"Математика и практика. Математика и культура".
Под ред. М.Ю.Симакова, В.Н.Чубарикова. М., 2001. С. 60-69.

ЧИСЛО, ВРЕМЯ, СВЕТ

(Алгебраическая динамика и физическая картина Мира)

Владимир В. Кассандров

(Российский Университет дружбы народов, Москва,

117419, Орджоникидзе, 3, e-mail: vkassan@rambler.ru**)**

1. Введение.

Целью настоящей статьи является попытка обратить внимание (и продемонстрировать на примере развиваемого автором *алгебродинамического* подхода) на новые взаимоотношения математики с естественными науками, прежде всего - с фундаментальной теоретической физикой. Эти отношения, возникающие на наших глазах, до конца еще не осознаны ни чистыми математиками, ни теоретиками, ни философами науки. По существу речь идет о (понимаемой в современном смысле) идеологии *неопифагореизма,* в которой математика из "служанки", понукаемой потребностями естественных наук, становится их "госпожой", диктующей истинный вид законов природы и расшифровывающей происхождение и смысл (алгебраический, геометрический, топологический) уже открытых законов.

Яркие представители этого направления, испытавшего расцвет в эпоху античности (Пифагор, Платон, Плотин), на самом деле присутствовали во все исторические периоды [2], начиная от первобытных времен и кончая такими выдающимися мыслителями, как У.Гамильтон, В.Клиффорд, А.Эддингтон, Г.Вейль, П.А.М.Дирак и (во второй половине жизни) А.Эйнштейн. Их взгляды не являлись господствующими в естественнонаучной среде и в философии: напротив, все основные достижения последних столетий скорее можно связать с *галилеевско-ньютоновской* парадигмой научного познания (опыт-гипотеза-опыт-закон-опыт), нашедшей свое логическое завершение в агрессивно-позитивистской философии квантовой теории. Однако именно их идеи, их мечты о существовании некоего *Метазакона,* положенного Творцом в основу Мироздания, их глубокая убежденность в изначальном *единстве* мира и в нашей способности *абсолютного* его познания задавали тот масштаб научного творчества, сохраняли те высокие идеалы, которые не позволили безвозвратно затащить науку в болото феноменологии и голой схоластики.

Сегодня пришло время "собирать камни". Виднейшие теоретики после более чем полувекового перерыва вновь обращаются к *основаниям* физики, пытаясь из самых общих соображений определить и понять истинную размерность пространства-времени, происхождение Стандартной модели и безразмерные "магические числа" (константы взаимодействия и отношения масс микрочастиц и т.п.).

В математике, с другой стороны, все чаще встречаются взгляды на абстрактные структуры, естественно возникающие в рамках различных формализмов, не как на некую "игру ума", а как на *объективные сущности,* которые с неизбежностью имеют прямое отношение к реальности окружающего мира. Об изменениях отношения взгляда математиков на собственную деятельность и на отношения с естественными науками свидетельствует, в частности, и известная полемика В.И.Арнольда с представителями "школы Н.Бурбаки" [1].

Однако, несмотря на несколько более демократичную и творческую обстановку, сложившуюся в современной физике и математике, кардинального прорыва к новому пониманию природы пока не просматривается. Ныне господствующие в физике представления и парадигмы возведены в догму и считаются не подлежащими радикальному пересмотру, а лишь уточнению при непременном условии соблюдения т.н. *принципа соответствия,* т.е. полного восстановления прежней теории из новой в результате некоторой процедуры предельного перехода. Лишь единицы из ведущих физиков-теоретиков, "угробивших" всю жизнь на развитие общепринятого формализма, имеют мужество допустить, что этот самый формализм *может не иметь ничего общего с истинным языком и законами природы.*

Полностью отсутствует понимание того, что общепринятые в настоящее время представления, концепции, уравнения *в принципе не могут быть достоверны,* поскольку получены в результате "детских игр", своего рода "мозгового штурма" естествоиспытателей по поиску наилучшего описания некоторой совокупности установленных на опыте фактов. При этом ответ *не может быть единственным* (поскольку на самом деле неизвестно, при каких условиях, "связях" ищется решение "задачи оптимизации"). Только гениальная интуиция великих мыслителей прошлого позволяет надеяться, что выработанный ими язык фундаментальной физики может *в какой-то мере* (и не более того!) оказаться адекватным действительному "Коду природы".

Интересно отметить, что сами творцы-создатели никогда не рассматривали обнаруженные ими новые возможности описания природных явлений как единственно верные (так, В.Гейзенберг долгое время сомневался в матричной механике и в трактовке принципа неопределенности, см. [3], А.Эйнштейн всегда был готов заменить риманову модель пространства-времени другой, в частности, геометрией абсолютного параллелизма [4], Поль Дирак никогда не рассматривал свое уравнение как единственно возможное описание "состояний электрона" и т.п.). В догму сформулированные ими гипотезы-теории возводили уже их последователи, неспособные, как правило, к генерированию собственных идей.

Психологические аспекты отрицания большинством научного сообщества возможности *полной* ревизии сложившихся представлений вполне понятны и в известной мере являются *охранительными*. Однако объективно эти взгляды *именно сейчас* все заметнее начинают играть реакционную роль, тормозя развитие радикально новых подходов. Дело в том, что в настоящее время внутри самой науки (как математики, так и теоретической физики) накоплен огромный потенциал идей и методов, который может оказаться основой ее внутренней революции. Физика выросла из пеленок и, используя богатство новых структур, открытых современной математикой (теорию особенностей, алгебраическую геометрию и топологию, нелинейную динамику и синергетику и др.), готова совершить качественный скачок и превратиться из описательной, "констатирующей" науки в своего рода новую *Метафизику,* объясняющую происхождение и смысл основных структур и объектов, составляющих физическую реальность. Манифестом этого нового направления развития физики можно считать известные слова А.Эйнштейна (см. [4], С.245): "…мы хотим не только знать, *как* устроена природа (и как происходят природные явления), но и по возможности достичь цели, может быть утопической и дерзкой на вид, - узнать, *почему* природа является именно такой, а не другой".

Для автора, получившего т.н. "классическое" университетское образование, столь радикальная концепция ранее не являлась близкой. Постепенный переход к ней произошел после знакомства со структурами типа исключительных алгебр (типа алгебр кватернионов и октонионов), фрактальными отображениями, теорией особенностей и исключительными простыми группами. Богатство возможностей и внутренняя красота этих и других аналогичных структур поражают и составляют разительный контраст с теми, уже порядком "заезженными" (а часто и математически некорректными) процедурами (вариационная задача, коммутационные соотношения, интегрирование по путям), которые использует современная теоретическая физика (причем использует непоследовательно, эклектически смешивая классические геометрические и формальные квантовые представления). Сам факт существования таких *исключительных абстрактных* структур заставляет задуматься, не они ли лежат в основе Бытия, не в их ли внутренних свойствах закодирован алгоритм эволюции и свойства Вселенной, вплоть до самих понятий *времени, материи и сознания?*

В 1980 году автором было предложено определение *дифференцируемости* функций кватернионного переменного, явно (и, по-видимому, впервые) учитывающее определяющее свойство алгебры кватернионов **Q** *- их некоммутативность. Как следствие,* **Q***-обобщенные уравнения Коши-Римана (ОКР) оказались существенно нелинейными. При расширении* **Q** *до алгебры* **B** *комплексных кватернионов (бикватернионов) уравнения ОКР становились лоренц-инвариантными.*

Совокупность этих и других интересных внутренних свойств первичных условий ОКР наводила на естественную мысль попытаться рассматривать эти уравнения как основу некоторой *единой алгебраической теории поля.* Программа построения такой теории, получившей название *алгебродинамики,* и предварительные результаты реализации такого подхода в алгебре **B** *были представлены в монографии [5] и в статьях [6-8] (там же имеются ссылки на более ранние работы).*

Ниже, в разделе 2, мы представляем сводку этих результатов. Несколько подробнее в разделе 3 рассматривается необычная геометрическая "картина" физического пространства-времени и материи, к которой приводят первичные уравнения ОКР в алгебре **B**. *Главными образующими элементами этой картины служат изотропные геодезические конгруенции - пучки прямых в 3-мерном физическом пространстве, вдоль которых для каждого из решений уравнений ОКР происходит "перенос" основных* **B***-полей с одной и той же фундаментальной скоростью (скоростью света). Что касается материи, то вся она порождается самими прямолинейно движущимися "световыми элементами" и представлена каустиками (т.е. местами самопересечения, "уплотнения") лучей основной конгруенции.*

В разделе 4 обсуждаются представления о времени, возникающие при рассмотрении фундаментальных световых конгруенций, и связь этих представлений с работами других авторов. Подчеркивается фундаментальная роль твисторной структуры уравнений **B**-*ОКР. Обсуждаются также следующие из основных уравнений связи между поступательным и внутренним вращательным движением частиц-каустик и ограничения скорости их трансляционного движения "скоростью света". В заключение, в разделе 5, мы вновь возвращаемся к проблеме взаимоотношений физики и математики и, уже с учетом расмотренной реализации алгебродинамики, формулируем общие положения "неопифагорейского" подхода к построению фундаментальных физических теорий - подхода радикально нового для современной физики и, как представляется, наиболее перспективного и даже неизбежного в будущем.*

2. Алгебраическая теория поля на основе B-обобщениых уравнений Коши-Римана (уравнений B-ОКР).

В развитой на основе **B-***ОКР версии алгебродинамики физические поля рассматриваются как* **B***-дифференцируемые функции бикватернионного переменного (аналог* **C***-аналитических функций), а сами условия дифференцируемости - как единственные первичные уравнения полевой динамики. При этом никаких дополнительных постулатов (лагранжиана, правил квантования и т.п.) математического или физического характера не делается, т.е. свойства уравнений ОКР и их решений-полей изучаются сами по себе, вне какой-либо физической феноменологии!*

Как ни странно, оказалось, что рассматриваемые **B***-поля обладают многими знакомыми из физики свойствами, в том числе естественной 2-спинорной и калибровочной структурами. Более того, условия интегрируемости уравнений ОКР влекут за собой тождественное выполнение уравнений Максвелла и Янга-Миллса на их решениях. Структура этих уравнений оказывается также тесно связанной с исключительной геометрией Вейля-Картана, с изотропными геодезическими конгруенциями и, через них, - с римановыми метриками типа Керра-Шилда, определяющими основные физически важные решения уравнений Эйнштейна-Максвелла в ОТО. Как следствие ОКР, каждая спинорная компонента основного* **B***-поля удовлетворяет, кроме того, релятивистски-инвариантному уравнению 4-эйконала (нелинейному аналогу уравнения Лапласа в случае коммутативной* **C***-алгебры).*

Исключительно важную роль имеет обнаруженная связь уравнений **B**-*ОКР с твисторами - геометрическими объектами, введенными в физику Р. Пенроузом [9] и, нестрого говоря, представляющими собой пары 2-спиноров, связанных между собой и с точками пространства Минковского линейным образом (через т.н. соотношение инцидентности, см. раздел 3). Наличие твисторной структуры у уравнений ОКР позволило получить их общее (аналитическое) решение, сведя их к решению чисто алгебраических уравнений, геометрически определяющих гладкие поверхности в проективном твисторном пространстве* $\mathbf{CP^3}$.

Редукция уравнений ОКР к алгебраическим позволило простым образом генерировать достаточно сложные их решения, а также и сопоставляемые им решения известных уравнений поля, в том числе уравнений Максвелла, Эйнштейна и Янга-Миллса. При этом *сингулярности* электромагнитного и метрического полей соответствуют точкам пространства-времени, *в которых корни генерирующих алгебраических уравнений становятся кратными.* Причем структура сингулярного множества может быть весьма сложной, состоящей из большого числа связных компонент разных размерностей (пространственно 0-, 1- или 2-мерных); множество *общего положения* - одномерно ("струны").

Такая общая для всех основных полей, определяемых решениями ОКР, сингулярная структура *в случае ее ограниченности в 3-пространстве* естественно определяет некоторый *частицеподобный* объект, а динамические перестройки этой структуры могут интерпретироваться как *взаимопревращения* частиц. При этом *никаких трудностей принципиального характера* (расходимостей, нарушений причинности и т.п.), связанных с сингулярным характером отвечающих частицам решений уравнений ОКР, *в рассматриваемом подходе не возникает*, поскольку как "форма" сингулярного образования, так и его динамика однозначно следуют из самих уравнений ОКР.

Еще одним определяющим свойством исходных уравнений ОКР является их существенная *переопределенность.* Как следствие этого, далеко не каждое решение уравнений Максвелла или Янга-Миллса отвечает какому-либо решению для первичных **B**-*полей. На этом пути возникают некие "правила отбора" для типов и характеристик решений уравнений калибровочных и метрического полей, ассоциированных с решениями уравнений ОКР. В частности, для всех решений допустимые значения электрического заряда сингулярных образований либо равны по модулю некоторому минимальному (элементарному), либо целократны ему!*

Отметим, что идея объяснения дискретного спектра характеристик частиц как следствия переопределенности и нелинейности описывающих их *классических* уравнений поля принадлежит, судя по всему, А.Эйнштейну, и получила название *сверхпричинности* [10]. В рассматриваемом подходе концепция сверхпричинности проявляется не только в *квантованности* значений электрического заряда, но и в нетривиальной *динамике* сингулярных частицеподобных образований, моделирующей их *взаимодействие* и *взаимопревращения.* Действительно, несмотря на тождественное выполнение линейных уравнений Максвелла во всем пространстве-времени (кроме сингулярного подмножества меры нуль), принцип суперпозиции здесь, разумеется, не выполняется в силу нелинейности и переопределенности исходных уравнений ОКР. Заметим, что в отличие от стандартных схем типа нелинейной электродинамики мы имеем здесь ситуацию, близкую к концепции т.н. "скрытой нелинейности", развиваемой в ряде современных работ [11].

Фундаментальное (стационарное, аксиально-симметричное) решение уравнений **B**-*ОКР (модель электрона?) имеет кольцеобразную сингулярность и отвечает наименьшему возможному (элементарному) электрическому заряду, а в остальном является полным аналогом решения Керра-Ньюмена (КН) в ОТО. Из сопоставления с ним это решение наделяется массой и спином, причем из ОТО известно, что гиромагнитное отношение для решения КН имеет значение, соответствующее дираковской частице! Т.о. решение КН правильно воспроизводит все основные характеристики электрона, а в нашем подходе к тому же фиксирует значение его заряда.*

Примеры нетривиальной топологической структуры и динамики сингулярных частицеподобных образований приведены и обсуждаются в работах [12-14]. Помимо фундаментального "керровского" было найдено, в частности, бисингулярное решение с ЭМ-полем, воспроизводящим известное решение Борна для равноускоренно движущегося заряда (величина которого, однако, здесь квантована и равна заряду фундаментального решения!). Особенный интерес представляет его комплексная, электрически нейтральная модификация с кольцеобразной сингулярностью, *перестраивающейся* в тор [13]. Обнаружены также решения, не обладающие аксиальной симметрией [14]. Затетим, что к настоящему времени уже получены решения с намного более сложной, многосингулярной структурой, явным образом и на классическом уровне описывающие процессы аннигиляции, рождения пар, поглощения/испускания сингулярных волновых фронтов, процессы "распада".

В завершение краткого обзора основных полученных к настоящему времени результатов подчеркнем еще раз, что *все они являются непосредственным следствием одной лишь структуры уравнений **B**-ОКР и имеют чисто алгебраическую природу. Однако, с другой стороны, свойства и роль возникающих в алгебродинамике аналогов известных физических структур существенно и неожиданно отличаются от этих последних. Помимо необычной роли уравнений Максвелла ("нелинейность без нелинейности") и обнаружения у них широкого класса сингулярных решений с автоматически квантованными (за счет механизма "скрытой нелинейности") значениями заряда можно еще отметить:*

а) новый вид калибровочной инвариантности, имеющей место для уравнений ОКР (т.н. "слабой", с калибровочным параметром, зависящим от координат лишь через компоненты преобразуемого решения, см.[12,13]);

б) новую форму представления уравнений Максвелла через т.н. условия "комплексной самодуальности" [12,15], сводящие их решение к решению 3-х уравнений 1-го порядка по электромагнитным потенциалам;

в) новую концепцию *источников* физических полей, связанную с рассмотрением сингулярностей полей как *точек ветвления* отвечающих им (производящих) *многозначных* комплексных функций и обобщающую принятую в настоящее время концепцию δ *-образного источника [14] (см. также [16-18]) и др.*

Все эти неожиданные и интересные *физические* представления в алгебродинамике не привносятся извне, а генерируются внутренними свойствами самой *абстрактной математической структуры,* положенной в основу рассмотрения. Мы вернемся к рассмотрению этих вопросов в заключительном разделе, а теперь перейдем к несколько более подробному обсуждению представлений о свете и материи и времени, возникающих при анализе свойств и решений уравнений **B-***ОКР*.

3. Алгебраически генерируемые физические поля и частицы-особенности.

Основные *условия* ***B****-дифференцируемости* **B**-*значных функций* **F: B→ B** *бикватернионного (***B-)** *переменного* **Z∈ B** *имеют вид [5,13,15]:*

$$\mathbf{dF = \Phi * dZ * \Psi}, \quad (1)$$

где (*) – *умножение* **B× B→ B** *в алгебре бикватернионов (изоморфной полной алгебре комплексных 2× 2 матриц);* Φ **,Ψ : B→ B** - *т.н. полупроизводные основной функции* **F(Z)** *(см. подробнее [13,15]). Ограничиваясь рассмотрением подпространства эрмитовых матриц* **Z→ X, X≡ X⁺** *(с индуцированной определителем псевдоевклидовой метрикой Минковского) и наиболее важного исследованного случая пропорциональности одной из полупроизводных, например* Ψ **(Z)**, *основной функции* **F(Z),** *редуцируем условия (1) к лоренц-инвариантной системе уравнений вида*

$$\mathbf{d\xi = \Phi * dX * \xi}, \quad (2)$$

где ξ **(X)** – *один из столбцов матрицы компонент основной функции* **F(X).** *Т.о. каждой паре* **{Φ (X),ξ (X)},** *удовлетворяющих (переопределенной) системе уравнений (2), соответствует некоторое решение основных условий* **B**-*дифференцируемости (1). По своим трансформационным свойствам эти величины представляют собой комплексное 4-векторное и 2-спинорное поля соответственно. При этом компоненты матрицы* Φ , *интерпретируемые как 4-потенциалы, определяют напряженности (***C***-значного) электромагнитного поля, которые вследствие условий интегрируемости (2) тождественно удовлетворяют в регулярной области однородным уравнениям Максвелла (см. подробнее [5,15]).*

Для простоты в дальнейшем именно эти редуцированные уравнения (2) будем называть ***B****-обобщенными уравнениями Коши-Римана (уравнениями* **B**-*ОКР). Компоненты матрицы полупроизводной* Φ *(т.е. электромагнитные потенциалы) могут быть алгебраически выражены из уравнений (2) через компоненты основного спинора* ξ *и их производные; для последних получим тогда нелинейные уравнения (аналог уравнений Коши-Римана в комплексной алгебре) [12,15], общее (аналитическое) решение которых может быть представлено в неявном виде как решение системы двух алгебраических уравнений*

$$\Pi^{(C)}(\xi, X\xi) = 0, \quad (3)$$

где $\Pi^{(C)}$, **C=1,2** - *две (произвольные независимые) голоморфные функции 4-х комплексных аргументов - 2-х компонент спинора* ξ *и 2-х компонент спинора*

$$\tau = X\xi, \quad (4)$$

инцидентного ξ . *Здесь эрмитова матрица* **X = X⁺ = {u, w // w* v } = {ct + z, x-iy //x + iy, ct-z}** *представляет собой спинорный аналог 4-вектора координат* x_μ .

Разрешая (в неособых точках) систему уравнений (1) относительно компонент спинора ξ *для произвольно выбранных генерирующих функций* $\Pi^{(C)}$, *получаем полевое распределение* ξ **(u,w,w* ,v)=ξ (x,y,z,t)**. *При этом каждая спинорная компонента полученного решения будет тождественно удовлетворять уравнению эйконала, а их отношение - линейному волновому уравнению [12,13].*

Для отношения спинорных компонент **G(u,w,w* ,v)** *система (3) еще более упрощается, редуцируясь к одному алгебраическому уравнению вида*

$$\Pi(G, \tau_1, \tau_2) = \Pi(G, wG + u, vG + w^*) = 0, \quad (5)$$

где два последних аргумента представляют собой компоненты спинора $\tau = \mathbf{X}\xi$ *, инцидентного спинору* $\xi = \{1, G\}$. *Отметим, что в работе [12] получено явное представление для спинора электромагнитного поля* $\mathbf{F}_{(AB)}$, *сопоставляемого решениям уравнений ОКР или, соответственно, - решениям алгебраического уравнения (5):*

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P})), \quad (6)$$

где $P = d\Pi / dG$, а символами $\Pi_A, \Pi_{AB}, \ldots$, **A,B=1,2** обозначены производные функции Π *по (твисторным) аргументам* τ_1 *и* τ_2 *соответственно. Замечательно, что для любой генерирующей функции определеленные таким образом напряженности электромагнитного поля тождественно удовлетворяют (в области регулярности) вакуумным уравнениям Максвелла!*

С другой стороны, из (5) следует, что *сингулярности* электромагнитного поля соответствуют условию обращения в нуль полной производной

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = 0, \quad (7)$$

определяющему геометрическое место точек, в которых уравнение (5) имеет *кратные* корни. Пусть в каждый конечный момент времени структура сингулярного множества (7) *компактна* (ограничена в 3-пространстве); тогда такое решение определяет некоторый частицеподобный объект - источник поля. Определим электрический заряд такого сингулярного образования обычным образом, т.е. через поток вектора электрической напряженности поля через замкнутую поверхность, окружающую сингулярность. В работах [5,15] показано, что при этом *заряд любого решения* уравнения (5), определяемый через напряженности (6), *либо равен нулю, либо целократен по модулю некоторому минимальному (элементарному).* Т.о. сама по себе простая алгебраическая конструкция, задаваемая соотношениями (5), (6) генерирует решения уравнений Максвелла с квантованными значениями сингулярных источников!

Заметим, что попытки рассматривать частицы как *особенности* решений дифференциальных уравнений, в том числе уравнений Максвелла, предпринимались еще в начале века, в частности Г.Бейтманом (см.[20]). Л. де Бройль пытался дать классическое объяснение корпускулярно-волновому дуализму частиц в рамках своей концепции "двойного решения" (особенность, движение которой "гидируется" регулярной и стохастически изменяющейся частью полевого распределения). В последнее время концепция частиц как особенностей развивается А.М.Виноградовым [16,17] (в рамках т.н. "вторично квантованного" дифференциального исчисления).

Вообще в физике уже почти 100 лет имеет место парадоксальная ситуация, когда с одной стороны, основным объектом исследования остается модель точечной δ *-образной частицы, ответственная, как принято считать, за все трудности квантовой теории поля (расходимости, нарушения причинности и т.п.). С другой стороны, методы работы с сингулярными объектами, принятые в физике, оказались совершенно некорректными , как это становится очевидным по мере развития, например, теории катастроф. В частности, оказалось, что само понятие источника поля, определяемое в физике через обобщенные* δ *-функции, является далеко не самым общим и физически интересным: современная теория дифференциальных уравнений приводит вместо этого к неизбежному введению глобально многозначных решений, являющимся для нелинейных уравнений естественным аналогом решений, представляемых обобщенными функциями [17,18]. Отметим, что в рамках развиваемого алгебродинамического формализма многозначные решения возникают изначально как различные ветви комплекснозначных решений неявного алгебраического уравнения (5).*

Опрелелим теперь на решениях уравнений ОКР, задаваемых (5), действительное единичное векторное поле $\vec{n}$ (*поле направлений) с компонентами*

$$\vec{n} = \{\frac{G + G^*}{1 + GG^*}, \frac{-i(G - G^*)}{1 + GG^*}, \frac{1 - GG^*}{1 + GG^*}\}, \quad \vec{n}^2 = 1, \quad (8)$$

для которого дифференцированием уравнения (5) по координатам получим уравнение

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{n}}{\partial t} = (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{n}, \quad (9)$$

означающее, что вектор $\vec{n}$ *переносится* вдоль прямых, определяемых его собственным направлением в каждой точке 3-пространства, с фундаментальной и всюду постоянной скоростью "скоростью света" **c**. С точки зрения псевдоевклидовой 4-геометрии пространства Минковского мы имеем дело с *изотропными геодезическими конгруенциями* - пучками прямых, плотно заполняющими пространство-время.

Условие (7) кратности корней уравнения (5) отвечает *каустикам,* т.е. *огибающим* системы лучей конгруенции. Именно на "протяженных фокусах" - каустиках обращается в бесконечность напряженность электромагнитного поля (6), и, таким образом, именно (ограниченные в пространстве) *каустики являются моделью частиц* в данном подходе, обладая квантованным электрическим зарядом и динамикой, определяемой видом регулярной части соответствующей световой конгруенции. Естественно предположить, что в таком случае известная *классификация каустик как особенностей дифференцируемых отображений* [19] *может иметь непосредственное отношение к классификации элементарных частиц!*

На самом деле представление о зарядах как о *фокальных точках* некоторых световых конгруенций возникает уже в классической электродинамике. Действительно, поле движущегося по некоторой траектории точечного заряда (*потенциалы Лиенара-Вихерта*) генерируется "кулоновским" полем этого заряда в предшествующем его положении, распространяющимся с фундаментальной скоростью и достигающим точку наблюдения к данному моменту времени. Более того, конгруенции, образуемые световыми конусбми излучения заряда, составляют специальный класс т.н. *бессдвиговых* изотропных конгруенций *(см. например [9], глава 7) и могут быть все получены как решения алгебраического уравнения (5).*

Эта конструкция допускает важное обобщение. Оказывается, что большое число физически важных решений (5) возникает при формальном рассмотрении точечного заряда, движущегося по некоторой *комплексной* кривой в полном комплексифицированном пространстве Минковского **CM**. *Комплексный световой конус "излучения" такого заряда образует на вещественном срезе* **CM** *- физическом пространстве-времени световые конгруенции, каустики которых имеют уже не точечную, а гораздо более сложную структуру [21,22] (состоящую в общем случае из большого числа связных компонент различных размерностей). В частности, "керровское" кольцо радиуса* **a**, *соответствующее решению уравнения (5) вида*

$$G = \frac{w^*}{\bar{z} \pm \sqrt{ww^* + \bar{z}}} = \frac{x+iy}{(z+ia) \pm \sqrt{x^2+y^2+(z+ia)^2}}, \quad (10)$$

и генерирующееся квадратичной и независящей от времени функцией (5) вида

$$\Pi = G\tau_1 - \tau_2 + 2iaG = wG^2 + 2\bar{z}G - w^* = 0,$$

где $\bar{z} = z + ia$, $a = \mathrm{const} \in R$, *образуется "комплексно-радиальной" световой конгруенцией точечного заряда, покоящегося в "смещенной" в область комплексных координат точке пространства. В силу стационарности решения (10) даже трехмерные конгруенции, определяемые векторным полем (8), являются прямолинейными*.

Как уже упоминалось выше, важной особенностью рассматриваемых решений является их глобальная многозначность. В частности, "керровское" решение (10) двузначно, и на самом деле мы имеем здесь дело с *двумя* пучками прямых, вдоль которых происходит перенос поля. Каждая конгруенция определена лишь локально, так что при обходе сингулярного кольца происходит переход на другую ветвь.

Таким же многозначным образом ведет себя и электромагнитное поле, ассоциированное с решениями уравнения (5). Если, однако, ограничиться рассмотрением *частицеподобных* решений с компактными сингулярностями, то всегда возможно окружить их, например, сферами соответствующих радиусов и однозначно определить после этого поле и конгруенцию *во внешней области.* Физически это соответствует естественному запрету прохождения *внутрь* частицеподобных образований и в случае одномерных замкнутых особенностей по сути эквивалентно процедуре проведения разреза через некоторую "минимальную" поверхность, ограниченную сингулярным контуром (для "керровского решения" - через плоскость кольца).

С другой стороны, глобальная неоднозначность даже таких физически определенных величин, как напряженность электромагнитного поля, показывает, что истинными физическими объектами в данном подходе являются только сами частицы - сингулярности, поскольку их форма, "квантовые числа" и временная эволюция *однозначно* определяются структурой решения (выбором генерирующей функции Π *). Что касается полей, то они в силу многозначной структуры являются в некотором смысле вторичными, хотя и определяют по существу структуру частиц как собственных сингулярностей.*

То же самое можно отнести и к фундаментальным световым конгруенциям (8), каустики которых порождают рассматриваемые частцеподобные образования. Эти конгруенции можно рассматривать как некоторый первичный ("*предвечный")* свет, *"предсвет"*, ненаблюдаемый сам по себе (???), но порождающий основные частицеподобные элементы в местах "сгущения" своих лучей, т.е. *на* каустиках и *из* каустик. Представления о светоносном *эфире* и о рождающейся из света *материи*, неизбежно возникающие при анализе исходной алгебраической (*числовой)* структуры, вызывают даже ассоциации с библейскими и другими древними верованиями. Наверняка многие теологи, философы и мистики приходили к подобным картинам Мира, однако исторические вопросы требуют отдельного рассмотрения. Из известных же автору идейно близких физических работ отметим статью М.М.Смолянинова [23] (гипотеза о существовании однородной светоносной среды и индуцируемыми ею и процедурами синхронизации различными эффективными геометриями пространства-времени), а также работы Л.С.Шихобалова [24*] (концепция лучистой частицы, фактически порождаемой световой конгруенцией).*

4. "Предсвет" как время-генерирующий поток. Частицы-каустики как часы. Спин и предельная скорость.

Существование универсального эффекта “переноса” поля с постоянной фундаментальной скоростью **c** *для каждого из решений основной системы уравнений* **B**-*ОКР с самого начала определяет разницу в статусе временнуй и пространственных координат и позволяет по-новому подойти к проблеме физического времени в целом.*

Действительно, со времен объединения Г.Минковским в 1908 году пространства и времени в единый пространственно-временной континуум с псевдолевклидовой геометрией прошло уже почти 100 лет. Этот синтез, с другой стороны, "затушевал" принципиальную разницу временнуй и пространственной сущностей и мало помог пониманию таких фундаментальных проблем, как природа направления и необратимости времени, его локальности (глобальности), (не)зависимости хода времени от материальных процессов, Т-(не)инвариантности фундаментальных уравнений и т.п. В ОТО для учета специфики временнуй координаты уже давно используется т.н. “3+1 расщепление” геометрии пространственно-временного многообразия (*хроногеометрия* систем отсчета [25,26]).

Очевидно, однако, что все эти методы являются не более, чем паллиативой. На самом деле, решение многих из этих важнейших вопросов можно было бы найти уже давно, используя и развивая гениальную догадку Р. Пенроуза о *твисторной структуре* физического пространства-времени [9,27]. Согласно ей, видимая геометрия определяется существованием более простой и естественной первичной комплексной геометрии пространства твисторов $\{\xi, \tau\}$, *связанных соотношением инцидентности (4) с точками физического пространства-времени Минковского* **M**, *которое становится тем самым вторичным, со свойствами (в том числе и времени), определяемыми первичной геометрией твисторного "предпространства".*

Как ни странно, этот выдающийся физик и геометр не довел свою схему до уровня простых и наглядных физических представлений, так что твисторы для большинства физиков до сих пор остаются математически достаточно сложным и искусственно вводимым объектом. В рамках же рассматриваемой здесь реализации твисторы оказываются связанными с первичной алгебраической структурой и возникают совершенно естественно при интегрировании уравнений **B**-*ОКР*.

Действительно, при фиксированных компонентах твистора $\{\xi, \tau\}$, удовлетворяющих как следствие эрмитовости матрицы $X=X^+$ *координат* **M** *дополнительному условию "нулевой нормы"*

$$\xi^+\tau - \tau^+\xi = 0,$$

из основного соотношения инцидентности (4) пространственные координаты $\vec{\mathbf{r}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ определяются через временную переменную **t** *, остающуюся произвольной, следующим образом :*

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{ct}\vec{\mathbf{n}}, \quad (11)$$

где $\vec{r}_0 = \dfrac{Im(\tau^+\vec{\sigma}\xi)}{\xi^+\xi}$ ($\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *- матрицы Паули), а единичный вектор* $\vec{\mathbf{n}} = \dfrac{\xi^+\vec{\sigma}\xi}{\xi^+\xi}$ *в калибровке спинора* $\xi = \{1, G\}$ *совпадает с определенным ранее вектором (8) и определяет направление переноса поля твисторных компонент. Т.о. наличие твисторной структуры у физических уравнений предопределяет "излучательную" структуру всех его решений и, наряду с формальным сохранением релятивистской инвариантности, естественно реализует схему "3+1 расщепления", выделяя (достаточно простую и геометричную) эволюцию полевых распределений во времени по отношению к (весьма разнообразным и сложным) распределениям поля в 3-пространстве, т.е дает прямое указание на особую роль времени в теории.*

Возникающая картина весьма впечатляет и хорошо коррелирует с неоднократно высказывавшимися предположениями о существовании некоторого материального носителя, определяющего течение времени, особенно с концепцией А.П.Левича о *время-генерирующем потоке*. "Пространство есть среда, состоящая из предэлементов", - пишет он в статье [28], - "…Время вселенной порождается некоторым генерирующим потоком предэлементов одного из довольно глубоких уровней иерархии. … Источники вхождения во вселенную (или стоки из нее) генерирующего потока отождествляются с заряженными частицами мира". В рамках нашего подхода такой *субматериальный* время-генерирующий поток можно естественно связать с "потоком" прямолинейно распространяющихся "элементов" фундаментальных полей - "предсветовых" лучей, а электрические заряды - "источники" и "стоки" потока времени - с каустиками световых конгруенций, являющимися сингулярностями ассоциированного электромагнитного поля и несущими квантованный по величине заряд.

Существование однородного светоносного эфира, образуемого пучками прямолинейных траекторий движущихся со скоростью **c** *элементов поля, определяет единый, равномерный и необратимый ход "космического" времени. При этом каждая точка "предматерии", принадлежащая одной из частиц-каустик, становится естественными универсальными часами, отсчитывая промежутки времени по "количеству" прошедших мимо нее "элементов" поля. В каждой из инерциальных систем отсчета ход времени не зависит от распределения материи и одинаков во всем пространстве!*

Таким образом, рассматриваемый здесь подход во многом сближается с т.н. *реляционной* концепцией времени, предполагающей, что *время полностью определяется физической материей.* "Естественно ожидать", - пишет Л.С.Шихобалов [29], - "что в такой теории время будет выражаться через какие-то характеристики процессов, происходящих в физических системах. Но тогда само понятие процесса должно быть определено *до* введения представления о времени и *независимо* от него. … Совершенно не ясно, как это можно сделать." Положенные в основу теории твисторные переменные и *отношения* между ними, задаваемые функциональными зависимостями типа (1),(2), как раз и позволяют, через соотношение инцидентности (4), *реконструировать физический процесс,* эволюцию во времени и саму геометрию пространства-времени и, по сути, *определить как таковое само физическое время .*

Заметим, что идейно такой подход близок и к развиваемой в работах Ю.С.Владимирова концепции *бинарной геометрофизики* [30], в которой как динамика частиц, так и геометрия пространства-времени является следствием лишь некоторых фундаментальных отношений между "предматериальными" объектами (интерпретируемыми как "*in-out*" *состояния "предчастиц").*

На примере "керровского" частицеподобного решения с кольцевой сингулярностью рассмотрим теперь, каким образом феномен переноса поля с универсальной скоростью **c** *совместим с возможностью движения каустик-частиц со скоростями, отличными от скорости света. Совершая преобразование буста в направлении оси симметрии OZ над фундаментальным решением (10), получим новое решение с сингулярным кольцом того же радиуса (т.е. поперечные размеры остаются неизменными), плоскость которого перемещается параллельно оси OZ со скоростью* $\mathbf{v} = \mathbf{th}\theta < \mathbf{c}$ *. При этом через каждую точку кольца проходит один из лучей образующей конгруенции, причем легко показать, что угол наклона* α *луча к плоскости кольца одинаков для всех точек и равен* $\sin\alpha = \mathbf{v} / \mathbf{c}$*. Разложение полной скорости* **c** *переноса* *поля через каждую точку кольца дает тогда две составляющие: трансляционную* **v**, *определяющую поступательное движение кольца как целого, и внутреннюю вращательную* **u**, *причем имеем*

$$\mathbf{v}^2+\mathbf{u}^2=\mathbf{c}^2=\mathbf{const}.$$

В частности, для покоящегося кольца происходит перенос поля вдоль кольца (по касательной в каждой точке) со скоростью света, т.е. покоящаяся каустика-частица *с необходимостью должна обладать внутренним вращением.* В рамках ОТО это вращение сингулярного кольца решения Керра-Ньюмена естественно связано с полным моментом количества движения - *спином* частицеподобного образования, пропорциональным радиусу кольца.

Для каустики-частицы, движущейся со скоростью, близкой к **c**, *скорость вращения* **u** *уменьшается и стремится к нулю при* $\mathbf{v}\to\mathbf{c}$. *Что касается тахионных решений, то в данной модели они просто не могут реализоваться, поскольку структура сингулярности при бусте с параметром* $\mathbf{th}\theta=\mathbf{v}>\mathbf{c}$ *изменяется качественным образом и становится некомпактной, а ассоциированное с таким решением электромагнитное поле не имеет уже электрического заряда и представляет собой сингулярный волновой фронт, скорость распространения которого опять-таки оказывается равной (а не большей!)* **c** (*см., например, [1]).*

Таким образом, твисторная "предгеометрия" совместно с естественно порождаемой ей структурой каустик-частиц приводит к некоторым общим заключением о характере движения последних, а именно 1) о запрете сверхсветовых скоростей и о взаимно дополнительном характере поступательного и вращательного движений и 2) о неизбежности существования внутреннего вращения со скоростью **c** *(спина) для всех устойчивых каустик-частиц.*

Мы ограничим этим рассмотрение общих физических свойств частиц, вытекающих из их интерпретации в качестве каустик. Повторим лишь, что классификация каустик и волновых фронтов, интенсивно развивающаяся сейчас в рамках теории катастроф и ее обобщений [19], может иметь прямое отношение к классификации элементарных частиц и объяснению спектра их характеристик.

5. Основные принципы "неопифагорейского" подхода к построению физических теорий.

В предыдущих разделах было показано, что чисто абстрактная математическая структура (в данном конкретном случае – структура "аналитических" функций в алгебре комплексных кватернионов **B***) однозначно ведет к представлениям о некотором мире локализованных (в "предпространстве") и изменяющихся (в "предвремени") сингулярных частицеподобных образований. Во многих отношениях этот виртуальный мир, целиком закодированный в единственном инвариантном 4-х символьном соотношении (1), удивительно напоминает реальный. Более того, возникающие при рассмотрении этого соотношения вторичные математические структуры (твисторная, калибровочная, самодуальная, риманова, струнная и т.п.) оказываются как раз теми фундаментальными структурами, которые используются в современной теоретической физике для описания наблюдаемых свойств элементарных частиц и их взаимодействий. Аналогичным образом и характеристические уравнения этих структур, возникающие как прямое следствие первичных уравнений* **B**-*дифференцируемости, представляют собой в основном известные уравнения физических полей.*

Однако отношения между этими структурами и их внутренние связи оказываются далеко не тождественными известным из формализма квантовой теории и ОТО, а во многих случаях представляются совершенно неожиданными, математически красивыми и более адекватными наблюдаемой физике (как, например, в случае естественно возникающего квантования электрического заряда). Тем самым внутренняя структура исходных уравнений, казалось бы не предполагающая *никакой связи с физической реальностью, открывает совершенно новые возможности для ее описания даже в рамках общепринятой гносеологической парадигмы.*

Пока что, разумеется, нет никаких оснований считать, что рассмотренная модель – это "истина в последней инстанции", дающая полное и описание физической реальности на основе единого общего принципа, т.е. что, иначе говоря, *наш Мир есть комплексно-кватернионное многообразие с динамикой, полностью определенной структурой аналитичности в этой алгебре.* Более того, требование аналитичности или даже гладкости является весьма жестким ограничением с точки зрения математики и, возможно, должно быть исключено вообще. Однако как пример возможностей принципиально нового подхода к построению *физических* теорий рассмотренная реализация может считаться вполне успешной и даже впечатляющей. На этой основе мы в заключение и сформулируем главные принципы общей "неопифагорейской" программы в том виде, как она представляется в настоящее время.

1. В основе Природы лежит некоторый первичный Принцип *(Код, Алгоритм, Метазакон),* имеющий чисто абстрактное математическое происхождение. Все известные т.н. “законы природы”, полученные из эксперимента, либо *являются прямыми следствиями* этого единственного исходного принципа либо вообще не имеют отношения к правильному описанию природы и *лишь случайно приближенно выполняются при определенных условиях.*

2. *В современных условиях новые эксперименты мало что могут добавить к нашему пониманию окружающего мира. Фундаментальные законы природы следует изучать не в лаборатории (в экспериментах с частицами), а главным образом “на бумаге” (ставя “эксперименты” над самими математическими структурами (В.И.Арнольд, см. [1])). При этом может оказаться, что господствующие физические теории и представления (даже такие красивые, как ОТО) не имеют никакого отношения к реальности, и о принципе соответствия в принятом в настоящее время смысле вообще придется забыть.*

3. *В основании первичного Принципа и, как следствие, устройства Вселенной лежит некоторая объективно существующая математическая структура (скорее всего, числовая или/и логическая), исключительная по своим внутренним свойствам. Вселенная представляет собой своего рода реализацию (“материализацию”) этой первичной структуры.*

4. *Каждая математическая структура является является в каком-то смысле объективно существующей и соответствует некоторому отвечающему только ей “миру”. Однако большинство таких структур и соответствующие им “миры” являются, скорее всего, вырожденными. Только одна уникальная структура кодирует наш мир вплоть до структуры возникающего в нем наблюдателя (это есть своего рода математическая версия известного антропного принципа), и задача состоит в ее нахождении и исследовании. Тем не менее, нельзя исключить, что существует несколько (или даже бесконечно много) исключительных структур, генерирующих “параллельно сосуществующие” миры. На сегодняшнем уровне понимания говорить об их возможных взаимоотношениях (взаимодействиях) преждевременно.*

5. *Одним из признаком уникальности и невырожденности первичной структуры является, по-видимому, множество эквивалентных способов (разнообразие языков) ее описания. Например, исключительная алгебраическая структура, положенная в основу “метатеории”, должна порождать исключительную геометрию пространства-времени, соответствовать уникальной топологии, иметь необычную группу автоморфизмов и т.п. При этом, наоборот, можно исходить из любой из вышеперечисленных структур, индуцирующих остальные свойства. Первичная фундаментальная структура есть некоторая абстрактная сущность, допускающая большое количество эквивалентных математических описаний и соответствующих им физических интерпретаций).*

6. *При выборе кандидата на роль первичной структуры нельзя ограничиваться известным и используемым в физике набором (дифференциальные уравнения, расслоенные пространства, риманова геометрия и т.п.). Не следует и навязывать природе своих физических представлений (пространство-время как многообразие, калибровочные поля как переносчики взаимодействий, корпускулярно-волновой дуализм и вероятностная квантовая парадигма и т.п.). Только не связывая себя заранее догмами ортодоксальных теорий можно надеяться обнаружить принципиально новые, истинные способы описания природы, закодированные в первичной структуре. В шутку можно сказать, что законы Природы должны открывать математики, не знающие физики. Говоря же всерьез, следует опираться только на наиболее общие и неконкретные свойства окружающего нас Мира – например, на факт существования нескольких классов тождественных по внутренним свойствам объектов (частиц, кварков, субкварков – не важно!), обладающих способностью к объединению (слиянию, взаимодействию) и образованию иерархий по отношению к разным пространственно-временным масштабам.*

7. *Изначально имеет смысл предполагать также, что первичная физика должна быть существенно нелокальной, и именно глобальные свойства пространства-времени и глобальную динамику ("сверхпричинные глобальные корреляции") должна в первую очередь кодировать первичная структура! Действительно, существующая локальная физика возникла просто как результат ограничения человеческой практики и экспериментов чрезвычайно малыми по размерам и длительности областями. С точки зрения математики и философии общего "пифагорейского" подхода очевидно, что основным языком физики должен быть язык топологии, отображений и функциональных уравнений (подробнее см. статью автора [34], раздел 3).*

8. *После выбора кандидата на роль первичной структуры ее анализ, прочтение ее свойств должно проводиться жестким дедуктивным путем и, в частности, исключить всякую возможность введения в*

схему феноменологических, подгоночных параметров "для лучшего описания наблюдаемых закономерностей". В противном случае мы никогда не поймем истинный язык Природы! Математические свойства положенной в основу первичной структуры должны быть прослежены до такой стадии, когда физическая интерпретация возникающих абстрактных структур и характеристических уравнений станет самоочевидной (хотя, возможно, и не единственной, см. пункт 5). При отсутствии возможности естественной идентификации внутренних свойств структуры с физической реальностью следует не "улучшать" или "добавлять", а полностью менять исходную структуру и повторять исследования с другим кандидатом.

В заключение хотелось бы отметить, что предлагаемый радикально новый подход к построению физических теорий на первых порах может оказаться практически малоэффективным и неблагодарным. Действительно, даже "угадав" исключительную первичную структуру, положенную Творцом в основу Мироздания (а, скорее всего, лишь приблизившись к ее пониманию), трудно надеяться сразу же воспроизвести всю эффективную феноменоменологию описания природы, которая была создана (и продолжает созидаться, в том числе в рамках *суперструнной* парадигмы) поколениями выдающихся ученых (в частности, понять происхождение Стандартной модели или вывести из абстрактной схемы *превосходящую* ее по эффективности описания альтернативную модель). Не следует поэтому на первых порах и требовать от подобных общих подходов каких-то новых предсказаний, проверяемых экспериментально. Всему свое время. Наше глубокое убеждение, основанное на уже реализованной и представленной выше алгебродинамической схеме, состоит в том, что именно понимаемая в современном смысле (и не имеющая ничего общего с примитивной нумерологией) "пифагорейская" философия позволит совершенно по-новому взглянуть на природу физических законов и на роль фундаментальной математики в их структуре. В конце концов, *только и именно такой подход и способен приблизить нас к пониманию истинного Плана Творца.*

Литература.

1. Арнольд В.И. // Успехи мат. наук, **53**, *(1998), 229; Успехи физ. наук,* **169**, (1999), 1311
2. *Симаков М.Ю. Пифагорейская программа. - М., изд-во "Диалог МГУ", 1997*
3. *Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. - М., "Наука", 1989. С.218*
4. *Эйнштейн А. Полное собрание сочинений. Т.2. - М., "Наука", 1966. С.286*
5. *Кассандров В.В. Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. - М., изд. РУДН, 1992*
6. Kassandrov V.V. // Gravit. & Cosmol. (Moscow), **3**, (1995), 216; (Preprint gr-qc / 0007027)
7. Kassandrov V.V. // Acta Applic. Math., **50**, (1998), 197
8. *Kassandrov V.V. // В сб. "Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике", ред. Лыхмус Я.К., Кууск П. - Таллинн, ИФ АН Эстонии, вып. 66, (1990), с. 202*
9. *Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т.2. - М., "Мир", 1988*
10. *Эйнштейн А. Полное собрание сочинений. Т.4. - М., "Наука", 1967. С.109*
11. Ranada A.F., Trueba J.L. // Phys. Lett., **202A**, (1995), 337; **235A**, (1997), 25.

    Ranada A.F. // An. Fis. (Madrid), **A87**, (1991), 55; (Preprint hep-th / 9802166)

12. Kassandrov V.V., Rizcalla J.A. // Preprint gr-qc / 0012109
13. *Кассандров В.В., Ризкалла Ж.А. // В сб. "Новейшие проблемы теории поля", ред. Аминова А. В. Казань, изд. КГУ, 1998. С. 176; (Preprint gr-qc / 9809078)*
14. Kassandrov V.V., Trishin V.N. // Gravit. & Cosmol. (Moscow), **5**, (1999), 272 (Preprint gr-qc / 0007026)
15. *Кассандров В.В. // Вестник РУДН, сер. Физика,* **8(1)**, (2000), 36
16. Vinogradov A. M. // J. Geom. Phys., **14**, *(1994), 146 (см. перевод: приложение к книге "Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики". - М., "Факториал", 1980. С.207)*
17. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. - М., "Наука", 1986.*
18. *Лычагин В.В. // В сб. "Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т.20." - М., ВИНИТИ, 1980.*
19. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Том 1,2. - М., "Наука", 1982,1984*

    Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов.- М., "Фазис", 1996

20. *Бейтман Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. - М., ГИФМЛ, 1958*
21. Newman E.T. // J. Math. Phys., **14**, (1973), 102;

    Lind R.W., Newman E.T. // J. Math. Phys., **15**, (1974), 1103

22. *Burinskii A.Ya., Kerr R.P., Perjüs Z. // Preprint gr-qc / 5901012*
23. *Смолянинов М.М. // Успехи физ. наук,* **170**, (2000), 1064
24. *Шихобалов Л.С. // Вестник СПбГУ, Сер.1, вып.3, (1997), 109; вып.4, (1999), 118*
25. *Зельманов А.Л. // Доклады АН СССР,* **107**, (1956), 815;

Зельманов А.Л., Агарков В.Г. Элементы общей теории относительности. - М., "Наука", 1989. Часть IV.

26. *Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. - М., "Энергоиздат", 1982*
27. Penrose R., MacCallum M. A. H. // Phys. Rep. C, **6**, (1973), 241
28. *Левич А.П. // В сб. "Конструкции времени в естествознании: на пути понимания феномена времени.", ред. Левич А.П. - М., изд-во МГУ, 1996. С.276; 279*
29. *Шихобалов Л.С. // Вестник СПбГУ, отд. РАЕН, №1 (4), (1997), 369*
30. *Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть I, II. - М., изд-во МГУ, 1996, 1998.*
31. *Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. - Новосибирск, изд. НГУ, 1968; Доклады АН СССР, 201, (1968), 570*
32. Carter B. Phys. Rev., **174**, (1968), 1559
33. *Хокинг С. Черные дыры и молодые вселенные. - СПб, "Амфора", 2001. С.139*

34. Кассандров В.В. // В сб. "Взаимосвязь физической и религиозной картин мира. Физики-теоретики о религии.", ред. Владимиров Ю.С. - Кострома, 1996. С.138
35. Дмитриевский И.М. Новая фундаментальная роль реликтового излучения в физической картине мира. - // "Полигнозис", 2000, № 1
36. Шелаев И.А. Введение в необратимую электродинамику. - Дубна, 1999

37 Милнор Дж. Голоморфная динамика. - Ижевск, "R&C Dynamics", 2000

Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. - М., "Мир", 1993

Abstract

The Ultimate physical theory should be based on of some exeptional mathematical structure, whose properties fully encode physical reality. Peculiar features of such approach (which claims to revive Pythagorean philosophy) are illustrated in the framework of the algebraic field theory ("*algebrodynamics*"). In it, the basic field equations follow only(!) from the "*generalized Cauchy-Riemann equations*" (GCRE) for the functions of quaternion-type variable and appear to be nonlinear, over-determined and gauge invariant. Purely mathematical properties lead directly to some general conclusions about particles (as *caustics* of the light congruences arising from GCRE), their properties (e.g., existence of the *elementary electric charge* and *spin*), as well as about the nature of time and Lorentz-invariant "aether". In conclusion, some general principles of the new approach to the construction of fundamental physical theories are formulated.

АЛГЕБРОДИНАМИКА: КВАТЕРНИОНЫ, ТВИСТОРЫ, ЧАСТИЦЫ

В.В. Кассандров
Кафедра общей физики,
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, e-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Аннотация

Представлены основные принципы и результаты алгебродинамического (АД) подхода к теории поля, в котором уравнения физических полей следуют из нелинейных *обобщенных уравнений Коши-Римана* (ОУКР) - условий дифференцируемости функций бикватернионного переменного. Частицы рассматриваются как сингулярности (точки, струны, мембраны) соответствующих функций-полей; их форма и временная эволюция определена первичными ОУКР, а электрический заряд оказывается квантованным. АД-подход тесно связан с твисторными структурами Пенроуза и с теорией особенностей Тома - Арнольда. Обсуждаются свойства возникающих в теории *условий комплексной самодуальности*: их связь с уравнениями Максвелла и Вейля, с условием квантования электрического заряда и с проблемой магнитного монополя.

The algebrodynamics: quaternions, twistors, particles

Vladimir V. Kassandrov
Department of General Physics,
Peoples' Friendship University of Russia,
117198, Moscow, Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., e-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Аннотация

We present basic principles and advances of the *algebrodynamical* (AD) approach to field theory in which the conventional field equations follow from nonlinear *generalized Cauchy-Riemann equations* (GCRE) – the differentiability conditions for the functions of biquaternionic variable. Particles are considered as singularities (points, strings, membranes) of corresponding functions-fields; their shape and time evolution are completely determined by the original GCRE, and the electric charge is quantized. AD-approach is deeply related to Penrose twistor structures as well as to Thom-Arnold' theory of singularities. We discuss also *the conditions of complex self-duality* arising in theory: their relations to Maxwell and Weyl equations, to the quantization of electric charge, and to the magnetic monopole problem.

Введение

1. Существует две различные системы взглядов на природу частиц, полей и взаимодействий. Первая из них считает язык квантовой теории первичным, истинным языком Природы, для более глубокого понимания которого надо еще в большей степени отказаться от неадекватных в микромире классических представлений.

Другая система взглядов рассматривает возможность сохранения пространственно-временной динамики и языка классической теории поля при описании свойств элементарных частиц, а квантовые явления связывает с нелинейными (взаимодействия и реакции), топологическими (дискретность характеристик и устойчивость) и стохастическими (корпускулярно-волновой дуализм и принцип неопределенности) свойствами.

Такие представления (можно назвать их парадигмой *нелинейной классической теории поля*) вполне созвучны с современными идеями о многомерности пространства-времени (в теории струн и теориях Калуцы-Клейна) и с гипотезой о чисто геометрическом происхождении всех физических полей (единые теории Вейля-Эйнштейна, геометродинамика Райнича-Уилера, отчасти многомерные и струнные теории) . Наряду с имеющими уже очевидно важную роль нелинейно-топологическими структурами (солитоны, инстантоны, вихри) все эти концепции в своей основе *чисто классичны*, и лишь эклектично сочетаются с квантовыми представлениями.

сической, и этот процесс будет, скорее всего, продолжаться и далее. Действительно, развитые в ней алгоритмы расчетов, связанные с использованием *линейных структур* и позволяющие эффективно учесть нелинейность через процедуру вторичного квантования и теорию возмущений, во многом уже исчерпаны. Это означает, что квантовая теория будет вынуждена обратиться (и этот процесс уже давно идет) к точным методам анализа сложных нелинейных систем уравнений для взаимодействующих полей, т.е. по существу вернуться к решению основной и технически сложной проблемы классической теории поля. Однако, несмотря на все усилия, систематических методов интегрирования реалистических систем уравнений взаимодействующих полей до сих пор не разработано (точно интегрируемые модели к фундаментальным уравнениям, как правило, не относятся). К выбору альтернативы (между квантовыми и классическими представлениями) поэтому имеет смысл вернуться лишь после получения сложных (например, многосолитонных) решений в реалистических моделях и анализа их внутренних свойств *as they are* (о солитонной интерпретации барионов в модели Скирма см., например, работы [1, 2]; о солитонах в модели Максвелла-Дирака – работу автора [3]).

Среди современных методов интегрирования дифференциальных полевых уравнений наиболее впечатляют методы, связанные со сведением их решений к решению *чисто алгебраических* задач. Эта программа "алгебраизации" была впервые реализована в работах [6] и затем [7] на примере самодуальных решений уравнений Янга-Миллса, а в работе [8] - для нахождения важного класса решений электровакуумной системы Эйнштейна-Максвелла. В работе [9] предпринималась попытка свести нелинейную систему уравнений для взаимодействующих дираковского и ЯМ полей к уравнениям Коши-Римана. Не входя в детали, отметим лишь, что возможность алгебраизации этих систем оказалась связанной с существованием у них скрытой симметрии - *твисторной структуры.* Твисторы, введенные в рассмотрение Р. Пенроузом [10], по-видимому, действительно являются фундаментальным объектом, тесно связанным с геометрией физического пространства-времени Минковского (а возможно, и первичным по отношению к нему). Мы будем существенно использовать твисторы в данной работе.

3. Интересным открытием последнего времени явилось обнаружение новых классов регулярных решений у уравнений Янга-Миллса (инстантоны), Янга-Миллса-Хиггса (монополь т'Хофта-Полякова), Эйнштейна (гравитационные инстантоны). Однако самым неожиданным представляется открытие новых классов решений у, казалось бы, изученных "вдоль и поперек" линейных (вакуумных) уравнений Максвелла (УМ). Тем не менее, в работах А. Ф. Раньяды [12] был обнаружен класс т.н. *knot-like solutions* ("заузленных решений") с нетривиальной топологией (соответствующий "заряд" автоматически квантован и интерпретируется как спиральность). В наших работах [47, 51] получен большой набор решений вакуумных УМ с разнообразной структурой сингулярного множества (0-, 1- и 2-мерного) и нетривиальной динамикой. Значительное число таких решений локализовано в 3-пространстве и, как солитоны, могут при определенных условиях (см. ниже) рассматриваться в качестве *частицеподобных* образований.

В обоих подходах УМ рассматриваются не сами по себе, а как тождественные следствия некоторой первичной нелинейной системы полевых уравнений (концепция т.н. "скрытой нелинейности" [11]). Существование такой "надсистемы" отбирает некоторый подкласс из всего множества решений УМ (прочие удовлетворяют УМ, но не удовлетворяют более жесткой первичной системе). Только этот подкласс и является "физическим" с точки зрения рассматриваемого подхода. Нелинейность первичной системы при этом предопределяет наличие некоторых жестких "правил отбора" как на начальные полевые распределения, так и на их временну́ю эволюцию. Первое свойство (в сочетании с *переопределенностью* первичной системы – идея, принадлежащая А. Эйнштейну [13] – приводит к возможности на чисто классическом уровне рассмотрения "заработать" дискретный спектр физических характеристик частицеподобных объектов (в обсуждаемых подходах – целочисленность электрического заряда, см. раздел 4). Что же касается динамики, то несмотря на линейность самих УМ, нелинейность первичной системы нарушает принцип суперпозиции и предопределяет нетривиальный характер временной эволюции частицеподобных объектов, моделирующий их "взаимодействие" и даже взаимопревращение, в том числе с изменением топологических характеристик.

Таким образом, в подходах, использующих концепцию "скрытой нелинейности", *в отличие от обычных схем нелинейной электродинамики, вакуумные УМ выполняются абсолютно*, во всем проместо все черты и преимущества, свойственные существенно нелинейным моделям.

4. Важно понимать, что ни выбор в пользу моделей со скрытой нелинейностью, ни какие-либо другие *априорные* установки сами по себе не определяют математический тип решений, ассоциируемых с частицами: термин "частицеподобное" употреблен выше в самом широком смысле и предполагает только а) ограниченность полевого распределения в пространстве в каждый конечный момент времени и б) его известную устойчивость, т.е сохранение структуры распределения на протяжении некоторого конечного интервала времени (вплоть до ухода на бесконечность или превращения в другую(ие) аналогичные структуры). Иначе говоря, в принципе можно описывать частицу с помощью решений *солитонного* типа. Можно сделать выбор и в пользу модели частицы как протяженного, но ограниченного в 3-пространстве *сингулярного* образования; известно, что именно такой интерпретации придерживался Л. де Бройль и А. Эйнштейн в первой половине жизни (в конце он перешел в "солитонную" религию). Наконец, вполне вероятно, что наиболее близкими к реальности окажутся те модели, которые сейчас кажутся экзотическими, в частности модели с *фрактальной* структурой полевого распределения и/или самого пространства-времени (ПВ).

5. Неоднозначность в выборе решений, отвечающих элементарным микрообъектам, не является, впрочем, фундаментальной (в принципе, могут даже использоваться различные их типы в рамках одной и той же модели). Главной проблемой как в рамках квантовой, так и классической парадигмы является *полная неопределенность в выборе самих исходных уравнений* и общих принципов, на основе которых их следует отбирать. Из всего богатства возможностей, предлагаемых современной математикой, в физике используется по существу лишь все та же вариационная процедура вывода уравнений и два общих принципа отбора – релятивистская и калибровочная инвариантность. Более того, все используемые в настоящее время уравнения, несмотря на математическую красоту и успешные применения, *недостоверны* и в известной мере случайны, поскольку не *получены* из некоторого единого принципа, а *придуманы* с целью наиболее эффективного описания экспериментов. Их недостоверность связана с отсутствием уверенности в том, что именно известные на сегодня уравнения предлагают единственно возможный язык для описания Природы, и что не существует другого языка, более адекватного действительной структуре Вселенной. Никакие новые эксперименты и никакие усовершенствования известных теоретических подходов, концепций и уравнений не способны приблизить нас к пониманию этой структуры, хотя и могут сделать более простым и полным описание ее наблюдаемых свойств. По Платону, мы ловим только *тени* истинных свойств и первичных структур Мироздания.

6. Где же выход? Возможно, он состоит в том, чтобы искать сам основной принцип, Код Вселенной, безотносительно к задачам описания конкретного класса явлений и по возможности *забыв на время общепринятый язык теоретической физики и даже сами известные нам свойства окружающего мира.* Этот Принцип может быть сформулирован только на языке Чисел, на языке абстрактных математических структур (другого пригодного языка мы просто не знаем!). Такие первичные структуры *должны быть исключительными* по своим внутренним свойствам, и наша задача состоит в том, чтобы *раскрыть* их в полной мере, не добавляя по дороге ничего "от себя", с целью их подгонки под наблюдаемые, внешние явления [4]. Только в этом случае и через них мы можем прикоснуться к действительной, внутренней сущности устройства Вселенной. В.И.Арнольд образно выразил эти взгляды, заметив, что в математике мы ставим такие же эксперименты над числами, функциями или пространствами, как физики над частицами, только математические эксперименты дешевле и безопаснее. К этому осталось только добавить, что именно законы объективно существующих математических структур и предопределяют законы физического мира (по существу и *есть* эти законы!). В этом случае говорить о какой-то "непостижимости" математики в естественных науках [14] уже не приходится.

6. Серьезных попыток построения физических теорий, основанных на подобных "неопифагорейских" представлениях, не так уж много, и до сих пор они не привели к каким либо значительным успехам. Помимо уже отмеченной выше работы Ю. И. Манина, следует сказать о работах А. Эддингтона [15] (теория E-чисел), Д. Хестенеса [16] (алгебра ПВ), Ю. И. Кулакова [17] и Ю.С. Владимирова

в последние годы жизни.

Во многих работах подобного рода в основу построения закладывались свойства замечательной алгебры, открытой У. Гамильтоном в 1843 году - алгебры кватернионов $\mathbf{Q}$. Эта алгебра размерности $n=4$ над $\mathbf{R}$ имеет группу симметрии (группу *автоморфизмов*) $Aut(\mathbf{Q}) \cong \mathbf{SO(3)}$, изоморфную группе вращений 3-мерного пространства (алгебра $\mathbf{C}$ комплексных чисел, вопреки распространенным представлениям, вообще не обладает никакими непрерывными симметриями). Однако попытки использования исключительных свойств алгебры кватернионов для объяснения физического мира, предпринимавшиеся еще самим Гамильтоном и его последователями, не привели к успеху, поскольку кватернионный анализ, построенный по аналогии с комплексным, оказался вырожденным, а группа $SO(3)$ никак не расширялась до группы симметрии физического ПВ – группы Лоренца. В фундаментальной физике до сих пор использовались в основном комплексные кватернионы – т.н. *алгебра бикватернионов* $\mathbf{B}$, изоморфная алгебре 2×2 матриц с комплексными числами в качестве элементов (базис этой алгебры образуют хорошо известные в физике спиновые матрицы Паули). Алгебра $\mathbf{B}$ использовалась в основном для компактной записи основных уравнений физики, например УМ, в виде, похожем на хорошо известную их запись с помощью внешних форм Картана. С применением кватернионов в релятивистской физике можно ознакомиться, например, по работам [19, 20]. В РУДН интересное использование комплексных кватернионов, основанное на концепции 3-мерного времени и математически – на изоморфности группы $SO(3,\mathbf{C})$ автоморфизмов алгебры $\mathbf{B}$ группе Лоренца, – было предложено в работах А. П. Ефремова [21] (кватернионная теория относительности, q-базис и др.).

7. С другой стороны, в работах автора, начиная с 1980 года (см. ссылки в [4]), была предложена новая версия построения (би)кватернионного анализа, в которой обобщенные условия Коши-Римана (ОУКР) оказывались нелинейными как следствие *некоммутативности* алгебр $\mathbf{Q},\mathbf{B}$. В частности, аналогом уравнения Лапласа при этом служит нелинейное уравнение "волнового фронта" (уравнение *эйконала*), а в случае алгебры $\mathbf{B}$ вся теория лоренц-инвариантна. На этой основе была развита т.н. *алгебродинамика* – нелинейная, нелагранжева, конформная, существенно переопределенная теория поля, в которой физические поля рассматривались как $\mathbf{B}$-значные функции бикватернионного переменного (аналог $\mathbf{C}$-аналитических функций), а их условия дифференцируемости – ОУКР – как единственные исходные уравнения динамики (по аналогии с лагранжианом стандартных теорий поля). Важно, что никаких дополнительных предположений математического либо физического свойства не делалось, т.е. система ОУКР и соответствующие ей функции-отображения рассматривались независимо от какой-либо физической феноменологии.

Несмотря на это, оказалось, что система ОУКР обладает естественной спинорной и калибровочной структурами, а отвечающие основным полям "полупроизводные" (некоммутативные аналоги производной $\mathbf{C}$-аналитических функций, см. раздел 1) однозначно интерпретируются как потенциалы *электромагнитного* поля, тождественно удовлетворяющего при этом вакуумным УМ (последние являются при этом условиями интегрируемости ОУКР). По отношению к УМ первичные ОУКР реализуют представленную выше концепцию скрытой нелинейности, обеспечивая, в частности, квантование электрического заряда для всех "отбираемых" ими решений.

8. Предварительные результаты исследования системы ОУКР и их физических следствий изложены в монографии автора [4] и в работах [5, 22, 23, 24]. В последующих работах [47, 48, 46, 50], в сотрудничестве с Дж. А. Ризкалла, был получен ряд общих результатов для наиболее интересного случая (равенства одной из полупроизводных основной $\mathbf{B}$-функции), когда геометрическая и физическая интерпретация становятся особенно прозрачными. Для ассоциированных с такими функциями-отображениями физических полей, помимо уравнения эйконала и УМ, тождественно выполняются также уравнения Янга-Миллса, уравнения д'Аламбера и (по крайней мере для стационарных решений) электровакуумные уравнения Эйнштейна-Максвелла. Таким образом, *большое число фундаментальных уравнений физики оказывается прямыми следствиями ОУКР*! В рассматриваемом случае система ОУКР, получившая название *генерирующей* системы уравнений (ГСУ), обладает *твисторной* структурой, а ассоциированная с основным $\mathbf{B}$-полем светоподобная конгруенция обладает рядом интересных и широко используемых в ОТО свойств, а именно оказывается *бессдвиговой* (см. раздел 5).

орему Керра и сводящую дифференциальных уравнений ГСУ к решению неявного алгебраического уравнения. В работах [5, 47, 49, 50] была также развита концепция "слабой" калибровочной инвариантности (с калибровочным параметром, зависящим от координат *неявным* образом, т.е. только через преобразуемое решение) и выявлена полная группа слабых абелевых калибровочных преобразований для ГСУ, тесно связанная с проективными преобразованиями в твисторном пространстве – конструкция, совершенно новая для теории поля (см. раздел 2).

9. Сведение решений ГСУ к алгебраическому уравнению позволило простым образом генерировать достаточно сложные ее решения и сопоставляемые им решения известных уравнений поля, в том числе УМ. На этом пути, в частности, было обнаружено бисингулярное решение и электрически нейтральное решение с динамически *перестраивающейся* (из кольца в тор) структурой сингулярного множества [48, 49, 50]. Сингулярная структура вообще является общей для всех полей, ассоциируемых с исходным решением ГСУ, и (в случае ее ограниченности в 3-пространстве) естественно интерпретируется как частицеподобный объект, а ее динамические перестройки – как *взаимопревращения* частиц (см. раздел 6).

Основной моделью электрона при этом является стационарное решение ГСУ с *кольцеобразной* сингулярностью, обладающее фиксированным (*элементарным*) электрическим зарядом, а в остальном являющееся полным аналогом решения Керра-Ньюмена (КН) в ОТО. Из сопоставления с ним решение ГСУ наделяется массой и спином, причем из ОТО известно [25], что гиромагнитное отношение для решения КН $g = 2$, т.е. имеет значение, соответствующее дираковской частице! Т.о. решение КН правильно воспроизводит все основные характеристики электрона, а в нашем подходе к тому же фиксирует значение его заряда. Особенно отметим, что никаких трудностей принципиального характера (расходимости, нарушения причинности и т.п.), связанных с сингулярным характером отвечающих частицам решений ГСУ, в рассматриваемом подходе не возникает, поскольку как динамика, так и "квантовые числа" сингулярных образований вполне определены и следуют из самой ГСУ.

10. С математической точки зрения, развиваемый подход к теории *частиц как протяженных сингулярностей* близко примыкает к т.н. "теории катастроф" или теории *особенностей дифференцируемых отображений* [26, 27] (популярное изложение можно найти в [29, 28]). При фиксированном числе "управляющих" параметров и размерности пространства отображения количество типов возможных особенностей и их непрерывных "перестроек" (аналога изменений во времени), как правило, конечно, невелико и в простейших случаях полностью классифицировано (так, например, в 3-х мерном пространстве в системах с одним управляющим параметром имеется 7 типов, впервые перечисленных в работе Р. Тома [30].

Из всех возможных особенностей и их перестроек в конкретной динамической системе реализуются только некоторые (ограничения дифференциальной природы приводят к топологическим запретам). В частности, в геометрической оптике особенности волновых фронтов и каустик (геометрических мест самопересечения световых лучей, т.е. "протяженных фокусов") определяются ограничениями, налагаемыми уравнением эйконала [27].

В силу существования структуры бессдвиговых световых конгруенций для каждого решения рассматриваемой ГСУ каустики естественно возникают и в рамках нашего подхода. Именно на каустиках обращается в бесконечность электромагнитное и метрическое поля, сопоставляемые решениям исходной ГСУ. С этой точки зрения *частицы представляют собой* не что иное, как (ограниченные в пространстве) *каустики первичных световых конгруенций*, а их форма и временная эволюция полностью определяются видом этих последних (в регулярной их части). При этом *классификация каустик и их перестроек может иметь прямое отношение к классификации элементарных частиц и их взаимодействий.*

11. Ниже мы делаем краткий обзор ранее установленных симметрий и свойств решений ГСУ (отсылая за доказательствами к нашим цитированным выше работам и к диссертации [49]). Затем изучаются связи УМ и уравнений Вейля с условиями интегрируемости ГСУ – *условиями комплексной самодуальности.* Показано, что целочисленность электрического заряда следует из этих условий и калибровочной инвариантности теории. Обсуждается также проблема магнитного монополя в контексте

дальнейшего развития теории.

1 Бикватернионная дифференцируемость и спинорная структура

Алгебра бикватернионов $\mathbf{B}$ изоморфна алгебре $Mat(2,\mathbf{C})$ комплексных 2×2 матриц, и типичный элемент $Z\in\mathbf{B}$ представляется в виде набора $Z=\{Z_{AB}\},\ A,B=0,1$ с обычными законами матричного умножения. Рассмотрим некоторую $\mathbf{B}$-значную функцию $F(Z)$ $\mathbf{B}$-аргумента, т.е. проще говоря *функцию от матриц* с компонентами $F_{AB}(Z)\in\mathbf{C}$, комплексно аналитическими в некоторой области $\mathbf{O}\subset\mathbf{C^4}$ изменения ее аргументов Z_{AB}.

Структура алгебры локально должна проявиться в операции дифференцирования $F(Z)$: а именно, дифференциал (линейная по аргументу dZ часть приращения) $dF=F(Z+dZ)-F(Z)$ функции $F(Z)$ *должен выражаться через инвариантную* $\mathbf{B}$*-значную 1-форму*, т.е. только с помощью операции умножения в $\mathbf{B}$,

$$dF=\Phi dZ\Psi \tag{1.1}$$

(знак матричного умножения здесь и в дальнейшем опускается). В (1.1) естественно возникают две вспомогательные функции $\Phi(Z),\Psi(Z)$, которые в предшествующих работах получили название *полупроизводных* (левой и правой соответственно) от основной функции $F(Z)$. Действительно, условия дифференцируемости (1.1) могут рассматриваться для функций на любой ассоциативной алгебре, в том числе и на коммутативной алгебре с делением – алгебре $\mathbf{C}$. Однако в таком случае имеем из (1.1) $dF=(\Phi\Psi)dZ\equiv F'dZ$, и величина $F'(Z)=dF/dZ$ является обычной производной. В этом случае соотношения (1.1) эквивалентны обычным линейным уравнениям Коши-Римана.

В некоммутативном случае алгебры $\mathbf{B}$ функции Φ,Ψ алгебраически уже независимы, хотя и определены с точностью до умножения на комплексное число (действительно, условия (1.1) инвариантны при замене $\Phi\to\alpha\Phi,\Psi\to\alpha^{-1}\Psi$). Функция $F(Z)$, для которой существует некоторая пара полупроизводных $\{\Phi(Z),\Psi(Z)\}$ (определенная с точностью до некоторой скалярной функции $\alpha(Z)$) такая, что тройка $\{F,\Phi,\Psi\}$ удовлетворяет условиям (1.1), называется $\mathbf{B}$-дифференцируемой.

Разложением по столбцам (строкам) соответствующих матриц *обобщенные условия Коши-Римана (1.1)* сводятся к двум системам вида

$$d\xi=\Phi dZ\eta, \tag{1.2}$$

где, например, $\xi_A=\{F_{00},F_{10}\},\ \eta_A=\{\Psi_{00},\Psi_{10}\}$. Очевидно, что всякое решение (1.1) можно сконструировать из пары (функционально зависимых или нет) решений (1.2) (с одной и той же $\Phi(Z)$). Напротив, имея хотя бы одно решение $\{\xi,\eta,\Phi\}$ условий (1.2), можно всегда достроить его до решения исходной системы (1.1) (занулив, например, вторые столбцы матриц F и Ψ).

$\mathbf{B}$*-дифференцируемые функции в нашем подходе отождествляются с физическими полями.* Однако их аргумент Z принадлежит комплексному ПВ $\mathbf{C^4}$, и пространство Минковского выделяется в нем условием *эрмитовости* матриц координат $Z=Z^+$. Именно такая область определения независимой $\mathbf{B}$-переменной (с переобозначением элементов $Z\Rightarrow X,\ X=X^+$) и рассматривается в дальнейшем (относительно возможной фундаментальной роли комплексного ПВ см., например, [31, 32, 5]).

С учетом ограничения области изменения аргумента система (1.2) переписывается в виде

$$d\xi=\Phi dX\eta \tag{1.3}$$

и инвариантна, в частности, относительно преобразований Лоренца, сохраняющих эрмитову структуру координатного пространства

$$X\mapsto C^+XC,\quad \eta\mapsto C^{-1}\eta,\quad \xi\mapsto C^{-1}\xi,\quad \Phi\mapsto C^{-1}\Phi(C^+)^{-1}, \tag{1.4}$$

где $C\in SL(2,\mathbf{C})$. Отсюда видно, что величины $\xi(X)$, $\eta(X)$ можно рассматривать как $SL(2,\mathbf{C})$-спиноры (хотя на самом деле их свойства инвариантности намного богаче, см. [5]), а матрицу $\Phi(X)$ – как 4-вектор (вообще говоря, $\mathbf{C}$-значный). Заметим, что разложением по базису $\{\sigma_\mu\}=\{I;\sigma_a\},\ a=1,2,3,$ включающем единичную 2×2-матрицу I и матрицы Паули $\{\sigma_a\}$, компоненты эрмитовой матрицы $X=$

соотношениями (скорость света выбрана единичной):

$$X^{00'} \equiv u = t + z, \quad X^{11'} \equiv v = t - z, \quad X^{01'} \equiv w = x - iy, \quad X^{10'} \equiv \bar{w} = x + iy; \tag{1.5}$$

при этом определитель матрицы X соответствует обычному интервалу Минковского и сохраняется при преобразованиях Лоренца (1.4).

В предыдущих работах рассматривался в основном наиболее интересный частный случай соотношений (1.3), когда оба спинора полагаются равными друг другу, $\eta(X) \equiv \xi(X)$. При этом система уравнений (1.3) (получившая для данного случая название *генерирующей системы уравнений* (ГСУ)) переписывается в виде

$$d\xi = \Phi dX \xi, \tag{1.6}$$

а ее решениями служат различные пары $\{\xi(X), \Phi(X)\}$ соответствующих друг другу спинорного и (комплексного) 4-векторного (в дальнейшем интерпретируемого как электромагнитное) полей. Ниже дан краткий обзор свойств ГСУ (1.6).

2 Твисторная и калибровочная структура ГСУ

Отметим прежде всего, что ГСУ (1.6) может рассматриваться как условие существования спинорного поля $\xi(X)$, *ковариантно постоянного* относительно *левой* **B**-*связности*

$$\Omega(X) = \Phi dX \tag{2.1}$$

В 4-векторном представлении эта связность порождает *афинную геометрию Вейля-Картана* с вектором неметричности Вейля и псевдоследом (абсолютно антисимметричного) тензора кручения, пропорциональными друг другу. Соответствующие коэффициенты связности имеют вид [4, 5]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Phi_\mu \delta^\rho_\nu + \Phi_\nu \delta^\rho_\mu - \Phi^\rho \eta_{\mu\nu} - i\varepsilon^{\rho}_{\mu\nu\lambda}\Phi^\lambda, \tag{2.2}$$

($\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3$; $\eta_{\mu\nu}$ - тензор Минковского, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ - псевдотензор Леви-Чивита), причем их вид однозначно определяется структурой (левого) умножения в **B**, т.е. самой алгеброй бикватернионов. Связность (2.2) имеет ряд замечательных свойств [33, 34], в том числе отмеченную В. Г. Кречетом P-неинвариантность, что может быть использовано для построения *геометрических моделей слабых взаимодействий*, включая модель Вайнберга-Салама. Кроме того, по существу та же связность естественно возникает в геометриях σ-моделей и при обобщениях римановой геометрии и уравнений Эйнштейна [35]. Интересные свойства ковариантно-постоянных относительно связностей Вейля-Картана векторных полей рассматривались также в нашей работе [46].

Связность (2.1) оказывается *самодуальной* в "слабом смысле", т.е. на решениях ГСУ. Действительно, применяя операцию внешнего дифференцирования к системе (1.6), переписанной в виде

$$d\xi = \Omega\xi, \tag{2.3}$$

с учетом свойства $d^2 \equiv 0$ будем иметь следующие *условия интегрируемости*:

$$0 = R\xi \equiv (d\Phi - \Phi dX \Phi) \wedge dX\xi \equiv \pi \wedge dX\xi = 0, \tag{2.4}$$

где эффективная **B**-значная 2-форма кривизны R выражается через 1-форму π (выражение скобках) и, как следствие (2.4), оказывается самодуальной (простое доказательство этого факта можно найти в [4, 5], в 2-спинорном формализме – в [50]). При этом отличная от нуля часть связности определяет напряженность некоторого **B**-значного калибровочного поля, следовая часть которой естественно отождествляется с электромагнитным, а бесследовая – с янг-миллсовским полями (вообще говоря, **C**-значными). Как следствие самодуальности (плюс тождеств Бианки), эти части кривизны удовлетворяют соответственно вакуумным УМ и уравнениям Янга-Миллса. Т.о. *уравнения калибровочных полей в данном подходе не постулируются, а являются тождественными следствиями исходной фундаментальной системы уравнений (1.6)* !

лов $\Phi = A_\mu \sigma_\mu$ и напряженностей $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ассоциированного с решением ГСУ **C**-значного электромагнитного поля [1]:

$$F^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda} = iF_{\mu\nu} \ \Leftrightarrow\ \vec{\mathcal{E}} + i\vec{\mathcal{H}} = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial_0 A_a - \partial_a A_0 + i\varepsilon_{abc}\partial_b A_c = 0. \tag{2.5}$$

Плюс к этому имеет место добавочное "неоднородное условие Лоренца" [4, 5]

$$\partial_\mu A^\mu + 2A_\mu A^\mu = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial_0 A_0 - \partial_a A_a + 2(A_0^2 - A_a A_a) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $a, b, c, ... = 1, 2, 3$, и введены комплексные электрическая $\vec{\mathcal{E}}$ и магнитная $\vec{\mathcal{H}}$ напряженности. Смысл этих условий и их важные физические следствия обсуждаются ниже (раздел 3).

Остановимся теперь кратко на твисторной структуре ГСУ и ее следствиях (с соответствующим формализмом можно ознакомиться по книге [10]). В каждой точке пространства-времени $X = \{X^{AA'}\}$ введем спинор τ, сопряженный основному спинору ξ, с помощью линейного соотношения

$$\tau = X\xi, \quad (\tau^A = X^{AA'}\xi_{A'}). \tag{2.7}$$

Пара спиноров $\mathbf{W} = \{\xi, \tau\}$ образует *твистор* пространства Минковского, причем на его действительной части этот твистор изотропен, т.е. имеет нулевую *норму*, что в используемом представлении соответствует условию $\tau^+\xi - \xi^+\tau = 0$.

В работах [49, 50] показано, что *любые три компоненты твистора* $\mathbf{W}$ *функционально зависимы на решениях ГСУ* (две независимые компоненты существуют для любого ненулевого твистора). Идею доказательства можно пояснить, переписав (1.6) в следующем эквивалентном виде:

$$d\xi = \Phi d(X\xi) - \Phi X d\xi, \quad \Leftrightarrow \quad (I + \Phi X)d\xi = \Phi d\tau, \tag{2.8}$$

в котором отсутствуют в явном виде дифференциалы координат dX. Отсюда следует, что имеется две (по числу уравнений в (2.8)) функциональные связи между компонентами спиноров ξ и τ, т.е. для каждого (аналитического) решения ГСУ можно указать некоторые две независимые голоморфные функции $\Pi^{(C)}$, $C = 0, 1$ от 4-х твисторных компонент такие, что

$$\Pi^{(C)}(\xi, \tau) = 0 \tag{2.9}$$

на соответствующем решении. Замечательно, что при фиксированных $\Pi^{(C)}$ неявные алгебраические уравнения (2.9) сами по себе определяют вид решения (во всех точках ПВ, кроме некоторого подмножества меры нуль, см. ниже). Действительно, алгебраически спинор τ пропорционален спинору ξ через соотношения (2.7), поэтому (2.9) есть система двух уравнений относительно двух неизвестных компонент спинора $\xi_{A'}$. Решая (2.9) в точках $X^{AA'}$ общего вида, в которых *якобиан отображения* $\xi \mapsto \Pi$ отличен от нуля, из (2.9) однозначно получаем зависимость $\xi_{A'}(X)$, а потенциалы $\Phi_{A'A}$ получаются из них однократными дифференцированиями (см. ниже, раздел 5). То, что для *любых* регулярных $\Pi^{(C)}$ и в регулярной области полученная пара $\{\xi(X), \Phi(X)\}$ будет тождественно удовлетворять ГСУ, легко проверяется прямым дифференцированием (2.9) по координатам. Поскольку *каждому* решению ГСУ можно в области регулярности сопоставить некоторые $\Pi^{(C)}$, то система (2.9) определяет на самом деле *общее (аналитическое) решение ГСУ* в неявной алгебраической форме!

На множестве точек, в которых определитель

$$\det \|\frac{d\Pi^{(C)}}{d\xi_{A'}}\| = 0 \tag{2.10}$$

уравнение (2.9) имеет кратные корни, и процедура становится неоднозначной. Показано (см. раздел 5), что при этом соответствующие решению электромагнитное и другие поля обращаются в бесконечность, так что условие (2.10) определяет форму и эволюцию некоторого *сингулярного протяженного*

[1] Напряженности поля Янга-Миллса алгебраически выражаются через тензор $F_{\mu\nu}$ и спинор ξ, см. [49]

тельным и в каждый фиксированный момент времени определяет некоторую кривую в $\mathbf{R}^3$; в исключительных случаях вместо нее возможны 0-мерные (точки) или 2-мерные (мембраны) структуры, причем размерность может меняться в ходе эволюции (см. раздел 6). Если при этом структура сингулярного множества ограничена в 3-пространстве (в каждый конечный момент времени), то это множество может интерпретироваться как *частицеподобный объект* (или их совокупность в несвязном случае).

В заключение этого раздела отметим еще необычную структуру калибровочной симметрии уравнений ГСУ, обнаруженную впервые в [5] и детально исследованную в [49, 50]. Ее специфика понятна из вида общего решения (2.9), остающегося инвариантным при преобразованиях

$$\xi \mapsto \alpha\xi, \quad \tau \mapsto \alpha\tau, \quad \alpha = \alpha(\xi_{A'}, \tau^A) \equiv \alpha(\mathbf{W}) \tag{2.11}$$

с калибровочным параметром α, зависящим от координат лишь неявным образом, т.е. *только через компоненты преобразуемого твистора* $\mathbf{W}$ (оба составляющих его спинора преобразуются одинакого в силу определяющего соотношения (2.7)). Такие преобразования сохраняют "твисторную структуру" (2.9) и приводят тем самым к новому решению ГСУ. Нетрудно показать, что при этом потенциалы A_μ такие, что $\Phi = A_m u \sigma_\mu$ преобразуются обычным градиентным образом

$$A_\mu \mapsto A_\mu - 2\partial_\mu \ln \alpha, \tag{2.12}$$

а напряженности остаются инвариантными.

Такого рода ограниченные калибровочные преобразования были названы *слабыми*. Интересно, что они составляют несобственную подгруппу всей группы $\mathbf{C}$ абелевых преобразований калибровочного поля (последняя в свою очередь является комплексным аналогом калибровочной группы $U(1)$ вещественной электродинамики). Геометрически слабые преобразования отвечают *проективным* преобразованиям в пространстве (нулевых) твисторов [50].

3 Уравнения самодуальности вместо уравнений Максвелла и Вейля

Мы вернемся теперь к условиям комплексной самодуальности (УКС) (2.5) и рассмотрим их сами по себе, т.е. безотносительно к первичной системе ГСУ, из которой они получены. Известно, что аналогичные условия играют важную роль в теории свободных полей Янга-Миллса (как правило, в евклидовом пространстве E^4, поскольку вещественные поля несовместимы с мнимыми собственными значениями оператора дуального сопряжения, см., например, [36]). Сами уравнения Янга-Миллса следуют при этом из *тождеств Бианки* для матричной 2-формы напряженности $F = dA - A \wedge A$ и условий самодуальности $F = F^*$. Более того, абсолютный минимум функционала действия достигается именно на самодуальных решениях. Вместе с тем, однако, возможны и несамодуальные решения, соответствующие локальным экстремумам.

Аналогичная конструкция возможна и для случая электромагнитных (ЭМ) полей. Более того, мы покажем, что, в отличие от случая полей Янга-Миллса, *всякое* решение (обычных вещественных вакуумных) УМ локально в области регулярности может быть получено из УКС, т.е. *условия (2.5) локально эквивалентны УМ.* Этот факт представляется весьма интересным, поскольку рассмотрение УКС вместо УМ понижает порядок уравнений и позволяет работать с системой трех уравнений 1-го порядка для 4-х комплексных функций – потенциалов A_μ (которая выбором калибровки редуцируется к *двум уравнениям для двух комплексных функций, эквивалентным уравнениям Вейля*, см. ниже.

Заметим предварительно, что число алгебраически независимых "степеней свободы" напряженностей комплексного ЭМ-поля, удовлетворяющих УКС

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{D}, \ \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} + i\vec{D}, \tag{3.1}$$

в точности равно таковому для вещественного ЭМ-поля общего вида, поскольку в силу (2.5) имеем

$$\vec{D} = -\vec{H}, \ \vec{B} = \vec{E}, \tag{3.2}$$

так что пара *вещественных* векторов $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ остается независимой, а другая пара $\{\vec{D}, \vec{B}\}$, соответствующая мнимым частям исходных $\mathbf{C}$-напряженностей, оказывается дуальной к ним. УМ, имеющие линейности *выполняются для каждой из вещественных и дуальных друг другу пар полей* $\{\vec{E},\vec{H}\}$ *и* $\{\vec{D},\vec{B}\}$ *по отдельности.*

Пусть теперь в некоторой области ПВ имеем *произвольное* гладкое (для простоты класса C^ω) решение $\{\vec{E},\vec{H}\}$ обычных УМ. Тогда, сопоставляя ему дуально сопряженную пару полей (3.2) и образуя комплексные комбинации (3.1), автоматически имеем для них УКС $\vec{\mathcal{E}}+i\vec{\mathcal{H}}=0$. Для них, очевидно, выполняются комплексифицированные УМ, и как следствие этого факта, существует (локально) комплексный 4-потенциал $A_\mu=\{A_0,\vec{A}\}$, так что $\vec{\mathcal{E}}=\partial_0\vec{A}-\vec{\nabla}A_0,\ \vec{\mathcal{H}}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. В силу УКС тогда для компонент потенциала имеют место уравнения 1-го порядка (2.5) и тем самым *произвольное решение УМ может быть получено как их следствие.*

Используем теперь свободу выбора потенциалов, связанную с калибровочной инвариантностью УКС (2.5), и наложим на них дополнительное условие Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu=0. \tag{3.3}$$

Система 4-х уравнений (2.5) и (3.3) записывается в компактной 2-спинорной форме для матричных компонент комплексного 4-потенциала $\Phi=\{\Phi_{A'A}\}\equiv A_\mu\sigma_\mu$ [4, 5, 50]

$$\partial^{AA'}\Phi_{A'B}=0, \tag{3.4}$$

и разбивается на две однотипные системы для спиноров $\Phi_{A'0}\equiv\{\phi^{(0)}\}$ и $\Phi_{A'1}\equiv\{\phi^{(1)}\}$ вида

$$\partial^{AA'}\phi_{A'}=0, \tag{3.5}$$

так что каждое решение начальной системы (2.5),(3.3), а тем самым по доказанному выше и УМ, локально может быть получено из двух (функционально зависимых или нет) решений системы (3.5).

С другой стороны, последнее уравнение (3.5) – это спинорная форма *уравнения Вейля*, соответствующее безмассовым частицам спина 1/2 – нейтрино. Таким образом, мы фактически показали, что всякое решение УМ может быть локально получено из двух решений уравнений Вейля, и наоборот, всякие два (или даже одно нетривиальное) решения уравнений Вейля определяют некоторое решение УМ. Полученный результат вызывает ассоциации с "теорией слияния" Л. де Бройля, в которой фотон представляется как связанное состояние двух нейтрино.

Заметим, что спинорная запись УКС (3.4) по форме напоминает известное спинорное представление УМ

$$\partial^{AA'}F_{(AB)}=0, \tag{3.6}$$

где в отличие от (3.4) $F_{(AB)}$ – симметричный спинор напряженностей ЭМ-поля ([10]; см.также [37]). Однако в такой форме связь УМ с уравнениями Вейля совсем не очевидна, поскольку в силу симметрии по индексам A,B спинор $F_{(AB)}$ и соответственно уравнения (3.4) не могут быть редуцированы к более простому виду, отвечающему случаю спина 1/2. Через УКС такую редукцию осуществить удается, поскольку *компоненты "волновой функции" (вейлевского спинора) сопоставляются здесь не с напряженностями ЭМ-поля, а с компонентами (**C** -значного) 4-потенциала.*

4 Квантование электрического заряда и отсутствие монополей

Наиболее интересным, однако, представляется связь условий самодуальности с квантованием электрического заряда, которая имеет место при наличии калибровочной инвариантности теории. А именно, пусть в теории имеется, кроме электромагнитного поля, еще некоторое (скалярное, 2-спинорное, дираковское) поле $\Psi(X)$ ("волновая функция"), так что 4-потенциалы $A_\mu(X)$ (возможно, **C**-значные) входят в уравнения поля только через удлиненную производную $(\partial_\mu-bA_\mu)\Psi,\ b=Const$, и имеется, следовательно, инвариантность относительно калибровочных преобразований вида

$$\Psi\mapsto\exp^{\alpha(X)}\Psi,\quad A_\mu\mapsto A_\mu+\frac{1}{b}\partial_\mu\alpha \tag{4.1}$$

ческий заряд сосредоточен в конечной области пространства: тогда утверждается, что *величина этого заряда либо равна нулю, либо есть целократное от некоторого минимального "элементарного" заряда, равного* $1/2b$.

Действительно, используя теорему Гаусса (дающую, собственно, и определение полного заряда Q), а также условия самодуальности и теорему Стокса, имеем, интегрируя по замкнутой 2-поверхности S, охватывающей заряды:

$$4\pi Q = \int \vec{\mathcal{E}} d\vec{\sigma} = -i \int \vec{\mathcal{H}} d\vec{\sigma} = -i \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{\sigma} = -i \sum \oint A_l \; dl \equiv -i \sum_k J^{(k)}, \tag{4.2}$$

где интегралы $J^{(k)}$ берутся по (инфинитезимальным) замкнутым кривым, обходящим точки пересечения S с сингулярными кривыми векторного потенциала ("дираковскими струнами"). Ненулевой вклад дает только сингулярная часть потенциала, которая неизбежно является "чистой калибровкой", т.е. градиентом от некоторой комплексной функции $\vec{A} = \vec{\nabla}\lambda$: в противном случае магнитное поле имело бы особенности на S. С учетом этого $J^{(k)} = \Delta\lambda$; однако изменение $\Delta\lambda$ функции $\lambda(X)$ при обходе сингулярности в силу калибровочной инвариантности (4.1) связано с соответствующим изменением "волновой функции" $\Delta\Psi = \exp(b\Delta\lambda)$. Из однозначности решения $\Psi(X)$ вне сингулярностей поля следует, что все его изменение при обходе сингулярности сводится лишь к возможному изменению *фазы* на число, кратное 2π, т.е. имеем $b\Delta\lambda = 2\pi i N, \; N \in Z$. Отсюда $J^{(k)} = 2\pi N i/b$, а суммирование по всем сингулярностям сводится просто к переопределению целого числа N. Возвращаясь теперь к исходной формуле (4.2), имеем для электрического заряда следующее условие квантования [2]:

$$Q = \frac{1}{2b} N. \tag{4.3}$$

На самом деле, вышеприведенное доказательство соответствует известной аналогичной конструкции Дирака для *магнитного монополя* [41], однако за счет условий самодуальности переводит его в электрический. Если, как в квантовой теории, положить $b = ie/hc$, то электрический заряд получится мнимым [3], но для магнитного заряда $M = -iQ$ будем иметь в точности условие квантования Дирака $M = (hc/2e)N$. Такое соответствие, однако, чисто формально. В нашем случае *магнитный и электрический заряд для любого решения всегда равны по модулю и оба кратны элементарному заряду, равному* $1/2b$ (напомним, что подход Дирака не объясняет квантования каждого из зарядов, а лишь связывает одно из них с другим).

Строго говоря, в моделях рассматриваемого вида речь идет лишь об одном типе заряда, который условно можно считать электрическим. С этой точки зрения *магнитных монополей не существует.* Однако этот вывод был бы верен, если сила взаимодействия частицеподобных образований, возникающих как решения полевых уравнений, определялась бы только одним (электрическим) зарядом. В классической электродинамике для системы частиц, обладающих одинаковым отношением магнитного заряда к электрическому, это действительно так: соответствующая теорема доказана, например, в [40]. Тем не менее, в нашем случае вопрос требует отдельного рассмотрения. Заметим, что другие соображения геометрического характера в пользу возможного фактического отсутствия магнитных монополей в моделях рассматриваемого типа приведены в [5].

Заметим в заключение, что другие (динамические и чисто топологические) подходы к фундаментальной проблеме квантования электрического заряда рассматривались, например, в [38, 39, 11].

5 Редукция ГСУ к уравнениям бессдвиговых конгруенций

Вернемся теперь непосредственно к анализу нашей ГСУ, случай которой несколько отличен от вышерассмотренной общей ситуации. А именно, как следствие ГСУ с необходимостью выполняется (а

[2] Совершенно аналогично рассматривается и случай, когда вместо отдельных точек на S присутствуют сингулярные *линии* векторного потенциала.

[3] В этом выражении для константы b величина e выступает как фиксированная константа взаимодействия и не имеет прямого смысла электрического заряда частицеподобных решений уравнений поля.

системы (3.4) будем иметь для потенциалов нелинейную систему вида

$$\partial^{AA'}\Phi_{A'B} - \Phi^{AA'}\Phi_{A'B} = 0 \tag{5.1}$$

(при симметризации нелинейный член пропадает, и восстанавливается линейность УКС). Тем не менее, используя дополнительно возможность слабого калибровочного преобразования, для нетривиальных решений с отличным от нуля ЭМ-полем всегда можно свести ГСУ к системе следующего вида [5, 48]:

$$\partial_u G = \kappa,\ \partial_{\bar{w}} G = \rho,\ \partial_w G = \kappa G,\ \partial_v G = \rho G, \tag{5.2}$$

для неизвестных функций $\{G(X);\ \kappa(X), \rho(X)\}$ таких, что

$$\xi^T_{A'} = \{1, G\};\quad \Phi_{A'0} \equiv 0,\ \Phi_{A'1} \equiv \{\kappa, \rho\}. \tag{5.3}$$

Здесь фигурируют частные производные по спинорным координатам, определенным ранее соотношениями (1.5). Исключая из (5.2) компоненты потенциала, имеем для единственной неизвестной компоненты спинора $G(X)$ систему двух уравнений вида

$$\partial_w G = G\partial_u G,\quad \partial_v G = G\partial_{\bar{w}} G. \tag{5.4}$$

При этом, как нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием (5.2), сами оставшиеся ненулевыми компоненты потенциала $\kappa(X), \rho(X)$ удовлетворяют уравнениям "вейлевского" типа

$$\partial_{\bar{w}}\kappa = \partial_u \rho,\quad \partial_v \kappa = \partial_w \rho \tag{5.5}$$

в полном соответствии с общим случаем (3.5).

Все последующие рассуждения, касающиеся квантования заряда, также остаются в силе. При этом роль "волновой функции" играет спинор ξ (с одной нетривиальной компонентой G в случае калибровки (5.3)), а его однозначность (с точностью до изменения фазы на $2\pi N$) вне сингулярностей ЭМ-поля с необходимостью следует из структуры общего решения (2.9). Действительно, в калибровке (5.3) система (2.9) редуцируется к одному алгебраическому уравнению вида

$$\Pi(G, \tau^0, \tau^1) \equiv \Pi(G,\ u + wG,\ \bar{w} + vG) = 0 \tag{5.6}$$

(второе уравнение вырождается в тривиальное $\xi_{0'} - 1 = 0$). Условие (2.10), определяющее сингулярности ЭМ-поля, принимает при этом вид

$$P \equiv \frac{d\Pi}{dG} = 0 \tag{5.7}$$

и отвечает возникновению кратных корней у уравнения (5.6). Вне зарядов сингулярности поля отсутствуют, и основная компонента спинора $G(X)$ однозначна (для выбранной "ветви" решения ГСУ).

В соответствии с видом калибровочных преобразований 4-потенциала (2.12) коэффициент b в данном случае равен двум, и формула (4.3) для разрешенных значений (безразмерного) электрического заряда принимает вид

$$Q = \frac{1}{4}N,\ N = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{5.8}$$

Единицы измерения всегда могут быть выбраны так, чтобы минимальный *размерный* электрический заряд был бы равен элементарному e. Интересно, что в данной модели, имеющей дело с $\mathbf{C}$-значными напряженностями ЭМ-поля, *электрический заряд тем не менее получается действительным.* Постоянная Планка входит в теорию лишь косвенно, через соответствие с ОТО (см. введение).

Уравнения (5.4), к которым редуцируется ГСУ в калибровке (5.3) после исключения потенциалов, хорошо известны в теории 2-спиноров и ОТО (см., например, [10]). Удовлетворяющее им спинорное поле $\xi_{A'}(X)$ определяет изотропную *конгруенцию* с касательным векторным полем

$$k_\mu = \xi^+ \sigma_\mu \xi,\qquad k_\mu k^\mu \equiv 0. \tag{5.9}$$

бессдвиговой (относительно геометрической интерпретации этих понятий см., например, [10, 42]; при этом из геодезичности в пространстве Минковского следует, что конгруенция k_μ имеет структуру *пучка изотропных прямых*). С другой стороны, знаменитая *теорема Керра* [43] дает общее решение уравнений, определяющих бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруенции (БСК) в неявном алгебраическом виде, в точности эквивалентном вышеприведенному выражению (5.6). При этом особые точки пересечения соседних лучей конгруенции – *каустики* – определяются условием (5.7) и в нашем формализме соответствуют сингулярностям ассоциированного ЭМ-поля.

Действительно, в нашей работе [50] получено явное представление спинора напряженностей ассоциированного с решениями ГСУ-БСК ЭМ-поля $F_{(AB)}$ через (первые и вторые) производные $\Pi_A, \Pi_{AB},\ A, B = 0, 1$ от основной производящей функции (5.6) по своим твисторным аргументам τ_A:

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}\left(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P})\right), \tag{5.10}$$

из которого сразу видно, что сингулярности ЭМ-поля соответствуют обращению в нуль полной производной (5.7) или, эквивалентно, особым точкам конгруенции (5.9) и кратным корням уравнения (5.6).

Таким образом, имеющие чисто абстрактную алгебраическую природу уравнения ГСУ (условия дифференцируемости **B**-функций) оказываются по существу эквивалентными известным уравнениям БСК. Заметим, что, вообще говоря, *тесная связь БСК с решениями линейных волновых уравнений, в том числе УМ, известна уже давно* [44, 10, 45] и представляет собой одну из "жемчужин" твисторной программы Пенроуза, однако использованный нами способ сопоставления решениям БСК ЭМ-поля более естественен, не требует интегрирования и, главное, автоматически приводит к квантованию электрического заряда для его источников. Кроме того, рассмотренный метод позволяет заодно генерировать и решения ассоциируемых с БСК *нелинейных* уравнений Янга-Миллса, правда в общем случае **C**-значных. Соответствующая процедура рассмотрена в работах [5, 50] [4].

Наконец, помимо ЭМ и янг-миллсовского калибровочных полей, каждому решению уравнений ГСУ-БСК можно стандартным с точки зрения ОТО путем, через изотропную конгруенцию k_μ, сопоставить некоторую эффективную риманову метрику (т.н. *метрику Керра-Шилда* [8])

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h k_\mu k_\nu, \tag{5.11}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – "фоновая" метрика Минковского, а $h = h(x)$ – некоторая скалярная функция. Известно, что именно в случае, когда конгруенция k_μ является геодезической и бессдвиговой, подстановка анзатца (5.11) в электровакуумную систему уравнений Эйнштейна-Максвелла (или просто в вакуумные уравнения Эйнштейна) ведет к существенным упрощениям, так что во многих случаях подбором единственной (кроме конгруенции) функции $h(x)$ удается удовлетворить полной системе и получить точное решение. В частности, это имеет место для стационарного случая, отвечающего сингулярным решениям типа Керра-Ньюмена (с кольцеобразной сингулярностью произвольного радиуса a) или Райснера-Нордстрема (точечная сингулярность при $a = 0$).

Интересно, что в этих случаях ЭМ-поля, полученные как решения самосогласованной системы Эйнштейна-Максвелла, совпадают с полями (5.10), генерированными непосредственно по решениям ГСУ-БСК, если отвлечься от квантования электрического заряда для последних. В общем случае сингулярности кривизны римановой метрики (5.11) соответствуют особым точкам конгруенции k_μ и определяются, следовательно, тем же условием (5.7), что и сингулярности ЭМ-полей (5.10).

Таким образом, *каждому решению основных уравнений (5.4) явным образом ставится в соответствие электромагнитное, комплексное янг-миллсовское и эффективное гравитационное поля.* Всюду в области регулярности калибровочные поля удовлетворяют соответственно уравнениям Максвелла и Янга-Миллса, в то время как гравитационное удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (с тензором ЭМ-поля в качестве источника) только для стационарного случая (решения керровского типа). Тем не менее, *сингулярности определяются единым условием и являются общими для всех полей,*

[4] В диссертации [49] приведено явное выражение для дифференциальной 2-формы напряженностей поля Янга-Миллса $\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F^a}\}$, $\mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ через основную (проективную) спинорную функцию $G(x)$ и соответствующую ей (2-форму) ЭМ-поля F (5.10).

является нетривиальным; обсуждение этих проблем см. в [51]).

6 Заключение. Решения ГСУ и динамика сингулярностей-частиц

Предыдущее рассмотрение свойств ГСУ-БСК естественно приводит к концепции *частиц как (ограниченных в 3-пространстве) сингулярностей поля.* Как уже указывалось, форма и временна́я динамика этих сингулярностей описывается единым условием (5.7), общим для всех физических полей, сопоставляемых каждому решению первичных уравнений (1.6), редуцированных к алгебраическому уравнению (5.6). Одно комплексное условие (5.7) определяет, как правило, некоторую движущуюся пространственную *кривую*, простейшим примером которой служит сингулярное кольцо решения Керра-Ньюмена. Однако в особых случаях такая кривая может вырождаться в точечную особенность или, напротив, определять двумерную поверхность. Более того, в процессе временно́й эволюции могут происходить качественные *перестройки* структуры сингулярностей, вплоть до изменения их топологии и размерности. Такие перестройки, также как и нетривиальная эволюция сингулярностей между ними, следуют лишь из исходных уравнений ГСУ-БСК как результат существенно нелинейной структуры последних и отсутствия для них принципа суперпозиции. Последнее свойство определяет также дискретный, "квантованный" спектр характеристик частицеподобных сингулярных объектов.

Таким образом, все основные "квазиклассические" свойства элементарных частиц: устойчивость, наличие у них сохраняющихся "квантовых чисел", способность к взаимодействию и взаимопревращению (перестройки), – простым и единообразным образом описываются в рамках рассматриваемой алгебраической теории. При этом взаимодействие сингулярных объектов вовсе *не сводится к электромагнитному*, а носит достаточно сложный и разнообразный характер.

Примеры нетривиальной топологической структуры и динамики сингулярных частицеподобных образований приведены и обсуждаются в работах [5, 48, 50, 51]. Помимо (моделирующего электрон (?), см. [52, 53, 54, 48]) фундаментального статического решения – аналога решения Керра-Ньюмена, – найдено, в частности, *бисингулярное решение* с ЭМ-полем, воспроизводящим известное решение Борна для равноускоренно движущегося заряда (величина которого, однако, здесь квантована и равна заряду фундаментального решения!). Особенный интерес представляет его комплексная, электрически нейтральная модификация с кольцеобразной сингулярностью, перестраивающейся в тор [47, 49, 50]. Обнаружены также решения, не обладающие аксиальной симметрией [51].

К настоящему времени уже получены решения с намного более сложной, многосингулярной структурой, явным образом на классическом уровне описывающие *процессы аннигиляции, рождения пар, поглощения/испускания сингулярных волновых фронтов, процессы "распада" и др.* Особенно удивительно, что все это следует из одной лишь фундаментальной исходной структуры ГСУ-БСК, имеющей чисто алгебраическую природу. С другой стороны, эти решения удовлетворяют также (в области их регулярности) обычным линейным уравнениям Максвелла для пустого пространства, причем структура сингулярности вполне определена максимальным аналитическим продолжением последних. Тем самым материя фактически порождается полем вполне аналогично солитонным схемам. С другой стороны, однако, поле становится в некотором смысле вторичным, поскольку именно сингулярные объекты, их форма, движение и перестройки, становятся основным объектом теории (подробнее см. [51]).

Основными нерешенными на сегодняшний день вопросами представляются отсутствие полной классификации возможных типов сингулярностей (и их перестроек) и вывода общего уравнения их движения. Возможно, эта задача найдет решение при анализе полной исходной алгебраической системы ОУКР (1.1), т.е. общих условий аналитичности в алгебре комплексных кватернионов (напомним, что рассматриваемая выше ГСУ (1.6) является лишь ее частным, хотя и важным, случаем). Для системы ОУКР также обнаружено существование твисторной и калибровочной структур и получено (в неявной алгебраической форме) общее решение; мы предполагаем изложить эти вопросы в последующих работах.

Автор благодарен Ю. П. Рыбакову и Ю. С. Владимирову за полезные обсуждения и советы, своим ученикам – Ж. А. Ризкалла за многолетнюю совместную работу и В. Н. Тришину за подбор литературы.

[1] Рыбаков Ю.П. *Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Том 2.* – М., ВИНИТИ АН СССР, 1991, с 56

[2] Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И. *Усп. физ. наук*, **162**, (1992), 1; **164**, (1994), 121

[3] Кассандров В. В. *Вестник РУДН, сер. физ.*, **1**, (1995), 168

[4] Кассандров В. В. *Алгебраическая структура пространства- времени и алгебродинамика.* – М., изд. РУДН, 1992

[5] Kassandrov V. V. *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1995), 216; (*Preprint* gr-qc / 0007027)

[6] Ward J. *Phys. Lett.*, **61A**, (1977), 81

[7] Atiah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. I., Manin Yu. I. *Phys. Lett.*, **65A**, (1978), 185

[8] Debney G. C., Kerr R. P., Schild A. *J. Math. Phys.*, **10**, (1969), 1842

[9] Манин Ю. И., Хенкин Г. М. *Ядерная физ.*, **35**, (1982), 1610

[10] Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. Том 1,2.* – М., "Мир", 1987,1988

[11] Ranãda A. F., Trueba J. L. *Phys. Lett.*, **202A**, (1995), 337; *Phys. Lett.*, **235A**, (1997), 25

[12] Ranãda A. F. *An. Fis. (Madrid)*, **A87**, (1991), 55; *Preprint* hep-th / 9802166

[13] Эйнштейн А. *Собрание сочинений. Том 3.* – М., "Наука", 1967, с 456

[14] Вигнер Е. *Этюды о симметрии.* – М., "Мир", 1971, с 182

[15] Eddington A. S. *Fundamental theory.* – N.Y., Cambridge Press, 1946

[16] Hestenes D. *Space-time algebra.* – N.Y., Gordon & Breach, 1966

[17] Кулаков Ю. И. *Элементы теории физических структур.* – Новосибирск, изд. НГУ, 1968; *ДАН СССР*, **201**, (1968), 570

[18] Владимиров Ю. С. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1,2.* – М., изд. МГУ, 1996,1998

[19] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. *Кватернионы в релятивистской физике.* – Минск, "Наука и техника", 1989

[20] Быстров К. Н., Захаров В. Д. *Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Том 1.* – М., ВИНИТИ АН СССР, 1991, с 111

[21] Ефремов А. П. *Вестник РУДН, сер. физ.*, **3**, (1995), 117; *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1997), 200

[22] Kassandrov V. V. *Acta Applic. Math.*, **50**, (1998), 197

[23] Kassandrov V. V. *Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике*, ред. Лыхмус Я. К., Кууск П. – Таллинн, ИФ АН Эстонии, вып. 66, 1990, с 202

[24] Кассандров В. В. 1993 *Вестник РУДН, сер. физ.*, **1**, 59

[25] Carter B. *Phys. Rev.*, **174**, (1968), 1559

[26] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений. Том 1,2.* – М., "Наука", 1982,1984

[28] Арнольд В. И. *Теория катастроф.* – М., "Наука", 1990

[29] Постон Т., Стюарт Й. *Теория катастроф и ее приложения.* – М., "Мир", 1980

[30] Tom R. *Topology*, **8**, (1969), 313

[31] Newman E. T. *Quantum theory and the structure of time and space.*, eds. Castell L. et al. – Munchen, Carl Verlag, 1975, p 48; *Gen. Rel. Grav.*, **7**, (1976), 107

[32] Gindikin S. G. *Math. Intelligencer*, **5**, (1983), 27

[33] Степанов В. Е. *Изв. ВУЗов, сер. мат.*, **1**, (1987), 72

[34] Кречет В. Г. *Изв. ВУЗов, сер. физ.*, **10**, (1986), 20; *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **3**, (1995), 199

[35] Tod K. P. *Class. Quant. Grav.*, **13**, (1996), 2609

[36] Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* – М., "Мир", 1985

[37] Румер Ю. Б. *Спинорный анализ.* – М.-Л., ОНТИ, 1936

[38] Рыбаков Ю. П. *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10.* – М., Энергоатомиздат, 1979, с 194

[39] Журавлев В. Н. *Гравитация и электромагнетизм, вып. 6.*, ред. Богуш А. А. и др. – Минск, "Университетское", с 105

[40] Стражев В. И., Томильчик Л. М. *Электродинамика с магнитным зарядом.* – Минск, "Наука и техника", 1975

[41] Дирак П. А. М. *К созданию квантовой теории поля.*, ред. Медведев Б. В. – М., "Наука", 1990, с 169

[42] Владимиров Ю. С. *Системы отсчета в теории гравитации.* – М., "Энергоиздат", 1982

[43] Penrose R., MacCallum M. A. H. *Phys. Rep. C*, **6**, (1973), 241

[44] Robinson I. *J. Math. Phys.*, **2**, (1961), 290

[45] Уэллс Р. О. *Твисторы и калибровочные поля.*, ред. Жаринов В. В. – М., "Мир", 1983, с 169

[46] Кассандров В. В., Ризкалла Ж. А. *Геометризация физики II. Труды Межд. конф. памяти А. З. Петрова.*, ред. Башков В. И. – Казань, изд. КГУ, 1996, с 137

[47] Кассандров В. В., Ризкалла Ж. А. *Новейшие проблемы теории поля.*, ред. Аминова А. В. – Казань, изд. КГУ, 1998, с 176; (*Preprint* gr-qc / 9809078)

[48] Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. *Preprint* gr-qc / 9809056

[49] Ризкалла Ж. А. *Кандидатская диссертация.* – М., РУДН, 1999

[50] Kassandrov V. V., Rizcalla J. A. *Preprint* gr-qc / 0012109

[51] Kassandrov V. V., Trishin V. N. *Gravit. & Cosmol. (Moscow)*, **5**, (1999), 272; (*Preprint* gr-qc / 0007026)

[52] Lopez C. A. *Phys. Rev.*, **D30**, (1984), 313

[53] Israel W. *Phys. Rev.*, **D2**, (1970), 641

[54] Буринский А. Я. *ЖЭТФ*, **66**, (1974), 406; *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11.* – М., Атомиздат, 1980, с 47

АЛГЕБРОДИНАМИКА: “ПРЕДСВЕТ”, ЧАСТИЦЫ-КАУСТИКИ И ПОТОК ВРЕМЕНИ

В. В. Кассандров

Российский Университет дружбы народов, кафедра общей физики

117419, Москва, ул. Орджоникидзе 3. Электр. адрес: vkassan@sci.pfu.edu.ru

Резюме.

В теориях поля с твисторной структурой частицы естественно интерпретировать как (пространственно локализованные) каустики изотропных геодезических конгруенций, определяемых твисторным полем. В качестве реализации рассмотрены уравнения “алгебродинамики”, возникающие в контексте некоммутативного анализа (над алгеброй бикватернионов) и приводящие к полю комплексного эйконала и к набору калибровочных и твисторных полей, ассоциируемых с его решениями. Обсуждаются связанные с этим концепции производящей “Мировой функции” и многозначных физических полей. Возникающая картина Мира содержит в качестве основных элементов лоренц-инвариантный световой эфир и порождаемую светом материю. Вводится также представление о потоке Времени, отождествляемом с потоком первичного Света (“Предсвета”).

1 Введение. Алгебродинамическая единая теория поля

Теоретическая физика подошла к такому состоянию, когда невозможно продвигаться дальше, не пересмотрев полностью смысл и взаимосвязи трех основных ее составляющих: полей, частиц и пространственно-временной геометрии. *Теория (супер)струн* в принципе предоставляет возможность получения низкоэнергетической феноменологии (Стандартной модели) из единой и простой физики, сформулированной для планковской шкалы. Однако этот подход по-прежнему далек от таких основополагающих вопросов, как *происхождение* физических законов, существование первичного *Кода Вселенной* и т.п., являясь по существу лишь еще одной попыткой *описания* Природы (по возможности наиболее простым и эффективным способом), а отнюдь не ее *понимания.* Заметим, что до сих пор ни в рамках Стандартной модели, ни в теории суперструн нет никакого объяснения *размерности* пространства-времени, наблюдаемого *спектра* элементарных частиц и констант взаимодействия, в том числе “больших чисел” и др.

Твисторная программа Р. Пенроуза [1, 2] может рассматриваться как альтернатива струнной теории, в какой-то мере претендующей на объяснение первичных физических структур. Для этого постулируется существование некого предпространства – *пространства твисторов* $\mathbb{C}P^3$ – первичного по отношению к физическому пространству-времени и предопределяющего его геометрию как геометрию Минковского, и, в какой-то степени, набор физических полей.

Тем не менее общая концепция твисторной программы как единой теории поля до сих не сформулирована. Какие именно уравнения выбрать в качестве фундаментальных, как описывать массивные поля и как получить спектр характеристик наблюдаемых частиц? И, наконец, почему именно твистор, весьма экзотический математический объект, кладется в основу фундаментальной физической теории?

Между тем, твисторная структура совершенно естественно возникает в рамках так называемого *алгебродинамического* подхода к теории поля, развитой в работах автора с учениками. С общей точки зрения, алгебродинамическая парадигма может рассматриваться как возврат к идеям Пифагора и Платона о *свойствах Чисел, предопределяющих свойства видимого Мира.* Действительно, в качестве единственного (!) постулата алгебродинамики принимается существование некоторой единой структуры чисто абстрактной, алгебраической (числовой) природы, внутренние свойства которой полностью определяют как вид геометрии физического пространства-времени, так и всю динамику физических полей (набор и уравнения которых также диктуются исходной структурой, а не постулируются). Изложение основных принципов исповедуемой автором философии *неопифагорейства* в ее применении к построению фундаментальных физических теорий можно найти в работе [39].

В наиболее развитой на сегодняшний день реализации алгебродинамики "Мировая" алгебраическая структура возникала при обобщении комплексного анализа на исключительные некоммутативные алгебры кватернионного ($\mathbb{Q}$) типа [13, 14, 15]. Было показано, в частности, что непосредственный учет некоммутативности в самом определении функций, "дифференцируемых" в $\mathbb{Q}$, приводит к *нелинейности* обобщенных уравнений Коши-Римана (ОУКР). Это, в свою очередь, позволило выбрать ОУКР в качестве фундаментальных уравнений динамики *взаимодействующих* физических полей, рассматриваемых как функции алгебраического переменного ($\mathbb{Q}$-типа).

Широкий класс таких полей - функций возникает лишь при комплексном расширении алебры $\mathbb{Q}$ до алгебры *бикватернионов* $\mathbb{B}$. При этом ОУКР не только оказываются лоренц-инвариантными, но и приобретают естественную спинорную и калибровочную структуры, что позволяет построить на их основе единую самосогласованную *алгебродинамическую* теорию поля [13, 14, 20, 23, 22, 24, 26, 39].

С физической точки зрения, наиболее важным свойством ОУКР оказывается их соответствие некоторой первичной *светоподобной* структуре. А именно, каждая (спинорная) компонента $S(x,y,z,t) \in \mathbb{C}$ первичного $\mathbb{B}$-поля обязана удовлетворять *уравнению комплексифицированного эйконала* (УКЭ) [13, 14]

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = (\partial_t S)^2 - (\partial_x S)^2 - (\partial_y S)^2 - (\partial_z S)^2 = 0, \tag{1.1}$$

где матрица $\eta_{\mu\nu} = diag\{1,-1,-1,-1\}$ представляет метрику Минковского, а символ ∂ отвечает частной производной по соответствующей координате. УКЭ (1.1) лоренц-инвариантно, нелинейно и играет роль, аналогичную линейному *уравнению Лапласа* в комплексном анализе. Каждое решение ОУКР может при этом быть восстановлено из набора нескольких (четырех или менее) решений УКЭ.

В то же время, в работе [26] была обнаружена естественная *твисторная* структура УКЭ и на ее основе получено *общее решение* этого нелинейного уравнения. А именно, было показано, что в отношении к твисторной структуре каждое решение УКЭ принадлежит к одному из двух классов, оба из которых могут быть получены из некоторой производящей функции твисторных аргументов с помощью простой алгебраической процедуры. Та же конструкция позволяет дать естественное определение *сингулярностей* светоподобных геодезических конгруенций, соответствующих полю эйконала – *каустик*. Именно на каустиках – *огибающих* конгруенции – соседние лучи пересекаются, а значения ассоциированных с конгруенцией физических полей обращаются в бесконечность, формируя тем самым единый *частицеподобный* объект – *источник* полей и самой конгруенции. Тем самым в рассматриваемой алгебродинамической теории *частицы представляют собой (пространственно локализованные) каустики первичных светоподобных конгруенций.*

С другой стороны, изотропные конгруенции определяют универсальный локальный перенос основного твисторного поля с постоянной фундаментальной скоростью "c" (аналогичный переносу поля электромагнитной волной) и тем самым дают указание на особую роль временной координаты в рассматриваемой алгебродинамической схеме и в твисторной теории вообще. Существование "Потока Времени" становится при этом прямым следствием существования лоренц-инвариантного "эфира", формируемого первичными светоподобными конгруенциями ("Предсвета"). Принципиально важным при этом становится свойство *многозначности* фундаментального комплекснозначного решения УКЭ ("Мирового решения") и ассоциированных с ним физических полей. При этом в каждой точке пространства-времени мы имеем дело с *суперпозицией* большого числа лучей, принадлежащих локально различным конгруенциям, и поток Времени формируется из многих *разнонаправленных* составляющих (*субпотоков*), глобально связанных комплексной структурой в единый объект.

В разделе 2 статьи описывается твисторная структура УКЭ и алгебраическая процедура получения двух классов его решений. Приведено несколько простых примеров решений УКЭ. В разделе 3 рассматривается структура каустик решений УКЭ, в том числе пространственно ограниченного типа, образующих *частицеподобные* сингулярные объекты, а также свойства ассоциированных с решениями УКЭ физических полей. В четвертом разделе введено понятие *Мировой функции*, генерирующей "Мировое решение" УКЭ. В этой связи предложена и подробно обсуждается общая концепция *многозначности* физических полей. Заключительный раздел 5 посвящен вопросам, связанным с природой физического Времени. Вводится понятие “предсветового” эфира, образованного первичными изотропными конгруенциями, и поток Времени по существу отождествляется с потоком Предсвета. Обсуждается внутренняя структура этих фундаментальных потоков, связанная с многозначностью исходного твисторного поля.

Настоящая работа является расширенной версией английской статьи [27], а в описании физической картины Мира продолжает предыдущую статью автора [39]. Для простоты восприятия мы избегаем ипользования 2-спинорного формализма, дифференциальных форм и т. п., отсылая более подготовленного в математическом отношении читателя к работам [23, 26, 25, 21, 22].

2 Твисторная структура и два класса решений уравнения комплексного эйконала

Как известно, уравнение эйконала описывает процесс распространения волновых фронтов (разрывов поля) в любой релятивистской теории, включая электродинамику Максвелла [4, 5]. Математическим и физическим проблемам, связанным с уравнением эйконала, посвящено огромное количество работ, см., например, [7, 8, 9, 10]. Уравнение комплексифицированного эйконала (УКЭ) естественно возникает в задачах распространения ограниченных световых пучков [11] и в теории изотропных конгруенций, связанных с решениями уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла [12]. В нашем подходе, однако, комплексный эйконал рассматривается в первую очередь как *фундаментальное физическое поле*, описывающее, в частности, взаимодействующие и обладающие дискретным спектром характеристик (“автоквантованные”) *частицеподобные* объекты, формируемые структурой особенностей решений УКЭ. С каждым из этих решений естественно сопоставляются также электромагнитное и другие известные из физики поля, ответственные за описание процесса взаимодействия сингулярностей-частиц.

Определим вначале, помимо обычных декартовых пространственно-временных координат $\{t, x, y, z\}$, естественые для геометрии Минковского *спинорные* или *изотропные* координаты $\{u, v, w, \bar{w}\}$ (скорость света здесь и в дальнейшем принимается равной единице, $c = 1$)

$$u = t + z, \quad v = t - z, \quad w = x - iy, \quad \bar{w} = x + iy. \tag{2.1}$$

Эти координаты образуют *эрмитову* 2×2-матрицу X вида

$$X = X^{+} = \begin{pmatrix} u & w \\ \bar{w} & v \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

В спинорных координатах УКЭ (1.1) выглядит следующим образом:

$$\partial_u S \partial_v S - \partial_w S \partial_{\bar{w}} S = 0 \tag{2.3}$$

и эквивалентно утверждению об изотропности комплексного 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. Отметим, что УКЭ обладает замечательной *функциональной инвариантностью* [13, 14]: для каждого из его решений $S(X)$ любая (дифференцируемая) функция от него $f(S(X))$ также является решением УКЭ. Помимо этого, известно [6], что УКЭ инвариантно относительно преобразований полной 15-параметрической *конформной группы* пространства Минковского, включающих преобразования Лоренца.

Введем теперь в рассмотрение *произвольную однородную* функцию

$$\Pi = \Pi(\xi_0, \xi_1, \tau^0, \tau^1) \tag{2.4}$$

от двух пар коплексных переменных $\{\xi, \tau\}$, в каждой точке пространства-времени связанных между собой линейной зависимостью через т. н. *соотношение инцидентности*

$$\tau = X\xi \quad \Leftrightarrow \quad \tau^0 = u\xi_0 + w\xi_1, \quad \tau^1 = \bar{w}\xi_0 + v\xi_1 \ , \tag{2.5}$$

и ведущих себя как *2-спиноры* при лоренцевых вращениях [1]. Пара *инцидентных* друг другу 2-спиноров $\{\xi(X), \tau(X)\}$ образует алгебро-геометрический объект, известный в качестве (*изотропного проективного) твистора* пространства Минковского [2].

Предположим в дальнейшем, что одна из двух компонент спинора $\xi(X)$, например ξ_0, отлична от нуля. В этом случае однородная функция Π зависит от *трех* (проективных твисторных) аргументов следующего вида:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0, \tau^1), \quad G = \xi_1/\xi_0, \quad \tau^0 = u + wG, \quad \tau^1 = \bar{w} + vG. \tag{2.6}$$

Мы готовы теперь сформулировать основной результат в нашей работы [26].
Любое (аналитическое) решение УКЭ по отношению к твисторной структуре принадлежит к одному из двух и только двух классов и может быть получено из некоторой производящей функции вида (2.6) с помощью одной из двух различных алгебраических процедур.

Для получения первого класса решений следует просто разрешить алгебраическое уравнение, определяемое функцией (2.6),

$$\Pi(G, u + wG, \bar{w} + vG) = 0 \tag{2.7}$$

относительно единственной неизвестной G. При этом получим некоторое комплекснозначное поле $G(X)$, тождественно удовлетворяющее УКЭ. Действительно, при подстановке $G = G(X)$ уравнение (2.7) становится *тождеством* и, в частности, может быть продифференцировано по спинорным координатам $\{u, v, w, \bar{w}\}$. Тогда будем иметь

$$P\partial_u G = -\Pi_0, \quad P\partial_w G = -G\Pi_0, \quad P\partial_{\bar{w}} G = -\Pi_1, \quad P\partial_v G = -G\Pi_1, \tag{2.8}$$

где через Π_0, Π_1 обозначены частные производные от функции Π по ее твисторным аргументам τ^0, τ^1, а через P – *полная* производная этой функции по G,

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = \frac{\partial \Pi}{\partial G} + w\Pi_0 + v\Pi_1 \quad , \tag{2.9}$$

которую мы будем пока что считать отличной от нуля в рассматриваемой области пространства-времени. Перемножая уравнения (2.8), находим тогда, что поле $G(X)$ действительно удовлетворяет УКЭ в форме (2.3). Легко убедиться также, что *произвольная* функция твисторных аргументов $S = S(G, u + wG, \bar{w} + vG)$ при подстановке полученной зависимости $G = G(X)$ также удовлетворяет УКЭ (вследствие функциональной зависимости (2.7) эта функция на самом деле зависит только от *двух* твисторных переменных).

Для получения второго класса решений УКЭ следует сначала продифференцировать производящую функцию (2.6) по G и лишь потом получившееся алгебраическое уравнение

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = 0 \tag{2.10}$$

разрешить относительно G. При этом функция $G(X)$ уже не будет сама по себе удовлетворять УКЭ; однако после ее подстановки в (2.6) производящая функция Π становится функцией пространственно-временных координат и сама с необходимостью удовлетворяет УКЭ (как и любая функция от нее $f(\Pi(X))$ в силу отмеченной выше инвариантности УКЭ). В самом деле, дифференцируя функцию (2.6) при $G = G(X)$ по спинорным координатам, имеем

$$\partial_u \Pi = \Pi_0 + P\partial_u G, \quad \partial_w \Pi = G\Pi_0 + P\partial_w G, \quad \partial_{\bar{w}} \Pi = \Pi_1 + P\partial_{\bar{w}} G, \quad \partial_v \Pi = G\Pi_1 + P\partial_v G, \tag{2.11}$$

откуда при учете генерирующего условия (2.10) немедленно следует УКЭ (2.3) для функции Π.

Функциональное соотношение (2.7) и отвечающие ему решения УКЭ первого класса хорошо известны. Действительно, помимо УКЭ поле $G(X)$, полученное из (2.7), удовлетворяет, как легко

[1] Для упрощения мы не различаем в записи пунктирные и непунктирные спинорные индексы. В соотношении инцидентности (2.5) опущен стандартный множитель “i” (мнимая единица), что допустимо при соответствующем переопределении *нормы* твистора

видеть из выражений для производных (2.8), *переопределенной* системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_u G = G\partial_w G, \quad \partial_{\bar{w}} G = G\partial_v G, \tag{2.12}$$

определяющей т. н. *бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруенции* (БСК). При этом алгебраическое уравнение (2.7) представляет собой *общее решение* этих уравнений (в неявном виде), описывая тем самым все БСК в пространстве Минковского. Это замечательное утверждение, доказанное впервые в [16], известно как *теорема Керра.*

Что касается второго класса решений УКЭ, генерируемых алгебраическим уравнением (2.10), то, по-видимому , он ранее не рассматривался в литературе [2]. Известно, однако, что условие (2.10) определяет положение *особенностей* БСК и, соответственно, – особенностей решений УКЭ *первого* класса, полученных из алгебраического уравнения (2.7). Точнее, уравнение (2.10) определяет *точки ветвления* основного комплекснозначного поля $G(X)$, т. е. точки пространства-времени, в которых производящее уравнение (2.7) имеет *кратные корни.* С другой стороны, для самих решений второго класса геометрическое место положения особенностей определяется, как это сразу следует из генерирующего эти решения уравнения (2.10), условием следующего вида:

$$\Lambda = \frac{d^2\Pi}{dG^2} = 0. \tag{2.13}$$

Изотропные конгруенции (в том числе БСК), их особенности и точки ветвления играют определяющую роль в алгебродинамической теории поля. Подробнее они обсуждаются в следующих разделах. Здесь же мы лишь повторим, что согласно теореме, доказанной в работе [26],

две вышеописанные алгебраические процедуры в совокупности представляют общее решение УКЭ, т.е. все (аналитические) решения уравнения комплексного эйконала могут быть получены с помощью одной из этих процедур

(отметим только, что для решений с нулевой компонентой спинора $\xi_0 = 0$ должна быть выбрана иная, по сравнению с использованной выше, калибровка). Полученный результат можно рассматривать как *прямое обобщение теоремы Керра.*

В заключение приведем в качестве иллюстрации несколько примеров нахождения двух классов решений УКЭ с помощью вышеприведенной конструкции.

1. Статические решения. Пусть производящая функция Π зависит от своих твисторных переменных следующим образом:

$$\Pi = \Pi(G, H), \quad H = G\tau^0 - \tau^1 = wG^2 + 2zG - \bar{w}, \tag{2.14}$$

где $z = (u - v)/2$, а зависимость от временной координаты $t = (u + v)/2$ оказывается тем самым исключенной. Очевидно, более того, что анзац (2.14) представляет самый общий вид генерирующих функций, приводящих к статическим решениям УКЭ.

В [19, 12] было доказано, что статические решения уравнений БСК (а, следовательно, также и УКЭ первого класса), обладающие пространственно-ограниченной *(локализованной)* структурой сингулярного множества, с точностью до 3-мерных вращений и трансляций исчерпываются *решением Керра*, получающегося из функции

$$\Pi = H + 2iaG = wG^2 + 2z^*G - \bar{w}, \quad (z^* = z + ia) \tag{2.15}$$

с постоянным параметром $a \in \mathbb{R}$. Разрешая квадратичное по G уравнение $\Pi = 0$, получаем тогда следующие две "моды" поля $G(X)$:

$$G = \frac{\bar{w}}{z^* \pm r^*} \equiv \frac{x + iy}{z + ia \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}} \quad , \tag{2.16}$$

[2] Изучение решений *действительного* уравнения эйконала с помощью дифференцирования производящих функций, зависящих от координат как параметров, используется в общей теории особенностей каустик и волновых фронтов [9]

которые в случае $a = 0$ геометрически соответствуют обычной *стереографической проекции* $S^2 \mapsto \mathbb{C}$ из Северного или Южного полюсов соответственно. Нетрудно проверить, что оба решения, как и соответствующие им остальные компоненты твистора

$$\tau^0 = u + wG = t \pm r^*, \quad \tau^1 = \bar{w} + vG = G\tau^0, \tag{2.17}$$

действительно удовлетворяют УКЭ (так же как и произвольная функция всех этих компонент). При этом соответствующая БСК в простейшем случае $a = 0$ радиальна и имеет точечную сингулярность; в общем случае $a \neq 0$ БСК представляет собой конгруенцию прямолинейных образующих системы гиперболоидов и имеет *сингулярность типа "Керровского" кольца* радиуса $R = |a|$. Используя эту конгруенцию, можно определить соответствующие ей риманову метрику (метрику типа "Керра-Шилда") и электромагнитное поле (см. раздел 3), совместно удовлетворяющие электровакуумной системе уравнений Максвелла-Эйнштейна. В случае $a = 0$ это приводит к решению Райсснера-Нöрдстрема с кулоновским электрическим полем, в общем случае – к решению Керра-Ньюмена, характеризующимся тремя параметрами – массой M, электрическим зарядом Q и моментом импульса (спином) Mca, – и обладающим также магнитным моментом Qa, соответствующим "дираковской" частице [17, 18]. Более того, в рамках алгебродинамического подхода для электрического заряда точечной или кольцеобразной сингулярностей *оказывается допустимым только одно, единственное по модулю, "элементарное" значение* [14, 24, 25]. Более подробно свойства этого исключительного решения в контексте алгебродинамики рассмотрены в работе [21].

Получим теперь из той же производящей функции (2.15) решение УКЭ *второго* класса. Дифференцируя функцию (2.15) по G и приравнивая производную нулю, получим $G = -z^*/w$; подставляя затем это выражение в качестве аргумента в функцию (2.15), будем иметь окончательно следующее статическое (всюду однозначное) решение УКЭ:

$$\Pi = -\frac{(r^*)^2}{w} = -\frac{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}{x - iy}. \tag{2.18}$$

Отметим, что при этом уравнение $\Pi = 0$, эквивалентное двум действительным уравнениям $z = 0,\ x^2 + y^2 = a^2$, определяет сингулярное кольцо для решения Керра (2.16), т.е. для соответствующего той же функции Π решения УКЭ *первого* класса, как это и должно быть в соответствии с вышедоказанной общей теоремой (см. в этой связи также раздел 4).

При рассмотрении статических решений УКЭ с локализованной в 3-пространстве сингулярностью *второго* класса выясняется, однако, что в отличие от аналогичных решений первого они вовсе не исчерпываются решением (2.18). В качестве примера рассмотрим серию решений, которые можно получить из производящих функций следующего вида:

$$\Pi = \frac{G^n}{H}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 2 \tag{2.19}$$

Не приводя явного вида самих решений (для произвольного $n > 2$), найдем лишь пространственную структуру их особенностей, определяемую из решения совместной системы уравнений $P = 0,\ \Lambda = 0$ (см. уравнения (2.10),(2.13)). Исключая из нее неизвестное поле G, находим, что сингулярности (точки ветвления эйконала) снова имеют форму *колец* $z = 0,\ x^2 + y^2 = R^2$, имеющих соответственно радиусы, равные $R = a(n-1)/\sqrt{n(n-2)}$. Интересно заметить, что этим решениям не соответствует, очевидно, никаких нетривиальных решений УКЭ первого класса, для которых уравнение $\Pi = 0$ определяло бы структуру сингулярностей, как это имеет место для сопряженной пары "Керровских" решений (2.16) и (2.18).

Волновые решения. Рассмотрим теперь производящие функции, зависящие лишь от одной из твисторных переменных τ^0, τ^1, например от τ^0:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0) = \Pi(G, u + wG). \tag{2.20}$$

Оба класса решений УКЭ, генерируемых функциями вида (2.20) будут, очевидно, зависеть только от *двух* спинорных координат $u = t + z,\ w = x - iy$. Это означает, в частности, что соответствующие поля распространяются вдоль оси Z с фундаментальной скоростью $c = 1$. Пример "фотоноподобного" решения этого типа, с пространственно ограниченной (как в продольном, так и в поперечном направлениях) структурой сингулярного множества приведен в работе [25].

Отметим в заключение, что решение УКЭ значительно более сложной структуры рассмотрено ниже в разделе 4 (см. также [25]).

3 Частицы как каустики первичных светоподобных конгруенций

Хорошо известно, что каждому решению уравнения эйконала соответствует некоторая изотропная конгруенция лучей, ортогональная гиперповерхностям постоянного эйконала $S = const$ (волнового фронта) и определяемая направлением 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. В обычно рассматриваемых ситуациях эти две структуры определяют *характеристики* и *бихарактеристики* некоторого (линейного) уравнения гиперболического типа, например, волнового уравнения $\Box\Psi = 0$.

В рассматриваемом комплексном случае (УКЭ) поверхности постоянного эйконала и изотропные конгруенции 4-градиента геометрически принадлежат уже *комплексному расширению пространства-времени Минковского* $\mathbb{C}M^4$, совершенно естественному также с точки зрения комплексной структуры исходной алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$. Вопрос о физическом смысле дополнительных (мнимых) координат и соответствующих комплексных изотропных конгруенций нетривиален и чрезвычайно важен, но мы не имеем возможности рассматривать его здесь, надеясь сделать это в отдельной статье.

Используем ниже другой, не менее интересный факт существования *действительной* изотропной геодезической конгруенции для каждого из *комплекснозначных* решений УКЭ. Это замечательное свойство сразу следует из рассмотренной выше твисторной структуры УКЭ. А именно, каждое решение УКЭ (как первого, так и второго классов) полностью определяется соответствующим ему (изотропным проективным) твисторным полем $\{\xi(X), \tau(X)\}$, подчиненным условию инцидентности (2.5) (в выбранной выше калибровке $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = G(X)$). Это "условие Пенроуза" может быть в явном виде разрешено относительно пространственных координат $\{x_a\}$, $a = 1, 2, 3$, в результате чего получим:

$$x_a = \frac{\Im(\tau^+\sigma_a\xi)}{\xi^+\xi} - \frac{\xi^+\sigma_a\xi}{\xi^+\xi}\, t, \tag{3.1}$$

где $\{\sigma_a\}$ представляют собой обычные *матрицы Паули*, а временная переменная t *остается свободным параметром!* Из выражения (3.1) следует, что фундаментальное спинорное поле $\xi(X)$ *воспроизводит свои значения вдоль лучей, определяемых единичным векторным полем направлений* (полем т. н. *директора*)

$$\vec{n} = \frac{\xi^+\vec{\sigma}\xi}{\xi^+\xi}, \quad \vec{n}^2 \equiv 1, \tag{3.2}$$

распространяясь вдоль этих, локально определенных направлений с универсальной и постоянной скоростью $c = 1$. В ранее выбранной калибровке для декартовых компонент "директорного" вектора (3.2) имеем

$$\vec{n} = \frac{1}{(1+GG^*)}\{\ (G+G^*),\ -i(G-G^*),\ (1-GG^*)\ \}; \tag{3.3}$$

при этом две его независимые степени свободы находятся в одно-однозначном соответствии с двумя компонентами основной комплекснозначной функции $G(X)$.

Таким образом, при выборе некоторого произвольного решения УКЭ пространство расслаивается пучком прямолинейных световых лучей – *изотропной геодезической* [3] *конгруенцией* (ИГК). Заметим, что как следствие прямолинейности изотропной конгруенции "директорный" вектор автоматически удовлетворяет уравнению *геодезических* [39]

$$\partial_t\vec{n} + (\vec{n}\vec{\nabla})\vec{n} = 0. \tag{3.4}$$

Фундаментальное поле $G(X)$, определяющее ИГК, может быть получено из одного из двух алгебраических условий (2.7) или (2.10), которые в общем случае имеют несколько (конечное или

[3] В пространстве Минковского геодезические, очевидно, являются прямыми

даже бесконечное число) локально различных решений. Предположим, что производящая функция П *неприводима*, т.е. не может быть представлена в виде произведения некоторого числа твисторных функций того же вида (в противном случае следует сделать выбор в пользу одного из множителей). Тогда решение общего вида будет представлять собой *многозначную комплексную функцию* $G(X)$. Выберем в окрестности некоторой точки X одну из непрерывных *ветвей* этой функции ("мод"); при этом данной моде будет соответствовать некоторая ИГК и определенный набор физических полей.

В частности, для любого из решений УКЭ *первого* класса может быть определен спинор *электромагнитного поля* $F_{(AB)}$, непосредственно выражающийся через твисторное поле решения [23, 25, 26]

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}\left\{\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}\left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P}\right)\right\}, \tag{3.5}$$

где Π_A, Π_{AB} представляют собой производные по твисторным аргументам τ^0, τ^1 от генерирующей функции П, первого и второго порядков соответственно . Для каждой из мод решения $G(X)$ построенное таким способом поле *локально удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла.* Помимо этого, в работах [14, 23, 21] было показано, что через ту же функцию $G(X)$ естественно определяется еще и комплексное $SL(2,\mathbb{C})$ *калибровочное поле Янга-Миллса*, а также *поле кривизны* некоторой эффективной римановой метрики.

Рассмотрим теперь *аналитическое продолжение* выбранной моды функции $G(X)$ вплоть до одной из ее точек ветвления, которые соответствуют кратным корням уравнения (2.7). В такой точке напряженность электромагнитного поля (3.5) обращается в бесконечность. То же самое имеет место и для других ассоциированных с решениями УКЭ физическими полями, в частности с полем кривизны [4]. Тем самым пространственная структура, определяемая положением точек ветвления функции $G(X)$ (которая может быть 0-, 1- или даже 2-мерной, см. раздел 4), проявляет себя как *общий источник* совокупности физических полей и (по крайней мере в случае, когда она ограничена в 3-пространстве) формирует некоторый хорошо определенный и единый *частицеподобный* объект.

Такие образования могут проявлять нетривиальную эволюцию во времени, моделирующую физические взаимодействия, а бифуркации сингулярностей весьма напоминают *взаимопревращения* элементарных частиц (см. пример в следующем разделе). Они обладают также реалистичным набором "квантовых чисел", в том числе автоквантованным электрическим зарядом и гиромагнитным отношением, характерным для дираковской частицы (фермиона спина 1/2) [17, 18, 21]. Большое число таких частицеподобных решений и их сингулярная структура получены и изучались в наших работах [20, 21, 22, 25].

С другой стороны, для светоподобных конгруенций (ИГК), сопоставляемых решениям УКЭ с помощью директорного вектора (3.3), положение их точек ветвления совпадает с положением точек ветвления самого фундаментального поля $G(X)$ и представляет хорошо известную из геометрической оптики структуру "протяженных фокусов" – *каустик*, т. е. огибающих системы лучей конгруенции, на которых соседние лучи пересекаются (фокусируются). С этой точки зрения, в рассматриваемой теории *"частицы" интерпретируются как (ограниченные в пространстве) каустики ассоциированных с решениями УКЭ светоподобных прямолинейных конгруенций.*

4 Мировая функция и многозначные физические поля

На этом этапе следует сделать выбор в пользу одного из двух типов решений УКЭ, которое в данной теории могло бы в принципе отвечать за описание структуры Вселенной в целом. *В качестве "Мирового решения" мы выбираем некоторое решение* **первого** *класса*, поскольку большое количество интересных геометрических и физических структур может быть ассоциировано с каждым из решений именно этого класса [14, 20, 21]. Такое решение может быть получено алгебраически из условия Керра (2.7) и некоторой производящей твисторной *"Мировой функции"* П; геометрически оно порождает некоторую ИГК специального вида – *бессдвиговую изотропную конгруенцию* [2, 3].

Более того, оказывается, что при этом выборе решение УКЭ *второго* класса, "сопряженное" Мировому, также играет важную роль, определяя характеристическую гиперповерхность для

[4]Поле Янга-Миллса имеет, помимо этого, дополнительные сингулярности струнного типа

Мирового решения (решения I класса). Действительно, эта гиперповерхность находится из решения совместной системы алгебраических уравнений (2.7) и (2.10). Если разрешить уравнение (2.10) относительно G и подставить результат в (2.7), полученное уравнение $\Pi(G(X)) = 0$ и определит характеристическую гиперповерхность для "Мирового" решения. В то же время функция $\Pi(G(X))$ обязана при этом удовлетворять УКЭ, представляя некоторое решение второго класса (в соответствии с основной теоремой раздела 2). Таким образом, в рассматриваемой теории
поле эйконала выполняет две взаимодополняющие функции, являясь одновременно фундаментальным физическим полем (как решение УКЭ I класса) и в то же время характеристическим полем (как сопряженное ему решение II класса), определяющим геометрическое место точек ветвления исходного поля (точек разрыва его производных).

Предположим теперь, что Мировая функция Π представляет собой *неприводимый полином очень высокого, но конечного порядка*, так что уравнение (2.7) является алгебраическим в узком смысле (т. е. не трансцендентным) и геометрически определяет некоторую алгебраическую поверхность в проективном твисторном пространстве $\mathbb{C}P^3$. В этом случае Мировое решение УКЭ будет состоять из некоторого большого числа мод – ветвей многозначной комплексной функции $G(X)$ – и будет в каждой точке задавать соответствующее число изотропных направлений, определяемых в 3-пространстве директорным вектором (3.3) и порождающих равное им число локально различных ИГК.

Каждая пара таких конгруенций в фиксированный момент времени будет, как правило, иметь *огибающую*, состоящую из большого числа связных *одномерных* компонент-каустик [5]. Именно эти пространственные структуры и будут определять в рассматриваемой теории "частицы" общего типа (по крайней мере, если они пространственно ограничены). Другие типы частицеподобных структур будут локализованы в фокальных точках пересечения *трех и более* ИГК, где уравнение (2.7) имеет корень более высокой кратности. Разумеется, образования этого вида будут встречаться относительно редко, и их устойчивость весьма проблематична.

На достаточно простом примере можно проиллюстрировать существование и свойства обоих вышепредставленных типов частиц-каустик. Выберем, например, в качестве производящей твисторную функцию вида [25]

$$\Pi = G^2(\tau^0)^2 + (\tau^1)^2 - b^2G^2 = 0, \quad b = const \in \mathbb{R} \quad , \tag{4.1}$$

приводящую к уравнению 4-го порядка относительно поля $G(X)$. В начальный момент времени $t = 0$, как нетрудно проследить аналитически, геометрическое место особенностей состоит из пары точечных сингулярностей (обладающих равными "элементарными" зарядами противоположного знака) и электрически нейтральной 2-мерной поверхности (эллипсоидального "кокона"), окружающего точечные заряды (подробнее см. [25]). Кокон образован пересечением всех 4-х мод многозначного решения, в то время как каждая из точечных сингулярностей формируется пересечением одной из пар соответствующих (локально радиальных, т.е. кулоновского типа) ИГК.

Чрезвычайно интересной оказывается динамика этих сингулярностей: в частности, в момент времени $t = b/\sqrt{2}$ точечные сингулярности взаимоуничтожаются (при $r = 0$, т. е. в начале координат), моделируя тем самым процесс *аннигиляции* элементарных частиц; этот процесс сопровождается *излучением* вторичного волнового (светоподобного) фронта, представленного еще одной 2-мерной компонентой связности каустической структуры. Более подробно решение (4.1) будет рассмотрено в отдельной статье.

Итак, мы видим, что именно многозначное поле естественным образом обеспечивает возможность самосогласованной структуры и эволюции сложных (вплоть до приближенных к реальным) многочастичных сингулярных систем. Необходимо лишь преодолеть некий психологический барьер и допустить принципиальную возможность *многозначности* не только первичного G-поля, но и других ассоциированных с ним физических полей, включая, например, электромагнитное.

Действительно, в общепринятых классических подходах поля по существу служат лишь инструментом, позволяющим адекватным образом (с учетом запаздывания и т. п.) описать динамику частиц, и ничем более. Правда, в нелинейных теориях, так же как и в представленном здесь

[5]Действительно, каустики **общего вида** определяются одним *комплексным* условием $\Pi(G(X)) = 0$ (двумя действительными условиями) на 3 координаты, при фиксированном $t = t_0$ определяющим некоторое число 1-мерных кривых – "струн"

алгебродинамическом подходе, поля играют более важную роль, отвечая за образование самих частиц как регулярных *солитонов* или сингулярностей (точечных или протяженных) соответственно. В первом, более привычном подходе, требование *однозначности* поля представляется вполне естественным, если не неизбежным. Та же ситуация имеет место и в квантовой механике, где "правила отбора" часто следуют как раз из условия однозначности волновой функции.

Однако в алгебродинамике, как можно видеть на примере решения (4.1), требование однозначности поля не только не является необходимым, но и препятствует адекватному описанию взаимодействия частиц-сингулярностей. С другой стороны, признание многозначности поля вовсе не мешает получению дискретного спектра характеристик сингулярности по аналогии с квантовой механикой: например, требование *однозначности некоторой, локально выбранной моды* первичного G-поля и ассоциированному с ним электромагнитного поля (вдали от точек ветвления первого и сингулярностей второго соответственно) приводит к квантованию электрического заряда сингулярных источников в алгебродинамической теории поля [24, 25].

Наконец, если вести речь о т. н. процессе "измерения" напряженностей поля, например электроматнитного, то следует заметить, что в эксперименте непосредственно меряются лишь ускорения частиц, токи и т. п., и лишь затем результаты переводятся на привычный полевой язык. Однако это последнее действие – лишь дань традиции, вовсе не являющаяся обязательной (вспомним хотя бы электродинамику Фейнмана-Уилера или многочисленные релятивистски инвариантные теории "действия на расстоянии" [28, 29]). "На самом деле мы никогда не имеем дело с полями, а исключительно с частицами" (Ф. Дайсон).

Между тем предлагаемый подход в этом отношении может даже считаться не столь радикальным, поскольку физическое поле, хотя и многозначное, сохраняет в нем свою фундаментальную роль и как строительная основа для частиц, и как посредник, осуществляющий взаимодействие между ними. Что касается второй из его функций, то уже на классическом уровне рассмотрения, при рассмотрении уравнения движения частицеподобной сингулярности, мы можем иметь дело с *усредненным значением* всех полевых мод, "внешних" по отношению к частице (т.е. несингулярных в точке ее нахождения). Отметим, что близкие представления естественно возникают и в некоторых квантовополевых подходах [32]. В нашей же схеме, истинную взаимосвязь первичного многозначного поля и "наблюдаемого" поля, описывающего межчастичные взаимодействия, еще предстоит осознать после получения спектра и эффективной механики частиц-сингулярностей.

Хочется надеяться, что концепция многозначности физических полей будет через какое-то время востребована, также как это в свое время произошло с гипотезой *многомерности* физического пространства-времени. Идея многозначности действительно выглядит чрезвычайно естественной и привлекательной. С чисто математической точки зрения эта концепция оправдана в свете естественной многозначности решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [30, 31]). При этом, как выясняется, решения, описываемые обобщенными δ-функциями, представляют собой, по существу, лишь частный и не самый интересный случай решений общего вида. С физической точки зрения идея о локально многозначном, но *глобально едином комплекснозначном поле* позволяет простым образом ввести понятие о некотором дуалистическом комплексе "частицы-поле", комплексе чрезвычайно богатой и сложной структуры, объединяющем все частицы Вселенной в единый физический объект. При этом сами сингулярности-частицы хорошо определены и участвуют в коллективном движении, *свободном от всякой неоднозначности или расходимостей* (последние могут возникнуть в данной схеме лишь как результат неадекватного описания процесса эволюции и могут быть устранены, если возникнут, на совершенно законном основании, в отличии от процедур *перенормировки* в квантовой теории поля).

Наконец, что касается принципиально важной, **финальной** проблемы выбора некоторой *исключительной по внутренним свойствам* производящей функции Π в качестве *Мировой функции Вселенной*, некоторые соображения могут быть высказаны уже на данном этапе развития теории. Мы собираемся рассмотреть их в отдельной статье.

5 “Предсвет”, релятивистски инвариантный Эфир и поток Времени

Светоподобные конгруенции (ИГК) являются основным элементом картины физического Мира, возникающей в представленном здесь алгебродинамическом подходе и даже в твисторной теории вообще. Лучи ИГК плотно заполняют пространство-время и в каждой точке состоят из *суперпозиции* огромного числа компонент - мод, имеющих различные изотропные направления, т.е. распространяющиеся (с 3-мерной точки зрения) в разных направлениях, но с постоянной по модулю и универсальной скоростью $c = 1$ (для каждой из мод многозначного решения, каждой точки и каждой инерциальной системы отсчета) . С такой точки зрения, *во Вселенной не существует ничего, кроме этого первичного светоподобного потока (Предсвета)* , поскольку *вся физическая Материя порождена предсветом и из предсвета* на каустиках – областях своего рода “конденсации”, “уплотнения” лучей предсветовой конгруенции.

При этом можно говорить о некоторой исключительной форме релятивистски инвариантного *эфира*, формируемого первичным предсветовым потоком. Такой эфир, разумеется, имеет очень мало общего со старыми моделями *светонесущего* эфира, рассматривавшегося как род упругой среды непонятной этиологии. Здесь же эфир состоит из *бесструктурных* (предматериальных) светоподобных элементов и, очевидно, находится в полном согласии с теорией относительности [6].

В то же время, описанная выше картина эфира, формируемого потоком Предсвета, и материи, порожденной “сгущениями” первичного Света, вызывает множество ассоциаций с Библией и с древней восточной философией. Не один теолог, мистик или философ наверняка уже приходил к представлениям о подобной картине Мироздания. Однако возникающие в контексте последовательной и чисто дедуктивной физической теории, такие представления выглядят значительно более достоверными; насколько известно автору, ранее они практически не обсуждались в физической литературе [7].

Существование формируемого Предсветом эфира и универсальное свойство “переноса” фундаментального “эфирообразующего” поля $G(X)$ с постоянной скоростью $c = 1$ указывает также на принципиально различный статус пространственных и временной координат и позволяет *предложить новый подход к проблеме физического Времени* в целом. При этом полезно вспомнить, что с тех пор, как Г. Минковский в 1908 году объединил пространство и время в единый 4-мерный континуум, никаких дальнейших продвижений в понимании проблемы Времени по существу не произошло. Более того, такой синтез во многом затушевал качественные различия пространственной и временной сущностей и мало способствовал решению таких проблем, как (микро/макро) необратимость, (не)однородность и (не)локальность времени, зависимость хода времени от материальных процессов и др.

По нашему мнению, суть проблемы Времени очень проста и состоит в следующем. *Субъективно* мы воспринимаем время как некоторое непрерывное и невидимое движение, *поток*. Каждый из нас прекрасно понимает, как это понимали еще древние греки, что имеется в виду под выражением “Река Времени”. Как правило, мы воспринимаем такое внутреннее движение как не зависящее ни от нашей воли, ни от материальных процессов и *равномерное*: недаром течение времени в физике моделируется равномерным движением ленты записывающего устройства и т. п. Кроме того и в отличие от изменений в пространственных направлениях, именно с изменением во времени связано не только *сохранение* определенного набора *интегральных величин* (это-то как раз используется в ортодоксальной физике), но и более сильное, субъективно воспринимаемое условие – *повторение, воспроизведение* **локального** *состояния любой системы*; именно поэтому для измерения времени и используются *часы* с принципом действия, основанным на повторяющихся, чисто периодических процессах. Наконец, в отличие от, в значительной мере произвольных и различных, изменений *пространственного* положения физических тел, все они и все мы всегда обладаем *общей и монотонно*

[6]Сейчас кажется даже странным, что сам А. Эйнштейн не предложил концепцию релятивистского эфира, столь созвучного идеям и СТО, и любимого им *принципа Маха*. Удивительно также, что и Р. Пенроуз просмотрел эту возможность, естественно вытекающую из самой структуры созданной им твисторной теории

[7]В отдельных аспектах близкие к вышерассмотренным идеи высказывались в работах [34, 35, 36]. Отметим особенно концепцию “лучистой частицы”, предложенную Л.С. Шихобаловым [33]

возрастающей временной координатой, т.е. находимся в едином и перманентном движении в Реке Времени.

Удивительно, но теоретическая физика даже не пытается дать хоть какое-то объяснение подобных представлений, совершенно чуждых и ей и, в том числе, теории относительности. При описании динамики (как нерелятивистской, так и релятивистски инвариантной) чисто постулативно выбирается "гиперповерхность, ортогональная оси времени", т. е. фиксируется субъективно воспринимаемое всеми единство настоящего момента времени, момента "сейчас"; *никаких внутренних оснований для этого в структуре теоретической физики, включая СТО, не имеется!*

Такая ситуация, по крайней мере частично, обусловлена тем, что представление о вездесущем и вечном Потоке Времени немедленно приводит к вопросу о его (материальном? предматериальном?) носителе. В этой связи нельзя не вспомнить работы Н.А. Козырева [37], который настойчиво развивал представление об "активном" Потоке Времени, непосредственно влияющем на ход материальных процессов. По нашему мнению, однако, строгие физические обоснования идей Козырева на сегодняшний день отсутствуют. В предлагаемом нами подходе Поток Времени не является в подобном смысле материальным: он не *влияет* на Материю, и не *взаимодействует* с ней, а сам *порождает* ее. В отличие от концепции Козырева, здесь нет различных материальных сущностей, лишь одной из которых является Время: напротив, имеется лишь одна *триединая* сущность – Предсвет-Время-Материя. В некотором смысле наша концепция оказывается ближе к теории "время-генерирующих потоков" А.П. Левича [38].

С другой стороны, при рассмотрении проблемы о носителе Потока Времени мы неизбежно возвращаемся к представлениям о некоторой форме *эфира*, который был, как известно, изгнан из физики после триумфа специальной теории относительности. Без него же никакой Поток Времени не может быть последовательно введен в структуру теоретической физики, и все субъективно воспринимаемые свойства времени не могут быть строго сформулированы и описаны.

Однако парадоксальным образом, как это часто бывает, именно СТО с ее постулатом постоянства и универсальности скорости света и оправдывает введение *динамического, лоренц-инвариантного эфира*, формируемого светоподобными конгруенциями, как первичной структуры физического Мира. При этом Поток Времени совершенно естественно может быть отождествлен с Потоком первичного Света (Предсвета), а *Река Времени* – с *Рекой Предсвета*. Причем именно универсальность скорости света объясняет наше субъективное восприятие Потока Времени как равномерного и однородного.

Совершенно необычным и неожиданным оказывается, однако, другое: в данном подходе *Поток Времени представляет собой* **суперпозицию** *огромного числа* **разнонаправленных** *и локально независимых составляющих (субпотоков).* В каждой точке 3-мерного пространства существует (конечное) множество направлений, и каждая из мод первичного многозначного поля $G(X)$ определяет одно из этих направлений и *распространяется вдоль него*, формируя одну из составляющих единого Потока Предсвета, тождественного Потоку Времени.

Можно предполагать, что именно благодаря такой локальной многозначности мы не способны субъективно воспринимать *направление* Потока Времени. Помимо того, для сложного Мирового решения в структуре фундаментального временного-предсветового потоков обязательно присутствует и *стохастическая* компонента, проявляющая себя в хаотических изменениях локальных направлений световых конгруенций, также труднодоступных для восприятия. В то же время, как уже отмечалось, именно существование постоянной по модулю и универсальной для всех ветвей многозначного Мирового решения *скорости распространения Предсвета* ответственно за возможность субъективного восприятия Потока Времени вообще и за восприятие хода времени как равномерного и однородного в частности.

6 Заключение

Итак, мы рассмотрели реализацию алгебродинамического подхода, в которой в качестве основы физической теории выбирается одна единственная структура чисто абстрактной природы (алгебра комплексных кватернионов и *обобщенные уравнения Коши-Римана* – условия дифференцируемости функций в этой алгебре). Та же самая структура на самом деле может быть выражена на многих других эквивалентных алгебро-геометрических языках (ковариантно постоянных полей, твисторной геометрии, бессдвиговых изотропных конгруенций и др.).

Исходные уравнения прямо приводят к полю комплексного эйконала, рассматриваемому в теории как первичное нелинейное физическое поле (в некотором смысле альтернативное линейным полям квантовой механики). С этим полем тесно связаны фундаментальное 2-спинорное и твисторное поля, на языке которых, в частности, формулируется общее решение уравнения комплексного эйконала. Через поле эйконала определяются также другие физические поля, в том числе электромагнитное поле и поле Янга-Миллса. Особенности поля эйконала и отвечающих ему изотропных конгруенций рассматриваются как частицеподобные образования ("автоквантованные" и эффективно взаимодействующие).

В результате, возникающая как следствие одной лишь исходной структуры *физическая* картина Мира оказывается весьма неожиданной и красивой. Ее основными элементами являются первичный световой поток – "Предсвет" – и формируемый им релятивистский эфир, многозначные физические поля и порождаемая Предсветом материя (состоящая из частиц - каустик, образуемых суперпозицией отдельных ветвей единой предсветовой конгруенции в точках их "фокусировки").

Очень естественной и глубокой представляется возникающая в теории связь между существованием универсальной скорости (скорости "света") и "Потоком Времени", связь, позволяющая в определенном смысле понять происхождение Времени как такового. *Время есть не что иное, как первичный Свет*, эти две сущности неразделимы. С другой стороны, *нет ничего во Вселенной, помимо потока Предсвета*, порождающего *всю без исключения* "плотную" Материю во Вселенной.

****

Автор благодарен Д.Г. Павлову за приглашение участвовать в работе создаваемого им актуального научного журнала "Гиперкомплексные числа в физике и геометрии", а также в конкурсе работ по данной тематике. Он также глубоко признателен А.П. Левичу и участникам руководимого им семинара по изучению феномена времени. Много дали мне беседы с В.И. Жариковым, В.Н. Журавлевым, Дж.А. Ризкалла, В.Н. Тришиным, В.П. Троицким, В.П. Царевым и с другими моими коллегами, которым я благодарен за многолетнюю дружбу и поддержку. Хочется надеяться, что огромное здание физики на самом деле можно перестроить "по новому проекту", значительно более простому, "единственно возможному" (Дж.А. Уилер) и приближающему нас к *истинному* Проекту, по которому и был создан наш Мир.

Литература

[1] R. Penrose, in: *Quantum Gravity: an Oxford Symposium*, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama. – Clarendon Press, Oxford, 1975.

[2] Р. Пенроуз и У. Риндлер, *Спиноры и Пространтво-Время. Т.2.* – "Мир", М., 1989.

[3] R. Penrose, *Classical and Quantum Gravity*, **14**, A299 (1997).

[4] В.А. Фок, *"Теория Пространства, Времени и Тяготения".* – "ГИТТЛ", М., 1955.

[5] А.З. Петров, *"Новые Методы в Общей Теории Относительности".* – "Наука", М., 1966.

[6] Г. Бейтман, *"Математическая Теория Распространения Электромагнитных Волн".* – "Физматгиз", М., 1958.

[7] S. Fritelli, E.T. Newman and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.*, **40**, 383, 1999;
E.T. Newman and A. Perez, *J. Math. Phys.*, **40**, 1089 (1999).

[8] В.И. Арнольд, *"Математические Методы Классической Механики".* – "Наука", М., 1989.

[9] В.И. Арнольд, *“Особенности Каустик и Волновых Фронтов”.* – “ФАЗИС”, М., 1996.

[10] С.Н. Кружков, *Мат. Сборник*, **98 (140)**, 450 (1975).

[11] В.П. Маслов, *“Комплексный Метод ВКБ в Нелинейных Уравнениях”.* – “Наука”, М., 1977.

[12] R.P. Kerr and W.B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 273 (1979).

[13] В.В. Кассандров, *“Алгебраическая Структура Пространства-Времени и Алгебродинамика”.* – Изд-во Ун-та дружбы народов, М., 1992.

[14] V.V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **3**, 216 (1995); (gr-qc / 0007027).

[15] V.V. Kassandrov, *Acta. Applic. Math.*, **50**, 197 (1998);
V.V. Kassandrov, in: *“Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics”*, ed J. Lõhmus and P. Kuusk. – Inst. Phys. Estonia Press, 1990, p 202.

[16] G.C. Debney, R.P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.* , **10**, 1842 (1969).

[17] B. Carter, *Phys. Rev.*, **174**, 1559 (1968).

[18] C.A. Lopes, *Phys. Rev.*, **D30**, 313 (1984).

[19] А.Я. Буринский, в: *“Проблемы Теории Гравитации и Элементарных Частиц. Вып. 11”*, ред. К.П. Станюкович. Атомиздат, М., 1980, с. 47.

[20] В.В. Кассандров и Дж.А. Ризкалла, в: *“Современные Проблемы Теории Поля”*, ред. А.В. Аминова. – Изд-во Казанского Ун-та, Казань, 1998, с. 163; see also English version
V.V. Kassandrov and J.A. Rizcallah, in: *“Recent Problems in Field Theory”*, ed A.V Aminova, Kasan Univ. Press, Kasan, 1998, p 176; (gr-qc / 9809078).

[21] V.V. Kassandrov and J.A. Rizcallah, in: *“Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory”*, ed. V.A. Petrov. – Inst. High Energy Phys., Protvino, 2002, p. 199; *Preprint* gr-qc / 9809056, 1998.

[22] V.V. Kassandrov and V.N. Trishin, *Gravitation & Cosmology*, **5**, 272 (1999); (gr-qc / 0007026).

[23] V.V. Kassandrov and J.A.Rizcallah, *Preprint* gr-qc / 0012109, 2000.

[24] В.В. Кассандров, *Вестник Рос. Ун-та дружбы народов*, сер. Физика, **8(1)**, 34, 2000; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[25] V.V. Kassandrov, *Preprint* gr-qc /0308045.

[26] V.V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 57 (2002).

[27] V.V.Kassandrov, in:*Proc. Int. Conf. “Physical Interpretations of Relativity Theory”*, eds. A.N. Morozov and V.O. Gladyshev. – Bauman Univ. Press, Moscow, 2003 (in print).

[28] *Instantaneous Action-at-a-Distance in Modern Physics. “Pro” and “Contra”*, eds. A. Chubykalo, V. Pope and R. Smirnov-Rueda. – Nova Science Publ. Inc., NY, 1999.

[29] Ю.С. Владимиров и А.Ю. Турыгин, *"Теория Прямого Межчастичного Взаимодействия"*. – "Энергоатомиздат", М., 1986.

[30] F.Lizzi, G.Marmo, G.Sparano and A.M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.*, **14**, 34, 1994.

[31] V.V. Lychagin, *Acta Applic. Math.*, **3**, 135 (1985).

[32] A.A. Kirillov, *Phys. Lett.*, **B555**, 13 (2003);
A.A. Kirillov and D. Turaev, *Phys. Lett.*, **B532**, 185 (2002).

[33] Л.С. Шихобалов, *Вестник С.-П. Ун-та*, **1(3)**, 109 (1997); **1(4)**, 118 (1999).

[34] И.А. Урусовский, *Зарубежная радиоэлектроника*, **3**, 3 (1996); **6**, 64 (1996); **6**, 66 (2000).

[35] В.В. Смолянинов, *Успехи физич. наук*, **170**, 1064 (2000).

[36] И.А. Шелаев, *"Введение в необратимую электродинамику"*. – Дубна, 1999.

[37] Н.А. Козырев, *"Избранные Труды"*. – Л., 1991;
Н.А. Козырев, в: *"История и Методология Естественных Наук. Вып.2"*. – М., 1963, с. 95; (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[38] А.П. Левич, в:*"Конструкции Времени в Естественных Науках: на Пути к Пониманию Феномена Времени"*, ред. А.П. Левич. – Изд-во Московского Ун-та, М., 1996.
A.P. Levich, *Gravitation & Cosmology*, **1(3)**, 237 (1995); (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[39] В.В. Кассандров, в:*"Математика и Практика. Математика и Культура. Вып.2"*, ред. М.Ю. Симаков. – "Самообразование", М., 2001, с. 67; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

АЛГЕБРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ПОЛЯ: БИСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

В. В. Кассандров, Ж. А. Ризкалла

Кафедра общей физики, Российский Университет дружбы народов,
Орджоникидзе, 3, Москва 117419 Россия, E-mail: vkassan@mx.pfu.edu.ru.

Условия дифференцируемости функций бикватернионого переменого положены в основу алгебраической теории поля. Их необходимыми следствиями являются вакуумные уравнения Максвелла и Янга-Миллса. Условия дифференцируемости могут быть проинтегрированы в твисторных переменых и сводятся к алгебраическим. В работе представлено двухсингуляное решение и его топологические модификации. Соответствующие ему ЭМ-поля представляют собой известное решение Борна и его модификации с сингулярной структурой, имеющей топологию кольца и тора. Обсуждаются общие проблемы алгебродинамического подхода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физика возвращается к своим первоосновам. Она уже не хочет ограничивать себя *описанием* реальности, пусть изящным математически и хорошо экстраполируемым экспериментально. Все чаще речь заходит о самой сущности физических законов, о возможности общего Принципа, лежащего в основе всех без исключения природных процессов.

Все очевидней становится, что такой Принцип может быть выражен лишь на чисто абстрактном математическом языке, представляя собой не что иное, как *программу*, своего рода *"Код Вселенной"*, предопределяющий структуру и эволюцию мира. С этой точки зрения **законы природы следовало бы открывать "на бумаге", а не в лаборатории**. При этом истинный язык природы может оказаться весьма далеким от используемого в современной физике, и о принципе соответствия (в принятом сейчас узком смысле) придется тогда вообще забыть.

Реализация подобной парадигмы затрудняется, конечно, неготовностью большинства физиков отказаться от привычного "ньютононовско-галилеевского" метода познания природы и эклектической смеси классических, квантовых и геометрических представлений, и попытаться строить физику с чистого листа и, буквально, "на листе". Удивительнее другое: сама математика не может пока предложить некоторую действительно *уникальную* структуру, естественным образом генерировавшую бы *неоднородность* и *иерархию* – свойства, столь присущие окружающему нас миру.

Пожалуй, лишь *фрактальные отображения* могут естественным образом воспроизводить простейшие из этих свойств, порождая целый мир "из ничего". Другая возможность, о которой пойдет речь в этой статье, связана с *гиперголоморфными* структурами, а именно с обобщениями условий голоморфности Коши-Римана с ТФКП на исключительные алгебры *кватернионного* типа. На основе (одних лишь!) этих структур оказалось возможным построить своеобразную нелагранжеву теорию поля. При этом *некоммутативность* кватернионных алгебр влечет за собой *нелинейность* обобщенных уравнений Коши-Римана, а вместе с ней и возможность включения физических взаимодействий [1].

Предварительные результаты и некоторые варианты этого подхода, получившего название *алгебродинамики*, были представлены в монографии [3]. В наиболее интересном и изученном случае уравнения, определяющие гиперголоморфные отображения в алгебре *комплексных кватернионов* **B**, редуцируются к виду

$$d\eta = \Phi * dX * \eta, \tag{1.1}$$

где η - 2-спинор, Φ - 2×2-матричное калибровочное поле (подробности см. ниже, п. 2). Система уравнений (1.1) оказалась тесно связанной с фундаментальными уравнениями физики - с *вакуумными* уравнениями Максвелла, Янга-Миллса и Эйнштейна, а также с уравнениями д'Аламбера и эйконала [3]-[6]. А именно, **для каждого решения системы (1) все вышеперечисленные уравнения выполняются тождественно**[2], что уже само по себе не может не удивлять!

Неожиданно оказалось также, что класс *сингулярных* решений самих вакуумных уравнений, в том числе уравнений Максвелла, весьма широк. Помимо известных решений с точечной кулоновской и кольцеобразной особенностями, в последнее время были обнаружены также решения с *тороидальной*, спиралевидной и еще более сложными структурами сингулярностей. Это позволило предложить в рамках модели (1.1) концепцию **частиц как сингулярностей поля** [4, 6] , а их взаимопревращения пытаться связать с *перестройкой* сингулярностей в смысле теории катастроф [2].

Главным при этом, однако, является факт существования самой *нелинейной* и *переопределенной* первичной системы (1.1), определяющей самосогласованным образом как 2-спинор $\eta(x)$, так и калибровочное поле $\Phi(x)$. Для решений системы (1.1) **принцип суперпозиции не имеет места**. Эта система является своеобразным *фильтром*, отбирающим согласующиеся с ней и друг с другом решения различных вакуумных уравнений поля и определяющим тем самым их нетривиальную эволюцию во времени, т.е. взаимодействия и взаимопревращения сингулярностей - частиц.

С другой стороны и в отличие от обычной для теории поля ситуации, переопределенность системы (1.1) (8 уравнений для 6 функций) не позволяет

[1] В отличие от многочисленных попыток построения кватернионного анализа на основе прямых *линейных* обобщений уравнений Коши-Римана

[2] Вакуумные уравнения Эйнштейна выполняются лишь в статическом случае, см. ниже п. 4

произвольно фиксировать даже начальное распределение полей во всем $\mathbf{R^3}$. В полном соответствии с концепцией *суперпричинности* Эйнштейна [1, с.762] этого оказывается достаточно, чтобы уже на классическом уровне имели место определенные "условия квантования" характеристик частиц-сингулярностей, в их числе значений электрического заряда [3, 4, 7, 8]!

Наиболее сложной проблемой является конструирование *многосингулярных* решений и установление общего вида уравнений движения сингулярностей, т.е. их вывод из уравнений поля (1.1). После краткого обзора основных свойств системы (1.1) в п.2 и ее интегрирования в твисторных переменных (п.3) мы алгебраически получаем ранее найденное фундаментальное односингулярное решение (п.4), представляем точное бисингулярное решение системы (1.1) и рассматриваем его модификации (п.5). В заключении (п.6) обсуждаются некоторые общие вопросы алгебродинамического подхода.

2. СВОЙСТВА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений (1.1) (ниже мы будем называть ее *производящей*, ПСУ) представляет собой частный случай условий дифференцируемости функций бикватернионного переменного. Соответствующий этому вариант *некоммутативного анализа* достаточно подробно изложен в работах [3, 4, 7] (там же можно найти и ссылки на более ранние работы). Умножение $(*)$ в формуле (1.1) можно рассматривать как матричное, а поле $\Phi(x)$ - как комплексную 2×2 матрицу, что соответствует известному представлению алгебры бикватернионов $\mathbf{B}$.

При преобразованиях Лоренца

$$X \Rightarrow A^+ * X * A, \quad \det A = 1, \tag{2.1}$$

ПСУ сохраняет свой вид при условии, что величины $\eta(x)$ и $\bar\Phi(x)$ (матрица, *присоединенная* матрице $\Phi(x)$) ведут себя как 2-спинор и 4-вектор соответственно:

$$\eta \Rightarrow \bar A * \eta, \quad \bar\Phi \Rightarrow A^+ * \bar\Phi * A. \tag{2.2}$$

ПСУ инвариантна также относительно *слабых* калибровочных преобразований, т.е. преобразований вида

$$\eta \Rightarrow \lambda(\eta)\eta, \quad \Phi_\mu \Rightarrow \Phi_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\lambda(\eta), \tag{2.3}$$

с калибровочным параметром $\lambda(\eta_1, \eta_2)$, зависящим от координат лишь через компоненты *преобразуемого* решения [4, 8].

Таким образом, величины $\Phi(x)$ могут рассматриваться как 4-потенциалы некоторого комплекснозначного *абелева* калибровочного поля. Динамические ограничения на это поле следуют из обращения в нуль частных производных для коммутаторов производных и имеют вид *условий комплексной самодуальности* [3, 4]

$$\vec E + i\vec H = 0 \tag{2.4}$$

для **C**-значных напряженностей поля, соответствующих потенциалам $\Phi_\mu(x)$. Вследствие соотношений (2.4) и отдельно для действительных и мнимых составляющих полей $\vec{E}, \vec{H}$ тождественно выполняются вакуумные уравнения Максвелла. Поэтому **C**-значное поле $\Phi(x)$ на самом деле описывает *пару* обычных электромагнитных полей, дуально сопряженных друг другу.

Удивительно, однако, что то же поле $\Phi(x)$ допускает и параллельную интерпретацию [4, 6]. Действительно, левая **B**-связность

$$\Gamma(x) = \Phi(x) * dX \equiv \Gamma^0(x) + \Gamma^a(x)\sigma_a \tag{2.5}$$

естественным образом определяет напряженность некоторого комплексного калибровочного поля

$$F(x) = d\Gamma(x) - \Gamma(x) \wedge \Gamma(x). \tag{2.6}$$

Часть $\Gamma^0(x) = \Phi_\mu(x)dx^\mu$ отвечает ранее рассмотренному электромагнитному полю. В то же время часть $\Gamma^a(x)$ связности (2.5), выражающаяся через те же величины Φ_μ, при преобразованиях (2.3) ведет себя как некоторое $SL(2,C)$-калибровочное поле, и вследствие соотношений самодуальности (2.4) **тождественно удовлетворяют свободным уравнениям Янга-Миллса** [4]. Заметим, что напряженности электромагнитного $F^0_{[\mu,\nu]}$ и Янг-Миллсовского $F^a_{[\mu,\nu]}$ полей связаны при этом динамически соотношением

$$F^a_{[\mu,\nu]}F^a_{[\mu,\nu]} = (F^0_{[\mu,\nu]})^2 \tag{2.7}$$

(суммирование только по изотопическому индексу $a = 1,2,3$), которое отличается от обычно принятой в теории поля неинвариантной связи.

С другими свойствами ПСУ (1.1), в том числе с геометрической интерпретацией связности (2.5) как связности *Вейля-Картана* специального вида, можно ознакомиться по работам [4, 7, 8].

3. ТВИСТОРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПСУ

Уравнения (1.1) могут быть записаны в 2-спинорной форме

$$\nabla^{AA'}\eta^{B'} = \Phi^{B'A}\eta^{A'}, \quad A, A', B' = 1, 2, \tag{3.1}$$

где $\nabla^{AA'}$ обозначает производную по соответствующей спинорной координате $X_{AA'}$. При умножении на ортогональный спинор $\eta_{A'}=\varepsilon_{A'C'}\eta^{C'}$ потенциалы $\Phi^{B'A'}$ исключаются, и мы приходим к **обобщенным нелинейным уравнениям Коши-Римана**, связывающим компоненты спинора $\eta(x)$:

$$\eta_{A'}\nabla^{AA'}\eta^{B'} = 0. \tag{3.2}$$

Решение уравнений (3.2) может быть выражено через *твисторные переменные*

$$\tau_A = X_{AA'}\eta^{A'} \tag{3.3}$$

в неявном относительно компонент спинора $\eta(x)$ виде

$$\Psi^{(C)}(\eta,\tau)=0, \quad C=1,2, \tag{3.4}$$

где $\Psi^{(1)},\Psi^{(2)}$ - две произвольные голоморфные функции 4-х комплексных переменных $\eta^{1'},\eta^{2'},\tau_1,\tau_2$, и компоненты τ зависят от η через твисторное уравнение (3.3).

Разрешив уравнения (3.4) относительно компонент спинора $\eta^{1'},\eta^{2'}$ и подставив их в (3.1) можно определить потенциалы $\Phi^{C'A}(x)$ и через них электромагнитное и Янг-Миллсовское поля, отвечающие решению системы (3.2).

Нас в первую очередь будут интересовать *сингулярности* этих полей: их топологическая структура, электрический заряд и эволюция во времени. Дифференцируя (3.4), нетрудно показать, что *каустикам*, на которых поля обращаются в бесконечность, отвечает условие вида

$$\det\|\frac{d\Psi^{(C)}}{d\eta^{B'}}\|=0. \tag{3.5}$$

Для дальнейшего заметим, что решение системы (3.4) упрощается выбором калибровки $\eta^{1'}$=1. При этом первое из соотношений (3.4) тривиально: $\Psi^{(1)}$=$\eta^{1'}-1$=0 а единственная остающаяся компонента спинора $\eta^{2'}\equiv\ G(x)$ алгебраически определяется вторым соотношением (3.4)

$$\Psi^{(2)}(\eta^{2'},\tau_1,\tau_2)\equiv\Psi(G,\ wG+u,\ vG+\bar{w})=0, \tag{3.6}$$

где для спинорных координат введены обычные обозначения $u,v=X_{11'},X_{22'}=t\pm z$, $w,\bar{w}=X_{12'},X_{21'}=x\pm iy$. Условие каустики (3.5) также принимает более простой вид

$$\frac{d\Psi}{dG}=0. \tag{3.7}$$

На самом деле в вышерассмотренной калибровке уравнения (3.2) сводятся к хорошо известным в ОТО соотношениям, определяющем изотропные *бессдвиговые геодезические конгруенции* (БСК), причем их решение в виде (3.6) представляет собой содержание *теоремы Керра* ([9, Глава 7]). Таким конгруенциям естественно сопоставляется метрика типа Керра-Шилда [6, 10, 11], причем **условие (3.7) определяет сингулярности кривизны этой метрики** [12, 13].

Таким образом, сингулярности электромагнитного, Янг-Миллсовского и гравитационного полей, однозначно сопоставляемых решениям ПСУ (1.1), определяются одним и тем же условием (3.7). Поэтому совершенно естественной представляется принимаемая в нашем подходе интерпретация **частиц как общих сингулярностей этих полей**.

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ОДНОСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ПСУ

Выбор простейшей линейной зависимости неявной функции $\Psi(G,\tau_1,\tau_2)$ в (3.6) от своих аргументов приводит к тривиальному решению для $G(x)$, для которого напряженности полей тождественно обращаются в нуль. *Статические аксиально-симметричные* решения (1.1) исчерпываются функциями (3.6) вида

$$\Psi = G\tau_1 - \tau_2 - cG = 0, \quad c = Const,$$

или эвивалентно,

$$G(wG + u) - 2cG - (vG + \bar{w}) = 0. \tag{4.1}$$

Разрешая квадратное уравнение (4.1), получим решение в явном виде

$$G(x) = \frac{\bar{w}}{(z - c) \pm \sqrt{(z - c)^2 + \rho^2}}, \tag{4.2}$$

где $z = (u - v)/2$, $\rho^2 = w\bar{w} = x^2 + y^2$. При действительном c, значение которого можно с точностью до трансляции положить равным нулю, решение (4.2) геометрически отвечает *стереографической проекции* $\mathbf{S^2} \mapsto \mathbf{C}$, а соответствующее ему электрическое поле имеет кулоновский вид с точечной сингулярной особенностью

$$E_r = \frac{q}{r^2}, \quad q = \pm 1; \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \tag{4.3}$$

причем **значение электрического заряда может иметь только строго фиксированную по модулю величину** (т.н. *алгебраическое квантование заряда*, см. [3, 4, 7, 8]). Соответствующее магнитное поле *чисто мнимо* и имеет аналогичный (4.3) *монопольный* вид

$$H_r = \frac{i\mu}{r^2}, \quad \mu = q = \pm 1; \quad H_\theta = H_\varphi = 0. \tag{4.4}$$

В случае мнимых значений константы $c = ia$, $a \in \mathbf{R}$ сингулярность соответствующего (4.2) ЭМ-поля имеет вид *кольца* радиуса $|a|$. При больших $r \gg |a|$ поле, сохраняя в качестве основных членов кулоновско - монопольную асимптотику (4.3),(4.4), приобретает также характерную *мультипольную* структуру, что даже позволяет сделать оценки величины квадрупольного электрического момента отвечающей решению (4.2) частицы [6] .

Риманова метрика, сопоставляемая через БСК решению (4.2), имеет вид метрики Шварцшильда для случая действительных значений , и метрики Керра для случая мнимых значений этой константы [10]. В работе [11] показано, что этим **исчерпываются статические решения (3.6), сингулярная структура кривизны (а в нашем подходе - и ЭМ-полей) которых ограничена в 3-пространстве**. Примечательно, что эти решения автоматически удовлетворяют как вакуумным уравнениям Эйншнейна, так и электровакуумной системе Максвелла-Эйнштейна. Действительно, тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ для комплексных автодуальных ЭМ-полей, удовлетворяющих условияю (2.4), тождественно равен нулю! С другой стороны, уравнения Максвелла в рассматриваемых пространствах не отличаются от плоского случая [10].

5. ДВУХСИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ПСУ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Рассмотрим теперь зависящие от времени аксиально-симметричные решения, генерируемые функцией (3.6) вида

$$\Psi = \tau_1 \tau_2 + b^2 G = 0, \quad b = Const \in \mathbf{C}\,.$$

что также приводит к квадратному уравнению и к следующему его решению для основной функции $G(x)$:

$$G = \frac{-2u\bar{w}}{\sigma^2 + \rho^2 + b^2 \pm \sqrt{\Delta}}, \qquad \Delta \equiv (\sigma^2 + \rho^2 + b^2)^2 - 4\sigma^2\rho^2, \tag{5.1}$$

где $\sigma^2 = uv = t^2 - z^2$.

Каустика для решения (5.1) соответствует обращению в нуль дискриминанта $\Delta = 0$, преобразуя который получим *уравнение эволюции сингулярностей* в виде

$$\Delta = (t^2 - z^2 - \rho^2 + b^2)^2 + 4b^2\rho^2 = 0. \tag{5.2}$$

В случае действительных значений константы b из (5.2) немедленно получаем

$$\rho = 0, \quad z = \pm\sqrt{t^2 + b^2}, \tag{5.3}$$

т.е. в этом случае структура поля имеет *две точечные сингулярности*, совершающие зеркальное *гиперболическое* движение вдоль оси Z (Рис.1а,б,в) Вычисляя потоки векторов напряженности ЭМ-поля через замкнутую поверхность, окружающую каждую из сингулярностей, легко убедиться, что обе они имеют равный и противоположный по знаку заряд, и что **значение заряда снова оказывается фиксированным и равным заряду односингулярного решения!**

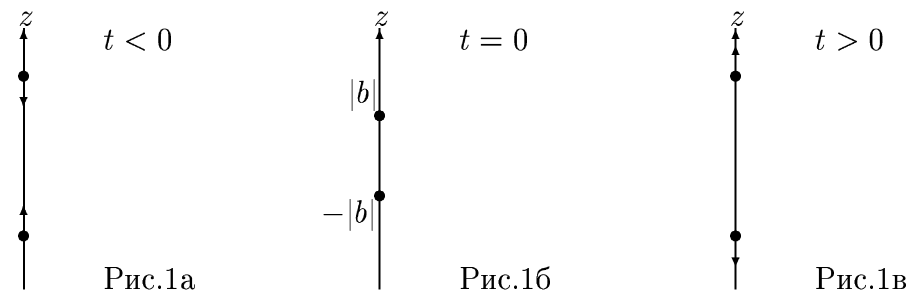

Рис.1а Рис.1б Рис.1в

Сами ЭМ-поля (точнее, их действительные части $\Re\vec{E}, \Re\vec{H}$) имеют структуру известного *решения Борна* для полей равноускоренного заряда ([16, с.136])

$$E_\rho = \mp\frac{8b^2\rho z}{\Delta^{3/2}}, \quad E_z = \pm\frac{4b^2}{\Delta^{3/2}}(t^2 - z^2 + \rho^2 + b^2), \quad H_\varphi = \mp\frac{8b^2\rho t}{\Delta^{3/2}}, \tag{5.4}$$

остальные компоненты тождественно равны нулю.

В литературе существуют самые разнообразные интерпретации решения (22) и связанной с ним проблемы излучения равноускоренного заряда, причем в большинстве работ появление второй зеркальной сингулярности попросту игнорируется [24]-[28]. Что касается излучения, то в последнее время вновь возродился интерес к этой проблеме [20]-[22], и появились высокого уровня работы, в которых строго доказывается его отсутствие в этом случае [18, 19].

Наши взгляды близки к излагаемым в статьях Сингала, однако мы не имеем возможности вступать здесь в дискуссию по этой старой и запутанной проблеме. Отметим лишь, что появление второй сингулярности представляется нам неизбежным следствием и фундаментальным свойством самих уравнений Максвелла (см. также в этой связи работу [25]). Сам процесс (Рис.1) можно рассматривать как некоторую "игрушечную" модель *упругого рассеяния* двух взаимодействующих частицеподобных образований. При этом взаимодействие, как ни странно, имеет неэлектромагнитную природу (вместо притяжения - отталкивание!), а электрический и магнитный заряды сингулярностей имеют здесь функцию не констант связи, а лишь источников поля и сохраняющихся квантовых чисел [3].

Такая интерпретация может быть подтверждена рассмотрением обнаруженных нами *модификаций* решения Борна, связанных с комплексными значениями константы $b^2 = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ в (5.1) [4]. В этом случае (предполагая $\alpha, \beta \neq 0$) имеем следующие соотношения для сингулярностей:

$$\rho = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}, \quad z = \pm\sqrt{t^2 + \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \tag{5.5}$$

Таким образом, опять сингулярности совершают гиперболическое движение вдоль оси Z, но имеют *кольцевую структуру* с фиксированным радиусом ρ (5.5). Тем же путем, как в случае действительной константы b мы находим, что они обладают противоположными зарядами, равными по абсолютной величине фундаментальному.

Случай чисто мнимых констант $b = ia,\ a \in \mathbf{R}$ требует особого рассмотрения. Из (5.2) имеем следующее условие для каустики:

$$z^2 + (\rho \pm a)^2 = t^2. \tag{5.6}$$

Это на первый взгляд простое уравнение описывает весьма нетривиальную эволюцию сингулярностей. Действительно, при $t = 0$ имеем снова кольцо радиуса $|a|$ (Рис.2а), которое при $t > 0$ превращается в *тор* с радиусом сечения R, возрастающим со световой скоростью $R = t$ (Рис.2б) (на рисунках представлены сечения этих фигур плоскостью, проходящей через ось симметрии Z). При $t = |a|$ "дырка" тора закрывается (Рис.1в), и в тот же момент в начале координат появляется вторая сингулярность, соответствующая положительному знаку в (5.6).

---

[3] Заметим, однако, что при этом *эффективный* заряд [17] $\sqrt{q^2+(i\mu)^2}$, как и в односингулярном случае (ср. с (4.4)), тождественно равен нулю, что формально оправдывает отсутствие ЭМ-взаимодействия!

[4] Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь по-прежнему идет о решениях обычных *действительных* уравнений Максвелла.

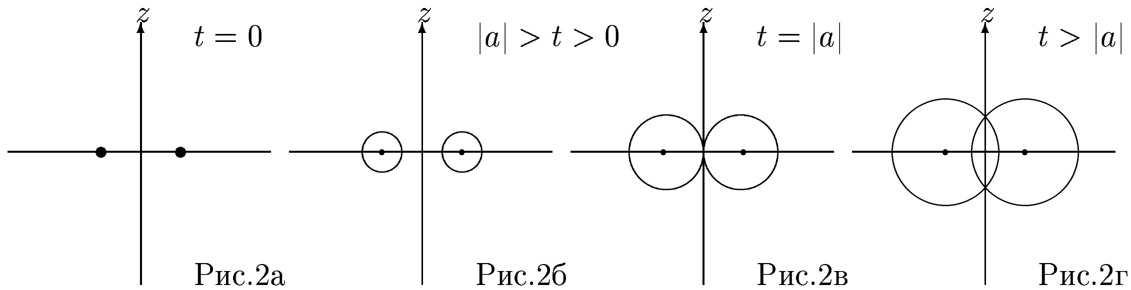

Рис.2а Рис.2б Рис.2в Рис.2г

При $t > |a|$ тор продолжает расширяться, пересекая "сам себя", и сингулярность имеет вид 2-х тороидальных "мостиков", соединяющих их общие точки с координатами

$$\rho = 0, \quad z = \pm\sqrt{t^2 - a^2} \tag{5.7}$$

(соответствующее сечение представлено на Рис.1г). При больших $t \gg |a|$ закон движения этих сингулярностей приближается к закону движения точечных сингулярностей решения Борна (5.3).Однако их скорость $V = dz/dt$ уменьшается при этом от ∞ до скорости света, так что соответствующий процесс можно рассматривать как разлетание двух *тахионо-подобных* образований. На интервале времени от $t = -\infty$ до $t = 0$ имеем обратный процесс все ускоряющегося сближения двух тахионов (соединенных сингулярными "мостиками"), вплоть до их *аннигиляции* при $t = -|a|$ с образованием тороидальной *резонансной* структуры и ее вырождения в сингулярное кольцо радиуса $|a|$ при $t = 0$. В этот момент конфигурация электрических линии испытывает претерпевает изменение топологии с изменением знака коэффициента зацепления на противоположный.

Заметим, что асимптотически при $|t| \gg |a|$ поле "тахионного" решения совпадает с полем решения Борна для точечных сингулярностей для всех продольных направлений, определяемым углами $\theta \ll \pi/2$ (т.е. вдалеке от направлений на сингулярных "мостики"). Это позволяет рассматривать тахионоподобные точечные особенности (5.7) как своеобразные "квазизаряды", причем величина каждого из зарядов оказывается снова равной заряду фундаментального решения.

Метрика, соответствующая этому решению ПСУ, является метрикой типа Керра-Шилда,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h e^3_\mu e^3_\nu \tag{5.8}$$

где $e^3 = du + G dw + \bar{G} d\bar{w} + G\bar{G} dv$ - изотропная 1-форма.
Для действительных констант b по аналогии с [14, 15] имеем метрику с функцией

$$h = \frac{m \partial_u \bar{G}}{\bar{\tau}_2 (\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)^2}, \quad m \equiv m(\bar{\tau}_1) \tag{5.9}$$

удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна с тензором изотропного излучения $T_{\mu\nu} = P_{33} e^3_\mu e^3_\nu$, где P_{33}

$$P_{33} = 2\frac{(\dot{m}(\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)\bar{\tau}_1 + 3m(\bar{\tau}_1 + G\bar{\tau}_2))(\bar{\tau}_2 \partial_u \bar{G})^2}{(\bar{\tau}_2 G - \bar{\tau}_1)^3}, \quad \dot{m} = \frac{dm}{d\bar{\tau}_1}. \tag{5.10}$$

Заметим, что бессдвиговая конгруенция, определяемая функцией G в (5.1), имеет нулевое вращение (т.е чистое расширение). Решение (5.1) описывает искривленное пространство, заполненное изотропным излучением. ЭМ-поля являются в некотором смысле *пробными*, поскольку их вклад в тензор энергии-импульса в силу условий комплексной самодуальности (2.4) отсутствует.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ВЗАИМОПРЕВРАЩЕНИЕ ЧАСТИЦ В БИКВАТЕРНИОННОЙ ПОЛЕВОЙ ДИНАМИКЕ

Сведение ПСУ (1.1) к решению алгебраического уравнения БСК (3.6) (или к уравнению (3.4) в произвольной калибровке) позволяет достаточно легко генерировать сложные решения ПСУ и отвечающие им решения уравнений Максвелла и (**C**-значных) уравнений Янга-Миллса. К настоящему времени, помимо вышепредставленных решений, изучены (В.Н.Тришиным) незаряженные "фотоноподобные" структуры со *спиралевидной* сингулярностью, распространяющейся вдоль некоторого направления со скоростью света, а также ряд других решений волнового типа. Широкий класс сингулярных решений уравнений Максвелла приведен в монографии [23], однако остается открытым вопрос о воэможности их согласования с основной ПСУ (1.1).

Для более сложных распределений наиболее интересная их характеристика - уравнение структуры сингулярности и закона ее эволюции - может быть получена и без явного решения уравнения (3.6). Действительно, исключая основную функцию $G(x)$ из двух уравнений (3.6),(3.7), приходим непосредственно к уравнению сингулярной поверхности (или кривых, или точек в вырожденных случаях). Примеры таких сложных сингулярных множеств будут опубликованы отдельно.

Тем не менее две главные задачи, естественно возникающие при анализе свойств ПСУ (1.1) - вывод общего уравнения движения сингулярностей и их полная классификация - пока еще не решены и, судя по всему, требуют весьма тонких математических методов. При этом в силу переопределенности ПСУ начальные данные задачи Коши можно произвольным образом задавать лишь на некоторой *2-мерной поверхности*, а не во всем 3-пространстве, поскольку эволюция решения по третьей координате определяется, как и по времени, самими уравнениями (1.1).

Что касается задачи классификации сингулярностей и связанной с ней задаче о допустимых перестройках особенностей, то по крайней мере для вакуумных уравнений Максвелла они, надо думать, будут в скором времени решены в рамках быстро развивающейся общей *теории катастроф* [2]. Отождествление особенностей с элементарными частицами, вообще говоря, напрашивается само собой. Для физиков, однако, такой подход непривычен, поскольку сингулярности обычно связываются там с расходимостями интегральных характеристик (собственной энергии и др.). В рассматриваемом здесь нелагранжевом подходе видно, что эта трудность на самом деле может иметь фиктивный характер, ибо **как квантовые числа, так и закон движения сингулярностей однозначно определяются самими решениями уравнений поля.**

На самом деле, мы имеем здесь дело с совершенно новым подходом и к самой нелинейной электродинамике; с подходом, в котором вместо видоизменения самих уравнений Максвелла мы рассматриваем их как тождественные следствия некоторой преддинамики.

Таким образом, за компактной и вытекающей из единого принципа(гиперголоморфности полевых функций) ПСУ (1.1) скрывается целый мир структур, во многих отношениях напоминающий реальный. После необходимой интерпретации матаматических величин, язык теории оказывается удивительно близким (но не тождественным!) к используемому в традиционной теории поля.

Более того, некоторые факты, например квантование электрического заряда, описываются рассматриваемой ПСУ гораздо более естественно и адекватно, чем это имеет место в общепринятых теоретико-полевых схемах. С другой стороны, подлинные возможности ПСУ по описанию структуры и взаимодействия частиц еще предстоит выяснить. Разумеется, мы не рассматриваем ПСУ (1.1) как некую *окончательную* математическую стуктуру, кодирующую "Теорию Всего". Однако уже обнаруженные уникальные ее свойства позволяют считать эту систему удачной и впечатляющей демонстрацией общих принципов алгебродинамического подхода.

Заметим, что рассматриваемая схема допускает естественные обобщения на алгебры более высокой размерности, на *"локальные алгебры"* со структурными коэффициентами, зависящими от точки [3, Глава 2], а также на неассоциативные алгебры типа октонионов. Все эти обобшения представляются достаточно перспективными.

Авторы признательны Ю. С. Владимирову, Ц. И. Гуцунаеву, Д. П. Желобенко и Ю. П. Рыбакову за полезные советы и интерес к работе. Один из нас (В. К.) благодарен А. В. Аминовой и Д. А. Калинину и другим организаторам школы-семинара "Волга-10" за теплый прием, а ее участникам, персонально В. Г. Багрову и А. П. Широкову - за стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] А. Эйнштейн, “Собрание Сочинений” Т.3, Москва, Наука, 1965.

[2] В. И. Арнольд, “Сингулярности Каустик и Волновых Фронтов”, Москва, Математика, 1996.

[3] В. В. Кассандров, “Алгебраическая Структура Просранства-Времени и Алгебродинамика”, Москва, Изд-во Российского Университета Дружбы Народов, 1992.

[4] V. V. Kassandrov, *Grav. & Cosm.* **1**, № 3, 216, 1995.

[5] В. В. Кассандров, *Вестник Рос. Унив. Дружбы Нар., Физика* **1**, 59, (1993).

[6] V. V. Kassandrov, J. A. Rizcalla, Particles as singularities within the unified algebraic field dynamics, *in* Proc. Int. Conf. “Geometrization of physics III”, Kazan, Kazan Univ. Press, 1997 (in print).

[7] V. V. Kassandrov, *Acta Applic. Math.* **50**, 197, 1998.

[8] В. В. Кассандров, Дж. А. Ризкалла, Ковариантно-постоянные пола и геометризация электромагнетизма, *в* Труд. Межд. Конф. “Геометризация Физики II”, Казань, Изд-во КГУ, 1996, с.137.

[9] Р. Пенроуз, В. Риндлер, “Спиноры и Просранство-Время” Т.2, Москва, Мир, 1988.

[10] G. Debney, R. P. Kerr, A. Schild, *J. Math. Phys.* **10**, 1842, (1969).

[11] R. P. Kerr, W. B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 273, (1979).

[12] A. Burinskii, String-like structures in complex Kerr geometry, *in* "Rep. on IV Hungar. Relat. Workshop", Gárdony, 1992.

[13] А. Я. Буринский, *Проблемы Теории Гравитации и Элементарных Частиц* **11**, 47, 1980.

[14] A. Burinskii, R. P. Kerr, Z. Perjés, (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9501012).

[15] W. Kinnersley, *Phys. Rev.* **186**, 1335, (1969).

[16] В. Паули, "Теория Относительности", Москва, Наука, 1965.

[17] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, "Электродинамика с Магнитным Зарядом", Минск, Изд-во БГУ, 1985.

[18] A. Singal, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 953, (1995).

[19] A. Singal, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1371, (1997).

[20] C. S. Ng, *Phys. Rev.* **E47**, 2048, (1993).

[21] S. Parrott, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1463, (1997), (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9711027).

[22] Amos Harpaz, Noam Soker, (Internet archive xxx.lanl.gov/gr-qc, paper 9805097).

[23] Г. Бейтмен, "Математическая Теория Распространения Электромагнитных Волн", Москва, Физматгиз, 1958.

[24] G. D. Boulware, *Ann. of Physics* **124**, 169, (1980).

[25] C. Leibovitz, A. Peres, *Ann. of Physics* **9**, 499, (1960).

[26] В. Л. Гинзбург, *Усп. Физ. Наук* **98**, Вып.3, 569, (1969).

[27] F. Rohrlich, *Ann. of Physics* **22**, 169, (1963).

[28] N. Rosen, *Ann. of Physics* **17**, 269, (1962).