

О ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЯХ

§ I. Об общих свойствах вихрей идеальной несжимаемой среды

Начало современной теории вихревых движений положил Гельмгольц, опубликовав в 1858 году свой мемуар "Об интеграле гидродинамических уравнений, соответствующих вихревому движению", в котором были впервые сформулированы теоремы о сохранении вихрей. Согласно этой теории, при силах, удовлетворяющих закону сохранения энергии, невозможно создать или уничтожить уже существующий вихрь и более того, невозможно даже изменить направление последнего. Возрождение и угасание вихрей, наблюдаемых в природе, целиком определяется пассивными силами трения. Только благодаря этим силам осуществляется вихрь, и они же составляют зародившийся вихрь потухать.

Интегралы гидродинамических уравнений, на которых как следствие вытекают теоремы о сохранении вихрей, были получены еще в 1815 году Коши. Но Коши интересовалась лишь аналитическая сторона дела. Геометрическая же интерпретация его результатов принадлежит Гельмгольцу. Только после этого возникла та группа вопросов и задач, которые теперь составляют предмет учения о вихрях.

Однако, нельзя не упомянуть, что частные случаи теоремы о сохранении вихрей были известны уже Лагранжу. В

своей аналитической механике, опубликованной в 1788 году, он доказывает, что движение идеальной жидкости, обладающей потенциалом скоростей в какой-либо момент времени, остается текучим во все время движения. Далее Коши и Стокс доказывали, что всякая частица идеальной жидкости никогда не получает вращения от окружающей среды, если не обладает им в начальный момент времени.

В 1839 году шведский ученый Свенберг доказал следующую теорему: угловые скорости вращения частиц жидкости в различных положениях ее на траектории всегда обратно пропорциональны квадратам расстояния ее от траектории движения. Отсюда заключение: частица жидкости, получив в какой-либо момент угловую скорость, никогда не перестанет вращаться, и наоборот, частица жидкости не будет вращаться, если в начале движения ее угловая скорость была равна нулю.

В указанном выше мемуаре Гельмгольца принцип сохранения вихрей был обоснован во всей полноте. Более того, там же он указал правило определения скоростей движения вихревых шнуров, находящихся в идеальной, несжимаемой жидкости, и тех частей жидкой массы, где отсутствуют вихри. Им же указана аналогия между скоростями движения частиц жидкости и силами действия гальванических токов на магнитный полюс.

Все последующие работы, появившиеся после 1853 года, по существу являются расширением и обобщением основных результатов, добытых Гельмгольцем.

Итальянский ученый Бельтрами, пользуясь теоремами, указанными Гельмгольцем, дал правило определения скоростей частиц сжимаемой жидкости, находящейся в вихревом движении и занимающей конечный объем. Это правило, устанавливающее электродинамические аналогии, известно как теорема Бельтрами.

Крупный шаг вперед после Гельмгольца сделал Кирхгофф. Своих лекциях по математической физике он дал дифференциальные уравнения движения прямолинейных и параллельных вихревых шнуров, находящихся в неограниченной массе несжимаемой жидкости. Он же указал четыре интеграла этих уравнений.

Основываясь на уравнениях Кирхгоффа, Гребль в 1877 го-

ду решил несколько задач о плоском движении трех, четырех и $2n$ вихрей. Задачу о движении четырех вихрей Гребль ограничивает осуществлением в расположении вихрей плоскости симметрии; движение $2n$ вихрей ограничивает предположением осуществления в расположении вихрей n плоскостей ортогональной симметрии.

Два года спустя после работы Гребля появилось работа Коотса (Cootes), в которой он рассмотрел движения вихревого кольца и показал, что кольцеобразная форма вихря — форма устойчивая. Изучением движения вихревых колец много занимался также Дж. Томсон.

Вихревым движениям в сжимаемой жидкости посвящены работы Гретце и Шра. Движение вихрей, ограниченных стенками, изучал сам Гельмгольц.

Рассматривая движение двух прямолинейных параллельных вихрей в идеально нежимаемой жидкости, Гельмгольц показал, что плоскость, делящая расстояние между двумя вихрями с равными по величине напряженностями, но равными по знаку, может приниматься за стенку, если она перпендикулярна и уравновешенному расстоянию. Вихрь будет двигаться параллельно этой стенке, и весь эффект стенки сводится, таким образом, к эффекту, происходящему от изображения вихря, если стенку рассматривать как зеркало.

Задаче Гребля о движении четырех вихрей может быть тоже рассмотрено с позиций, указанных Гельмгольцем.

Гринхилл в 1877—1878 гг. рассмотрел задачи о движении вихрей в жидкости, ограниченной цилиндрическими поверхностями. Пользуясь методом изображений, он решил задачи о плоском движении одного и двух вихрей внутри и вне поверхности круглого цилиндра. Им же решена задача о движении вихря в пространстве между радиальными плоскостями круглого цилиндра, а также в пространстве, ограниченном поверхностью прямоугольной четырехугольной призмы.

Андреде, исходя из решений Гринхилла, определил время, по истечении которого вихрь, двигавшийся в пространстве, ограниченном четырехугольной призмой, вернется в исходное положение. Коотс решил задачу о движении прямолинейного вих-

ря внутри и вне эллиптического цилиндра.

В 1874 году Лисе рассмотрел частный случай, когда 2n вихрей, образующиеся в жидкости, ограниченной цилиндрической поверхностью, не меняют своего положения с течением времени.

Методом конформных изображений в 1888 году Лов решил задачу о движении вихря внутри некоторых трехгранных призм.

Совершенно особую задачу поставил перед собою в 1894 году Н.Е. Жуковский, который, пользуясь методом конформного изображения, решил задачу о движении вихря вблизи острия плавника, погруженного в жидкость. Рассматривая траектории вихря, он показал, что вихревой шнур всегда уклоняется от подносимого к нему носа.

Наконец, в 1898 году появилась самостоятельная работа Д.Н. Горячева, который разобрал различные случаи движения трех, четырех и более параллельных вихрей.

В. Томсон, основываясь на теореме о сохранении вихрей, выдвинул особую атомистическую гипотезу. Он предположил, что все пространство вселенной заполнено идеальной жидкостью, в которой атомы материи представляют собой бесконечно малые замкнутые вихри, зародившиеся в этой жидкости. Равновесие в атомах атомов В. Томсон объяснил многообразием движений, в котором находятся частицы одного простого вещества. Вихревая теория атомов, созданная В. Томсоном, не получила применения и развития. Только в двадцатых годах настоящего столетия немецкий гидродинамик А. Корн попытался вновь воскресить идеи В. Томсона, но применительно не к атому вещества, а к толкованию природы электрона.

Несколько позднее Н.П. Кастерин сделал попытку построения вихревой теории элементарных частиц. Однако идеи А. Корна и Н.П. Кастерина были встречены с большим недоверием широкой научной общественностью, вследствие этого они изолированы и ими почти никто не интересуется, хотя в работах названных ученых содержится немало интересных соображений.

С развитием физики ученые столкнулись с необходимостью изучения вихревых образований при обтекании твердых

тел. В этом отношении особого внимания заслуживают работы Кармана и Н. В. Жуковского. Первый весьма подробно изучал поведение так называемой вихревой дорожки Кармана.

Имеется замечательное произведение А. А. Фридмана на русском языке "Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости", в котором осуществлена широкая постановка задач о движении вихрей в сжимаемой жидкости.

Наконец, следует упомянуть о замечательных исследованиях Озеена, который впервые поставил и решил ряд задач о движении вихрей в вязкой жидкости. Идеи Озеена еще ждут своего продолжателя, как и идеи А. А. Фридмана.

§ 2. О некоторых свойствах вихревых столбов с точки зрения гидродинамики неидеально сплошной среды

I. Рассмотрим некоторые свойства вихревых столбов с точки зрения учета неполноты уравнений гидродинамики. Это уместно сделать потому, что поставленный вопрос мало освещался в литературе и, кроме того, таит в себе некоторые противоречия, анализ которых может многое уяснить. Мы привыкли полагаться на невыблемость установленных истин, забывая о том, что они не абсолютны и имеют свои границы применения.

Уравнения гидродинамики, построенные на предположении о непрерывности среды, несомненно, должны давать противоречивые результаты, где имеется нарушение непрерывности. В этом отношении вихревые столбы могут служить классическим примером, когда нарушение непрерывности сигнализирует об относительности установленных наукой уравнений гидродинамики. Н. П. Каутерин первый обратил на это внимание и наметил пути исправления указанных уравнений.

2. Пусть дан примодулированный вихревой шнур бесконечной длины; тогда для течений частиц жидкости внутри вихревого шнура ротор от скорости будет отличен от нуля. Наоборот, вне вихревого шнура ротор от скорости будет равен нулю. Следовательно, течение вне вихревого шнура будет потенциальным.

Возьмем окружность вихревого шнура. Пусть скорость по

этому контуру будет w . Обозначим через r радиус окружности. Тогда циркуляция, взятая по этому контуру, будет

$$\gamma = 2\pi r w .$$

Эта циркуляция должна иметь одно и то же значение для всех окружностей, так как каждую из них пронизывает вихревой шнур. Если радиус вихревого шнура обозначить через r_0 , а скорость на его поверхности — через w_0 , то постоянная циркуляция будет

$$2\pi r_0 w_0 .$$

На основании равенства скорости среды в любой точке вне вихревого шнура будет

$$w = \frac{r_0 w_0}{r} ,$$

т.е. она уменьшается обратно пропорционально радиусу r .

С другой стороны, для установившегося циркуляционного движения центробежная сила единицы объема жидкости должна уравновешиваться изменением давления на единицу длины по радиусу-вектору; другими словами, должно выполняться равенство следующего вида:

$$\frac{\rho w^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{r_0^2 w_0^2}{r^3} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} . \quad (2.1)$$

Будем считать, что процесс происходит адиабатно, т.е. имеет место нелорическое уравнение вида

$$p = A \rho^\gamma = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma . \quad (2.2)$$

Подставляя это соотношение в равенство (2.1) и интегрируя его, получим

$$\frac{w_0^2 r_0^2}{2r^2} = - \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \rho^{\gamma-1} + c_0 \quad (2.3)$$

Если положить в бесконечном удалении от вихревого шнура плотность среды равной нулю, то в этом случае постоянная c_0 будет также равна нулю. Но это предположение абсурдно потому, что оно приводит к отрицательному значению плотности для всех точек среды, удовлетворяющих неравенству

$$r < \infty$$

Следовательно, мы вынуждены считать постоянную c_0 отличной от нуля и величиной положительной.

Подсчитаем теперь энергию движения невихровой области в слое высотой, равной единице. Нетрудно видеть, что эта энергия должна подсчитываться по формуле

$$E_e = \int_{r_0}^{\infty} 2\pi r \frac{w^2}{2} \rho dr \quad (2.4)$$

Ряды простоты вычисления положим величину γ равной двум. Суть дела от этого не изменится, а интеграл (2.4) в этом случае беретон элементарным способом. После подстановки в этот интеграл значения для скорости и значения плотности из равенства (2.3) и при условии интегрирования в пределах от r_0 до r получим выражение

$$E_e = \frac{\pi}{a_0} w_0^2 r_0^2 c_0 1g \frac{r}{r_0} + \frac{\pi}{a_0} \frac{w_0^4 r_0^4}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \quad (2.5)$$

здесь через a_0 обозначена величина

$$a_0 = \frac{2\rho_0}{\rho_0 \gamma}, \quad \gamma = 2$$

Из найденного соотношения (2.5) можно сделать такой вывод: если постоянная величина c_0 больше нуля и r стремится к бесконечности, то значение энергии E также стремится к бесконечности, т.е. цилиндрический вихрь в бесконечной жидкости не может существовать, так как для его возникновения требуется бесконечная энергия. Но несмотря на это, вихревые столбы возникают и приносят большой вред человеку. Вытекающее положение известно как парадокс Феликса Клейна.

3. Для того чтобы вскрыть, в чем заключается существование дела, Н.П.Кастерин предлагает разобрать ту же задачу, следуя методу Ф.Клейна, т.е. путем применения конечных разностей. Этим путем можно показать, в каком пункте переход к предельным соотношениям становится неправомерным с физической точки зрения. При описании физических явлений с помощью бесконечно малых величин мы обязаны всегда помнить, что этот метод анализа пригоден только для описания явлений, происходящих в непрерывной среде. Однако любая среда, в газовой в особенности, не может рассматриваться во всех случаях как континуум, т.е. как среда, в которой любой бесконечно малый объем содержит очень большое количество молекул. Континуума реально не существует, поэтому для уравнений, построенных на представлениях о непрерывности, должны существовать определенные границы применения, которые мы не имеем права переходить. Опасность вплоть до противоречия при объяснении физических явлений с помощью представлений о континууме будет близка во всех тех случаях, когда имеют дело с разрывными процессами. В этих случаях необходимо делать проверку путем рассуждений, основанных на молекулярно-кинетических представлениях.

В свете сказанного, рассуждения Н.П.Кастерина представляют интерес. Вихревой шнур — такое образование, ограниченное поверхностью, переход через которую сопровождается резким изменением свойств течений среды. Поэтому можно сомне-

взятой в правомерности применения для описания свойств вихревых шнуров уравнения, построенного на основе представлений о континууме. Таким образом, попытку Н.П.Каостарина поставить под сомнение способы построения теории вихревых шнуров надо считать не только законной, но и необходимой.

4. Вырежем в области вне вихревого шнура кольцо толщиной Δl и шириной Δr , вырежем из этого кольца криволинейный параллелепипед двумя плоскостями, угол между которыми пусть будет $\Delta\theta$. Обозначим радиус-вектор, определяющий положение внутренней поверхности, через r_1 ; радиус-вектор, определяющий положение внешней поверхности, — через r_2 . Радиус-вектор, определяющий положение средней поверхности, обозначим через \bar{r} . Плотность среды в точках, лежащих на средней поверхности, обозначим через $\bar{\rho}$. Угловую скорость течения среды в этом месте обозначим через $\bar{\omega}$. Давление среды на внутренней поверхности обозначим через p_1 , а на внешней — через p_2 . Введенные обозначения позволяют написать следующее очевидное равенство:

$$\frac{\bar{\rho} \cdot \bar{r} \Delta\theta \Delta l \Delta r \cdot \bar{r}^2 \bar{\omega}^2}{\bar{r}} = - (p_2 - p_1) \bar{r} \Delta\theta \Delta l$$

или

$$\frac{(r_1^2 - r_2^2)}{2} \bar{r} \Delta\theta \Delta l \bar{\omega}^2 = \frac{(p_1 - p_2)}{\bar{\rho}} \bar{r} \Delta\theta \Delta l \quad (2.6)$$

Уравнение единички можно представить в следующих приближенных формулах:

$$p_1 = A p_1^Y = A [(\rho_1 - \bar{\rho}) + \bar{\rho}]^Y = A \bar{\rho}^Y \left[1 + \gamma \left(\frac{\rho_1 - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) \right],$$

$$p_2 = A p_2^Y = A \bar{\rho}^Y \left[1 + \gamma \left(\frac{\rho_2 - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) \right].$$

Вычтем второе выражение из первого, тогда будем иметь

$$p_1 - p_2 = A \bar{p}^{\gamma-1} \gamma (p_1 - p_2) \quad (2.7)$$

Но, с другой стороны, оправедливы следующие приближенные равенства:

$$p_1^{\gamma-1} = [\bar{p} + (p_1 - \bar{p})]^{\gamma-1} = \bar{p}^{\gamma-1} \left[1 + \frac{(\gamma-1)(p_1 - \bar{p})}{\bar{p}} \right],$$

$$p_2^{\gamma-1} = \bar{p}^{\gamma-1} \left[1 + \frac{(\gamma-1)(p_2 - \bar{p})}{\bar{p}} \right].$$

Вычитая второе равенство из первого, будем иметь

$$p_1^{\gamma-1} - p_2^{\gamma-1} = \bar{p}^{\gamma-1} (\gamma-1) \left(\frac{p_1 - p_2}{\bar{p}} \right) \quad (2.8)$$

Исключим из соотношений (2.7) и (2.8) равенство плотностей $(p_1 - p_2)$, в результате получим

$$p_1 - p_2 = A \bar{p} \frac{\gamma}{\gamma-1} (p_1^{\gamma-1} - p_2^{\gamma-1}) \quad (2.9)$$

Подставив полученное значение равенности давлений в формулу (2.6), будем иметь

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{2} \bar{\omega}^2 = \frac{p_0}{\rho_0 \gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} (p_1^{\gamma-1} - p_2^{\gamma-1}) \quad (2.10)$$

Далее легко доказать следующие два тождества:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2),$$

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{1}{2}.$$

Но среднее арифметическое с достаточным приближением можно заменить средним геометрическим, поэтому можно написать соотношение

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1 r_2}$$

Выражение для средней угловой скорости можно представить так:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{W_0 r_0}{r_1^2} + \frac{W_0 r_0}{r_2^2} \right) = \frac{W_0 r_0}{r_1 r_2}$$

Если теперь учесть все сделанные преобразования, то соотношение (2.10) можно представить в виде

$$\frac{W_0^2 r_0^2}{2r_2^2} + \frac{\rho_0}{\rho_C} \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{W_0^2 r_0^2}{2r_1^2} + \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_1^{\gamma-1} = C_0 \quad (2.11)$$

5. Таким образом, мы видим, что примененный расчет привел к тем же результатам, который был получен с помощью анализа бесконечно малых. Однако изложенный элементарный вывод уравнения (2.11) будет справедливым только в том случае, если радиус-вектор r_2 при уменьшении криволинейного параллелепипеда до бесконечно малого объема будет стремиться к радиусу-вектору r_1 . Но в точки зрения физического рассмотрения задачи, как уже упоминалось выше, произведенный переход к пределу недопустим, так как неродинамическая бесконечно малая частица не содержит в себе очень большого числа молекул.

Если в элементе объема будет всего несколько молекул, то средняя скорость этих молекул не будет непрерывным образом переходить в среднюю скорость молекул средней гидродинамической частицы. Здесь создается такая же ситуация, как при рассмотрении явлений оптической дисперсии в электронной теории. Там Лорентц, наряду с понятием о математической бесконечно малой величине, вынужден был ввести понятие физической бесконечно малой величины. Таким образом, в этой точке зрения каждому радиусу-вектору r_1 и r_2 мы обязаны приписать свои физически бесконечно малые объемы, из ко-

горих каждый обладает своею угловою скоростью. Разделение физически бесконечно малого объема на две части не дает возможности переходить к пределу так, как это было изложено для среды, обладающей свойствами континуума.

Итак, для всякого физически бесконечно малого объема мы имеем только одну угловую скорость, которую будем обозначать через $\bar{\omega}$. Следовательно, скорости у поверхностей криволинейного параллелепипеда можно выписать на основании следующего так:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{W_0 r_0}{r_1} = \bar{\omega} r'_1, \\ W_2 &= \frac{W_0 r_0}{r_2} = \bar{\omega} r'_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Здесь через r'_1 и r'_2 обозначают некоторые, пока произвольные радиус-векторы, так как мы не знаем, какому бесконечно малому объему приписано значение скорости.

На основании общего характера движения среды вокруг вихревого столба имеем

$$W_1 > W_2,$$

следовательно,

$$r'_2 < r'_1.$$

На основании уравнений (2.12) можно составить следующую равенность:

$$W_1 - W_2 = \bar{\omega}(r'_1 - r'_2) = W_0 r_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Но из соотношений (2.12) следует

$$r_2 r'_2 = r_1 r'_1 \quad \text{или} \quad \frac{r_2}{r'_1} = \frac{r_1}{r'_2} = \beta.$$

Поэтому из сопоставления указанных двух равенств можно написать соотношение вида

$$\bar{\omega} = - \frac{W_0 r_0}{r_1 r_2} \frac{r_1}{r'_2} = - \frac{W_0 r_0}{r_1 r_2} \frac{r_2}{r_1} = \bar{\omega} \beta. \quad (2.13)$$

Полученное соотношение (2.13) приводит к весьма серьезному заключению: мгновенный центр вращения физически бесконечно малого объема лежит не на оси вихря, а в некоторой точке, расположенной на радиусе-векторе вне его. Поэтому уравнение (2.6), а лучше эквивалентное уравнение (2.11), должно быть записано так:

$$\frac{v^2 w_0^2 r_0^2}{2r_2^2} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_2^{\gamma-1} = \text{const} \quad (2.14)$$

6. Изложенные выше соображения говорят об известной несообразности уравнений Эйлера, если подходить к оценке следствий из них с мол кулярно-кинетической точки зрения. Выявленная поправка на уравнение (2.14) восстанавливает уравнения Эйлера в отношении вихрей и записывает в виде

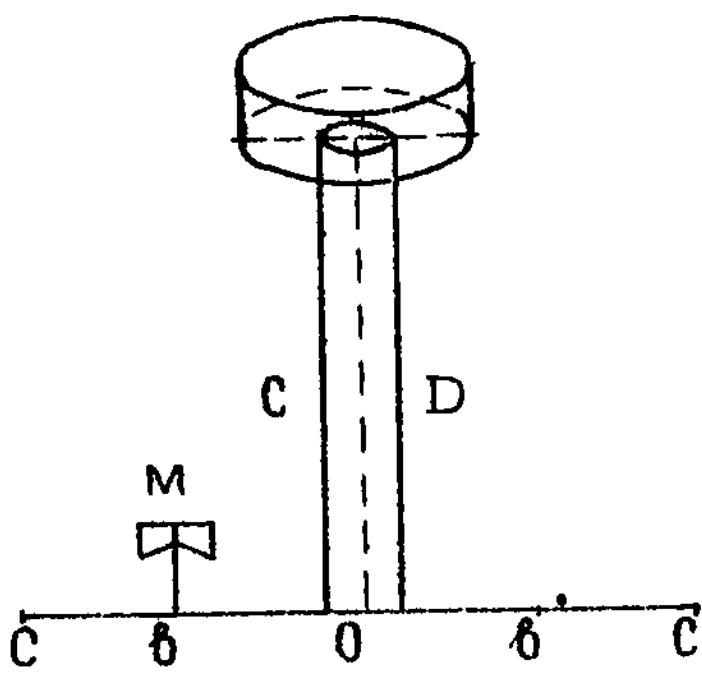
$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{1}{2}(1-n_3) \text{grad} W^2 = - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (2.15)$$

Это уравнение отличается от того уравнения, к которому на основании изложенных выше рассуждений пришел Н.П.Каутерин. Его уравнение получится лишь в случае, если приписать параметру n_3 значение, равное двум. Н.П.Каутерин приписал множителю v значение, равное единице. В действительности этой величине следовало бы приписать такое значение:

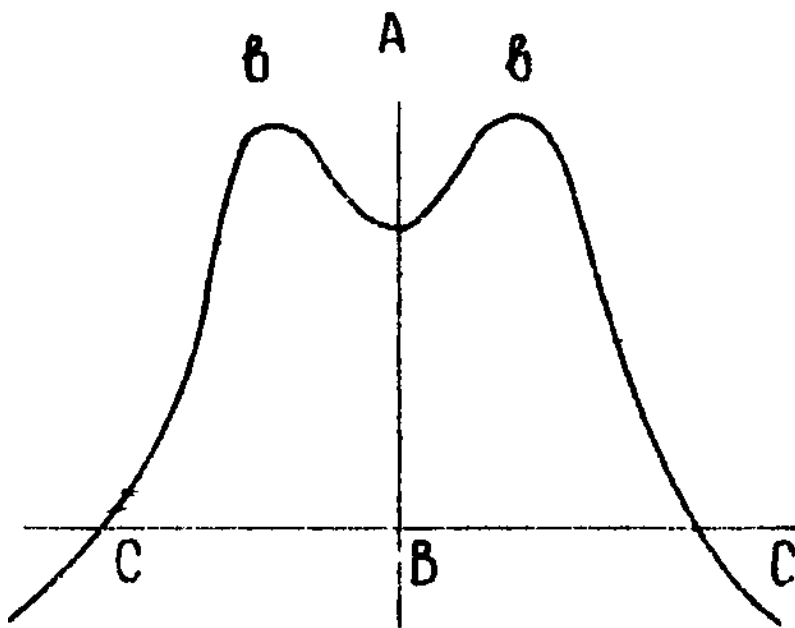
$$v = (n_3 - 1) \quad .$$

7. В 1947 году Н.П.Каутерин разработал весьма интересный метод измерения вихревого поля. В указанном поле он помещал маленькие цилиндры, вращающиеся на атомных подпятниках наподобие магнитной стрелки компаса. Схема измерений изображена на рис. I, где буквой m обозначено изображение указанного устройства для измерения поля скоростей. Это устройство могло перемещаться параллельно своему осе в плоскости, нормально пересекающей вихревой шнур.

Результаты одного из таких измерений приведены на рис.2



Р и с. 1



Р и с. 2

Максимум угловой скорости оказался не в центре вихревого столба, а на его периферии bb . Далее кривая опадала и примерно на расстоянии 10–12 см от оси вихревого шнура проходила через нуль, меняя знак. Очевидно, это указывало на то, что в этом месте находилась кривая мгновенных центров вращения.

На основании описанного, весьма интересного, опыта Н. П. Кастерина можно утверждать, что на некотором расстоянии от оси вихревого столба должны осуществиться поверхности нулевой скорости вращения. В области, расположенной между поверхностями вихревого шнура и нулевой скорости, течение среды совершается в одну сторону; во внешней области, соприкасающейся с поверхностью нулевой скорости, течение среды должно совершаться в обратную сторону.

8. В статье, посвященной выводу уравнений гидродинамики, о точки зрения молекулярно-кинетических представлений, для установившегося движения мы дали следующее выражение для уравнения Бернулли:

$$\frac{1-\eta_3}{2} w^2 = - \int \frac{dp}{\rho} + \text{const} .$$

Если движение подчиняется единому закону, то предыдущее равенство можно переписать так:

$$w^2 = \frac{2\gamma}{(\eta_3 - 1)(\gamma - 1)} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} \right] . \quad (2.16)$$

Здесь через ρ обозначена плотность среды в бесконечном удалении; p_0 и ρ_0 обозначают соответственно давление и плотность среды в начальной точке.

Окружная скорость вне вихревого столба, как мы видели, равна

$$w = \frac{w_c r_0}{r} = \frac{a}{r} ,$$

поэтому соотношение (2.16) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{2\gamma}{(n_3-1)(\gamma-1)} \frac{\rho_0}{\rho} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Решим это уравнение относительно плотности. В результате получим

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{a^2}{r^2} \frac{(n_3-1)(\gamma-1)}{2\gamma\rho_0} + \left(\frac{\rho_\infty}{\rho} \right)^{\gamma-1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.17)$$

Для некоторой воображаемой жидкости, для которой $\gamma = 2$, найденное выражение можно переписать так:

$$\rho = \frac{n_3-1}{2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{a^2}{r^2} + \rho_\infty. \quad (2.18)$$

Здесь через c обозначена скорость звука, определяемая по Ньютону.

Из уравнения (2.18) следует, что если параметр n_3 будет равен нулю или меньше единицы, плотность ρ_∞ будет всегда больше, чем плотность среды вблизи вихревого столба или на конечном от него расстоянии. Если параметр n_3 будет больше единицы, то плотность среды в бесконечном удалении будет меньше плотности ее вблизи вихревого столба.

Энергию циркуляционного движения среды, приходящуюся на единицу длины прямолинейного цилиндрического вихря, можно вычислить по формуле

$$E_e = \int_{r_0}^r \pi r dr w^2 \rho.$$

Здесь нижний предел интегрирования определяется положением поверхностного вихря, верхний предел — значением величины r ,

ограничивающей область циркуляционного движения.

Подставляя в это уравнение плотность ρ_2 из равенства (2.18) и заменяя величину w^2 через a^2/r^2 , будем иметь следующее выражение для кинетической энергии:

$$E_e = \rho a^2 \int_{r_0}^r \rho \frac{dr}{r} = \rho a^2 \rho r_0 \lg \frac{r}{r_0} + \frac{\eta_3^{-1}}{4} \frac{\rho a^4 \rho_0}{c_0^2} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.19)$$

Из уравнения (2.18) видно, что с точки зрения классической гидродинамики, т.е. когда параметр η_3 равен нулю, величина ρ_r не может принимать бесконечно малых значений; в этом случае энергия единицы длины вихревого столба, выраженная формулой (2.19), при распространении циркуляционного движения на бесконечное пространство обращается в логарифмическую бесконечность.

С точки зрения маломасштабной концепции, когда параметр η_3 больше единицы, плотность среды в бесконечном удалении от поверхности вихревого столба может быть какой угодно малой величиной и, следовательно, может компенсировать логарифмическую бесконечность. А это приводит к конечному значению энергии единицы длины вихревого столба и освобождает теорию от парадоксов Феликса Клейна.

В соответствии с условием на бесконечности мы можем положить, что плотность ρ_r в любой точке пространства, заполненного циркуляционным движением, вообще подчиняется закону:

$$\rho_r = \frac{\eta_3^{-1}}{4 \lg x} \frac{a^2}{c_0^2 r_0^2 x}.$$

Здесь через x обозначено отношение r/r_0 .

Если положить окружную скорость частиц среды на поверхности вихря равной звуковой скорости c_0 , то названное выше равенство переписывается так:

$$\rho_r = \frac{\eta_3^{-1}}{4 x^2 \lg x}.$$

Предположение, сделанное относительно скорости частиц среды на поверхности вихря, с нашей точки зрения, естественно. Вихревой столб имеет устойчивую поверхность разрыва, которая может образоваться только тогда, когда скорость движения приближается к скорости звука.

Все вышесказанное приводит к следующему окончательному выражению для энергии единицы длины вихревого столба:

$$E_e = \frac{\eta_3^{-1}}{4} \rho_0 \Pi a^2 = \frac{\eta_3^{-1}}{4} \rho_0 \Pi c_0^2 r_0^2 = \frac{\Pi r_0 \rho_1 c_0^2}{2}. \quad (2.20)$$

Здесь через ρ_1 обозначено выражение

$$\rho_1 = \frac{\eta_3^{-1}}{2} \rho_0.$$

Формула (2.20) допускает следующую словесную формулировку: энергия единицы длины вихревого столба эквивалентна энергии вращения твердого тела плотностью ρ_1 вокруг своей оси с окружной скоростью, равной скорости звука по Ньютону.

Если предположить, согласно теории Н.П.Кастерина, параметр η_3 равным двум, то для воздушного вихревого шнура диаметром 4 см энергия на единицу его длины, выраженная в калориях, будет равна:

$$E_e = \frac{\Pi r_0^2 \rho_1 c_0^2}{2 \cdot 4 \cdot 15} 10^{-7} = \frac{\Pi 0,001 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10^8}{4 \cdot 4 \cdot 15} 10^{-7} = 0,068 \text{ кал.}$$

Пользуясь методом операторных разностей^{*)}, легко до-

*) См. дополнения к работе А.С.Предводителя "О турбулентных течениях", наст. сборник стр.232

назвать непрерывность изменения давления при переходе через вихревую поверхность. Докажем сначала, что скачок в ускорениях частиц жидкости при переходе через вихревую поверхность равен нулю. Напишем следующая очевидное тождество:

$$\delta \frac{dW}{dt} = \frac{\lambda |x_i|}{H} \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Здесь через F обозначено уравнение вихревой поверхности. Производная по времени от скорости вьете при условии, что начальные координаты (a, b, c) постоянны. Функция F не содержит время в явном виде, поэтому ее частная производная по времени есть нуль. А это и дает выведенное выше положение. Таким образом, ускорения остаются непрерывными при переходе через вихревую поверхность S , если эта последняя представляет жидкую поверхность.

Доказательство непрерывности изменения давления при переходе через вихревую поверхность можно провести следующим образом. Напишем уравнения движения Эйлера в форме

$$\frac{dW}{dt} x_i = F_{x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} .$$

Если силы F_{x_i} потенциальны, то для среды, плотность которой не меняется от точки к точке, приведенное уравнение можно переписать так:

$$\frac{dW}{dt} x_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x_i} .$$

Здесь через Q обозначен потенциал ускорений.

Но мы убедились, что коль скоро предположено считать непрерывными скорости частиц жидкости, то и ускорения надо считать непрерывными при переходе через вихревую поверхность разрыва S . Поэтому потенциал ускорений Q определен как во внутренней, так и во внешней вихревой областях с точностью до постоянной, не зависящей от координат x_i . Если мы распорядимся этой постоянной так, чтобы величина Q имела одинаковые значения в какой-либо точке

поверхности s , принадлежащей обеим областям, внешней и внутренней, то эта величина непрерывным образом будет изменяться при переходе через поверхность разрыва s . Выберем указанную постоянную, которая все-таки может зависеть от времени таким образом, чтобы величина q , определенная во внешней области по отношению к вихревой области, исчезла в бесконечности. В этом случае повсюду будет выполняться уравнение вида

$$p = p_1(t) + p(u-q) .$$

Величины u и q непрерывно изменяются при переходе через поверхность разрыва s , следовательно, непрерывно будет изменяться и давление p . Итак, выказанное положение доказано.

§ 3. О влиянии сжимаемости и вязкости среды на вихревые движения

I. Мы убедились, что в классической гидродинамике Эйлера, когда давление есть функция плотности, имеют место две теоремы Гельмгольца: первая утверждает, что вихревая трубка во все время своего движения состоит из одних и тех же частиц, она охраняет свою индивидуальность; вторая свидетельствует о том, что напряжение вихревой трубки не меняется с течением времени при движении жидкости.

Если жидкость сжимаема, то обе указанные теоремы теряют силу. В этом случае вихревые трубки разрушаются, образуя новые вихри; напряжение вихрей меняется с течением времени. Все эти обстоятельства хорошо исследованы С.Бьернесом и А.А.Фридманом.

Хорошо известно также, что теоремы Гельмгольца перестают существовать в несжимаемой, но вязкой жидкости. Среди попыток, направленных на выяснение влияния вязкости среды на движение вихря и его продолжительность жизни, следует особо отметить идеи норвежского ученого Осеева. Ему удалось, пожалуй, впервые поставить задачу в такой форме, но-

торая дала возможность получить в некоторых случаях вполне точные результаты. Той же проблемой занимались английские исследователи Тейлор и Леви. Интересные результаты по диффузии вихрей получили советский ученый А.И. Некрасов и японский ученый Теравава.

2. Уравнения движения вязкой, сжимаемой и неидеально сплошной среды мы получили в виде

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu_1 \Delta_2 \vec{W} + \nu_2 \text{grad} \text{div} \vec{W} + \eta_3 \left\{ \frac{1}{2} \text{grad} W^2 + \vec{W} \text{div} \vec{W} + [\vec{\omega}, \vec{W}] \right\} \quad (3.1)$$

Для какой-либо компоненты скорости написанное равенство можно превратить в следующее:

$$\frac{\partial W_{x_1}}{\partial t} + W_{x_1} \frac{\partial W_{x_1}}{\partial x_1} + W_{x_2} \frac{\partial W_{x_1}}{\partial x_2} + W_{x_3} \frac{\partial W_{x_1}}{\partial x_3} = F_{x_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu_1 \Delta_2 W_{x_1} + \nu_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \eta_3 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial W^2}{\partial x_1} + W_{x_1} \theta + [\vec{\omega}, \vec{W}]_{x_1} \right\} \quad (3.2)$$

Здесь через ν_1 и ν_2 обозначены соответственно первая и вторая кинематическая вязкость, через θ — дивергенция от скорости, через $\vec{\omega}$ — вихрь от скорости.

Постараясь теперь преобразовать эти уравнения в вид, который характеризовал бы распространение вихрей. Преобразуем сначала левую часть уравнения (3.2).

Для простоты письма в дальнейшем будем писать символ W_{x_1} просто с индексом i , т.е. W_i . Напишем два таких выражения:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + W_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + W_3 \frac{\partial W_1}{\partial x_3} ,$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + W_1 \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + W_2 \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + W_3 \frac{\partial W_2}{\partial x_3} .$$

Возьмем от первого выражения частную производную по x_2 и от второго — по x_1 , затем из второго выражения вычтем первое. В результате получим

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + W_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + W_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + W_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} + \omega_3 \theta - \omega_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \omega_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}$$

или

$$\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_3 \theta - \omega_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \omega_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \quad (3.3)$$

Здесь через ω обозначена компонента вихря, соответствующая оси x_3 . После векторного сложения всех выражений, соответствующих разложению по трем осям, получим

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \theta - (\vec{\omega}, \text{grad}) \vec{W} \quad (3.4)$$

Теперь преобразуем первые два слагаемые правой части равенства (3.2). Напишем выражения

$$F_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad F_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

От первого из них возьмем частную производную по x_2 , от второго — по x_1 . Далее, первое полученное соотношение вычтем из второго. В результате получим

$$\text{Curl}_{x_3} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \quad (3.5)$$

Это выражение соответствует компоненте некоторого вектора, взятой по оси x_3 .

Производя векторное сложение всех компонент, получим выражение

$$\text{Curl} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} [\text{grad} \rho, \text{grad} p] = \text{Curl} \vec{F} + \vec{H} \quad (3.6)$$

Произведем тем же способом преобразования следующие двух слагаемых правой части уравнения (3.2), получим

$$v_1 \left\{ \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_3^2} \right\} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} ,$$

$$v_1 \left\{ \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_3^2} \right\} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} .$$

Опять продифференцируем первое уравнение по переменной x_2 , а второе — по x_1 , затем вычтем первое уравнение из второго, в результате получим

$$v_1 \Delta_2 \omega_3 ,$$

в векторной форме будем иметь

$$v_1 \Delta_2 \vec{\omega} . \quad (3.7)$$

Проведем те же операции над первыми двумя слагаемыми фигурной скобки правой части уравнения (3.2), в результате получим

$$\omega_3 \theta + \left(W_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - W_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) . \quad (3.8)$$

В векторной форме это выражение будет выглядеть так:

$$\vec{\omega} \theta + [\text{grad} \theta, \vec{W}] . \quad (3.9)$$

Наконец, такое же преобразование, сделанное над последним слагаемым фигурной скобки правой части уравнения (3.2), приведем к следующему результату:

$$\vec{\omega} \theta + (\vec{W}, \text{grad}) \vec{W} - (\vec{\omega}, \text{grad}) \vec{W} \quad (3.10)$$

Таким образом, учитывая все сказанное, уравнение (3.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \theta - (\vec{\omega}, \text{grad}) \vec{W} = \text{Curl} \vec{F} + \vec{H} + v_1 \Delta_2 \vec{\omega} + \\ + n_3 \left\{ 2\theta \vec{\omega} + [\text{grad} \theta, \vec{W}] + (\vec{W}, \text{grad}) \vec{\omega} - (\vec{\omega}, \text{grad}) \vec{W} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

или

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}, \text{grad})\vec{W} - \vec{\omega}\theta + \text{Curl}\vec{F} + \vec{H} + \nu_1\Delta_2\vec{\omega} + \quad (3.12)$$

$$+ \eta_3 \left\{ 2\vec{\omega}\theta + [\text{grad}\theta, \vec{W}] + (\vec{W}, \text{grad})\vec{\omega} - (\vec{\omega}, \text{grad})\vec{W} \right\} .$$

В случае, если среда обладает идеальной сплошностью и не является вязкой, полученное равенство превратится в следующее:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}, \text{grad})\vec{W} - \vec{\omega}\theta + \text{Curl}\vec{F} + \vec{H} . \quad (3.13)$$

Этим уравнением оперировал А.А.Фридман при изучении ороизта вихрей в сжимаемой жидкости.

В случае идеальной сплошной, несжимаемой и вязкой жидкости уравнение (3.12) превратится в следующее:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}, \text{grad})\vec{W} - \vec{\omega}\theta + \text{Curl}\vec{F} + \nu_1\Delta_2\vec{\omega} . \quad (3.14)$$

Полученным уравнением пользуются в гидродинамике при изучении диффузии вихрей. Оно известно как уравнение распространения вихрей в вязкой жидкости.

3. Обратимся теперь вновь к общим уравнениям (3.12). Их форма не такова, чтобы можно было утверждать возможность появления вихрей, если в начальный момент их не было в жидкости. Напротив, подстановка в уравнение (3.12) вместо вектора $\vec{\omega}$ нуля обращает его в соотношение вида

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{Curl}\vec{F} + \vec{H} + \nu_1\Delta_2\vec{\omega} + \eta_3 \left\{ [\text{grad}\theta, \vec{W}] + (\vec{W}, \text{grad})\vec{\omega} \right\} .$$

В случае отсутствия внешних сил и при равенстве нулю параметра неидеальной сплошности данное равенство превратится в следующее :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{H} + \nu_1\Delta_2\vec{\omega} . \quad (3.15)$$

Существенное значение для возникновения вихрей имеет вектор \vec{H} , который стоит в правой части последнего

равенства.

Мы видели выше, как он выражается через градиенты давления и плотности среды. Эти градиенты в значительной степени будут зависеть от тех законов, по которым совершается подвод энергии к вихрю. Поэтому мы постараемся выравнять этот вектор через энергию, подтекающую к вихрю.

Как известно, уравнение энергии для газа, подчиняющегося уравнению Клапейрона, можно записать в следующем виде:

$$c_p T \operatorname{div} \vec{W} + \frac{c_v}{R} \frac{dp}{dt} = E \quad (3.16)$$

Здесь через E обозначена величина притока энергии. Характер притока энергии может быть равнообразным. Приток энергии может быть задан вперед как функция координат и времени, т.е. будем иметь

$$E = E(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.17)$$

Приток энергии может быть обусловлен только через молекулярный теплообмен. В этом случае

$$E = k \Delta_2 T \quad (3.18)$$

Приток энергии может быть обусловлен диссипацией сил внутреннего трения и притоком энергии, являющейся функцией координат и времени, т.е. имеет место тождество вида

$$E = E(x_1, x_2, x_3, t) - \left\{ \eta_1(\vec{W}, \Delta_2 \vec{W}) + \eta_2(\vec{W}, \operatorname{grad} \theta) \right\} \quad (3.19)$$

Наконец, может случиться так, что подтекающая энергия складывается из энергии, обусловленной молекулярным теплообменом, и диссипативной энергии сил трения. т.е. будет выполняться тождество следующего вида:

$$E = k \Delta_2 T - \left\{ \eta_1(\vec{W}, \Delta_2 \vec{W}) + \eta_2(\vec{W}, \operatorname{grad} \theta) \right\} \quad (3.20)$$

Уравнение (3.16) с помощью уравнения непрерывности можно преобразовать к виду

$$\frac{c_v}{R} \frac{dp}{dt} - c_p T \frac{d\rho}{dt} = E$$

или

$$c_v \frac{d \lg p}{dt} - c_p \frac{d \lg p}{dt} = \frac{ER}{p} \quad (3.21)$$

Если считать удельные теплоемкости c_v и c_p не зависящими от координат и времени, то последнее равенство можно проинтегрировать. В результате получим

$$c_v \lg p - c_p \lg p = R \int_0^t \frac{E}{p} dt = RY \quad (3.22)$$

Найдем градиенты от этого равенства:

$$c_v \frac{\text{grad} p}{p} - c_p \frac{\text{grad} p}{p} = R \text{grad} Y$$

Помножим это векторное равенство на градиент от плотности, в результате получим выражение вида

$$\frac{c_v}{p} [\text{grad} p, \text{grad} \rho] = R [\text{grad} Y, \text{grad} \rho]$$

или

$$\vec{H} = \frac{R\rho}{c_v} [\text{grad} Y, \text{grad} \rho] \quad (3.23)$$

Значение интеграла Y , а следовательно, и вектора \vec{H} целиком будут зависеть от отношения энергии E к давлению.

Если отношение E/p к некоторому моменту времени достигнет постоянного значения, то вектор \vec{H} обратится в нуль и вихреобразование будет происходить в соответствии с уравнением вида

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = v_1 \Delta_2 \vec{\omega} \quad (3.24)$$

При интегрировании этого уравнения выбор начальных условий должен соотносываться с условием, что отношение E/p есть величина постоянная.

§ 4. Некоторые соображения об условиях образования вихрей

1. Выявление условий образования вихрей, как мы уже неоднократно говорили, представляет весьма важный этап в построении их общей теории. Без подходящей физической модели приступить к решению этой задачи почти невозможно. В основу своих расчетов мы положим предположение, что начальной стадией образования вихря является формирование фронта разрыва. Такой фронт может появиться при наличии источников тепла и холода, если исключить из рассмотрения задачу образования вихрей вследствие тормозящего действия твердых поверхностей. Фронт разрыва может обладать такими свойствами, что при переходе через него могут претерпевать разрыв непрерывности первые производные от давления и плотности, производные от скорости, вторые производные от ротора скорости. Указанная характеристика фронта, очевидно, предполагает непрерывное изменение при переходе через поверхность вихря следующих величин: давления, плотности, подтекающей энергии, скорости течения, скорости изменения вихря со временем.

Неосомненно, такая поверхность должна обладать определенной скоростью перемещения и распространения. Значения этих скоростей, выраженные через основные параметры, характеризующие свойства среды, должны дать определенные представления об условиях возникновения вихревых шнуров.

2. Возьмем уравнение вихревого движения в следующей форме:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = [\text{grad}p, \text{grad}p] + v_1 \Delta_2 \vec{\omega} \quad (4.1)$$

Совершим над этим уравнением операцию перехода через по-

верхность образующегося вихря^{*}), т.е. напишем равенство такого вида:

$$\delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \delta [\text{grad}p, \text{grad}p] + v_1 \delta \Delta_2 \vec{\omega} \quad (4.2)$$

Левая часть этого равенства, согласно данной выше характеристике фронта, обращается в нуль, что касается правой части, то ее можно преобразовать с помощью следующих тождественных условий:

$$\delta [\text{grad}p, \text{grad}p] = \lambda_p [\overline{\text{grad}p}, \vec{n}] - \lambda_p [\overline{\text{grad}p}, \vec{h}] \quad ,$$

$$\delta \Delta_2 \vec{\omega} = \vec{\lambda}_{2\omega} \quad .$$

Первое и второе из этих условий легко получить, используя тождественные условия Адамара.

Теперь равенство (4.2) можно переписать так:

$$\lambda_p [\overline{\text{grad}p}, \vec{n}] - \lambda_p [\overline{\text{grad}p}, \vec{h}] + v_1 \vec{\lambda}_{2\omega} = 0 \quad (4.3)$$

Во всех вышеприведенных равенствах черта над некоторыми операторами обозначает их среднее эрмитическое, образованное из значений до и после фронта разрыва.

3. Параметры разрыва плотности и давления независимы друг от друга. В самом деле, мы имели уравнение энергии в следующем виде:

$$\frac{c_v}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{c_p}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{ER}{p} \quad .$$

^{*}) См. дополнение к статье А.С.Предводителя "О турбулентных течениях", ввот. сборник стр. 232

Если совершить над этим уравнением операцию перехода через поверхность вихря, то при непрерывности энергии мы получим такое соотношение:

$$\frac{c_v}{\rho} \lambda_p = \frac{c_p}{\rho} \lambda_p = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_p} = \frac{\rho}{\rho} \frac{c_p}{c_v} = \frac{\rho}{\rho} \gamma = c^2.$$

Принимая во внимание найденное соотношение, уравнение (4.3) можно преобразовать так:

$$\lambda_p \left\{ [\overline{\text{grad} p}, \vec{n}] - c^2 [\overline{\text{grad} p}, \vec{n}] \right\} + v_1 \vec{\lambda}_{2\omega} = 0. \quad (4.4)$$

С другой стороны, из уравнения непрерывности следует

$$\lambda_p \vec{\eta} = \rho (\vec{\lambda}_1, \vec{n}) = \rho \lambda_{1n}.$$

После исключения из уравнения (4.4) параметра разрыва λ_p будем иметь

$$\rho \lambda_{1n} \left\{ [\overline{\text{grad} p}, \vec{n}] - c^2 [\overline{\text{grad} p}, \vec{n}] \right\} + v_1 \lambda_{2\omega} \vec{\eta} = 0. \quad (4.5)$$

Скорость перемещения поверхности для оканчивающихся производных от плотности есть в то же время скорость перемещения поверхности вихря.

Легко показать, что все три вектора, входящие в уравнение (4.5), расположены под прямым углом к единичному вектору нормали к поверхности вихря. Действительно, если уравнение (4.5) помножить скалярно на единичный вектор нормали, то в результате получим

$$(\vec{\lambda}_{2\omega}, \vec{n}) = 0,$$

а это и доказывает высказанное положение.

Из уравнения (4.5) можно вывести одно существенное следствие. В том случае, когда вихревой шнур сформировался, скорость перемещения его поверхности должна равняться нулю; должна обратиться в нуль и нормальная составляющая потока ореды. А это означает, что фигурная окантовка равенства (4.5)

также должна обратиться в нуль, что возможно при соблюдении следующего соотношения;

$$\text{grad} p = c^2 \text{grad} \rho$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{R}{\rho}, \quad p = A \rho^\gamma.$$

Мы получим уравнение Пуассона. Следовательно, это уравнение начинает действовать только после того, как образуется вихревой шнур. В процессе его образования уравнение Пуассона не имеет места; скорость перемещения поверхности шнура отлична от нуля. Поверхность вихря движется по направлению своей нормали до тех пор, пока действует приток энергии.

3. Уравнению (4.5) можно придать более интересный вид, если предположить, что притекающая энергия изменяется со временем по заданному закону.

Если проекция скорости течения орды на нормаль к поверхности вихревого шнура равна нулю, то уравнение энергии можно переписать в таком виде:

$$\frac{c_v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{ER}{\rho}$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{ER}{c_v}$$

откуда следует

$$c^2 p - p = \int_0^t \frac{ER}{c_v} dt = \frac{R}{c_v} \int_0^t E dt = \frac{R}{c_v} E_t$$

или

$$c^2 \text{grad} p - \text{grad} p = \frac{R}{c_v} \text{grad} E_t.$$

В произведенных выкладках мы считали, что скорость звука мало меняется в зависимости от времени и координат.

С помощью последнего соотношения уравнение (4.5) можно привести к такому виду:

$$\frac{\rho \lambda_{12} R}{c_v} [\text{grad} \vec{E}_t, \vec{n}] = v_1 \lambda_{2\omega} \varepsilon \quad (4.6)$$

Нейдемное соотношение показывает, что пока урradient от притона энергии не будет направлен по нормали к поверхности вихря, скорость перемещения ее будет отлична от нуля.

Следовательно, вихревой шнур будет находиться в стадии своего формирования. В противном случае вектор \vec{n} обратится в нуль, так как векторы $\text{grad} p$ и $\text{grad} \rho$ будут иметь одно и то же направление. После этого начнется обычный процесс диффузии вихря.

Пусть с течением времени убывает по показательному закону отношение следующего вида:

$$\frac{[\text{grad} \vec{E}_t, \vec{n}]}{\lambda_{2\omega}} = B e^{-\alpha t}$$

В этом случае легко вычислить диаметр вихревого шнура, если поверхность его считать круговым цилиндром во все время образования. Итак, имеем

$$\int_0^t B dt = \frac{d}{2} = \frac{\rho \lambda_{12} R}{c_v v_1 \alpha} B$$

или

$$d = \frac{2 \rho \lambda_{12} R}{c_v v_1 \alpha} B$$

4. Изложенный материал показывает, что для полного решения поставленной задачи нам не хватает одного важного условия, которое позволило бы раскрыть физическое содержание параметра разрыва второго порядка для вторых производных от вихря по координатам. В качестве такого условия можно выдвинуть следующую гипотезу. Допустим, что все скачки производных от скорости течения постоянны во все

время образования вихревого шнура. Это условие позволяет выразить параметры разрыва для вихря через параметры разрыва для скоростей. В общем деле, имеем

$$\vec{\omega} = \text{Curl} \vec{W} \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial x_1^2} = \text{Curl} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial x_1^2} \quad .$$

Сформулированная выше гипотеза позволяет воспользоваться тождественными условиями Адмара для нахождения скачков от последнего равенства. Если произвести эту операцию, получим

$$\vec{\lambda}_{2\omega} = |\vec{n}, \vec{\lambda}_3| \quad .$$

Теперь уравнение (4.6) можно переписать в виде

$$g = \frac{\rho \lambda_{1n} R}{c_v v_1} \frac{[\overline{\text{grad} E_t}, \vec{n}]}{[\vec{n}, \vec{\lambda}_3]} \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что векторы $\overline{\text{grad} E_t}$ и $\vec{\lambda}_3$ расположены на одной линии, но противоположно направлены, если параметр разрыва положителен. Следовательно, можно написать

$$\overline{\text{grad} E_t} = - A \vec{\lambda}_3 \quad , \quad \frac{\partial E_t}{\partial n} = - A \lambda_{3n} \quad .$$

Это обстоятельство позволяет соотношение (4.7) при положительном значении λ_{1n} переписать в таком виде:

$$g = \frac{\rho R}{c_v v_1} \frac{\lambda_{1n}}{|\lambda_{3n}|} \cdot \left| \frac{\partial E_t}{\partial n} \right| \quad (4.8)$$

Полученная формула более прозрачна для анализа. Скорость перемещения g будет отлична от нуля, коль скоро будут справедливы неравенства в виде

$$\lambda_{1n} \neq 0 \quad , \quad \left| \frac{\partial E_t}{\partial n} \right| \neq 0 \quad ,$$

$$0 < |\lambda_{3n}| < \infty \quad .$$

Если приток энергии уменьшается с течением времени по показательному закону, при постоянном значении скачков производных от скорости по нормали к поверхности вихря, то легко вычислить диаметр цилиндрического вихря. Итак, положим

$$\left| \frac{\partial E_t}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial E_0}{\partial n} \right| \frac{1}{d} e^{-\alpha t} ,$$

тогда будем иметь

$$d = \frac{2\rho R}{c_v v_1 \alpha^2} \frac{\lambda_{1n}}{|\lambda_{3n}|} \left| \frac{\partial E_0}{\partial n} \right| . \quad (4.9)$$

Таким образом, размеры вихря зависят от величины нормального градиента притока энергии к поверхности вихря и от значения скачков первой и третьей производной от скорости потока по нормали.

Если не делать никаких предположений относительно знака параметра разрыва λ_{1n} , то условие положительности скорости перемещения поверхности вихря должно быть записано в виде такого неравенства:

$$- \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{3n}} \frac{\partial E_t}{\partial n} > 0 . \quad (4.10)$$

Следовательно, если энергия E_t втекает в вихрь, то в этом случае справедливо неравенство

$$\frac{\partial E_t}{\partial n} < 0 ,$$

в это означает, что параметры разрыва λ_{1n} и λ_{3n} одного знака.

Наоборот, когда энергия E_t вытекает из вихря, т.е. когда справедливо неравенство

$$\frac{\partial E_t}{\partial n} > 0 ,$$

параметры разрыва λ_{1n} и λ_{3n} должны иметь равный знак.

Величины λ_{1n} и λ_{3n} свидетельствуют о том, как линии тока в вихревой области подходят к поверхности вихря при условии, что скорость w_n равна нулю.

Для частного случая, когда поток энергии E можно выразить в форме показательной убывающей во времени функции, формулу (4.7) можно представить так:

$$g = \frac{cR}{c_v v_1 a} \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{3n}} \frac{\partial E}{\partial n} . \quad (4.11)$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться без особого труда, если предположить, что имеет место равенство

$$E_t = \int E dt .$$

Для того чтобы скорость перемещения g была величиной положительной, необходимо и достаточно удовлетворить неравенству вида

$$\frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{3n}} \frac{\partial E}{\partial n} > 0 . \quad (4.12)$$

Отсюда видно, что при положительном градиенте подводимой энергии параметры разрыва λ_{1n} и λ_{3n} имеют один и тот же знак.

Напротив, при отрицательном градиенте подводимой энергии параметры разрыва λ_{1n} и λ_{3n} будут иметь разные знаки.

5. Изложенные соображения о характере процессов возникновения вихря показывают пригодность метода операторных равенств и в данном случае. Трудно представить, какими аналитическими приемами можно было бы вскрыть расширение вихревой области до момента образования геометрических форм вихря. Здесь мы встречаемся еще раз с таким физическим явлением, которое невозможно уложить в рамки обычных краевых задач.