdot V_k$ также удовлетворяет уравнению Лапласа. Это можно доказать следующим образом. надо иметь

в виду, что $H_k = r^{2k+1} \cdot V_k$, где V_k удовлетворяет уравнению Лапласа. Составляем от H_k производные по x :

$$\frac{\partial H_k}{\partial x} = r^{2k+1} \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x} + V_k (2k+1) x r^{2k-1}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_k}{\partial x^2} &= r^{2k+1} \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + (2k+1) r^{2k-1} \cdot x \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x} + (2k+1) x r^{2k-1} \frac{\partial V_k}{\partial x} + \\ &+ V_k (2k+1) r^{2k-1} + V_k (2k+1) (2k-1) x^2 r^{2k-3} = r^{2k+1} \cdot \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + \\ &+ 2(2k+1) r^{2k-1} \cdot x \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x} + V_k (2k+1) r^{2k-1} + \\ &+ V_k (2k+1) (2k-1) x^2 r^{2k-3}. \end{aligned}$$

Теперь составляем такие же вторые производные от H_k по y и z и складываем с полученной производной по x . В результате имеем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_k &= r^{2k+1} \nabla^2 V_k + 2(2k+1) r^{2k-1} \left(x \frac{\partial V_k}{\partial x} + y \frac{\partial V_k}{\partial y} + z \frac{\partial V_k}{\partial z} \right) + \\ &+ r^{2k-1} \cdot 2(k+1)(2k+1) V_k. \end{aligned} \quad (80')$$

Так как V_k — однородная функция степени $(k+1)$, то по теореме Эйлера мы имеем¹:

$$x \frac{\partial V_k}{\partial x} + y \frac{\partial V_k}{\partial y} + z \frac{\partial V_k}{\partial z} = -(k+1) V_k,$$

и кроме того, так как $\nabla^2 V_k = 0$, то из $(80')$ следует, что $\nabla^2 H_k = 0$, что и требовалось доказать.

3. Связь падающего потока с отраженным и условия на поверхности шара.

Пусть мы имеем исподвижный шар, и пусть движение вызвано какой-либо посторонней причиной. Поместим начало координат в центре шара

¹ Теорему Эйлера можно доказать следующим образом. Пусть $f(x, y, z)$ — однородная функция n -й степени. Дадим переменным малые приращения αx , αy , αz . Тогда, по свойству однородной функции, имеем: $f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = (1 + \alpha)^n f(x, y, z)$, или в раскрытом виде:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) + \alpha \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) = \\ = f(x, y, z) \left\{ 1 + n \alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$nf = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Пусть потенциал, определяющий движение, равен Φ . Мы можем разложить этот потенциал вокруг начала координат в следующий ряд:

$$\Phi = \Phi_0 + \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dots \right), \quad (81)$$

где $\Phi_0, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \dots$ и т. д. представляют собой значения, взятые для начала координат. Это разложение в ряд можно изобразить еще и в следующем виде:

$$\Phi_t = \sum_k C_k H_k = \sum_k C_k r^k Y_k. \quad (82)$$

В самом деле, второй член представляет произведение функции $H_1 = x$ и т. д. на $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и т. д., что представляет собой значения скорости в начале координат. Потенциал отраженного движения должен обладать тем свойством, что сумма скоростей падающего и отраженного движений на поверхности шара должна давать нуль. Пусть потенциал, вызванный отраженным движением:

$$\Phi_{ref} = \sum_k C'_k V_k = \sum_k C'_k \frac{Y_k}{r^{k+1}}. \quad (83)$$

Предположим, далес, что каждой из составных частей внешнего движения соответствует свое отраженное. Предположение это вполне естественно. При этом условии мы должны иметь для каждого из индексов k соотношение:

$$-\left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial r}\right)_{r=R} - \left(\frac{\partial \Phi_{ref}}{\partial r}\right)_{r=R} = 0. \quad (84)$$

Вставляя (82) и (83) в (84), мы получаем

$$-C_k k R^{k-1} Y_k + C'_k (k+1) \frac{Y_k}{R^{k+2}} = 0,$$

откуда

$$C'_k = \frac{k}{k+1} C_k R^{2k+1},$$

и поэтому для отраженного движения имеем:

$$\Phi_{ref} = \sum_k \frac{k}{k+1} C_k R^{2k+1} \cdot \frac{Y_k}{r^{k+1}}, \quad (83')$$

или, если ввести выражение для „падающих волн“:

$$\Phi_{ref} = \sum_k \frac{k}{k+1} R^{2k+1} \cdot \frac{1}{r^{2k+1}} \Phi_{ik}. \quad (83'')$$

§ 4. Взаимодействие двух пульсирующих шаров, находящихся на расстоянии, большом по сравнению с их радиусами.

Пусть начало координат находится в центре второго шара радиуса R_2 , а ось X направлена по линии, соединяющей центры того и другого шара (рис. 127). Рассмотрим поле пульсирующего первого шара в точках, близких к поверхности второго шара. Принимая во внимание (75), мы имеем:

$$\Phi_1 = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r'} = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l+x} = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{l}} = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (85)$$

Постоянная величина в окончательном выражении давления, т. е. слагающая давления, которая во всех точках поверхности имеет одно и то же значение, ничего не дает для силы взаимодействия, которую мы ищем. Поэтому мы оставляем только один второй член:

$$\Phi_1 = -\frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l^2} x. \quad (85')$$

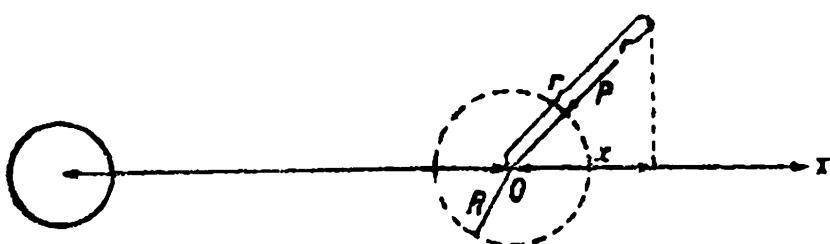


Рис. 127.

Взяв первый член из (83''), мы находим для „отраженного“ движения:

$$\Phi_{ref} = \frac{1}{2} R_2^3 \cdot \frac{1}{r^3} \Phi_1. \quad (86)$$

Прибавляя к сумме (85') и (86) собственное движение, вызванное вторым шаром, мы получаем:

$$\Phi = -\frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l^2} x - \frac{1}{2} R_2^3 \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{l^2} x + \frac{R_2^2 \dot{R}_2}{r}. \quad (87)$$

Мы, следовательно, учитываем только одно отраженное движение.

Вводим переменные:

$$a_1 = \frac{1}{3} R_1^3 \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{1}{3} R_2^3.$$

Тогда

$$\frac{da_1}{dt} = R_1^2 \dot{R}_1 \quad \text{и} \quad \frac{da_2}{dt} = R_2^2 \dot{R}_2,$$

а (87) принимает вид:

$$\Phi = -\frac{x}{l^2} \cdot \frac{da_1}{dt} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a_2}{r^3} \cdot \frac{x}{l^2} \cdot \frac{da_1}{dt} + \frac{1}{r} \cdot \frac{da_2}{dt}. \quad (87')$$

Для определения взаимодействия шаров (мы будем подсчитывать действие первого на второй) нам надо определить давление на поверхности

второго шара. Но ведь мы знаем, что в случае, когда существует потенциал скоростей, при отсутствии внешних сил, мы имеем следующий интеграл уравнений гидродинамики

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 = -\frac{p}{\rho} + C(t), \text{ или } p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 + C(t). \quad (88)$$

Зависящая от t величина C не будет играть никакой роли, потому что хотя она и меняется со временем, но она во всех точках шара будет одинакова и, следовательно, дает равнодействующую, равную нулю. Точно так же и членом с V^2 можно пренебречь, так как $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$, т. е. геометрической сумме скоростей, вызванных движением первого шара, плюс скорость, вызванная движением второго: $V^2 = \bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 + 2(V_1 V_2)$. Так как скорость, вызванная движением первого шара V_1 , пропорциональна x [(87)], то V_1^2 пропорционально x^2 , а мы пренебрегаем членами второго порядка. Что касается V_2 , то, так как скорости радиальны и во всех точках одинаковы, они ничего не могут дать при вычислении равнодействующей. Что же касается скалярного произведения $(V_1 V_2)$, то оно равно нулю потому, что V_2 радиально, а V_1 тангенциальна. Итак:

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (88')$$

При составлении (88') можно пренебречь всеми членами, не зависящими от x : они дадут одинаковое давление во всех точках поверхности шара и не скажутся на величине равнодействующей. Поэтому:

$$\begin{aligned} p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\rho x \left\{ \frac{1}{l^2} \cdot \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{l^2 R_2^3} \left(\frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt} + a_2 \frac{d^2 a_1}{dt^2} \right) \right\} = \\ &= -\frac{\rho x}{l^2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{1}{2a_2} \cdot \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Обозначим выражение, стоящее в скобках в (89), через C_0 ; тогда для величины давления на поверхности шара мы будем иметь:

$$p = -\frac{\rho x}{l^2} C_0 = -\frac{\rho}{l^2} R_2 C_0 \cos \vartheta.$$

Эта величина давления направлена по радиусу, а так как мы ищем равнодействующую по оси X (по линии, соединяющей центры обоих шаров), то нам надо взять величину проекции p на ось X , т. е. умножить еще на $-\cos \vartheta$. Итак,

$$X = -\frac{\rho}{l^2} R_2 C_0 \int_0^\pi 2\pi R_2^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{4\pi R_2^2}{3l^2} \rho C_0 = \frac{4\pi \rho a_2 C_0}{l^2}. \quad (90)$$

Преобразуем выражение

$$a_2 C_0 = \frac{3}{2} a_2 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt}. \quad (91)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(a_2 \frac{da_1}{dt} \right) = a_2 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{da_2}{dt} \cdot \frac{da_1}{dt},$$

(91) можно представить в следующем виде:

$$a_2 C_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(a_2 \frac{da_1}{dt} \right) - \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt}. \quad (91')$$

Так как пульсация — процесс периодический, то величина X должна быть взята как средняя за период, причем, вследствие периодичности процесса, член $C \frac{d}{dt} \left(a_2 \frac{da_1}{dt} \right)$ дает нуль. Таким образом для среднего значения (90) мы получим:

$$\bar{X} = - \frac{4\pi\rho}{l^2} \cdot \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt}, \quad (92)$$

где a_1 и a_2 пропорциональны объемам шаров. Пусть фазы пульсации различны, а частоты одни и те же. Предположим

$$a_1 = A_1 + c_1 \cos(nt + \varepsilon_1) \text{ и } a_2 = A_2 + c_2 \cos(nt + \varepsilon_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{da_2}{dt} &= n^2 c_1 c_2 \cdot \sin(n_1 t + \varepsilon_1) \sin(n_1 t + \varepsilon_2) = \\ &= \frac{c_1 c_2 n^2}{2} \{ -\cos(2nt + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \}. \end{aligned}$$

Вставляя это выражение в (92), мы находим:

$$\bar{X} = - \frac{2\pi\rho}{l^2} c_1 c_2 n^2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (92')$$

Если фазы одинаковы, то $\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1$, и мы имеем притяжение (ось X на рис. 127 направлена вправо). Таким образом „одноименно“, т. е. в одной и той же фазе, пульсирующие шары притягиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния l^2 . При $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi$ мы имеем отталкивание. Пульсирующие с противоположными фазами шары отталкиваются, при $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$ притяжение переходит в свою полярную противоположность — в отталкивание.

Эта теория была впервые разработана норвежским математиком С. А. Bjerkness'ом (Бьеркнессом) и в дополненном виде подробно изложена его сыном, известным физиком V. Bjerkness'ом.

Мы привели эту теорию, в общем, следя изящному методу, предложенному Лоренцом, в его лекциях по теоретической физике (1901—1902), изданных в 1926 г. Многие физики ставили вопрос, почему получается, в противоположность закону Кулона, притяжение для „одноименных“ тел и отталкивание для „разноименных“. Вопрос остается

открытым, проявляется ли здесь специфическая особенность электромагнитных процессов по сравнению с механикой или, как думает V. Bjerkness, это различие не имеет существенного значения, подобно тому как подъем воздушного шара есть только обратная сторона падения соответствующей более тяжелой массы воздуха, заменяющейся более легким воздушным шаром. В настоящее время, под влиянием все более и более растущего формализма в теоретической физике, замечательные работы Бьеркнесса почти забыты, а между тем, помимо громадного теоретического значения, они совершенно неожиданно подводят нас к решению интереснейших практических задач.

Как мы уже говорили, изложенным выше методом взаимодействие можно изучать не только для пульсирующих шаров, но для каких угодно типов движений. Исследование показывает, что если в жидкости движутся твердые шары и если их скорость не равна скорости течения самой жидкости, то при известных условиях между шарами возникают силы притяжения. Таким путем проф. Н. П. Кастерин в еще не напечатанном докладе, прочитанном на заседании Лебедевского физического общества 22 октября 1925 г.¹, показал, как образуется так называемый донный лед, который представлял во многих отношениях загадочное явление. При наступлении морозов в воде появляются мельчайшие кристаллики льда, которые можно рассматривать, в первом приближении, как шарики. Пока река течет спокойно, кристаллики движутся с той же скоростью, что и вода, и притяжений между ними нет. Когда же скорость течения изменяется, например на порогах или при сужении русла, кристаллики, по инерции, сохраняют свою скорость, отличную от изменившейся скорости течения воды, и тогда между ними начинают возникать силы притяжения, и таким образом, возникают большие льдины. Это явление может причинить немало бедствий. Так, в Ленинграде, много раз забивались льдом трубы водопровода, забирающие воду из Невы.

Знание причины этого явления позволяет вести борьбу с ним, что особенно важно на больших гидроэлектрических установках, как, например, Волховская, Днепровская и особенно для сибирских рек. Необходимо избегать всяких поводов к быстрому изменению скорости течения воды, так как именно в этих местах и выделяется так называемый донный лед.

Нетрудно сообразить, что это же явление объясняет процесс сбивания масла. При встряхивании сливок быстро изменяется скорость всей жидкой массы, а частички взвешенного масла сохраняют, по инерции, свою скорость. Вследствие этой разницы в скоростях взвешенных частиц, и всей жидкой массы, возникают силы притяжения между частичками масла, и масло собирается в комки. Эти гидродинамические силы притяжения и отталкивания были теоретически изучены Бьеркнессом старшим, и, как указывается в его биографии, он долго пытался найти способ проверить эти результаты на опыте, но вследствие полного отсутствия соответствующей лабораторной обстановки, вынужден был прибегнуть к следующему любопытному приему. Он бросал два деревянных крокетных шара в большой сосуд с водой. Если шары падали одновре-

¹ Взято из протоколов Физического общества имени П. К. Лебедева.

менно и с одной и той же высоты, то они начинали колебаться на поверхности воды, поднимаясь и погружаясь в воду в одной и той же фазе, — при этом оба шара плыли друг к другу навстречу вследствие возникших, благодаря движению жидкости, сил притяжения. Если же бросить с различных высот одновременно оба шара и добиться колебаний на поверхности жидкости с противоположной фазой, то получается отталкивание: шары расходятся в разные стороны. Это были первые опыты, подтвердившие замечательную теорию Бьеркнесса старшего. Бьеркнесс младший подверг теорию широкой экспериментальной проверке, подтвердив все ее выводы, и кроме того, внес в теорию существенные добавления. Так, он изучил взаимодействия вращающихся в жидкости твердых цилиндров и показал, что для них имеют место те же законы, которые были открыты для электрического тока Ампером и Био-Саваром. Этими соотношениями сейчас пользуются для расчетов подъемной силы аэро-планов. Конечно, никто не будет утверждать, что законы гидродинамики тождественны законам электромагнитного поля, но, вне всякого сомнения, установленная Бьеркнессом аналогия не является случайной, — она требует более глубокого изучения для установления сходств и различий между данными двумя областями. Такое сравнительное изучение способствует более глубокому изучению физических явлений, способствует развитию теоретического мышления, как об этом, правда, в очень осторожной форме, говорит и Лоренц в заключительных строках той главы, в которой он излагает эти замечательные работы

Часть V.

Основы термодинамики.

Глава I.

Первый принцип термодинамики.

§ 1. Основные задачи термодинамики и метод, которым она пользуется.

Во всех рассмотренных нами до сих пор вопросах теоретической физики мы вскрывали ту глубокую связь, какая существует между самыми разнообразными областями явлений. Приступая к изучению основных вопросов термодинамики, мы должны будем признаться, что на первых порах, при первом знакомстве с ее основными положениями, эта связь с другими областями физики, в частности, с теми вопросами, которые мы уже рассмотрели, не так ясна. Это может показаться тем более странным, что область термодинамики огромна. Иногда ошибочно полагают, что термодинамика ограничивается изучением явлений превращения тепловой энергии в энергию механического движения, и обратно. Правда, эти задачи, связанные с теорией и практикой паровой машины, послужили толчком для разработки основных положений термодинамики, или, как ее называли в половине XIX в., „механической теории тепла“; однако, уже на довольно ранней ступени развития термодинамики стало ясно, что выработанный ею метод приложим к изучению каких угодно процессов превращения энергии из одной формы в другую. Какая, именно, это будет форма, — безразлично. Метод классической термодинамики заключается именно в том, что, отвлекаясь от глубокого изучения самих процессов, отказываясь от изучения самого механизма явлений, мы на основе ряда установленных на опыте положений выводим общие законы тех явлений, которые сопровождают процесс превращения энергии. Таким образом метод термодинамики приближается к формальному внешнему описанию. Это, однако, нисколько не умаляет его достоинств, если только наряду с ним идет разработка кинетической теории материи, которая отправляется от определенной картины строения материи, т. е. как раз от того, что остается незатронутым в термодинамических теориях. Точно так же в области теории гальванических элементов методы термодинамики должны разрабатываться параллельно с теорией электронов и т. д.

Если мы обратимся к истории, то мы увидим, что все великие основатели термодинамики никогда не ограничивались одними только приемами термодинамики, но всегда рассматривали те же вопросы и иными методами. Так, Клаузиус, одновременно с разработкой основ термодинамики, первый дал систематическое изложение кинетической теории. Кельвин (Уильям Томсон) точно так же дал толкование второго принципа термодинамики с точки зрения молекулярной теории. Наконец, Витлард

Гиббс, разработавший термодинамические приемы изучения физико-химических процессов, первый дал систематическое изложение статистической механики, причем он сам считал статистическую механику „как рациональную основу термодинамики“. Энгельс, придававший огромное значение закону превращения энергии (он особенно подчеркивал важность в учении об энергии факта превращения энергии из одной формы в другую, качественно от нее отличную, при условии сохранения общего количества энергии), определенно указывал, что законы превращения энергии являются основой, от которой должно отправляться детальное изучение каждой формы движения — соответствующей той или иной форме энергии. „Теперь уже не приходится доказывать как нечто новое, что количество движения (так называемая энергия) не изменяется, когда из кинетической энергии (так называемой механической силы) оно превращается в электричество, теплоту, потенциальную энергию и т. п., и наоборот.

„Это раз навсегда служит также основанием более глубокого исследования самого процесса, в познании которого заключается все познание природы“ („Диалектика природы“, стр. 373—375, подчеркнуто нами. А. Т.). „Если мы знаем, в какое количество механического движения превращается определенная масса теплового движения, то мы еще ничего не знаем о природе теплоты, как бы ни необходимо было изучение этих превращений для исследования этой природы теплоты. Рассматривание ее как формы движения это — последний триумф физики...“ („Диалектика природы“, стр. 19, подчеркнуто нами. А. Т.) Вот, именно, вследствие того, что термодинамика необходима для изучения природы теплоты и других форм энергии, но сама еще не дает данных об этой природе, ее выводы и кажутся несколько оторванными от других областей. Мы увидим, как эти связи обнаружатся постепенно, по мере углубления в самое существо изучаемых нами процессов.

Другая особенность термодинамики, вытекающая из существа ее метода, заключается в том, что она рассматривает идеальные, так называемые обратимые, процессы. Под обратимым процессом мы подразумеваем такой процесс, который в любой момент можно заставить в точности ити в обратном порядке, проходя через все те состояния, но в обратной последовательности, через которые система прошла в «прямом» направлении. Например, пусть газ, заключенный в цилиндре под поршнем, сообщается с каким-либо источником тепла. Постепенно уменьшая давление на поршень, мы можем заставить газ расширяться и поглощать тепло от нагревателя. Если же мы в какой-либо момент, вместо уменьшения нагрузки, начнем загружать поршень, газ начнет сжиматься, и тепло начнет переходить в обратном направлении из газа в нагреватель. Для того, чтобы этот процесс „обращения“ был возможен, необходимо, чтобы температура газа бесконечно мало отличалась от температуры нагревателя, так как иначе при переходе от расширения к сжатию еще в течение некоторого времени температура газа будет ниже температуры нагревателя и, следовательно, тепло еще будет попрежнему переходить от нагревателя к газу, тогда как расширение уже сменилось сжатием. Таким образом „обращение“, т. е. обратный переход системы через прежние состояния, не осуществляется. Точно так же

скорость расширения должна быть бесконечно малая, — тогда ее сразу можно изменить на противоположную. Все это показывает, что термодинамика оперирует с идеальными процессами, представляющими собой абстракцию — отвлечение от реальных процессов, но это опять-таки не умаляет ее значения, так как таким образом мы находим предельные случаи, позволяющие нам заключать о том, как идут действительные процессы в природе, в лаборатории и на заводе¹. Наконец, мы всегда предполагаем, что для каждого вещества существует так называемое уравнение состояния

$$f(v, p, T) = 0, \quad (1)$$

связывающее температуру, объем и давление. В конкретной форме это уравнение для идеальных газов принимает вид уравнения Бойля-Мариотта-Гей-Люссака:

$$pv = RT, \quad (1')$$

или уравнения ван-дер-Ваальса, представляющего следующую ступень приближения по сравнению с законом Бойля-Мариотта. Это уравнение ван-дер-Ваальса имеет следующий вид:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \quad (1'')$$

где a и b — постоянные. Оно применимо не только к газам, но и отчасти к жидкостям. Очень часто в термодинамике ограничиваются допущением существования функции (1), не вдаваясь в рассмотрение того, какой она имеет вид. Таким образом состояние нашей системы при наличии (1) определяется двумя параметрами p , v , или p , T , или v и T (вообще говоря, эти параметры могут быть заменены другими: вместо объема v можно ввести плотность ρ и т. д.); третий параметр определяется из уравнения (1). Состояние системы однозначно определяет ее внутреннюю энергию. В самом деле, пусть мы имеем два состояния I и II, и пусть при переходе из состояния I во II система отдает во внешнее пространство количество энергии U . Пусть существует какой-либо другой способ перехода из состояния II в то же состояние I, и пусть при этом обратном переходе система берет из окружающего пространства энергию U' . Тогда система придет в прежнее состояние, а окружающие ее тела получат энергию $U - U'$ (каков знак этой разности, — неважно). Отсюда ясно, что наше предположение приводит к противоречию с законом сохранения энергии. Поэтому энергия есть однозначная функция состояния, что может быть выражено следующим образом:

$$dU = 0, \quad (2)$$

т. е. dU есть полный дифференциал, и если мы возвращаемся к прежнему состоянию, то и энергия принимает свое прежнее значение.

¹ Кроме того, даже для необратимых процессов, для каждого состояния, термодинамические функции — энтропия, термодинамический потенциал, свободная энергия — имеют вполне определенные значения, так что для любого состояния в любом необратимом процессе мы всегда можем определить эти функции.

Предположим, что мы какой-либо системе сообщаем некоторое количество тепла δQ , и пусть система такова, что она может совершать только механическую работу. Пусть мы имеем, например, газ, заключенный в цилиндре под поршнем, который может, расширяясь, выталкивать поршень и производить при этом работу, причем температура его может изменяться или оставаться неизменной.

Тогда по закону сохранения энергии, в общем случае, мы имеем:

$$\delta Q = dU + \delta A^1, \quad (3)$$

т. е. количество сообщенного тепла пошло на увеличение внутренней энергии системы плюс та работа, которая произойдет при расширении нагревшегося газа. В этом уравнении предполагается, что все величины, входящие в него, должны быть выражены в одних и тех же единицах. Если бы у нас в нашей системе происходили еще какие-нибудь превращения энергии, то пришлось бы добавить еще ряд членов $\delta A_2 + \delta A_3 + \dots$ в уравнении (3). В самом деле, если при введении количества тепла производится не только механическая работа, но, скажем, изменение поверхностной энергии, появление электромагнитной и т. д., то необходимо выразить, какая доля тепловой энергии δQ идет на каждый из

этих процессов в отдельности. Мы обозначили в (3) элемент работы и внесенное количество тепла не через дифференциал, а знаком δ , потому что эти величины не являются полными дифференциалами. Это обстоятельство легко разъяснить на примере работы δA , производящейся при расширении. Пусть на поршень AB (рис. 128) производилось давление p , и пусть газ расширяется при этом давлении. При перемещении поршня на dh произведенная работа будет:

$$\delta A = Sp dh = p dv, \quad (4)$$

где $S dh = dv$ — приращение объема. То же самое имеет место при расширении любого тела, находящегося под гидростатическим давлением p (рис. 129). Представим себе, что расширение происходит при переменном давлении и что система из состояния p_1, v_1 переходит в состояние p_2, v_2 . Тогда работа:

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv. \quad (5)$$

Ясно, что величина (5) будет зависеть от того, каким образом, через какие промежуточные

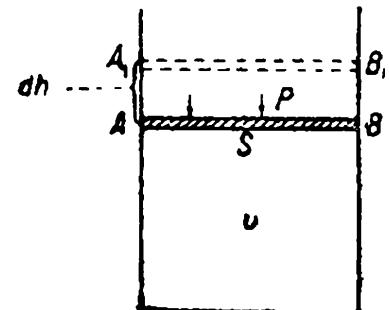


Рис. 128.

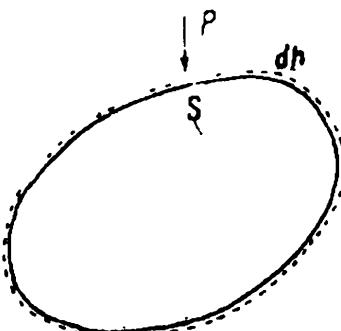


Рис. 129.

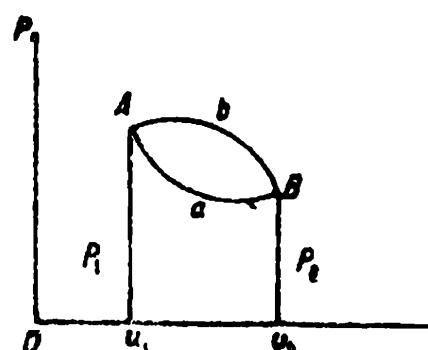


Рис. 130.

¹ Мы считаем, что тепло, сообщенное системе, положительно, а работа, совершенная системой, также положительна. Ясно, что знак зависит от условного соглашения, и в ряде руководств приняты противоположные обозначения.

состояния мы из состояния (1) перейдем в состояние (2). Работа выражается площадью $v_1 AaBv_2$ (рис. 180) или $v_1 AbBv_2$, в зависимости от того, как будет меняться давление: по кривой AaB или AbB или, наконец, по какой-либо другой кривой. Отсюда ясно, что δA — не полный дифференциал, и отсюда же следует, что δQ также не может быть полным дифференциалом.

§ 2. Применение первого принципа термодинамики к идеальному газу. Адиабатные и изотермические процессы.

Предположим, что мы имеем в сосуде (цилиндр, закрытый поршнем) 1 г идеального газа, подчиняющегося уравнению состояния (1). Выберем за параметры величины v и T . Тогда (3) можно для данного случая написать следующим образом:

$$\delta Q = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial T} dT + p dv. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что для идеального газа $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$. Это можно вывести, исходя из опыта Гей-Люссака, впоследствии повторенного Джайллем.

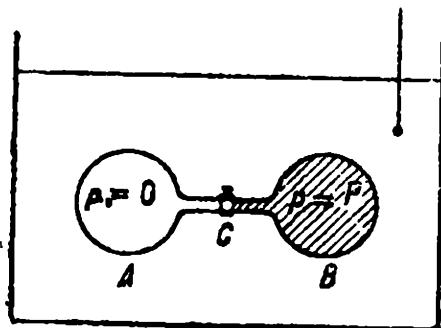


Рис. 131.

Пусть мы имеем два сообщающихся при помощи крана C сосуда A и B (рис. 131). Пусть в B заключен газ при давлении P , а из A воздух выкачен. Если мы, открыв кран, дадим давлению выровняться, все время перемешивая воду в калориметре, в котором находятся наши сообщающиеся сосуды, то в первом приближении можно считать, на основании опыта, что температура в калориметре не изменилась. Применяя к данному случаю уравнение (6), мы приходим к выводу: раз температура воды в калориметре не изменилась, то $\delta Q = 0$.

Далее, газ расширялся при внешнем давлении $p = 0$: из A воздух выкачен; поэтому последний член в (6) также обращается в нуль. Кроме того, так как температура не изменяется, то пропадает и второй член правой части. Итак, остается $\frac{\partial U}{\partial v} \cdot dv = 0$. Но объем газа изменяется. Следовательно, $dv \neq 0$. Отсюда вывод: $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$.

Рассмотрим, какой это имеет физический смысл. Если внутренняя энергия при расширении не изменяется, это значит, что при раздвижении частиц работа не производится, т. е. частицы друг друга не притягивают. Для всех реальных газов мы имеем, в большинстве случаев, уменьшение внутренней энергии¹ при расширении. Это указывает на то, что частицы газов притягивают друг друга. Поэтому, если производить указанный выше опыт Гей-Люссака более тщательно, то мы получаем в большинстве случаев охлаждение; этим пользуются для охлаждения газа при его сжижении в машине системы

¹ Мы отвлекаемся здесь от случаев „инверсии“, обсуждение которых заняло бы много места.

Линде и Гамсона Итак, для идеального газа, взятого в количестве единицы массы, мы можем написать уравнение (6) в следующем виде:

$$\delta Q = \frac{\partial U}{\partial T} dT + p dv. \quad (6'')$$

Пусть при каком-либо процессе $dv = 0$, тогда ясно, что $\frac{\partial U}{\partial T} = c_v$, т. е. удельной теплоте при постоянном объеме. Поэтому уравнение (6') можно написать еще в следующем виде:

$$\delta Q = c_v dT + p dv. \quad (6'')$$

Введем в (6'') параметры T и p . Так как $v = \frac{RT}{p}$, то

$$dv = \frac{R}{p} dT - \frac{RT}{p^2} dp.$$

Внося в (6''), имеем:

$$\delta Q = (c_v + R) dT - \frac{RT}{p} dp,$$

или

$$\delta Q = c_p dT - v dp, \quad (6''')$$

где c_p — удельная теплота при постоянном давлении, что вытекает из рассмотрения процесса, при котором $dp = 0$. Из сравнения двух выражений (6''') ясно, что

$$c_p = c_v + R. \quad (7)$$

При этом надо помнить, что все величины выражены в одних и тех же единицах. Если мы выразим (6''') в параметрах v и p , заменив dT через $\frac{v dp + p dv}{R}$, то мы приходим к выражению:

$$\delta Q = \frac{1}{R} \left(c_v v dp + c_p p dv \right). \quad (6''')$$

Таким образом мы имеем три выражения первого принципа термодинамики для идеального газа (6''), (6'''), (6''') — в зависимости от того, какими параметрами мы будем пользоваться.

Рассмотрим теперь, как для идеального газа будут связаны друг с другом параметры p , v и T в том случае, когда в газе происходят процессы, при которых газ не получает и не отдает тепловой энергии. Такого рода процесс называется „адиабатным“ от греческого *αιαβατος*, что значит „переходить“ (приставка *α* — отрицание). Эту связь мы получим из любого из уравнений (6''), (6''') и (6'''), положив $\delta Q = 0$. Мы получаем следующий ряд дифференциальных уравнений. Из (6'''), введя $k = \frac{c_p}{c_v}$, имеем:

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0. \quad (8)$$

Из (6) получаем:

$$c_0 dT + RT \frac{dv}{v} = 0$$

или

$$c_v dT + (c_p - c_v) T \frac{dv}{v} = 0,$$

что, после введения $k = \frac{c_p}{c_v}$ принимает вид:

$$\frac{dT}{T} + (k - 1) \frac{dv}{v} = 0. \quad (9)$$

Наконец, из (6) находим:

$$\frac{k}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} = 0. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9) и (10) интегрируются без труда, и мы получаем следующие три уравнения для адиабатного процесса в идеальном газе:

$$pv^k = \text{const}, \quad (8')$$

$$v^{k-1}T = \text{const}, \quad (9')$$

$$T^{\frac{k}{k-1}} p^{-1} = \text{const}. \quad (10')$$

Все эти выражения, как нетрудно убедиться, можно получить одно из другого, преобразуя переменные с помощью $pv = RT$.

Пример 1. Предположим, что воздух, находящийся под поршнем в цилиндре при температуре $t = 0^\circ \text{C}$ ($T_0 = 273$), сжимается до 0,01 начального объема v_0 адиабатным путем. Спрашивается, насколько повышается температура T , если для воздуха $k = 1,4$?

Решение. Ясно, что в данной задаче надо взять уравнение адиабаты в форме (9), т. е. $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1}$, или

$T = 273 \cdot 100^{0,4}$; $\log T = \log 273 + 2 \cdot 0,4$; $\log 273 = 2,438$; $\log T = 3,238$, откуда $T = 1730$, или $t = 1457^\circ \text{C}$.

Пример 2. Как велика работа при адиабатном расширении газа от объема v_1 до объема v_2 ?

Решение. Работа при расширении:

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv. \quad (11)$$

Но между p и v существует связь $pv^k = p_1 v_1^k$. Итак,

$$A_{12} = p_1 v_1^k \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^k} = p_1 v_1^k \left| \frac{v_2^{1-k} - v_1^{1-k}}{1-k} \right|,$$

или, вводя $p_2 v_2^k = p_1 v_1^k$, имеем,

$$A_{12} = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{k-1}. \quad (11')$$

Пример 3. Какое количество тепла требуется на изотермическое расширение идеального газа от объема v_1 до v_2 и как велика производимая газом работа?

Решение. При изотермическом процессе $dT = 0$. Поэтому (6) дает для количества тепла, сообщенного газу:

$$Q_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT \log \frac{v_2}{v_1}^1.$$

Здесь может возникнуть сомнение по следующему пункту: (12) показывает, что работа при изотермическом расширении нацело равна полученному количеству тепла. Мы как будто здесь находимся в противоречии со вторым принципом термодинамики, согласно которому тепло не может нацело переходить в работу. Противоречие, однако, разрешается очень просто: изотермический процесс не представляет собой замкнутого кругового процесса, его нельзя уподобить одному из циклов периодически действующей паровой машины. Как мы увидим, второй принцип термодинамики заключается в том, что нельзя построить периодически работающую машину, действие которой сводилось бы только к превращению нацело взятого у нагревателя тепла и при отсутствии каких бы то ни было других процессов в окружающих телах.

§ 3. Процесс Карно.

Рассмотрим круговой идеальный процесс, носящий название „процесса Карно“, который представляет собою то, что происходит в идеальной модели тепловой машины, превращающей тепловую энергию в механическую работу. Мы предположим, что идеальный газ заключен в цилиндре C (рис. 132) с непроницаемыми для тепла стенками и поршнем и совершенно теплоизолированным дном. Пусть на поршне укреплена площадка A с грузами, которые можно при движении поршня сдвигать без затраты работы на полочки B или с полочек B загружать поршень добавочными грузами. (Это расположение принадлежит покойному проф. Б. К. Младзееевскому.) Пусть идеальный газ в цилиндре в начале процесса имеет объем v_1 , давление p_1 и температуру T_1 . Поставим цилиндр с тепло-

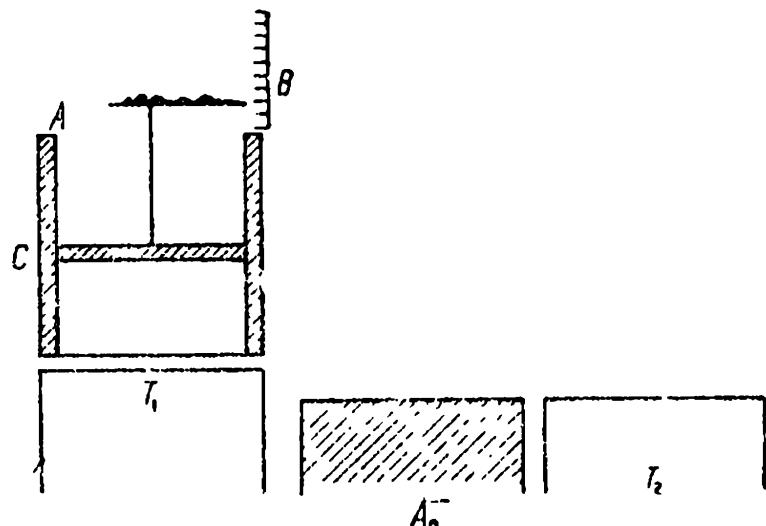


Рис. 132.

* Постоянная R зависит от того, какое количество газа принимает участие в нашем изотермическом расширении. Если R отнесено к одному грамму и если в нашем примере участвует m граммов газа, то новая постоянная $R_m = mR$.

проницаемым дном на нагреватель температуры T_1 и, постепенно разгружая поршень, дадим возможность газу расширяться изотермически до объема v_2 . Процесс изобразится на диаграмме (рис. 133) отрезком $1-2$, а количество тепла, взятое у нагревателя, окажется равным $Q_{12} = RT_1 \log \frac{v_2}{v_1}$.

Когда газ расширится до объема v_2 , мы переносим цилиндр на „адиабатную“ подставку A_0 и даем газу адиабатно расширяться до тех пор (до объема v_3), пока он не примет температуры холодильника T_2 . Выполненная газом работа будет при этом (§ 2, прим. 2):

$$A_{23} = \frac{p_2 v_2 - p_3 v_3}{k-1}. \quad \text{Когда температура газа достигнет } T_2, \text{ переносим ци-}$$

линдр на холодильник и, начиная постепенно загружать поршень, проводим изотермическое сжатие до такого состояния v_4 и p_4 , которое находится на одной и той же адиабате с точкой p_1 и v_1 . Количество отданного холодильнику тепла будет:

$$Q_{43} = RT_2 \log \frac{v_3}{v_4}. \quad (12)$$

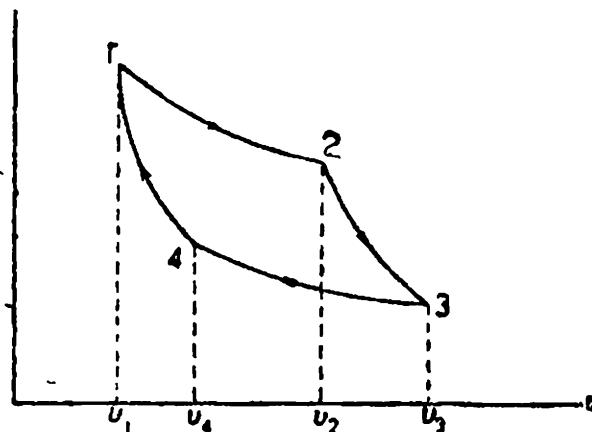


Рис. 133.

Помещаем цилиндр вновь на адиабатную подставку и продолжаем адиабатное сжатие путем постепенной загрузки поршня до тех пор, пока мы, следуя по адиабате, не достигнем точки пересечения с изотермой T_1 , т. е. пока мы не возвратимся в исходное состояние. Произведенная при этом работа будет:

$$A_{41} = \frac{p_1 v_1 - p_4 v_4}{k-1}. \quad (13)$$

В общем итоге газ, работавший в нашей машине, даст следующее количество механической работы:

$$W = RT_1 \log \frac{v_2}{v_1} + \frac{p_2 v_2 - p_3 v_3}{k-1} - RT_2 \log \frac{v_3}{v_1} - \frac{p_1 v_1 - p_4 v_4}{k-1}. \quad (14)$$

Последние два выражения взяты со знаком минус потому, что соответствующие величины работы производятся над газом, а первые две — выполняются самим газом. Так как точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, то

$$p_1 v_1 = p_2 v_2, \quad (a)$$

точно так же и точки 3 и 4 лежат на одной и той же изотерме, а потому

$$p_3 v_3 = p_4 v_4. \quad (b)$$

Отсюда ясно, что второй и четвертый члены (14) взаимно уничтожаются.

Далее, нетрудно показать, что $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}$. Это доказывается следующим образом: точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, следовательно,

$$p_2 v_2^k = p_3 v_3^k. \quad (c)$$

Точно так же для точек 4 и 1 имеем:

$$p_1 v_1^k = p_4 v_4^k. \quad (d)$$

Разделив почленно (с) на (d), имеем $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^k \frac{p_3}{p_4}$, или, заменив в этом выражении по (а) и по (б): $\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2}{v_1}$ и $\frac{p_3}{p_4} = \frac{v_3}{v_4}$, мы имеем: $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{k-1}$, или $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}$. (15)

Составим выражение для коэффициента полезного действия η , т. е. для отношения полученной полезной механической работы к количеству тепла Q_{12} , взятому от нагревателя. Принимая во внимание (15), мы получаем:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (16)$$

а также имеем:

$$\frac{Q_{12}}{Q_{43}} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (17)$$

Из сказанного ясно, что даже в рассмотренном идеальном процессе Карно мы не можем использовать нацело всю тепловую энергию, превратив ее в механическую работу. В нашем круговом процессе мы неизбежно должны часть энергии Q_{43} передать холодильнику. Это количество будет тем меньше, чем меньше будет T_2 . Мы теоретически могли бы использовать все тепло нагревателя, если бы температура холодильника $T_2 = 0$, т. е. холодильник был бы при абсолютном нуле. Если температура нагревателя 100° , а температура холодильника 0° , то коэффициент полезного действия будет: $\eta = \frac{100}{373} = 26,8\%$. Надо помнить, что

этот коэффициент взят для идеальной машины, в которой отсутствуют какие бы то ни было потери. Поэтому для действительных машин, работающих при тех же температурах нагревателя и холодильника, коэффициент η будет значительно ниже. Вообще, очень выгодно повышать температуру работающих газов и понижать температуру холодильника. Вот почему двигатели внутреннего сгорания, у которых вспышка и выделение тепла происходит в самом цилиндре и при очень высокой температуре, дают значительно больший коэффициент полезного действия.

Если мы заставим машину работать в обратном направлении (против стрелки часов на диаграмме), то нам придется затрачивать работу извне, причем мы будем отнимать тепло Q_{43} у холодильника и передавать тепло Q_{12} нагревателю, — это будет схема холодильной машины. Таким образом при затрате работы мы можем брать у холодного тела тепло и передавать это тепло более нагретому телу. Как мы видели, при подсчете коэффициента полезного действия машины, работающей идеальным газом, нам не потребовалось прибегать ко второму принципу термодинамики, так что все, что мы делали до сих пор, было основано на первом принципе термодинамики.

§ 4. Примеры приложения первого принципа термодинамики.

Пример 1. Определение отношения $k = \frac{c}{c_v}$ по способу Клемана и Дезорма. В сосуде A (рис. 134) устанавливается давление $p = p_0 - h_1$ меньше атмосферного p_0 ; разница h_1 измеряется столбом жидкости в манометре BC . Пусть удельный объем будет v_1 и температура T_0 . Открываем на короткое время кран K , устанавливающая сообщение A с атмосферой; тогда в A устанавливается атмосферное давление p_0 , удельный объем будет v_0 и температура T_1 .

Далее, закрыв кран, даем сосуду остывать до температуры T_0 , причем удельный объем остается тот же (v_0), а давление понижается до $p_2 = p_0 - h_2$. Итак, мы имеем три состояния:

- 1) $p_1 = p_0 - h_1$, v_1 и T_0 ,
- 2) p_0 , v_0 , T_1 ,
- 3) $p_2 = p_0 - h_2$, v_0 и T_0 .

Сравнивая 1) и 3), мы имеем:

$$(p_0 - h_1)v_1 = (p_0 - h_2)v_0. \quad (18)$$

Сравнивая 1) и 2), мы на

основании адиабатного закона (8) имеем:

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^k = \frac{p_0}{p_0 - h_1}. \quad (19)$$

Соединяя (18) и (19), находим:

$$\left(\frac{p_0 - h_2}{p_0 - h_1}\right)^k = \frac{p_0}{p_0 - h_1}, \quad (20)$$

откуда, логарифмируя, получаем:

$$k = \frac{\log p_0 - \log p_0 - \log \left(1 - \frac{h_1}{p_0}\right)}{\log \left(1 - \frac{h_2}{p_0}\right) - \log \left(1 - \frac{h_1}{p_0}\right)}, \quad (21)$$

или

$$k \approx \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

При разложении логарифмов в ряд мы ограничиваемся первым членом разложения:

$$\log \left(1 - \frac{h_1}{p_0}\right) \approx -\frac{h_1}{p_0}.$$

Таким образом определение k сводится к измерению столбов h_1 и h_2 в манометре прибора.

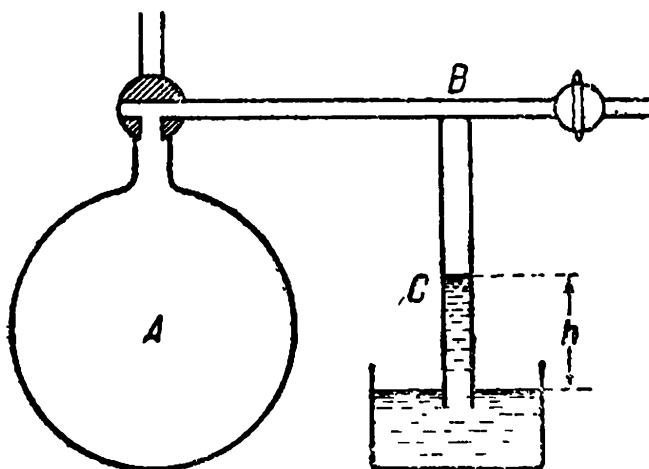


Рис. 134.

Пример 2. Высота атмосферы согласно адиабатному закону распределения температуры. Рассмотрим сначала общее условие равновесия атмосферы. Пусть мы в слое толщиной dx выделяем область с основанием в 1 см (рис. 135). Вес этой выделенной нами части будет $\rho g dx$. Выделенная нами часть может быть в равновесии только при условии, что давление убывает с высотой. Тогда разность давлений:

$$p_0 - p_1 = gp dx. \quad (22)$$

Разлагая в ряд $p_1 = p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} dx$, мы получаем:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = gp. \quad (22')$$

Ход изменения с высотой зависит от связи между p и ρ . Первое предположение: $p = RT\rho$ и $T = \text{const}$. Тогда $\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dx$, откуда $\log p = -\frac{g}{RT} x + \log C$, или

$$p = Ce^{-\frac{g}{RT} x}. \quad (23)$$

Если на уровне моря

$$x = 0 \text{ и } p = p_0, \text{ то } p = p_0 e^{-\frac{g}{RT} x}. \quad (23')$$

Надо сказать, что принятые нами условия не соответствуют действительности. В самом деле, согласно (23) температура на любой высоте должна быть одна и та же, а мы знаем, что температура довольно быстро падает по мере поднятия над уровнем земли. Согласно (23') нельзя указать на границу атмосферы, так как $p = 0$ только при $x = \infty$.

Второе предположение:

$$pv^k = p_0 v_0^k. \quad (8)$$

Это предположение основывается на следующем: если на поверхности земли воздух нагревается и начинает подниматься вверх, то при расширении, обусловленном уменьшенным давлением, температура его будет понижаться; если температура в том слое, куда поднялась нагревшаяся на поверхности земли и при поднятии от расширения охладившаяся масса воздуха, будет одинакова с температурой этой поднявшейся массы, то дальнейший подъем его прекратится. Это имеет место при установившейся погоде и так называемом адиабатном распределении температуры. Из (8') получаем:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

или

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (24)$$

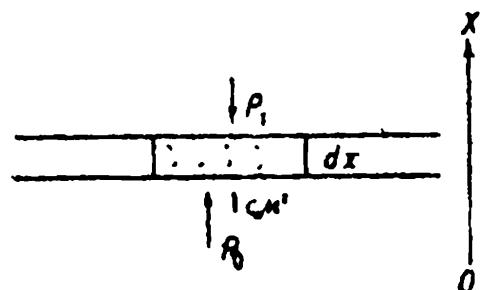


Рис. 135.

Вставляя в (22'), мы находим:

$$\frac{dp}{\frac{1}{k}} = - \frac{g\rho_0}{\frac{1}{k}} dx. \quad (25)$$

Интегрируя, имеем:

$$\frac{\frac{p^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}}}{p_0^{\frac{1}{k}}} = - \frac{g\rho_0 x}{\frac{1}{k}} + C. \quad (25')$$

Постоянную C определяем из условия, что при $x=0$ будет $p=p_0$.

Вставляя найденное таким путем C в (25'), мы получаем:

$$\frac{\frac{p^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} - \frac{p_0^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}}}{p_0^{\frac{1}{k}}} = - \frac{g\rho_0}{\frac{1}{k}} x. \quad (25'')$$

Теперь ставим вопрос: на какой высоте x_1 давление $p=0$? Из (25'') имеем:

$$\frac{k}{k-1} p_0 = g\rho_0 x_1, \quad (26)$$

или

$$x_1 = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{g\rho_0}. \quad (26')$$

Для воздуха $k=1,4$ и $\rho_0=0,001293$ (для 0°C и 760 мм), $p_0=76 \cdot 13,6 \cdot 981$ и $g=981 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$. Вставляя эти данные в x_1 , находим:

$$x_1 = \frac{1,4}{0,4} \frac{1033}{1,3 \cdot 10^{-3}} = 2,7 \cdot 10^6 \text{ см} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ м} = 27 \text{ км.}$$

Целый ряд данных, касающихся определения высоты полярных сияний и так называемых „падающих звезд“, указывает, что атмосфера, хотя и крайне разреженная, есть на высоте нескольких сот километров. Отсюда ясно, что если рассмотренный нами закон для небольших высот недалек от истины, то по мере увеличения x расхождения с действительностью становятся все значительнее. Как на одну из главных причин можно указать на переход пара воды в жидкое и твердое состояния, что сопровождается громадным выделением тепла. Это выделение тепла совершенно изменяет ход распределения плотности, и потому с тех слоев, где уже началось оседание пара, давление будет изменяться с высотой по иному закону.

Пример 3 (на применение уравнения состояния). Пусть температура воздуха (абсолютная) равна T_0 . Как высока должна быть температура в топке котла, чтобы получить наиболее выгодные условия для сгорания?

Решение. Чем выше температура, тем, казалось бы, большее должна быть тяга. Однако при повышении температуры входящий в топку воздух настолько расширяется, что через данную полость топки да-

же при быстром токе, вызванном большой разностью температур, будет проходить меньшее количество воздуха. Поэтому по мере повышения температуры количество проходящего через топку воздуха сначала растет, достигает максимума и затем начинает спадать. Определим этот максимум.

Предполагаем, что внутри топки (рис. 136, I) давление такое же, как и снаружи. Тогда, применяя закон Бойля-Мариотта, имеем: $pv_0 = RT_0$ для наружного воздуха и $pv_1 = RT_1$ для газов топки. Вводя плотности, находим:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{H}{H+h}. \quad (27)$$

Последнее отношение $\frac{H}{H+h}$ имеет следующий смысл. Тягу в трубе можно истолковать следующим образом: пусть мы имеем сообщающиеся сосуды, причем один из них имеет высоту фабричной трубы, а другой — несколько выше. Если мы наполним оба колена веществом плотности ρ_1 , причем высота уровня в одном колене будет H , а в другом $H+h$, то со стороны сосуда $H+h$ получится такой же перевес давления, какой имеет место со стороны окружающего воздуха (имеющего большую плотность) через топку на газы, находящиеся в трубе. Итак, избыток давления, вызывающий тягу, $h = H \frac{T_1 - T_0}{T_0}$.

Применяя закон Торичелли (ч. II, гл. II, § 3), находим для скорости вытекающих горячих газов:

$$u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gH \frac{T_1 - T_0}{T_0}}. \quad (28)$$

Далее, согласно (27) мы имеем $\frac{v_0}{v_1} = \frac{T_0}{T_1}$; но объемы можно представить как произведения из скорости потока в поддувале и в трубе, соответственно, на сечения поддувала и трубы, т. е. $\frac{S_0 u_0}{S_1 u_1} = \frac{T_0}{T_1}$. Соединяя это равенство с (28), мы получаем:

$$u_0 = k \frac{S_1}{S_0} \sqrt{2gH} \sqrt{\frac{T_0(T_1 - T_0)}{T_1^2}}. \quad (28')$$

В (28') коэффициент k введен для учета сопротивления при движении газов в топке и трубе. Определяем T_1 , при котором (28') будет иметь максимум. Максимум будет при $T_1 = 2T_0$. Если $T_0 = 273$, то $T_1 = 546$, или 273°C . Таким образом иметь температуру в газах фабричной трубы выше 273° не имеет смысла. Исследование (28') показывает, что если взять температуру ниже максимальной, то большого уменьшения (28') не получается, но зато уменьшаются потери тепла, уносимого газами через трубу.

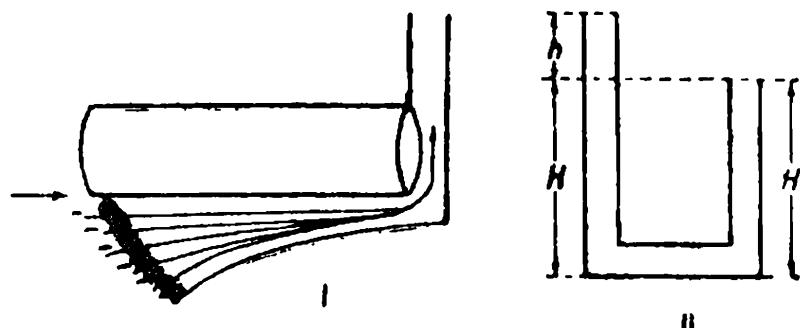


Рис. 136.

§ 5. Способы построения кривых вида $p v^n$.

В технических приложениях термодинамики очень часто приходится изучать зависимости изменения давления от объема, которые выражаются кривыми типа $p v^n$, так называемыми „политропами“, причем n может

иметь разные значения. В целом ряде случаев необходимо по данной кривой определить величину n и, наоборот, для расчетов сплошь и рядом требуется по данному n построить кривую. Рассмотрим сначала первую задачу. Пусть нам дана кривая $A_1 A_2$ (рис. 137), о которой мы знаем, что она должна быть типа $p v^n$. Согласно § 2, прим. 2, (11) площадь $A_1 b_1 b_2 A_2$ должна равняться $A_1 = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{n-1}$. Из чертежа ясно, что площадь $A_1 a_1 a_2 A_2 = A_2 = A_1 + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \frac{n}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2)$.

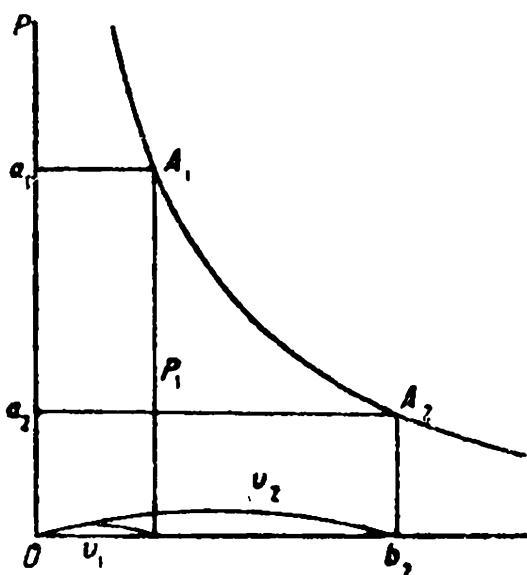


Рис. 137.

ким образом вопрос сводится к измерению двух площадей.

Обратная задача. По данному уравнению $p v^n = \text{const}$ построить кривую. Выбираем прямоугольную систему координат p , v (рис. 138) и задаемся парой значений p_0 и v_0 , определяющих точку M нашей кривой. Помещаем в O вершину произвольного угла α , одна из сторон которого совпадает с осью v (угол отложен в сторону отрицательных v). Определяем некоторый угол β сообразно следующему условию:

$$1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^n. \quad (\text{a})$$

(Число n нам известно.) Откладываем угол β от оси p в сторону отрицательных v , поместив вершину угла в O . Опускаем из M_0 перпендикуляр на ось v и продолжаем до пересечения с другой стороной угла A_1 . Откладываем $AA_2 = AA_1$ и восставляем перпендикуляр $A_2 M_1$.

С другой стороны, опускаем из M перпендикуляр MBB_1 , делим пополам угол $B_1 BC$ и из точки пересечения B_2 опускаем перпендикуляр на ось p и продолжаем до точки пересечения M_1 с $M_1 A_2$. Нетрудно

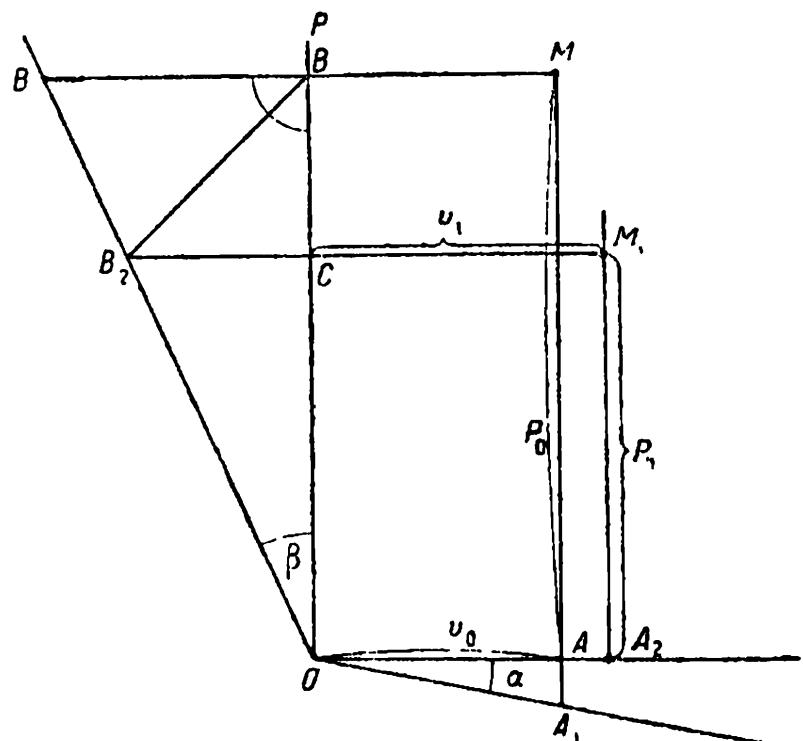


Рис. 138.

показать, что M_1 будет лежать на кривой $pv^n = \text{const}$. Действительно,

$$v_2 = v_0 + v_0 \operatorname{tg} \alpha = v_0 (1 + \operatorname{tg} \alpha). \quad (\text{b})$$

Далее, $p_0 - p_1 = p_1 \operatorname{tg} \beta$, или

$$p_0 = p_1 (1 + \operatorname{tg} \beta) \quad (\text{c})$$

(так как $BC = B_2C$). Возводя в степень n выражение (b) и перемножая накрест с (c), имеем:

$$v_0^n p_0 (1 + \operatorname{tg} \alpha)^n = v_1^n p_1 (1 + \operatorname{tg} \beta),$$

что на основании (a) приводит к $p_0 v_0^n = p_1 v_1^n$.

Глава II.

Второй принцип и некоторые приложения первого и второго принципа термодинамики.

§ 1. Второй принцип термодинамики.

Рассматривая цикл Карно, мы пришли к выводу, что если машина Карно работает идеальным газом в качестве рабочего вещества, то коэффициент полезного действия будет:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_{12} - Q_{43}}{Q_{12}}. \quad (29)$$

Однако мы не можем сказать, что это есть предельный коэффициент полезного действия, так как можно предположить, что кроме идеального газа найдется, быть может, такое вещество, которое, будучи использовано в качестве рабочего вещества, может дать нам еще более высокий коэффициент полезного действия. Второй принцип термодинамики дает нам возможность доказать, что коэффициент полезного действия ни при каких условиях не может быть больше вычисленного нами для машины Карно, работающей идеальным газом.

Доказательство следующее.

Пусть мы имеем машину I, рабо-

тающую с помощью предполагаемого нами вещества, дающего еще более высокий коэффициент полезного действия. Пусть эта машина работает в прямом направлении (рис. 139), т. е. пусть она дает механическую работу. Мы не начертим изотерм и адиабат потому, что неизвестно, как составить их уравнения (уравнения состояния этого вещества нам неизвестны). Однако, пусть температуры нагревателя и холодильника будут,

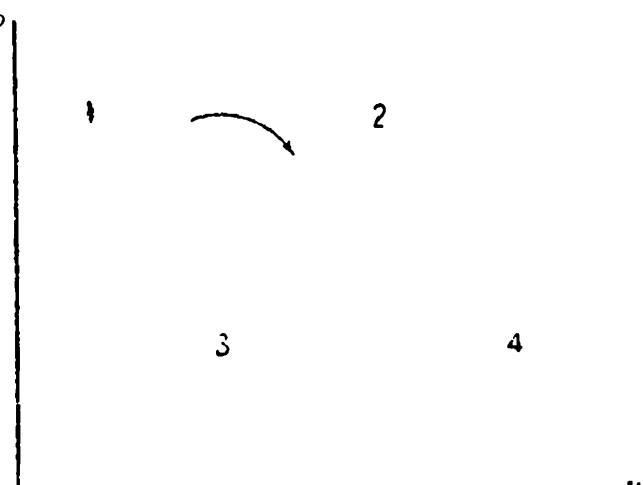


Рис. 139.

соответственно, равны T_1 и T_2 . Пусть между теми же нагревателем и холодильником работает в обратном направлении знакомая нам уже машина II, работающая с помощью идеального газа (рис. 140), т. е. пусть эта машина за счет приносимой извне механической работы переносит тепло из холодильника в нагреватель. Обозначим количество тепла, взятое машиной I у нагревателя, через Q_{12}' , и пусть эта машина отдает холодильнику Q_{43}' . Машина II, работающая в обратном направлении, берет у холодильника Q_{43} и отдает нагревателю Q_{12} . Мы всегда можем взять

такие отрезки изотерм (1—2) и (3—4) для машины II (рис. 140), чтобы сделать $Q_{43}' = Q_{43}$. Пусть это так и сделано. Напишем теперь приходо-расходную ведомость для нагревателя и холодильника:

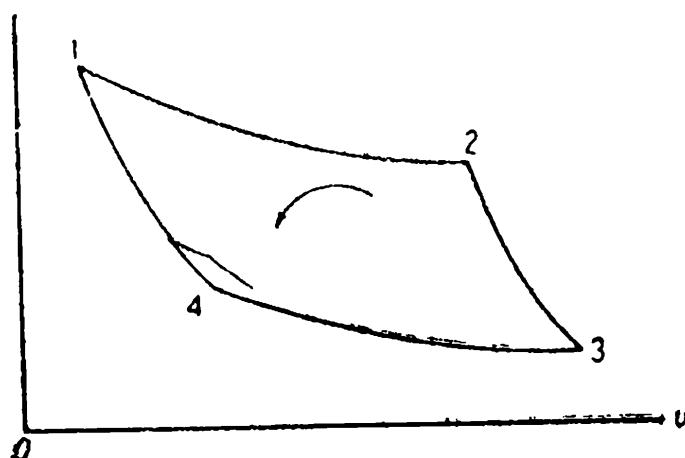


Рис. 140.

Получает:

Нагреватель

Q_{12}

Холодильник

Q_{43}'

Отдает:

Q_{12}'

Q_{43}

Машина I отдает работу:

$$W' = Q_{12}' - Q_{43}'.$$

Машина II получает извне работу:

$$W = Q_{12} - Q_{43}.$$

Подсчитаем теперь, что дает в сумме агрегат, состоящий из этих двух машин. Агрегат дает нам работу:

$$W' - W = Q_{12}' - Q_{12} \quad (30)$$

Возможны следующие случаи: $W' - W > 0$, тогда и $Q_{12}' > Q_{12}$. Что это значит? Это значит, что нагреватель при каждом цикле совместной работы двух машин отдает тепло, которое нацело превращается в работу, причем никаких других изменений в окружающем пространстве, например в холодильнике, не происходит. Такого типа машина называется вечным двигателем (perpetuum mobile) II рода. Второй принцип термодинамики и состоит в том, что самая возможность существования такого процесса отрицается. Следовательно, первый вариант $W' - W > 0$ невозможен. Предположим теперь, что $W' - W < 0$. Тогда и $Q_{12}' - Q_{12} < 0$. Это значит, что над агрегатом производится работа извне и нагреватель больше получает, чем отдает. Такой процесс вполне возможен: он имеет место при трении, когда затраченная работа превращается в тепло. Однако, если и первая машина обратима, то, заставив первую машину работать в обратном направлении, а вторую — в прямом, мы из $W' - W < 0$ после обращения получим $W' - W > 0$, что,

как мы доказали, невозможно. Итак, если обе машины обратимы, единственное решение есть

$$W' - W = 0 \quad \text{и} \quad Q_{12}' = Q_{12}. \quad (I)$$

Если машина I необратима, то возможно:

$$W' - W < 0 \quad \text{и} \quad Q_{12}' \leq Q_{12}. \quad (II)$$

Рассмотрим теперь, какие следствия вытекают из выводов (I) и (II). Прежде всего, на основании (I), условия $Q_{43}' = Q_{43}$ и (17) мы находим:

$$\frac{Q_{12}'}{Q_{43}'} = \frac{Q_{12}}{Q_{43}} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (31)$$

Отсюда как следствие получается:

$$\eta' = \frac{Q_{12}' - Q_{43}'}{Q_{12}'} = \frac{Q_{12} - Q_{43}}{Q_{12}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (32)$$

т. е. коэффициент полезного действия любой обратимой машины совпадает с коэффициентом полезного действия машины Карно, работающей идеальным газом. На основании (II), условия $Q_{43}' = Q_{43}$ и (17) мы имеем для необратимой машины:

$$\eta'' = \frac{Q_{12}' - Q_{43}'}{Q_{12}'} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (33)$$

т. е. для всякой необратимой машины коэффициент полезного действия меньше, чем для обратимой.

Далее, полученные нами результаты можно представить в следующем виде:

$$\frac{Q_{12}'}{T_1} - \frac{Q_{43}'}{T_2} = 0,$$

или, заменяя $Q_{43}' = -Q_{34}'$,

$$\frac{Q_{12}'}{T_1} + \frac{Q_{34}'}{T_2} = 0. \quad (31')$$

Точно так же для необратимой машины:

$$\frac{Q_{12}'}{T_1} + \frac{Q_{34}'}{T_2} \leq 0. \quad (33')$$

§ 2. Второй принцип термодинамики в применении к более сложным циклам. Энтропия.

Рассмотрим сложный цикл, состоящий из двух циклов Карно, работающих между температурами T_1 и T_3 и T_2 и T_3 (рис. 141). Применяя для каждого из этих циклов (31'), мы находим:

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{67}}{T_3} = 0 \quad (34)$$

II

$$\frac{Q_{34}}{T_2} + \frac{Q_{56}}{T_3} = 0. \quad (34')$$

Если мы сложим оба уравнения, то получим:

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_2} + \frac{Q_{57}}{T_3} = 0, \quad (34'')$$

так как

$$Q_{56} + Q_{67} = Q_{57},$$

как это вытекает из выражения (12).

Таким образом указанные два цикла можно рассматривать как один сложный. Таким же путем мы могли бы любой замкнутый круговой обратимый процесс разбить на большое число циклов Карно (рис. 142), проведя систему адиабат и изотерм.

При достаточно большом числе эле-

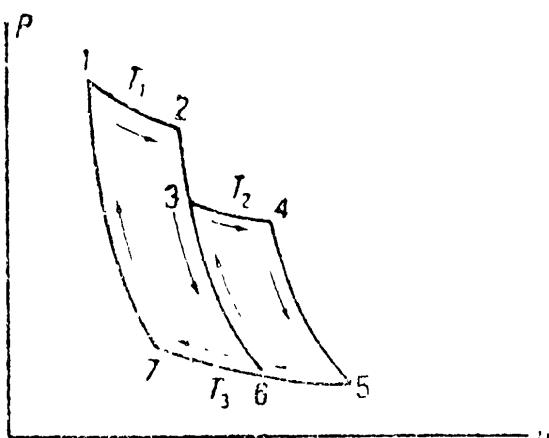


Рис. 141.

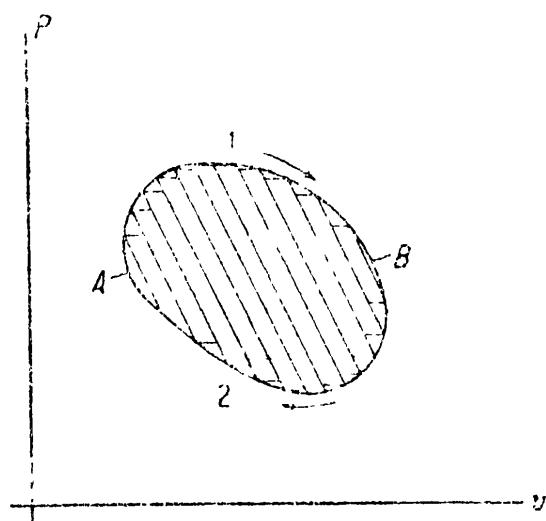


Рис. 142.

ментарных циклов Карно любой цикл можно представить с каким угодно приближением как сумму простых циклов Карно¹. Количество тепла δQ , отданное или полученное работающим веществом на любой изотерме, надо разделить на соответствующую температуру T . Итак, если процесс, изображенный на рис. 142, обратим, то мы имеем:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (I')$$

В случае, если процесс необратим, мы имеем:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

Из (I') мы сейчас же приходим к выводу, что

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \quad (35)$$

¹ Из рис. 141 и 142 ясно, что работы, производимые на пограничных адиабатах 3 → 6 двух смежных циклов, взаимно уничтожаются.

является полным дифференциалом. Действительно (рис. 142), интеграл (I') удачно представить следующим образом:

$$\int_{A_1B} \frac{\delta Q}{T} + \int_{B_2A} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

или

$$\int_{A_1B} \frac{\delta Q}{T} = - \int_{B_2A} \frac{\delta Q}{T},$$

или, наконец,

$$\int_{A_1B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A_2B} \frac{\delta Q}{T},$$

т. е. значение интеграла зависит от начального и конечного значений и не зависит от пути. Функция S , дифференциалом которой является $\frac{\delta Q}{T}$, носит название энтропии. Применяя (35) к идеальному газу, (мы убеждаемся, что $\frac{1}{T}$ играет роль интегрирующего множителя для выражений δQ в различных параметрах, данных выражениями (6''), (6''') и (6'''). Действительно, например, для (6''') мы получаем:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{RT} (c_v \cdot v \cdot dp + pc_p dv) = \\ &= c_v \left(\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} \right) = c_v d \log pv^k, \end{aligned} \quad (36)$$

откуда для энтропии находим следующее выражение:

$$S = c_v \log pv^k + \text{const.} \quad (37)$$

Выражение (37) показывает, что при адиабатном процессе энтропия не изменяется. Это следует уже из того, что раз процесс адиабатный, то для него $\delta Q = 0$, а отсюда, согласно (35), и $dS = 0$.

Предположим, что некоторое количество тепла δQ отнимается у тела температуры T_1 и передается телу температуры T_2 , — пусть процесс необратимый. Тогда согласно (33') имеем:

$$\frac{\delta Q}{T_1} - \frac{\delta Q}{T_2} < 0,$$

или $T_2 - T_1 < 0$, т. е. $T_1 > T_2$. Отсюда следствие: тепло без затраты работы может переходить только от тел более высокой температуры к более низкой. Это положение Клаузиусом было выдвинуто в качестве II принципа термодинамики, а невозможность *repetitum mobile* II рода выводилась как следствие. Мы в настоящей главе шли, как это теперь обычно делается, в обратном порядке.

Рассмотрим теперь один из важнейших выводов, вытекающих из II принципа термодинамики, на почве которого велись и ведутся еще и теперь жаркие споры. Пусть мы имеем два состояния A и B , и пусть мы переводим нашу систему из состояния A в состояние B необратимым путем. Пусть, далее, мы переводим систему обратно из состояния B в состояние A каким-либо иным, но обратимым путем. В общем, следовательно, замкнутый процесс будет необратимым; поэтому согласно (33'):

$$\int_{A \dots B \text{ необр}} \frac{\delta Q}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (38)$$

или

$$\int_{A \dots B \text{ необр}} \frac{\delta Q}{T} \leq - \int_B^A \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменяя знак и переставляя пределы, мы находим:

$$\int_{A \dots B \text{ необр}} \frac{\delta Q}{T} \leq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = S_b - S_a. \quad (38')$$

Если цикл будет бесконечно мал, то (38') можно изобразить следующим образом:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (38'')$$

Если мы включим все взаимодействующие между собой тела (обменывающиеся теплом), в одну систему, то происходящие процессы можно рассматривать как адиабатные, а тогда $\delta Q = 0$ и

$$dS \geq 0. \quad (39)$$

Таким образом для адиабатного необратимого процесса энтропия возрастает.

Пусть, например, некоторое количество тепла Q переходит от более высокой температуры T_1 к более низкой T_2 . Тогда энтропия первого тела уменьшится на $-\frac{Q}{T_1}$, энтропия второго увеличится на $\frac{Q}{T_2}$, а так как $T_1 > T_2$, то $-\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} > 0$, т. е. энтропия возрастает.

Этот вывод часто приводят в искаженном виде, утверждая, что энтропия всегда возрастает, тогда как в отдельных процессах энтропия может возрастать, убывать и оставаться постоянной. Таким образом (39) распространяется только на случай адиабатного процесса.

На основе (39) делались предсказания о так называемой „тепловой смерти вселенной“. Ход рассуждений в этих случаях приблизительно следующий. Все процессы, протекающие в природе, как правило, необратимы. Запасы тепловой энергии при высокой температуре истощаются,

так как тепло постепенно распространяется и температура его все более и более понижается, а при низкой температуре, как показывает коэффициент полезного действия машины Карно, все меньший и меньший процент тепла может быть переведен в механическую работу или, как показывают подобные же рассуждения, и в другие формы энергии. Таким образом все больше и больше увеличиваются запасы энергии в той форме, которая не может превращаться в другие формы, а так как во всех явлениях природы мы видим процессы непрерывного преобразования форм энергии, то постепенно во вселенной все должно останавливаться. Конец должен наступить тогда, когда вся энергия превратится в тепловую, а тепло равномерно распределится по всей вселенной. Этот вывод получается потому, что мы ограничились только чисто внешним формальным описанием и не произвели теоретического анализа того, что представляет собой тепловая энергия и почему она обладает свойством рассеиваться и в рассеянном виде, при низкой температуре, более не поддается преобразованию в другие формы. Энгельс один из первых указал, что в данном случае „проблема не решена, а только поставлена, и это преподносится как решение“ („Диалектика природы“, стр. 9). Далее, Энгельс вскрывает, к каким последствиям приводит уверенность в том, что задача решена, когда она всего только поставлена. „Как бы ни толковать второе положение Клаузинуса и т. д., но согласно ему энергия теряется, если не количественно, то качественно (т. е. приобретает такую форму при рассеянии, которая неспособна превращаться в другие формы.—А. Т.). Энтропия не может уничтожаться естественным путем, но зато может создаваться. Мировые часы сначала должны быть заведены, затем начинается их движение, пока часы не придут в равновесие, из которого вывести их может только чудо. Потраченная на завод часов энергия исчезла, по крайней мере, в качественном отношении, и может быть восстановлена только путем толчка извне. Следовательно, толчок извне был необходим также и вначале. Следовательно, количество имеющегося во вселенной движения, или энергии, не всегда одинаково. Следовательно, энергию можно создать искусственно, следовательно, она создаваема, следовательно, она уничтожаема ad absurdum!“ („Диалектика природы“,— стр. 71). Дальнейшее развитие учения о тепле как о молекулярном движении, особенно в трудах Больцмана и Смолуховского, показало, что II принцип термодинамики есть результат статистический, т. е. в огромном большинстве случаев процессы идут так, как указывает этот принцип, но из этого нельзя выводить следствия, что невозможны процессы, текущие в обратном направлении. Возможность таких процессов доказывается так называемыми брауновскими движениями, которые необъяснимы при абстрактном толковании II принципа термодинамики. Толкование II принципа с точки зрения молекулярно-кинетической теории обычно включается в курс кинетической теории материи. Но ввиду громадного методологического значения мы рассмотрим эти вопросы в приложении к настоящему курсу. Ограничимся пока указанием на то, что статистический характер II закона термодинамики был предвиден Энгельсом еще задолго до работ Больцмана и Смолуховского в его старом введении к „Диалектике приро-

ды". „Но здесь мы вынуждены либо обратиться к помощи творца, либо сделать тот вывод, что раскаленный сырой материал для солнечной системы нашего мирового острова возник естественным путем, путем превращений движения, которые присущи от природы движущейся материи и условия которых должны, следовательно, быть снова произведены материей, хотя бы после миллионов миллионов лет, более или менее случайным образом, но с необходимостью, присущей и случаю“.

§ 3. Приложение первого и второго принципа термодинамики к процессам перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое.

Предположим, что в цилиндре, закрытом поршнем (рис. 143), находится 1 г какого-либо вещества, которое при данных условиях находится частью в жидком, частью в парообразном состоянии. Пусть доля x вещества находится в парообразном состоянии, а $1 - x$ в жидком. Как известно, когда жидкость соприкасается с выделяемым ею насыщенным паром, то упругость пара зависит только от температуры. При изменении же объема происходит только иное распределение вещества между жидким и парообразным состоянием. Итак,

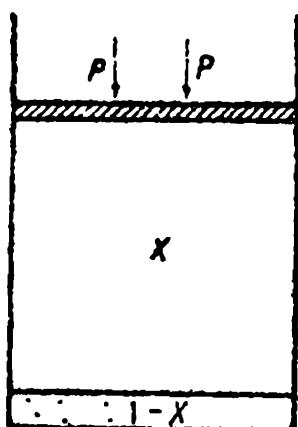


Рис. 143.

$$p = f(T). \quad (40)$$

Далее, обозначим объем 1 г пара через s и объем 1 г жидкости через σ . Тогда объем всей нашей системы будет:

$$v = xs + (1 - x)\sigma. \quad (41)$$

Если мы сообщим нашей системе количество тепла δQ , то это тепло пойдет частью на испарение, частью на нагревание (повышение температуры) как жидкости, так и пара. Поэтому, обозначив удельную теплоту пара и жидкости, соответственно, через c_1 и c_2 , мы количество тепла можем выразить следующим образом:

$$\delta Q = \lambda dx + c_1 x dT + c_2 (1 - x) dT, \quad (42)$$

где λ — тепло испарения. С помощью (42) составляем дифференциалы энергии и энтропии, принимая за параметры x и T :

$$dU = \left(\lambda - p \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left[c_1 x + c_2 (1 - x) - p \frac{\partial v}{\partial T} \right] dT, \quad (43)$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\lambda}{T} dx + \frac{c_1 x + c_2 (1 - x)}{T} dT. \quad (44)$$

Так как dU и dS представляют собой полные дифференциалы, то, следовательно, должны иметь место условия:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial T}$$

и

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial x}.$$

Выполняя указанные операции, мы находим, принимая во внимание (41):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} (s - \sigma) = c_1 - c_2 \quad (43')$$

и

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T} - \frac{\lambda}{T} = c_1 - c_2. \quad (44')$$

Исключая $c_1 - c_2$, мы находим:

$$\lambda = T(s - \sigma) \frac{dp}{dT}. \quad (45)$$

Это уравнение носит название уравнения Клапейрона. Если мы хотим выразить λ в калориях, то правую часть надо разделить на механический эквивалент тёпла: $4,19 \cdot 10^7$ эрг/кал. Подсчитаем λ для воды при 100°C . Один грамм пара при 100° занимает объем 1653 см^3 . Далее, при нагревании на 1°C упругость пара по Реню возрастает на $27,2 \text{ мм ртутного столба}$. Поэтому $\frac{dp}{dT} = \frac{27,2}{760} \cdot 1013663$ (так как $1 \text{ ат} = 1013663 \text{ дин/см}^2$). При этих данных мы получаем для λ :

$$\lambda = \frac{373 \cdot 1657 \cdot 27,2 \cdot 1013663}{760 \cdot 4,19 \cdot 10^7} = 535,5,$$

тогда как непосредственные измерения дают $536,5 \text{ кал}$. Так как λ измерить легче, чем s , то уравнением Клапейрона чаще пользовались для нахождения s по измеренной λ .

Тем же уравнением можно пользоваться для изучения процессов перехода из твердого в жидкое состояние и обратно. Рассмотрим смесь льда и воды. Тогда $s = 1$ и $\sigma = 1,09$, а $\lambda = 80 \text{ кал}$. Уравнение (45) принимает вид:

$$dT = - \frac{273 \cdot 0,09 \cdot 1013663}{80 \cdot 4,19 \cdot 10^7 \cdot 760} dp = - 0,0074 \frac{dp}{760}.$$

Если dp возрастает на 1 ат , то температура таяния льда понижается на $0,0074^\circ$. По Дьюару опыт дает $0,0072$. Таким образом мы видим, какие разнообразные применения дают основные законы термодинамики. Однако, с другой стороны, мы видим также, что физический смысл всех наших рассуждений выясняется только в конце; в процессе самой работы, скажем, при выводе (45) мы не видим, чему соответствует в природе каждая производимая нами математическая операция. Это неизбежное следствие того описательного приема, которым пользуется термодинамика. Из этого, однако, не вытекает то, что надо избегать таких приемов, — надо только помнить, что, по существу, „задача только поставлена“, и надо наряду с термодинамическими приемами развивать молекулярную физику, которая раскрывает нам физический смысл абстрактных термодинамических операций.

Гла_ва III.

Общие уравнения термодинамики и их применение к физико-химическим процессам.**§ 1. Уравнения, вытекающие из обоих принципов термодинамики.**

Мы уже видели, что для необратимого процесса

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T},$$

или

$$\delta Q \leq T dS. \quad (46)$$

Далее, так как согласно первому принципу

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

то

$$dU + \delta A \leq T dS, \quad (46')$$

или

$$\delta A \leq T dS - dU. \quad (46'')$$

Введем функцию

$$F = U - ST. \quad (47)$$

Эта функция была введена Гельмгольцем, который назвал ее „свободной энергией“. Функцию $G = ST$ Гельмгольц назвал „связанной энергией“. Таким образом полная энергия системы U распадается на свободную и связанную $U = F + G$. Если рассматриваемый нами процесс идет при постоянной температуре, то (46'') дает

$$\delta A \leq -d_T F, \quad (48)$$

т. е. произведенная в данной системе работа меньше или равна убыли свободной энергии. Отсюда ясно, как важно уметь разыскивать для любой системы величину свободной энергии: по ее изменению мы можем судить о той работе, какую можно получить из данной системы.

Составим дифференциал свободной энергии:

$$dF = dU - SdT - TdS, \quad (49)$$

вводим в это уравнение

$$dU = \delta Q - p dv = T dS - p dv,$$

тогда

$$dF = -SdT - p dv = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial v} dv, \quad (50)$$

отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -S. \quad (51)$$

Внося (51) в (47), мы получаем счень важное соотношение, связывающее полную энергию U со свободной, именно:

$$U + T \frac{\partial F}{\partial T} = F. \quad (52)$$

Кроме свободной энергии в целом ряде приложений удобно пользоваться еще и другими функциями, к рассмотрению которых мы сейчас приступим.

Заменяя в (46'') δA через $p dv$, мы получаем:

$$p dv \leq T dS - dU,$$

или

$$dU - T dS + p dv \leq 0, \quad (53)$$

Введем функцию

$$U - TS + pv = \psi, \quad (54)$$

носящую название термодинамического потенциала. Этой функцией особенно удобно пользоваться, когда в изучаемой нами системе не только температура, но и давление p , остаются постоянными. В самом деле, тогда, внося (54) в (53), мы имеем:

$$\delta\psi \leq 0. \quad (53')$$

Таким образом при необратимых процессах, при постоянном давлении и температуре, термодинамический потенциал убывает.

Изменив знак у неравенства (53) и разделив его на T , мы получаем соотношение:

$$dS - \frac{dU + p dv}{T} \geq 0. \quad (55)$$

Вводя функцию

$$\Phi = S - \frac{U + pv}{T}, \quad (56)$$

мы, при условии: p и T равны постоянным, получаем:

$$\delta\Phi \geq 0. \quad (56')$$

Функцией Φ пользуется М. Планк в своих исследованиях. Вообще, смотря по роду задачи, удобно бывает ввести и несколько иные функции. В этом отношении мы не имеем сколько-нибудь установленных обозначений, что часто затрудняет чтение специальных работ, если в них не указаны принятые автором обозначения.

§ 2. Теория разведенных растворов.

Когда какая-либо система тел распадается на части, обладающие определенными физическими свойствами, и притом каждую такую часть можно выделить из системы чисто механическим путем, — мы говорим, что система состоит из нескольких фаз, по числу отдельных таких друг от друга отделимых частей. Например, раствор и находящийся с ним в соприкосновении пар представляют собой две фазы — жидкую

и парообразную. Раствор и находящиеся в нем кристаллы образуют также две фазы — жидкую и твердую. Если какая-либо фаза состоит из различных веществ, причем одно из них находится в большом избытке по сравнению с другими, то мы говорим о разведенном растворе, причем находящееся в избытке вещество называется растворителем, будет ли вся фаза в жидком, твердом или газообразном состоянии. Если число граммолекул в какой-либо фазе будет n_0, n_1, n_2 и т. д. (n_0 относится к растворителю), то, обозначая через $u_0, u_1, u_2, \dots, v_0, v_1, \dots$ величины, рассчитанные на 1 граммолекулу веществ n_0, n_1, \dots и т. д., можно представить энтропию всей системы так:

$$dS = n_0 \frac{du_0 + p dv_0}{T} + n_1 \frac{du_1 + p dv_1}{T} + \dots = n_0 ds_0 + \\ + n_1 ds_1 + n_2 ds_2 + \dots \quad (57)$$

Все величины u_0 и т. д. пусть будут функциями p и T , но они не зависят от n_0, n_1, n_2, \dots и т. д. Поэтому, интегрируя (57), получаем:

$$S = n_0 s_0 + n_1 s_1 + \dots + C + \dots \quad (58)$$

Мы замечаем, что C может быть функцией чисел граммолекул и т. д., причем C от p и T не зависит. Поэтому достаточно для какой угодно пары значений p и T найти C , чтобы выяснить характер зависимости

C от величин n_0, n_1, \dots . При достаточно высокой температуре T любая система превратится в смесь идеальных газов. Поэтому можно выяснить состав C , рассмотрев смесь идеальных газов. Рассмотрим этот случай. Пусть в цилиндре мы имеем четыре поршня (рис. 144): A, A_1 (неподвижные) и B и B_1 , связанные между собой, подвижные. Пусть B_1 прикасается к A_1 и B к A . Предположим, что все получившееся таким образом пространство наполнено смесью газов (1) и (2). Предположим также, что поршень A_1 пропускает первый газ и не пропускает второй, а B_1 не пропускает первый, но зато пропускает второй. Такого рода случаи известны: так, например, через накаленную платиновую пластинку проходит водород, и не проходят

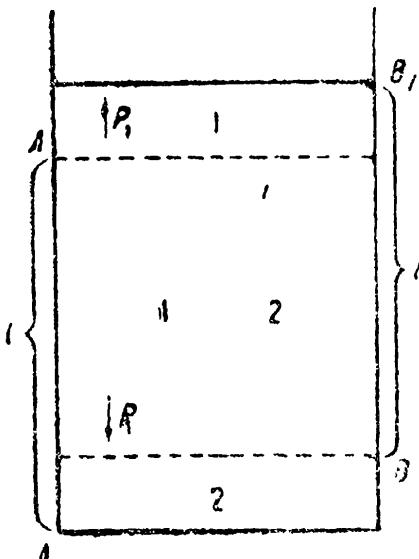


Рис. 144.

другие газы. Таким путем, медленно поднимая поршень B и связанный с ним B_1 , мы можем обратным путем разделить газы, не производя работы, так как на B и на B_1 действует только давление первого газа, одинаковое с давлением на B , так как процесс мы ведем медленно и давления должны выравниваться. Для газа же (2) давление по обе стороны B должно быть одинаково. Пусть извне также не притекает энергии, — тогда никаких изменений не происходит и можно считать, что энтропия нашей системы равна сумме энтропий для двух данных газов. Энтропия для каждого из газов в параметрах p и T будет с $\log T - R \log p + c'$ (это получается из соответствующего выражения δQ в

параметрах p и T , разделенного на T). Энтропия для суммы (смеси) газов будет:

$$S = c_{p_1} \log T - R \log p_1 + c_{p_2} \log T - R \log p_2 + \dots + \text{const.} \quad (59)$$

Далее, парциальные давления пропорциональны числу граммолекул, общее давление пропорционально числу молекул во всей системе, т. е. $p_0 : p_1 : p_2 = n_0 : n_1 : n_2$, откуда

$$p_0 = p \frac{n_0}{n_0 + n_1 + n_2}, \quad (60)$$

или, вводя концентрации:

$$c_1 = \frac{n_1}{n_0 + n_1 + n_2}, \quad (61)$$

мы получаем:

$$p_i = pc_i. \quad (62)$$

Вставляя (62) в (59), мы убеждаемся, что постоянная

$$C = -R(\log c_0 + \log c_1 + \log c_2 + \dots), \quad (63)$$

где c_i определяется через (61).

Таким образом для нашей системы функция Φ , определяемая (56), при условиях, дающих (57), и принимая во внимание (63), может быть представлена:

$$\Phi = n_0(\Phi_0 - R \log c_0) + n_1(\Phi_1 - R \log c_1) + n_2(\Phi_2 - R \log c_2) + \dots, \quad (64)$$

где

$$\Phi_0 = s_0 - \frac{u_0 + pv_0}{T}, \quad \Phi_1 = s_1 - \frac{u_1 + pv_1}{T} \text{ и т. д.}$$

Пусть мы имеем несколько фаз с числом граммолекул

$$n_0, n_1, n_2, \dots, n'_0, n'_1, n'_2, \dots$$

и т. д. и с соответствующими молекулярными весами

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m'_0, m'_1, m'_2, \dots$$

Пусть между фазами происходит взаимодействие, и происходят изменения в числе граммолекул $\delta n_0, \delta n_1, \delta n_2, \dots, \delta n'_0, \delta n'_1, \delta n'_2$ и т. д., причем

$$\delta n_0 : \delta n_1 : \delta n_2 : \dots = \gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \dots, \quad (65)$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ — числа молекул, участвующих в реакции, положительные или отрицательные, смотря по тому, образуется ли молекула или разлагается.

Из (64) получаем:

$$\delta\Phi = (\Phi_0 - R \log c_0) \delta n_0 + (\Phi_1 - R \log c_1) \delta n_1 + \dots = 0. \quad (66)$$

Заменяя δn через γ по (65), мы (66) преобразуем в следующее выражение:

$$\sum \gamma_i \log c_i = \frac{1}{R} \sum \gamma_i \varphi_i = \log K. \quad (67)$$

Дифференцируем (67) по T и по p , находим:

$$\frac{\partial \log K}{\partial p} = \frac{1}{R} \sum \gamma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} \quad (68)$$

и

$$\frac{\partial \log K}{\partial T} = \frac{1}{R} \sum \gamma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial T}. \quad (69)$$

Дифференцируем, далее:

$$\varphi_i = s_i - \frac{u_i + pv_i}{T},$$

получаем:

$$d\varphi_i = ds_i - \frac{du_i + p dv_i + v_i dp}{T} + \frac{u_i + pv_i}{T^2} dT = \frac{u_i + pv_i}{T^2} dT - \frac{v_i}{T} dp,$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = -\frac{v_i}{T}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial T} = \frac{u_i + pv_i}{T^2}.$$

Вставляя эти величины в (68) и (69), мы получаем:

$$\frac{\partial \log K}{\partial p} = -\frac{1}{R} \sum \gamma_i \frac{v_i}{T} = -\frac{1}{RT} \Delta V \quad (68')$$

и

$$\frac{\partial \log K}{\partial T} = \frac{1}{RT^2} \sum \gamma_i (u_i + pv_i) = \frac{1}{RT^2} \Delta Q, \quad (69')$$

где ΔV — окончательная сумма произошедших изменений объема, а ΔQ — сумма полученного извне тепла, причем необходимо помнить, что рассматриваемый процесс протекает при постоянном давлении и температуре.

§ 3. Примеры на теорию разведенных растворов.

Пример 1. Электролитическая диссоциация воды.

Система состоит из одной фазы $n_0 \text{H}_2\text{O}$, $n_1 \text{H}^+$ и $n_2 \text{OH}^-$.

Превращение заключается в следующем: $\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 = \delta n_0 : \delta n_1 : \delta n_2$, причем одна молекула воды, разлагаясь ($\nu_0 = -1$), дает по одной частице H^+ и OH^- , т. е. $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 1$. По (67) имеем:

$$-\log c_0 + \log c_1 + \log c_2 = \log K, \quad (70)$$

или, так как $c_1 = c_2$, а $c_0 \approx 1$,

$$2 \log c_1 = \log K. \quad (70')$$

По (69') получаем зависимость концентрации от температуры, именно:

$$2 \frac{\partial}{\partial T} \log c_1 = \frac{\Delta Q}{RT^2}. \quad (71)$$

ΔQ согласно теории Аррениуса равно тепловому эффекту реакции нейтрализации сильно разведенных щелочи и кислоты (одноосновной). На основании измерений Вермана:

$$\Delta Q = 27\,857 - 48,5 T \text{ г-кал},$$

что дает:

$$\frac{\partial \log c_1}{\partial T} = \frac{1}{2\,1985} \left(\frac{27\,857}{T^2} - \frac{48,5}{T} \right),$$

или, после интегрирования,

$$\log_{10} c_1 = -\frac{3047,3}{T} - 12,125 \log_{10} T + \text{const.}$$

Эта зависимость от температуры хорошо совпадает с тем, что было найдено из опыта по определению электропроводности воды при различных температурах.

Пример 2. Испарение и замерзание жидкости. Пусть система состоит из двух фаз n_0 и n'_0 . Тогда $\nu_0 = -1$, $\nu'_0 = 1$ и $c_0 = 1$, $c_1 = 1$.

Отсюда по (67) $\log K = 0$, что дает $\frac{\partial \log K}{\partial p} dp + \frac{\partial \log K}{\partial T} dT = 0$, или, согласно (68) и (69):

$$-\frac{\Delta V}{T} dp + \frac{\Delta Q}{T^2} dT = 0.$$

Далее, так как $\Delta V = \nu'_0 - \nu_0$, мы находим,

$$\Delta Q = T'_0 (\nu'_0 - \nu_0) \frac{dp}{dT}. \quad (72)$$

Таким образом мы получили формулу Карно-Клапейрона, которую мы получали и другим способом.

Глава IV.

Связь термодинамики с механикой.

§ 1. Уравнения механики в форме Лагранжа и циклические координаты.

Не имея возможности подробно останавливаться на выводе основных уравнений механики в форме Лагранжа, укажем на общую схему, с помощью которой можно получить эти уравнения из обычных уравнений динамики системы, отослав читателя, интересующегося деталями, к любому курсу механики, например А. Эйхенвальда „Теоретическая физика“, ч. II. По принципу Даламбера, если мы к каждой материальной точке, составляющей данную систему, прибавим так называемые силы инерции (ч. I, гл. V, § 4), то наша система будет в равновесии, и поэтому работа всех сил (в том числе и сил инерции) будет равна нулю для вся-

кого возможного перемещения. Это условие, как известно, выражается следующим образом:

$$\sum_i \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i. \quad (73)$$

В уравнения Лагранжа в качестве переменных вводятся независимы с друг от друга параметры q_k , через которые можно выразить все координаты данной системы; так как число таких параметров значительно меньше числа координат, то и число уравнений будет меньше. Кроме того, нам уже более не понадобится рассматривать связи в нашей системе, т. е. рассматривать, как связаны отдельные ее части, так как эти связи уже учтены при определении каждой из координат нашей системы как функции независимых параметров q_k . Если все координаты выражены через l параметров q_k , то мы для каждой координаты находим:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \delta q_l. \quad (74)$$

Тогда в выражении (73):

$$\begin{aligned} \sum_i^n (X_i \delta x_i + \dots) &= \delta q_1 \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots = \\ &= \sum_1^l k Q_k \delta q_k, \end{aligned} \quad (73')$$

т. е. мы получаем опять выражение работы, где Q_k играет роль сил, определяющих изменения параметров q_k , — это так называемые „обобщенные“ силы. Аналогичным путем находим:

$$\begin{aligned} - \sum_i \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) &= \\ = - \delta q_1 \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) - \\ - \delta q_2 \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (73'')$$

Выражения, стоящие в скобках в (73), можно преобразовать следующим образом:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}. \quad (a)$$

Составим производную по времени от x_i :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l. \quad (b)$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}. \quad (1)$$

Кроме того, дифференцируя (b) по q_1 , находим:

$$\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots \quad (c)$$

С другой стороны, дифференцируя по времени $\frac{\partial x_l}{\partial q_1}$, находим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_l}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2. \quad (c')$$

Сопоставляя (c) с (c'), имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_l}{\partial q_1} \right) = \frac{\dot{x}_l}{\partial q_1}. \quad (II)$$

С помощью (I) и (II) выражение (a) принимает вид:

$$m_l \frac{d^2 x_l}{dt^2} \frac{\partial x_l}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} m_l \dot{x}_l \frac{\dot{x}_l}{\partial q_1} - m_l \dot{x}_l \frac{\dot{x}_l}{\partial q_1}.$$

Составляя такие же выражения для

$$m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2} \frac{\partial y_l}{\partial q_1} \text{ и } m_l \frac{d^2 z_l}{dt^2} \frac{\partial z_l}{\partial q_1}$$

и складывая, находим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} m_l \frac{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{m_l (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2)}{2}.$$

Вставляя это выражение в (73'') и суммируя по i , мы находим:

$$-\dot{q}_1 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1} \right) - \dot{q}_2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial q_2} \right) - \dots \quad (75)$$

Так как все \dot{q}_k независимы, то в результате подстановки (74) и (73) мы получим l уравнений вида:

$$Q_k - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k^*. \quad (75')$$

Q_k есть сила, действующая извне и вызывающая изменение параметра системы q_k . Предположим, что часть силы Q_k обусловлена потенциалом Π , а для части P_k этой силы выражение потенциала неизвестно, а может быть, его и нет. Тогда:

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + P_k. \quad (76)$$

Вставляя (76) в (75') и замечая, что Π не зависит от скоростей \dot{q}_k , мы находим:

$$-\frac{d}{dt} \frac{d}{dq_k} (\Pi - K) + \frac{\partial}{\partial q_k} (\Pi - K) = P_k,$$

или, если вместо внешней силы P_k , действующей на систему, ввести реакцию этой системы на воздействующие на нее извне тела $P_1' = -P_1$, мы получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} H - \frac{\partial H}{\partial q_k} = P_1', \quad (75'')$$

где

$$H = \Pi - K. \quad (77)$$

Уравнение (75'') есть уравнение Лагранжа в той форме, в которой им пользовался Гельмгольц в своем замечательном сочинении: „О роли принципа наименьшего действия в физике“, которое еще до сих пор недостаточно было использовано. Функцию H [(77)] Гельмгольц назвал „кинетическим потенциалом“. Глубокий философский смысл работы Гельмгольца заключается в следующем. Целый ряд фактов с давних пор указывал физикам на связь между самыми разнообразными явлениями, изучаемыми в физике, и законами механики. Но совершенно ясно, что это сходство не может быть тождеством, — ведь чем-то эти явления отличаются от обычных движений, изучаемых в обычной механике. Ошибка механических материалистов заключалась именно в том, что они везде и всюду „применили исключительно масштаб механики“ (Энгельс). Гельмгольц, как известно, впервые дал систематическое изложение основ учения о сохранении энергии, и потому его интересовали количественные выражения энергии для самых разнообразных явлений, не имеющих, на первый взгляд, ничего общего с механикой. Тем не менее, оказалось, что если мы составим выражения „кинетического потенциала“ (77) для какой-либо области явлений, то даже в тех случаях, когда этот кинетический потенциал совсем не похож на то, что мы имеем в механических задачах, все-таки, в результате подстановки этой функции в (75'), Гельмгольцу удавалось получить основные закономерности данной области явлений. Таким образом Гельмгольц показал, что уравнения Лагранжа можно применять к таким областям, которые, на первый взгляд, ничего не имеют общего с механикой, но только при этом мы сталкиваемся с тем, что энергия системы кинетическая и потенциальная выражены иначе, чем в механике. Структура функции Лагранжа и отражает те объективные специфические отличия, какие мы находим, скажем, в электромагнитном поле, по сравнению с обычной механикой. Всегда, следовательно, где заключены качественные отличия различных категорий физических явлений. Это со всей ясностью высказал уже сам Гельмгольц, хотя он в философии был весьма непоследователен, и в других местах он высказывал взгляды, отчасти совпадающие со старой формой материализма — материализмом механическим, а иногда он делал уступки кантианству. „Если мы собираемся изучать общие свойства систем, кото-

рые подчинены принципу наименьшего действия (уравнения механики выводятся из принципа наименьшего действия, мы их вывели иначе—*A. T.*), то нам необходимо отбросить прежнее ограничение, согласно которому скорость входит только в выражение живой силы и притом в форме однородной функции второй степени, и нам надо посмотреть, как обстоит дело, если *H* (кинетический потенциал—*A. T.*) является функцией координат и скоростей любой формы” (*Heimholtz, Abhandlungen*, том III, стр. 203). Таким образом те естественные диалектические переходы от одной области явлений к другой, о которых писал Энгельс в „Диалектике природы“, можно проследить, изучая и сравнивая законы самых разнообразных областей физики с помощью приложения к ним уравнений Лагранжа.

Рассмотрим простейшие случаи, в которых кинетический потенциал построен иначе, чем в обычных задачах механики. Существует особый класс движений, названный Гельмгольцем „циклическими движениями“, которые отличаются той особенностью, что некоторые параметры входят в выражение кинетического потенциала только в виде скорости; самый же параметр в выражение кинетического потенциала не входит. Представим себе, например, вращающийся около какой-либо оси однородный шар; его кинетическая энергия будет $K = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2$, где *I*—момент инерции, но ясно, что угол φ не входит ни в выражение коэффициента $\dot{\varphi}^2$, ни в выражение потенциальной энергии. Таким образом циклическая координата сама не входит — она входит только через свою производную по времени. Далее, например, вращение электрона вокруг ядра по кругу точно так же можно рассматривать как циклическое движение. В самом деле, кинетическая энергия будет $K = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2$, а потенциальная $\frac{Ee}{a} + C$,

где *a* — неизменный радиус круговой орбиты: опять φ не входит в выражение энергии. Движение жидкости, сплошь заполняющей замкнутую в себе трубку, представляет собой также пример циклического движения. Словом, можно найти очень большое число примеров таких циклических движений в окружающих нас процессах.

Рассмотрим конкретный пример системы, определяемой двумя параметрами, из которых один циклический q_c . Кинетическая энергия *K* пусть выражается, как обычно, однородной функцией второй степени:

$$K = \frac{1}{2} A \dot{q}_a^2 + B \dot{q}_a \dot{q}_c + \frac{1}{2} C \dot{q}_c^2. \quad (78)$$

Коэффициенты *A*, *B* и *C* и потенциальная энергия могут быть функцией только q_a ; параметр q_c , как циклический, не может входить ни в *K*, ни в *H*. В остальном наша система ничем не отличается от обычной механической системы. Для параметра q_a мы имеем обычное уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial H}{\partial q_a} = P_a. \quad (79)$$

Для циклической же координаты мы получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} = P_c.$$

Пусть, однако, на циклическую координату нет прямого воздействия извне. Тогда и $P_c = 0$, и мы имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \right) = 0. \quad (80)$$

Если бы $P_c \neq 0$, то это означало бы, что циклическая скорость или увеличивалась бы, или уменьшалась. Вставляя в $H = \Pi - K$ (78) и подставляя в (80), мы после интегрирования получаем:

$$-B\dot{q}_a - C\dot{q}_c = D, \quad \text{или} \quad B\dot{q}_a + C\dot{q}_c = -D, \quad (81)$$

где $+D$ — постоянная интеграции. Это линейное уравнение позволяет выразить циклическую скорость \dot{q}_c через \dot{q}_a и q_a , так как, по предположению, B и C суть функции нециклического параметра. В самом деле,

$$\dot{q}_c = -\frac{D}{B} - \frac{C}{B} q_a. \quad (81')$$

Подставляя (81') в (78), мы можем исключить циклическую координату из выражения кинетического потенциала. Посмотрим, как изменится тогда уравнение (79). Мы рассмотрим специальный случай системы, определяемой двумя параметрами, и посмотрим затем, какой вид примет лагранжева функция, если у нас несколько циклических координат. Из сказанного ясно, что мы можем все эти координаты (скорости) исключить из выражения кинетического потенциала. Так как по (81') \dot{q}_c может быть представлена как функция q_a и \dot{q}_a , то кинетический потенциал можно представить:

$$H(q_a, \dot{q}_a, \dot{q}_c) = \mathfrak{H}(q_a, \dot{q}_a, F(q_a, \dot{q}_a)). \quad (82)$$

Составляем производные по q_a и \dot{q}_a :

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \cdot \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial q_a} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \cdot \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial \dot{q}_a}. \quad (83)$$

Далее, так как $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} = D$, где D — постоянная интеграции, получающаяся при интегрировании (80), то мы получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial q_a} D \dot{q}_c = \frac{\partial}{\partial q_a} (\mathfrak{H} - D \dot{q}_c) \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} D \dot{q}_c = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} (\mathfrak{H} - D \dot{q}_c).$$

Таким образом вместо (79) мы можем написать следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} (\mathfrak{H} - D \dot{q}_c) - \frac{\partial}{\partial q_a} (\mathfrak{H} - D \dot{q}_c) = P_a. \quad (79')$$

Здесь важно отметить, что если мы исключим \dot{q}_c при помощи (81') из (79'), то кинетический потенциал уже не содержит в себе однородной функции второй степени от скоростей: в нем содержится линейная функция скорости, вследствие чего утрачивается даже характер обратимости явлений механики. В самом деле, если в (79') исключена циклическая координата \dot{q}_c [с помощью (81)], то при изменении знака q_a изменится и $\mathfrak{H} - D\dot{q}_c = \mathfrak{H} - DF(q_a \dot{q}_a)$, чего не получится, если изменить знаки скоростей в однородной функции второй степени. Мы получим полную обратимость, если мы и в исключенной нами циклической координате изменим знак, что повлечет за собой и изменение знака постоянной D . В случае нескольких циклических координат мы получим следующие более общие выражения:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \cdot \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \frac{\partial}{\partial q_a} \sum D_c \dot{q}_c$$

II

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \cdot \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial q_a} = \frac{\partial H}{\partial q_a} + \frac{\partial}{\partial q_a} \sum D_c \dot{q}_c,$$

где знак \sum распространен на все циклические координаты. При этих условиях вместо (79') мы получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_a} (\mathfrak{H} - \sum D_c \dot{q}_c) - \frac{\partial}{\partial q_a} (\mathfrak{H} + \sum D_c \dot{q}_c) = P_a. \quad (79'')$$

Гельмгольц рассматривает еще целый ряд других специальных условий, налагаемых на некоторые из координат, которые позволяют перестроить кинетический потенциал и привести его к виду, совершенно непривычному для обычной механики, но зато сходному с кинетическим потенциалом, получаемым для самых разнообразных областей физики. Сторонники описательной физики, основательно забывшие эти замечательные исследования Гельмгольца и отмахивающиеся от них как от чего-то устарелого, забывают, что в целом ряде исследований этот метод Гельмгольца дал блестящие результаты. Так, например, даже такой теоретик, весьма несклонный разбирать связь механики и электродинамики, как Абрагам, вынужден признать, на основании собственных замечательных исследований по динамике электрона, что „и в этой новой механике, в которой массы являются функциями скоростей, лагранжевы уравнения сохраняют свою силу“ (M. Abraham, Theorie d. Elektrizität, II Bd., S. 169, 1923). Действительно, исследование Абрагама представляет собой блестящий пример приложения метода Гельмгольца. Точно так же высказывается и Лоренц: „В заключение необходимо подчеркнуть, что даже если мы окончательно откажемся от механического объяснения, то все-таки изображение законов электродинамики в такой форме, в которой они согласуются с уравнениями механики, сохраняет все свое значение. Эта форма, оказывается, великолепно подходит к решению специальных задач, причем многие важные следствия, как, например, взаимные отношения между индукционными токами и электродинамическими действиями, приобретают особенный интерес, когда они выступают в качестве корол-

лария¹ теоремы общей механики" (H. A. Lorentz, Encyklopädie d. Math. Wiss., V, 2. Heft, S. 134, 1904).

На эти рассуждения, под видом борьбы с механическим материализмом обрушаются все последователи школы Деборина. На самом деле это — как раз область, в которой преодолевается ограниченность механического материализма. Во всяком случае, мы в этих исследованиях ближе всего подошли к выяснению, в чем заключается качественное своеобразие различных классов физических явлений.

§ 2. Выражение общих законов механики в уравнениях Лагранжа. Аналогии с термодинамикой.

Рассмотрим, как выразится интеграл энергии с помощью уравнений Лагранжа. Умножим (79) на \dot{q}_a и возьмем сумму для всех уравнений данной системы:

$$\begin{aligned} \sum P_a \cdot \dot{q}_a = & - \sum \frac{\partial H}{\partial q_a} \dot{q}_a + \sum \dot{q}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} = - \sum \frac{\partial H}{\partial q_a} \dot{q}_a + \\ & + \frac{d}{dt} \sum \dot{q}_a \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} - \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} \frac{d \dot{q}_a}{dt}. \end{aligned} \quad (84)$$

Суммы, стоящие в правой части (84) со знаком минус, представляют собой не что иное, как производную по времени от функции H . Поэтому

$$\sum P_a \dot{q}_a = - \frac{d}{dt} \left(H - \sum \dot{q}_a \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a} \right). \quad (84')$$

Так как P_a представляет собой реакцию системы на внешние тела, то $\sum P_a \dot{q}_a$ выражает собой работу, производимую нашей системой в единицу времени, что должно равняться убыли энергии системы, т. е. $- \frac{dU}{dt}$, откуда энергия системы по (84') имеет вид:

$$U = H - \sum \dot{q}_a \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a}. \quad (85)$$

Сравним с этим уравнением уравнение для свободной энергии [гл. III, § 1, уравнение (52)]:

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (52')$$

Таким образом мы видим, что это одно из основных уравнений термодинамики построено так же, как и (85). Таким образом устанавливается связь термодинамики и механики.

Больших трудов стоило показать, отправляясь от уравнений механики, свойства, аналогичные свойствам энтропии.

¹ Королларий — следствие, добавление.

Предположим, в противоположность (80), что на циклическую координату действует извне некоторая сила:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} = P_c. \quad (86)$$

Заменим силу $P_c = -P'_c$ силой, действующей извне на систему, и умножим (86) на $\dot{q}_c dt = dq_c$. Тогда:

$$P'_c dq_c = - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \cdot \dot{q}_c dt. \quad (86')$$

Величина же

$$P'_c dq_c = \delta Q \quad (87)$$

есть энергия, сообщаемая системе, которую можно принять за сообщенное системе тепло δQ . Итак,

$$\delta Q = - \dot{q}_c d \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} \right). \quad (86'')$$

Полагая, далее, $-\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_c} = S$, мы находим $\delta Q = \dot{q}_c dS$, или $dS = \frac{\delta Q}{\dot{q}_c}$, т. е. мы получаем такое же соотношение, как в термодинамике для дифференциала энтропии.

§ 3. Модель Больцмана для иллюстрации свойства энтропии.

В модели Больцмана цилиндр C (рис. 145) вращается вокруг оси AB , на стержне DE скользит груз m , который, с помощью нитки, связан с чашкой P , на которой помещается груз Q . Пусть все части кроме груза m и Q имеют исчезающе малую массу. Так как груз может скользить вдоль r , то мы, следовательно, имеем два параметра r и циклический параметр φ . Потенциальная энергия груза m не изменяется. Поэтому энергия нашей системы будет:

$$K = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (87)$$

Вставляя в уравнение Лагранжа (75), мы получаем:

$$Q_r' = mr'' - mr\dot{\varphi}^2. \quad (88)$$

и

$$Q_\varphi' = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi}\dot{r}. \quad (89)$$

Предположим, что вначале $Q_\varphi' = 0$ и что груз $Q' = -Q_r' = mr\dot{\varphi}^2$, т. е. груз уравновешивает „центробежную силу“. Далее, пусть начинает

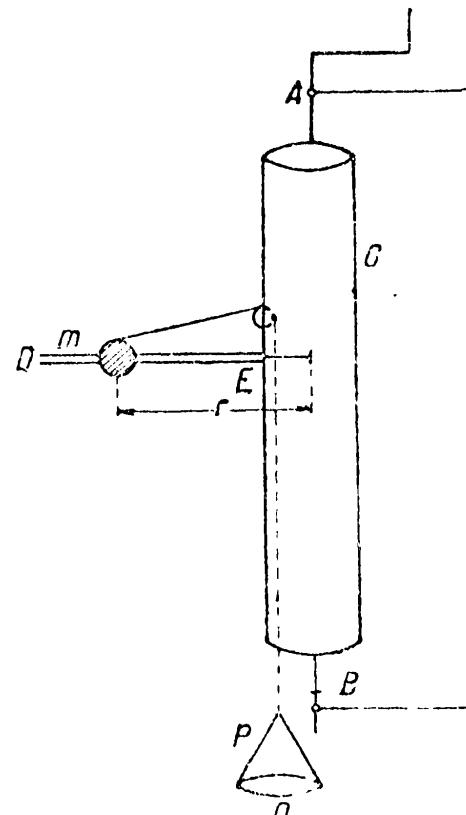


Рис. 145.

действовать внешняя сила Q'_φ , но она пусть настолько мала, что $\dot{\varphi}$ мало при большом значении $\dot{\varphi}$. Изменяя груз Q' , можно добиться того, что r мало по сравнению с $r\dot{\varphi}$ и r мало по сравнению с $r\dot{\varphi}^2$. Тогда мы будем иметь следующие приближенные значения:

$$Q' = -Q'_r = mr\dot{\varphi}^2 \quad \text{и} \quad K = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

При этих условиях работа, введенная в систему при повороте рукоятки, пойдет частью на увеличение энергии груза m , т. е. величины K , частью на подъем груза Q' . Итак,

$$\delta Q = \frac{m}{2} d(r^2\dot{\varphi}^2) + Q' dr, \quad (90)$$

или в раскрытом виде:

$$\delta Q = mr^2\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + 2m\dot{\varphi}^2 r dr. \quad (90')$$

Нетрудно показать, что кинетическая энергия $K = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}$ является интегрирующим делителем δQ , т. е. играет роль температуры. В самом деле,

$$\frac{\delta Q}{K} = 2 \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 4 \frac{dr}{r} = d(2 \log \dot{\varphi}) + d4 \log r = d(\log r^4\dot{\varphi}^2). \quad (91)$$

Таким образом $\log(r^4\dot{\varphi}^2)$ играет роль энтропии, если мы отвлечемся от постоянной интеграции. К связи механики и термодинамики мы еще вернемся в заключительной части курса, где мы рассмотрим основные положения кинетической теории материи.

Часть VI.

Теория квант. Строение атома. Теория относительности.

Глава I.

Теория атома по Бору и Зоммерфельду.

§ 1. Строение атома водорода.

Вскоре после открытия электрона как составной части любого атома перед физиками встал вопрос о строении атома. Первые попытки в этом направлении были сделаны в 1904 г. тем же Дж. Дж. Томсоном, которому впервые удалось научиться отщеплять электроны от атомов любой материи и тем доказать, что электрон есть составная часть любого вида известных нам форм материи. Почти одновременно с Томсоном сходные мысли были высказаны японским физиком Нагаока. Томсон в своей модели исходил из предположения, что положительный заряд атома простирается на сферу радиуса порядка 10^{-8} см, внутри которой размещаются электроны; с помощью этой модели Томсону удалось получить весьма интересные выводы, связанные с периодической системой элементов. Дальнейшие исследования, однако, показали, что атом построен иначе, ~~что~~ положительный заряд сосредоточен в очень малой области, а именно, атом представляет собой положительно заряженное ядро порядка 10^{-12} см, вокруг которого по замкнутым орбитам движутся электроны. Эта модель была предложена Рутерфордом в 1911 г. Основания для принятия этой новой модели были следующие. В лаборатории Рутерфорда было поставлено изучение рассеяния так называемых α -частиц, т. е. заряженных атомов гелия при прохождении через тонкие слои металла. Для этой цели α -частицы особенно удобны потому, что каждая α -частица производит заметную глазу вспышку на экране сернистого цинка и, следовательно, каждая частица поддается непосредственному учету, а кроме того, благодаря ее большой массе она будет отклонена только сильным зарядом ядра, имеющим большую массу, и не будет отклоняться отдельными электронами, масса которых в 8000 раз (приблизительно) меньше массы α -частиц. И вот произведенные измерения показали, что частицы иногда получают такие большие отклонения, что их никак нельзя объяснить, исходя из модели Томсона. В самом деле, если α -частица пролетает вблизи поверхности шара радиуса 10^{-8} см, то отталкивание будет происходить так, как будто весь заряд был сосредоточен в центре этого шара, т. с. следовательно, на расстоянии 10^{-8} см. Расчет показывает, что отклонение будет очень малое. Если же α -частица пролетает сквозь самий шар, то отталкивать будет только внутренняя часть (рис. 146) радиуса r , внешний же слой $r_1 - r$ по законам притяжения действовать

не будет. Таким образом отклонение будет вызываться только частью заряда и, следовательно, опять отклонение будет небольшое. С другой стороны, если положительный заряд сосредоточен в очень малом объеме, скажем, в объеме шара радиуса 10^{-12} см, то, как показывает расчет, в тех случаях, когда α -частица пролетает вблизи поверхности этого шара, отклонение получается такого порядка (рис. 147), какое наблюдается в действительности. Эти опыты, повторенные потом в 1920 г. Чадвиком, показали, что заряд ядра возрастает по мере увеличения атомного веса и что он равен так называемому порядковому числу данного элемента, умноженному на величину элементарного заряда.

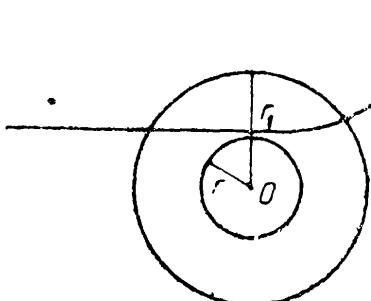


Рис. 146.

Порядковым числом называется число, показывающее, какую клетку по порядку от начала занимает в периодической системе данный элемент. Таким образом можно сказать, что элементы расположены в менделеевской системе по числам элементарных зарядов, находящихся в их ядре, и что переход от одной клетки этой системы к другой обусловлен приращением заряда ядра на один элементарный заряд.

Не надо, однако, думать, что в ядре заключены только положительные заряды,— заряд ядра есть только избыток в числе положительных элементарных зарядов над отрицательными. Так, в ядре гелия четыре положительных заряда — четыре протона и два электрона; таким образом, в избытке два положительных элементарных заряда, и порядковый номер его равен двум. По числу единиц заряда мы имеем и число „наружных“, не входящих в состав ядра электронов. Исходя из этих соображений, датский физик Нильс Бор в 1913 г. предложил очень остроумную модель атома водорода. Однако большие успехи, достигнутые Бором, очень скоро отвлекли внимание от того, что было в этой модели несовершенного, причем эти недочеты стали возводить в принцип. Именно, с этих пор установился взгляд, что для атомного мира имеют место совершенно другие законы, не имеющие ничего общего с теми, какие изучались физикой в XIX в.

Модель атома водорода чрезвычайно проста: вокруг положительного ядра $+E$ (численно равного заряду электрона) по круговой орбите радиуса a вращается электрон $-e$ (рис. 148). Общая энергия электрона:

$$U = \frac{mv^2}{2} - \frac{eE}{a} - C_1, \quad (1)$$

так как $-\frac{eE}{a}$ есть выражение потенциальной энергии притяжения.

Далее, мы без труда напишем уравнение движения электрона:

$$ma\omega^2 = \frac{Ee}{a^2}, \quad (2)$$

где ω — угловая скорость электрона на орбите.

Однако совершенно ясно, что уравнение (2) дает неопределенное

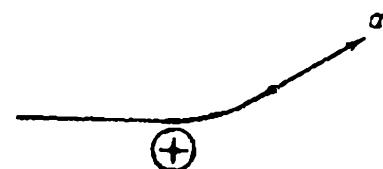


Рис. 147.

решение: для любого радиуса a мы можем подобрать такую угловую скорость ω , при которой (2) удовлетворится. Следовательно, мы пока не имеем никаких указаний на то, какая же будет орбита у атома водорода. Для отбора орбит Бор предложил следующее правило, которое носит название первого постулата Бора и которое ни Бором, ни кем из его последователей объяснено не было. Только в самое последнее время, благодаря исследованиям Дж. Дж. Томсона и у нас проф. Н. П. Кацерина, как мы в дальнейшем увидим (гл. III), выясняется физический смысл этого постулата. Примем пока это предложение Бора и посмотрим, к каким оно ведет последствиям. Сформулирован этот постулат был сначала Бором в следующей форме: „интеграл действия“ для „устойчивой“ орбиты должен равняться целому числу, умноженному на постоянную Планка h . Под интегралом действия разумеется

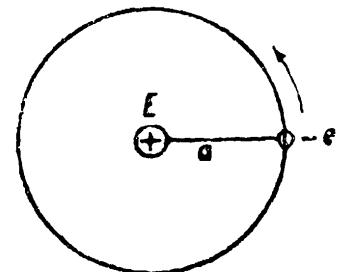


Рис. 148.

$$\oint mv_s ds = nh, \quad (3)$$

где интеграл берется по всей замкнутой орбите. Планковская постоянная h , или „квант действия“, был введен Планком в теорию излучения, но впоследствии оказалось, что эта величина играет очень большую роль в целом ряде физических явлений.

Для данного случая (3) принимает вид:

$$2\pi a m v = nh, \text{ или } 2\pi a^2 m \omega = nh. \quad (3')$$

Если мы присоединим (3') к (2), то получим ряд вполне определенных значений для a и ω , но, почему эти значения будут соответствовать устойчивым орбитам, — Бор никаких физических объяснений не дал. Деля квадрат (3') на (2), находим:

$$a = \frac{n^2 h^2}{4\pi m e E}, \quad (4)$$

т. е. радиусы „устойчивых“ орбит возрастают пропорционально квадратам ряда натуральных чисел n : $1:4:9:16:\dots$. Вставляя найденное значение a в (3'), мы находим:

$$\omega = \frac{8\pi^3 m e^2 E^2}{n^3 h^3}. \quad (5)$$

Преобразуем теперь уравнение энергии. Кинетическая энергия $K = \frac{m a^2 \omega^2}{2}$ или, принимая во внимание (2), $\frac{m a^2 \omega^2}{2} = \frac{E e}{2a}$. Вставляя это выражение в (1), мы находим:

$$U = -\frac{eE}{2a} + C, \quad (1')$$

или, вставляя вместо a (4), мы получаем:

$$U = -\frac{2\pi^2 me^2 E^2}{n^2 h^2} + C = -\frac{A}{n^2} + C, \quad (1'')$$

где

$$A = \frac{2\pi^2 me^2 E^2}{h^2}. \quad (6)$$

Из (1'') заключаем, что энергия электрона тем меньше, чем ближе электрон к ядру, т. е. чем меньше порядок орбиты, определяемой числом n .

Далее, Бор делает следующее предположение (так называемый второй постулат Бора): электрон может перескакивать с более далекой орбиты на более близкую к ядру. При этом согласно (1'') должно освободиться некоторое количество энергии, которое согласно предложению Бора превращается в лучистую энергию — в квант лучистой энергии $h\nu$. Предположим, что электрон перескакивает с какой-либо удаленной орбиты $n > 2$ на $n = 2$, тогда согласно (1) и (6) мы находим:

$$h\nu = U_n - U_2 = A \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2\pi^2 me^2 E^2}{h^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7)$$

Вводим вместо числа колебаний ν длину волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$; тогда (7) принимает вид:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 me^2 E^2}{ch^3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (7')$$

или

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (7'')$$

где

$$R = \frac{2\pi^2 me^2 E^2}{ch^3}. \quad (8)$$

Это — так называемая „постоянная Ридберга“. Выражение (7) представляет собой известную формулу, найденную чисто эмпирическим путем Бальмером в Швейцарии в 1885 г. Она выражает собой серию спектральных линий водорода.

История с формулой Бальмера крайне поучительна: эта эмпирическая формула с изумительной точностью изображает водородный спектр и в то же время, так как в нее не было вложено никаких теоретических соображений, она почти за 30 лет не дала никакого толчка к дальнейшему развитию физики в данной области. Для того чтобы показать, насколько хорошо эта формула изображает действительный ход явлений, приведем таблицу наблюденных значений λ и сопоставим с вычисленными по формуле (7''). Вычисление производилось следующим образом: для определенной линии измеренная величина λ вставлялась в (7''), и по ней вычислялась величина R , а затем уже с помощью найденного значения R вычислялись другие значения λ . Результаты приведены в следующей таблице (см. табл. I на стр. 313).

Трудно найти другой случай, где бы совпадение вычислений с наблюдениями было настолько удовлетворительным. Однако получение

Таблица I.

n	3	4	5	6	7	8	9
λ , наблюденное . .	6563,07	4861,52	4340,64	4101,90	3970,24	3389,21	3835,54
λ , вычисленное по (7")	6563,04	4861,49	4340,66	4101,90	3970,25	3389,21	3835,53

формулы Бальмера это — еще не все. Ведь согласно (8) постоянная Ридберга выражается через известные нам постоянные. Если мы возьмем для $|e|=|E|=4,774 \cdot 10^{-10}$ согласно опытам Милликана и m из опытов $\frac{e}{m}$ с катодными лучами ($\frac{e}{m}=1,77 \cdot 10^7 c$) и $h=6,55 \cdot 10^{-27}$, мы находим: $R=1,09 \cdot 10^5$, тогда как на основании спектральных измерений: $R=1,09678 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$. Совпадение следует признать превосходным, так как входящие в (8) величины измерены далеко не с той точностью, как это имеет место для спектральных измерений.

Дальнейшее развитие теории Бора показывает, какое громадное значение имеет модель. В самом деле, раз формула Бальмера соответствует перескакиванию электрона с какой-либо орбиты на вторую, то, естественно, является вопрос: а что мы получим, если будем рассматривать перепрыгивание электронов не на вторую орбиту, а на первую или третью? Мы ведь должны получить целые спектральные серии линий, похожих на бальмеровскую. И действительно, в водородном спектре были открыты спектральные серии в ультрафиолетовой части спектра, так называемая серия Лаймана, которая в модели Бора соответствует перескакиванию электрона на первую орбиту и выражается формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (9)$$

Точно так же и в инфракрасной части измеренные Пашеном спектральные линии выражаются формулой:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (10)$$

В модели это соответствует перескакиванию на третью орбиту. Считать все это случайным совпадением едва ли кто решится. Какие бы недочеты в теории Бора мы ни находили, несомненно, она заключает в себе зерно истины. Более того, первое затруднение, с которым встретилась теория Бора при попытке распространить теорию с атома водорода на ионизованный атом гелия, после детального исследования превратилось в новую блестящую победу.

Если мы рассмотрим ионизованный гелий, то различие по сравнению с водородом получается только в том, что центральное ядро заряжено

вдвое сильнее, а электрон остается один, так как в ионизованном атоме один из двух электронов отщеплен. Рассмотрим теперь переход электрона для ионизованного атома гелия с шестой орбиты на четвертую (принимая во внимание, что заряд ядра $E = 2e$):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 me^4 \cdot 4}{ch^3} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{2\pi^2 me^4 \cdot 4}{ch^3 \cdot 4} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right). \quad (11)$$

На основании (11) заключаем, что при переходе электрона с $n=6$ на $n=4$ в ионизованном атоме гелия должна получиться линия той же длины волны, как и для водорода при переходе с $n=3$ на $n=2$ [(7')]. Такие же совпадения должны были бы получиться и для других n в тех случаях, когда n четное. Сопоставим теперь наблюденные спектральные линии для ионизированного гелия с водородным спектром (табл. II).

Таблица II.

n	He +	H
6	6560,1	6562,8
7	5411,6	—
8	4859,3	4861,3
9	4561,6	—
10	4338,7	4340,5
11	4199,9	—
12	4100,0	4101,7

Часться в том, что мы не приняли в расчет движения самого ядра.

Ведь наша система — ядро плюс электрон — система, аналогичная двойной звезде, где оба светила вращаются около общего центра

массы O (рис. 149). Если мы через M обозначим массу ядра, через m массу электрона, то расстояние центров ядра и электрона от общего центра масс A и a определяется из соотношения:

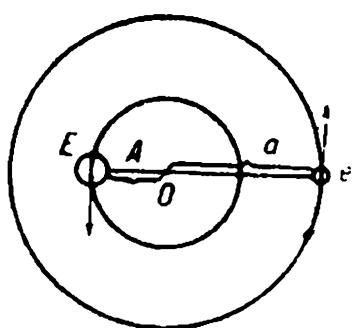


Рис. 149.

$$\frac{A}{a} = \frac{m}{M}. \quad (12)$$

Уравнения движения электрона и ядра при этих условиях принимают вид:

$$ma\omega^2 = \frac{eE}{(a + A)^2}$$

$$MA\omega^2 = \frac{eE}{(a + A)^2}. \quad (13)$$

Точно так же первый постулат Бора выразится следующим образом:

$$2\pi(ma^2\omega + MA^2\omega) = nh. \quad (14)$$

Можно показать, что в данном случае мы получим те же соотношения, как и в рассмотренной нами упрощенной модели, с той только разницей, что везде вместо a будет стоять $A+a$ и вместо m надо поставить $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. В самом деле, на основании (12) мы получаем:

$$a = (A+a) \frac{M}{m+M}$$

и

$$A = (A+a) \frac{m}{M+m}.$$

Вставляя (12) в (13) и (14), мы находим:

$$\mu(A+a)\omega^2 = \frac{eE}{(a+A)^2}$$

и

$$\mu(A+a)\omega^2 = \frac{eE}{(a+A)^2}, \quad (13')$$

и с другой стороны,

$$2\pi(A+a)^2\omega\mu = nh. \quad (14')$$

То же самое, как нетрудно убедиться, получается и с выражением энергии, а потому и в окончательных формулах для спектральных серий мы имеем:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 \cdot e^4 z^2}{ch^3} \cdot \frac{Mm}{M+m} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7''')$$

[Мы в (7''') заменили $E = Ze$, где Z — число элементарных зарядов в ядре.] Обозначая через R_∞ прежнюю постоянную Ридберга, ту самую, которую мы ввели в (7), мы для водорода получим:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_H}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7''''')$$

Если мы предположим, что масса ядра $M_H = \infty$, то получим прежнее выражение для формулы Бальмера. Для ионизованного атома гелия мы находим:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4R_\infty}{1 + \frac{m}{M_{He}}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7'''''')$$

Таким образом различие между линиями ионизированного атома гелия и соответствующими линиями серии Бальмера объясняется тем, что благодаря движению ядра так называемая ридберговская постоянная имеет не одно и то же значение в обоих случаях. Интересно отметить диалектику в процессе самого исследования. После открытия формулы Бальмера начали искать в эмпирических формулах других спектров той же самой постоянной, а также и в теоретической формуле для

ионизованного атома гелия. Более тщательные исследования показали, что нет единой постоянной для всех спектров, и она заменяется величиной $R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}}$ и в то же время эта единая постоянная остается в формуле в виде R_∞ . По данным Пашена постоянные для водорода и гелия имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} R_{\text{He}} &= 109\,722,144 \pm 0,04, \\ R_{\text{H}} &= 109\,677,691 \pm 0,06 \end{aligned}$$

и

$$R_\infty = 109\,737 \pm 0,06.$$

Отсюда находим:

$$\frac{M_{\text{H}}}{m} = 1847$$

и

$$\frac{e}{m} = 1,769 \cdot 10^7 c.$$

Последняя величина очень близко совпадает с величинами, полученными из опытов с катодными лучами и явлением Зеемана; быть может, даже это — наиболее точное значение, полученное для величины $\frac{e}{m}$. Таким образом мы видим, что развитие теории Бора на первых порах сопровождалось рядом блестящих успехов.

§ 2. Дальнейшее развитие теории Бора Зоммерфельдом.

Для того чтобы выяснить, в чем заключается особенность теории строения атомов по Зоммерфельду, нам прежде всего необходимо познакомиться с так называемыми „каноническими“ уравнениями механики, или, иначе, с уравнениями механики в форме Гамильтона. В качестве исходного пункта возьмем уравнения Лагранжа [ч. V, (75)]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k. \quad (15)$$

Так как K — однородная функция второй степени скоростей \dot{q}_k , то, по теореме Эйлера, имеем:

$$2K = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \dots,$$

или, вводя соответствующие количества движения, или „моменты“:

$$p_1 = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1},$$

мы получаем:

$$K = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots = L. \quad (16)$$

С помощью равенств вида $p_i = \frac{\partial K}{\partial q_i}$ мы определяем все \dot{q}_i через p_i и вставляем в первую часть уравнения (16). Результат этой подстановки обозначим K_1 . Дифференцируя (16), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial K_1}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial K_1}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial K_1}{\partial p_2} dp_2 + \dots &= \dot{q}_1 dp_1 + \dot{q}_2 dp_2 + \dots \\ \dots + p_1 d\dot{q}_1 + p_2 d\dot{q}_2 + \dots - \frac{\partial K}{\partial q_1} dq_1 - \dots - \frac{\partial K}{\partial q_1} d\dot{q}_1 - \dots & \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $\frac{\partial K}{\partial q_1} = p_1$, то две группы членов в (17) попарно уничтожаются.

Из (17) получаем:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K_1}{\partial p_i} \quad (18)$$

и

$$\frac{\partial K_1}{\partial q_i} = - \frac{\partial K}{\partial q_i}. \quad (19)$$

Если силы Q_k имеют потенциал, то $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, и (15) принимает вид:

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial K_1}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (15')$$

Вводя общую энергию $E = K_1 + \Pi$ и замечая, что Π не зависит от p_k , мы из (15') и (18) получаем:

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial E}{\partial q_k}$$

и

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_k}. \quad (20)$$

Это и есть уравнения Гамильтона; их особенность: они первого порядка, но зато их вдвое больше числом, чем число параметров, так как каждому параметру соответствует еще и момент p .

Если наша система, в отличие от рассмотренной нами модели Бора, определяется не одним, а несколькими параметрами, то первый постулат Бора должен согласно Зоммерфельду для каждого из параметров выражаться так называемым „фазовым интегралом“:

$$I_k = \oint p_k dq_k = n_k h. \quad (21)$$

Интеграл должен распространяться на весь цикл изменений данного параметра q . Так, если речь идет о радиусе-векторе, то интеграл должен быть распространен от r_{\min} до r_{\max} и обратно до r_{\min} . Нетрудно показать, что для рассмотренного нами случая мы с помощью (21) получим тот же результат.

В самом деле, кинетическая энергия врачающегося по круговой орбите электрона $K = \frac{1}{2} \cdot m a^2 \dot{\varphi}^2$, откуда $p_\varphi = m a^2 \dot{\varphi}$. Вставляя в (21), находим:

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi m a^2 \dot{\varphi} = n_\varphi h, \quad (21')$$

т. е. выражение, тождественное с (3).

Зоммерфельд рассматривает для модели водорода не одни только круговые орбиты, но и эллиптические, для которых приходится вводить не одно только первое квантовое число, но и второе квантовое число.

Рассмотрим эллиптическую орбиту AMB (рис. 150). Элемент дуги равен $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Соответственно этому кинетическая энергия:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right). \quad (22)$$

Потенциальная энергия попрежнему будет:

$$E_{pot} = -\frac{eE}{r} + C. \quad (23)$$

Так как при движении под действием всяких центральных сил имеет место теорема площадей, то, следовательно,

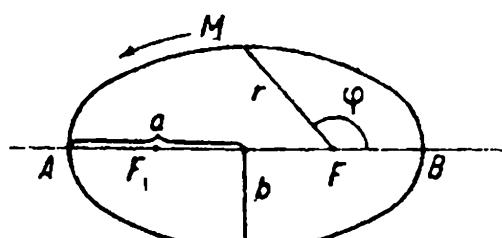


Рис. 150.

$$r^2 \dot{\varphi} = A. \quad (24)$$

В качестве параметров мы берем $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$, этому соответствует:

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \quad \text{и} \quad p_r = m\dot{r}. \quad (25)$$

По закону площадей $p_\varphi = \text{const}$, поэтому (21) дает нам:

$$2\pi p_\varphi = n_\varphi h, \quad (\text{I})$$

где n_φ — первое квантовое число, или „азимутальное“. Для второго параметра имеем:

$$\oint m\dot{r} \cdot dr = n_r h, \quad (\text{II})$$

где n_r — второе квантовое число, или „радиальное“. Преобразуем (II):

$$\begin{aligned} \oint m \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} dr &= \oint m \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \dot{\varphi} d\varphi = \oint mr^2 \dot{\varphi} \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 d\varphi = \\ &= p_\varphi \oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 d\varphi = n_r h. \end{aligned}$$

Вставляя сюда (I), находим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{n_r}{n_\varphi}. \quad (\text{III})$$

Уравнение эллипса в полярных координатах можно написать в следующих двух видах:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

или

$$\frac{1}{r} = C_1 + C_2 \cos \varphi. \quad (26)$$

При $\varphi = 0$ (рис. 150) $r_0 = a(1 - \varepsilon)$, при $\varphi = \pi$ $r_\pi = a(1 + \varepsilon)$. Эти условия позволяют найти C_1 и C_2 ; тогда (26) принимает вид:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (26')$$

Логарифмируем полученное равенство и берем от полученной величины дифференциал:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi, \quad (27)$$

откуда

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (27')$$

Вставляя (27') в (11'), мы находим:

$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{n_r}{n_\varphi}. \quad (\text{II}'')$$

Вычисление¹ этого интеграла дает:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 = \frac{n_r}{n_\varphi}. \quad (\text{III})$$

Составим выражение для кинетической и потенциальной энергии:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \left(1 + \frac{r^2 p_r^2}{p_\varphi^2} \right). \quad (28)$$

Составляем стоящий в скобках второй член с помощью (27'), а также заменяем $\frac{1}{r^2}$ через (26'). Прежде всего:

$$\frac{r^2 p_r^2}{p_\varphi^2} = \frac{m^2 r^2 \dot{r}^2}{m^2 r^4 \dot{\varphi}^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

¹ Для интересующихся приведем вычисление интеграла (II''). Интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi &= \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 1 \right) d\varphi = I - 1, \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Далее, находим для

$$E_{kin} = \frac{p_\varphi^2}{2m} \cdot \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \right) = \frac{p_\varphi^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(\varepsilon \cos \varphi + \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right). \quad (28')$$

Потенциальная энергия:

$$E_{pot} = \frac{Ee}{r} = \frac{Ee}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2}. \quad (29)$$

Общая энергия:

$$U = E_{kin} + E_{pot} = \frac{p_\varphi^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(\varepsilon \cos \varphi + \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right) - \frac{Ee}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2}. \quad (30)$$

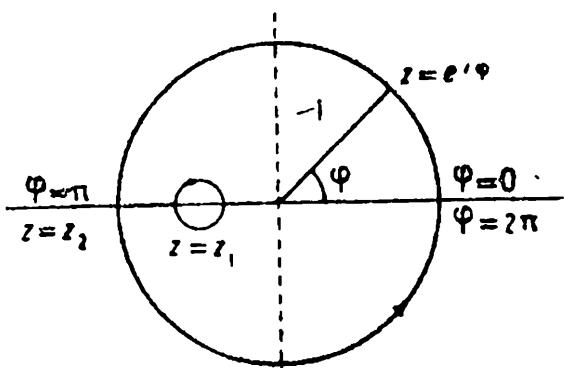


Рис. 151.

Для данной определенной орбиты энергия не может зависеть от времени, а следовательно, и от угла φ . Собирая члены с $\cos \varphi$ и приравнивая нулю получившийся коэффициент при $\cos \varphi$ в (30), мы находим:

$$a = \frac{p_\varphi^2}{1 - \varepsilon^2} \frac{1}{mEe}, \quad (31)$$

тогда (30) принимает вид:

$$U = \frac{p_\varphi^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \frac{1 + \varepsilon^2}{2} - \frac{Ee}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (30')$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Вводим в этот интеграл комплексную переменную $z = e^{i\omega}$, которая при изменении φ от 0 до 2π пробегает в положительном направлении окружность радиуса, равного 1:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]} = \frac{1}{\pi i \varepsilon} \oint \frac{dz}{z^2 + 2\eta z + 1}, \quad (a')$$

где $\eta = \frac{1}{\varepsilon}$, причем $\eta > 1$, так как для эллипса $\varepsilon < 1$. Корни многочлена в знаменателе: $z_1 = -\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}$ ($-z_1 < 1$) и $z_2 = -\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}$ ($-z_2 > 1$).

Разлагая в (a') подинтегральную функцию на простейшие дроби, находим:

$$I = \frac{1}{\pi i \varepsilon} \oint \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{\pi i \varepsilon (z_1 - z_2)} \left\{ \oint \frac{dz}{z - z_1} - \oint \frac{dz}{z - z_2} \right\}. \quad (b)$$

Второй интеграл в (b) равен нулю, так как особая точка z_2 лежит вне круга радиуса, равного 1, а первый интеграл путем деформирования контура можно свести к обходу вокруг точки z_1 (рис. 151), т. е. к $2\pi i$, тогда, вставляя в (b) значения корней z_1 и z_2 , находим:

$$I = \frac{2\pi i}{\pi i \varepsilon (z_1 - z_2)} = \frac{2}{\varepsilon^2 \sqrt{\eta^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Вставляя эту величину в (a) и (b'), мы находим выражение (III)

Вставляя в первый член (31), мы получаем последовательно:

$$U = \frac{Ee}{a(1-\varepsilon^2)} \left(\frac{1+\varepsilon^2}{2} - 1 \right) = -\frac{Ee}{2a}. \quad (30'')$$

Далее, вставляем в (30) a из (31) и заменяем $p_\varphi = \frac{n_\varphi h}{2\pi}$; тогда:

$$U = -\frac{mE^2e^2}{2} \cdot \frac{(1-\varepsilon^2)}{n_\varphi^2 h^2} 4\pi^2,$$

и заменяя здесь, согласно (III), $1-\varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_\varphi + n_z)^2}$, мы находим окончательно:

$$U = -\frac{2\pi^2 m E^2 e^2}{h^2 (n_\varphi + n_z)^2}. \quad (IV)$$

Этот результат, полученный Зоммерфельдом, имеет большое значение. Мы имеем для эллиптической орбиты точь в точь такое же выражение энергии, как и для круговой, с заменой n через $n = n_\varphi + n_z$. Эта сумма была названа Бором „главным квантовым числом“. Таким образом каждой эллиптической орбите соответствует круговая в том смысле, что энергия на этой орбите одна и та же. Если рассматривать излучение в электрическом и магнитном поле, то орбита изменяется, и наличие эллиптических орбит может быть непосредственно констатировано. Но даже, более того, если изучать так называемую тонкую структуру спектральных линий, то наличие эллиптических орбит уже сказывается даже в отсутствии внешнего поля. Рассмотрим такой пример. Пусть с какой-либо эллиптической орбиты электрон пересекает на круговую, скажем, на вторую, и пусть в другом атоме с круговой орбиты, соответствующей эллиптической орбите для первого атома, т. е. у которой $n = n_z + n_\varphi$, электрон пересекает на вторую. Согласно (IV), казалось бы, мы по второму постулату Бора должны были бы получить спектральную линию той же частоты. Однако движение по эллиптической орбите, которое мы рассмотрели, есть приближенное решение задачи, особенно это имеет место для сильно вытянутых эллипсов, в которых электрон очень близко подходит к ядру. Вблизи ядра электрон движется очень быстро, и тут приходится учитывать изменение его массы со скоростью, а если это так, то и все решение задачи для эллиптической орбиты, в том числе и (IV), требует поправки, правда, очень небольшой. Это ведет к тому, что спектральные линии при переходе с эллиптических и соответствующих им круговых орбит не в точности одинаковы; другими словами, спектральные линии оказываются сложными, образуя так называемую тонкую структуру. Эта структура была подтверждена на опыте Пащеном и Герке и Лау, причем по Пащену опыты подтверждают закон изменения массы со скоростью, вытекающий из теории Эйнштейна; данные же Герке и Лау говорят в пользу изменения массы со скоростью, выведенного Абрагамом. Спор этот, однако, прекратился ввиду того, что в новой теории квант самое понятие орбиты электрона изгоняется. К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем.

§ 3. Общие выводы из теории Бора и Зоммерфельда.

Мы видели, что теория Бора-Зоммерфельда имела ряд крупных успехов, но эти успехи оказали и свое отрицательное влияние, заключающееся в том, что постепенно вошло в привычку считать, что непонятные нам физически два постулата Бора вообще необъяснимы с точки зрения прежней физики в том смысле, что их нельзя даже рассматривать как обобщение или дальнейшее развитие классических выводов физики. Эти квантовые законы стали считаться специфическими для атомных процессов,— специфичность здесь понимается в антидиалектическом смысле, так как с диалектической точки зрения надо было бы показать, как эти законы, действующие в атомном мире, переходят в свою противоположность — в законы макроскопического мира. Этих попыток теория квант не делает. Далее, совершенно перестали удивляться тому, что на так называемых „устойчивых“ орбитах Бора электрон не излучает, тогда как, согласно закону Лармора, каждое ускорение, в том числе и центростремительное, сопровождается излучением. Более того, когда Томсон в 1929 г. предложил физическое объяснение первому постулату Бора и объяснил, почему электрон не излучает на так называемой „устойчивой орбите“, то на это теоретики, разрабатывающие абстрактную теорию квант, не обратили никакого внимания. Наконец, на основе модели Бора была сделана попытка опровергнуть закон причинности. Дело заключается в следующем. Мы видели, что в модели Бора электрон может перескакивать с любой отдаленной орбиты на вторую, первую, третью и т. д. орбиты, причем излучаемая энергия будет различного качества — различной длины волны. Энергия излучается тогда, когда электрон срывается со своей старой орбиты. Но отсюда выходит, что электрон сразу начинает испускать излучение такого характера, которое соответствует определенному конечному положению электрона, т. е. электрон как будто бы „знает“, где он остановится, и в соответствии с этим „знает“, что ему нужно излучать. На этой основе и началась проповедь отказа от закона причинности, которая только усилилась, когда теория Бора и Зоммерфельда, теперь называемая „классической теорией квант“, сменилась гораздо более абстрактными теориями Гейзенберга, Шредингера, де-Броиля и Дирака.

В рассмотренном нами примере методологическая ошибка, приведшая к отрицанию закона причинности, заключается в том, что полуиспользованная теория принимается за окончательное решение. Ведь самое условие устойчивой орбиты нам непонятно. Что происходит на орбите, когда электрон с нее срывается, мы также не знаем, а современная теория квант считает даже, что об орбите электрона и говорить нельзя. Поэтому немудрено, что, фактически отказываясь от детального изучения самого явления, мы не можем ответить на интересующие нас вопросы. Беда заключается в том, что теоретики, разрабатывающие вопросы теории квант, считают, что все уже решено и что дальше сделять ничего нельзя, и потому полученные, еще несовершенные, результаты принимаются за окончательное и бесповоротное решение задачи.

Глава II.

Теория квант по Томсону. Исследование Н. П. Кацерина.

§ 1. Основные предположения теории Томсона.

В 1924 г. Дж. Дж. Томсон дал теорию, представляющую синтез волновой и квантовой теории света. Если электрон быстро приближается к протону, то на фараадеевой трубке, соединяющей протон с электроном, может образоваться петля (как это показано на рис. 152), которая

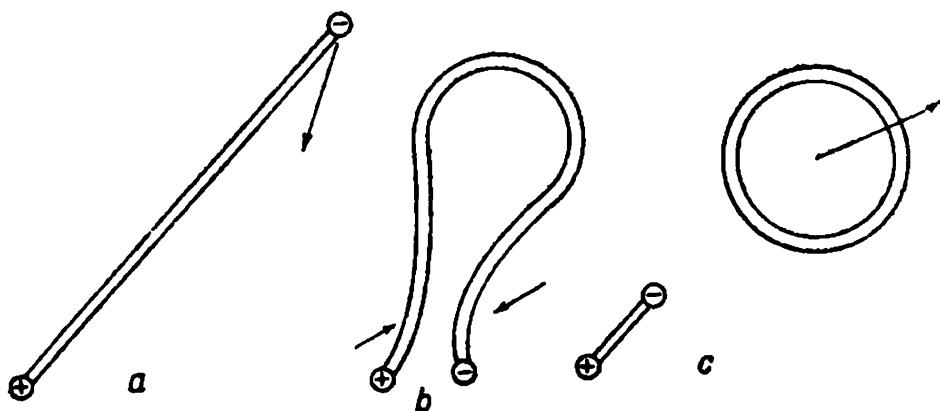


Рис. 152.

отделяется в самостоятельное замкнутое кольцо. Вспомним, что фараадеева трубка не может пересекать самоё себя, — это означало бы, что в месте пересечения существуют одновременно два направления поля. Поэтому образуется замкнутое кольцо, которое представляет собой квант лучистой энергии. Если радиус кольца r , то соответствующая длина волны:

$$\lambda = 2\pi r. \quad (32)$$

Так как по фараадеевым трубкам бегут волны со скоростью света, то установившиеся волны на кольце могут быть только длины λ [(32)], так как на всей длине кольца должна уложиться и вся длина волны, иначе не может быть установившегося движения. Эти замкнутые кольца движутся одновременно с волнами, следя по тем же направлениям, как и самые волны. В самом деле, если система волн движется, то за бегущими в волне трубками должны последовать рядом с ними находящиеся, вследствие поперечного давления, действующего перпендикулярно длине трубы, в том числе и замкнутые кольца — кванты. Томсон изложил свою теорию, на первый взгляд, чисто описательным путем, рассказывая, как движутся фараадеевы трубы, так как им было уже раньше доказано в предшествующих работах, которые мы изложили в ч. III, что любое движение фараадеевых трубок совместимо с максвеллевскими уравнениями. Для тех же, кто незнаком с предшествующими работами Томсона, его новая работа, дающая синтез волновой и квантовой теории, могла показаться недостаточно обоснованной. Однако, как показал проф. Н. П. Кацерин (см. „Philosophical Magazine“, Vol. II, 1926¹), результаты, полученные Томсоном, можно получить чисто аналитическим путем. Мы

¹ См. также сборник, посвященный проф. О. Д. Хвольсону, изданный Русским физ.-хим. обществом.

сейчас изложим ход мысли проф. Кастерина. Необходимо отметить, что изложение у проф. Кастерина дано в чрезвычайно сжатом виде, поэтому мы в дальнейшем приводим все вычисления полностью. Если в поле фарадеевы трубы движутся параллельно оси X со скоростью u_x (рис. 153), то производная по времени для точки, движущейся вместе с трубками:

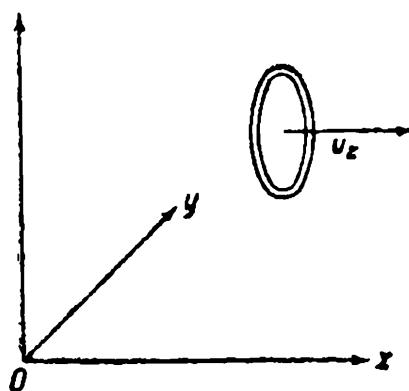


Рис. 153.

как это мы встретили при аналогичном случае в гидродинамике (так называемая „субстанциональная“ производная, см. ч. II, гл. II, § 2). Если мы рассматриваем замкнутую движущуюся фарадееву трубку, то для наблюдателя, движущегося вместе с ней, поле со временем меняться не будет, поэтому $\frac{d}{dt} = 0$, и мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u_x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (33)$$

Применим это преобразование к первой группе уравнений Максвелля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{u_x}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\beta_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = \beta_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + \beta_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \stackrel{1}{=} \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\beta_x \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -\beta_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Преобразованные уравнения (34) можно представить в виде:

$$\text{rot } \bar{M} = 0. \quad (34')$$

В самом деле, собирая все производные по одной и той же координате вместе, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (M_z - \beta_x E_y) - \frac{\partial}{\partial z} (M_y + \beta_x E_z) &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} (M_z - \beta_x E_y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (M_y + \beta_x E_z) - \frac{\partial M_x}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (34'')$$

¹ Так как трубы замкнутые, то в нашем поле заряд равен 0, откуда

$$\frac{\partial E_x}{\partial r} + \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

где \bar{M} имеет слагающими

$$M_x, M_y + \beta_x E_s \text{ и } M_s - \beta_x E_y.$$

Нетрудно убедиться, что мы здесь имеем дело с частным случаем следующего выражения:

$$\bar{M} = M - \frac{1}{c} [vE]. \quad (35)$$

Действительно, если мы раскроем (35), заметив, что v направлена по оси X , мы получим найденные нами слагающие \bar{M} . Таким же путем мы преобразуем и вторую группу уравнений Максвелля. Надо только помнить, что в левой части уравнений второй группы знак будет противоположный. Мы, следовательно, получаем:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad (36)$$

где слагающие для \bar{E} будут:

$$E_x, E_y - \beta_x M_s \text{ и } E_s + \beta_x M_y.$$

Простейшим решением (34) и (36) будет $\bar{M} = 0$ и $\bar{E} = 0$. Напишем эти решения в раскрытом виде:

$$\left. \begin{array}{ll} M_x = 0, & E_x = 0, \\ M_y = -\beta_x E_s, & E_y = \beta_x M_s, \\ M_s = \beta_x E_y, & E_s = -\beta_x M_y. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Вставляем значение первого столбца для M во второй; тогда (37) принимает вид:

$$E_x = 0, E_y(1 - \beta_x^2) = 0 \text{ и } E_s(1 - \beta_x^2) = 0. \quad (38)$$

Уравнения (38) допускают следующие два решения: или $E_x = 0, E_y = 0$ и $E_s = 0$, тогда поле вообще равно нулю; или $E_x = 0, E_y \neq 0$ и $E_s \neq 0$, но зато $1 - \beta_x^2 = 0$. Последнее условие дает $u_x = \pm c$. Это решение и соответствует нашей задаче. Замкнутая трубка расположена в плоскости $x = 0$, поэтому E_y и $E_s \neq 0$, а $E_x = 0$. Такая замкнутая трубка, следовательно, может двигаться только со скоростью света и притом по направлению нормали к плоскости, в которой располагается замкнутая трубка. Как показал проф. Кастерин, электромагнитная энергия движущегося кольца пропорциональна числу колебаний, соответствующих данному кванту излучения. Таким образом закон Планка, как это совершенно неожиданно оказалось, совместим с уравнениями Максвелля. Для того чтобы это доказать, нам необходимо сделать маленькое отступление и найти выражение $\operatorname{div} E$ и $\operatorname{div} M$ в криволинейных координатах.

§ 2. Максвелловы уравнения в криволинейных координатах.

Пусть нам даны три семейства поверхностей

$$f_1(x, y, z) = a, f_2(x, y, z) = \beta \text{ и } f_3(x, y, z) = \gamma. \quad (39)$$

Эта система поверхностей образует нам систему координат. Осям коор-

динат будут соответствовать линии пересечения поверхностей, данных уравнениями (39) (рис. 154). Если мы переходим от одной поверхности семейства α к другой $\alpha + d\alpha$, то заключающийся между эими поверхностями отрезок ds_1 , дуги, отсчитанной по линии пересечения $\beta = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$, связан с $d\alpha$ соотношением $d\alpha = h ds_1$. Для того чтобы это соотношение было яснее, рассмотрим систему полярных координат. В этом случае мы будем иметь в качестве поверхностей, определяющих нашу координатную систему; систему шаров $r = \text{const}$, систему плоскостей, проходящих через OD (рис. 155), определяемых углом φ , отсчитанным от какой-либо определенной плоскости OBD , и наконец, систему конических поверхностей с углом при вершине ϑ и общей осью OD .

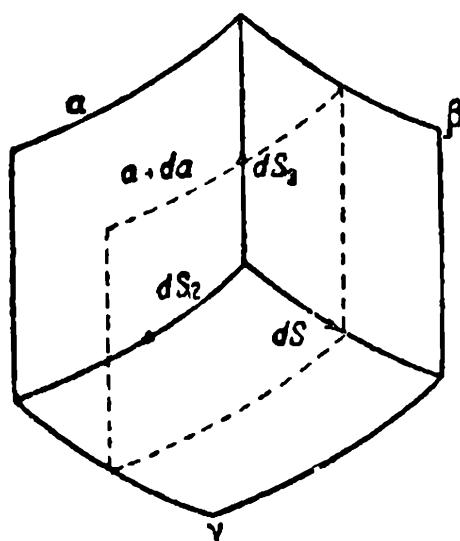


Рис. 154.

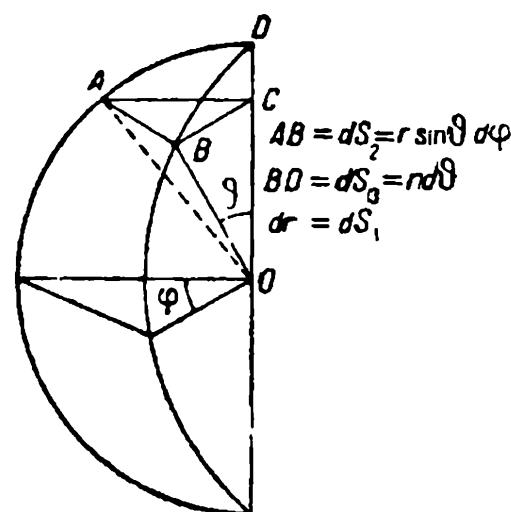


Рис. 155.

Роль ds_1 будут играть элементы радиуса, потому что конусы будут пересекаться с плоскостями, проходящими через ось конусов по прямым, проходящим через вершину конуса, совпадающую с центром шаровых поверхностей. Итак, $ds_1 = dr$, ds_2 будут элементы дуги параллельных кругов AB , определяемых линией пересечения шара с конусом, вершина которого совпадает с центром шара; отсюда $ds_2 = r \sin \vartheta d\varphi$ и, наконец, $ds_3 = r d\vartheta$. Итак, мы имеем следующий ряд соотношений:

$$\left. \begin{aligned} dr &= ds_1, \\ d\varphi &= \frac{ds_2}{r \sin \vartheta}, \\ d\vartheta &= \frac{ds_3}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

В общем случае будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} d\alpha &= h_1 ds_1, \\ d\beta &= h_2 ds_2, \\ d\gamma &= h_3 ds_3. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Сравнивая (41) с (40), мы видим, что для полярных координат мы имеем:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \quad \text{и} \quad h_3 = \frac{1}{r}.$$

Рассмотренный нами пример (40) представляет собой систему ортогональных (прямоугольных) координат. Мы в дальнейшем и будем пользоваться только ортогональными системами. Элемент дуги в системе (40) будет иметь следующий вид:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2. \quad (42)$$

Составим теперь выражение операции div в системе криволинейных ортогональных координат. Для этого рассмотрим поток какого-либо вектора M через „границы“ бесконечно малого элемента $ds_1 ds_2 ds_3$. Составим прежде всего следующую таблицу:

Поток через

$$ds_2 ds_3 \rightarrow M_1 ds_2 ds_3,$$

$$ds_3 ds_1 \rightarrow M_2 ds_3 ds_1,$$

$$ds_1 ds_2 \rightarrow M_3 ds_1 ds_2,$$

через противоположные элементы поверхности элемента объема $ds_1 ds_2 ds_3$:

$$M_1 ds_2 ds_3 + \frac{\partial}{\partial s_1} (M_1 ds_2 ds_3) ds_1,$$

$$M_2 ds_3 ds_1 + \frac{\partial}{\partial s_2} (M_2 ds_3 ds_1) ds_2,$$

$$M_3 ds_1 ds_2 + \frac{\partial}{\partial s_3} (M_3 ds_1 ds_2) ds_3.$$

Так как элемент составлен из криволинейных отрезков, то элементы поверхности, противоположные $ds_2 ds_3$, $ds_3 ds_1$, $ds_1 ds_2$ и т. д., могут отличаться, а потому все $ds_2 ds_3$, $ds_3 ds_1$, $ds_1 ds_2$ и стоят в нашей таблице под знаком производных. Составляя величину потока через всю поверхность элемента $ds_1 ds_2 ds_3$ и заменяя производные по ds_1 , ds_2 , ds_3 через $d\alpha$, $d\beta$ и $d\gamma$, мы получаем:

$$h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 ds_2 ds_3) ds_1 + h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 ds_3 ds_1) ds_2 + h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} (M_3 ds_1 ds_2) ds_3. \quad (a)$$

Вставляем во всех выражениях в скобках вместо ds их выражения через $d\alpha$ и выводим все $d\alpha$, $d\beta$ и $d\gamma$ из-под знака производных, так как α , β и γ — независимые переменные:

$$\begin{aligned} & h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{M_1}{h_2 h_3} \right) ds_1 d\beta d\gamma + h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{M_2}{h_3 h_1} \right) ds_2 d\gamma d\alpha + \\ & + h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{M_3}{h_1 h_2} \right) ds_3 d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (a')$$

Заменяем теперь $d\beta$, $d\gamma$ и т. д. их выражениями через ds ; тогда (a') принимает вид:

$$h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{M_1}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{M_2}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{M_3}{h_1 h_2} \right) \right\}. \quad (a'')$$

Так как по определению

$$\int v_n d\sigma = \int \operatorname{div} v ds_1 ds_2 ds_3,$$

то мы получаем:

$$\operatorname{div} M = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M_1}{h_2 h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{M_2}{h_3 h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{M_3}{h_1 h_2} \right) \right\}. \quad (43)$$

Аналогичным путем находим выражение градиента:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} + i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} + i_3 \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{ds_1}{ds} + i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{ds_2}{ds} + i_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{ds_3}{ds} = \\ &= i_1 h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i_2 h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + i_3 h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (44)$$

Точно так же для операции rot получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_x M &= h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_2}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_1}{h_1} \right) \right], \\ \operatorname{rot}_y M &= h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v_3}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_2}{h_2} \right) \right], \\ \operatorname{rot}_z M &= h_3 h_1 \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v_1}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_3}{h_3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

§ 3. Доказательство совместимости закона Планка с системой уравнений Maxwellia.

Займемся более детальным исследованием поля „томсоновского кольца“. Проведем плоскость через направление скорости и через центр кольца. Этой плоскостью мы пересекаем кольцо (рис. 156) (сечение, изображенное на рисунке, взято только для упрощения расчетов). Все поле можно разделить на три части: в I и III областях $E_x = E_y = E_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, в области II $E_y \neq 0$ и $E_z \neq 0$. Возьмем для E_φ направление часовой стрелки (рис. 157); тогда для слагающих E_φ получим:

$$E_y = E_\varphi \sin \varphi \text{ и } E_z = -E_\varphi \cos \varphi. \quad (46)$$

Согласно (37) находим для M :

$$\begin{aligned} M_y &= -\beta_x E_z = E_\varphi \beta_x \cos \varphi \\ \text{и } M_z &= \beta_x E_y = \\ &= \beta_x E_\varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (46')$$

Так как мы доказали, что $\beta_x = 1$, мы имеем равенства абсолютных значений векторов M и E , а направление M , как это вытекает из (46)

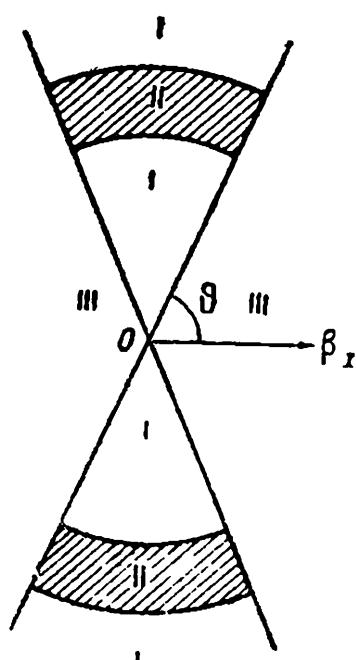


Рис. 156.

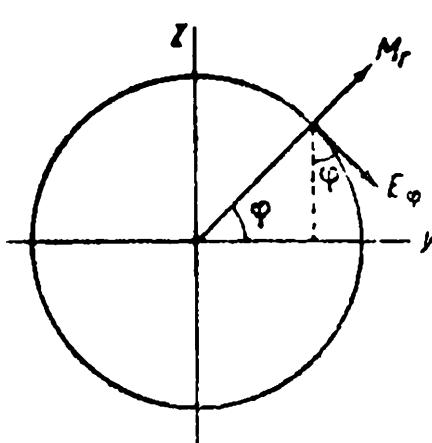


Рис. 157.

(рис. 157), совпадает с положительным направлением радиуса r . Итак,

$$|M_r| = |E_\varphi|. \quad (47)$$

Так как только $E_\varphi \neq 0$, то от уравнения

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (E_r r^2 \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r E_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta E_\theta) \right\} = 0$$

остается

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = 0^1; \quad (48)$$

таким образом, $E_\varphi = \text{const}$ по всему кольцу. Это доказывает, что кольцо имеет везде одно и то же сечение. Заменяя, далее, $M_r = E_\varphi$, мы получаем из $\operatorname{div} M = 0$ следующее:

$$\operatorname{div} M = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (M_r r^2) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_\varphi r^2) = 0, \quad (49)$$

откуда

$$r^2 E_\varphi = C_0,$$

или

$$E_\varphi = \frac{C_0}{r^2}. \quad (50)$$

Обозначим сечение трубы через σ ; тогда весь поток будет σE_φ .

Этот поток оканчивался на заряде в один электрон; таким образом, по теореме Гаусса:

$$E_\varphi \sigma = 4\pi e. \quad (51)$$

Составим теперь величину электромагнитной энергии, заключенной в замкнутой кольцевой фараадеевой трубке.

$$U_{em} = 2\pi r \sigma \left(\frac{E_\varphi^2}{8\pi} + \frac{M_r^2}{8\pi} \right) = 2\pi r \sigma \frac{E_\varphi^2}{4\pi} = 2\pi r e E_\varphi, \quad (52)$$

где принято во внимание (51). Вставляем, далее, (50) в (52):

$$U_{em} = 2\pi c \frac{C_0}{r} = \frac{4\pi^2 e C_0}{2\pi r} = \frac{4\pi^2 e C_0}{\lambda} = \frac{4\pi^2 e C_0}{c} v, \quad (53)$$

где использовано (32) и длина волны заменена числом колебаний v . Совершенно ясно, что (53) представляет собой величину „кванта“, пропорциональную числу колебаний:

$$U_{em} = h v, \quad (53')$$

¹ Еще раз напоминаем, что так как мы имеем дело с замкнутым кольцом (заряды равны 0), то $\operatorname{div} E = 0$.

где роль h играет

$$h = \frac{4\pi^2 e C_0}{c}. \quad (54)$$

Во всем изложенном нами решении уравнений Максвелля, найденном проф. Кастириным, самое интересное, что поле прерывисто, оно ограничивается замкнутым кольцом. Но, с другой стороны, поле по длине кольца непрерывно. Повидимому, до сих пор эти решения не были найдены, главным образом, потому, что к уравнениям Максвелля подходили формально, не задумываясь над их физическим смыслом, и поле рассматривали чисто метафизически как абсолютно непрерывное. У стоящих на формально-абстрактной точке зрения теоретиков полученный результат совершенно не связывается с представлением о непрерывности тангенциальной слагающей поля (ср. условия на границе, часть II).

Действительно, переходя из кольца [область II] в область I или III, мы переходим из области конечных значений E и M в область, где поле равно нулю. Но одно не надо забывать: кольцо движется со скоростью света. Ведь если останавливаться перед такими трудностями, то придется признаться, что совершенно непонятно, как луч света может возникнуть или прекратиться. В самом деле, когда где-либо возникает поток лучистой энергии, то, когда головная волна этого потока движется, она отделяет собой область, где поле имеет конечное значение, от области, где поле равно нулю, куда еще поток лучистой энергии не дошел. Таким образом, если отказаться от взглядов Томсона, то придется считать, что ни один поток лучистой энергии не может начаться или окончиться! Кроме того, английский теоретик Лёв показал, что обычные условия на границе неприменимы в том случае, когда поле движется со скоростью света, и что в этом случае имеют место те самые условия, о которых у нас шла речь.

Появившаяся, правда, с большими оговорками и с признанием большого значения полученных результатов, критика¹ работы проф. Кастирина основана на недоразумении: критик не понял, к какой системе координат отнесено поле замкнутого кольца. Мы видели, что квант движется по отношению к выбранной нами системе координат со скоростью света, а Ращевский полагает, что координатная система связана с движущейся трубкой. Все это показывает, насколько увлечение формально-математической физикой отвлекает серьезных исследователей от физического содержания — от теоретического мышления.

Из соотношения (53) мы можем без труда вычислить массу замкнутой фарадеевой трубы, пользуясь ранее выведенным нами соотношением Томсона-Эйнштейна $m = \frac{E_{em}}{c^2}$. Действительно, масса светового кванта:

$$m = \frac{hv}{c^3} = \frac{h}{c\lambda}. \quad (55)$$

С помощью (55) мы можем вычислить для любой длины волны массу соответствующего ей светового кванта. Мы берем данные, приведенные

¹ N. Rashevsky, Light V Quanta and Maxwell's Equations, „Phil. Mag.“, p. 459, Vol. 4, 1927.

проф. Н. Кацеринным в докладе 10 января 1927 г., прочитанном в Физическом о-ве им. П. Н. Лебедева, которые сведены в следующую таблицу:

Таблица III.

	Длина волны λ	Масса кольца m
Зеленая часть спектра	$5 \cdot 10^{-5}$ см	$0,436 \cdot 10^{-32}$ г
Ультрафиолетовый спектр	$1 \cdot 10^{-5}$ "	$2,18 \cdot 10^{-32}$ "
Рентгеновское излучение	$5 \cdot 10^{-9}$ "	$0,436 \cdot 10^{-24}$ "
Проникающее излучение	$1,3 \cdot 10^{-13}$ "	$1,45 \cdot 10^{-24}$ "
Масса электрона		$0,9 \cdot 10^{-27}$ "
Масса протона		$1,649 \cdot 10^{-24}$ "

Мы видим из приведенной таблицы, что масса кванта только для рентгеновского излучения становится сравнимой с массой электрона. Для видимого же спектра масса кванта сильно отстает от массы электрона. Из сказанного ясно, что когда речь идет о массе энергии, по существу, носителем массы и энергии является особая форма материи — замкнутая фарадеева трубка. Эта форма качественно отлична от обычных известных нам форм материи. Действительно, в обычных хорошо известных нам формах материя состоит из протонов и электронов, соединенных фарадеевыми трубками, квант же лучистой энергии представляет собой, как мы видели, замкнутые, оторвавшиеся части трубок, соединявших протон с электроном. Но, во всяком случае, такая замкнутая трубка есть нечто реально существующее независимо от нашего сознания в пространстве и во времени. С этой точки зрения мы можем чисто материалистически объяснить то, что в самое последнее время истолковывается как „уничтожение“ материи и ее превращение в лучистую энергию без какого-либо материального носителя. Такое „уничтожение“, как предполагается, происходит, когда электрон падает на протон, и так как теоретики, стоящие на формально-идеалистической позиции, не мыслят себе заряды иначе, как в виде математических символов $+e$ и $-e$, то с их точки зрения, когда электрон падает на протон, получается „ничто“ $(+e) + (-e) = 0$. Зато выделяется квант лучистой энергии очень большой частоты и с громадным запасом энергии, но не имеющей материального носителя. С точки зрения рассматриваемой теории электрон и протон не могут уничтожаться, но, во всяком случае, мы вправе ожидать, что электрон и протон при их взаимном сближении будут связаны очень коротенькой фарадеевой трубкой. В каком состоянии движения будут они находиться, — это подлежит дальнейшему исследованию. масса всей этой системы будет, быть может, очень мала, а остающаяся часть трубы выделится в виде кольца. Таким образом „исчезновение“ материи и преобразование ее в энергию на самом деле есть превращение материи из одной формы в другую, причем изменяется и форма движения. Идеалистически же настроенные физики, стоящие на позиции махистской теории „чистого описания“, полагают, что, наконец, современная физика нашла настоящий пример существования движения без материи.

На основании выражения для энергии кванта

$$\frac{1}{4\pi} E_{\varphi}^2 2\pi r \sigma = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (52')$$

мы можем высчитать, как изменяется напряжение поля в квантах, соответствующих различным длинам волн. Действительно, помня, что $4\pi e = \sigma E_{\varphi}$ и что $2\pi r = \lambda$, мы из (52') получаем:

$$2\pi r \cdot E_{\varphi} e = e\lambda E_{\varphi} = h \frac{c}{\lambda},$$

откуда

$$E_{\varphi} = \frac{hc}{e\lambda^2}.$$

Вычисления дают следующую таблицу:

Таблица IV.

Зеленая часть спектра	$5 \cdot 10^{-5}$ см	50 000 вольт/см
Ультрафиолетовая	$1 \cdot 10^{-5}$,	1 250 000 ,
Рентгеновские лучи	$5 \cdot 10^{-9}$,	$5 \cdot 10^{12}$,

Из табл. IV ясно, почему кванты, соответствующие более коротким волнам, производят более сильные действия. Наконец, на основе данных табл. III мы сможем понять, почему так называемый эффект Комптона (к изучению которого мы сейчас приступим) наблюдается в рентгеновском спектре и не наблюдается в лучах видимого спектра.

§ 4. Эффект Комптона.

Явление, открытое Комптоном в 1922 г., объясняется столкновением светового кванта с электроном. Из источника рентгеновских лучей по

определенному направлению AB (рис. 158) вылетают кванты (мы не останавливаемся на том, каким способом выделяются лучи Рентгена определенной частоты). В результате столкновения мы получаем квант другой частоты, летящий по BC , и быстро летящий электрон по направлению BD . Теория показывает, что к столкновению „кванта“ с электроном приложимы: закон сохранения количества движения и закон сохранения живой силы. В самом деле, мы получим результаты, согласные с действительностью, если примем следующие уравнения:

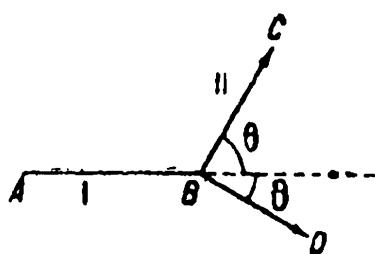


Рис. 158.

деле, мы получим результаты, согласные с действительностью, если примем следующие уравнения:

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{1}{2} mv^2, \quad (56)$$

$$\frac{h\nu_0}{c} = mv \cos \vartheta + \frac{h\nu}{c} \cos \theta, \quad (57)$$

$$mv \sin \vartheta + \frac{h\nu}{c} \sin \theta = 0. \quad (58)$$

Уравнение (56) есть уравнение энергии, — энергия первоначального кванта $h\nu_0$ превращается в энергию „рассеянного“ кванта плюс энергия приведенного в движение электрона. Остальные два уравнения представляют собой уравнения количества движения. Так как $h\nu$ и $h\nu_0$ представляют собой величины энергии для тел, движущихся со скоростью света, то $\frac{h\nu_0}{c}$ и $\frac{h\nu}{c}$ будут „количествами“ движения. Необходимо еще помнить, что в $h\nu$ заключена и электрическая и магнитная энергия, поэтому у нас и нет множителя $\frac{1}{2}$. Из (57) и (58) исключаем угол ϑ . Оба уравнения решаются относительно членов, содержащих ϑ , возводятся в квадрат и складываются. Мы получаем:

$$m^2v^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu_0}{c} \cdot \frac{h\nu}{c} \cos \theta + \frac{h^2\nu^2}{c^2}. \quad (59)$$

В том случае, когда $\frac{h\nu_0}{c}$ значительно меньше массы электрона m , уравнения (56) и (59) решаются подстановкой

$$v^2 = 2 \left(\frac{h}{mc}\right)^2 \nu_0^2 (1 - \cos \theta) \quad (60)$$

и

$$\nu = \nu_0 - \frac{h}{mc^2} \nu_0^2 (1 - \cos \theta). \quad (61)$$

Из (61) мы получаем изменение частоты при явлении Комптона, именно:

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu = \frac{h}{mc^2} \nu_0^2 (1 - \cos \theta). \quad (61')$$

Выражение (61') хорошо оправдывается на опыте. Возвращаясь к предыдущему параграфу (к табл. III), мы видим, что только для рентгеновского спектра $\frac{h\nu_0}{c^2}$ приближается к массе электрона, хотя она и значительно меньше ее, как это и требуется для того, чтобы новое приближенное решение (60) и (61) давало хорошие результаты. Для видимого же света кванты имеют такую малую массу, по сравнению с электроном, что электрон заметным образом в результате столкновения не смещается, почему в этой области спектра мы и не наблюдали до сих пор явления Комптона.

Глава III.

Теория Шрёдингера.

§ 1. Затруднения, встречающиеся при разработке теории Бора, и дальнейшее развитие квантовой теории.

Начиная с 1923 г. теория Бора начинает переживать тяжелый кризис. Большие трудности встретились при попытках распространить теорию, разработанную с таким успехом для атома водорода и ионизованного атома гелия на другие атомы. Уже модель атома гелия неионизованного не поддавалась тем методам, какими пользовались для изучения атома водорода. Далее, громадные трудности возникли при попытках подсчитать время, в течение которого электрон излучает энергию при перескакивании с одной орбиты на другую. Вот как об этом кризисе писал сам Бор в сотрудничестве с Крамерсом и Слатером¹.

„Хотя закон соответствия (это — одно из положений теории Бора, с помощью которого определялась сравнительная интенсивность спектральных линий и их поляризация.—A. T.) дает возможность на основании подсчета вероятности перехода (из одного устойчивого состояния в другое.—A. T.) делать заключение о средней продолжительности промежутка времени, в течение которого атом находится в данном стационарном состоянии, однако, перед нами встают громадные трудности при решении задачи о промежутке времени, в течение которого происходит излучение, соединенное с переходом (из одного устойчивого стационарного состояния в другое.—A. T.). Действительно, вместе с другими, хорошо известными, парадоксами теории квант упомянутое затруднение подкрепляло сомнения, высказывавшиеся с разных сторон: *может ли, вообще, детальное истолкование взаимодействия материи и лучистой энергии быть выражено причинным описанием в пространстве и во времени того типа, как это употреблялось до сих пор для истолкования естественных явлений*“.

Таким образом трудности, ставшие на пути исследования, заставили даже такого выдающегося теоретика, как Бор, договориться до отказа от науки, так как отказ от причинного описания в пространстве и во времени равносителен отказу от признания каких бы то ни было закономерностей и переходу к самой беспочвенной фантазии. В той же статье, где была высказана эта декларация, была развита „теория“, согласно которой волны света были абсолютно лишены энергии, а закон сохранения энергии сохранялся только при подсчете средних величин. Однако эта „теория“ была очень скоро окончательно похоронена, так что о ней нет нужды и говорить.

Кризис „разрешился“ тем, что в 1925 г. появилась статья Гейзенберга, излагавшая абстрактно-математическую теорию квант, в которой умышленно устранились какие бы то ни было намеки на модель. В эту пору, как мы видим, повторилось то, что произошло в конце XIX и начале XX вв. в области молекулярной теории. Трудности, встретившиеся при разработке молекулярно-кинетической теории, заставили Маха и Ост-

¹ „Philosophical Magazine“, Vol. 47, p. 790, 1924.

вальда повести поход против атомной теории. Оствальд еще в 1902 г. писал, что недалеко время, когда все эти „атомы и молекулы скроются в пыли архивов“, а Мах называл электронную теорию „почтенным шабашом ведьм“. Но всего только через 6 лет (в 1908 г.) сразу несколькими методами были показаны действия отдельных атомов, а также и непосредственные результаты молекулярных движений (брауновское движение, см. дополн., ч. VII).

Оствальд имел мужество отказаться от своей ошибки, а Мах так до самой смерти своей остался при своих заблуждениях. Весьма характерно, что теперь ни Гейзенберг, ни Шрёдингер, теорию которого мы сейчас будем разбирать, не отрицают факта существования атомов и электронов, но зато, испугавшись трудностей, с которыми встретилась теория Бора, они решили отказаться от представлений о движении электронов в атоме. В новых теориях даже речи нет об орбите электрона, и та модель, о которой у нас шла речь в гл. I, для современных теоретиков отошла в область истории.

Таким образом новые теории, в известном отношении, представляют собой шаг... назад. Из них выключено все то, что было жизненного в теории Бора, и оставлены одни только голые вычислительные схемы. Что этот добровольный отказ от дальнейшего исследования структуры атома есть попытное движение в науке, лучше всего доказывается теми явлениями, которыми сопровождалось это новое торжество „теории чистого описания“: Приведем для образца одну только характеристику теории Гейзенberга, данную Гансом Тиррингом¹. „Гейзенберговская теория представляет собой голую расчетную схему для вычисления ступеней энергии в атоме, частот и напряжений спектральных линий. Голизна и ненаглядность этой схемы сознательная и желанная. На вопрос, какой вид имеет атом, Гейзенберг мог ответить приблизительно так: „Глупец, твой вопрос в такой же мере лишен смысла, как и вопрос ребенка, спрашивающего о том, был ли младенец Христос мальчик или девочка“. Атом есть вещь, которой не пристало иметь какой-нибудь вид в такой же мере, как и младенцу Христу признаки пола и национальности. Свойства атома проявляются для нашего мира чувств через посредство спектра, через обнаруживающиеся при столкновении с электронами ступени энергии. А эти величины однозначно определяются предписаниями квантовой механики“. Любопытно отметить, что проф. Зоммерфельд, считающий, что новая теория квант представляет собой большое достижение, все-таки весьма недвусмысленно говорит о ее темных сторонах. Это тем более важно, что Зоммерфельд много сам работал в области теории квант и особенно в области волновой механики, связанной с теорией Шрёдингера. Взгляды Зоммерфельда настолько интересны, что мы их приводим полностью: „В заключение необходимо затронуть еще один пункт, имеющий теоретико-познавательное значение. Ясно выраженное намерение в первой работе Гейзенberга по квантовой механике заключалось в том, чтобы разработать метод, который основывался бы исключительно на соотношениях между принципиально наблюдаемыми

¹ „Die Grundgedanken der neueren Quantentheorie“, H. Thirring. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, VII Band, 1928, S. 410.

величинами. Представления, как, например, положение электрона, время оборота, форма пути, должны быть исключены из рассмотрения. Это ограничение только тем, что принципиально подлежит наблюдению, в конечном счете, основывается на философии Маха. Непосредственно опираясь на Маха, развивалась 30 лет назад пропаганда так называемой энергетики, которая хотела признавать только количества энергии в качестве физически наблюдаемых данных величин. Но энергетике можно было противопоставить столь плодотворную кинетическую теорию газов, в которой нельзя было обойтись без предположений о скоростях газовых молекул в качестве величин, играющих роль в теории, хотя их трудно было наблюдать в отдельности. Точно так же гейзенберговской точке зрения можно противопоставить волновую механику, особые функции которой точно так же, как и прежние пути электронов, не могут непосредственно быть проконтролированы на опыте. Без сомнения, философская установка была весьма существенна для успеха всего хода мысли Гейзенberга. Но мы видим настоящие заслуги квантовой механики не в том, что она ограничилась только непосредственно наблюдаемым, а в том, что она в некотором единстве связала классические законы с требованиями теории квант¹.

В этих словах дается хотя и сдержанная, но правильная, в общем, характеристика теории Гейзенберга как основанной на философии Маха. Однако неверно, что волновая механика относится к теории Гейзенберга, как кинетическая теория к энергетике. Волновая механика так же точно, как и теория Гейзенберга, заранее отказывается от модели атома — она также не ставит вопроса об орбитах электронов.

§ 2. Волновая механика Шрёдингера.

Шрёдингер в своей теории исходит из аналогии, которая была установлена еще Гамильтоном, между обычной механикой и геометрической оптикой. Если мы представим себе материальную точку массы m , которая движется в поле, определяемом потенциальной энергией $V(x, y, z)$, и которая начинает двигаться из данной точки A с данной энергией E , т. е. с определенной скоростью, то мы можем заставить ее пройти через любую точку поля B , если мы только надлежащим образом „назелим“, т. е. направим надлежащим образом, начальную скорость. Как правило, существует только одна определенная орбита, которая ведет от A к B при заданной величине энергии. Эта орбита обладает следующим свойством, а именно, для нее имеет место такое равенство:

$$\delta \int_A^B 2T dt = 0, \quad (62)$$

где T означает кинетическую энергию движущейся массы m . Из всех орбит, идущих от A к B , для которых сумма кинетической и потенциальной энергии равна E , условие (62) будет соблюдаться только для той, по которой в действительности будет двигаться тело.

¹ A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanischer Ergänzungsband, 1929 44.

Интеграл (62) мы можем преобразовать следующим образом: с одной стороны,

$$2T = 2(E - V), \quad (\text{а})$$

весь $E = V + T$, и с другой стороны, удвоенная кинетическая энергия

$$2T = m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (\text{б})$$

где $\frac{ds}{dt}$ — скорость движущейся массы m ; из (а) и (б) находим $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E - V)}$ и $\sqrt{2T} = \sqrt{m} \cdot \frac{ds}{dt}$. Вставляя эти величины в (62), мы находим:

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds = 0. \quad (62')$$

Вот в этой, именно, форме интеграл, связанный с движением материальной точки в поле силы, можно сравнивать с геометрической оптикой. Однако для этого нам надо сделать отступление и познакомиться с принципом быстрейшего прихода,

Ферма. Представим себе плоскую границу, идущую вдоль COD (рис. 159), разделяющую две среды I и II , и пусть какое-либо тело может двигаться в среде I со скоростью v_1 , а в среде II — со скоростью v_2 . Даны две точки A и B . Одна в среде I , другая в среде II .

Спрашивается, двигаясь по какому пути, данное тело быстрее всего придет из A в B ? Если бы у нас была одна среда, вопрос решался бы очень просто: решением была бы прямая, соединяющая A и B . Но при заданных условиях ясно, что выгоднее дольше идти в той среде, где можно быстрее двигаться.

Задача решается просто. Пусть искомый путь будет AOB , тогда затраченное на прохождение его время

$$t = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a - x_1)^2 + y_1^2}}{v_2}$$

(рис. 159). Посмотрим, при каких условиях t будет наименьшим. По общему правилу находим:

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{1}{v_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_2 \sqrt{(a - x_1)^2 + y_1^2}} = 0.$$

Из рис. 159 ясно, что это условие равносильно:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

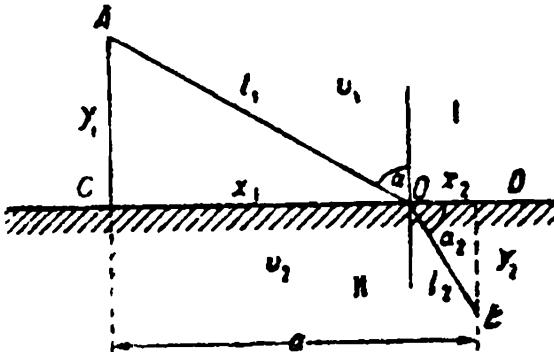


Рис. 159.

или

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (63)$$

Таким образом путь лучей света при преломлении удовлетворяет условию быстрейшего прихода: величина суммы $\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$ (рис. 159) должна иметь минимальное значение. Если путь, по которому идет луч, состоит из большого числа очень тонких слоев с различными оптическими свойствами, то принцип Ферма можно выразить в виде интеграла:

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{v} = 0, \quad (63')$$

т. е. сумма выражений $\frac{ds}{v}$ должна иметь наименьшее значение. Вся теория построена на аналогии двух интегралов (62') и (63'). Хотя, конечно, с самого начала надо признаться, что аналогия довольно-таки отдаленная.

Для того, чтобы оба интеграла выражали одно и то же, надо допустить, что

$$v = \frac{C}{\sqrt{2m(E - V)}}, \quad (64)$$

причем C — постоянная, и может зависеть от постоянной величины энергии E , но не может зависеть от координат, потому что интеграл берется по координатам. Итак, скорость „луча“ должна быть равна:

$$v = \frac{C}{\sqrt{2m(E - V)}}, \quad (64)$$

с тем, чтобы у нас получилось соответствие с (62), но тут-то и получается противоречие: в самом деле, скорость движущегося тела определяется из

$$mw^2 = 2(E - V),$$

или

$$w = \frac{1}{m} \sqrt{2m(E - V)}; \quad (65)$$

таким образом соответствия быть, как будто, не может: ведь скорости (65) и (64) различные, т. е. следовательно, тело массы m не может двигаться с той же скоростью, как и соответствующий ему луч. Однако все дело спасается допущением, что полная энергия

$$E = h\nu, \quad (66)$$

т. е. тем допущением, с которым оперирует теория квант. Во всяком случае, надо все-таки помнить, что это допущение в теории Шрёдингера ничем не мотивировано. Если мы вставим (66) в (64), то увидим, что

скорость зависит от частоты или длины волны, а если дело обстоит так, то в данной среде мы должны отличать фазовую скорость от так называемой групповой скорости. Если в данной среде бегут волны разной длины одновременно и с разными скоростями, то в некоторых местах могут оказаться гребни одновременно от волн различных длин, которые все вместе сложатся в одну волну с большой энергией. Такая группа перемещается вследствие движения волн.

Но двигаться она будет со скоростью, не совпадающей со скоростями отдельных составляющих группу волн. Скорость, с которой перемещается такая группа, и носит название „групповой скорости“.

Выведем связь между групповой и фазовой скоростью на примере двух систем волн, отличающихся немного друг от друга по длине волн

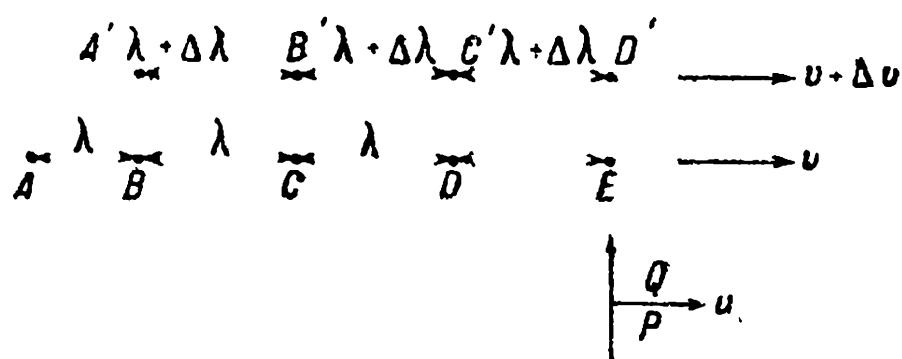


Рис. 160.

и по скорости, с которой они бегут в данной среде. Пусть A' , B' , C' , D' (рис. 160) означают гребни волн с длиной $\lambda + \Delta\lambda$, которые движутся со скоростью $v + \Delta v$, и пусть одновременно с ними со скоростью v будут пробегать гребни волн A , B , C , D длины λ . Мимо наблюдателя PQ через каждые $\frac{\lambda + \Delta\lambda}{v + \Delta v}$ секунд будет проходить по гребню волны первой группы и через каждые $\frac{\lambda}{v}$ секунд по гребню от второй группы. Предположим, что наблюдатель PQ движется со скоростью u в ту же сторону, что и волны, тогда мимо него из той и другой системы будут проходить

по гребню через каждые $\frac{\lambda + \Delta\lambda}{v + \Delta v - u}$ и $\frac{\lambda}{v - u}$ секунд. Если эти промежутки времени будут равны, то мимо наблюдателя одновременно будут проходить гребни от той и от другой системы. Тогда, следовательно, наблюдатель будет двигаться со скоростью „группы“, т. е. будет перебегать от одного места совпадения гребней к другому со скоростью перемещения этого „совпадения“. Итак, групповая скорость определяется из равенства

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{v - u + \Delta v} = \frac{\lambda}{v - u}, \quad (67)$$

откуда

$$u \Delta\lambda = v \Delta\lambda - \lambda \Delta v, \quad (67')$$

или

$$u = v - \lambda \frac{\Delta v}{\Delta\lambda}. \quad (67'')$$

Переходя к пределу, имеем.

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (68)$$

Это выражение мы для дальнейшего преобразуем, введя число колебаний, заменив $v = \lambda u$:

$$u = v - \lambda \frac{\lambda dv + v d\lambda}{d\lambda} = -\lambda^2 \frac{dv}{d\lambda}, \quad (69)$$

или

$$\frac{1}{u} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{w} \right). \quad (70)$$

Помножая числителя и знаменателя правой части (70) на h , мы на основании (66) находим:

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{dE} \cdot \left(\frac{E}{w} \right). \quad (71)$$

Попытаемся теперь добиться того, чтобы сделать групповую скорость $u = w$, тогда поставленная задача будет решена в том смысле, что движению массы m будет соответствовать групповая скорость u некоторого комплекса волн. Что же это за волны, почему скорость их (фазовая) зависит от частоты именно таким образом, как это дает (64) и (66), и что, наконец, это за срета, в которой движутся эти волны? На эти вопросы волновая механика не дает ответа. Де-Бройль, один из основателей всего учения современной волновой механики, в предисловии к своей книге пишет: „физическое истолкование новой механики крайне трудно“. Добиться совпадения $w = u$ можно, только подбрав надлежащим образом постоянную C в (64), которая не должна только зависеть от координат. В самом деле, из (71) и (65) имеем:

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{E}{w} \right) = \frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}}, \quad (72)$$

или, вставляя сюда (64),

$$\frac{d}{dE} \left\{ \frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C} \right\} = \frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}}. \quad (72')$$

Из (72') находим:

$$\frac{d}{dE} \left\{ \frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C} - \sqrt{2m(E-V)} \right\} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{2m(E-V)} \left(\frac{E}{C} - 1 \right) = \text{const.} \quad (73)$$

Так как V — функция координат, которая не может быть при всех условиях постоянной, то единственное решение (73): $\text{const} = 0$ и $C = E$. Поэтому (64) принимает вид:

$$v = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{E}{mw}, \quad (64')$$

где принято во внимание (65).

Из (64') получается одно важное следствие. Заменяя $v = \lambda v$ и $E = \hbar v$, мы из (64') находим:

$$\lambda = \frac{\hbar}{mv}.$$

Это соотношение подтверждилось в опытах с так называемой дифракцией электронов. Дело заключается в следующем: если пропустить пучок электронов через очень тонкий листок металла, скажем, золота, то на фотографической пластинке, помещенной за этим листком, получается дифракционная картина такого типа, как обычно получается при прохождении лучей Рентгена. Тем не менее, кольца дифракционной картины образованы электронами, так как магнитное поле смещает всю картину в сторону. С точки зрения волновой механики, как мы только что разобрали, частица, т. е. электрон, эквивалентна системе волн, которые при прохождении через металлический листок дают дифракционную картину, после же прохождения через листок „удобнее“ рассматривать электрон не как систему волн, а опять как дискретные частицы. Определяемая из радиусов получаемых колец длина волны λ удовлетворяет (64), если мы под m будем разуметь количество движения электронов, пролетающих через данный листок. Физическая картина всего этого процесса с точки зрения волновой механики совершенно неясна. В следующей главе мы увидим, как Томсону в 1929 г. удалось дать простое физическое объяснение этому интересному явлению.

Рассмотрим, как Шредингер сам оценивает значение и смысл волновой механики.

„Основная мысль волновой механики состоит в следующем.

Согласно новым взглядам явление, которому мы в прежней механике, как нам казалось, давали адекватное описание в виде движения материальной точки, задавая ее координаты x , y и z как функции времени, теперь должно быть описано с точки зрения новых взглядов определенным волновым движением определенной частоты и скорости (и следовательно, определенной длины волны). Математическое описание волнового движения дается не при помощи ограниченного числа функций одной переменной t , но непрерывным множеством таких функций, т. е. функцией (или, возможно, несколькими функциями) x , y , z и t . Эти функции подчиняются дифференциальному уравнению с частными производными“.

Далее следуют методологические рассуждения Шредингера, из которых ясно, как далек он от материализма.

„Утверждение, что то, что происходит в действительности, правильно описано с помощью волнового движения, вовсе не должно означать, что все, что существует, представляет собой волновое движение. Мы в дальнейшем увидим, что, распространяя на произвольную механическую систему наши рассуждения, мы вынуждены описывать то, что происходит в действительности в этой системе, с помощью волнового движения в обобщенном пространстве координат (пространство q) более чем трех измерений (! A. T.). Хотя последнее (пространство — A. T.) имеет вполне определенный физический смысл, о нем нельзя сказать, что оно «существует», поэтому нельзя говорить, что волновое движение в этом пространстве существует в обычном смысле этого слова.

Это просто только адекватное математическое описание того, что происходит. Может быть, и в случае одной материальной точки, о которой у нас шла речь, о волновом движении не следует говорить, что оно существует в буквальном смысле этого слова, хотя пространство конфигурации в этом случае случайно совпадает с обычным пространством¹.

Из приведенных слов мы ясно видим, насколько далеки мы от физического истолкования применяемых в волновой механике математических приемов, а с другой стороны, ясно, что нельзя противополагать волновую механику квантовой механике, как это делает Зоммерфельд: обе эти теории стоят на почве формального математического описания. На первый взгляд, терминология волнобразной теории внушает мысль, что речь идет действительно о волнах, но ведь из только что приведенных слов Шрёдингера мы видим, что это всего только „способ описания“.

Шрёдингер подчеркивает, что волновая механика позволяет связать в одно целое обычную механику и квантовую, причем между ними такое же отношение, как между геометрической оптикой и волновой оптикой, но это — только внешнее единство. В качестве указания, когда приложимы одни законы и когда они должны быть заменены другими, мы можем воспользоваться следующим приемом: из (64') мы имеем:

$$\frac{h}{\lambda} = mw, \quad (64')$$

или

$$\frac{h}{\lambda} a = maw,$$

где a — радиус орбиты. Принимая первый постулат Бора, мы находим:

$$\frac{h}{\lambda} a = n \frac{h}{2\pi},$$

или

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{n}{2\pi}. \quad (74)$$

Когда a значительно больше λ или, что то же, когда n значительно больше 2π , мы имеем законы обычной механики и только, когда a сравнимо с λ , мы вступаем в область квантовых законов. Все это было бы очень хорошо, если бы изложенная нами теория была физически обоснована и если бы волны, о которых у нас шла речь, были реальными волнами в реальной среде, а не в фантастическом пространстве многих измерений.

§ 3. Волновое уравнение Шрёдингера.

Рассмотрим сначала упругую среду, в которой распространяются продольные волны. Давление в этой среде будет удовлетворять обычному волновому уравнению вида:

$$\nabla p - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (75)$$

¹ E. Schrödinger, Four Lectures on Wave Mechanics, p. 5, 1928.

Решенис этого уравнения мы находим, положив

$$p(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{i2\pi\nu t}. \quad (76)$$

Подставляя (76) в (75), мы находим:

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 v^2}{\hbar^2} \psi = 0, \quad (77)$$

причем ψ подчиняется тем же пограничным условиям, что и p . Мы хорошо знаем, что решение для ψ получается не для всех значений v . Решение будет только для „собственных“ периодов нашей системы, определяемых пограничными условиями. Если v_k означает одну из этих собственных частот, то мы получаем в качестве решения:

$$p = \sum_k c_k \psi_k e^{i2\pi(v_k t + \theta_k)}; \quad (78)$$

для случая рассмотренных нами волн Шрёдингера мы в уравнение

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (75')$$

подставляем

$$\Phi = \psi e^{-i\frac{2-Et}{\hbar}},$$

где v заменено через $\frac{E}{\hbar}$. Подставляя это решение в (75), мы находим:

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 E^2}{\hbar^2 v^2} \psi = 0. \quad (79)$$

В данном случае скорость v надо заменить фазовой скоростью $v = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$, так как волны, соответствующие движущимся части-

цам, имеют именно эту скорость. Вставляя вместо V данную величину, мы получаем основное уравнение теории Шрёдингера:

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0. \quad (80)$$

Подобно рассмотренной нами задаче о продольных волнах и это уравнение не дает значения для функции ψ во всем пространстве при произвольном значении $\frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - V)$. Функция ψ , которая может быть

определенна во всем пространстве, получается только для каждой заданной величины V при выполнении определенных „собственных“ значениях E , соответствующих собственным периодам. По сути дела в этой задаче нет пограничных условий, но их роль выполняет аналитически функция V , которая различна для различных конкретных задач. Это обстоятельство отмечено Шрёдингером: „Когда я впервые взялся за эти вопросы, это упрощение (отсутствие пограничных условий) казалось мне роковым.

Так как я не был достаточно вышколен в области математики, я не мог понять, как собственные колебания могут появиться без пограничных условий. Впоследствии я понял, что более сложная форма коэффициентов [т. е. появление в них $V(x, y, z)$] берет на себя то, что обычно дается пограничными условиями, а именно, отбор определенных значений E^* . Если аналитически это и верно, то есть ли в этих словах хоть тень физического объяснения?

§ 4. Примеры на вычисление шредингеровской функции ψ .

Рассмотрим в качестве примера вибратор, совершающий колебания по прямой линии:

$$x = A \sin 2\pi\nu t. \quad (81)$$

Кинетическая энергия:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = mA^2 2\pi^2 \nu^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

Потенциальная энергия:

$$U_p = 2\pi^2 \nu^2 m x^2. \quad (82)$$

Уравнение Шредингера для данного случая принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2 \nu^2 m x^2) \psi = 0. \quad (80')$$

Введем для упрощения следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot E \quad (83)$$

и

$$\beta = \frac{4\pi^2 m \nu}{h}. \quad (84)$$

С помощью этих обозначений (80') принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\alpha - \beta^2 x^2) \psi = 0. \quad (80'')$$

Вводим новое переменное $\xi = x \sqrt{\beta}$, тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \sqrt{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \beta.$$

Вставляя эти значения в (80''), мы приводим (80'') к виду:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2 \right) \psi = 0. \quad (80''')$$

Можно показать, что уравнение (80''') имеет решения для функции ψ во всей области переменной x , при условии, что $\frac{\alpha}{\beta} = 2n + 1$, где n — целое число. Доказать это можно таким путем.

Рассмотрим функцию $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, возьмем последовательно две производные от этой функции: $\frac{dy}{dx} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xy$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = -y - xy = -y + yx^2 = -y(1 - x^2)$. Отсюда заключаем, что функция $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ будет служить интегралом уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a - x^2)y = 0, \quad (85)$$

если $a = 1$. Точно так же мы находим для функции $y = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ две первые производные:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = 2(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x - 4xe^{-\frac{x^2}{2}} + 2x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = -y(3 - x^2),$$

откуда получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(3 - x^2) = 0,$$

т. е. опять уравнение (85), в котором $a = 3$. Оказывается, что для ряда нечетных чисел, подставляемых в уравнение (85), вместо a мы можем найти в качестве интеграла функции вида $He^{-\frac{x^2}{2}}$, где H — так называемый „полином Эрмита“, который для $a = 1$ $H_1 = 1$ и для $a = 3$ $H = 2x$. Общий вид полинома Эрмита для $a = 2n + 1$ будет следующий:

$$H = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4},$$

причем этот ряд обрывается на том члене, который обращается в нуль. Сравнивая (85) с (80''), мы видим, что эти уравнения тождественны, если $a = \frac{\alpha}{\beta} = 2n + 1$, т. е. если мы положим a равным нечетному числу. Вставляя в данное выражение α и β из (83) и (84), мы получаем:

$$\frac{2E}{h\nu} = (2n + 1),$$

или

$$E = \frac{h\nu(2n + 1)}{2}. \quad (86)$$

Таким образом для вибратора энергия может равняться нечетному числу $\frac{h}{2}$. Это одно из отличий шрёдингеровской теории от прежней

квантовой теории, в которой для вибратора получались целые числа $0, \hbar, 2\hbar$ и т. д. Однако целый ряд фактов приводил к выводу, что при абсолютном нуле у вибратора должна оставаться энергия $\frac{\hbar}{2}\nu$. Теперь мы видим, что теория Шрёдингера дает этот результат без всякой дополнительной гипотезы. В самом деле, согласно (86) наименьшее количество энергии вибратора будет при $n=0$, т. е. $\frac{\hbar}{2}\nu$.

Если мы в уравнение Шрёдингера введем

$$V = -\frac{e^2}{r} + \text{const}, \quad (87)$$

то можно показать, что однозначное и конечное решение для функции ψ получается при условии, что

$$E = \text{const} - \frac{2\pi^2 me^4}{\hbar^2 n^2}$$

и

$$E = \text{const}. \quad (88)$$

Здесь const — та же самая, что и в (87). Первое из решений соответствует эллиптическим и круговым орбитам, второе $E = \text{const}$ соответствует гиперболическим орбитам. Вычисление (88) довольно длинное, хотя никаких особых трудностей и не представляет¹. Теперь перед нами встает вопрос: какое же физическое значение имеет функция ψ , определяемая уравнением Шрёдингера? Надо сознаться, что при теперешнем состоянии теории это — самый трудный вопрос. Мы видели, что решение волнового уравнения (75) имеет вид:

$$\Phi_k = \psi_k e^{i \frac{2\pi E t}{\hbar}}. \quad (89)$$

Возьмем сопряженную величину

$$\Phi'_k = \psi'_k e^{-i \frac{2\pi E t}{\hbar}}. \quad (89')$$

Произведение дает:

$$\Phi_k \Phi'_k = \psi_k \psi'_k. \quad (90)$$

Функция ψ дана для всего пространства, причем постоянные, входящие в ψ_k , определяются тем, что

$$\int \psi_k \psi'_k d\tau = 1. \quad (91)$$

В теории Шрёдингера делается предположение, что $\Phi_k \Phi'_k = \rho$ — „плотности“, распределенной по всему пространству; если ее умножить на m , то мы получаем плотность массы; если на e , то получаем плотность заряда. Таким образом плотность заряда электрона оказывается распределенной по всему пространству, т. е. мы как бы берем в расчет всевозможные

¹ Наиболее просто это вычисление выполнено в книге H. T. Flint, Wave Mechanics, London, Methuen, стр. 60—64, 1929.

положения электрона в атоме и берем некоторое статистическое среднее. Отсюда ясно, что построенная таким образом теория не может дать никаких указаний на форму и размер орбиты. Эти вопросы с самого начала отмечиваются в сторону. Надо заметить, что некоторые авторы, как, например, Зоммерфельд, отчетливо сознают, что в теории волновой механики не все вполне благополучно. В самом деле, мы предполагаем, на основании решения уравнения Шредингера, что заряд электрона распределен во всем пространстве в виде облака, и в то же время в то же самое уравнение вместо V вставляем $\frac{e}{r} + \text{const}$, где e сосредоточено в очень малом объеме. „Мы с самого начала отказываемся понимать в буквальном смысле понятие заряженного облака, к которому приводит теория Шредингера. Наоборот, мы твердо придерживаемся хорошо обоснованного представления о том, что электрон представляет собой точечное образование, или, во всяком случае, образование субатомных размеров“¹. Здесь мы имеем классический пример того, как ученые могут примиряться с разрывом между теорией и практикой. Практика говорит, что электрон имеет заряд сосредоточенным в небольшом объеме, потому мы должны этого твердо придерживаться в нашей практике, а зато в возвышенной теории мы не должны себя связывать этими „мелочами практики“, хотя эта возвышенная теория ведет речь о тех же самых электронах.

Глава IV.

Теория дисперсии. Сверхдисперсионная среда. Строение электрона и электронные волны по Томсону.

§ 1. Электромагнитная теория дисперсии.

Когда мы рассматриваем распространение электромагнитных волн в диэлектриках и в проводниках, мы предполагаем, что среда, в которой распространяется волна, однородна. На самом деле, так как мы хорошо знаем, что вся материя построена из электронов и протонов, среда является однородной лишь как предельный случай, когда длина волны очень велика по сравнению с электронами и протонами, т. е. когда на протяжении одной волны оказывается громадное число электронов и протонов.

Мы рассмотрим только случай дисперсии в диэлектриках, оставляя в стороне вопрос о дисперсии в металлах. Если среда является непроводником, то находящиеся в ее молекулах электроны и положительно заряженные части не могут свободно двигаться от молекулы к молекуле, а могут только смещаться из положения равновесия на сравнительно небольшое расстояние. В обычной теории предполагается, что смещение из положения равновесия вызывает „квазиупругую“ силу, пропорциональную смещению. Далее, сопротивление движению предполагается пропорциональным первой степени скорости смещения. Кроме того, на заряды действует внешнее поле распространяющихся волн. Более

¹ Sommerfeld, стр. 98, см. ссылку на стр. 336.

полная теория рассматривает еще кроме поля волны поле, обусловленное соседними зарядами. Однако, если принять во внимание эти влияния, то приходится делать ряд предположений о том, как расположены эти соседние заряды, — предположения, которые трудно доказать. Точно так же по поводу силы сопротивления разными авторами делались различные предположения, — сравнивать их мы не будем, так как это заняло бы у нас много времени. Исходя из сказанного, мы можем написать уравнение движения заряженной части молекулы в следующем виде:

$$m \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = e_1 E_x - \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1} \xi_1 - r_1 e_1^2 \frac{d\xi_1}{dt}. \quad (92)$$

Здесь введены множители $4\pi e_1^2$ и e_1^2 для удобства дальнейших преобразований. Если число зарядов e_1 , совершающих колебания по закону, выраженному (92), в единице объема будет N_1 , то плотность тока, обусловленная смещением зарядов, будет:

$$N_1 e_1 \frac{d\xi_1}{dt}. \quad (93)$$

Так как уравнение (92) есть уравнение принужденного колебания, рассмотренное нами в ч. I, то мы уже знаем, что решение, соответствующее установившемуся состоянию, будет периодическая функция с периодом, соответствующим периоду принуждающей силы E_x . Пусть период будет T ; тогда ξ можно положить:

$$\xi = A e^{i \frac{2\pi t}{T}} = A e^{i \frac{t}{\tau}}, \quad (94)$$

где

$$\tau = \frac{T}{2\pi}.$$

Из (94) выводим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{i}{\tau} \xi \quad \text{и} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2} \xi.$$

Вставляем эти полученные нами величины в (92):

$$e_1 E_x = -\frac{m_1}{\tau^2} \xi + \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1} \xi + r_1 e_1^2 i \frac{\xi}{\tau} = e_1 \xi \left(\frac{4\pi e_1}{\vartheta_1} - \frac{m_1}{e_1^2 \tau^2} + i \frac{r_1 e_1}{\tau} \right).$$

Умножаем обе части полученного равенства на $\frac{\vartheta_1}{4\pi e_1}$, тогда:

$$\frac{\vartheta_1}{4\pi} E_x = e_1 \xi \left(1 - \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1^2 \tau^2} + i \frac{\vartheta_1 r_1}{4\pi \tau} \right). \quad (95)$$

Вводим следующие обозначения: $\frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi} = a_1$ и $\frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1^2} = b_1$, тогда (95) принимает вид:

$$e_1 \xi_1 = \frac{E_x}{4\pi} \cdot \frac{\vartheta_1}{1 + i \frac{a_1}{\tau} - \frac{b_1}{\tau^2}}. \quad (95')$$

Так как плотность тока складывается из плотности тока в эфире $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_x}{\partial t}$ и плотности тока, вызванного смещением зарядов (93), то в качестве полной плотности тока мы получаем:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{N_1 \vartheta_1}{1 + i \frac{a_1}{\tau} - \frac{b_1}{\tau^2}} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\epsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (96)$$

где

$$\epsilon = 1 + \frac{N_1 \vartheta_1}{1 + i \frac{a_1}{\tau} - \frac{b_1}{\tau^2}}. \quad (97)$$

Если у нас несколько типов заряженных частиц, то мы имеем несколько уравнений вида (92), и тогда вместо (97) мы будем иметь:

$$\epsilon = 1 + \sum k \frac{N_k \vartheta_k}{1 + i \frac{a_k}{\tau} - \frac{b_k}{\tau^2}}, \quad (97')$$

где число членов суммы равно числу „сортов“ заряженных частиц. Если мы примем $\tau = \infty$, то для $\epsilon_\infty = 1 + \sum N_k \vartheta_k$. Таким образом диэлектрическая постоянная, соответствующая бесконечно медленным процессам, определяется строением и составом молекул. Если a_1 – величина очень малая, то для областей, далеких от $1 - \frac{b_1}{\tau^2} = 0$, вторым членом в знаменателе (97) можно пренебречь, и мы тогда получаем действительную величину для

$$\epsilon = 1 + \frac{N_1 \vartheta_1}{1 - \frac{b_1}{\tau^2}}, \quad (97'')$$

причем, согласно теории Максвелля, $n^2 = \epsilon$. Это будет случай так называемой нормальной дисперсии. Мы будем в дальнейшем рассматривать только тот случай, когда в (97') в сумме остается один или два члена. Читатель без труда может обобщить приведенные нами результаты. Из (92) ясно, что коэффициент b_1 связан с собственным периодом нашей системы. В самом деле, полагая в (92) $E_x = 0$ и $r_1 = 0$, мы находим, что

$$n_0^2 = \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1 m_1} = \frac{1}{b_1}.$$

Итак, обозначим $b_1 = \tau_1^2$. Пусть мы рассматриваем область $\tau > \tau_1$, если, следовательно, речь идет о видимом спектре, то это условие равносильно тому, что собственные периоды колеблющихся частиц лежат в ультрафиолетовой части. Тогда, разлагая в ряд (97''), получаем:

$$\epsilon = 1 + N_1 \vartheta_1 + N_1 \vartheta_1 \frac{\tau_1^2}{\tau^2} + N_1 \vartheta_1 \frac{\tau_1^4}{\tau^4} + \dots \quad (98)$$

Таким образом закон дисперсии выражается:

$$n^2 = \epsilon = A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4}. \quad (98')$$

В этих случаях мы без труда можем перейти к пределу $T = \infty$ и тогда имеем: $n^2 = \epsilon = A$. Вот в этих, именно, случаях и удавалось подметить закономерность, на которую обратил внимание впервые Максвелль и которой, как мы видели, даже еще в настоящее время дают неправильное истолкование. Если у нас имеется еще один период, но на этот раз в инфракрасной части спектра $\tau_2 > \tau$, то выражение

$$\frac{1}{1 - \frac{\tau_2^2}{\tau^2}}$$

преобразуется в

$$-\frac{\tau^2}{\tau_2^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)^2} = -\frac{\tau^2}{\tau_2^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)^4 + \dots \right\}.$$

Таким образом первый член этого ряда будет вида: $-A_1 T^2$; поэтому, если у нас имеется один период в ультрафиолетовой части и один в инфракрасной, то мы получим дисперсионную формулу вида:

$$n^2 = \epsilon = -A_1 T^2 + A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4} + \dots, \quad (98'')$$

Для очень большого числа прозрачных тел мы получаем дисперсионные формулы именно такого типа. Так как, согласно (98), $A = 1 + N_1 \vartheta_1$, а диэлектрическая постоянная для бесконечно медленных процессов $\epsilon_\infty = 1 + N_1 \vartheta_1 + N_2 \vartheta_2$, то поэтому предельное значение $n^2 = \epsilon_\infty$ не равно A , но, согласно только что сказанному, $\epsilon_\infty - A = N_2 \vartheta_2$. Таким образом мы выясняем, чем обусловливаются отступления от закономерности, отмеченной Максвеллом. Эти отступления указывают на существование собственных периодов в инфракрасной части спектра.

В общем случае, т. е. когда нельзя полагать, что $a_1 = 0$, мы имеем комплексную диэлектрическую постоянную. Как мы видели [ч. IV, гл. I, уравнения (2), (3), (2')], появление комплексной величины означает наличие поглощения: наряду с показателем преломления у нас появляется показатель, характеризующий поглощение волн. Поэтому, так же как и в гл. IV, заменяем квадрат показателя преломления через

$$n^2 (1 - ik)^2 = 1 + \frac{N_1 \vartheta_1}{1 + i \frac{a_1}{\tau} - \frac{b_1}{\tau^2}}, \quad (99)$$

или в случае нескольких „сортов“ движущихся зарядов мы имеем:

$$n^2 (1 - ik)^2 = 1 + \sum \frac{N_k \vartheta_k}{1 + i \frac{a_k}{\tau} - \frac{b_k}{\tau^2}}. \quad (99')$$

Здесь k характеризует поглощение, причем, если величина a_1 мала, так что в областях, далеких от $b_1 = \tau^2$, ею можно пренебречь, то тем более сильное поглощение получается в области $b_1 = \tau^2$, так как малая величина a_1 , находящаяся в знаменателе, дает как раз в этой области большое значение для минимой части выражения (99') и (99) (в последнем выражении в соответствующем члене суммы). Разделяя в (99), действительную и минимую части и определяя из полученных уравнений n и k , мы получаем возможность определить ход как показателя преломления n , так и коэффициента поглощения k как в пределах собственного периода, так и в областях, далеких от $b = \tau^2$, где полученные результаты должны совпасть с полученными нами раньше (98') и (98''). На рис. 161 изображена графически зависимость n и k от периода. Мы видим, что область собственного периода τ_1 совпадает с областью наибольшего поглощения, причем это поглощение тем сильнее, чем меньше коэффициент a_1 , характеризующий процесс рассеяния энергии. Область, примыкающая к полосе поглощения, носит название аномальной дисперсии. Название это объясняется тем, что исторически явление дисперсии изучали в областях, где не было никакого поглощения, а в этих областях мы имеем „нормальный“ ход показателя преломления, как, например, в частях AB и DE , где показатель преломления уменьшается по мере возрастания периода колебания. В областях же $bBCD$ мы имеем „аномальный“ ход показателя преломления, так как показатель преломления в области D более длинных волн больше, чем для более коротких в области bB . Это явление обнаруживается в веществах типа фуксина, цианина и т. д., обладающих узкими и резко выраженными полосами поглощения. Необходимо отметить, что отрыв „аномальной“ дисперсии от „нормальной“ крайне искусственен. Согласно изложенной теории мы видим, что нормальной дисперсии не существует без аномальной; весь вопрос сводится к тому, что для большого числа прозрачных тел, изучавшихся на практике и важных по своим приложениям в оптике, области аномальной дисперсии лежат далеко от тех областей спектра, которые непосредственно используются.

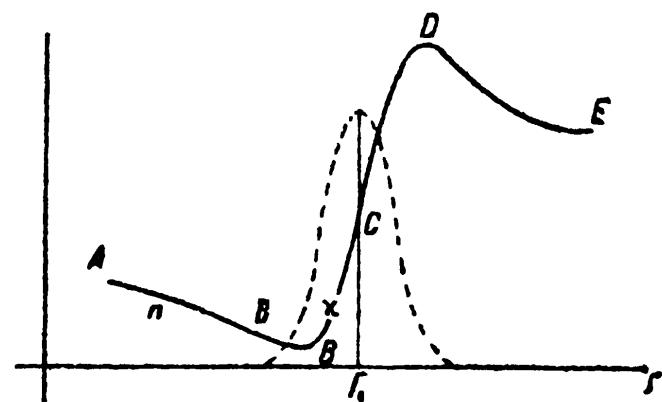


Рис. 161.

§ 2. Сверхдисперсионная среда.

Рассмотрим частный случай дисперсии в такой области, где период проходящих волн значительно меньше собственного периода элементов среды и где можно совершенно пренебречь поглощением. Прежде всего, отвлекаясь от поглощения, мы, как уже раньше было показано, получаем для показателя преломления:

$$n^2 = n^2 = 1 + \frac{N_1 \theta_1}{1 - \frac{b_1}{\tau^2}}. \quad (97'')$$

Так как на основании (92) и при условии $E_x = 0$ и $r_1 = 0$ мы имеем для собственного периода:

$$n_0^2 = \frac{1}{\tau_1^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{4\pi e^2}{m_1 \vartheta_1} = \frac{1}{b_1}$$

[ср. смысл обозначений в (95) и (95')], то (97") можно представить в виде:

$$n^2 = 1 + \frac{N_1 \vartheta_1}{1 - \frac{T_1^2}{T^2}}, \quad (100)$$

где

$$T_1^2 = \frac{\pi m_1 \vartheta_1}{e^2}. \quad (101)$$

Преобразуем, далее, (100):

$$n^2 = 1 + T^2 \frac{N_1 \vartheta_1}{T_1^2} \cdot \frac{1}{\frac{T^2}{T_1^2} - 1}. \quad (100')$$

Так как по предположению T значительно меньше T_1 , то первым членом в знаменателе можно пренебречь; тогда, вставляя в числителе дроби (100') вместо T_1^2 его величину из (101), мы получаем:

$$n^2 = 1 - \frac{N_1 \vartheta_1}{T_1^2} \cdot T^2 = 1 - BT^2, \quad (100'')$$

где

$$B = \frac{N_1 e^2}{\pi m_1}. \quad (102)$$

Если мы обозначим фазовую скорость в этой „сверхдисперсионной“ среде через v , то показатель преломления $n = \frac{c}{v}$, и на основании (100'') мы будем иметь:

$$c^2 = v^2 - B v^2 T^2 = v^2 - B \lambda^2,$$

или

$$v^2 = c^2 + B \lambda^2. \quad (103)$$

Это и есть основной закон дисперсии для ультракоротких волн в так называемой „сверхдисперсионной среде“.

Этот закон широко используется в радиотелеграфии при изучении распространения коротких волн в так называемом „слое Гевисайда“. По некоторым данным мы имеем основание полагать, что на высоте 80—100 км мы имеем слои воздуха, сильно ионизованного, причем собственный период колебаний этих ионов велик по сравнению с периодами „коротких“ радиоволн. Как показал Дж. Дж. Томсон, этот же самый закон приложим и к выяснению структуры электрона и связанных с электроном электронных волн, которые совершенно просто объясняют явления „дифракции“ электрона, причем для этого не

требуется делать тех предположений, которые делаются в волновой механике. Кроме того, весьма характерно, что эта физическая теория Томсона тесно связана с теорией распространения радиоволн; таким образом, теория структуры электрона оказывается тесно связанной с теми областями, которыми живо интересуются практики-радиотелеграфисты.

§ 3. Структура электрона по Томсону.

Томсон предполагает, что электрон состоит из заряженного отрицательно ядра и находится в окружении электрических зарядов, образующих „атмосферу“ электрона, причем структура этой атмосферы точно не определяется, так как пока еще мы не имеем данных, с помощью которых мы можем детально исследовать строение этой атмосферы. Надо отметить, что это — громадное преимущество теоретических работ Томсона: он всегда исходит из минимального числа предположений. Вот почему его взгляды очень легко могут быть изменены и дополнены, не нарушая общих основ теории, и в то же время эти предположения настолько определены, что они позволяют ставить новые вопросы и дают хорошее руководство для разработки самой теории. Возможно, — на это указывает и Томсон, — что эти субэлектроны, составляющие атмосферу электрона, представляют собой двойные заряды — так называемые „диполи“, состоящие из положительного и отрицательного заряда с небольшим моментом, т. е. расстояние между этими зарядами в диполе очень мало. Проф. Н. П. Кастерин высказал в докладе, прочитанном в Физическом о-ве им. Лебедева 15 января 1930 г., предположение¹⁾, что эти диполи представляют собой „упавшие“ на протон электроны, т. е. представляют собой образования, получающиеся при так называемом „уничтожении“ материи, о котором в настоящее время говорят астрономы и астрофизики. Если эта точка зрения правильна, то, следовательно, при этом „уничтожении“ материи выделяется замкнутая фарадеева трубка, которая несет с собой очень большую энергию, соответствующую энергии, выделяемой при „падении“ электрона на протон, а остающиеся электрон и протон остаются соединенными очень короткой фарадеевой трубкой и, следовательно, имеют очень малую массу. Если эти соображения верны, то мы имеем чисто материалистический подход к тем процессам, о которых большинство теоретиков говорит как о крушении материализма. Во всяком случае, гипотеза Томсона об электронной атмосфере вполне естественна. В тех случаях, когда мы изучаем электрон, как, например, в разреженных газах разрядных трубок, электроны всегда движутся в ионизованном газе, т. е. всегда окружены „атмосферой“, сходной с той, о которой говорит Томсон. Вот почему разработанная им теория строения электрона цели-

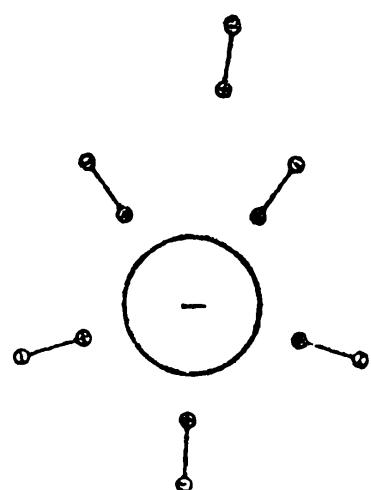


Рис. 162.

¹⁾ Из протоколов Общества имени П. Н. Лебедева.

ком приложима к процессам в ионизованном разреженном газе. На рис. 162 изображена схема строения атмосферы электрона.

Итак, предположим, что в атмосфере электрона у нас распространяются волны, причем для простоты пусть волны плоские. Нам важно выяснить закон распространения этих волн. Если мы предположим, что электрическое поле совпадает по направлению с осью X , а магнитное с осью Y , и если мы примем в расчет, что под влиянием поля будут двигаться электрические заряды „атмосферы“, мы получим уравнения Максвелля в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi \frac{Ne}{c} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (104)$$

и

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (105)$$

К этому мы должны добавить уравнение движения элементов, составляющих „атмосферу“, т. е.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = eE_x. \quad (106)$$

Уравнение (106) получается в таком виде потому, что собственный период настолько велик по сравнению с периодом волн, что квадратом частоты собственного периода можно пренебречь. Исключая из (104) и (105) M_y и заменив $\frac{d^2x}{dt^2}$ через $\frac{e}{m} \cdot E_x$, мы находим:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi^2 B E_x = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (107)$$

где

$$B = \frac{Ne^2}{\pi m}. \quad (108)$$

Мы видим, что B совпадает с той величиной, которую мы нашли из общего уравнения дисперсии (102). Заметим мимоходом, что в силу именно этих ограничений (пренебрежение собственным периодом) теория Томсона содержит в себе возможности дальнейшего развития путем перехода от взятого ею частного случая к общему. Посмотрим теперь, при каких условиях уравнение плоской волны

$$E_x = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) \quad (108')$$

удовлетворит (107). Подстановка дает:

$$v^2 = c^2 + B\lambda^2, \quad (109)$$

т. е. мы, как и следовало ожидать, получаем закон дисперсии для „сверхдисперсионной“ среды. Посмотрим теперь, какая групповая скорость будет соответствовать (109). Вставляя в уравнение, определяющее групповую скорость $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ (ч. VI, гл. III, § 2), вместо $\frac{dv}{d\lambda}$

соответствующее выражение, получаемое из (109), т. е. $\frac{dv}{d\lambda} = B \frac{\lambda}{v}$, мы имеем:

$$u = v - \frac{\lambda^2}{v} B,$$

или

$$uv = v^2 - \lambda^2 B = c^2. \quad (110)$$

Соотношение $uv = c^2$ получается обычно с помощью преобразований Лоренца-Эйнштейна. В теории же Томсона это соотношение вытекает совершенно естественно из свойств сверхдисперсионной среды. Если электрон будет двигаться со скоростью u , то он будет двигаться одновременно с группой волн в сверхдисперсионной среде, которая его окружает. Итак, мы приходим к выводу, что с электроном может быть связана система волн, которая вместе с ним движется.

Выясним физический смысл постоянной B . Заменим в (109) λ через vT и разделим полученное таким образом равенство на v^2 ; тогда (109) принимает вид: $1 = \frac{c^2}{v^2} + BT^2$. Если мы фазовую скорость v примем равной ∞ , то $1 = BT_0^2$, откуда для T_0 получаем значение

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{B}}, \text{ или } v_0 = \sqrt{B}. \quad (111)$$

Таким образом, если мы имеем волны, соответствующие частоте $v_0 = \sqrt{B}$, то фазовая скорость их равна ∞ , и согласно (110) групповая скорость будет равна нулю. Отсюда мы получаем неожиданный вывод, что колебания с частотой v_0 не распространяются, потому что их групповая скорость равна нулю. Словом, такие колебания могут быть связаны с покоящимся электроном, но, что самое важное, эти колебания не распространяются в данной среде (атмосфере электрона). Противоречие разъясняется тем, что при частоте v_0 фаза тока смещения $\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t}$ прямо противоположна фазе тока, вызванного смещением зарядов в „атмосфере“ электрона, причем абсолютные величины этих слагающих тока равны.

Таким образом из (104) вытекает следствие: $\frac{\partial M_y}{\partial y} = 0$ или $M_y = \text{const}$.

Но можно даже показать, что $M_y = 0$, а тогда поток энергии будет равен нулю. Докажем, что это именно так. Вставим (108') в (106):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = eA \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z), \quad (112)$$

и поищем решения (112) вида:

$$x = B_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z).$$

В результате подстановки в (112) получаем:

$$B_1 = - \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{4\pi^2 v^2} A;$$

отсюда находим:

$$x = -\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{4\pi^2 v^2} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) \quad (113)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \frac{A}{2\pi v} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z). \quad (113')$$

Вставляя в левую часть (104) уравнения (108') и (113'), мы находим:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi \frac{Ne}{c} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{cv} A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) \left(\frac{Ne^2}{m\pi} - v^2 \right). \quad (114)$$

Это выражение действительно обращается в нуль при

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\pi}} = \sqrt{B}.$$

Таким образом мы действительно находим те условия, при которых ток смещения равен по величине и противоположен по знаку конвекционному току, т. е. току, обусловленному передвижением электрических зарядов той среды, в которой распространяется волна. На основе (105) и (108') мы находим:

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial t} = A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z),$$

откуда

$$M_y = F \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) = A \frac{c}{v} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z). \quad (115)$$

Мы видим, следовательно, что при $v = \infty$ $M_y = 0$. Таким образом электрические колебания частоты v_0 будут обладать тем свойством, что они не распространяются, и тем, что они не вызывают магнитного поля!

То же самое можно доказать, составив вектор Пойнтинга. В самом деле:

$$P_z = \frac{c}{4\pi} E_x M_y.$$

Вставляя сюда (108') и (115), имеем:

$$P_z = \frac{c^2}{4\pi} A^2 \frac{1}{v} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z),$$

или, принимая во внимание (110),

$$P_z = \frac{A^2}{4\pi} u \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z).$$

Взяв среднюю величину за период, мы получим:

$$P_z = \frac{1}{8\pi} A^2 \cdot u. \quad (116)$$

Отсюда заключаем, что если $v = \infty$ или $u = 0$, то поток энергии равен нулю, т. е. колебания в среде не распространяются, если же групповая скорость $u \neq 0$, то волны будут распространяться с этой скоростью, которая меньше скорости света, так как фазовая скорость, согласно (109), всегда больше скорости света. Как ясно из (109) и (110), u может принимать всевозможные значения, начиная от нуля до c , и таким образом, у электрона, движущегося с любой скоростью, могут быть волны, групповая скорость которых совпадает со скоростью электрона, и которые будут его сопровождать. Это и представляет собой те электронные волны, о которых говорит Томсон.

С помощью (108), (115) и (113') мы можем составить выражение для плотности электрической и магнитной энергии, а также для суммы кинетической энергии частиц среды, отнесенной к единице объема:

$$U_e = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z),$$

$$U_m = \frac{M_x^2}{8\pi} = \frac{A^2}{8\pi} \cdot \frac{c^2}{v^2} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z)$$

и

$$K = \frac{Nm}{2} \cdot \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{1}{4\pi^2\nu^2} A^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z) = \frac{1}{8\pi} A^2 \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (vt - z).$$

Составляя средние значения за период, мы находим:

$$\bar{U}_e = \frac{A^2}{16\pi}, \quad \bar{U}_m = \frac{A^2}{16\pi} \cdot \frac{c^2}{v^2},$$

и наконец,

$$\bar{K} = \frac{1}{16\pi} A^2 \frac{\nu_0^2}{\nu^2}. \quad (117)$$

Из (109), на основании $\frac{v}{\lambda} = \nu$ и $\nu_0 = \sqrt{B}$, находим:

$$1 = \frac{c^2}{v^2} + \frac{\nu_0^2}{\nu^2},$$

или

$$1 - \frac{c^2}{v^2} = \frac{\nu_0^2}{\nu^2},$$

поэтому

$$\bar{U}_e - \bar{U}_m = \frac{A^2}{16\pi} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) = \frac{A^2}{16\pi} \cdot \frac{\nu_0^2}{\nu^2} = K.$$

Таким образом

$$\bar{U}_e = \bar{U}_m + K. \quad (118)$$

Это выражение имеет следующий смысл. У волн, распространяющихся в диэлектрике, мы видели, что электрическая энергия равняется магнитной; в сверхдисперсионной среде электрическая энергия равна

сумме магнитной плюс кинетической энергии частиц среды. В случае, когда частота $\nu = \nu_0$, магнитная энергия исчезает, и мы имеем $\bar{U}_e = \bar{K}$.

Рассмотрим еще ряд следствий, вытекающих из разобранной нами теории. Введем в $v^2 = c^2 + B\lambda^2$ вместо v групповую скорость u на основе соотношения $uv = c^2$. Мы прежде всего находим:

$$\frac{c^4}{u^2} - c^2 = B\lambda^2,$$

или

$$c^4 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = Bu^2 \lambda^2.$$

откуда

$$c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{Bu\lambda}.$$

Умножая обе части этого равенства на m_0 — массу покоящегося электрона, мы получаем:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{B}} = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \lambda. \quad (119)$$

Вводим

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{B}} = h \quad (120)$$

и

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (121)$$

т. е. массу электрона при скорости u . Эту зависимость массы от скорости можно получить различными путями; в частности, Дж. Дж. Томсон получил эту зависимость, исходя из своего метода 1910 г. (при определенных предположениях, сделанных относительно распределения заряда в электроне). Итак, (119) принимает вид $h = mu\lambda$, или

$$\lambda = \frac{h}{mu}, \quad (119')$$

т. е. соотношение, которое получается из волновой механики (ч. VI, гл. III). Однако необходимо указать на различия между этими теориями. У Томсона мы имеем дело и с частицами и с волнами, причем здесь мы имеем дело с волнами реальными — электромагнитными. При прохождении этих коротких волн через тонкие слои материи получается явление дифракции, волны загибаются в сторону и увлекают с собой связанный с ними электрон. В волновой же механике сами волны составляют электрон, и это частичная или волнообразная природа есть лишь способ описания одного и того же явления. Это отмечает и сам Томсон, указывая, что хотя результаты обеих теорий совпадают, но сами по себе обе теории противоположны: волновая механика есть теория

„чисто аналитическая по форме“, тогда как свою теорию Томсон признает „существенно физической“.

Сокращая (119) на m_0 , заменяя $\sqrt{\bar{B}}$ через v_0 , u через $\frac{c^2}{v}$ и λ через $\frac{v}{\gamma}$, мы находим:

$$\frac{c^2}{\gamma_0} = \frac{c^2}{v} \cdot \frac{v}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

где $\beta = \frac{u}{c}$; после сокращений имеем:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (122)$$

Последнее показывает, что частота колебаний и волн, связанных с электроном, движущимся со скоростью u , будет равна ν . Мы, следовательно, по величине скорости и по частоте волн, соответствующих покоящемуся электрону ν_0 , можем вычислить частоту волн, связанных с электроном, движущимся с постоянной скоростью u .

Наконец, умножив числителя и знаменателя (122) или

$$\nu = \frac{\sqrt{\bar{B}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

на $m_0 c^2$ и принимая во внимание (120), мы получаем:

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2, \quad (123)$$

но, согласно формуле Томсона-Эйнштейна,

$$m = \frac{E}{c^2},$$

откуда

$$E = h\nu, \quad (124)$$

т. е. энергия электрона пропорциональна частоте связанных с ним волн.

§ 4. Электронные волны для электронов, движущихся равномерно и прямолинейно.

Мы будем исходить из того же предположения, что электронные волны — плоские. Это упрощение нисколько не помешает нам выяснить основные законы. Мы, следовательно, будем иметь дело с теми же уравнениями (104), (105) и (106), но мы их на этот раз немножко преобразуем. Так, из (106) мы выводим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{m} \int E_x dt. \quad (106')$$

Далее, мы обозначаем через

$$p_0^2 = 4\pi^2 v_0^2 = 4\pi^2 \frac{Nc^2}{\pi m},$$

и тогда (104) и (105) принимают вид:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{c} p_0^2 \int E_x dt = - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (104')$$

и

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (105')$$

Так как волна представляет собой периодический процесс, то все величины, входящие в состав наших уравнений, пропорциональны e^{ipt} . Таким образом $E_x \propto e^{ipt}$ и $M_y \propto e^{ipt}$. При этих условиях:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = ipE_x, \text{ а } \int E_x dt \propto \int e^{ipt} dt = \frac{E_x}{ip}.$$

Вставляя эти величины в наши уравнения, мы после простых преобразований получаем:

$$E_x (p_0^2 - p^2) = - ipc \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (I)$$

и

$$- \frac{1}{c} ipM_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (II)$$

Начиная с этого места, можно идти двумя путями. Томсон исключает из этих уравнений M_y , получает уравнение второго порядка относительно E_x и, предполагая, что p_0 является функцией координат, отыскивает решение, которое получается довольно сложным и которое потом упрощается. Таким образом все выводы получаются приближенными. Проф. Н. П. Кацерин в своем докладе в Физическом обществе имени П. Н. Лебедева 15 января 1930 г., излагая взгляды Томсона, указал на другой способ, который дает возможность получить строгое решение там, где у Томсона дается приближенное. Способ¹⁾ этот заключается в том, что мы напряжение магнитного поля выражаем по Томсону как $M = \frac{1}{c} [vE]$. Мы видели, что это выражение эквивалентно закону Био-Савара (ч. III, глава I, § 2). При наших условиях $M_y = \beta_z E_x$, а тогда мы получаем два уравнения первого порядка:

$$E_x (p_0^2 - p^2) = - icp \frac{\partial}{\partial z} (\beta_z E_x) \quad (I)$$

¹⁾ Конец главы составлен на основании протоколов Физического общества имени П. Н. Лебедева.

и.

$$-\frac{ip}{c} \beta_z E_x = \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (\text{II})$$

Рассмотрим теперь случай равномерного движения, т. е. случай $\beta_z = \text{const}$. Тогда первое из уравнений принимает вид:

$$E_x (p_0^2 - p^2) = -ic\beta_z p \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Вставляя в это уравнение (II), мы находим:

$$E_x (p_0^2 - p^2) = -p^2 \beta_z^2 E_x,$$

откуда

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 - \beta_z^2}}. \quad (125)$$

Интегрируя (II), мы получаем:

$$\log E_x = -\frac{ip}{c} \beta_z z + \log E_0,$$

или

$$E_x = E_0 e^{-\frac{ip}{c} \beta_z z}.$$

Это выражение надо еще умножить на e^{ipt} и взять от него действительную часть. В результате получаем:

$$E_x = E_0 \cos p \left(t - \frac{\beta_z z}{c} \right) = E_0 \cos \frac{p_0}{\sqrt{1 - \beta_z^2}} \left(t - \frac{w_z z}{c} \right). \quad (126)$$

Результат получается такой, как будто в выражении $E_0 \cos p_0 t$ величину времени t мы заменяли через $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(t - \frac{w_z z}{c^2} \right)$, т.е. согласно теории относительности. Необходимо указать, что мы нигде не пользовались теорией Эйнштейна, мы пользовались исключительно свойствами сверхдисперсионной среды. Определяя с помощью (II) M_y и вставляя E_x и M_y в выражение вектора Пойнтинга, мы приходим к известному нам уже результату, т.е. к тому, что групповая скорость волн будет w_z , т.е. скорость, с которой движется электрон.

Рассмотрим теперь случай движения электрона по круговой орбите вокруг протона, причем ограничимся небольшой частью вращающегося поля AB (рис. 163). Уравнения в криволинейных координатах для этого случая будут:

$$E_n (p_0^2 - p^2) = -ipc \beta_s \frac{\partial E_n}{\partial s} \quad (\text{A})$$

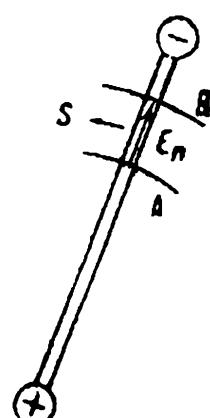


Рис. 163.

$$-\frac{ip}{c} \beta_s E_n = \frac{\partial E_n}{\partial s}. \quad (\text{B})$$

Так как в данном случае β_s постоянна, то в уравнении (A) эту величину и можно было вывести из-под знака производной. Интегрируя точь в точь, как мы делали это сейчас для случая равномерного движения, мы получаем:

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} \quad (125')$$

и

$$E_n = E_0 \cos p \left(t - \frac{1}{c} \int \beta_s ds \right), \quad (126')$$

но теперь мы должны иметь в виду, что, когда фарадсева трубка (рис. 163) обойдет весь круг, то E_n должно иметь то же самое значение, а это возможно только тогда, когда

$$\frac{p}{c} \oint \beta_s ds = 2\pi n, \quad (127)$$

где n — целое число. Покажем, что это условие равносильно первому постулату Бора. В самом деле, (127) можно переписать следующим образом:

$$\frac{p_0}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} \frac{1}{c} \int a\omega ds = 2\pi n, \quad (127')$$

где a — радиус орбиты. Далее, замечая, что

$$p_0 = 2\pi v_0 = 2\pi \sqrt{B}$$

и

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} = m,$$

мы получим:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} \cdot \frac{2\pi \sqrt{B}}{m_0 c^2} \cdot 2\pi a^2 \omega = 2\pi n, \quad (128)$$

или

$$2\pi a^2 m \omega = n \frac{m_0 c^2}{\sqrt{B}},$$

но ведь, согласно (120),

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{B}} = h,$$

поэтому

$$2\pi a^2 \omega = nh, \quad (128')$$

а это — знакомое нам выражение первого постулата Бора. Но зато теперь мы можем истолковать его чисто физически: вместе с движущимся электроном движутся и волны, причем, если на протяжении замкнутого пути, по которому движутся волны, может уложиться целое число волн, то такое движение возможно, и мы, следовательно, имеем такой же случай, как в акустике, на струне, в органной трубе и т. д. Кроме того,

мы понимаем, почему такая орбита будет устойчивой и почему не будет излучения. Вектор Пойнтинга направлен по направлению движения электрона, и следовательно, энергия волн будет двигаться по замкнутому кругу, не выходя за его пределы.

Покажем еще, как можно притти к уравнению, аналогичному уравнению Шредингера. Это также было впервые доказано в Физическом обществе проф. Н. П. Кастириным в упомянутом выше докладе. Исключая из (I) и (II) вектор M_y , мы получаем:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{p^2 - p_0^2}{c^2} E_x = 0. \quad (129)$$

Если поле зависит не только от z , но и от других двух координат, то (129) будет иметь вид:

$$\nabla^2 E_x + \frac{p^2 - p_0^2}{c^2} E_x = 0. \quad (129')$$

Далее, из (125') мы получаем:

$$p^2 - p_0^2 = p^2 \beta_s^2,$$

поэтому

$$\nabla^2 E_x + \frac{p^2}{c^2} \beta_s^2 E_x = 0. \quad (129'')$$

Напишем теперь уравнение энергии:

$$\frac{c^2 m \beta_s^2}{2} + V = E_0,$$

откуда

$$\beta_s^2 = 2 \frac{E_0 - V}{mc^2},$$

вставляя эту величину, а также

$$p^2 = \frac{p_0^2}{1 - \beta_s^2} = \frac{4\pi^2 B}{1 - \beta_s^2},$$

в (129''), мы находим:

$$\nabla^2 E_x + \frac{8\pi^2 B}{1 - \beta_s^2} \cdot \frac{1}{mc^4} (E_0 - V) E_x = 0,$$

или

$$\nabla^2 E_x + \frac{8\pi^2 B}{m_0 c^2} \cdot \frac{m}{c^4} (E_0 - V) E_x = 0.$$

Принимая же во внимание (120), мы получаем окончательно:

$$\nabla^2 E_x + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_0 - V) E_x = 0, \quad (130)$$

т. е. уравнение Шредингера. Развличие здесь в том, что уравнение это не определяет какую-то неизвестную функцию ψ , но определяет электрическое поле. Так как ψ непрерывна, а E_x по Томсону — прерывная

функция, то и решения будут разные, хотя в некоторых случаях мы, быть может, получим и аналогичные же решения. Во всяком случае, мы видим, что к тем же уравнениям волновой механики можно притти, не делая тех рискованных предположений, которые обычно делаются, и что, следовательно, под всю теорию можно подвести материалистический фундамент.

Конечно, нельзя считать рассмотренную нами теорию сколько-нибудь законченной, но, во всяком случае, она является пока что наиболее гибкой, наиболее способной к дальнейшим усовершенствованиям и, что самое важное, она дает определенную физическую картину тех процессов, о которых здесь идет речь. Необходимо еще отметить, что вопрос о „дифракции“ электрона имеет теперь чисто практическое значение. С помощью этого явления сейчас изучаются поверхностные слои металла, а мы видели, что теория этого явления всего проще и всего нагляднее выявляется в той схеме, которая нами была рассмотрена в настоящей главе. Таким образом, теория Томсона имеет, несомненно, очень большое значение, вооружая тех специалистов, которые работают над практическим применением этих новейших достижений нашей науки.

Глава V.

Теория относительности.

§ 1. Общие основания специальной теории Эйнштейна.

В настоящей главе мы остановимся, главным образом, на вопросе, насколько физически обоснована теория относительности; вдаваться в детали этой теории мы не имеем возможности, тем более, что в значительной своей части эта теория оторвана от текущих задач физики, разрабатываемых в настоящее время как в специальных физических институтах, так и в научно-технических и заводских лабораториях.

Прежде всего, в чем суть этой теории? Мы в ч. I, гл. I настоящего курса рассмотрели принцип относительности Галилея-Ньютона, причем мы видели, что если от какой-либо системы перейти к другой, движущейся по отношению к первой с постоянной скоростью по прямой линии, то и в этой новой системе все механические явления, согласно принципу Галилея-Ньютона, будут протекать совершенно так же, как и в первой системе. Таким образом, находясь в пределах какой-либо системы и изучая протекающие в ней механические процессы, мы не в состоянии определить: движемся мы или нет. Однако обычно при этом забывают одно важное обстоятельство: все, что входит в данную систему, должно находиться в одинаковом состоянии движения. Например: поезд стоит на станции, мы сидим в закрытом вагоне ироняем на пол книгу; книга падает совершенно так же, как она упадет и в движущемся поезде, если только поезд движется равномерно. Но представим себе, что мы сидим не в вагоне, а на открытой платформе, и пусть день безветренный. Совершенно ясно, что при движении поезда у нас получится ветер, потому что воздух, окружающий нас, не увлекается движением поезда (за исключением непосредственно примыкаю-

ных к платформе слов). Этот ветер может вырвать несколько страниц из падающей и раскрывшейся книги, и таким образом, падение книги в равномерно движущемся поезде на открытой платформе может сильно отличаться от явления падения той же книги в то время, когда поезд стоит на станции. Это обстоятельство нам необходимо иметь в виду, когда мы займемся истолкованием специального принципа относительности Эйнштейна и вопросом о скорости света. А пока поставим вопрос: чем же отличается специальный принцип Эйнштейна от принципа Галилея-Ньютона? Эйнштейн ставит вопрос следующим образом: все явления природы, в том числе и законы распространения света, должны быть таковы, что при переходе от какой-либо системы A к системе B , движущейся по отношению к A равномерно и прямолинейно, мы по этим явлениям, изучаемым в каждой из этих систем, не могли бы заключать о состоянии движения той системы, в которой мы находимся. Поэтому, например, скорость света, определенная в системе A , должна равняться скорости света, отнесенными к системе B , если B движется по отношению к A , скажем, со скоростью v . Условие равенства скорости света дадут нам формулы преобразования Лоренца-Эйнштейна и приведут нас к самой существенной части теории. Тот в высшей степени остроумный и простой вывод формул преобразований Эйнштейна-Лоренца, который мы сейчас рассмотрим, принадлежит безвременно умершему талантливейшему теоретику проф. Г. А. Харазову. Пусть мы имеем координатную систему x, y, z . Выразим величину скорости света в этой системе через

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

или

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (131)$$

Перейдем к другой системе координат, движущейся с постоянной скоростью v параллельно оси x старой системы. Пусть координаты этой системы будут X' , y' , z' и пусть они расположены параллельно первой системе, тогда, согласно Галилею и Ньютону:

$$x = X' + vt \quad (132)$$

и

$$v = v', \quad z = z'. \quad (132')$$

Из (132) находим:

$$dx = dX' + v dt. \quad (133)$$

Вставляя (133) в (131), мы имеем:

$$(c^2 - v^2) dt^2 - 2v dX' dt - dX'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0.$$

Прибавляя и вычитая в данном равенстве $\frac{v^2 dX'^2}{c^2 - v^2}$, мы приводим его к следующему виду:

$$\left(\sqrt{c^2 - v^2} dt - \frac{v dX'}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right)^2 - \frac{dX'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy'^2 - dz'^2 = 0. \quad (134)$$

При каких условиях мы получим ту же величину скорости, что и в (131)? Для этого нам прежде всего надо иначе отсчитывать время и иначе измерять длины по оси X . Мы, действительно, получим одинаковое с (131) равенство, если положим:

$$c dt' = \sqrt{c^2 - v^2} dt - \frac{v dx'}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (135)$$

и

$$dx' = \frac{dX'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (135')$$

где t' есть новый счет времени, а x' — координата X' , измененная в отношении

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Посмотрим, какая получится связь между новыми координатами и временем: x' , y' , z' и t' , и старыми. Из (135') и (133) находим:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (136)$$

или

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (136')$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (137)$$

Точно так же из (135) и (133) имеем:

$$c dt' = \sqrt{c^2 - v^2} dt - \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} (dx - v dt) = \frac{c^2 dt - v dx}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

откуда

$$dt' = \frac{dt - \beta \frac{dx}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (138)$$

или

$$t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (138')$$

Но (138') и (136') представляют собой известные преобразования Лоренца-Эйнштейна. Таким образом мы приходим к выводу: для того чтобы скорость света сохраняла одну и ту же величину для любой системы, движущейся по отношению к данной прямолинейно и равномерно,

необходимо другим способом отсчитывать время и иным способом измерять пространство в направлении движения. В этом выводе интересно то, что к преобразованиям Лоренца-Эйнштейна мы приходим через преобразования Галилея-Ньютона.

По Эйнштейну все масштабы и все измерители времени так устроены, что они автоматически при переносе из системы X, Y, Z и T в систему X', Y', Z' и T' будут показывать согласно уравнениям (136') и (138'). Эйнштейн делает при этом философскую ошибку, от которой предостерегался еще Ньютон: именно, Эйнштейн полагает, что время есть показания часов, а пространство есть результат измерения масштабом. Это — та же ошибка, которую сделал Дюринг и на которую обрушился Энгельс. „Согласно господину Дюрингу время существует только благодаря изменениям, а не изменения существуют во времени и через посредство его. Но, ведь именно потому, что время отлично, независимо от изменений, его можно измерять посредством изменений, ибо для измерения всегда требуется нечто отличное от того, что подлежит измерению. Затем, время, в течение которого не происходит никаких удобопознаваемых изменений, далеко от того, чтобы не быть вовсе временем; напротив, это — чистое, не осложненное никакими чуждыми элементами, следовательно, истинное время, время как таковое“ (Энгельс, „Антидюринг“). Еще Ньютон в своих „Принципиях“ писал: „Не менее засоряют математику и физику те, кто смешивает самые истинные количества с их отношениями и их обыденными мерами“. Таким образом, если бы Эйнштейн утверждал, что применяемые нами способы измерения дают нам показания, согласные с (136') и (138'), то с этим можно было бы спорить или согласиться, если бы были приведены достаточные доказательства, но, если утверждается, что сами измеряемые величины, пространственные отношения и время, представляют собой совокупность показаний наших часов и масштабов, то с этим ни один материалист согласиться не может. Часы представляют собой инструменты, в которых происходят движения (и притом самой простой формы — формы механического перемещения) материальных тел; с помощью этих движений мы и оцениваем время, но объективно существующие пространство и время не зависят от наших измерений. „В мире нет ничего кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени. Человеческие представления о пространстве и времени относительны, но из этих относительных представлений складывается абсолютная истина; эти относительные представления, развиваясь, идут по линии абсолютной истины, приближаются к ней“ (Ленин, т. X, 143).

Посмотрим теперь, какие следствия вытекают из полученных формул преобразований. Прежде всего, формулы обратного преобразования получаются простой заменой t на t' и x на x' , а также v на $-v$ ¹. Это

¹ В самом деле, из (138') имеем:

$$t' \sqrt{1 - \beta^2} = t - \frac{\beta}{c} x, \quad (138'')$$

или

$$t = t' \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\beta}{c} x,$$

так и должно быть согласно теории относительности: движение системы X', Y', Z', t' по отношению к X, Y, Z, t со скоростью v равносильно движению системы X, Y, Z и t по отношению к X', Y', Z', t' со скоростью $-v$.

Из формул обратного преобразования находим:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

и

$$dt = \frac{dt' + \frac{\beta}{c} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

а для скоростей имеем:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}. \quad (139)$$

Уравнение (139) заменяет обычное правило сложения скоростей. При скоростях, небольших по сравнению со скоростью света, мы имеем по-прежнему:

$$u = u' + v. \quad (139')$$

Если же какая-либо из составных частей скорости u , например, $u' = c$ — скорость света, то, каково бы ни было v , у нас получается в результате всегда c . Для проверки подставим вместо $u' = c$, тогда:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c.$$

Из (139) обычно выводят теорию известного опыта Физо, повторенного Зееманом. В этом опыте свет от какого-либо источника проходит по трубе, в которой движется вода. Обычно изучают луч, который с помощью зеркал расщепляют на два; эти лучи заставляют каждый пройти по трубе с текущей водой; скорости движения воды в обеих трубах противоположны. Затем заставляют оба луча совпадать. По явлению интерференции определяют, насколько один луч запаздывает по сравнению с другим благодаря движению воды. Скорость света w

а из (136') $x = x' \sqrt{1 - \beta^2} + vt$. Вставляя сюда найденное значение t , имеем:

$$x = x' \sqrt{1 - \beta^2} + vt' \sqrt{1 - \beta^2} + \beta x';$$

или

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

точно так же, вставляя в (138'') выражение x , находим:

$$t - t' \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\beta}{c} \cdot \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t'(1 - \beta^2) + \frac{\beta x'}{c} + \beta^2 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

в движущейся воде для наблюдателя, находящегося вне воды, будет согласно (139):

$$w = \frac{w_0 + q}{1 + \frac{w_0 q}{c^2}}. \quad (140)$$

Здесь w_0 — скорость света в покоящейся воде, а q — скорость воды. Показатель преломления:

$$n_0 = \frac{c}{w_0},$$

а поэтому величину (140) можно заменить приближенным выражением

$$w = (w_0 + q) \left(1 - \frac{q w_0}{c^2} \right) = w_0 + q - q \frac{w_0^2}{c^2} = w_0 + q \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right),$$

или, заменяя w_0 через $\frac{c}{n_0}$,

$$w = \frac{c}{n_0} + q \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right). \quad (141)$$

Это выражение как раз подтверждается на опыте. Коэффициент $1 - \frac{1}{n_0^2}$

был введен еще Френелем и носит название „коэффициент увлечения“, потому что он показывает, на какую долю скорости q увеличивается скорость света благодаря движению воды, т. е. показывает, насколько движущаяся вода увлекает за собой световые волны.

Однако приведенный пример отнюдь не является решающим в пользу теории относительности, как об этом часто говорят. Во-первых, можно это соотношение вывести из теории электронов, как это сделал Лоренц, не прибегая к преобразованиям Лоренца, а кроме того, это же соотношение было выведено Ш. Менгесом, который исходил при этом из преобразований Галилея, а не Эйнштейна. Объяснить это можно, пожалуй, следующим образом. Свет исходит из некоторой системы A (наша лаборатория), переходит в движущуюся систему B (вода) и сноваозвращается в систему A . Таким образом мы переходим от A к B и потом опять от B к A . Наши подсчеты эквивалентны этому двойному переходу, а так как обратный переход восстанавливает, так сказать, прежнее положение, то совершенно безразлично, какое изменение мы производим при переходе от A к B , раз мы это изменение все равно потом аннулируем обратным переходом. То же самое мы видели в теории электронных волн Томсона, где мы, пользуясь фактически галилеевыми преобразованиями, получили то же самое, что нам дают и эйнштейновы.

Разберем теперь один парадокс, по поводу которого и сам Эйнштейн уже вынужден был изменить свою точку зрения. Рассмотрим отрезок dx' в системе B , скажем, для момента $t' = 0$, тогда из

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

мы находим:

$$dx = \frac{dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (142)$$

т. е. отрезок dx' в системе B , соответствующий dx в системе A , оказывается короче. Таким образом для наблюдателя A его собственный покоящийся по отношению к нему метр (метровая линейка) длиннее в $\sqrt{1 - \beta^2}$ раз, чем такая же метровая линейка, движущаяся по отношению к A и находящаяся в системе B . Точно так же из соотношения

$$t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

взятого для точки $x' = 0$, мы находим:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (143)$$

Это показывает, что промежуток времени t' меньше t , а следовательно, и единицы для измерения, скажем, секунды, у движущихся часов будут больше, т. е., значит, для наблюдателя в A часы у всех движущихся систем будут идти медленнее. Это обстоятельство Эйнштейн в одной из своих ранних работ иллюстрирует следующим образом: „Если бы мы поместили живой организм в ящик и заставили бы его двигаться в этом ящике так, как мы заставляли раньше двигаться часы, то можно было бы достигнуть того, что этот организм, после произвольно продолжительного полета, оказался бы как угодно мало изменившимся при возвращении на свое прежнее место, тогда как совершенно сходный организм, который оставался все время на месте, уже давно уступил свое место следующим поколениям. Для движущегося организма длинное путешествие окажется мгновением, если только движение происходит приблизительно со скоростью света. Это — неотвратимое следствие положенных нами в основу принципов, которые опыт заставляет нас принять“ (подчеркнуто нами — А. Т.) (Einstein, „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft“, Zürich, 56, S. 11). Но вот какое возникает затруднение. Ведь если бы все было так, как сказано Эйнштейном, то не было бы никакого принципа относительности! Сравнивая, кто „на самом деле“ больше „постарел“, мы могли бы сразу сказать, кто двигался „на самом деле“, т. е. мы бы узнали как раз то, что теорией Эйнштейна запрещено. Если же принять, что теория относительности все-таки существует, то придется допустить, что B оказался моложе A с точки зрения A и в то же время A оказывается моложе B с точки зрения B и притом в один и тот же момент. Поэтому положение оказывается безвыходным, а что оно именно заключается в этом, — вытекает непосредственно из формул преобразо-

вания. Ведь одновременно с (142) и (143) мы будем иметь:

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (142')$$

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (143')$$

т. е. это значит, что если для наблюдателя в системе *A* метровая линейка у *B* короче его собственной, то в то же время и для *B* его собственная длиннее, чем линейка, находящаяся в руках у *A*. Теперь, однако, сторонники Эйнштейна выходят из затруднения несколько иначе. Представим себе, что *B* летит на аэроплане и с его аэроплана свешивается метровая линейка, которая пролетает мимо длинного неподвижного масштаба, находящегося в системе *A*. Когда линейка летит вдоль масштаба, — наблюдатель *A* отмечает в один и тот же момент, где находится против масштаба начало и конец метровой линейки *B*. Пусть *B* проделывает ту же операцию с метровой линейкой *A*, которая проходит мимо свешивающегося с аэроплана длинного масштаба, неподвижного по отношению к аэроплану. Здесь весь гвоздь вопроса в словах, что значит „одновременно“. Для *A* одновременность определяется по *t*, а для *B* — по *t'*. Представим себе, что, скажем, наблюдатель *A* отметил положение начала линейки чуть-чуть раньше, чем им же было отмечено положение конца, тогда ясно, что пролетающая линейка *B* окажется короче. Вот каким образом решают этот вопрос теперь. Однако, если мы вернемся к примеру с организмами и продолжительным полетом, выхода все-таки нет. Таким образом приходится вообще отказаться, как это часто делают релативисты, от обсуждения поставленной когда-то самим Эйнштейном задачи о стареющихся организмах. С философской точки зрения мы впадаем в „релативизм“ и уже не физический, а философский; при только что приведенном объяснении перед нами встает вопрос: а есть ли какая-либо объективная продолжительность времени или длина, существующая независимо от измеряющего их наблюдателя? Раз все зависит от точки зрения, то здесь мы имеем серьезный разрыв теории Эйнштейна с основами диалектического материализма. Все наши знания представляют относительно верные отражения действительности, но эти относительно верные отражения, развиваясь, приближаются к абсолютной истине, к природе, к движущейся материи. Таким образом, как указывал Ленин, диалектика заключает в себе элемент релативизма, но не сводится к нему.

§ 2. Специальная теория относительности. Теория электромагнитного поля и механика.

Как мы уже видели, величина скорости света остается неизменной, если мы перейдем от одной системы координат *X*, *Y*, *Z*, *t* к другой *X'*, *Y'*, *Z'*, *t'*, причем связь между этими двумя системами выражается с помощью разобранных нами формул преобразования Лоренца-Эйнштейна. Эйнштейн показал, что и уравнения Максвелля не изменяются;

если мы перейдем от системы координат X, Y, Z, t к системе X', Y', Z', t' с помощью выражений (136'), (138'). Но при этом еще за величины E_x' и т. д. и M_x' и т. д. мы должны будем взять:

$$E_x' = E_x,$$

$$E_y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}} (E_y - \beta_x M_z)$$

и

$$E_z' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}} (E_z + \beta_x M_y); \quad (144)$$

$$M_x' = M_x, M_y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}} (M_y + \beta_x E_z),$$

$$M_z' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}} (M_z - \beta_x E_y); \quad (145)$$

следовательно, если мы для системы x', y', z', t' , движущейся по отношению к X, Y, Z, t со скоростью v параллельно оси X , признаем (144) и (145) за слагающие электрического и магнитного поля для системы X', Y', Z', t' , тогда и только тогда можно сказать, что максвеллевы уравнения не изменились вследствие перехода от одной системы к другой, т. е. что они являются инвариантами преобразований Лоренца-Эйнштейна. Все это только предположение и при этом довольно мало обоснованное. Но теперь перед нами встает вопрос: а как быть с уравнениями механики? Ведь они инвариантны при галилеевых преобразованиях, а не при эйнштейновых. Для того чтобы получить требуемое теорией единство, мы должны так изменить уравнения механики, чтобы и они оставались наравне с уравнениями Максвелля неизменными при преобразованиях Лоренца-Эйнштейна. Успех заранее обеспечен, потому что в механике мы имеем дело с движениями медленными по сравнению со скоростью света, а тогда введенные нами поправки не могут быть проверены на опыте. Во всяком случае, это изменение уравнений механики исходило не из потребности обобщить и улучшить уравнения механики с тем, чтобы они лучше отражали действительность, а для того, чтобы иметь возможность распространить преобразования Эйнштейна на уравнения механики и тем создать картину универсальности теории Эйнштейна.

Посмотрим, каким путем можно получить желаемые результаты. Если в рассмотренных нами с самого начала выражениях (131) слагающие скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ не являются слагающими скорости света, то, хотя значение с $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ не будет равно нулю, мы принимаем, что

$$dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'} \right)^2 \right] \right\} (dt')^2, \quad (146)$$

или

$$dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = dt'^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-1}. \quad (146')$$

Пусть v есть скорость некоторой материальной точки, движущейся со скоростью v в системе x, y, z, t . Представим себе, что начало системы x', y', z', t' связано с этой движущейся точкой; тогда по отношению к данной системе эта материальная точка поконится, т. е. $v' = 0$. Обозначим $dt' = dt$, так что (146) принимает вид:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (147)$$

Время τ мы будем обозначать как „собственное“ время для данной материальной точки (Eigenzeit). Это понятие введено Минковским. Если мы возьмем другую систему координат x_1, y_1, z_1 и t_1 , то естественно, что данная материальная точка будет иметь другую скорость v_1 , но благодаря свойству инвариантности мы будем иметь:

$$dt_1^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = d\tau^2,$$

так что мы получаем:

$$dt_1 = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (147')$$

Итак, „собственное“ время мы можем определить как

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (148)$$

Наряду со скоростью $v_x = \frac{dx}{dt}$ мы можем определить так называемую „скорость Минковского“:

$$u_x = \frac{dx}{d\tau}. \quad (149)$$

Связь между этими скоростями мы получим в следующем виде:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (149')$$

Точно так же для ускорения Минковского мы имеем:

$$g_x = \frac{du_x}{d\tau},$$

Выражение (146') подвергалось весьма серьезным нападкам. См., например, G. Gleich, Einsteins Relativitätstheorie und physikalische Wirklichkeit, Leipzig, Barth, 1930.

или

$$g_v = \frac{du_x}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{du_x}{dt}.$$

Вставляя сюда (149), мы находим:

$$g_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \right],$$

или, пользуясь векторными обозначениями:

$$g_x = \frac{j_x}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{(vj)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} v_x, \quad (150)$$

где j и j_x — ускорения данной движущейся точки относительно системы X, Y, Z, t . Если мы умножим ускорение g на массу движущейся точки, то мы получаем:

$$mg_x = K_x, \quad (151)$$

т. е. так называемые „силы Минковского“. Однако для того, чтобы наши уравнения давали возможность изучать движения, необходимо, чтобы слагающие силы K_x, K_y и K_z были выражены как функции координат и скоростей, а в некоторых случаях и ускорений тех тел, которые определяют собой данное движение. Мало того, для того чтобы сохранялся принцип относительности, необходимо, чтобы эти функции не изменялись при переходе от системы X, Y, Z, t к системе $X', Y', Z' t'$. Таким образом теория относительности требует, чтобы функции, изображающие закон действия силы, обладали определенными свойствами. Здесь мы опять имеем дело с довольно смелой гипотезой, которую проверить не так-то легко. Путем применения преобразований Лоренца-Эйнштейна, на чем мы здесь останавливаться не можем, мы приходим к выводу, что, вычисляя силу Минковского, действующую на электрон, мы получаем следующее выражение:

$$K = \frac{e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ E + \frac{1}{c} [vM] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (152)$$

⁴ В этом выражении, равно как и раньше в (144), мы получаем выражения, имеющие знаки, противоположные тем, какими у нас были в ч. III. Это объясняется тем, что там скорости были скоростями движения фаралеевых трубок, а в данном случае мы говорим о скорости тел, движущихся по отношению к полю, следовательно, мы здесь меняем знак скорости.

С другой стороны, изучая действие магнитного поля на движущиеся электроны, мы пользуемся выражением для силы следующего рода:

$$F = e \left\{ E + \frac{1}{c} [v \cdot M] \right\}. \quad (153)$$

Будем называть F „силой Ньютона“, в отличие „от силы Минковского“. Это выражение не совпадает с выражением силы Минковского, но ведь и скорость и ускорение Минковского не совпадают с обычными определениями. Из (153) и (152) мы получаем:

$$F = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K. \quad (154)$$

Это соотношение предполагается приложимым не только к данному случаю, но и рассматривается как общее соотношение, связывающее ньютоновское выражение силы с выражением Минковского. Посмотрим, как выразятся уравнения движения, если мы введем ньютоновское выражение силы F . Прежде всего, мы имеем:

$$K = mg, \quad (155)$$

или

$$\sqrt{\frac{F}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mj}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m(vj)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \cdot v,$$

или, наконец,

$$F = \frac{mj}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m(vj) \cdot v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (156)$$

Разложим ускорение j на две слагающие — тангенциальное j_1 и нормальное j_2 — и рассмотрим их в отдельности. Так как j_1 имеет то же направление, что и v , то мы можем положить $j_1 = av$, а тогда:

$$(vj_1)v = a(v \cdot v) \cdot v = av^2v = v^2j,$$

и поэтому:

$$F_1 = mj_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} j_1. \quad (156')$$

Здесь роль массы играет так называемая „продольная масса“

$$m_1 = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (157)$$

Далее, так как $j_2 \perp v$, то

$$F_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} j_2, \quad (158)$$

откуда заключаем, что при нормальном ускорении j_2 в качестве множителя стоит „поперечная“ масса

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (159)$$

Надо, однако, заметить, как на это указывает Лоренц, что подобными рассуждениями нельзя доказать изменяемость массы со скоростью потому, что с тем же успехом можно было бы доказать при постоянстве массы различные законы действия силы, т. е. различную зависимость силы от ускорения и скорости при продольном и поперечном воздействиях. Так как мы знаем, что масса зависит от скорости, и мы можем это теоретически обосновать, исходя из совершенно других соображений, то мы имеем основание сохранить обозначения (157) и (159).

Как мы уже указывали, Томсон в 1910 г. нашел, исходя из своего метода, зависимость вида (159). Эту же зависимость, как показал Ленар, можно получить, исходя из следующих простых соображений.

Работа силы, отклоняющей электрон с его пути, отнесенная к единице времени, т. е. Pv , равняется прибыли энергии системы $\frac{dE}{dt}$, но энергия, как мы видели на основании соотношения Томсона-Эйнштейна, может быть представлена как mc^2 . Поэтому:

$$Pv = \frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot c^2. \quad (160)$$

С другой стороны, уравнение движения в той форме, как это было дано Ньютоном¹, можно написать: $\frac{dmv}{dt} = P$, или

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = P. \quad (161)$$

Исключая из (160) и (161) P , мы находим:

$$\frac{dm}{m} = \frac{v dv}{c^2 - v^2} = \frac{\beta d\beta}{1 - \beta^2}, \quad (162)$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$\log m = -\frac{1}{2} \log(1 - \beta^2) + \log m_0,$$

¹ Формулировка Ньютона следующая: „Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит в направлении той прямой, по которой эта сила прилагается“.

или

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (159')$$

т. е. уравнение, тождественное с (159). Отсюда ясно, что если (159) и подтвердилось бы на опыте, то еще нельзя было бы сделать заключения о том, что теория относительности доказана на опыте. Это лишь доказало бы, что теория относительности не противоречит опыту. Однако мы имеем ряд данных, свидетельствующих о том, что (159) не соответствует фактам.

Первые опыты 1903 г. с β -частицами радия дали, как казалось тогда, подтверждение теории Абрагама. Однако в 1909 г. опыты Бухерера дали, как будто, решительный перевес в пользу зависимости между массой и скоростью (159). Это мнение стало ходячим в научной литературе. Несмотря на это, сам Бухерер заметил, что по его фотографиям можно получать сколько-нибудь надежные результаты только для отношения скоростей $\beta < 0,6$.

В статье, напечатанной в 1918 г. („Изв. Академ. наук“), проф. Н. П. Кастерин обратил внимание, что даже по репродукциям фотографии Бухерера (а не только по оригиналам) можно измерять массу для значений, значительно больших, чем для $\beta = 0,6$, но только они уже не удовлетворяют соотношению (159). Из этого проф. Кастерин сделал вывод о несостоятельности теории Эйнштейна. Нейман повторил опыты Бухерера, но опять-таки опыты дали надежные результаты только до отношения скоростей $\beta = 0,7$. Наконец, Ги и Леванши в 1916 г. проверили (159), но только до значений $\beta = 0,48$. Таким образом для больших скоростей, т. е. для $\beta > 0,7$, где, судя по имеющимся данным, наблюдаются значительные отступления от (159), — тщательных измерений еще нет. Это не мешает сторонникам Эйнштейна считать вопрос уже решенным в пользу теории Эйнштейна. Одно время считалось, что измерения тонкой структуры спектральных линий подтверждают (159). Как мы видели (ч. VI, гл. I), тонкая структура обусловлена тем, что для эллиптических орбит, в которых электрон близко подходит к ядру, изменения массы сказываются на орбите, и потому эллиптическая орбита, строго говоря, заменяется более сложной, и эта новая орбита не совсем эквивалентна соответствующей ей круговой. По данным Пащеня казалось, что (159) давала лучшие результаты, чем формула Абрагама. Однако произведенные Герке и Лау точные измерения показали несостоятельность (159). Теперь спор прекратился, так как вообще с точки зрения современной квантовой теории об орbitах не следует говорить. Во всяком случае, говорить об опытной проверке (159) еще очень преждевременно.

§ 3. Эфир и специальный принцип относительности.

В обычных изложениях теории Эйнштейна после установления преобразований Лоренца-Эйнштейна указывают, что для эфира не находится места в этой теории. Необходимо, однако, заметить, что отрицание эфира уже заключается в требовании постоян-

ства скорости света независимо от координатной системы. В самом деле, если мы изучаем распространение света, находясь на поверхности земли, и допустим, нашли для скорости света величину $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, то как мы можем найти ту же величину, если мы тот же пучок света будем рассматривать с быстро летящего аэроплана? Ведь одно из двух: если, допустим, эфир покоится по отношению к земному шару, то по отношению к аэроплану он будет двигаться, или если он покоится по отношению к аэроплану, то он будет двигаться по отношению к земному шару, и тогда к скорости света будет прибавляться или вычитаться скорость v аэроплана. Мы сказали — один и тот же пучок света, — так как для разных пучков возможен и такой случай, что часть эфира переносится самим движущимся телом; тогда, если мы говорим о луче света, проходящем в той части эфира, которая переносится движущимся телом, то этот луч может двигаться со скоростью, соответствующей лучу света в покоящемся теле.

Утверждение, что скорость света одна и та же для всех систем, с какой бы скоростью они друг по отношению к другу ни двигались, равносильно тому, что эфир один и тот же покоится по отношению к каждой из систем, движущихся по отношению друг к другу, или по отношению к каждой из них движется с одной и той же скоростью. Вот почему первый вывод, сделанный Эйнштейном, был следующий: эфира нет. А так как волны света и радио существуют, то, следовательно, существует движение без материи.

На этой позиции стоит современная формальная физика. Так, например, проф. И. Е. Тамм со всей определенностью говорит: „Конечно, с точки зрения современной теории, отрицающей существование материального эфира, лишено, в сущности, смысла говорить о натяжениях в вакууме, т. е. о силах взаимодействия смежных элементов вакуума“ („Основы теории электричества“, I, стр. 167).

С 1920 г. Эйнштейн вновь признал, что эфир существует, „но нельзя представить себе этот эфир состоящим из частей, которые можно исследовать во времени: таким свойством обладает только весомая материя; точно так же нельзя применять к нему понятие движения“. Таких же метафизических взглядов на эфир придерживается и т. Б. Гессен: „Эфир принципа относительности не состоит из частиц, не имеет молекулярного строения, поэтому к нему неприменимо понятие движения как механического перемещения. Но так как он не состоит из частиц, то нельзя обнаружить движение тела по отношению к этому эфиру“. Во-первых, „еще не обнаружено“ не значит „не может быть обнаружено“, во-вторых, какие могут быть такие тела, которые не допускают движения как перемещения? И наконец, могут ли с точки зрения диалектика-материалиста существовать абсолютно сплошные тела, не состоящие из частиц? Где же тогда диалектика прерывного и непрерывного?

§ 4. Опытные основания теории относительности (специальной).

Посмотрим теперь, на каких опытных данных строится вывод о постоянстве скорости света. В настоящее время принято говорить, что принцип постоянства скорости света есть опытом установленный факт.

Этой традиции можно противопоставить тот неоспоримый факт, что скорости света, в каком-либо определенном направлении (так же как, скажем, мы измеряем скорость звука), никто никогда не измерял. Действительно, во всех случаях, когда измерялась скорость света, каждый луч проходил два раза одно и то же расстояние в противоположных направлениях, а при этом влияние скорости самой системы почти нацело автоматически исключается. Пусть луч света, выходя из A (рис. 164), идет в B , там отражается и возвращается обратно в A , и пусть A и B , находящиеся на расстоянии l друг от друга, движутся одновременно со скоростью v по направлению AB , тогда по отношению к системе AB луч, движущийся в эфире, не участвует в этом движении и будет иметь по отношению к AB относительную скорость в направлении AB , равную $c - v$, и $c + v$ в обратном направлении. Время, затраченное на путь AB и обратно:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{1}{c} \frac{l}{1-\frac{v}{c}} + \frac{1}{c} \frac{l}{1+\frac{v}{c}} = \\ &= \frac{l}{c} \cdot \left\{ 1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots + 1 - \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \dots \right\} = \\ &= \frac{2l}{c} \left\{ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (163)$$

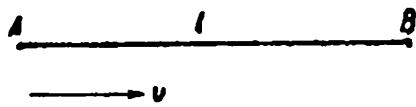


Рис. 164.

Принимая во внимание, что скорость движения Земли по орбите порядка 30 км/сек, а $c = 300\,000$ км/сек, мы имеем для $\frac{v}{c} = 10^{-4}$, а

так как эта величина входит в (163) в квадрате, то мы имеем:

$$t_1 \approx \frac{2l}{c} \left(1 + 10^{-8} \right). \quad (163')$$

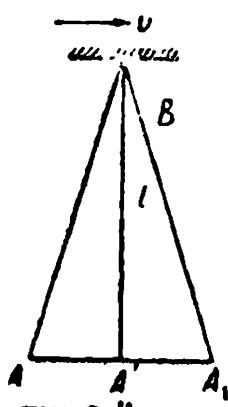


Рис. 165.

Отсюда ясно, что влияние движения на скорость света почти исключено. Если начальный и конечный пункты A и B , между которыми луч идет взад и вперед, перемещаются со скоростью v под прямым углом к направлению, соединяющему эти оба пункта, как указано на рис. 165, то промежуток времени, потребный свету, чтобы пройти путь ABA_1 , равный t_2 , определяется из $\triangle A A_1 B$ следующим образом:

$$c^2 \frac{t_2^2}{4} = l^2 + \frac{v^2}{4} t_3^2,$$

или

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2l}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]. \quad (164)$$

Прибор Майкельсона-Морли-Миллера так устроен, что луч, исходящий из источника P (рис. 166), на зеркальной, слабо посеребренной пластинке A разделяется на два, из которых один идет от A к B и обратно к P , а другой к C и обратно через A к P . В O наблюдают полосы интерференции. При равенстве путей CA и BA , все-таки один из лучей будет запаздывать по отношению к другому, если либо CA , либо AB будет направлена по направлению скорости движения Земли. Запаздывание Δt выразится разностью (163) и (164):

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left\{ 1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right\} = \\ = \frac{l}{c} \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (165)$$

Необходимо все-таки иметь в виду, что в опыте Майкельсона члены первого порядка исключены и что все влияние движения сводится к очень

малым членам второго порядка. Как выяснилось теперь, в опытах Майкельсона-Морли в 1887 г. и Морли-Дейтон-Миллера в 1904 г. получался небольшой эффект, но не тот,

который ожидали¹, и по направлению не совпадающий ни с движением Земли по орбите, ни с направлением движения солнечной системы по направлению к созвездию Геркулеса. В то время (1905 г.) результат этих опытов был истолкован как отрицательный. Лоренц

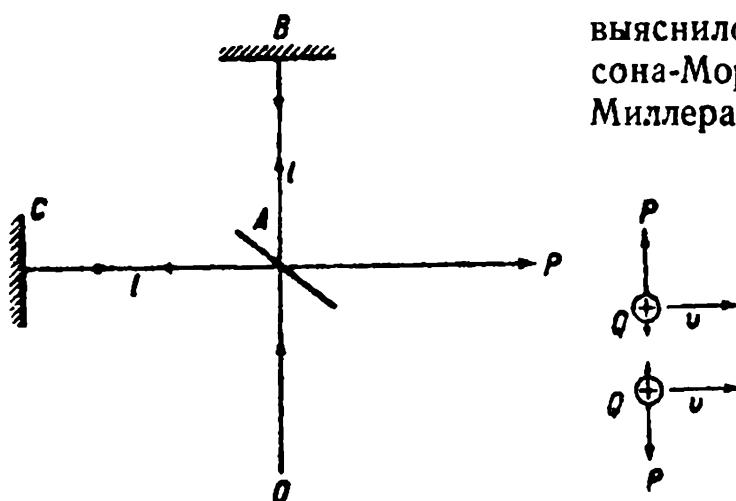


Рис. 166.

Рис. 167.

и Фиц Джеральд объясняли этот результат тем, что по направлению движения прибор сокращается в отношении $\left(\frac{v}{c} \right)^2$. Это сокращение как раз аннулирует запаздывание (165). Для этого сокращения Лоренц указал весьма рациональное объяснение. Во-первых, мы принимаем, что все молекулярные силы электромагнитного происхождения, а если так, то при движении (рис. 167) наряду с отталкиванием одноименных зарядов получится и притяжение, обусловленное тем, что движущиеся заряды представляют собой элементы тока. Поэтому силы под прямым углом к направлению движения слабеют. По направлению движения силы остаются прежней

¹ Осенью 1932 г. в „Докладах Академии наук“ появилось исследование проф. Н. П. Кастерина, показавшего, что в опытах Майкельсона 1887 г. подсчет производился неправильно и что, если опытные данные пересчитать по указанному проф. Кастерином способу, то получается для движения Земли по орбите около 29 км/сек, т. е., в сущности, опыт Майкельсона дает возможность определить движение Земли по отношению к эфиру. Ввиду того что настоящая книга уже была сдана в набор, мы не имеем возможности остановиться на обсуждении упомянутой работы. Но вне всякого сомнения, вопрос об опыте Майкельсона подлежит серьезнейшему пересмотру.

величины, поэтому, как заключает Лоренц, возможно сокращение размеров всех тел в направлении движения. Лоренц предположил, что это сокращение в точности компенсирует относительное запаздывание (165) двух лучей в интерферометре Майкельсона. Дейтон-Миллер, повторяющий этот опыт, начиная с 1921 г. и по настоящее время, высказал в 1925 г. предположение, что сокращение Лоренца, пропорциональное $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, быть может, содержит числовой коэффициент, не совпадающий с коэффициентом в (165) (вычисления согласно приведенному объяснению Лоренца выполнены не были, и они далеко не так просты, поэтому коэффициент в этом выражении неизвестен), и потому сокращение не полностью компенсирует запаздывание (165). Для движения Земли по орбите 30 км/сек и для движения солнечной системы к созвездию Геркулеса 19 км/сек эффект исчезающе мал даже для прибора Дейтон-Миллера, чувствительность которого значительно превосходит чувствительность прибора Майкельсона-Морли и первого прибора Морли-Дейтон-Миллера. Наблюдавшийся же Дейтон-Миллером эффект обусловлен движением всей звездной системы Млечного Пути со скоростью 400—800 км/сек по направлению к звезде Капелле. Весьма интересно, что Дейтон-Миллеру удалось по цифрам напечатанным в работе Майкельсона-Морли и Морли-Дейтон-Миллера, констатировать наблюдавшийся им с 1921 г. эффект еще в измерениях 1887 и 1905 гг. Таким образом все предшествующие опыты подтверждают опыты Дейтон-Миллера. Опыты непрерывно продолжаются до настоящего времени. Очень интересное подтверждение опытов Дейтон-Миллера получено австрономом Курвуазье. Уже давно было замечено, что зенитные расстояния звезд, найденные по отражению в ртутном зеркале, отличаются от определенных непосредственно. О причине этого явления очень много спорили, но ни к каким осознательным результатам не пришли, тем не менее, самое явление подтверждается громадным фактическим материалом. Курвуазье предложил следующее объяснение: астрономическая труба, направленная на ртутное зеркало в сторону изображения звезды, улавливает отраженный луч от движущегося зеркала. А если мы будем предполагать, что эфир не увлекается движением земного шара и всей звездной системы, то угол падения не будет равен углу отражения. На основании обработки громадного материала Курвуазье нашел, что движение всей системы Млечного Пути направлено приблизительно в сторону звезды Капеллы и имеет скорость порядка 600 км/сек. Курвуазье построил специальный прибор, состоящий из коллиматора, по которому направляется пучок света на ртутное зеркало, и трубы, которая—перехватывает отраженный луч. Эту систему можно поворачивать в любой азимут и наблюдать связь между углом падения и углом отражения; предварительные опыты уже подтвердили подсчеты, сделанные Курвуазье на основе данных ряда обсерваторий. Опыты в настоящее время продолжаются с более усовершенствованным прибором. Далее, тот же результат получен Курвуазье из совершенно независимых опытов с изучением хода часов и изменения силы тяжести. Если Земля, вместе со всей системой Млечного Пути, движется со скоростью v (рис. 168), то в то время, когда скорость направлена так, как на рис. 169, маятник A будет, по Лоренцу, укорочен,

и часы будут итти быстрее, в точке же *B* маятник укорочен не будет. Сверяя ход часов с маятником в Потсдаме и в Вашингтоне по радио, Курвуазье действительно констатировал эти изменения и на основе их опять получил скорость порядка 600 км/сек и направленную к звезде Капелле. Наконец, если движение действительно вызывает сокращение тел, то и земной диаметр должен уменьшаться в направлении движения, поэтому все точки поверхности земли по этому направлению окажутся ближе к центру земли, и напряжение силы тяжести в эти часы (т. е. когда прямая линия, выходящая из центра земли и направленная по скорости, пересекает поверхность земли в месте наблюдения) должно увеличиться. Курвуазье устроил для этой цели чувствительный гравиметр и производил тщательные измерения в течение круглых суток. Предположения полностью оправдались, причем полученные результаты в пределах ошибок наблюдения целиком подтверждают результаты, полученные с помощью указанных выше методов¹, и находятся в полном согласии с опытами Дейтон-Миллера.

Однако необходимо указать на то, что опыты Миллера были повторены Рой-Кеннеди и Иллингвортом и дали отрицательный результат.

Опытов было сделано очень немного, и кроме того, длина лучей света в опытах Кеннеди в 16 раз меньше, чем у Миллера, следовательно, объективно прибор Кеннеди в 16 раз менее чувствителен, чем прибор Дейтон-Миллера. Чувствительность увеличена в 4 раза за счет усовершенствования субъективного отсчета, различного для различных глаз. То же самое, в основном, относится и к приборам Пикара, Стэля и Иосса, которые, сделав сравнительно небольшое число измерений, пришли к отрицательным выводам². Опыт был также повторен Майкельсоном, причем первые сведения о предварительных опытах говорили за то, что эффект Дейтон-Миллера не наблюдается, во второй статье указано, что некоторый результат получается, но количественно не совпадает с результатами Дейтон-Миллера. Потом опыты прекратились. Что касается опытов Пикара и Стэля, то даже Кеннеди, оспаривающий результаты опытов Дейтон-Миллера, не придает им никакого значения. Опытам Дейтон-Миллера была посвящена целая конференция в 1927 г. в Пасадене, стенографический отчет о ней напечатан в 1928 г. в журнале „Astrophysical Journal“. На конференции выступали Дейтон-Миллер, Майкельсон, Кеннеди, Лоренц, Эйнштейн и Гедрик. Гедрик показал, что обычная теория опыта Майкельсона не точна, что в ней не принято во внимание, что свет отражается от движущихся зеркальных пластинок и зеркал.

¹ Эти опыты в последнее время оспариваются Томашеком.

² В приборе Иосса, изготовленном фирмой Цейсса, наблюдаются смещения полос интерференции, но Иосс их приписывает влиянию сотрясений от городской экипажей.

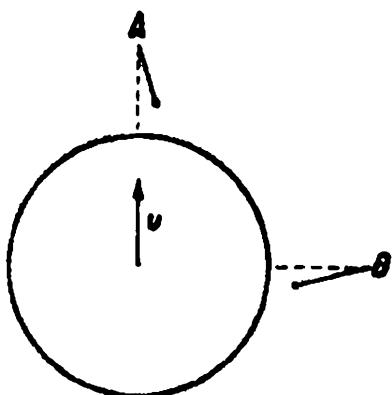


Рис. 168.

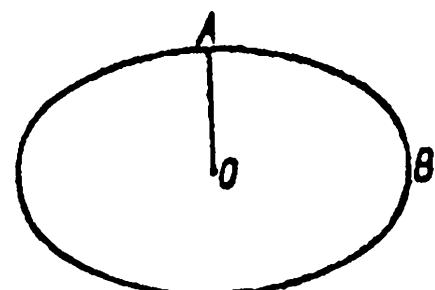


Рис. 169.

Если интерферометр установлен на параллельные лучи, то влияние отражения от движущихся зеркальных поверхностей нацело компенсирует запаздывание (165), так что, вообще, в этом случае результат должен равняться нулю. По этому поводу возник спор между Гедриком и Лоренцом, причем Лоренц в заключение признал необходимым пересмотреть сызнова всю теорию опыта Майкельсона. Об опытах Дейтон-Миллера Лоренц высказался следующим образом: „После того как мне удалось посмотреть диаграммы полученных Миллером результатов, я думаю, едва ли может оставаться сомнение в том, что у Миллера наблюдалось смещение интерференционных полос. Возникает вопрос о причине этих смещений“. В ответ на эти соображения Миллер указал, что на практике ни одна из установок интерферометра не соответствует тем идеальным условиям, какие обычно делаются в теоретических расчетах, вследствие чего необходимо очень тщательно делать расчет результатов опытов, перестраивая теорию так, чтобы она в точности соответствовала реальным условиям опыта. Во всяком случае, опыты, не давшие тех результатов, какие были получены Миллером, делались, за исключением прибора Майкельсона, с менее чувствительными приборами и в крайне ограниченном числе. Совпадение же данных Миллера с опытами Курвуазье говорит очень сильно в пользу Дейтон-Миллера. Кроме того, необходимо учесть определенное предвзятое стремление доказать, что Миллер должен быть неправ, так как его опыты опровергают всю теорию Эйнштейна. По эйнштейновской специальной теории опыт Майкельсона не может дать никакого результата, так как движение системы, согласно теории относительности, не отражается на величине скорости света.

§ 5. Всеобщая теория относительности Эйнштейна.

В 1916 г. Эйнштейном была сделана попытка распространить свою теорию на любое движение — не только прямолинейное. Для этого ему пришлось отказаться от евклидовой геометрии.

Мы не можем в нашем курсе введения в теоретическую физику дать хотя бы даже и краткое изложение этой теории, поэтому мы ограничимся указаниями на ее существенные черты и, главное, на то, насколько опыты подтверждают эту теорию. Прежде всего, эта теория пытается „свести“ физику к геометрии. Один из ревностных поклонников Эйнштейна охарактеризовал смысл эйнштейновской теории следующим образом: согласно этой теории „физика рассматривается как геометрическая необходимость“ (А. Гааз). В этой теории предполагается, что никаких сил и силы тяготения в частности вообще не существует. Материальные тела, в зависимости от их массы, „искажают“ в своем соседстве свойства пространства: чем больше массы и чем ближе мы к ним, тем больше отступления от евклидовой геометрии; роль прямой линии будут играть уже кривые. Поэтому, когда какое-либо тело — планета или комета — попадает в соседство большой массы, то она, в сущности, продолжает двигаться „по инерции“, но попадает в сферу действия неевклидовой геометрии, где движение по инерции происходит уже по кривой. На обычном языке физики искривление приписывалось действию силы, согласно же

Эйнштейновской теории никаких сил нет, изменились лишь свойства пространства.

Так как то, что мы называем тяготением, есть результат изменившихся в соседстве с большими массами геометрических свойств пространства, и по существу, мы имеем дело только с движением „по инерции“, то ясно, что в теории Эйнштейна „инертная“ масса принципиально отождествляется с массой „гравитационной“. Последнее соотношение, носящее название „принципа эквивалентности“, иллюстрируется Эйнштейном с помощью следующего воображаемого опыта. Представим себе лабораторию и наблюдателей, заключенных в большой ящик. Пусть в этой лаборатории определяют ускорение силы тяжести с помощью маятника и находят величину $g = 980 \text{ см/сек}^2$. Тогда возможно два толкования: или ящик стоит на планете, похожей на нашу Землю, или он несетя в областях, очень далеких от всяких притягивающих масс, но движется с ускорением 980 см/сек^2 в сторону, противоположную „кажущейся“ силе тяжести, производящей ускорение маятников. Эйнштейн в своей формальной системе дошел до того, что он утверждал возможность создать поле тяготения с помощью одного лишь преобразования координат! На этой основе построена теория, согласно которой нельзя определять даже и собственное ускоренное движение, оставаясь в пределе системы, обладающей данным ускорением. Таким образом в теории Эйнштейна осуществлено заветное желание Маха „доказать“, что системы Коперника и Птолемея в одинаковой мере истинны и что систему Коперника следует предпочесть только из соображений удобства. Едва ли стоит указывать, что все мракобесы, все реакционеры с жадностью ухватились за „революционную“ теорию, которая... осуждает Галилея и Коперника за то, что те думали, что Земля „на самом деле“ движется вокруг Солнца, и которая... признает правоту церкви и св. инквизиции. Вот ряд образчиков этого „научного“ подхода.

„В точке зрения инквизиции можно найти нечто, соответствующее точке зрения современной теории относительности, согласно которой нельзя сказать, что Земля „на самом деле“ движется, а Солнце стоит, но можно только утверждать, что описание явлений в координатной системе, для которой дело обстоит именно так (т. е. Земля движется), выходит проще (Филипп Франк, речь на съезде физиков в 1929 г.).

Или вот еще сходный же образец. „Известно, что во времена Коперника, Кеплера и Галилея шел жаркий спор по вопросу, вращается ли Солнце вокруг Земли или Земля вокруг Солнца. Если бы мы поставили себе вопрос сегодня о том, какую сторону нам занять в этом споре, то мы должны были бы сказать, что сами по себе обе точки зрения в одинаковой мере справедливы, так как движение не заключает в себе ничего абсолютного, оно является только относительным; все, что мы воспринимаем в процессе движения, есть лишь измененные положения различных тел по отношению друг к другу: в движении должны принимать участие по меньшей мере два тела.“

Говорим ли мы тогда, что одно тело вращается вокруг другого, или про это другое, что оно вращается вокруг первого, — это зависит от нашего свободного выбора. Почему же мы рассказываем нашим детям и школьникам и до сих пор, что Земля движется вокруг Солнца, тогда

как мы только что сказали, что и другая точка зрения в одинаковой мере истинна? Только и единственно из соображений целесообразности, так как мы таким образом приходим к более простой картине нашей планетной системы“ („Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie“. E. R. Neumann, Jena, Fischer, 1922, S. 1).

Нельзя даже сказать, чтобы эти взгляды были новы... Они были высказаны одним из фактических основателей эмпириокритицизма — Осиандером (A. Hossmann'ом) в предисловии к знаменитой книге Коперника в 1543 г.

Вот что писал этот богобоязненный автор: „Я не сомневаюсь, что некоторые ученые сильно возмущены распространившейся вестью о новой гипотезе этого труда, — что Земля подлежит вращению, а Солнце стоит неподвижно в середине мира, — и держатся того мнения, что не годится менять начала благородных наук, уже издавна твердо установленные... Нет необходимой потребности в том, чтобы эти основания были истинными; они даже могут быть менее всего подобны истине, лишь бы только они указывали на согласованность вычислений с наблюдениями... Если же я принимаю что-нибудь вымышленное, а такового принимают действительно немало, то не для того, ведь, делаю я это, чтобы кого-нибудь убедить, что должно быть так, а не иначе, но единственно для того, чтобы вполне удовлетворить вычислению“. Материалист-диалектик не может признать эту, проповедуемую теперь на основе теории Эйнштейна, но по существу весьма древнюю, „истину“. Ведь современная наука подтвердила доказательствами, и притом весьма убедительными, правоту Коперника. Вот что писал по этому поводу Энгельс: „Система Коперника в течение трехсот лет оставалась гипотезой, в высшей степени вероятной, но все-таки гипотезой. Когда же Леверье, на основании данных этой системы, не только доказал, что должна существовать еще одна, неизвестная планета, но и определил посредством вычисления место, занимаемое ею в небесном пространстве, и когда после этого Галле действительно нашел эту планету (Нептун — A. T.), система Коперника была доказана. И если неокантианцы стараются воскресить взгляды Канта, а английские агностики — взгляды Юма (никогда не вымиравшие окончательно в Англии) (а в дальнейшем Мах, Петцольд, Авенариус и др. — A. T.), — несмотря на то, что и теория и практика давно уже опровергли и те и другие, — то в научном смысле это представляет попятное движение, а на практике дает этим стыдливым людям возможность впустить через заднюю дверь тот самый материализм, который изгоняется на глазах публики“ (Энгельс, Л. Фейербах, стр. 43, „Библиотека марксиста“).

Но самым важным является вопрос: а что же нового, согласного с фактами дала всеобщая теория относительности Эйнштейна? Обычно приводят „блестящее подтверждение“ трех следующих предсказаний: движение перигелия планеты Меркурия, отклонение лучей звезды близ солнечного диска и смещение спектральных линий к красному концу спектра. Рассмотрим по очереди, в чем заключаются все эти три предсказания и как они подтвердились. Те вычисления, которые были сделаны для орбиты Меркурия с точки зрения всеобщей теории, привели к результату, который можно истолковать следующим образом: эллиптическая

орбита, по которой движется планета, медленно поворачивается, так что положение в пространстве линий, соединяющей перигелий P (рис. 170) (ближайшее положение планеты к Солнцу) с „афелием“ A (наиболее удаленное положение), медленно поворачивается, занимая положения AP , A_1P , и т. д. Подобное изменение орбиты Меркурия вытекает также из теории Ньютона. В этой теории оно объясняется влиянием других планет, но совокупное действие всех планет должно вызвать вращение орбиты на $601'',0$ в столетие. Действительное перемещение оси орбиты Меркурия составляет $642'',6$.

По эйнштейновской теории орбита представляет собой спираль, отдельные обороты которой очень близки к эллипсу; при каждом обороте этот эллипс поворачивается все в ту же сторону, причем вычисленное по эйнштейновской теории перемещение оси $42'',9$, т. е. очень близко к разности $642'',6 - 600'',0 = 41'',6$. Таким образом, как будто теория

относительности хорошо объясняет то, что с точки зрения теории Ньютона оставалось непонятным. Однако Зеелигер и Пур показали, что это неравенство можно объяснить присутствием притягивающих масс внутри орбиты Меркурия в виде облаков космической пыли, дающих явление так называемого зодиакального света.

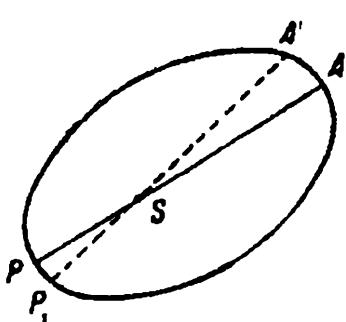


Рис. 170.

но по сути дела предсказание, хотя и будто бы оправдавшееся, при ближайшем рассмотрении оказывается не столь убедительным. Посмотрим, что пишет по этому вопросу проф. В. Г. Фесенков: „Приверженцы теории относительности сделали поспешное заключение, что, наконец, найдено бесспорное доказательство справедливости взглядов Эйнштейна. Это заключение, однако, в корне нелогично. Действительно, с одной стороны, с точки зрения теории Ньютона, движение Меркурия исследуется полностью, с учетом притяжения всех планет; при этом находится общее смещение перигелия в $600''$ с небольшой невязкой в $42''$ в столетие. С другой стороны, применяется теория относительности в предположении, что Меркурий есть единственная планета и что он движется только под влиянием солнечного притяжения. При этом констатируется, что перигелий орбиты смещается как раз на ту величину, которой нам недостает в теории Ньютона. Рассуждение, очевидно, неправильно. Если классическая механика неверна, на нее не следует ссылаться совсем; а разобрать все планетные движения исключительно с точки зрения теории относительности. Этого до сих пор сделано не было. Наконец, если бы мы могли согласиться с тем, что с перигелием Меркурия все благополучно, то для других планет нам все равно нужно было бы искать другого объяснения, так как, например, для Марса невязка гораздо больше того, что может дать теория относительности. Спрашивается, однако, можно ли назвать научным такой подход к объяснению аналогичных явлений природы, когда для каждого явления придумывается особая причина?“ („Вестн. Комм. ак.“, кн. XIII, 1925). Но, что еще любопытнее, предпринятая проверка наблюдений показала, что в расчетах, проделанных для выделения „невязки“ в $42''$, были сделаны ошибки, и что эта невязка меньше, именно, равна не $42''$ (что дает теория

Эйнштейна), а значительно меньше — около 34", а быть может, и 29".

Таким образом перед лицом серьезной научной критики вопрос с первым предсказанием обстоит далеко не блестяще. Необходимо также заметить, что такое же точно предсказание было сделано Гербертом в 1898 г., который исходил из совершенно других соображений, но эта работа осталась незамеченной.

Второе предсказание, о котором был поднят большой шум, сводилось к тому, что при наблюдениях звезд, близких к Солнцу во время полного солнечного затмения, их положения изменяются под влиянием „тяготения“ световых лучей. Дело объясняется тем, что вблизи Солнца геометрия, как мы уже говорили, согласно Эйнштейну перестает быть евклидовой, а потому лучи вместо прямых будут представлять собой кривые линии (рис. 171), а потому наблюдатель с Земли будет видеть звезду не в S , а в S' . Если мы предположим, что кванты света, по Томсону замкнутые в кольца фараоновы трубы, как и всякая материя, подвержены действию силы тяжести, то получается такого же вида искривление, хотя и численно вдвое меньшее, чем по Эйнштейну. В 1919 и затем в 1922 гг. были произведены снимки во время солнечного затмения, на которых были сделаны измерения положения звезд; во всех газетах и журналах появились статьи, в которых наперебой объявляли об удивительном оправдании пророчества эйнштейновской теории. Однако и в этом случае критический анализ фактов указывает, что о доказательстве теории Эйнштейна здесь не может быть и речи. Целый ряд обстоятельств должен быть изучен, прежде чем можно утверждать, что эффект действительно обусловлен тем, что предполагает Эйнштейн. Так, весьма возможно, как на это указывает Пур, что во время солнечного затмения лучи, проходящие через конус тени Луны, проходят через охладившийся воздух, вследствие чего они могут преломляться в земной атмосфере и давать тот же самый эффект, который по Эйнштейну происходит вблизи Солнца. Наконец, имеющиеся данные крайне ненадежны, как указывает проф. Эскланьян. Не было достаточных гарантий того, что желатинный слой пластиинки в процессе проявления не подвергся вытягиванию, и притом, как показывает диаграмма (рис. 172), говорить о совпадении наблюденных положений звезд с теоретической кривой не приходится. Проф. В. Г. Фесенков приходит к выводу: „Отсюда видно, что наблюдаемое смещение звезд около Солнца во время затмения представляет собой чрезвычайно сложное явление и ни в коем случае не может рассматриваться как подтверждение теории относительности“. Любопытно отметить, что во время затмений, происходивших после 1923 г., никто не производил этой проверки теории Эйнштейна, хотя было бы в высшей мере важно решить вопрос, подтверждаются ли предсказанные результаты или нет.

Наконец, третье пророчество касается смещения спектральных линий. На Солнце и на звездах, имеющих большую массу, спектральные линии по теории Эйнштейна должны быть смещены к красному концу спектра.

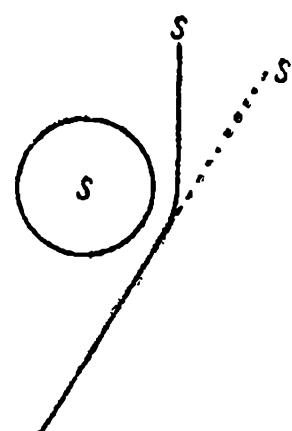


Рис. 171.

Почему? Потому что поле силы тяжести оказывает влияние на течение времени: время должно протекать медленнее, периоды колебания электронов будут больше, поэтому все линии смещаются к красному концу спектра. Необходимо, однако, заметить, что получить этот результат можно и совершенно иным путем. Обозначим энергию светового кванта

Радиальное перемещение

через $h\nu$. Если какое-либо тело массы m перемещается в поле силы тяжести Солнца и проходит расстояние R от Солнца до Земли, то потребная для этого работа будет $\frac{kmM}{R}$, где M — масса Солнца, а k — постоянная тяготения. Если этой движущейся массой будет световой квант и если необходимая для перемещения энергия черпается из энергии самого кванта, то убыль его энергии

$$-h d\nu = \frac{kmM}{R} \quad (a)$$

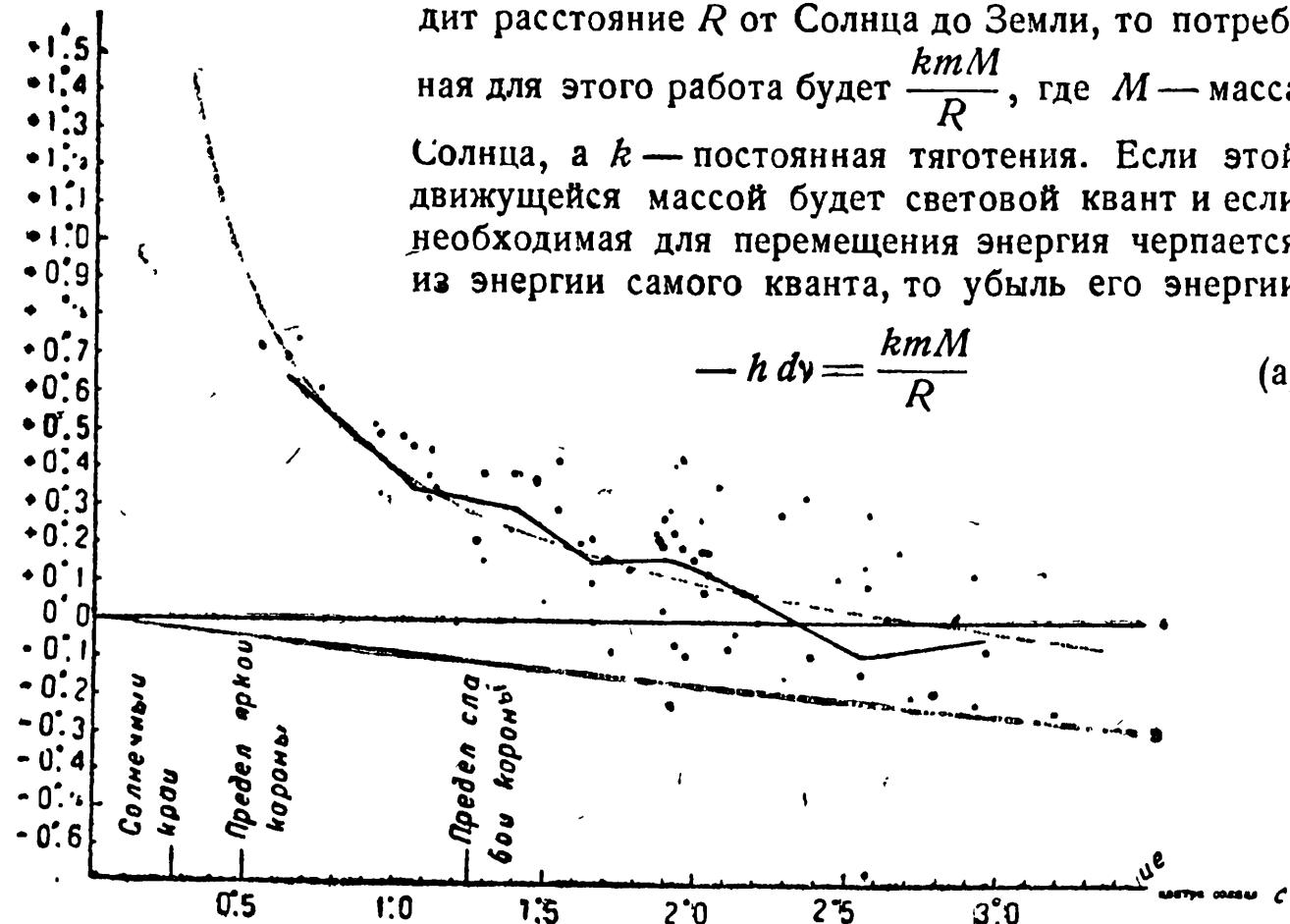


Рис. 172.

должна равняться работе силы тяжести. Так как для кванта мы имеем $h\nu = mc^2$, то, разделив (a) на это равенство, находим:

$$-\frac{d\nu}{\nu} = \frac{M \cdot k}{c^2 R}, \quad (b)$$

что совпадает с формулой Эйнштейна. И в этом случае много раз распространялись сенсационные слухи о блестящих подтверждениях формулы (b). Как и в первых двух случаях, обстоятельные критические исследования Крооза, Глазера, Юлиуса и у нас проф. В. Г. Фесенкова привели к выводу, что для Солнца и больших звезд эффект Эйнштейна не подтверждается. Более сложным является вопрос о спутнике Сириуса. Этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. До последнего времени Сириус считался двойной звездой: одна из них громадная, а другая очень слабая, которую можно рассматривать как спутника. Масса этого спутника известна, известен его спектр. Следовательно, по спектру известна яркость, т.е. количество лучистой энергии, посыпаемой этой звездой на единицу ее поверхности. Зная же общее количество света, посылае-

мое этой звездой, т. е. зная звездную „величину“ и расстояние ее от нас, можно определить ее объем. И вот оказывается, что сравнительно громадная масса сосредоточена в малом объеме, т. е. данная звезда должна иметь сказочную плотность в 50 000. Это значит, что 1 см³ должен заключать в себе 50 кг. На поверхности земли такой куб. сантиметр весил бы немного больше трех пудов! Естественно, что при таких условиях сила тяжести на поверхности должна быть очень велика, а следовательно, должно быть большим и красное смещение. На некоторых из полученных Сен-Джоном фотографиях спектров этой звезды действительно было обнаружено смещение, соответствующее теории Эйнштейна. Однако необходимо указать, что на такой звезде должно быть сильное атмосферное давление, а при этих условиях спектральные линии должны также смещаться к красному концу. Для того чтобы получилось такое же смещение, какое требуется теорией относительности, достаточно давления в 75 atm, что вполне допустимо при указанных условиях. Для одного только водорода при этих условиях получилось бы значительно большее смещение, но ведь водород, дающий эти линии, по всем вероятиям, находится в более высоких слоях, где, конечно, давление меньше. Кроме того, астрофизики выдвигают еще одно возражение: „Здесь несколько подозрительным является то обстоятельство, что эти „аномальные“ звезды всегда оказываются спутниками других, более ярких, звезд и их спектр мало отличается от спектра главного тела. Невольно напрашивается предположение, что они в значительной мере светят просто отраженным светом. В этом случае отпадает необходимость приписывать этим звездам необычайно большую плотность, а следовательно, наблюдаемое смещение линий, установленное к тому же с некоторой натяжкой, отнюдь нельзя будет объяснить как эффект Эйнштейна“ (проф. В. Г. Фесенков, см. выше, стр. 214). Но самое важное то, что, согласно последним данным, Сириус не двойная звезда, а тройная. Если это верно, то все расчеты массы спутника и его колоссальной плотности отпадают. Вот каково фактическое положение дела. Однако все это тщательно замалчивается; в особенности тенденциозно составлена книжка проф. С. И. Вавилова „Экспериментальные основания теории относительности“.

Все предсказания у проф. Вавилова признаны оправдавшимися, а возражения — несущественными, и, что всего хуже, в качестве литературы указаны как раз те обзоры и критические статьи, в которых авторы приходят к прямо противоположным результатам. Так, например, к гл. VI, в которой доказывается „тяготение света“, указана литература, которая опровергает выводы Эйнштейна, как, например, Эскланьон, В. Г. Фесенков (цитированная нами статья) и Крооз, и ни одним словом не упоминается о том, что эти авторы приходят к диаметрально противоположным результатам, чем это говорится в тексте. То же самое имеет место и в других главах; поэтому, если читатель сам не ознакомится с приведенной в конце книги литературой, он получит совершенно превратное представление об экспериментальных исследованиях, связанных с теорией Эйнштейна.

Вообще вокруг теории относительности создалась совершенно особая атмосфера. Защищается она с необыкновенной страстью, а противники ее подвергаются всяkim нападкам, из чего ясно, что здесь речь

идет вовсе не о деталях какой-либо теории, а что здесь в этой области отражается классовая борьба, участники которой не отдают себе даже отчета в том, что они в ней участвуют. Вне всякого сомнения, за теорию ухватились все враги материализма, а против нее выступают, как правило, материалисты более или менее последовательные. Эта борьба облегчается тем, что теория Эйнштейна не связана ни с какими техническими вопросами, и поэтому всякие идеалистические извращения науки в этой области не отражаются на развитии техники. Словом, в этой области ученый может с полной свободой выполнять требуемую от него капиталистическим обществом обработку общественного мнения, не затрагивая при этом нормальной работы тех физиков, которые обслуживают промышленность и сельское хозяйство.

Часть VII.

Кинетическая теория материи и связь между обратимыми и необратимыми процессами.

(Дополнительные главы.)

Глава I.

Кинетическая теория материи.

§ 1. Основные законы газового состояния.

Хотя кинетическая теория материи составляет предмет, требующий специального курса, как это уже вошло в обиход наших университетов, однако наш курс был бы неполным, если бы мы не затронули некоторых основных вопросов, взятых из этой области. Прежде всего, мы не могли бы себе уяснить как следует связи между механикой и теорией тепла. В соответствующей главе (ч. V, гл. IV) мы могли только отчасти затронуть вопрос об этой связи, имеющей громадное методологическое значение. Кроме того, коснувшись этих вопросов необходимо уже потому, что в настоящее время многими физиками выдвигается странная мысль о том, будто статистическая закономерность, применяемая в кинетической теории, противоречит закону причинности. В предлагаемых вниманию читателей дополнительных главах мы коснемся почти исключительно тех вопросов, которые помогут нам разрешить основное противоречие между обратимыми механическими процессами и необратимыми тепловыми явлениями. Это противоречие даже для таких выдающихся умов, как Макс Планк, казалось настолько глубоким, что в своих лекциях по теоретической физике в 1910 г. Планк разделяет все физические явления на две, резко разграниченные группы: процессы обратимые и процессы необратимые. „И в самом деле, — пишет М. Планк, — у всех обратимых процессов, протекают ли они в материи или в эфире или и в том и другом вместе, больше сходства между собой, чем у обратимого процесса с каким угодно необратимым. Это вытекает уже из формального рассмотрения дифференциальных уравнений, которые изображают самые процессы. В дифференциальных уравнениях, изображающих обратимые процессы, дифференциал времени входит только в четной степени, почему знак его может быть изменен на обратный“. Эти слова появились в печати в 1910 г., а в 1913 г. была опубликована работа Смолуховского, в которой одна и та же формула изображает и обратимый процесс и его полярную противоположность — процесс необратимый. Наша задача будет состоять в том, чтобы изложить эти замечательные работы Смолуховского, сообщив предварительно те сведения из кинетической теории, которые необходимы для понимания этих работ

Рассмотрим сначала общие законы газового состояния с точки зрения кинетической теории.

Предположим, что в объеме V находится газ. С точки зрения кинетической теории молекулы этого газа находятся в состоянии непрерывного движения: они движутся по всем направлениям, сталкиваются как друг с другом, так и со стенками сосуда. В этом хаотическом движении мы не имеем каких-либо определенных направлений, и поэтому на каждый элемент $d\sigma$ площади поверхности, ограничивающей V , падает в единицу времени „в среднем“ одно и то же число частиц. Это есть одно из основных положений кинетической теории, носящее название предположения о „молекулярном хаосе“. Об этом предположении существует огромная литература. Но все авторы, в том числе и те, которые утверждают, что это положение строго не может быть доказано, соглашаются, что, применяя это положение на практике, мы приходим к правильным результатам. Пусть в каждой единице объема „в среднем“ будет ν частиц. Эти частицы будут иметь самые разнообразные скорости и слагающие эти скорости параллельные оси координат x, y, z .

Пусть среди этих ν частиц:

$$\begin{array}{lll} \nu_1 & \text{будут иметь скорость } c_1 & \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \\ \nu_2 & " & \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \\ \nu_3 & " & \xi_3, \eta_3, \zeta_3 \end{array}$$

и т. д., причем, понятно, $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots$. Назовем эти молекулы молекулами „первой группы“, „второй“ и т. д. Выберем на поверхности, ограничивающей объем V , элемент $d\sigma$ (рис. 173), перпендикулярный оси x , и подсчитаем число молекул первой группы, падающих на $d\sigma$ за время dt . Ясно, что эти молекулы должны находиться в объеме цилиндра с основанием $d\sigma$ и образующей $c_1 dt$. Мы можем выбрать dt настолько малым, чтобы на протяжении $c_1 dt$ молекулы первой группы ни с какими молекулами вообще не сталкивались. Объем цилиндра будет $d\sigma \xi_1 dt$, а так как в единице объема ν_1 частиц „первой группы“, то число ударов о стенку будет $\nu_1 d\sigma \xi_1 dt$.

Далее, пусть при каждом ударе нормальная к стенке слагающая скорость меняется на противоположную, так же как и при ударе упругого шара о бесконечную упругую стенку.

Тогда количество движения молекулы изменяется при ударе о стенку на следующую величину: $-m\xi_1 - (+m\xi_1) = -2m\xi_1$. По III аксиоме Ньютона импульс, сообщаемый стенке, будет $+2m\xi_1$. Общий импульс для частиц первой группы равен: $d\sigma dt 2m\nu_1 \xi_1^2$, импульс, сообщаемый всеми молекулами в единицу времени, или сила, приложенная к $d\sigma$, выразится:

$$P = 2 \sum \nu_i m \xi_i^2 d\sigma,$$

или, вводя давление:

$$p = 2 \sum m \nu_i \xi_i^2. \quad (1)$$

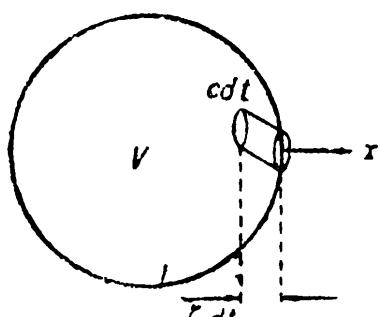


Рис. 173.

При этом расчете необходимо иметь в виду, что мы предполагаем состояние газа стационарным, т. е. предполагаем, что число ударов первой, второй и какой угодно, вообще, группы остается одинаковым, в какой бы момент времени мы ни выбрали элемент времени dt . Совершенно ясно, что при подсчете (1) надо считать только те молекулы, которые летят к стенке. Так как в газе не существует каких-либо преобладающих направлений, то в каждом из объемов $d\sigma \xi_i \cdot dt$ будет одинаковое число молекул как летящих к стенке, так и летящих от стенки. Поэтому, распространяя сумму в (1) на все группы, мы должны разделить на 2. Итак,

$$p = \sum m v_i \xi_i^2. \quad (1')$$

По самому определению среднего значения имеем:

$$\bar{\xi}^2 = \frac{v_1 \xi_1^2 + v_2 \xi_2^2 + \dots}{v_1 + v_2 + \dots} = \frac{\sum_i v_i \xi_i^2}{v},$$

откуда

$$p = v m \bar{\xi}^2. \quad (2)$$

Вычисляя средние величины, находим:

$$\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = \bar{c}^2, \quad (3)$$

и так как не существует преобладающих направлений движения, то

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\eta}^2 = \bar{\zeta}^2,$$

и следовательно,

$$\bar{\xi}^2 = \frac{1}{3} \bar{c}^2.$$

Поэтому

$$p = \frac{v m \bar{c}^2}{3}, \quad (4)$$

или

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{v m \bar{c}^2}{2}. \quad (4')$$

Таким образом давление газа численно равно двум третям кинетической энергии поступательного движения молекул, заключенных в единице объема. Если объем газа равен V , то, умножив (4) на V и заметив, что $Vn = n$ — числу молекул в объеме V , мы находим:

$$pV = \frac{1}{3} n m \bar{c}^2,$$

откуда вытекает, что если кинетическая (средняя) энергия остается неизменной, то произведение из объема газа на соответствующее давление есть величина постоянная. Чтобы получить из (4') обычное выражение закона Бойля-Мариотта-Гей-Люссака, необходимо предположить, что температура пропорциональна средней кинетической энергии молекул, — это одно из основных положений кинетической теории. Итак, полагаем:

$$pV = \frac{1}{3} n m \bar{c}^2 = RT, \quad (4'')$$

ГДС

$$mc^2 = \frac{3RT}{n}. \quad (5)$$

Пусть при одной и той же температуре и давлении мы имеем два газа, взятых в объеме одной граммолекулы. Тогда:

$$pV_1 = \frac{1}{3} N_1 m_1 c_1^{-2}$$

11

$$pV_2 = \frac{1}{3} N_2 m_2 \bar{c}_2^2. \quad (6)$$

Так как объемы всех граммолекул при данных условиях одинаковые, т. е. $V_1 = V_2$, и так как число молекул (в граммолекуле) не зависит от качества газа, следовательно, $N_1 = N_2$, то на основании (6) мы приходим к очень важному выводу:

$$m_1 \bar{c}_1^2 = m_3 \bar{c}_2^2. \quad (7)$$

Это значит, что при одной и той же температуре средняя кинетическая энергия молекул газа не зависит от массы молекулы.

Заменяя в уравнении (4) \bar{u}^2 через плотность ρ , мы получаем уравнение, позволяющее вычислить среднюю квадратичную скорость молекул любого газа. В самом деле, в выражении $\rho = \frac{1}{3} \rho \bar{c}^2$ нам все известно, кроме \bar{c}^2 . В табл. I приведены значения скоростей для различных газов:

Таблица I.

Приведенные нами рассуждения далеко не новы: в основном мы их находим у Даниила Бернулли и М. В. Ломоносова в половине XVIII в. Более чем в течение полутораста лет никому и в голову не приходило считать, что эти исследования, основанные на статистических расчетах, подрывают закон причинности. А между тем в настоящее время Шрёдингер и особенно Мизес указывают на то, что всякое применение статистики есть доказательство банкротства закона причинности. В чем здесь дело? Совершенно ясно, что, не имея возможности наблюдать за отдельными молекулами, мы не можем проследить и выразить математически движения каждой из них. Однако необходимо ли это нам? Как

мы только что видели, мы можем получить основные законы газового состояния, не вдаваясь в вопрос о том, как движется каждая отдельная молекула и даже как распределяются скорости между молекулами. Мы ведь совершенно произвольно разбили все молекулы на группы v_1 , v_2 и т. д. и совершенно не касались закона этого распределения. Таким образом, рассматривая свойства совокупности молекул, мы можем получить вполне определенные результаты, не касаясь совершенно частных вопросов о том, как движется каждая отдельная молекула. В самом деле, если бы молекула, скажем, молекула № 1, оказалась немного правее или левее, чем она на самом деле была, то ее движение могло самым резким образом измениться: она полетела бы, может быть, к другой стенке, но так как она не столкнулась бы с теми молекулами, с которыми она на самом деле столкнулась, то и движение этих последних изменилось бы, но в общем итоге получилось бы то же самое, т. е., в среднем, на каждый кв. сантиметр оболочки попадет то же число молекул: мы будем наблюдать то же самое давление, ту же температуру. Более того, если бы мы даже и могли следить за каждой молекулой и легко вычислять пути, по которым она движется, то никто не стал бы заниматься этим вычислением, раз в конечном результате мы получим буквально то же самое, что получается с помощью статистического расчета. А кроме того, для выяснения среднего значения давления нам все равно придется производить статистический подсчет, если бы даже мы и могли с легкостью подсчитывать действительные движения молекул, отправляясь от любых начальных состояний. Но, спрашивается разве чем-нибудь нарушается закон причинности от того, что для того или другого общего расчета нам не надо распутывать сложные цепи причин и следствий, выражавших действительное движение действительной молекулы?

Утверждение Мизеса основывается на том, что раз для вычисления давления не надо распутывать причинные ряды, обусловливающие движение каждой отдельной молекулы, значит, их вообще не существует.

Не менее странный аргумент был выдвинут Шрёдингером — одним из основателей волновой механики. Он выдвинул следующие соображения: общий закон (4) обоснован как будто на законе причинности, но возможно, что для отдельных молекул закон причинности не имеет значения, хотя „в среднем“ закон причинности всегда выполняется. Хотя эти „замечательные“ мысли были высказаны в 1927 г., — экспериментальная физика в 1912 и 1922 гг. дала уже на это исчерпывающий ответ. Так, Блаккет в 1922 г. показал, что закон сохранения количества движения приложим к процессам, наблюдаемым при разбивании отдельных атомов азота α -частицей. Точно так же еще в 1912 г. Милликан показал, как можно измерять энергию отдельной молекулы-иона чисто экспериментальным путем. Рассмотрим вкратце, в чем заключались эти опыты.

Мы уже в ч. I, гл. II рассмотрели опыты Милликана с определением заряда капли, движущейся в конденсаторе. Милликан обратил внимание, что в каждую каплю может попасть только вполне определенное число n одноименных зарядов. При каких же условиях может войти n -й заряд при наличии уже $n-1$ зарядов e в капле? Если радиус капли обозначим через a , то, по теории потенциала, работа, которую необходимо

для этого затратить, будет равна $A = \frac{(n-1)e}{a}$. Работа эта может произойти только за счет кинетической энергии $\frac{mc^2}{2}$ молекулы. Итак,

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{(n-1)e}{a}. \quad (8)$$

Из сравнительно небольшого числа опытов Милликан получил для $\frac{mc^2}{2} = 5,47 \cdot 10^{-14}$ эрг, тогда как из (4), на основании определений числа u ,

мы получаем $\frac{mc^2}{2} = (5,621 \pm 0,006) \cdot 10^{-14}$ эрг. Ясно, что в отдельных

опытах могут оказаться „индивидуальные“ отличия энергий отдельных молекул, и для более точного совпадения пришлось бы промерить большее число случаев, но, во всяком случае, не подлежит сомнению, что вопреки мнению Шредингера причинные законы природы приложимы и к отдельным молекулам.

§ 2. Закон распределения скоростей Максвелля.

Мы приведем самое простое доказательство закона распределения скоростей Максвелля, именно то, которое было дано самим Максвеллем в 60-х годах XIX в. Этот вывод отличается большой простотой, хотя против него было выдвинуто немало возражений. В следующей главе, устанавливая более глубокую связь максвеллевского распределения с теорией вероятностей, мы дадим другое, более строгое доказательство.

Предположим, что в единице объема находится u частиц. Спрашивается, какая доля этого общего числа будет иметь слагающую скорости по оси X , лежащую в пределах

$$\text{от } \xi \text{ до } \xi + d\xi? \quad (9)$$

Во-первых, эта доля (вероятность) из общего числа u должна быть пропорциональна интервалу $d\xi$ и, во-вторых, эта доля должна быть функцией $f(\xi)$. Очень большие значения ξ мало вероятны, и потому функция эта должна убывать по мере возрастания ξ . Итак, число частиц, удовлетворяющих условию (9), будет:

$$uf(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Так как все направления в газе одинаково вероятны, то вероятности того, что слагающая η будет лежать в пределах от η до $\eta + d\eta$ и ζ в пределах от ζ до $\zeta + d\zeta$, выражаются: $f(\eta) d\eta$ и $f(\zeta) d\zeta$. Так как значения слагающих предполагаются независимыми друг от друга, то число частиц, у которых все три слагающих лежат в указанных пределах, выражается¹:

$$uf(\xi) \cdot f(\eta) \cdot f(\zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (11)$$

¹ Здесь применяется так называемая теорема об умножении вероятностей. Пояснить ее можно на следующем примере. Пусть в первой урие n_1 черных и n_2 белых шаров, а во второй n_1' черных и n_2' белых. Как велика вероятность вы-

Возможность написать произведение (11) оспаривалась критиками. Действительно, для того чтобы написать это произведение, необходимо быть уверенным, что наличие слагающей ξ не налагает никаких условий на η и ζ ¹. Но так как все доказательства, в том числе и то, которое мы приведем в следующей главе, этого предположения не используют и в то же время дают тот же окончательный результат, то можно спокойно применять равенство (11).

Представим себе, что мы в некоторый момент $t=0$ поместили все ν молекул в начале координатной системы ξ , η и ζ . Где будут находиться через секунду молекулы, подсчитанные нами в (11)? Ясно, что они заполнят собой элемент объема $d\xi d\eta d\zeta$, определяемый координатами ξ , η и ζ . Но так как не существует преиущественных направлений в нашем газе, то „плотность“, с которой заполнен молекулами элемент $d\xi d\eta d\zeta$, не может зависеть от направления вектора c (ξ , η , ζ), а только от его абсолютной величины $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Итак, мы должны иметь:

$$\nu f(\xi) f(\eta) f(\zeta) = \nu \psi (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2). \quad (12)$$

Этому функциональному уравнению можно удовлетворить, положив $f(\xi) = A e^{k\xi^2}$ и $\psi = A^3 e^{k(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$.

Далее, так как при $\xi = \infty$ $f(\xi)$ должна стремиться к нулю, то можно написать: $k = -hm$, где m — масса молекулы, а h — положительная постоянная, смысл которой выяснится в дальнейшем. Подсчитаем теперь число частиц в единице объема, скорости которых лежат в пределах от c до $c + dc$. Построив сферу радиуса c , поверхность которой будет $4\pi c^2$, мы находим объем $4\pi c^2 dc$, в котором будут находиться молекулы, удовлетворяющие поставленным условиям, а умножив на „плотность“ $\nu A^3 e^{-hmc^2}$, мы находим искомое число:

$$dn_c = 4\pi A^3 \nu c^2 e^{-hmc^2} dc. \quad (13)$$

нуть белый шар из первой или из второй урны? Из первой урны можно вынуть любой из $n_1 + n_2$ шаров. Из этого числа n_1 белых. Следовательно, в n_1 случаях из $n_1 + n_2$ вообще возможных случаев получается желаемый результат. Вероятность определяется отношением $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$. Точно так же вероятность вынуть белый шар из второй урны будет $\frac{n_1'}{n_1' + n_2'}$. Теперь, спрашивается, как велика вероятность вынуть одновременно по белому шару из второй и из первой урны? Так как можно любой из $n_1 + n_2$ шаров вынуть одновременно с любым из $n_1' + n_2'$, то вообще возможны, следовательно, $(n_1 + n_2)(n_1' + n_2')$ комбинаций, благоприятных же будет $n_1 \cdot n_1'$. Итак, вероятность вынуть одновременно белый шар из обеих урн будет $\frac{n_1 n_1'}{(n_1 + n_2)(n_1' + n_2')} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_1'}{n_1' + n_2'}$, т. е. вероятность сложного события (вынуть белый шар и из первой и из второй урны) равняется произведению вероятностей отдельных событий, входящих в состав данного сложного.

¹ Это можно пояснить следующим примером. Пусть в урне n_1 черных и n_2 белых шаров; вероятность вынуть белый будет: $\frac{n_2}{n_1 + n_2}$. Предположим, что мы вынули белый шар и не положили его обратно, тогда вероятность следующей выемки будет уже другая, в зависимости от того, был ли вынут в первый раз белый шар или черный.

Постоянная A определяется следующим образом. Если мы проинтегрируем $\nu A e^{-hm\xi^2} \cdot d\xi$, распространив интеграл на все значения, лежащие от $-\infty$ до $+\infty$, то мы, следовательно, переберем все частицы в единице объема, поэтому значение интеграла будет равно ν . Итак:

$$\nu = \nu A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm\xi^2} d\xi = \nu A \sqrt{\frac{\pi}{hm}}^1.$$

И поэтому (13) принимает вид:

$$dn_c = 4\nu \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi}} c^2 e^{-hmc^2} \cdot dc. \quad (14)$$

Это и представляет собой выражение максвеллевского распределения скоростей. Выражение (14) достигнет наибольшего значения при

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{hm}}. \quad (15)$$

В самом деле, дифференцируем $y = c^2 e^{-hmc^2}$ по c и, приравнивая нулю, получаем:

$$\frac{dy}{dc} = 2ce^{-hmc^2} - 2hmc^3 e^{-hmc^2} = 0,$$

откуда единственное решение, соответствующее максимуму, будет как раз (15). Итак, c_1 есть наиболее вероятная скорость. Следовательно, постоянная h связана с наиболее вероятной скоростью.

Принимая эту, наиболее вероятную, скорость за единицу, мы из (14) получаем:

$$Y = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dn_c}{dc} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 c^2}. \quad (16)$$

Функция (16) изображена на рис. 174 графически. Максимум кривой находится для $c = c_1 = 1$, т. е для наиболее вероятной скорости. Подсчитаем теперь среднюю скорость и среднюю квадратичную²:

$$\bar{c} = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} 4\nu \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi}} e^{-hmc^2} \cdot c^3 dc = 4 \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi}} \cdot \frac{1}{2h^2 m^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi hm}}. \quad (17)$$

¹ Интеграл получается из хорошо известного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ заменой $x = \sqrt{hm\xi}$, откуда находим, что $A = \sqrt{\frac{hm}{\pi}}$.

² Интеграл в (17) вычисляется следующим образом: $\int_0^{\infty} e^{-ac^2} 2ac dc = 1$, или $\int_0^{\infty} e^{-ac^2} c dc = \frac{1}{2a}$. Дифференцируя полученное выражение по a , находим:

$$\int_0^{\infty} e^{-ac^2} c^3 dc = \frac{1}{2a^2}.$$

Средняя квадратичная получается аналогичным же способом¹:

$$\bar{c}^2 = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty 4\nu \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi}} e^{-hm^2 \cdot c^4} dc = 4 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{h^5 m^5}} \cdot \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi}} = \frac{3}{2hm}. \quad (18)$$

Так как $RT = \frac{1}{3} Nmc^2$ [(6)], где R — газовая постоянная, рассчитанная для граммолекулы, то

$$RT = \frac{1}{3} N \cdot mc^2 = \frac{1}{3} N \frac{3}{2h},$$

или

$$\frac{1}{2h} = \frac{R}{N} T. \quad (19)$$

Рассмотрим еще, как выразится число молекул, пролетающих в единицу времени через 1 см^2 в газе в одну определенную сторону. Это число n_1 , согласно сказанному, должно равняться:

$$n_1 = \nu \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi^3}} \int_0^\infty \xi e^{-hm\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm\xi^2} d\xi = \\ = \nu \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi^3}} \cdot \frac{1}{2hm} \cdot \frac{\pi}{hm} = \frac{\nu C}{2\sqrt{\pi hm}}. \quad (20)$$

Обозначая среднюю квадратичную через $C = \sqrt{c^2} = \frac{3}{2hm}$ и вставляя в (20), мы находим:

$$n_1 = \nu \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} C = \frac{\nu C}{\sqrt{6\pi}}. \quad (21)$$

Это выражение нам понадобится при изложении одного из вычислений Смолуховского.

¹ Интеграл в (18) получается из интеграла

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}}$$

двукратным дифференцированием по a . Находим:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot x^4 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a^{-\frac{5}{2}}.$$

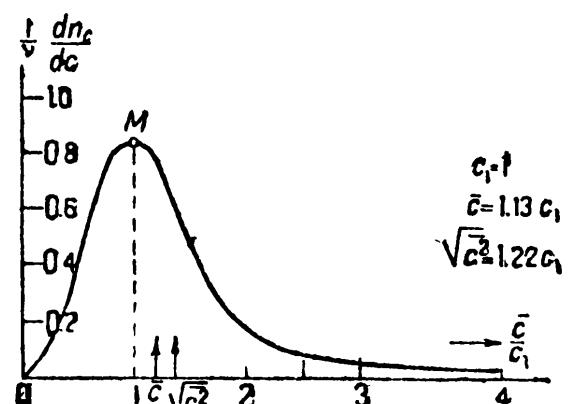


Рис. 174.

Глава II.

Наиболее вероятное распределение молекул и отступления от этого распределения. Максвеллевское распределение скоростей как наиболее вероятное. Энтропия и вероятность.

§ 1. Наиболее вероятное распределение молекул в данном объеме.

В 1904 г. М. Смолуховский поставил задачу, аналогичную задаче, решенной Максвеллем, именно: вопрос о наиболее вероятном распределении молекул газа внутри данного сосуда. Решение этой задачи, предложенное Смолуховским, послужило толчком для целого ряда интереснейших исследований, подтвердивших воочию основные положения кинетической теории. Для нас в настоящее время это исследование важно еще в том отношении, что оно подводит нас к другому, более глубокому доказательству закона распределения скоростей Максвелля.

Представим себе, что N молекул газа заключены в объеме V . Выделим из всего объема V малую часть v . На основании предположения о „молекулярном хаосе“ мы утверждаем, что, в среднем, на единицу объема придется $\frac{N}{V}$ частиц, а в объеме v их будет:

$$\gamma = \frac{N}{V} \cdot v. \quad (22)$$

Но ясно, что это будет только средняя величина, а в каждый данный момент могут наблюдаться отступления от этого числа. Если речь идет об общем давлении газа, то эти отступления не играют никакой роли: давление при данной температуре определяется средним числом γ для данного объема v .

Таким образом это среднее число, а не отступления от него, является основой искомой нами закономерности, отступления же по отношению именно к этой закономерности являются несущественными — „случайными“. Наоборот, если мы можем подсчитывать число частиц в объеме v (подсчитывать молекулы мы не можем, но взвешенные в какой-либо жидкости или газе частицы эмульсии или дыма и пыли легко поддаются подсчету) и нам важно знать именно это число, то не столько среднее значение, сколько отступления от среднего, будут для нас основной искомой закономерностью. Таким образом понятие „случайного“ или несущественного — относительно. Одно и то же явление в одной связи может быть „случайным“ и оно же в другой связи оказывается необходимым.

Подсчитаем вероятность того, что в объеме v будет не v [(22)], а n частиц, а все остальные находятся в объеме $V - v$. Для каждой частицы вероятность попасть в объем v выразится отношением $\frac{v}{V}$. Вероятность, что и вторая частица попадет в тот же объем v , выразится той же величиной, если объем находящейся там молекулы очень мал по сравнению с объемом v . Вероятность, что n данных частиц попадут в v и $N - n$ в $V - v$, выразится (часть VII, гл. I, § 2) произведением вероятностей для отдельных составных частей этого сложного

события. Итак, мы получим выражение вероятности того, что n определенных молекул попали в объем v , и все остальные в $V - v$, в следующем виде:

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \quad (23)$$

Но нам не важно знать, какие именно n молекул попали в объем v , — нам важно число их. Ясно, что осуществить такое распределение, при котором любые n молекул попадают в v , а остальные $N-n$ в $V-v$, можно несколькими способами, именно числом $P = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

Что это именно число выражает число возможных комбинаций, вытекает из следующих соображений. Пусть это число равно P ; любое из распределений P состоит из двух групп по n и $N-n$ молекул, причем порядок, в котором расположены молекулы, безразличен. Если мы в каждом из распределений P переставим все молекулы в той и другой группе всеми возможными способами, то из каждого распределения получим $n!(N-n)!$, а из всех групп P их получится $P \cdot n!(N-n)!$. Но это число будет равно числу перестановок из всех N элементов, т. е. $N!$. Приравнивая $N! = P n!(N-n)!$, мы и получаем вышеприведенное число. Итак, вероятность, что в объеме v будут такие угодно n молекул из всего числа N , выразится:

$$W = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \quad (24)$$

Вставляя в это выражение (22), мы находим:

$$W = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{v}{N}\right)^n \left(\frac{N-v}{N}\right)^{N-n}. \quad (24')$$

Раскроем $N!$ и $(N-n)!$. Тогда (24') в раскрытом виде представится:

$$\begin{aligned} W &= \frac{v^n}{n!} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (N-n-1)(N-n)(N-n+1) \dots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (N-n) \cdot N^n} \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{v^n}{n!} \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \left(1 - \frac{n-2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{N-n}. \end{aligned} \quad (24'')$$

Если n мало по сравнению с N , то (24'') можно привести к виду:

$$\begin{aligned} W_n &\approx \frac{v^n}{n!} \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{N-n} = \frac{v^n}{n!} \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{-v} \left(\frac{N-n}{v}\right)^{\frac{N-n}{v}} = \\ &= \frac{v^n}{n!} \left[\left(1 - \frac{v}{N}\right)^{-\frac{N}{v}} \right]^{-v} = \frac{v^n}{n!} e^{-v}, \end{aligned}$$

так как n мало по сравнению с N . Итак,

$$W_n = \frac{v^n}{n!} e^{-v}. \quad (25)$$

Это выражение было выведено Смолуховским в 1904 г. и проверено на частицах эмульсии Сведбергом и его школой, а у нас проф. Б. В. Ильиным.

Рассмотрим теперь общий случай распределения молекул газа в объеме Ω . Разделим весь объем на n ячеек ω . Вероятность пребывания одной определенной молекулы в данной ячейке будет $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{n}$. Если в первой ячейке число молекул будет a_1 , во второй a_2 и т. д. до a_n , то вероятность, что какие-либо a_1 молекул находятся в первой ячейке, a_2 во второй и т. п., выразится аналогично (24) следующим образом:

$$W = \frac{N!}{a_1! a_2! \dots a_n!} n^{-N}. \quad (26)$$

Если N и a_1, a_2, \dots — величины большие, то можно воспользоваться приближенной формулой Стирлинга:

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e} \right)^N. \quad (27)$$

Прологарифмируем (26):

$$\log W = \log N! - \sum_1^n \log a_i! - N \log n. \quad (28)$$

Вставляя в (28) выражение (27), имеем:

$$\begin{aligned} \log W &= \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(N + \frac{1}{2} \right) \log N - N \log n - \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \log 2\pi + \right. \\ &\quad \left. + \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \log a_i - a_i \right\}. \end{aligned} \quad (28')$$

Далее, так как сумма $\sum a_i = N$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \log W &= \frac{1-n}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log N - N \log n + N \log N - \\ &\quad - \sum_1^n \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \log a_i. \end{aligned} \quad (28'')$$

Далее, так как

$$\sum_1^n \left(a_i + \frac{1}{2} \right) = N + \frac{n}{2},$$

мы находим:

$$\sum_1^n \log N \left(a_i + \frac{1}{2} \right) = N \log N + \frac{n}{2} \log N,$$

и аналогично выражение:

$$\sum_1^n \log n \left(a_i + \frac{1}{2} \right) = N \log n + \frac{n}{2} \log n.$$

Подставляя из двух последних уравнений $N \log N$ и $N \log n$ в (28''), мы находим:

$$\begin{aligned} \log W = & \frac{1-n}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log N + \frac{n}{2} \log n - \sum_1^n \log n \left(a_i + \frac{1}{2} \right) + \\ & + \sum_1^n \log N \left(a_i + \frac{1}{2} \right) - \frac{n}{2} \log N - \sum_1^n \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \log a_i, \end{aligned}$$

откуда после простого преобразования имеем:

$$\begin{aligned} \log W = & -\frac{n-1}{2} \log 2\pi - \frac{n-1}{2} \log N + \frac{n}{2} \log n - \\ & - \sum_1^n i \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \log \frac{na_i}{N}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вводя сокращенное обозначение

$$K_a = \frac{1}{N} \sum_1^n i \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \log \frac{na_i}{N} \quad (30)$$

и переходя от логарифмов к числам, мы находим:

$$W = n^{\frac{1}{2}n} (2\pi N)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-NK_a}. \quad (31)$$

Так как величины, характеризующие то или иное распределение, т. е. величины a_i , входят только в K_a , то для нахождения наиболее вероятного состояния надо искать minimum K_a . Мы будем предполагать, что величины a_i изменяются непрерывно, — это ведь по нашему предположению большие числа: в каждой ячейке ω заключается много молекул.

Для нахождения minimum'a K_a составляем вариацию:

$$\begin{aligned} \delta K_a = & \frac{1}{N} \sum_1^n \left\{ \log \frac{na_i}{N} + \left(a_i + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{a_i} \right\} \delta a_i = \\ = & \frac{1}{N} \sum_1^n i \left\{ \log \frac{na_i}{N} + 1 + \frac{1}{2a_i} \right\} \delta a_i = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

При этом надо иметь в виду, что

$$\sum_1^n i a_i = N, \quad (32')$$

и поэтому все δa_i должны удовлетворять условию $\sum \delta a_i = 0$.

Установившееся распределение должно характеризоваться тем, что при всех изменениях K_a должно оставаться постоянным; следовательно, $\delta K_a = 0$ при любых значениях δa_i , удовлетворяющих условию (33). Тре-

бование $\delta K_a = 0$ совместно с (33) может быть осуществлено при условии, что коэффициенты при δa_i в (32) одинаковы, т. е.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{N}{n}. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь, какие значения принимает K_a при значениях a_i , мало отличающихся от $\frac{N}{n}$.

Итак, положим:

$$a_1 = \frac{N}{n} + \alpha_1, \quad a_2 = \frac{N}{n} + \alpha_2, \quad \dots, \quad a_n = \frac{N}{n} + \alpha_n, \quad (34)$$

где все α_i малы по сравнению с $\frac{N}{n}$. Условие (32') приводит к условию:

$$\sum i \alpha_i = 0. \quad (35)$$

Вставляя величины (34) в выражение K_a , мы находим:

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{N} \sum_1^n \left(\frac{N}{n} + \alpha_i \right) \text{Log} \left(1 + \frac{n \alpha_i}{N} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum \left(1 + \frac{n \alpha_i}{N} \right) \text{Log} \left(1 + \frac{n \alpha_i}{N} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Разлагая логарифм в ряд:

$$\text{Log} \left(1 + \frac{n \alpha_i}{N} \right) = \alpha_i \frac{n}{N} - \frac{1}{2} \alpha_i^2 \left(\frac{n}{N} \right)^2 + \frac{1}{3} \alpha_i^3 \left(\frac{n}{N} \right)^3 \dots,$$

умножая этот ряд на $\left(1 + \frac{n \alpha_i}{N} \right)$ и помня, что $\sum \alpha_i = 0$, мы получаем из (36):

$$K_a = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n}{N} \right) \sum_1^n \alpha_i^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{n}{N} \right)^2 \sum_1^n \alpha_i^3 + \dots \right\}. \quad (36')$$

Мы видим, что в полученном разложении отношение каждого последующего члена к своему предыдущему будет порядка $\frac{n}{N} \alpha$, т. е. будет очень мало, пока α мало по сравнению с $\frac{N}{n}$. Знак K_a определяется при этих условиях первым членом. Таким образом при любых, очень малых значениях всех α_i , величина K_a будет положительной. При $\alpha_i = 0$, т. е. при равномерном распределении молекул по всем ячейкам, $K_a = 0$. Итак, при $K_a = 0$ мы имеем наиболее вероятное распределение. В том же случае, когда α_i приближаются к $\frac{N}{n}$, то все члены ряда будут порядка $\frac{N}{n}$,

и NK_a будет того же порядка, т. е., стало быть, NK_a будет величина большая, а потому e^{-NK_a} — очень малая. *Вот почему сколько-нибудь большие отклонения от равномерного распределения молекул по всему пространству, занятому газом, очень мало вероятны.*

§ 2. Максвеллевское распределение скоростей как наиболее вероятное.

Предположим, что кинетическая энергия всех N молекул равна E . Тогда наибольшая энергия, какая может выпасть на долю какой-либо

из слагающих, будет

$$\frac{m\xi_m^2}{2} = E,$$

или

$$\xi_m^2 = \frac{2E}{m} = l^2. \quad (37)$$

Такая величина может получиться, если мы для всех ξ , η и ζ , кроме одной ξ_m , положим значения, равные нулю, и сосредоточим всю энергию на одной слагающей. Следовательно, все ξ , η , ζ могут иметь любые значения в пределах $\pm l$. Построим куб объема $8l^3$ с плоскостями граней, параллельными осям координат, $\xi = \pm l$, $\eta = \pm l$ и $\zeta = \pm l$. В этом объеме должны уместиться все векторы, отложенные от начала координат и равные по величине и направлению скоростям данных N молекул. Разделяем весь объем $8l^3$ на n ячеек $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$ и подсчитаем вероятность такого распределения, при котором a_1 концов рассматриваемых векторов попадут в первую ячейку, a_2 — во вторую и т. д. Для величины вероятности мы получаем буквально то же выражение, как и в предыдущем примере:

$$W = \frac{N}{a_1! a_2! \dots a_n!} \cdot n^{-N} = n^{\frac{1}{2}n} (2\pi N)^{-\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-NK_a}, \quad (38)$$

где

$$K_a = \frac{1}{N} \sum_1^n a_i \log \frac{na_i}{n}. \quad (39)$$

Мы в выражении (39) откинули $\frac{1}{2}$ по сравнению с большими величинами a_i . Отыскивая теперь наиболее вероятное распределение, мы должны не только помнить, что

$$\sum a_i = N, \quad (40)$$

но и что энергия не должна превосходить величины E , т. е.

$$\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \dots + \epsilon_n a_n = E, \quad (41)$$

где ϵ_1 — энергия, соответствующая молекуле, находящейся в первой ячейке, ϵ_2 — во второй и т. д.

Варируя (39), мы замечаем, что при данных условиях необходимо должны быть соблюдены следующие равенства:

$$N \delta K_a = \sum_1^n \left(\log \frac{na_i}{N} + 1 \right) \delta a_i, \quad (42)$$

$$\sum_1^n \delta a_i = 0, \quad (43)$$

$$\sum_1^n \epsilon_i \delta a_i = 0. \quad (44)$$

Умножив (43) на k_1 , (44) на k_2 и сложив с (42), выбираем k_1 и k_2 так, чтобы коэффициенты при каких-либо двух δa_i обратились в нуль. Тогда остальные δa_i произвольны. Следовательно, поставленные условия будут удовлетворены, когда все коэффициенты при δa_i будут нулями. Таким образом поставленные условия приводят к n равенствам следующего вида:

$$\log \frac{na_i}{N} + 1 + k_1 + k_2 \epsilon_i = 0. \quad (45)$$

Обозначим теперь плотность (переменную), с которой точки, лежащие на концах векторов, изображающих скорости молекул, распределены в ячейках, через $Nf_i(\xi, \eta, \zeta)$, или, сокращенно, через Nf_i . Мы можем изобразить a_i как $a_i = Nf_i \cdot d\omega$, тогда $\frac{na_i}{N} = nf_i d\omega = f_i 8l^3$, так как всего ячеек n и объем каждой из них $d\omega$, весь же объем равен $8l^3$. Далее, положим $1 + k_1 = -\log A \cdot 8l^3$ и $k_2 = 2h$, тогда мы вместо (45) получим:

$$\log f_i \cdot 8l^3 = -2h\epsilon_i + \log A \cdot 8l^3. \quad (45')$$

Переходя от логарифмов к числам, находим:

$$f_i = Ae^{-2h\epsilon_i}, \quad (46)$$

или, вводя выражение кинетической энергии $\epsilon_i = \frac{m}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$, получаем:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-2h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \quad (47)$$

т. е. выражение закона Максвелля.

Так же точно, как и в предыдущей задаче, можно показать, что вероятность состояний, сколько-нибудь заметно отличающихся от наиболее вероятного, т. е. от (47), исчезающе малы. Отсюда вывод: если мы рассмотрим все возможные распределения скоростей при заданной общей энергии, то подавляющее число всех возможных комбинаций будет соответствовать закону Максвелля. Максвеллевское распределение

потому и является устойчивым и потому оно имеет место в подавляющем числе случаев, что оно наиболее вероятное из всех вообще возможных распределений.

§ 3. Связь со вторым принципом термодинамики.

Постольку, поскольку максвеллевское распределение скоростей есть наиболее вероятное, всякое отступление от этого распределения через очень короткий промежуток времени должно смениться максвеллевским. Таким образом мы как будто имеем дело с процессом, который всегда ведет нас к определенному конечному состоянию, между тем уравнения механики, которым подчиняются все движения молекул, их столкновения как друг с другом, так и со стенками сосуда, строго обратимы и не ведут ни к какому „конечному“ состоянию. На этой почве в конце XIX в. разгорелась ожесточенная полемика вокруг работ Больцмана, который разработал современные основы кинетической теории и доказал, что не только максвеллевское распределение скоростей есть наиболее вероятное распределение, но и выяснил статистический смысл II принципа термодинамики. Эта полемика характерна как столкновение ученых, мыслящих метафизически (выдающимся представителем этого течения является математик Цермело), и теми передовыми умами, к которым принадлежал Больцман, которые стихийно подходили к диалектическому методу.

Цермело указывал на непреодолимое противоречие между механикой и учением о тепловых явлениях. В самом деле, все механические процессы обратимы, тепловые явления необратимы; отсюда Цермело делает вывод: механическая теория тепла или кинетическая теория материи, опирающаяся на механику, совершенно непригодна для объяснения тепловых явлений. Вот что писал Цермело¹ в 1896 г.: „После всего вышеизложенного ясна необходимость или изменить принцип Карно-Клаузиуса (II принцип термодинамики — А. Т.), или сделать принципиальные изменения в его механическом истолковании, если только мы не придем, наконец, к заключению раз навсегда отказаться от последнего“ (разрядка наша, — А. Т.). Вопрос поставлен ясно: или, или...! Кроме того, предлагается отказаться от механической теории тепла, о которой Энгельс еще в 70-х годах XIX в. писал: „Рассматривание ее (теплоты — А. Т.) как формы движения, это — последний триумф физики“... („Диалектика природы“, стр. 19). Больцман в одной из своих популярных статей привел следующий пример, который заставит самого убежденного метафизика серьезно задуматься.

„Пусть в барабане, из которого при игре в лото вытягивают номера и в котором они перемешиваются, мы укладываем шары двух родов (белые и черные), и пусть они уложены в каком-либо порядке, например, белые вверху, черные внизу. Пусть теперь при помощи какой-либо машины барабан приводится в движение на какой угодно срок. Никто не будет сомневаться, что в процессе вращения мы имеем дело с чисто механическим процессом, и все-таки при этом шары будут все более

¹ Zermelo, Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie „Ann. d. Physik“, 57, S. 493, 1896.

и более перемешиваться, т. е. будет наблюдаться тенденция к определенному изменению их распределения: полное перемешивание¹. Таким образом в этом как будто чисто механическом процессе (а стало быть, обратимом) налицо элементы необратимости, т. е. в нем одновременно налицо полярные противоположности. В чем же суть дела? Суть заключается в том, что ни одна механическая задача не может быть решена только с помощью механики. Для полного решения нужно еще знать начальное положение каждой части механической системы и их начальные скорости. Если речь идет об отдельном теле, например, артиллерийском снаряде, то эти начальные данные нам известны, и мы о них не думаем. Мы знаем, куда мы ставим орудие, и знаем направление и величину начальной скорости снаряда. Но, когда речь идет о громадном скоплении молекул, эти начальные данные играют громадную роль. Так как молекул мы не видим, то эти начальные данные надо изучать статистически: таким образом, любой вывод кинетической теории не представляется выводом, вытекающим из одних только уравнений механики: при выводе мы всегда пользуемся еще и данными статистики, и вот именно это обстоятельство и определяет качественное своеобразие тепловых явлений и объясняет их необратимость. Это очень хорошо понимал Больцман. Вот, что он писал в своем ответе Цермело: „Уже Клаузинус, Максвелль и др. много раз указывали, что *законы теории газов имеют характер статистических истин*. Я очень часто и настолько ясно, насколько я мог, указывал, что *максвеллевский закон распределения скоростей между молекулами никоим образом не может быть доказан как предложение обычной механики только из уравнений движения* (подчеркнуто нами—А. Т.). Я указал, что можно доказать только то, что *распределение Максвелля имеет наибольшую вероятность, и при большом числе молекул все другие состояния, по сравнению с максвеллевским, настолько мало вероятны, что практически их можно не принимать в расчет*. Там же я указал, что второй закон с молекулярнотеоретической точки зрения есть закон теории вероятностей. Исследование Цермело („Об одном законе динамики и о механической теории тепла“) показывает, что мои работы не были поняты. Несмотря на это, я должен радоваться появлению исследования Цермело, как первому доказательству, что и в Германии на мои работы обращают внимание“ (Boltzmann, „Ann. d. Physik“, 47, S. 773, 1896). В этой же статье есть одно примечание, исключительно важное: „При этом, мне кажется, упускали из виду, что механические процессы определяются не только уравнениями механики, но и начальными условиями“. В этом, как мы видели, и заключается ключ для разъяснения противоречия между механикой и термодинамикой: термодинамика основывается не на одних только законах механики, но и на статистических законах распределения начальных условий (положений и скоростей молекул), которые и вносят с собой новое качество: необратимость, или „тенденцию“ к установившемуся состоянию.

Посмотрим теперь, как связывается II принцип термодинамики с теорией вероятностей.

¹ L Boltzmann, Populäre Schriften, Ein Wort der Mathematik an die Energetik, S. 133.

Вернемся к выражению (38), определяющему вероятность какого-либо распределения скоростей. Предположим, что (38) взято для единицы объема. Тогда N надо заменить через v . Так как множители, стоящие в (38) перед e^{-vK_a} , постоянны, то логарифмы вероятности можно представить:

$$\log W = -vK_a + \text{const},$$

где

$$vK_a = \sum_1^n a_i \log \frac{na_i}{v}. \quad (48)$$

Полагая, что ячейка равна $d\xi d\eta d\zeta = d\omega$, и производя те же замены, что и в (45), мы находим:

$$\begin{aligned} vK_a &= \int v f d\omega \log (8l^3 f) = \int v f \log f d\omega + \log 8l^3 \int f d\omega = \\ &= \int v f \log f d\omega + \text{const}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\log W = - \int v \log f \cdot f d\omega + \text{const}. \quad (48')$$

Займемся теперь вычислением

$$\int v f \log f \cdot f d\omega, \quad (49)$$

предполагая, что распределение у нас максвеллевское. Тогда:

$$v f = v \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi^3}} e^{-hmc^2}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \log W &= - \log v \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi^3}} \int v f d\omega + hm \int c^2 v f d\omega = \\ &= -v \left\{ \log v \cdot \sqrt{\frac{h^3 m^3}{\pi^3}} - \frac{3}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

так как $\bar{c}^2 = \frac{3}{2hm}$. Далее, из (19) находим:

$$\frac{1}{2hm} = \frac{R}{M} T. \quad (51)$$

Вставляя эти величины в (50), имеем:

$$\begin{aligned} \log W &= -v \left\{ \log v m \sqrt{\frac{M^3}{8m^2\pi^3 R^3 T^3}} - \frac{3}{2} \right\} = \\ &= -v \log \rho T^{-\frac{3}{2}} + \text{const}, \end{aligned} \quad (50')$$

где $vm = \rho$ — плотность нашего газа, а все постоянные соединены вместе. Нетрудно показать, что найденная нами величина только на величину числового множителя отличается от энтропии одноатомного газа. Если мы сообщаем единице объема одноатомного газа количество тепла dQ , то часть его пойдет на повышение кинетической энергии

$\frac{\rho}{2} \bar{dc^2}$, а часть на работу расширения $p dv = p\rho d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Итак, по I принципу термодинамики:

$$\delta Q = \frac{\rho}{2} \bar{dc^2} + p\rho d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (\text{a})$$

Далее, так как $\bar{c^2} = \frac{3RT}{M}$ и $p = \rho \frac{R}{M} T$, то (a) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho R}{M} dT - p \frac{d\rho}{\rho} = \frac{3}{2} \rho \frac{R}{M} dT - \frac{R}{M} \rho T \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \rho \frac{R}{M} \left(\frac{3}{2} dT - T \frac{d\rho}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (\text{a}')$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{T}$, мы находим дифференциал энтропии:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \rho \frac{R}{M} \left(\frac{3}{2} \frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} \right),$$

откуда

$$S = -\rho \frac{R}{M} \log \rho T - \frac{3}{2} + \text{const.} \quad (52)$$

Заменяя теперь ρ через vt и M через Nm (N — число молекул в граммолекуле), мы находим:

$$S = v \frac{R}{N} \log \rho T - \frac{3}{2} + \text{const.} \quad (52')$$

Сопоставляя (52') с (50'), мы находим замечательное соотношение, выведенное впервые Больцманом, именно:

$$S = \frac{R}{N} \log W + \text{const.} \quad (53)$$

Таким образом энтропия пропорциональна логарифму вероятности. Во всех естественных процессах мы должны ожидать, что изучаемые системы будут переходить ко все более и более вероятным состояниям; следовательно, вероятность будет расти, но, согласно (53), будет возрастать и энтропия. Итак, возрастание энтропии объясняется переходом системы ко все более и более вероятным состояниям. Найденная Больцманом связь позволяет взглянуть на II принцип термодинамики с совершенно иной точки зрения, чем это делалось в классической термодинамике. Коротко выражаясь, можно сказать, что закон сохранения энергии указывает нам то, что всегда бывает; II же принцип дает нам указания на то, что бывает в подавляющем большинстве случаев, но не безусловно всегда. Теоретически возможны отступления от наиболее вероятного состояния — они будут тем реже, чем эти отступления больше; однако, они не только возможны, но при достаточно продол-

жительных промежутках времени (в неизмеримое число раз превосходящих продолжительность человеческой жизни) они неизбежно должны наступить. Эта точка зрения, выдвинутая Больцманом, получила полное подтверждение в теоретических и экспериментальных работах по брауновскому движению уже после его смерти. Видимые глазу движения, тем более частые и быстрые, чем мельче частицы, обусловлены „случайными“ отступлениями в числе ударов молекул, окружающих данную частицу, т. е. вследствие перевеса в числе ударов с какой-либо определенной стороны, а это значит возникновение „стройного“ движения из „нестройного“. В самом деле, можно добиться, что весь препарат, в котором находятся брауновские частицы, принял во всех своих частях одинаковую температуру: в нем наступила „тепловая смерть“, и тем не менее, и в этом случае непрерывно возникают стройные, видимые глазу, движения частиц в обход II принципу в его классической формулировке. Обыкновенно на это возражают, что если все это верно, то и „палка может выстрелить“ или два, смешавшихся благодаря диффузии, газа на наших глазах сами собой могут разделиться. Такого рода возражения выдвигались Цермело — они, как это ясно мы увидим в следующей главе, основаны на нашей непривычке оценивать порядок величины той или иной вероятности. Посмотрим, как отвечал на подобные возражения Больцман. „Время, в течение которого можно было бы ожидать такое доступное наблюдению разделение (двух смешавшихся газов — A. T.), настолько, к нашему успокоению, велико, что исключена всякая возможность увидеть такое явление. Этот промежуток времени по величине того же порядка, как и тот, в течение которого можно было бы ожидать, по законам вероятности, что все дома в каком-либо большом городе загорятся в один и тот же день, и мы бы обманулись, если бы положили, что такая вероятность практически чем-нибудь отличается от невозможности“¹.

Однако для промежутков времени, значительно превосходящих время существования человечества на земном шаре, и мало вероятные события должны происходить. Применяя подобные рассуждения к вселенной, которая рассматривается как бесконечная система, Больцман приводит следующие соображения: „В сравнении с размерами этой системы ничтожна вся наша звездная система, а промежутки времени, измеряемые необозримыми эпохами — эонами, будут малы по сравнению с временем существования вселенной. В этой вселенной господствует поэтому везде тепловое равновесие и как его следствие — смерть. Но то там, то здесь в небольших областях, — небольших, говоря относительно, они будут порядка нашего звездного мира (мы их будем называть индивидуальными мирами), — окажутся значительные отступления от термического равновесия и притом в течение промежутков, коротких по сравнению с величиной эона.

Число таких частей вселенной, для которых вероятность состояния возрастает, одинаково с числом тех, для которых она убывает... Этот метод мне представляется единственным, позволяющим принять II prin-

¹ Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften, V. 1, Heft 4, L. Boltzmann u. I. Nabl, S. 521.

цип термодинамики, термическую смерть каждого индивидуального мира, не навязывая необратимости всей вселенной и не считая, что она от определенного начального состояния переходит к определенному конечному¹. Эти взгляды Больцмана даже и теперь тщательно замалчиваются, — о них даже не упоминают такие авторы, как Джинс и Эддингтон.

Глава III.

Теория брауновского движения и связь обратимых и необратимых процессов по Смолуховскому.

§ 1. Элементарная теория брауновских движений.

Изложенные нами взгляды Больцмана были развиты на основе теории брауновских движений последователем Больцмана польским физиком М. Смолуховским. Сначала несколько слов о том, как изучаются брауновские движения. Обычно с помощью микрометра отмечают перемещение какой-либо наблюдаемой в поле зрения микроскопа частицы в определенном направлении вдоль линейки микрометра за какой-либо

определенный промежуток времени t . Наблюдение повторяют много раз над той же частицей или над сходной с ней. Вообще с помощью центрифугирования отбирают такие частицы, радиусы которых приблизительно одинаковы. Очень часто для этих целей берут тонкую эмульсию гуммигута (желтая краска). Полученные смещения (за определенный промежуток времени t) x_1, x_2, x_3, \dots возводят в квадрат и определяют среднее значение \bar{x}^2 . Теория позволяет связать это среднее значение с промежутком времени t , радиусом частицы, числом Авогадро N и другими величинами, характеризующими особенности данной системы. Выводов

этого соотношения существует очень много; мы ограничимся наиболее простыми. Самый элементарный вывод был предложен Эйнштейном. Пусть взвешенные частицы, в среднем, проходят за время t путь x . Тогда через единицу площади сечения A_0B_0 (рис. 175) по законам диффузии должно пройти количество вещества, равное

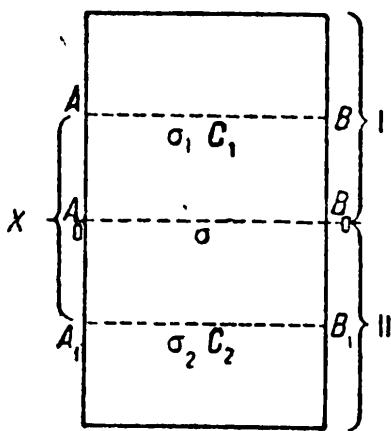


Рис. 175.

$$-D \frac{c_1 - c_2}{x} t \quad (54)$$

(ч. IV, гл. II), причем c_1 — концентрация в средней части AB слоя I толщиной x (ведь через A_0B_0 проходят за время t все частицы, отстоящие от A_0B_0 на расстоянии x). Величину (54) можно выразить иначе. В слое I находится взвешенного вещества $c_1 \sigma x$; половина этого вещества пойдет в сторону AB , половина — в противоположную. Итак, убыль вещества, рассчитанная на кв. сантиметр сечения σ , вызванная прохождением взвешен-

¹ L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, ч. II, гл. VI1.

ного вещества через σ , выразится через $-\frac{c_1 x}{2}$, но эта убыль будет отчасти пополнена количеством $+\frac{c_2 x}{2}$ вещества, пришедшем из слоя II. Итак, общая убыль будет:

$$-\frac{x}{2} (c_1 - c_2). \quad (54')$$

Но эти величины выражают тот же диффузионный поток (54). Отсюда, сравнивая (54) и (54'), получаем:

$$x^2 = 2Dt, \quad (55)$$

где D — коэффициент диффузии. По смыслу x является средним смещением, и таким образом, надо было бы написать:

$$\bar{x}^2 = 2Dt. \quad (55')$$

Это является основным соотношением в теории брауновского движения. Посмотрим теперь, как связан коэффициент диффузии D с величинами, характеризующими данную молекулярную систему. Мы воспользуемся для этой цели остроумным выводом Ланжевена. Предположим, что частица, совершающая брауновское движение, имеет шарообразную форму и что к ее движению приложим закон Стокса, т. е. что сила сопротивления при ее движении выражена следующим образом: $6\pi\mu a \frac{dx}{dt}$, где a — радиус частицы и μ — коэффициент трения среды, в которой данная частица взвешена. Тогда уравнение движения частицы можно написать в следующем виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dx}{dt} + X, \quad (56)$$

где X — равнодействующая всех молекулярных толчков, действующих на данную частицу, поскольку это действие не включено в силу сопротивления. Умножаем (56) на x . Левая часть тогда может быть представлена в следующем виде:

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Действительно, выполняя указанные операции, имеем:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(2x \frac{dx}{dt} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = mx \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Итак, (56), умноженное на x , принимает вид:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\mu x \frac{d}{dt} (x^2) + xX. \quad (57)$$

Напишем таких уравнений столько, сколько у нас частиц, сложим их

и разделим на число частиц, тогда под знаками $\frac{d^2}{dt^2}$ и т. д. у нас войдут средние значения \bar{x}^2 . Итак:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\bar{x}^2) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 3\pi\mu a \frac{d}{dt} (\bar{x}^2) = \bar{x}X = 0. \quad (57')$$

При составлении среднего значения у нас xX окажется равной нулю, так как x столько же раз будет иметь положительное направление, как и отрицательное. Далее, $m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ есть удвоенная кинетическая энергия частицы, находящейся в термическом равновесии с молекулами среды. На основании (7) § 1 эта энергия равна средней энергии молекулы. С другой стороны, для $\bar{mc^2}$, на основании (19), имеем: $\bar{mc^2} = 3 \frac{R}{N} T$, а для слагающей по какой-либо оси на основании (3): $\bar{m\xi^2} = \frac{RT}{N}$, поэтому и

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{RT}{N}.$$

Вводим теперь эти величины в (57') и заменяем

$$\frac{d}{dt} (\bar{X^2}) = z. \quad (58)$$

Уравнение (57') принимает вид:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{dz}{dt} + 3\pi\mu az = \frac{RT}{N}. \quad (59)$$

Такое уравнение мы уже интегрировали (ч. I, гл. II); решением его будет следующая функция:

$$z = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\mu a} + Ce^{-\frac{6\pi\mu at}{m}}, \quad (60)$$

где C — постоянная интеграции. По мере возрастания t (а мы всегда можем условиться брать достаточно большой промежуток времени) второй член быстро убывает. Итак, можно при этих условиях положить:

$$z = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} = \frac{d}{dt} \bar{x}^2. \quad (60')$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$\bar{x}^2 - \bar{x}_0^2 = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\mu a} t. \quad (61)$$

Полагая при $t = 0$ $x_0 = 0$, имеем:

$$\bar{x}^2 = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\mu a} t. \quad (62)$$

Сравнивая (62) с (55), мы находим следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{6\pi\mu a}. \quad (63)$$

Этот результат был проверен Сведбергом экспериментально. Если начальное положение каждой частицы будет x_0 , а конечное x , то (62) выразится:

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\mu a} t = 2Dt. \quad (62')$$

Подсчитаем теперь вероятность того, что частица, находясь при $t=0$ в x_0 , через время t будет где-нибудь между x и $x+dx$. Эту вероятность мы можем представить следующим образом:

$$W(x_0, x, t) dx = Be^{-a(x-x_0)^2} dx. \quad (63')$$

Вероятность, что смещение будет лежать в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, равносильна достоверности, поэтому¹:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} Be^{-a(x-x_0)^2} d(x-x_0) = B \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Итак,

$$B = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Подсчитаем среднее квадратичное отклонение:

$$\begin{aligned} \overline{(x - x_0)^2} &= 2Dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-a(x-x_0)^2} (x-x_0)^2 d(x-x_0) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi a}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

[примечание к (18) гл. I], откуда $a = \frac{1}{4Dt}$.

¹ Если мы спрашиваем, какова вероятность, что смещение частицы будет или x_1 , или x_2 или x_3 и т. д., то надо сложить вероятности смещения x_1 , x_2 , x_3 и т. д. Это вытекает из следующих элементарных соображений. Пусть в урне n_1 черных, n_2 белых и n_3 красных шаров. Какова вероятность вынуть белый или красный шар, но не черный? Искомая вероятность будет: $\frac{n_2 + n_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3} + \frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$, т. е. вероятность равна сумме вероятности вынуть белый плюс вероятность вынуть красный шар.

§ 2. Брауновская частица под действием „упругой“ силы.

Итак, вероятность смещения из положения x_0 за время t в область, лежащую между x и $x+dx$, выразится:

$$W(x_0, x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} dx. \quad (64)$$

Нетрудно показать простой подстановкой, что найденное решение удовлетворяет уравнению диффузии вида:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (65)$$

Почему это получается? А потому, что если мы возьмем большое число, скажем, N частиц, занимающих положение x_0 , то произведение NmW , где m — масса каждой частицы, даст нам количество вещества (из которого состоят частицы), которое, благодаря процессу диффузии, перейдет из x_0 в область, лежащую между x и $x+dx$. Ведь, в самом деле, перемещение брауновских частиц — это и есть процесс диффузии, только наблюдаемые частицы по размерам неизмеримо больше частиц той среды, в которой эти крупные частицы размещены. Рассмотрим теперь случай, когда на взвешенные частицы действует какая-либо постоянная сила P . Тогда, принимая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, мы получим, что скорость v может быть выражена $v = \gamma P$, а путь, пройденный за время t , будет: γPt . В данном случае вероятность перехода из x_0 в область от x до $x+dx$ за время t выразится:

$$W_1(x_0, x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0-\gamma Pt)^2}{4Dt}} dx. \quad (66)$$

Что это выражение соответствует поставленным условиям, вытекает из следующих соображений. Заменяя

$$x_0 + \gamma Pt = x',$$

мы приходим к прежнему выражению (64), откуда получаем и те же следствия:

$$\begin{aligned} \overline{x - x_0}' &= 0, \\ (\overline{x - x_0}')^2 &= 2Dt, \end{aligned}$$

а заменяя здесь x_0' через его выражение, мы находим:

$$\overline{(x - x_0)} = \gamma Pt \quad (67)$$

и

$$\overline{(x - x_0)^2} = 2Dt + \gamma^2 P^2 t^2, \quad (68)$$

ЧТО МЫ И ДОЛЖНЫ БЫЛИ ОЖИДАТЬ, ТАК КАК БЛАГОДАРЯ ДЕЙСТВИЮ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ДВИЖЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ТОЛЧКАМИ, НАКЛАДЫВАЕТСЯ СТРОЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛОЙ.

Нетрудно опять показать, что (66) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \gamma P \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (69)$$

Это уравнение есть уравнение диффузии при условии, что на растворенное или взвешенное вещество будет действовать постоянная сила, вызывающая в данных частицах постоянную скорость. Действительно, так как скорость равна γP , то в единицу времени через 1 см^2 будет передаваться вследствие наличия поля γP граммов вещества, а благодаря диффузии $-D \frac{\partial c}{\partial x}$ (знак минус потому, что диффузия идет в сторону убывающей концентрации). Рассматривая теперь количество вещества, проходящее через два квадратных сантиметра, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , мы находим:

$$\begin{aligned} -D \frac{\partial c}{\partial x} + \gamma P c - \left[\left(-D \frac{\partial c}{\partial x} + \gamma P c \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial c}{\partial x} + \gamma P c \right) dx \right] = \\ = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma P \frac{\partial c}{\partial x}, \end{aligned}$$

но ведь это выражение есть не что иное, как прирост концентрации за единицу времени в слое dx , рассчитанный на 1 см^2 поверхности, т. е. $\frac{dc}{dt}$, откуда и получаем уравнение вида (69). Точно так же непосредственной подстановкой можем убедиться, что уравнение (69) удовлетворяется выражением (66).

Теперь мы можем подойти к задаче, которую поставил себе Смолуховский в 1913 г.

Рассмотрим движение брауновской частицы, на которую действует сила, пропорциональная смещению этой частицы из ее положения равновесия. При этом пусть сила $P = -ax$, т. е. сила пропорциональна смещению из положения равновесия. На первый взгляд кажется, что этот случай фантастический. В самом деле, где мы можем найти случай, когда брауновская частица связана со своим положением равновесия упругой силой? Однако в настоящее время такие случаи реализованы на опыте. Если мы возьмем, например, кварцевую нить (очень тонкую) и подвесим ее в разреженном воздухе, то свободный конец ее будет совершать брауновские движения, а при отклонении нити на нее будет действовать слагающая сила тяжести, как в обыкновенном маятнике, и эта слагающая, как известно, пропорциональна смещению из положения равновесия. Таким образом, пример Смолуховского легко, как теперь оказывается, осуществим на опыте. Если мы вместо γP подставим $-\gamma ax = -\beta x$, то уравнение диффузии для этого случая получится вида:

$$D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial W}{\partial x} + \beta W = \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (70)$$

Однако Смолуховский решает не это уравнение: он находит для данного случая интегральное уравнение, которое он решает очень остроумным способом. Как мы увидим впоследствии, найденное им решение удовлетворяет только что полученному нами уравнению (70), в чем можно будет убедиться простой подстановкой.

Предположим, что промежуток времени t разбит на два: на Θ и $t - \Theta$. Предположим, далее, что за время Θ рассматриваемая частица сместилась из x_0 в область, лежащую в пределах от a до $a + da$, за время же $t - \Theta$ та же частица прошла путь от a или $a + da$ до области $x \dots x + dx$. Вероятность первого события будет $W(x_0, a, \Theta) dx$, вероятность второго — $W(a, x, t - \Theta) dx$. Вероятность перехода за время t из x_0 в область $x \dots x + dx$ выразится произведением этих вероятностей. Но ведь ясно, что предложенный нами процесс есть только одна из возможных гипотез.

Ко времени Θ наша частица могла находиться в любом месте как между x_0 и x , так и вне этих пределов; она должна была только ко времени t непременно оказаться где-нибудь между x и $x + dx$. Поэтому искомая вероятность $W(x_0, x, t) dx$ выразится как сумма (в данном случае, интеграл) вероятностей всех возможных гипотез, соответствующих любому промежуточному положению a , т. е. мы будем иметь следующее интегральное уравнение вида:

$$W(x_0, x, t) dx = \int_{a=-\infty}^{a=+\infty} W(x_0, a, \Theta) da \cdot W(a, x, t - \Theta) dx. \quad (71)$$

Смолуховский следующим образом решает это уравнение. Весь промежуток времени t он разделяет на очень большое число n малых промежутков τ , т. е. полагает $t = n\tau$. Тогда за время τ можно считать, что сила $-ax$ не изменится, и мы сможем тогда применить выражение (66), заменив только $\gamma P t$ через $-\gamma ax\tau = -\beta x\tau$. Применим, далее, уравнение (71) к следующему случаю. Пусть $\Theta = \tau$, $t - \Theta = \tau$ и, следовательно, $t = 2\tau$, тогда:

$$W(x_0, x, 2\tau) dx = \int_{a=-\infty}^{a=+\infty} \frac{1}{4\pi D\tau} \cdot e^{-\frac{(a - x_0 + x_0\beta\tau)^2}{4D\tau}} \cdot e^{-\frac{(x - a + a\beta\tau)^2}{4D\tau}} \cdot da \cdot dx. \quad (71')$$

Соединяя оба показателя вместе, произведя в них перегруппировку членов, мы получаем:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ax_0(1 - \beta\tau) + x_0^2(1 - \beta\tau)^2 + x^2 - 2xa(1 - \beta\tau) + a^2(1 - \beta\tau)^2 = \\ = a^2 [1 + (1 - \beta\tau)^2] - 2a(1 - \beta\tau)(x_0 + x) + x^2 + x_0^2(1 - \beta\tau)^2. \end{aligned}$$

* Для вывода (71') надо применить те же рассуждения, какие были применены при выводе (69), только вместо γP придется вставить $-\beta x$.

Дополняем два первых члена до полного квадрата, производя при этом и вычитание прибавленного члена, т. е. прибавляем и вычитаем по

$$\frac{(1-\beta\tau)^2(x_0+x)^2}{1+(1-\beta\tau)^2}.$$

После ряда упрощений мы получаем следующее выражение:

$$\left[a\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2} - \frac{(1-\beta\tau)(x+x_0)}{\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2}} \right]^2 + \frac{[x-x_0(1-\beta\tau)^2]^2}{1+(1-\beta\tau)^2}.$$

Таким образом в показателе мы имеем два члена: один зависит от a , другой не зависит. Так как интегрирование производится по a , то, разбивая показательную функцию на две, мы одну из них выносим из-под знака интеграла. Итак, после указанных преобразований (71') принимает вид:

$$W(x_0, x, 2\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{4D\tau}\frac{[x-x_0(1-\beta\tau)^2]^2}{1+(1-\beta\tau)^2}}}{2\pi\sqrt{D\tau}\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[a\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2} - \frac{(1-\beta\tau)(x+x_0)}{\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2}}\right]^2}}{2\sqrt{D\tau}} da \cdot \sqrt{1+(1-\beta\tau)^2},$$

и так как интеграл равен $\sqrt{\pi}$, то в результате мы получаем:

$$W(x_0, x, 2\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}} \frac{1}{\sqrt{1+(1-\beta\tau)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{4D\tau}\frac{[x-x_0(1-\beta\tau)^2]^2}{1+(1-\beta\tau)^2}} \quad (71'')$$

Самое важное в полученном результате — то, что $W(x_0, x, 2\tau)$ нигде не содержит множителя 2 при τ . Мы видели, что τ было нами выбрано настолько малым, что силу за время τ можно было считать постоянной. Так как 2 нигде не входит в качестве множителя при τ , то мы, следовательно, не выходим из рамок наших предположений.

Составляем теперь

$$W(x_0, x, 3\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_0, a, 2\tau) W(a, x, \tau) da,$$

что дает:

$$W(x_0, x, 3\tau) = \frac{1}{4\pi D\tau \sqrt{1+(1-\beta\tau)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4D\tau}\frac{[a-x_0(1-\beta\tau)^2]^2}{1+(1-\beta\tau)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{4D\tau}\frac{[x-a(1-\beta\tau)^2]^2}{1+(1-\beta\tau)^2}} da.$$

Вычисление этого интеграла располагается точно таким же образом, как и для рассмотренного уже случая $W_0(x_0, a, 2\tau)$. Сначала преобразуется выражение в показателе, причем члены, содержащие a , дополняются до полного квадрата, после чего выводится за знак интеграла

независящая от a часть. Интеграл же оказывается равным $\sqrt{\pi}$. Итак, для $W(x_0, x, 3t)$ находим:

$$W(x_0, x, 3t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \beta t)^2 + (1 - \beta t)^4}} e^{-\frac{1}{4D} \frac{[x - x_0(1 - \beta t)^3]^2}{1 + (1 - \beta t)^2 + (1 - \beta t)^4}}. \quad (71''')$$

Из полученного выражения и сравнения его с (71'') ясен закон со-ставления $W(x_0, x, nt)$. Действительно, для искомой нами величины находим:

$$W(x_0, x, nt) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \frac{e^{-\frac{1}{4D} \frac{[x - x_0(1 - \beta t)^n]^2}{1 + (1 - \beta t)^2 + (1 - \beta t)^4 + \dots + (1 - \beta t)^{2(n-1)}}}}{\sqrt{1 + (1 - \beta t)^2 + (1 - \beta t)^4 + \dots + (1 - \beta t)^{2(n-1)}}}. \quad (72)$$

Полученное выражение легко можно упростить, замечая, что ряд в знаменателе представляет собой геометрическую прогрессию. Следова-тельно, этот ряд можно изобразить в виде: $\frac{(1 - \beta t)^{2n} - 1}{(1 - \beta t)^2 - 1}$, или, замечая, что t — бесконечно малая величина и что, следовательно,

$$(1 - \beta t)^{2n} = (1 - \beta t)^{\frac{2n}{\beta t} \cdot \beta t} = (1 - \beta t)^{-\frac{1}{\beta t}(-2n\tau\beta)} = e^{-2\beta t},$$

так как $n\tau = t$, а также, что $(1 - \beta t)^2 - 1 \approx -2\beta t$, мы для найденной суммы членов геометрической прогрессии находим выражение: $\frac{e^{-2\beta t} - 1}{-2\beta t}$.

Далее, $(1 - \beta t)^n = e^{-\beta t}$. Поэтому в качестве окончательного резуль-тата мы находим замечательное выражение, выведенное М. Смолуховским:

$$W(x_0, x, t) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta}{2D} \frac{[x - x_0 e^{-\beta t}]^2}{1 - e^{-2\beta t}}}}{\sqrt{1 - e^{-2\beta t}}}. \quad (72')$$

Это выражение, как мы скоро увидим, тем замечательно, что оно одновременно изображает обратимые процессы и их полярную противоположность — процессы необратимые. Заметим еще, что найденное ре-шение удовлетворяет (70), как в том нетрудно убедиться, выполнив под-становку.

Рассмотрим сначала два предельных случая: t очень малого и t очень большого. В первом случае мы получаем:

$$W(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{1}{4D t} (x - x_0)^2}, \quad (64)$$

т. е. тот результат, из которого мы исходили, — иначе, случай браунов- ского движения в отсутствии силы. Здесь любопытно уже то, что из по-

лученного нами вновь (64) мы находим $\bar{x} - x_0 = 0$, т. е., каково бы ни было x_0 , т. е. как бы далеко от положения равновесия $x = 0$ мы ни находились (не забудем, что на частицу действует сила $-ax_0$), для малого t оба смещения как в сторону возрастающих x , так и убывающих одинаковы вероятны. За короткий промежуток времени сила, как бы велика она ни была, не окажет действия на частицу, а в силу обратимости уравнений механики движения в сторону $\pm x$ одинаково вероятны.

Рассмотрим теперь второй предельный случай очень большого t . Выражение (72') принимает тогда вид:

$$W(x_0, x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D}} e^{-\frac{\beta}{2D} x^2}. \quad (72'')$$

Это выражение интересно тем, что мы можем вычислить вероятность повторения какого угодно отступления x_0 от положения равновесия $x = 0$. В самом деле, если мы заменим в (72'') x через x_0 , то выражение

$$W(x_0, x_0, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D}} e^{-\frac{\beta}{2D} x_0^2} \quad (72''')$$

будет показывать, как велика вероятность, что через очень большой промежуток времени наша система будет вновь на x_0 отстоять от положения равновесия. Как бы x_0 велико ни было и как бы, следовательно, ни была мала вероятность (72'''), она все-таки не нуль! Здесь мы как нельзя лучше видим различие в толковании необратимых процессов с точки зрения классической термодинамики и с точки зрения кинетической теории. Здесь, можно сказать, лежит опровержение „теории“ „тепловой смерти“. С точки зрения классической термодинамики тело, находящееся под воздействием силы $P = -ax$ и начинающее движение (в сопротивляющейся среде) с большого отклонения x_0 , должно постепенно притти к положению равновесия $x = 0$. С точки же зрения молекулярно-кинетической возможно „самопроизвольное“ повторение этого отклонения в результате благоприятного стечения обстоятельств в виде более или менее длительного перевеса в толчках молекул окружающей среды в сторону от положения равновесия. Явление, которое с точки зрения классической термодинамики следовало бы рассматривать как „чудо“, оказывается строго причинно обусловленным с молекулярно-кинетической точки зрения.

Вычислим теперь средние значения \bar{x} и \bar{x}^2 . Для этой цели прежде всего введем сокращенные обозначения:

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta}{2D(1 - e^{-\beta t})}},$$

тогда искомые выражения примут следующий вид:

$$\overline{(x - x_0 e^{-\beta t})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e^{-\frac{\beta}{2} z^2} \cdot z dz, \quad (73)$$

где $\bar{x} = \bar{x} - x_0 e^{-\beta t}$. Интеграл правой части (73) равен нулю, и поэтому

$$\bar{x} = x_0 e^{-\beta t}. \quad (74)$$

Выражение для среднего значения квадрата x получается аналогичным же путем:

$$\begin{aligned} \overline{(x - x_0 e^{-\beta t})^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e^{-\delta z^2} \cdot z^2 dz = \frac{1}{\sqrt{\pi \delta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot t^2 dt = \frac{1}{2\delta^2} = \\ &= \frac{D}{\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \end{aligned} \quad (75)$$

(вычисление интеграла — см. ч. VII, гл. I, примечание к § 2). Полагая t очень малым, мы из (75) получаем:

$$\overline{(x - x_0)^2} = 2Dt,$$

т. е. хорошо известный результат для брауновского движения частиц в отсутствии силы. Это и понятно, так как за короткий промежуток времени сила не успеет оказать заметное действие. Раскрыв скобки в левой части (75) и принимая во внимание (74), мы получаем:

$$\bar{x}^2 = \frac{D}{\beta} (1 - e^{-2\beta t}) + x_0^2 e^{-2\beta t}. \quad (75')$$

Если мы будем брать большие промежутки времени, то \bar{x}^2 будет стремиться к пределу

$$\lim \bar{x}^2 = \xi^2 = \frac{D}{\beta}, \quad (76)$$

что представляет собой среднее отклонение. Таким образом мы видим, что, несмотря на то, что для частицы положение равновесия будет $x = 0$, среднее квадратичное смещение будет $\xi = \sqrt{\frac{D}{\beta}}$, т. е. система, вообще говоря, не будет находиться в равновесии. Далее, при малом t будет $\bar{x} = x_0$, т. е. отклонения и в ту и другую сторону одинаково вероятны в согласии с обратимостью уравнений механики. При больших же значениях x_0 и t мы имеем $\bar{x} = x_0 e^{-\beta t}$, т. е. необратимый переход к положению равновесия $x = 0$. Таким образом найденные закономерности являются одновременно закономерностями и для обратимых процессов и для их полярной противоположности — процессов необратимых.

Очень любопытный вывод получается для характера изменения энтропии. Как мы видели (гл. I, § 3), энтропия

$$S = k \log W + \text{const},$$

т. е. энтропия определяется вероятностью состояния. Подставим вместо W

величину (72''), имеющую место для рассматриваемого случая при больших значениях t . Мы получаем:

$$S = \text{const} - k \frac{\beta^2 x^2}{2D},$$

или, заменяя $\frac{D}{\beta}$ через ξ^2 :

$$S = \text{const} - \frac{k}{2} \left(\frac{x}{\xi} \right)^2. \quad (77)$$

Максимум энтропии будет для $x = 0$. Но, спрашивается, всегда ли будет энтропия расти? Если $x = x_0$, причем x_0 значительно больше среднего квадратичного отклонения ξ , то ясно, что x будет убывать и энтропия будет возрастать. Но если x близко к $x = 0$ и значительно меньше ξ , то система будет приближаться к состоянию $x = \xi$, и энтро-

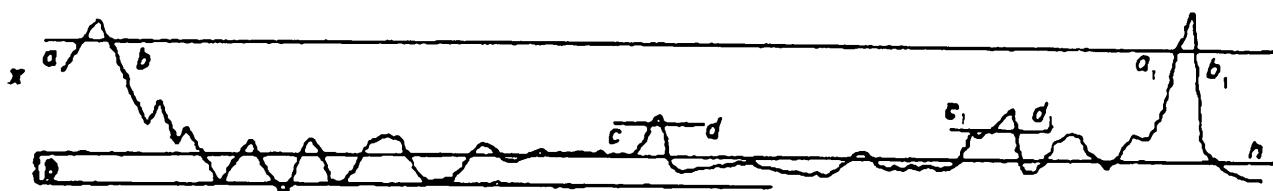


Рис. 176.

пия будет убывать! Далее, и сама необратимость, выраженная законом $x = x_0 e^{-\beta t}$, тоже относительна. Во-первых, для любого момента t в указанном процессе (72') оба направления для очень малых промежутков времени равно вероятны, и наконец, даже очень большие отступления x_0 , согласно (72''), хотя и мало вероятны, но возможны и при больших промежутках времени неизбежно должны повториться. Это как нельзя лучше подтверждает замечательную мысль Энгельса, выдвинутую им против метафизического толкования II принципа термодинамики, приводящего к „теории“ „тепловой смерти“: „Но здесь мы вынуждены либо обратиться к помощи творца, либо сделать тот вывод, что раскаленный сырой материал для солнечной системы нашего мирового острова возник естественным путем, путем превращений движения, которые присущи от природы движущейся материи и условия которых должны, следовательно, быть снова произведены материей, хотя бы после миллиона миллионов лет, более или менее случайным образом, но с необходимостью, присущей и случаю“ („Диалектика природы“, стр. 175).

То, что мы сейчас доказывали аналитическим путем, можно разъяснить на следующем чертеже. Если мы будем отмечать положения частицы на оси ординат, а на оси абсцисс отложим время (рис. 176), то в течение громадных периодов система будет колебаться около положения ξ , соответствующего наиболее вероятному отклонению из положения равновесия. Но от времени до времени будут замечаться отступления и тем реже, чем отступления больше. В чем выражается обратимость процессов? Для любого отступления, скажем x_0 (рис. 179), наша система одинаковое число раз пересечет значение x_0 как вверх, так и вниз; следовательно, оба направления одинаково вероятны. Далее, как бы ве-

лико ни было отклонение x_0 , через достаточный промежуток времени оно все-таки повторится. В чем же выражается необратимость? В том, что если мы находимся очень далеко от состояния равновесия в a или в b , то через достаточно большой промежуток времени мы должны спуститься к значению ξ , т. е. наиболее вероятному отклонению, причем вероятность этого перехода очень велика. Таким образом обратимость и необратимость — эти полярные противоположности — взаимно проникают друг в друга.

Глава IV.

Теория необратимых процессов.

§ 1. Подсчет времени возвращения отступлений от наиболее вероятного состояния.

Переходим теперь ко второй задаче, решенной М. Смолуховским, именно, к вопросу об определении промежутков времени, в течение которых можно ожидать повторения любого отклонения от наиболее вероятного состояния. Мы дадим сначала первое, довольно грубое, приближенное решение этой задачи, данное Смолуховским, и затем уже перейдем к более строгому решению, которое было дано Смолуховским в последние годы его жизни.

Обозначим время пребывания нашей системы в области x_0 и выше, т. е. промежутки времени ab и a_1b_1 (рис. 176), равными Δt , промежуток времени между ab и a_1b_1 — через T . Величина T будет показывать, через сколько времени повторится отклонение x_0 . Конечно, и Δt и T мы берем как средние. Вероятность состояния x_0 определится тогда как $\frac{\Delta t}{T}$. Но ведь эта же вероятность нам дана в виде (73''). Итак,

$$\frac{\Delta t}{T} = \sqrt{\frac{p}{2D}} e^{-\frac{3}{2D}x_0^2} \cdot \Delta x. \quad (78)$$

Связь между Δt и Δx мы находим из соотношения (74). Это и представляет собой наиболее уязвимое место всей аргументации. Из (74) получаем:

$$|\Delta x| = x_0 e^{-\beta t} \cdot \beta \Delta t.$$

Вставляя в это выражение $t = 0$, внося его в (78) и решая относительно T , мы находим:

$$T = \frac{1}{x_0 \beta} \sqrt{\frac{2D}{p}} e^{\frac{3}{2D}x_0^2}. \quad (79)$$

Для сколько-нибудь больших значений x_0 , T достигает громадных размеров.

Гораздо строгий вывод дан Смолуховским для другого процесса: именно, для подсчета колебаний числа брауновских частиц, наблюдаемых

в микроскопе в определенной части поля зрения. Мы уже видели, что вероятность появления n частиц в той части поля зрения, где их, в среднем, бывает ν , выражается следующим образом:

$$W_n = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \quad (25)$$

(ч. VII, гл. II). Наши вычисления должны быть приспособлены к тем условиям, в которых ведутся наблюдения. А наблюдения обычно делаются следующим образом: при помощи моментального затвора освещается выделенная часть поля зрения, и производится подсчет, затем идет интервал без наблюдения, потом вновь поле зрения освещается на время τ и т. д. Результаты измерения мы наносим на диаграмму (рис. 177). Положим, что нас интересует появление двух частиц. Из диаграммы

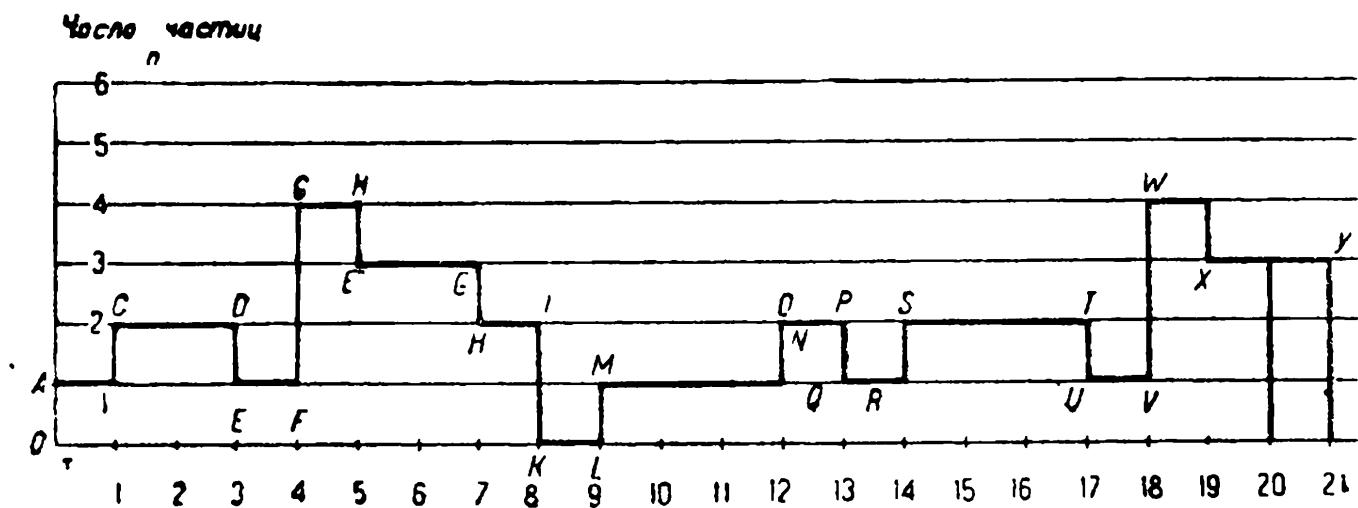


Рис. 177

(рис. 177) мы видим, что две частицы наблюдались в течение 2-го и 3-го интервалов τ (CD). Назовем это „двукратным появлением двух частиц“. HI и OP представляют „единичное появление двух частиц“, т. е. две частицы появляются в 8-м и 13-м интервалах, причем и до 8-го и 13-го и после 8-го и 13-го интервалов было какое-то другое число частиц. Наконец, ST соответствует „трехкратному“ появлению двух частиц. Точно так же PS есть „единичный“ перерыв между двумя появлениями двух частиц, IO — „четырехкратный промежуток“ между двумя последовательными появлениями двух частиц. Составим теперь следующую таблицу.

За большой промежуток времени $\Omega\tau$, где Ω — большое число:

N_1 раз наблюдается n частиц в течение интервала τ ,

N_2 раз наблюдается n частиц в течение интервала 2τ (N_2 двукратных появлений),

N_3 раз наблюдается n частиц в течение интервала 3τ (N_3 трехкратных появлений),

M_1 перерывов между двумя появлениями n частиц продолжительностью τ ,

M_2 перерывов между двумя появлениями n частиц продолжительностью 2τ ,

С помощью чисел, входящих в эту таблицу, мы можем определить следующие величины. Прежде всего вероятность появления n частиц выразится:

$$W_n = \frac{N_1\tau + N_22\tau + N_33\tau + \dots}{N_1\tau + N_22\tau + \dots + M_1\tau + M_22\tau + M_33\tau + \dots}.$$

В самом деле, вероятность в этом выражении дана как отношение продолжительности времени, в течение которого наблюдалось n частиц, ко всему времени, в течение которого вообще производились наблюдения. Иначе это же выражение можно представить так:

$$W_n = \frac{1}{1 + \frac{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}}. \quad (80)$$

Обозначая через T среднюю продолжительность пребывания в поле зрения n частиц, без труда находим:

$$T = \frac{N_1\tau + N_22\tau + N_33\tau + \dots}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots}. \quad (81)$$

В самом деле, в числителе дано общее количество времени, в течение которого наблюдалось n частиц, в знаменателе — общее число „появлений“ единичных, двукратных, трехкратных и т. д. Таким же образом определяем среднюю величину промежутка времени Θ_1 , отделяющую два последовательных появления n частиц. Назовем Θ_1 „средним временем возвращения“ n частиц.

Таким образом:

$$\Theta_1 = \frac{M_1\tau + M_22\tau + M_33\tau + \dots}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots} \quad (82)$$

Сравнивая (80) с (81) и (82) и замечая, что общее число появлений какого-либо числа n , т. е. $N_1 + N_2 + N_3 + \dots = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$, т. е. числу промежутков (как в любой гребенке число зубцов) равно числу промежутков), — мы можем представить (80) также и в следующем виде:

$$W_n = \frac{1}{1 + \frac{\Theta_1}{T}}. \quad (80')$$

Теперь подсчитаем еще величину вероятности того, что, увидя n частиц, мы и в следующий интервал τ опять увидим то же неизменное число n . Если мы увидели какое-либо из единичных появлений, то это в счет не пойдет, так как в следующий элемент времени τ уже не будет n частиц. Из двукратных появлений надо брать в расчет только первый интервал τ , так что в счет „благоприятных статочностей“ пойдет только $N_2\tau$ секунд. Из трехкратных появлений в счет пойдут только первый и второй интервалы, следовательно $2\tau N_3$ и т. д. Только в этих случаях при наличии n частиц в данный интервал их столько же останется и в сле-

дующий. Общая же продолжительность, в течение которой наблюдается n частиц, дана, как мы видели, выражением $N_1\tau + N_22\tau + N_33\tau + \dots$. Поэтому вероятность, что при наличии n частиц в следующий интервал τ это число не изменится (изменение равно 0):

$$P_n(0) = \frac{N_2\tau + N_32\tau + N_43\tau + \dots}{N_1\tau + N_22\tau + N_33\tau + \dots}. \quad (83)$$

Составим выражение

$$1 - P_n(0) = \frac{N_1\tau + N_2\tau + N_3\tau + \dots}{N_1\tau + N_22\tau + N_33\tau + \dots} = \frac{\tau}{T}. \quad (83')$$

Последнее преобразование в (83) осуществлено на основании (81). Решаем (80') относительно Θ_1 ; тогда:

$$\Theta_1 = \frac{T}{W_n} (1 - W_n). \quad (80'').$$

Заменяя теперь T через его выражение из (83'), тогда

$$\Theta_1 = \frac{\tau}{W_n} \cdot \frac{1 - W_n}{1 - P_n(0)}. \quad (84)$$

Так как W_n нам известно, то все дело сводится к вычислению $P_n(0)$. Мы вычислим более общее выражение $P_n(+k)$ и $P_n(-k)$, т. е. вероятность, что при наличии n частиц в рассматриваемый интервал в следующий интервал τ число частиц будет $n+k$ или $n-k$.

§ 2. Вычисление вспомогательных функций.

Представим себе тонкий слой толщины h (рис. 178), содержащий растворитель и взвешенные в нем частицы, число которых мы наблюдаем. Пусть линейные размеры выделенной поверхности S этого слоя, в которой производится подсчет, значительно больше h . Тогда можно считать, что частицы будут выходить из поля зрения только через верхнее и нижнее основания, так как число частиц, выходящих и входящих параллельно поверхностям S , исчезающе мало.

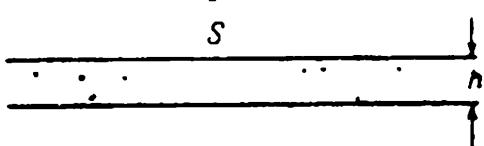


Рис. 178.

Обсудим теперь, как может произойти увеличение числа частиц на число k . Это можно осуществить несколькими способами. Во-первых, ни одна из имевшихся n частиц не выйдет из слоя, — пусть вероятность выхода 0 частиц будет A_0 ; тогда, чтобы удовлетворить поставленному условию, k частиц должно войти в данный слой. Пусть вероятность этого события будет E_k , вероятность всего сложного события будет A_0E_k , но это только одно из возможных предположений. Во-вторых, можно предположить, что одна из прежних частиц вышла, и $k+1$ вошли, тогда вероятность этого сложного события будет A_1E_{k+1} . Далее, прибавляя по одной выходящей и одной входящей, мы дойдем, наконец, до случая A_nE_{n+k} , т. е. до случая, когда все n прежних частиц

вышло и заменилось новыми $k+n$ частицами. Так как возможна каждая из этих комбинаций, то вероятность $P_n(+k)$ выразится суммой рассмотренных вероятностей, относящихся ко всем возможным предположениям:

$$P_n(+k) = A_0 E_k + A_1 E_{k+1} + A_2 E_{k+2} + \dots + A_n E_{k+n} = \sum_0^n A_i E_{i+k}. \quad (85)$$

Таким же точно путем составляем выражение для $P_n(-k)$:

$$P_n(-k) = A_k E_0 + A_{k+1} E_1 + A_{k+2} E_2 + \dots + A_n E_{n-k} = \sum_k^n A_i E_{i-k}. \quad (86)$$

Пусть вероятность выхода одной из частиц из рассматриваемого слоя будет равна P , тогда вероятность выхода определенных i частиц и невыхода определенных $n-i$ частиц выразится через $P^i(1-P)^{n-i}$, но так как нам важно знать, сколько частиц вошло и сколько осталось, а не какие именно вошли и остались, то осуществить требуемое событие можно, выбрав из n любые i , выведя их и оставив остальные в данном слое. Число возможных комбинаций будет:

$$\frac{n!}{i!(n-i)!};$$

вероятность каждой комбинации нами уже вычислена, поэтому вероятность того, что любые i частиц выйдут, а остальные $n-i$ останутся, выразится:

$$A_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} P^i (1-P)^{n-i}. \quad (87)$$

Рассмотрим сначала вероятность выхода какой-либо частицы за время t из слоя в какую-нибудь определенную сторону (см. рис 179). Если частица отстоит на расстоянии x , то, для того чтобы выйти, она должна пройти за время t любой отрезок, лежащий в пределах от x до ∞ , и вероятность выхода выразится суммой вероятностей передвижения на любое расстояние от x до ∞ , т. е. в данном случае интегралом

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \cdot dz. \quad (88)$$

Но, для того чтобы получить полную вероятность, необходимо полученное выражение помножить на $\frac{dx}{h}$, т. е. на величину вероятности того, что данная частица к моменту $t=0$ находится от одной из поверхностей на расстоянии x или $x+dx$. Следовательно, мы имеем:

$$\frac{dx}{2h\sqrt{\pi Dt}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \cdot dz. \quad (89)$$

Так как нам надо знать вероятность выхода частицы независимо от того, в каком месте слоя она находится и в какую сторону она движется, то нам надо проинтегрировать (89) от 0 до h и умножить на 2, так как мы до сих пор предполагали, что частица движется только в одну сторону. Итак, для искомой величины P мы находим:

$$P = \int_0^h \frac{dx}{h} \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4Dt} z^2}}{\sqrt{\pi Dt}} dz = \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}} \int_0^h F(x) dx, \quad (90)$$

где

$$F(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz. \quad (91)$$

Займемся преобразованием выражения P . Прежде всего интегрируем по частям (90):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}} \left\{ \left|_0^h F(x) \cdot x - \int_0^h x F'(x) dx \right\} = \\ &= \frac{1}{h\sqrt{4Dt}} \left\{ h \int_h^\infty e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz + \int_0^h x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}} \left\{ h \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz - h \int_0^h e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz + 2Dt \left|_0^h - e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (90')$$

Вводим во втором из интегралов (90') в качестве переменной $u = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$ и полагаем $\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = \beta$. Тогда (90') принимает вид:

$$P = \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}} \left\{ h\sqrt{Dt} \cdot \sqrt{\pi} - h2\sqrt{Dt} \int_0^\beta e^{-u^2} du + 2Dt \left(1 - e^{-\beta^2} \right) \right\},$$

или

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-u^2} du + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\beta^2} \right). \quad (90'')$$

Рассмотрим теперь два предельных случая: пусть t очень велико, тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} P = 1$, так как $\beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$ стремится к нулю, т. е. при неограниченном возрастании t данная частица, наверное, выйдет из слоя.

Если, наоборот, t очень мало, то β стремится к бесконечности, и

$$\lim_{t \rightarrow 0} P = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}. \quad (92)$$

§ 3. Выводы, касающиеся необратимых процессов.

Рассмотрим теперь следующее сложное событие: пусть в данном слое n частиц. Вероятность этого события равна W_n , и пусть из этого числа в следующий интервал времени t вышло i частиц, — вероятность сложного события будет:

$$W_n A_i = \frac{e^{-\nu} \cdot \nu^n}{n!} \cdot \frac{n!}{i! (n-i)!} P^i (1-P)^{n-i}. \quad (93)$$

Теперь подсчитаем, как велика вероятность выхода i частиц при условии, что n — какое угодно (конечно, n должно быть не меньше i). Обозначая эту вероятность через \bar{A}_i , мы имеем:

$$\bar{A}_i = \sum_{n=i}^{n=\infty} \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i} \cdot \frac{e^{-\nu} \cdot \nu^n}{n!}, \quad (94)$$

где $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! (n-i)!}$ обозначает биномиальный коэффициент. При вычислении коэффициентов замечаем, что первый член для $\binom{n}{i}$ даст $\binom{i}{i} = 1$, второй даст $\binom{i+1}{i}$, да еще от $\frac{1}{n!}$ останется $\frac{1}{i+1}$, следовательно, мы получим:

$$\frac{(i+1)!}{i! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{i+1} = \frac{1}{1!}.$$

Точно так же для третьего члена имеем:

$$\frac{1}{(i+1)(i+2)} \frac{(i+2)!}{i! \cdot 2!} = \frac{1}{2!},$$

откуда закон составления совершенно ясен. Итак, (94) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= \frac{e^{-\nu} \cdot \nu^i \cdot P^i}{i!} \left\{ 1 + \nu \frac{1-P}{1!} + \nu^2 \frac{(1-P)^2}{2!} + \nu^3 \frac{(1-P)^3}{3!} + \dots \right\} = \\ &= \frac{(\nu P)^i e^{-\nu P}}{i!}. \end{aligned} \quad (94')$$

Получается выражение, совершенно аналогичное W_n , с тою только разницей, что роль ν играет νP , а роль n играет i .

В дальнейшем мы можем через \bar{A}_i выражать E_i , так как совершенно ясно, что переход частиц слева направо ничем не отличается от перехода справа налево, но, с другой стороны, так как вне изучаемого слоя мы не знаем, сколько там в таком же слое находится частиц, мы должны сделать предположение, что там находится какое угодно число.

Итак, подставляя \bar{A}_i вместо E_i , мы находим для $P_n(+k)$ и для $P_n(-k)$ следующие выражения:

$$P_n(+k) = \sum_0^n A_i E_{i+k} = \sum_0^n \left(\frac{n}{i} \right) P^i (1-P)^{n-i} \frac{e^{-\nu P} \cdot (\nu P)^i + k}{(i+k)!}, \quad (85')$$

$$P_n(-k) = \sum_k^n A_i E_{i-k} = \sum_{k,i} \left(\frac{n}{i} \right) P^i (1-P)^{n-i} \frac{e^{-\nu P} \cdot (\nu P)^i - k}{(i-k)!}. \quad (86')$$

Отсюда же как частный случай мы находим:

$$P_n(0) = \sum_0^n \left(\frac{n}{i} \right) P^i (1-P)^{n-i} \frac{e^{-\nu P} \cdot (\nu P)^i}{i!}. \quad (95)$$

Принимая во внимание, что P — вычисленная нами в выражении (90'') довольно-таки сложная величина, может показаться, что данные в (85') и (86') ряды совершенно непригодны по своей сложности. Однако, как мы сейчас увидим, в частных случаях эти выражения сильно упрощаются. Так, например, в интересующем нас случае, когда промежутки времени малы, P очень мало [ср. (92)], а тогда от всей суммы (95) останется только один член. Таким образом в этом случае (т. е. при малом P) имеем:

$$P_n(0) = \left(\frac{n}{0} \right) (1-P)^n e^{-\nu P} \approx (1-nP)(1-\nu P) = 1 - (n+\nu) \cdot P.$$

Итак, при малом P для (84) мы находим:

$$\Theta_1 = \frac{\tau}{W_n} \cdot \frac{1 - W_n}{(n+\nu)P}, \quad (84')$$

где

$$P = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sqrt{t}. \quad (92')$$

Приведем теперь ряд чисел, полученных из наблюдений Сведберга. Наблюдения заключались в том, что через короткие промежутки времени небольшая выделенная часть поля зрения микроскопа освещалась с помощью моментального затвора и подсчитывалось число находившихся в поле зрения частиц. Определяя промежутки времени, отделяющие друг от друга моменты появления, скажем, 3 частиц, и определяя среднее значение, мы находим Θ_1 наблюд. и ту же величину вычисляем с помощью (84'). Это будет Θ_1 вычисл. В табл. II сопоставлены те и другие числа.

Таблица II.
(для $\nu = 1,53$).

n	Θ наблюд.	Θ вычисл.
0	6,98	7,63
1	3,53	3,71
2	4,95	5,90
3	9,62	10,88
4	24,60	29,90
5	52,00	99,60

Расхождению цифр при больших сравнительно n не приходится удивляться, так как средняя из наблюденных Θ_1 была выведена из 4

или 5 цифр! Приведем теперь вычисленные значения для больших значений n . При большом n (87) упрощается: мы можем взять для

$$\Theta_1 \approx \frac{\tau}{W_n}. \quad (84'')$$

Результаты этих вычислений приведены в табл. III. Приведенные цифры показывают, с какой исключительной быстротой возрастает Θ_1 : они объясняют, почему необратимость процессов мы обычно принимаем как абсолютную. Что значит эти цифры? Если мы в условиях опыта Сведенберга при среднем числе частиц $\nu = 1,53$ в рассматриваемом поле зрения поместим 3 частицы, то вследствие неравенства концентраций начнется диффузия, и концентрации выравниваются. Однако этот процесс не будет необратимым: он, по выражению Смолуховского, не будет и обратимым, но будет „обращающимся“, и действительно, через каждые приблизительно 10 сек. мы опять увидим в данном поле зрения по 3 частицы.

Таблица III.

n	θ'	n	θ'
6	2'12"	12	146 дней
8	2 ^h 04'	14	30 лет
10	2 дня 15 ^h	17	34 000 лет

Если мы поместим 17 частиц там, где их, в среднем, должно быть 1,53, то ясно, что эти частицы очень скоро выйдут из поля зрения. Будет ли этот процесс необратимым? И да и нет. Если мы будем наблюдать в течение суток, то процесс будет необратимым, но если бы мы могли наблюдать в течение периодов, по сравнению с которыми 34 000 лет можно было бы принять за 1 сек., то возвращение такого мало вероятного события, как появление 17 частиц (при среднем числе $\nu = 1,53$), будет часто повторяться. Вот почему изложенные нами замечательные работы Смолуховского наносят сокрушающий удар всем рассказам о так называемой тепловой смерти.

Рассмотрим еще один частный вопрос, связанный с решенной только что задачей. Пусть P очень мало, так что в суммах (85') и (86') можно ограничиться только одним членом $i = 0$, тогда мы находим:

$$P_n(+k) = \frac{e^{-\nu}(\nu P)^k}{k!} \quad (85'')$$

и

$$P_n(-k) = \frac{n}{k} e^{-\nu} P P^k. \quad (86'')$$

Составим отношение этих двух величин:

$$\frac{P_n(-k)}{P_n(+k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{\nu^k}. \quad (96)$$

Если $k = 1$, то

$$\frac{P_n(-1)}{P_n(+1)} = \frac{n}{\nu}. \quad (97)$$

Таким образом выходит, как будто, что в данном случае нет той симметрии, какая была в случае частицы, связанной с положением равновесия упругой силой, где для малых t , в согласии с обратимостью уравнений механики, оба направления были одинаково вероятны. Здесь же, если $n > v$, то, как будто, всегда убыль будет более вероятна, чем прибыль. Однако противоречие это разъясняется очень просто. Одна частица при небольшом числе единиц в n и v уже не представляет малого изменения. А что теоретически прежнее положение остается в силе, вытекает из следующего соображения. Заменим в (96) прерывные функции $n!$ и $(n - k)!$ непрерывными функциями, которые при целых n и $n - k$ принимают значения $n!$ и $(n - k)!$ Это будут эйлеровы функции Γ .

Тогда (96) принимает вид:

$$\frac{P_n(-k)}{P_n(+k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1) \cdot v^k}.$$

Если мы перейдем к пределу, полагая, что k стремится к нулю, то получается опять полная симметрия. Действительно,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{P_n(-k)}{P_n(+k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)} \cdot \frac{1}{v^k} = 1.$$

Рассмотрим в заключение еще один пример на вычисление при малом значении t . Как мы видели, в этом случае: $1 - P_n(0) = (n + v) P$. Далее, можно показать, что приближенно можно представить W_n как функцию относительного изменения плотности $\delta = \frac{n - v}{v}$ следующим образом:

$$W_n = \frac{v^n}{n!} e^{-v} \approx \sqrt{\frac{v}{2\pi}} e^{-\frac{v\delta^2}{2}} \quad (98)$$

Дело заключается в следующем. Пусть нам дан шар радиуса a в воздухе, и пусть $\delta = 0,01$. Таким образом мы, следовательно, подсчитываем промежуток времени Θ_1 , определяющий „повторяемость“ отступления плотности газа на 1% в шаре радиуса a . Так как при этих условиях W_n очень мало, v — число частиц в 1 см^3 — очень велико, то поэтому Θ_1 можно представить:

$$\Theta_1 = \frac{t}{W_n} \frac{1}{(n + v) P}. \quad (99)$$

Таким образом вопрос сводится к вычислению P , т. е. вероятности выхода одной частицы из шара радиуса a . Если мы среднюю квадратичную скорость частиц газа обозначим через C , то количество частиц газа, попадающих в 1 сек. на 1 см^2 любой поверхности, будет, как мы видели (глава I, § 2), $\frac{vC}{\sqrt{6\pi}}$, а на поверхность шара радиуса a их попадет

¹ См., например, Тимирязев, Кинетическая теория материи, Гиз, 1923, гл. XX, стр. 307.

$\frac{4\pi a^2}{\sqrt{6\pi}} \frac{vC}{v} = \frac{4\pi a^2 vC}{\sqrt{6\pi}}$, а за время $t = 4\pi a^2 \frac{vC}{\sqrt{6\pi}}$ Вероятность „выхода“ P выразится как отношение числа попадающих на поверхность молекул к общему числу молекул внутри шара, т. е. к числу $\frac{4}{3} \pi a^3 v$, откуда и находим:

$P = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{Ct}{a}$. Далее, так как, при $\delta = 0,01$, n мало отличается от v , то можно положить $n + v \approx 2v$. При этих условиях Θ_1 принимает вид:

$$\Theta_1 = \frac{\pi a}{\sqrt{3Cv^{\frac{3}{2}}}} \cdot e^{\frac{v\delta^2}{2}}. \quad (100)$$

В следующей таблице даны вычисленные значения для Θ_1 при условии, что плотность газа отступает от средней на 1% , и для различных радиусов. Из таблицы видно, с какой сказочной скоростью изменяется Θ_1 в зависимости от изменения радиуса.

Таблица IV.
($\delta = 0,01$).

a в см	Θ в сек.
1,0	$10^{10^{11}}$ сек.
$3 \cdot 10^{-5}$ (0,30 μ)	11,6 суток
$2,5 \cdot 10^{-5}$ (0,25 μ)	1 сек.
$1,0 \cdot 10^{-5}$ (0,10 μ)	10^{-11} сек.

На этом примере с особенной наглядностью выступают причины, почему в классической термодинамике установилось метафизическое понятие о необратимости. Исследования Смолуховского дают классический пример того, как диалектика прямо навязывается самой природой и, следовательно, показывает всю относительность понятия о необратимости процесса. То, что практически для человека необратимо при шаре радиуса 1 см и что, следовательно, можно рассматривать как неповторяющееся событие,— в масштабе $a = 10^{-5}$ см повторяется 10 млрд. (10^{11}) раз в секунду!

Любопытно отметить, что за последние годы вновь подогревается „теория“ тепловой смерти (Джинс, Эддингтон), причем работы Больцмана и Смолуховского совершенно не упоминаются. Вообще, кроме узко специальных исследований, о работах Смолуховского в научной литературе ни слова! В то же время через шесть лет после смерти Смолуховского, в 1923 г. его работы были изданы в коллекции классиков Остwalda. Это двойственное отношение к работам Смолуховского, вне всякого сомнения,— результат обострившейся классовой борьбы и связанной с нею пропаганды антинаучной, идеалистической, философии, для которой материализм работ Смолуховского абсолютно неприемлем.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрагам 14, 305, 321, 377
Авенириус 14, 21, 28
Агрегатные состояния (переход вещества) 292
Адиабатные процессы 274 и след.
Азимутальное или первое квантовое число 318
Аксельрод 28
Ампер 195
Апериодическое движение 61, 62, 67
Ареометра колебания 53
Асимметрия действия силы 115
Астон 209
Атмосфера электрона 353, 354

Бальмера формула 312, 315
Барклей 167
Бернулли 27, 395
Бернулли Даниил 119
Биения 102
Био и Савар 156, 195, 203
Блаккет 30, 395
Богданов 71
Больцман 12, 13, 27, 39, 43, 56, 71, 168, 291, 407, 410, 435
Больцмана модель (свойства энтропии) 307
Бор 17, 18, 19, 21, 33, 39 и след.
Бор, Крамерс, Слатер 334
Бора первый постулат 310, 314, 317, 362
„ второй постулат 312
Борн 16, 18, 24, 81
Боязнь резонанса 110
Браун Ф. 108
Брауновское движение 413, 416
де-Бройль 19, 21, 44, 47, 322, 340
Брюстера закон 189.
Бухарин 37, 42
Бухерер 377
Бъеркнес 267 и след.

Вавилов С. И. 389
Вебер 195
Вектор Пойнтинга см. П.
Векторов теория 168
Виллард 271
Вильсон 271
Вильсон 30, 34
Винер (стоячие волны) 190, 191
Водородного атома модель 310
Возбуждение ударное 103
Волновая механика 336, 341

Волнового уравнения решение 346
Волновое уравнение 117, 130, 131, 142, 144, 151, 165, 226
Волны в непрерывных средах 128
„ в несжимаемой жидкости 139
„ в упругой среде 116
„ на струне 116
„ плоские 144, 179
„ сферические 148
„ электромагнитные 116, 155, 164
Всеобщая теория относительности 383
Второй принцип термодинамики 285, 407

Гааз А. 33, 34, 383
Гаген 231
Газового состояния законы 391
Гайзенберг 19, 21, 33, 36, 322, 334, 336
Галилея-Ньютона принцип 56, 58, 364, 367
Гамильтон 302, 316
Гамильтона уравнения 317
Гармонические обертоны 127
Гармонический ряд, колебаний на струне 121
Гармонических колебаний теория 47
Гаусс 195
Гаусса теорема 159
Гевисайда слой 352
Гегель 38
Гедрик 382
Гельмгольц 26, 27, 294, 302, 305
Гербер 387
Гергес Г. 73
Герке и Лау 321, 377
Герц 168
Гессен Б. 17, 33, 34, 36, 378
Ги и Леванши 215, 377
Гибсон 167
Гидродинамики уравнения 128, 131, 132, 133, 134, 135, 142, 143, 266
Гидростатики уравнения 132
Гладстон 167
Глазер 388
Гносеология 11
Градиент скалярной функции 170
Грунтовая скорость 339
Гулль 231
Даламбер 117, 121, 145, 299
Дарвин Дж. 237
Движение без материи 331

- Движение в сопротивляющейся среде
(аналогия с электромагнитными про-
цессами) 78
- Деборин 28, 42, 306
- Дейтон 380 и след.
- Декремент затухания 64, 95, 96, 97
- Детерминизм 1, 22, 32, 42
- Джинс 17, 18, 435
- Дивергенция от вектора 170
- Дисперсия теория 347
- Дисперсионная формула 350
- Дисперсия аномальная и нормальная 351
- Дифракция электрона 352, 364
- Диффузии теория 226
" уравнение 240, 417
- Дюриング 367
- Задача о струне, закрепленной в двух
точках 120
- Закон сохранения энергии 55
- Закономерность 34, 35
- Закономерность статистическая 43
- Заряд пространственный 250
- Заряд электрона (определение) 78
- Затухание 102
- Затухания коэффициент 60, 62
- Затухающие колебания и электромагнит-
ные процессы 68
- Звуковые волны в воздухе 142
- Зеелигер и Пур 386
- Зееман 368
- Зоммерфельд 17, 21, 22, 25, 309, 316,
318, 321, 335, 342
- Изображения электрические 248
- Изотермические процессы 274
- Иллингворт 38
- Ильин Б. В. 402
- Инвариант преобразований 372
- Индeterminизм 22, 25, 31, 42
- Индeterminированности принцип 18, 19,
32, 33, 34
- Иос 382
- Камерлинг-Оннес 75
- Камертона действие 155
- Кант 225
- Карно процесс 277, 285
- Кастерин Н. П. 20, 23, 44, 114, 268, 311,
323, 331, 353, 360, 377, 380
- Кауфман 214
- Квазиупругая сила 347
- Квант действия 311
- Квантовая теория 309
" по Томсону 323
- Квантовое число главное 321
- Кеннеди 382
- Кинетическая теория материи 391 и след.
- Клапейрона ур-ние для тепла испарения 293
- Клаузиус 195, 270, 289, 408
- Количество движения электромагнитное
216
- Колебаний теория 47
- Колебания вынужденные 81, 83, 84, 88,
91, 94, 154
- Колебания груза на спирали 53
" затухающие 58, 103
" зеркала гальванометра 64
" коромысла весов 65
" незатухающие 97
" с помощью постоянной
силы 115
- Колебания связанные 98, 108
" собственные 83
" стрелки измерительного при-
бора 67
- Колебания струны 54, 104
" фундамента машины 111
- Кольман 37
- Комптона эффект 332
- Кон Э. 168
- Конвекционный потенциал 212
- Корнелиус 17
- Космическое излучение 45
- Коэффициент взаимной индукции 108
" увлечения 369
- Коэффициент ряда для струны 125, 126
- Крамерс 31
- Крооз 388
- Курвуазье 381 и след.
- Лагранж 14, 197
- Лагранж уравнения 299, 300, 302, 306,
316
- Лаймана серия 313
- Лаплас 26, 27, 40, 130
- Лапласа уравнение 245, 252, 255, 256, 260,
- Лармор 12, 19
- Лауэ 56
- Лебедев П. Н. 75, 168, 223
- Лев 330
- Ленар 376
- Ленгмюр 22, 251
- Ленин 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 22,
28, 29, 32, 34, 35, 38, 46, 71, 179, 194,
195, 205, 207, 215, 225, 367
- Ломоносов М. В. 394
- Лоренц Г. А. 12, 15, 23, 156, 224, 249,
269, 305, 369, 380
- Лоренца-Эйнштейна преобразование 365,
366
- Луч и поток энергии 177
- Луч скорость 338
- Майкельсон 34, 380 и след.
- Максвелль 14, 166, 167, 168, 197, 209,
223, 350
- Максвелля натяжения 221
" уравнения в дифференциальной
форме 161 и след. 354
- Максвелля уравнения в интегральной
форме 155 и след. 179, 181, 194 и след.
203, 226
- Максвелля уравнения в криволинейных
координатах 323

- Максвелля уравнения и закон Планка 328
 Максимов 36
 Мандельштам Л. И. 108
 Маркс 28, 41
 Масса гравитационная 384
 " инертная 384
 " продольная и поперечная 215
 " электромагнитная 204, 215, 257
 Массы изменение со скоростью 211
 " фараадеевых трубок 331
 Max 14, 17, 19, 21, 22, 27, 28, 29, 31, 334, 336
 Маятник в сопротивляющейся среде 66
 " математический 53
 Маятники связанные 98, 108
 Менгес Ш. 369
 Мерсен 55
 Метафизика материалистическая 32, 34
 Механика уравнения Лагранжа 299
 Механизм 33, 37, 42
 Мизес 27, 30, 31, 32, 394
 Миллер 380 и след.
 Милликен 45, 78, 80, 313, 395,
 Минковский 373
 Младодеборинская школа 36
 Молекулярный хаос 392
 Набла 170
 Нагаока 309
 Нейман 377
 Нейман теория 191, 195
 Непрерывности уравнение 134, 142, 163, 230
 Необратимых процессов теория 425, 430
 Необходимость 28, 34, 35, 36, 41
 Неопределенности принцип (см. индетерминированности принцип)
 Никольс и Гулль 223, 231
 Ньютон 49, 130, 195, 367, 376
 Ньютона закон охлаждения 238
 Обратимый процесс 271
 Обращающийся процесс 432
 Оператор Гамильтона 170
 " Лапласа 171
 Оствальд 21, 334
 Остыивание шара 237
 Относительности теория 309, 364
 Отождествление 55
 Отражение плоских волн 229
 Пашен 313, 316, 321, 377
 Первый принцип термодинамики 270, 280
 Перрен 34
 Петцольд 35
 Пикар 382
 Планк Макс 19, 295, 391
 Планка постоянная 311
 Плеханов 37
 Плоскости волны уравнение 180, 182
 Плотность количества движения шара 208
 " магнитной энергии 205
 Плотность спутника Сириуса 208
 " электрической энергии 174, 209
 Пойнтинга вектор 176, 178, 179, 206, 220, 356
 Поле движущегося заряда 204
 Политроп построение 284
 Поля и Прингсгейма опыты 191
 Поперечная масса 376
 Потенциал кинетический 302
 " шарового слоя 245
 Потенциала теория 245
 Поток вектора индукции 185
 Причинности закон (принцип) 5, 19, 23, 25, 30, 33, 322
 Причинность 18, 34, 35
 Продольная масса 375
 Продольные волны 128
 Пуанкаре 196
 Пуассона уравнение 245, 250, 252
 Радиальное или второе квантовое число 318
 Распределения скоростей закон 396, 403, 405
 Растворов разведенных теория 295, 299
 Расходимость от вращения 170
 Рашевский 330
 Регенер 34
 Резонанс 93, 94, 96, 110, 113
 Резонансной кривой уравнение 95, 96
 Ренье 33
 Ридберга постоянная 312, 315
 Риман 195
 Рой-Кеннеди 382
 Романов В. И. 97, 103
 Рубенс и Гаген 231
 Рутерфорд 34, 309
 Самойлов А. Ф. 16
 Сведберг 402, 415, 431
 Сведения процесс 55
 Сверхдисперсионная среда 347, 351, 354
 Сверхпроводимость 72
 Связь гальваническая 108
 " электростатическая 108
 Сила Минковского 374
 " Ньютона
 Скин-эффект 234
 Скорости газовых молекул 394
 Скорость Минковского 373
 Слатер 31
 Случайность и необходимость 35, 36, 400
 Смещение 209
 Смолуховский 39, 43, 291, 391, 400, 402, 413, 417, 418, 420, 424, 432, 433, 435
 Смычка действие 115
 Собственное время 373
 Соответствия закон 334
 Специальная теория относительности 364, 371, 378
 Сталин 42
 Стаэль 382

- Стокса закон 413
 Строение атома 309
 электрона 347, 353
 Стюарт и Тольман 75
 Тамм И. Е. 16, 166, 225, 378
 Телеграфистов уравнение 226
 Тепловая смерть 290, 411, 421, 435
 Теплопроводность основное уравнение 290, 411, 421, 435
 Теплопроводность теория 226
 Термодинамика 270
 " связь с механикой 299, 306, 308
 Термодинамика общие уравнения 294
 Тимирязев А. К. 434
 Тирринг 335
 Ток смещения 159, 160
 Тольмана опыт 72
 Томашек 382
 Томсон Дж. Дж. 12, 13, 14, 15, 20, 22, 23, 24, 25, 44, 81, 156, 195, 197, 199, 200, 203, 205, 207, 209, 214, 216, 218, 225, 309, 322, 323, 352, 353, 358, 376
 Томсон (Кельвин) 270
 Томсона (Кельвина) задача о возрасте Земли 235
 Торичелли теорема 137
 Трансформатор Тесла 107, 111
 Трение консервативное 155
 Тригонометрические ряды 122
 Уайтеккер 23
 Уничтожение материи 44, 331, 353
 Уорб Д. 13
 Уравнения механики 43, 55
 Ускорение Минковского 375
 Фазовая скорость 339, 352, 357
 Фазовый интеграл 317
 Фарадей 194, 197, 199
 Фатализм 38, 42
 Фейербах 28
 Ферма принцип 338
 Фесенков В. Г. 386, 388, 389
 Фетишизм 28
 Физо опыт 368
 Фиц-Джеральд 380
 Флюктуации 40
 Фотоэффект нормальный и селективный 191
 Франк 384
 Френель 191, 369
 Френеля формулы 188, 193
 Френкель Я. И. 16, 44, 160, 194, 197
 Фрик 240
 Функции сферические 262
 Функциональные соотношения 28
 Фурье 232
 Харадов Г. А. 365
 Центробежная сила 113
 Цермело 407, 410
 Цикл Карно см. процесс Карно
 Циклические движения 303
 координаты 299
 Циклы сложные 287
 Цильтер Эргард 28, 29
 Частота кругового колебания 47
 " свободных колебаний 60, 70, 86
 " собственных колебаний 60, 70
 Черданцев И. А. 168
 Шар вибрирующий 151
 " в однородном поле 252
 " колеблющийся 150
 Шары пульсирующие 260, 265
 Щейн Ю. 34
 Шредингер Эрвин 18, 19, 25, 26, 30, 34, 36, 44, 47, 322, 341, 395
 Шредингера волновое уравнение 342, 343, 363
 Шредингера теория 334 и след.
 Шустер А. 194
 Эддингтон 17, 18, 435
 Эйлера уравнение 133
 " теорема 263, 316
 Эйнштейн 17, 18, 56, 197, 209, 365, 369, 378, 383
 Эйхенвальд А. А. 192, 193, 299
 Эквивалентности принцип 384
 Экстраток 72, 78
 Электронные волны 359
 Электромагнитного поля свойства 172
 " физическая теория 194
 Электромагнитное количество движения 206
 Электромагнитные волны в поглощающей среде 226
 Электромагнитные и простые колебания (связь между ними) 71
 Эмпириокритицизм 26, 244
 Энгельс 12, 16, 28, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 46, 155, 168, 271, 291, 302, 367, 385, 407, 423
 Энергетика 56
 Энергии принцип и уравнения механики 55
 Энергия свободная 294, 306
 " связанная 294
 Энтропия 287, 289, 423,
 " и вероятность 400
 Энштейн 382
 Эренгафт 80
 Эрмита полином 345
 Эрштед 156, 195
 Эскланьон 388, 389
 Эфир и специальная теория относительности 377
 Эффективная сила тока 93, 94
 Юлиус 388
 Юм 27, 29, 225
 Яницкий 229

СПИСОК КНИГ

ДЛЯ БОЛЕЕ ПОДРОБНОГО ОЗНАКОМЛЕНИЯ С ОСНОВАМИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Общие курсы.

1. А. А. Эйхенвальд, Теоретическая физика (Вышли части 1, 2, 3 и 6: Теория поля, Общая механика, Механика твердого тела и Электромагнитное поле.) Гиз 1926, 1930, 1932 и 1931. Превосходное руководство, отличающееся необыкновенной ясностью и простотой изложения.

2. М. Планк, *Einführung in die theoretische Physik*, Hirzel, Leipzig. Вышло 5 частей: 1) *Einführung in die allgemeine Mechanik*, 1921; 2) *Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper*, 1922; 3) *Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus* 4) *Einführung in die theoretische Optik*, 1927; 5) *Einführung in die Theorie der Wärme*, 1929. Частью переведено на русский язык. Представляет большой интерес как курс лекций, прочитанный таким выдающимся физиком, как Макс Планк.

3. Н. А. Лоренц, *Lectures on Theoretical Physics*. Vol. I. *Aether Theories and Ether Models; Kinetic Problems*, 1926. Vol. II *Thermodynamics; Entropy and Probability; The Theorie of Radiation; The Theory of Quanta*, 1927. Vol. III. *Maxwell's Theory; Principle of Relativity for uniform Translations*, 1931. Macmillan and Co, London, St. Martin's Street. Немецкий перевод Akadem. Verlag, Leipzig. Переведены части, отмеченные курсивом. Исключительно интересная книга. Во всех перечисленных областях оказывается исключительное остроумие автора, сумевшего далее в хорошо известных областях физики дать новые более простые и вместе с тем более строгие доказательства. Особенно подходит как основа для работы аспирантских семинариев.

4. Н. Хельмхольц, *Vorlesungen über theoretische Physik*. 6 томов. Leipzig J. A. Barth, 1898 — 1903. Курс лекций, составленный по запискам учеников. Классическое руководство, с которым должен познакомиться всякий, кто хочет серьезно изучать теоретическую физику.

5. Cl. Schaefer, *Einführung in die theoretische Physik*. Пока вышло два тома (три издания): Механика, теплота и кинетическая теория материи. Очень хорошее изложение.

6. А. Насс, *Einführung in die theoretische Physik*, W. de Gruyter u Co, Berlin I и II Band. III und IV Auflage, 1923 — 1924 (есть новейшее издание). Особенное внимание удалено новейшим отделам физики. Книга пропитана эмпириокритической философией.

7. G. Joos, *Lehrbuch der theoretische Physik*, XX + 644 стр. Akad. Verlagsge-sellsch. Leipzig, 1932. Книга пропитана эмпирио-критицизмом. Представляет собой наиболее сжатое изложение основ теоретической физики.

8. G. Jäger, *Theoretische Physik*. 5 выпусков. Издание Генсена. Есть русский перевод.

9 Christiansen, *Elemente der theoretischen Physik*, Leipzig, Barth. Третье издание вышло в 1910 г. Есть новые издания.

Учение о колебаниях и волнах.

(*К первой, второй и третьей частям настоящего курса.*)

1. O. Föppl, *Grundzüge der technischen Schwingungslehre*. Berlin, Springer, 1923 IV+151.

2. W. Hört, *Technische Schwingungslehre*. Второе издание 1922. VIII+822. При книге имеется обстоятельный список литературы по вопросам технических приложений теории колебаний.

3. H. Lamb, *Dynamics*. Cambridge University, 1914, XI+344. Одно из лучших руководств по механике с хорошо подобранными задачами и вопросами.

4. H. Lamb, *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Teubner, Leipzig 1907 (есть новое издание), XIV+787. Лучшее из руководств по гидродинамике.

5. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Vol. I; Vol II. Второе издание 1896 г Macmillan, London (есть немецкий перевод). Классическая книга по акустике.

6. M. Abraham, Theorie der Elektricität. I и II Band. Teubner, Leipzig (седьмое издание), 1923. Второй том (пятое издание 1923). Есть новое переработанное, издание.
7. E. Cohn, Das Elektromagnetische Feld. Второе издание 1927. F. Springer, Berlin.
8. P. Drude, Lehrbuch der Optik, Третье издание, переработанное проф. Герке. Leipzig, Hirzel, 1912.
9. R. Wood, Physical optics, Второе издание, Macmillan, New-York 1911.
10. J. J. Thomson, The corpuscular Theory of Matter. London, Constable 1907.
11. J. J. Thomson, Electricity and Matter. Первое издание 1903. Немецкий перевод в издании Wissenschaft Vieweg, Braunschweig. Есть русский перевод. Гиз, 1928. Электричество и материя. Подготавляется II изд.
12. J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, 1893. Oxford Clarendon Press. Книга представляет теперь библиографическую редкость. В ней собран материал, имеющий большое значение в настоящее время.
13. Акад. В. Ф. Миткевич, Электромагнитное поле, Гиз.

Волны в средах поглощающих; теория потенциала.

(К частям IV и V.)

1. Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II (Physikalischen) Teil. Herausgegeben von D. P. Frank, 1927. Vieweg, Braunschweig.
2. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. См. отд. II настоящего списка.
3. А. Б. Млодзеевский, Термодинамика и теория фаз. Гиз. 1922.
4. H. A. Lorentz, См. I отд. настоящего списка п. 3.
5. G. H. Braun, Thermodynamics, Teubner 1907.

(К частям VI и VII.)

1. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 4-е изд., Vieweg, Braunschweig, 1924. Первая половина переведена на русский язык. Есть новое издание.
2. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanischer Ergänzungsband. Vieweg Braunschweig, 1929.
3. L. de Broglie, Einführung in die Wellenmechanik. Akad. Verlag, Leipzig 1929.
4. E. Schrödinger, Four lectures on Wave Mechanics, London, Bläikie 1928.
5. H. Flint, Wave Mechanics. Methuen's Monograph. 1929. Наиболее простое изложение основ волновой механики.
6. J. J. Thomson, The Structure of Light. Cambridge, University Press, 1925.
7. J. J. Thomson, Beyond the Elektron. Cambridge University Press, 1929.
8. A. Einstein, Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich). Теория относительности. Vieweg 1920 (десятое издание). Есть несколько переводов на русский язык.
9. M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, I und II Band. Vieweg, Braunschweig (четвертое издание), 1921.
10. G. v. Gleich, Einsteins Relativitätsprinzip und Physikalische Wirklichkeit. J. A. Barth, Leipzig 1930. Возражения против теории Эйнштейна.

Кинетическая теория материи.

11. А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи. Гиз 1923. Печатается новое издание.
12. L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie. J. A. Barth. Вышло несколько изданий.
13. J. Jeans, The Dynamical Theory of Gases. 3-d Edition. Cambridge University Press. 1921.
14. L. Loeb, Kinetic Theory of Gases. Mc Graw Hill. New-York 1927.
15. R. Tolman, Statistical Mechanics with Applications to Physics and Chemistry. The Chemical Catalogue, Co New-York 1927.
16. M. v. Smoluchowsky, Ostwalds Klassiker der Exakten Naturwissenschaften. Abhandlungen über die Brownsche Bewegung und Verwandte Erscheinungen. Leipzig, Akad. Verlag, 1923, № 207.

53
7. 411

Л. Ю. ТИМИРЯЗЕВ

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ГТТИ-1933