В. А. УСПЕНСКИЙ

# ЧТО ТАКОЕ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ?

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.12
У77
УДК 10.6(023)

Успенский В. А.

У 77 Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 128 с.

20 к. 27 500 экз.

В последние два десятилетия возник так называемый нестандартный анализ. Предлагаемый им подход к обоснованию математического анализа базируется на допущении существования, помимо обычных действительных чисел, «бесконечно больших чисел» и «бесконечно малых чисел». Полное логическое обоснование этого подхода довольно сложно и опирается на конструкции математической логики.

Цель книги — не давая полного обоснования, а лишь постулируя необходимые факты, объяснить на доступных примерах, в чем суть нестандартного анализа.

Для лиц, владеющих математическим анализом в объеме первого курса вуза.

$У\ \dfrac{1702020000-066}{053(02)\text{-}87}\ 46\text{-}87$ ББК 22.12

Рецензент
доктор физико-математических наук *Н. Х. Розов*

*Владимир Андреевич Успенский*

ЧТО ТАКОЕ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ?

Редакторы: *А. Шень*, *В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12208

Сдано в набор 17.07.86. Подписано к печати 16.01.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6,72. Усл. кр.-отт. 6,93. Уч.-изд. л. 7,22. Тираж 27 500 экз. Заказ № 288. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Слово «нестандартный» в названии этой книжки вызывает, вероятно, естественную настороженность. Что это еще за «нестандартный анализ»? Разве стандартный математический анализ, верно служивший нашим учителям, перестал нас удовлетворять? Нужно ли отказываться от накопленного в течение трех столетий богатства ради сомнительных новаций?

Все эти вопросы заставляют нас начать с разъяснения места нестандартного математического анализа в современной математике. Это место весьма скромно. Нестандартный анализ не собирается отменять стандартный. Все имеющиеся «стандартные» результаты остаются в силе. Более того, нестандартный анализ не претендует на получение принципиально новых результатов: все результаты, полученные его методами, могут быть доказаны и привычными средствами.

Зачем же он нужен? Можно сказать, что отличие нестандартного способа изложения от стандартного состоит лишь в «выражениях, которые при нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения» (Лейбниц). Трудно сказать, насколько это так: опыт применения нестандартного анализа пока еще мал. Но если это действительно верно (пусть даже в небольшой степени), то несомненно, что нестандартный анализ заслуживает внимания.

Интересно отметить, что нестандартный анализ — эта «модная новинка» — по существу не так уж и нов. Его зарождение можно отнести к тому же времени, что и зарождение математического анализа как такового — к концу XVII века. Дело в том, что сам математический анализ появился — у одного из своих создателей, а именно Лейбница,— в той форме, которая, пожалуй, ближе к тому, что сейчас принято называть «нестандартным анализом», чем к современному «стандартному» изложению (см. ниже § 12). Поистине, новое — это хорошо забытое старое.

В этой книжке мы пытаемся показать, в чем состоит суть нестандартного анализа, дав читателю возможность составить мнение о том, насколько он может оказаться полезным.

## § 1. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

Относятся ли грифоны и единороги к позвоночным? Как устроены их эндокринные системы? Как протекает химическая реакция между философским камнем и флогистоном? Читатель, обнаруживший в серьезной научной монографии обсуждение подобных проблем, будет, надо думать, несколько ошарашен. А ведь отдельные страницы сочинений по нестандартному анализу могут произвести на неподготовленного читателя (впрочем, достаточно подготовленного, но именно в области обычной, стандартной математики) сходное впечатление. Вот некоторые примеры.

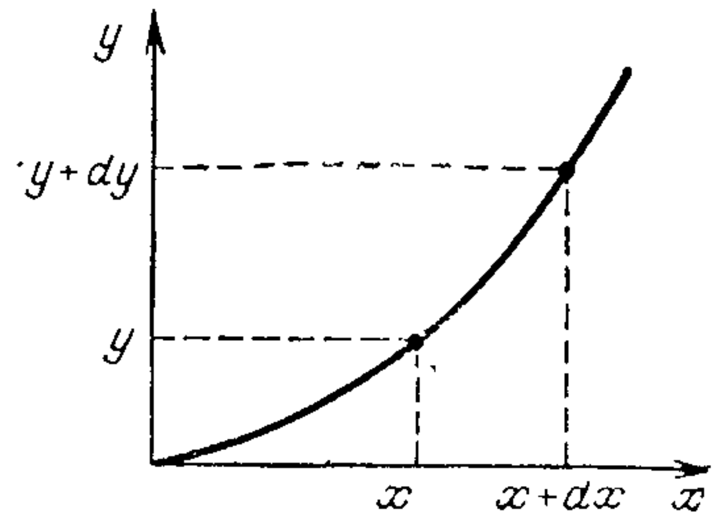


Рис. 1

Пример 1. Вычислим производную функции $y=x^2$. Дадим аргументу $x$ приращение $dx$, перейдя от точки $x$ к точке $x+dx$. Выясним, насколько при этом изменилось значение функции. В точке $x$ оно равнялось $x^2$. В точке $x+dx$ оно равняется $(x+dx)^2=x^2+2x\cdot dx+(dx)^2$. Таким образом, оно изменяется на $dy=2x\cdot dx+(dx)^2$ (рис. 1). Отношение приращения $dy$ функции $y=x^2$ к приращению $dx$ аргумента $x$ равно

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\cdot dx+(dx)^2}{dx}=2x+dx.$$

Если $dx$ бесконечно мало (запись: $dx\approx 0$), то членом $dx$ в сумме $2x+dx$ можно пренебречь, и искомая производная (отношение приращения функции к приращению аргумента, если последнее бесконечно мало) равна $2x$.

Пример 2. Вычислим аналогичным способом производную функции $y=\sqrt{x}$. Приращение $dy$ равно

$\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$; частное $\frac{dy}{dx}$ равно

$$\frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}=\frac{(\sqrt{x+dx}-\sqrt{x})(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}=$$
$$=\frac{x+dx-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}.$$

Взяв $dx$ бесконечно малым, получаем, что производная равна $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 3. Этот пример относится не к вычислению чего-либо, а к определению — определению понятия интеграла. Итак, что же такое интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от функции $f$ по отрезку $[a, b]$? Разобьем отрезок $[a, b]$ на бесконечно большое число $H$ частей бесконечно малой длины $dx$ (так что $b=a+Hdx$). Рассмотрим теперь сумму

$$f(a)+f(a+dx)+f(a+2dx)+\ldots+f(a+(H-1)dx),$$

состоящую из бесконечного числа членов, а именно из $H$ членов. Значение этой суммы, умноженное на $dx$, и будем считать интегралом от функции $f$.

Пример 4. Доказательство равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Непрерывность функции $f$ в точке $x$ означает, что для любой бесконечно близкой к ней точки $x'$ значение $f(x')$ бесконечно близко к $f(x)$; иначе говоря, для всякого $x'$

$$x'\approx x \Rightarrow f(x')\approx f(x), \qquad (1)$$

где запись $\alpha\approx\beta$ означает бесконечную близость чисел $\alpha$ и $\beta$. Поскольку по условию функция $f$ непрерывна в каждой точке $x$, то (1) выполняется для всех $x$ и для всех $x'$. Таким образом, бесконечная близость любых двух аргументов влечет за собой бесконечную близость значений функции, а это и означает равномерную непрерывность.

Пример 5. Построение неизмеримого множества. Каждое действительное число $x$, удовлетворяющее неравенству $0\leqslant x\leqslant 1$, разлагаем в бесконечную двоичную дробь; для обеспечения однозначности запрещаем разложения с бесконечным числом идущих подряд единиц. Фиксируем произвольное бесконечно большое натуральное число $\nu$ и отбираем те действительные числа, у которых ν-й член разложения равен единице; множество всех отобранных таким образом действительных чисел неизмеримо по Лебегу.

Пример 6. Разложение синуса в бесконечное произведение. Отправляясь от равенства

$$«e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i, \tag{2}$$

где $i$ означает бесконечно большое число» (от латинского infinitus, что значит „бесконечный"; не путать с обозначением мнимой единицы, происходящим от латинского же imaginarius, что значит „воображаемый"), «рассмотрим выражение

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i». \tag{3}$$

Далее, используем делимость двучлена $a^n - z^n$ на трехчлены вида $a^2 - 2az\cos(2k\pi/n) + z^2$, причем полагаем $a = (1 + x/i)$, $z = (1 - x/i)$, $n = i$. «Так как дуга $2k\pi/i$ бесконечно мала, то

$$\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2». \tag{4}$$

Поэтому «функция $e^x - e^{-x}$ будет делиться на $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$, где член $\frac{x^2}{i^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на $i$ он останется бесконечно малым. Кроме того, первый множитель будет равен $x$. Вследствие этого после расположения этих множителей по порядку будет

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \tag{5}$$

и т. д.» Делая в тождестве (5) подстановку $x = z\sqrt{-1}$, получаем окончательно

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots \tag{6}$$

Студент-математик, ответ которого на экзамене по математическому анализу содержал бы пересказ любого из изложенных примеров, надо думать, получил бы двойку. Однако способ вычисления производной, примененный в примерах 1 и 2, указан в § 7 гл. 2 книги Мартина Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [3], примеры 4 и 5 заимствованы из той же книги (теорема 5.8 и § 9 гл. 2), а определение интеграла взято (с несущественными изменениями, в том числе сознательно допущенной неточностью, которая будет исправлена далее, в § 8) из книги Кейслера «Элементарный анализ» [38]. Пример 6 воспроизводит рассуждения Эйлера, содержащиеся в § 155—158 первого тома его сочинения «Introductio in Analysin infinitorum», опубликованного в 1748 г. (русский перевод с латинского см. в [16]). Текст, взятый при изложении примера 6 в кавычки, принадлежит непосредственно Эйлеру; заключительная формула (6) есть знаменитая формула Эйлера для синуса, верная при любом комплексном $z$.

Если примеры 1 и 2 хотя и могут шокировать нас наивной нестрогостью, но все же в известной мере соответствуют интуиции, то пример 4 противоречит на первый взгляд именно здравому смыслу: остается непонятным, почему проведенное рассуждение нельзя применить не к отрезку, а, скажем, к интервалу, для которого, как известно, теорема о равномерной непрерывности неверна. Примеры 3 и 6 (если не знать, что последний принадлежит Эйлеру) производят еще более странное впечатление, а пример 5 представляется просто-напросто абракадаброй.

Нестандартный анализ, однако, почти сплошь состоит из подобной «абракадабры», имеющей в нем точный математический смысл (для примеров 1—6 этот смысл будет прокомментирован ниже, в § 8). Он позволяет, в частности, с новой точки зрения посмотреть на многие рассуждения классиков математического анализа, кажущиеся нестрогими, но приводящие к успеху, и путем относительно небольших уточнений сделать их удовлетворяющими современным критериям строгости.

## § 2. ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ?

Первое, что нужно уточнить в приведенных в предыдущем параграфе «нестандартных» рассуждениях,— это понятие бесконечно малой величины. Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины (т. е. не как функции, стремящиеся к нулю, как учат нас современные учебники), а как величины постоянные. Уместно отметить, что такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т. п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильно считать подобного рода интуицию присущей лишь авторам учебников физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги $ds$ иначе, чем «очень маленькую дугу». Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время $dt$ точка прошла бесконечно малый путь $dx$, а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину $dN$.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявился у одного из основоположников этой науки — Лейбница. В мае 1984 г. исполнилось 300 лет с того дня, как символы $dx$ и $dy$ впервые появились на страницах математических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница «Новый метод...» [7]. Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления.

Итак, речь будет идти о бесконечно малых числах. Какое же число следует называть бесконечно малым? Во-первых, конечно, нуль! Но это не интересно — интересно найти бесконечно малое число, не равное нулю (например, положительное). Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый — самый наивный — ответ таков: положительное число $\varepsilon$ называется бесконечно малым, если оно меньше всех положительных чисел (рис. 2). Легко понять, однако, что бесконечно малых в этом смысле положительных чисел не бывает: ведь если число меньше всех положительных чисел и само положительно, оно должно быть меньше самого себя. Попытаемся исправить положение, потребовав, чтобы $\varepsilon$ было меньше всех д р у г и х положительных чисел, но больше нуля, т. е. чтобы $\varepsilon$ было наименьшим в множестве положительных чисел. На числовой оси такое $\varepsilon$ должно изобразиться самой левой точкой множества $(0, +\infty)$ (рис. 3). Это «определение» бесконечно малого числа часто приводят школь-

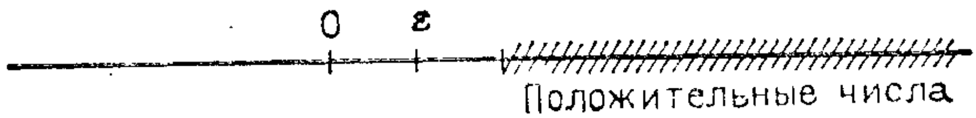


Рис. 2

ники, только что начавшие изучать математический анализ. К сожалению, числа $\varepsilon$ с указанными свойствами тоже нет и быть не может: если $\varepsilon$ положительно, то число $\varepsilon/2$ будет положительным числом, мень-

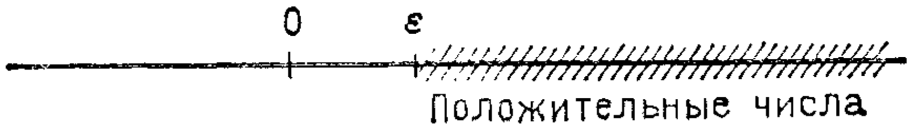


Рис. 3

шим $\varepsilon$. (Согласно обычным свойствам неравенств для всякого $a > 0$ выполняются неравенства $0 < a/2 < a$). Так что если мы не хотим отказываться от привычных нам свойств действительных чисел (например, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положительное число), но хотим иметь бесконечно малые числа, то приведенное определение бесконечной малости не годится.

Более изощренное определение бесконечной малости числа $\varepsilon > 0$, которое мы и будем использовать в дальнейшем, таково. Будем складывать число $\varepsilon$ с самим собой, получая числа $\varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$ и т. д. Если все полученные числа окажутся меньше 1, то число $\varepsilon$ и будет называться бесконечно малым. Другими словами, если $\varepsilon$ бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины $\varepsilon$ вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдешь (рис. 4). Наше требование к бесконечно малому $\varepsilon$ можно переписать и в такой форме (поделив на $\varepsilon$):

$$1 < \frac{1}{\varepsilon}, \quad 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon}, \quad 1 + 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \ldots$$

Таким образом, если число $\varepsilon$ бесконечно мало, то число $1/\varepsilon$ бесконечно велико в том смысле, что оно больше любого из чисел $1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1$ и т. д. Так что если мы начнем измерять отрезок длиной $1/\varepsilon$ с помощью эталона длины (т. е. откладывая последовательно отрезки единичной длины), то процесса измерения никогда не закончим. Из сказанного можно видеть, что существование бесконечно малых противоречит так называемой аксиоме Архимеда, которая утверждает, что для любых двух отрезков $A$ и $B$ можно отложить меньший из них ($A$) столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок ($B$). (На рис. 5 потребовалось отложить отрезок $A$ четыре раза.)

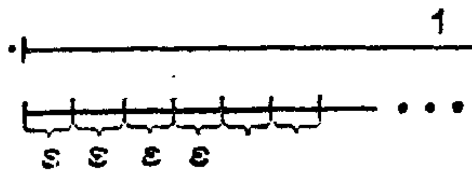


Рис. 4

Приведенная формулировка касается отрезков; если считать (как это обычно делается), что длины отрезков являются числами, мы приходим к такой формулировке аксиомы Архимеда: для любых двух чисел $a$ и $b$, для которых $0<a<b$, одно из неравенств $a+a>b$, $a+a+a>b, \ldots$ обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы будем иметь в виду именно эту формулировку. Из нее видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) бесконечно малых нет: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $a=\varepsilon$, $b=1$. Мы увидим в дальнейшем, что на самом деле аксиома Архимеда равносильна утверждению об отсутствии бесконечно малых элементов, не равных нулю.

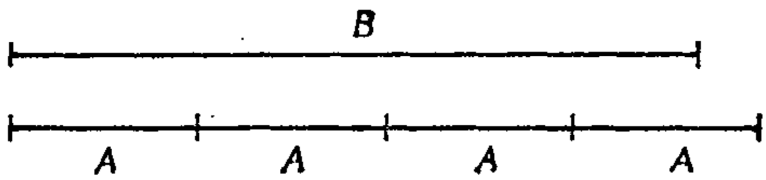


Рис. 5

Вывод из всего сказанного таков: если мы хотим рассматривать бесконечно малые, нужно расширить множество $\mathbb{R}$ действительных чисел до некоторого большего множества $^*\mathbb{R}$. Элементы этого нового множества будем называть *гипердействительными числами*. В нем аксиома Архимеда не выполняется и существуют бесконечно малые (в смысле последнего определения) числа — такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма будет все время оставаться меньше 1. Подобно тому как обычный (или стандартный) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел $\mathbb{R}$, нестандартный анализ изучает множество гипердействительных чисел $^*\mathbb{R}$. Полученные при этом результаты используются для исследования свойств $\mathbb{R}$. (Таким образом могут быть получены «нестандартные» доказательства свойств обыкновенных действительных чисел.)

Порядок на $\mathbb{R}$ архимедов, а на $^*\mathbb{R}$ неархимедов: это значит, что в $\mathbb{R}$ аксиома Архимеда выполняется, а в $^*\mathbb{R}$ не выполняется. По этой причине стандартный (обычный) анализ, изучающий $\mathbb{R}$, называется еще *архимедовым*, а нестандартный анализ, изучающий $^*\mathbb{R}$, называют *неархимедовым*.

Итак, для построения нестандартного анализа необходимо расширить множество действительных чисел до более широкого множества гипердействительных чисел. Но прежде поговорим о самих действительных числах и их происхождении.

До сих пор мы молчаливо предполагали известным понятие действительного числа. Тем не менее не стоит забывать, что понятие действительного числа имеет долгую историю, начавшуюся еще в древней Греции (о чем напоминает название «аксиома Архимеда») и закончившуюся лишь в XIX веке. Уроки этой истории помогут нам лучше понять место гипердействительных чисел среди различных числовых систем.

Самой первоначальной и основной числовой системой является, конечно, система натуральных чисел. Известное изречение немецкого математика Л. Кронекера (1823—1891) «Die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles anderes ist Menschenwerk» («Господь бог создал целые числа, все остальное — дело рук человеческих») в еще большей степени применимо к натуральным числам (впрочем, скорее всего, Кронекер имел в виду как раз натуральные числа, а наш перевод слишком буквальный).

Натуральных чисел, однако, оказывается мало: пытаясь решить уравнение $3+x=2$ в натуральных числах, мы обнаруживаем, что оно не имеет решений и наше желание определить операцию вычитания оказывается неудовлетворенным. Поэтому мы расширяем множество натуральных чисел до множества целых чисел. В этой (несомненно, хорошо знакомой читателю) процедуре для нас сейчас важно следующее: каким образом мы определим сложение и умножение на целых числах? То, что $2+2=4$, можно увидеть, сложив две кучи по два яблока в одну. Но почему мы считаем, что $(-2)+(-2)=(-4)$? Почему мы считаем, что $(-1)\cdot(-1)=1$?

Эти вопросы не так тривиальны, как нам сейчас может показаться. Найти правильный ответ будет легче, если сформулировать вопрос иначе: что плохого произойдет, если мы будем считать, например, что $(-1)\cdot(-1)=-1$? Ответ прост: в этом случае хорошо известные свойства сложения и умножения натуральных чисел (коммутативность, ассоциативность и др.) не будут выполняться для целых чисел. Можно показать, что обычное определение операций над отрицательными числами единственно возможное, если мы хотим сохранить привычные свойства операций сложения и умножения.

Тут следует остановиться и спросить: какие же именно свойства сложения и умножения мы хотим сохранить? Ведь если бы мы хотели сохранить все свойства, то введение отрицательных чисел было бы не только излишне, но и вредно: свойство «уравнение $x+3=2$ не имеет решений», верное для натуральных чисел, становится неверным для целых! Если же мы ничего не хотим сохранить, то задача становится столь же легкой, сколь и пустой: можно определить операции с отрицательными числами как угодно. Правильный выбор здесь, как обычно, представляет собой умелое лавирование между Сциллой слепого следования традициям и Харибдой бесплодного новаторства.

Возвращаясь к истории развития понятия числа, мы видим, что введение отрицательных чисел не доставляет полного удовлетворения: уравнение $2\cdot x=3$ по-прежнему не имеет решения. Это побуждает ввести рациональные (дробные) числа. Но и этого недостаточно: от рациональных чисел приходится перейти к действительным. В результате получается последовательность множеств $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ (натуральных, целых, рациональных и действительных чисел; $A \subset B$ означает, что всякий элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$). В этой последовательности каждое следующее множество включает в себя предыдущее, при этом имевшиеся в предыдущем операции продолжаются на следующее, более широкое, множество, сохраняя свои полезные свойства.

Мы хотим продолжить эту последовательность еще на один член, получив последовательность $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, где ${}^*\mathbb{R}$ — множество гипердействительных чисел. Забегая вперед, скажем, что новый шаг расширения будет иметь много общего с предыдущими: мы продолжим на ${}^*\mathbb{R}$ имевшиеся в $\mathbb{R}$ операции, сохранив их полезные свойства. Но будут и два важных отличия. Во-первых, это расширение (переход от $\mathbb{R}$ к ${}^*\mathbb{R}$) можно выполнить многими различными способами: можно построить существенно различные множества ${}^*\mathbb{R}$, ни одно из которых ничем не выделяется среди остальных. В то же время все предыдущие шаги нашего расширения числовой системы от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{R}$ были в некотором смысле однозначны. Во-вторых, есть различие в наших целях. Если прежде (двигаясь от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{R}$) мы строили новую числовую систему прежде всего для того, чтобы исследовать ее свойства и ее применения, то построенная система ${}^*\mathbb{R}$ предназначается не столько для того, чтобы исследовать ее свойства, сколько для того, чтобы с ее помощью исследовать свойства $\mathbb{R}$. Впрочем, быть может, различие и не так велико: и раньше расширение числовой системы было одним из способов получения новых знаний о старых объектах (пример: аналитическая теория чисел). Кроме того, множество ${}^*\mathbb{R}$ можно рассматривать, быть может, как соответствующее физической реальности в не меньшей (и даже в большей) степени, чем $\mathbb{R}$ (см. об этом в § 12).

Итак, вернемся к стоящей перед нами задаче: необходимо расширить множество $\mathbb{R}$ действительных чисел до большего множества ${}^*\mathbb{R}$, содержащего бесконечно малые, сохранив при этом все полезные свойства $\mathbb{R}$. Центральный вопрос здесь, разумеется, состоит в том, какие именно свойства действительных чисел мы желаем сохранить. Ответим на этот вопрос не сразу, начав с наиболее простых свойств действительных чисел.

Прежде всего, мы хотим, чтобы гипердействительные числа можно было складывать, умножать, вычитать и делить, чтобы эти операции обладали обычными свойствами, называемыми «аксиомами поля». Сформулируем их.

Среди гипердействительных чисел должны быть выделены числа 0 и 1; должны быть заданы операции сложения $(x+y)$, умножения $(x \cdot y)$, взятия противоположного $(-x)$, а также операция взятия обратного $(1/x)$ при $x \neq 0$. При этом должны выполняться такие свойства:

(1) $a+b=b+a$;

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$;

(3) $a+0=a$;

(4) $a+(-a)=0$;

(5) $a \cdot b=b \cdot a$;

(6) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$;

(7) $a \cdot 1=a$;

(8) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$;

(9) $a \cdot (1/a)=1$ при $a \neq 0$.

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется полем. Таким образом, требования (1)—(9) можно коротко сформулировать так: $^*\mathbb{R}$ должно быть полем.

Кроме арифметических операций, мы должны задать на гипердействительных числах порядок. Это значит, что для любых двух различных гипердействительных чисел $a$ и $b$ должно быть определено, какое из них больше. (Если $a$ больше $b$, будем писать $a>b$ или $b<a$.) При этом должны выполняться такие свойства:

(10) если $a>b$, $b>c$, то $a>c$;

(11) если $a>b$, то $a+c>b+c$ для любого $c$;

(12) если $a>b$, $c>0$, то $a \cdot c>b \cdot c$;
если $a>b$, $c<0$, то $a \cdot c<b \cdot c$.

Поле, в котором введен порядок с такими свойствами, называется *упорядоченным полем*. Таким образом, можно сказать, что $^*\mathbb{R}$ должно быть упорядоченным полем.

Мы хотим, чтобы среди гипердействительных чисел были все действительные. При этом операции и порядок на $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$ должны быть согласованы — именно, если сумма двух действительных чисел $x$ и $y$ равна $z$, то сумма $x$ и $y$, рассматриваемых как гипердействительные числа, также должна быть равна $z$. (Было бы очень странно, если бы после перехода к гипердействительным числам равенство $2+2=4$ стало неверным!) Точно так же должно обстоять дело и с другими операциями, а также с порядком: если $x$, $y$ — действительные числа и $x > y$ (в обычном смысле), то $x$ должно быть больше $y$ и как гипердействительное число! Эти требования согласованности можно кратко выразить так: упорядоченное поле $^*\mathbb{R}$ должно быть расширением упорядоченного поля $\mathbb{R}$.

Этим далеко не исчерпываются те свойства действительных чисел, которые мы желаем сохранить. Но нужно сказать и о том, что нового мы ожидаем от $^*\mathbb{R}$. Итак, чего же не хватало? Ясно чего: бесконечно малых! (Точнее, следовало бы сказать «бесконечно малых, отличных от нуля»,— так как 0 также будет бесконечно малым числом по нашему определению.) Что же такое бесконечно малое число (точнее, бесконечно малый элемент упорядоченного поля)?

Определение. Элемент $x \geqslant 0$ упорядоченного поля называется *бесконечно малым*, если $x < 1$, $x + x < 1$, $x + x + x < 1$ и т. д. Это определение относится к неотрицательным $x$; отрицательное же $x$ называется бесконечно малым, если $-x (= |x|)$ бесконечно мало.

Как мы видели, существование ненулевых бесконечно малых противоречит аксиоме Архимеда (см. выше). Верно и обратное: если для упорядоченного поля не выполнена аксиома Архимеда, т. е. существуют такие $x$, $y > 0$, что $x < y$, $x + x < y$, $x + x + x < y$ и т. д., то существуют ненулевые бесконечно малые. Таким будет, например, число $x/y$: умножая неравенство $x + x + \ldots + x < y$ на положительное число $1/y$, получаем в силу свойства (12), что $x/y + x/y + \ldots + x/y < 1$.

Таким образом, существование ненулевых бесконечно малых равносильно нарушению аксиомы Архимеда для гипердействительных чисел. Упорядоченные поля, в которых справедлива аксиома Архимеда и нет бесконечно малых, называют *архимедово упорядоченными*, или просто *архимедовыми* упорядоченными полями. Те поля, в которых аксиома Архимеда неверна и есть бесконечно малые, называют *неархимедово упорядоченными* (*неархимедовыми*). В этих терминах наши требования можно сформулировать так: система гипердействительных чисел должна быть неархимедово упорядоченным полем, являющимся расширением упорядоченного поля действительных чисел.

В этом месте возникает вопрос: выполнимы ли наши требования? Можно ли построить числовую систему, им удовлетворяющую? Оказывается, что да. (Более того, мы впоследствии сформулируем гораздо более сильные требования, и они окажутся выполнимыми!)

## § 3. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Начнем с того, что в геометрических задачах на построение называют анализом: предположив, что неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел существует, исследуем его свойства.

Итак, пусть $^*\mathbb{R}$ — неархимедово расширение $\mathbb{R}$. Его элементы называются гипердействительными числами. Среди них, в частности, содержатся и все действительные числа. Чтобы отличить их от тех гипердействительных чисел, которые не являются действительными, будем называть действительные числа (элементы $\mathbb{R}$) *стандартными*, а остальные гипердействительные числа (элементы $^*\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$) — *нестандартными*.

Согласно нашему предположению среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые. Они являются, очевидно, нестандартными, так как среди стандартных, т. е. действительных, чисел бесконечно малых нет. Рассмотрим произвольное положительное бесконечно малое число $\varepsilon$. Оно меньше любого стандартного положительного числа $a$. В самом деле, пусть $\varepsilon \geqslant a$. Так как $a$ стандартно, а для стандартных чисел справедлива аксиома Архимеда, найдется такое натуральное число $n$, что

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} \geqslant 1.$$

Но тогда

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} \geqslant \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} \geqslant 1,$$

что противоречит бесконечной малости $\varepsilon$. Полученное противоречие показывает, что $\varepsilon < a$. Итак, бесконечно малые положительные числа меньше всех стандартных положительных чисел. (Аналогичным образом отрицательные бесконечно малые числа больше всех стандартных отрицательных чисел.) Таким образом, если пытаться изобразить бесконечно малые числа на числовой прямой, то пришлось бы втиснуть их настолько близко к нулю, чтобы все положительные стандартные числа оказались справа, а все отрицательные — слева.

Указанное свойство может служить определением бесконечной малости: если число $\varepsilon > 0$ меньше всех стандартных положительных чисел, то оно бесконечно мало. В самом деле, в этом случае для любого натурального $n$

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1,$$

так как $\varepsilon$ меньше стандартного числа $1/n$.

Разумеется, бесконечно малыми не исчерпываются все нестандартные числа. Например, $1 + \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое) также нестандартно (если бы оно было стандартным, то и $\varepsilon = (1 + \varepsilon) - 1$ было бы стандартно как разность двух стандартных). Однако оно не является бесконечно малым (так как больше 1). Более изощренный пример — гипердействительное число $1/\varepsilon$, где $\varepsilon$ — бесконечно малое число, отличное от нуля. (Оговорка «отличное от нуля» важна, ведь $1/x$ согласно определению поля определено только при $x \neq 0$: в нестандартном анализе, как и в стандартном, на нуль делить нельзя!) Число $1/\varepsilon$ служит примером «бесконечно большого» гипердействительного числа.

Определение. Гипердействительное число $A > 0$ называется *бесконечно большим*, если

$$A > 1, \quad A > 1 + 1, \quad A > 1 + 1 + 1, \ldots$$

(Отрицательное число $B$ называется бесконечно большим, если таков его модуль $|B| = -B$.)

Покажем, что при бесконечно малом $\varepsilon > 0$ число $A = 1/\varepsilon$ будет (положительным) бесконечно большим. В самом деле, умножая обе части неравенства

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1$$

на число $1/\varepsilon$, получаем

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} < 1/\varepsilon,$$

что и требовалось. Легко видеть, что положительное бесконечно большое число $A$ больше любого стандартного: если $a$ — произвольное стандартное число, то найдется такое натуральное $n$, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} > a$ и тем более $A > a$. Аналогичным образом всякое отрицательное бесконечно большое гипердействительное число меньше любого стандартного.

Легко видеть, что если $A$ — бесконечно большое число, то $1/A$ — бесконечно малое отличное от 0 число. Это показывает, что архимедово упорядоченное поле можно определить как упорядоченное поле, в котором имеются бесконечно большие элементы. (Напомним, что ранее мы определяли неархимедово поле как то, для которого не выполнена аксиома Архимеда или — что равносильно — как то, в котором есть бесконечно малые.)

Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, будут называться *конечными*. Равносильное определение: число $A$ конечно, если $a < A < b$ для некоторых стандартных $a$ и $b$. Все стандартные числа, очевидно, конечны. Пример конечного, но не стандартного числа уже приводился — это число $1+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое. Вообще, если $a$ — стандартное число, а $\varepsilon$ — бесконечно малое, отличное от 0, то $a+\varepsilon$ — конечное нестандартное число. В самом деле, оно конечно, так как $-1 < \varepsilon < 1$ ($\varepsilon$ бесконечно мало) и, следовательно, $a-1 < a+\varepsilon < a+1$. Если бы оно было стандартным, то и число $\varepsilon = (a+\varepsilon)-a$ было бы стандартным как разность двух стандартных чисел.

Оказывается, что таким образом могут быть получены все конечные гипердействительные числа. Точнее, справедливо такое утверждение: если $s$ — конечное гипердействительное число, то найдутся стандартное $v$ и бесконечно малое $\varepsilon$, для которых $s = v + \varepsilon$. В самом деле, пусть $s$ — конечное гипердействительное число. В силу его конечности найдутся (стандартные) действительные числа $a$ и $b$, для которых $a < s < b$. Рассмотрим два множества (стандартных) действительных чисел: множество $L$ всех стандартных $x$, меньших $s$, а также множество $R$ всех стандартных $x$, бо́льших $s$. Множество $L$ содержит $a$, а множество $R$ содержит $b$, поэтому оба эти множества непусты. Они не пересекаются (по определению порядка никакое число не может быть одновременно больше и меньше $s$). Любое число из $L$ меньше любого числа из $R$: если $p < s$ и $s < q$, то $p < q$. В силу известного свойства действительных чисел («аксиомы полноты в форме Дедекинда») найдется «разделяющее число» $v$, т. е. такое $v$, что $p \leqslant v$ для всех $p \in L$ и $v \leqslant q$ для всех $q \in R$. (Можно взять $v$ равным точной верхней грани $L$ или точной нижней грани $R$.) Осталось доказать, что разность $\varepsilon = s - v$ будет бесконечно малой. Докажем, например, что $\varepsilon$ меньше любого стандартного положительного числа $z$, т. е. что $s - v < z$ или $s < v + z$.

Если это не так и $v+z \leqslant s$, то $v+z/2 < v+z \leqslant s$, т. е. $v+z/2 \in L$. Но это противоречит тому, что $v$ — разделяющее число, так как $v+z/2 > v$, а все элементы $L$ должны быть не больше $v$. Аналогичным образом доказывается, что $\varepsilon = s - v$ больше всех отрицательных стандартных чисел.

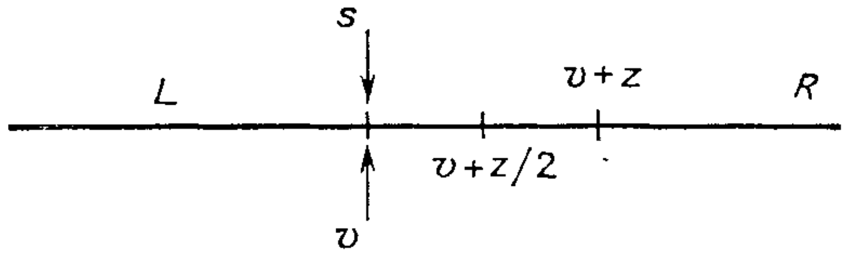


Рис. 6

Итак, каждое конечное гипердействительное число может быть представлено в виде $v+\varepsilon$, где $v$ — стандартное, а $\varepsilon$ — бесконечно малое. Такое представление единственно. В самом деле, если $v+\varepsilon = v'+\varepsilon'$, то $v-v' = \varepsilon' - \varepsilon$. Здесь левая часть стандартна, а правая бесконечно мала ($|\varepsilon - \varepsilon'| < z$ для любого стандартного положительного $z$, так как $|\varepsilon - \varepsilon'| \leqslant |\varepsilon| + |\varepsilon'| < z/2 + z/2 = z$; $|\varepsilon| < z/2$, $|\varepsilon'| < z/2$ в силу бесконечной малости $\varepsilon$, $\varepsilon'$). Так как среди стандартных чисел нет бесконечно малых, кроме нуля, то $v - v' = \varepsilon' - \varepsilon = 0$, что и требовалось доказать. Это свойство дает нам право сформулировать такое определение: *стандартной частью* $\mathrm{st}(x)$ конечного гипердействительного числа $x$ называется такое стандартное $v$, что $x = v + \varepsilon$ для бесконечно малого $\varepsilon$.

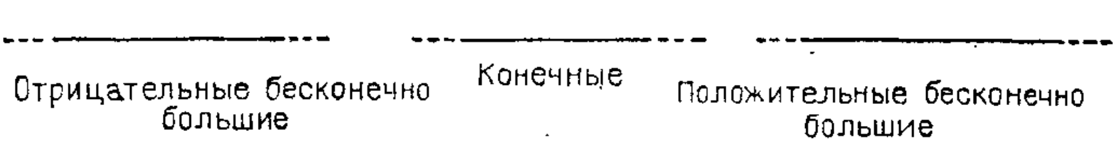


Рис. 7

Попытаемся теперь «окинуть взором» гипердействительную прямую. Прежде всего, видно, что она разбивается на три части (слева направо): отрицательные бесконечно большие, конечные, положительные бесконечно большие.

Издали «конечная часть» гипердействительной прямой выглядит как обычная действительная прямая. Но если присмотреться, то можно увидеть, что рядом с каждым стандартным действительным числом $a$ расположено множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел, для которых $a$ является стандартной частью. Это множество (из уважения к Лейбницу) называют *монадой* стандартного числа $a$. Таким образом, множество конечных гипердействительных чисел разбито на непересекающиеся классы — монады, соответствующие стандартным действительным числам.

Легко проверить, что сумма и разность бесконечно малых бесконечно малы, произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало. Приведем простые доказательства этих свойств, чтобы читатель мог постепенно привыкнуть к стилю рассуждений в нестандартном анализе. Пусть $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ бесконечно малы. Докажем, что $\varepsilon+\varepsilon'$ и $\varepsilon-\varepsilon'$ бесконечно малы, т. е. что $|\varepsilon+\varepsilon'|<p$, $|\varepsilon-\varepsilon'|<p$ для любого стандартного положительного $p$. В самом деле, $|\varepsilon+\varepsilon'| \leqslant |\varepsilon|+|\varepsilon'|$ и $|\varepsilon-\varepsilon'| \leqslant |\varepsilon|+|\varepsilon'|$. Далее, $|\varepsilon|<p/2$ и $|\varepsilon'|<p/2$, так как $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ бесконечно малы. Поэтому $|\varepsilon|+|\varepsilon'|<p$, откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь $\varepsilon$ бесконечно мало, а $a$ конечно. Так как $a$ конечно, то $|a|$ меньше некоторого стандартного $A$. Тогда $|\varepsilon\cdot a|<|\varepsilon|\cdot|A|$. Докажем, что $|\varepsilon|\cdot|A|<p$ для любого стандартного $p>0$. В самом деле, $|\varepsilon|<p/|A|$, так как $\varepsilon$ бесконечно мало, а $p/|A|$ — стандартное положительное число. Таким образом, $\varepsilon\cdot a$ — бесконечно малое.

Словесно близкие (если не точно такие же) утверждения о бесконечно малых величинах, вероятно, хорошо знакомы читателю из учебников математического анализа. Это сходство, однако, не должно заслонять принципиального различия: в учебнике анализа речь идет о последовательностях действительных чисел (которые называются бесконечно малыми, если их предел равен нулю), а у нас — не о последовательностях, а о новых, гипердействительных числах.

Назовем два гипердействительных числа *бесконечно близкими*, если их разность бесконечно мала. Из приведенных выше свойств бесконечно малых следует, что отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности. Напомним, что это означает, что отношение бесконечной близости рефлексивно (каждое $x$ бесконечно близко самому себе), симметрично (если $x$ бесконечно близко к $y$, то $y$ бесконечно близко к $x$) и транзитивно (если $x$ бесконечно близко к $y$, а $y$ бесконечно близко к $z$, то $x$ бесконечно близко к $z$). Всякое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно определено, на непересекающиеся классы, причем любые два элемента одного класса эквивалентны, а любые два элемента разных классов не эквивалентны. В частности, наше отношение разбивает $^*\mathbb{R}$ на непересекающиеся классы, причем элементы одного класса бесконечно близки друг к другу, а элементы разных классов — нет. Классы, содержащие стандартные действительные числа, представляют собой упоминавшиеся выше «монады».

Ознакомившись со строением $^*\mathbb{R}$ «в малом», посмотрим на его строение «в большом». Рассмотрим другое отношение эквивалентности на $^*\mathbb{R}$, говоря, что гипердействительные числа $x$ и $y$ «находятся в одной галактике», если их разность — конечное гипердействительное число. Ясно, что мы получаем отношение эквивалентности на множестве всех гипердействительных чисел (если $x - y$ и $y - z$ конечны, то их сумма, равная $x - z$, конечна). Это отношение разбивает все гипердействительные числа на классы, которые естественно назвать *галактиками*. Это разбиение является более «грубым», чем разбиение на монады: каждая галактика представляет собой объединение бесконечного числа монад. Одной из галактик является множество всех конечных гипердействительных чисел (эту галактику естественно назвать «нашей галактикой»), любая другая галактика либо состоит из бесконечно больших положительных чисел, либо состоит из бесконечно больших отрицательных чисел. Галактики «не смешиваются»: если $G_1$ и $G_2$ — две галактики, то либо $G_1$ лежит вся левее $G_2$ (т. е. любое число из $G_1$ меньше любого числа из $G_2$), либо наоборот. Между любыми двумя галактиками существует третья (чтобы найти ее, возьмем $x$ и $y$ из двух первых галактик и рассмотрим галактику, содержащую их полусумму $(x+y)/2$) и, следовательно, бесконечно много промежуточных (возьмем четвертую между первой и третьей и т. д.). Среди галактик нет ни наибольшей («самой правой»), ни наименьшей («самой левой»): если галактика $G$ содержит $x$, а $\omega$ — бесконечно большое, то число $x+\omega$ будет находиться в галактике $G'$, расположенном правее $G$, а число $x-\omega$ будет находиться в галактике $G''$, расположенной левее $G$.

Как и в обычном изложении математического анализа, мы можем различать бесконечно малые (или бесконечно большие) разных порядков. Именно: будем говорить, что бесконечно малое $\varepsilon$ является бесконечно малым более высокого порядка, чем бесконечно малое $\delta$, если отношение $\varepsilon/\delta$ бесконечно мало. Аналогичным образом бесконечно большое $A$ имеет более высокий порядок, чем бесконечно большое $B$, если $A/B$ бесконечно велико. Согласно этим определениям, для любого бесконечно малого $\varepsilon$ можно указать бесконечно малое более высокого порядка, например $\varepsilon^2$; $\varepsilon^3$ будет иметь еще более высокий порядок и т. д. (Аналогично обстоит дело и для бесконечно больших.) Можно сказать, что, рассматривая окрестность 0 в микроскоп с любым (возможно, бесконечно большим) увеличением, мы всегда будем видеть слившимися точки, на самом деле различные. Если микроскоп увеличивает в $1/\varepsilon$ раз, то $\varepsilon$ будет видно на конечном расстоянии от нуля, но $\varepsilon^2$ по-прежнему будет сливаться с нулем. (При этом все стандартные числа, разумеется, окажутся бесконечно далеко вне нашего поля зрения!) Включив увеличение $1/\varepsilon^2$ или, другими словами, рассматривая видимое в микроскопе изображение снова в микроскоп (представим себе, что это возможно), мы увидим, что $\varepsilon$ теперь бесконечно далеко от нашего поля зрения, $\varepsilon^2$ хорошо отличимо от нуля, но по-прежнему есть числа, сливающиеся с нулем ($\varepsilon^3$, например).

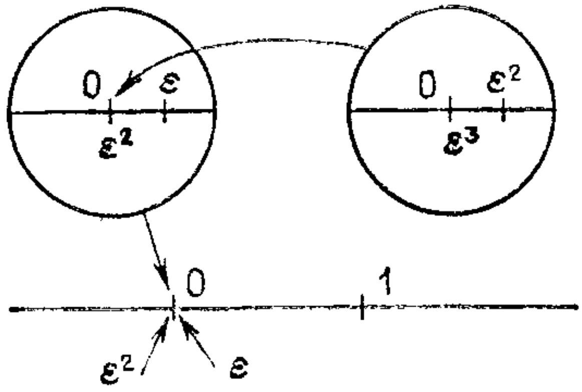


Рис. 8

Приведем (следуя книге Кейслера [38]) еще несколько «микрофотографий» разных объектов. Направив

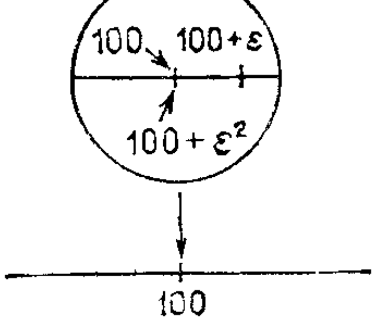


Рис. 9

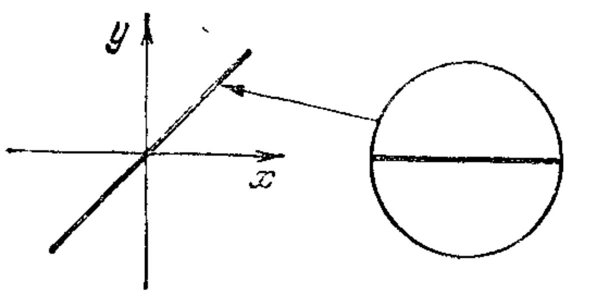


Рис. 10

микроскоп на произвольную точку действительной прямой, мы не увидим ничего особенно нового: просто вместо 0 будет какое-то другое действительное число. График функции $y =$ (стандартная часть $x$), определенной на конечных гипердействительных $x$, при рассматривании без микроскопа неотличим от графика тождественной функции $y=x$. Но посмотрев (с бесконечно большим увеличением) на любую его точку, увидим, что сходство это лишь кажущееся: в микроскопе график выглядит как горизонтальная прямая! (График $y=x$ и в микроскопе — прямая, проходящая под углом 45° к осям координат.)

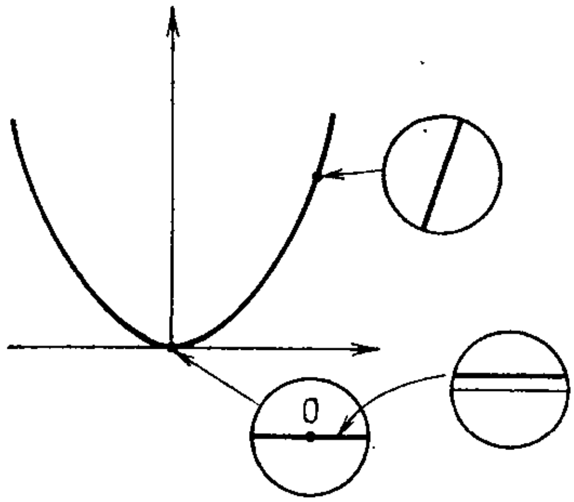


Рис. 11

График функции $y=x^2$ под микроскопом выглядит как прямая. В начале координат этот график горизонтален (сливается с осью абсцисс), а в других точках наклонен. Мы не случайно употребили слова «выглядит как» и «сливается». Если посмотреть с еще бо́льшим увеличением, то можно увидеть, что это слияние неполное: между графиком и прямой есть «бесконечно малая щель более высокого порядка».

До сих пор мы направляли наш микроскоп на конечную часть гипердействительной прямой (или на точки плоскости с конечными координатами). «Прибор», предназначенный для рассматривания бесконечно удаленных участков, естественно назвать «телескопом». Направив телескоп на какое-нибудь бесконечно большое гипердействительное число, увидим что-нибудь такое:

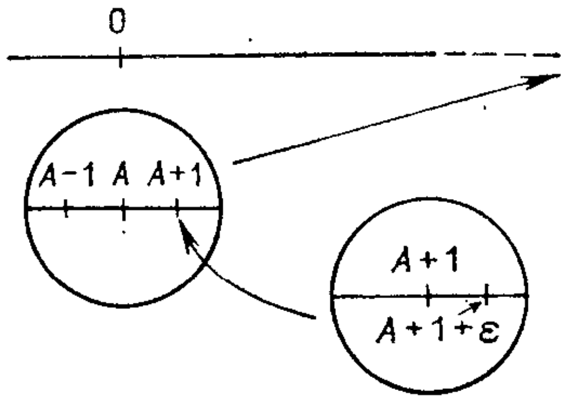


Рис. 12

(Телескопическое изображение мы, в свою очередь, следуя Кейслеру, можем рассматривать через микроскоп.) Посмотрев в телескоп на график гиперболы $y = 1/x$ в бесконечно большой точке, мы увидим, что он сливается с осью абсцисс. Посмотрев на телескопическое изображение

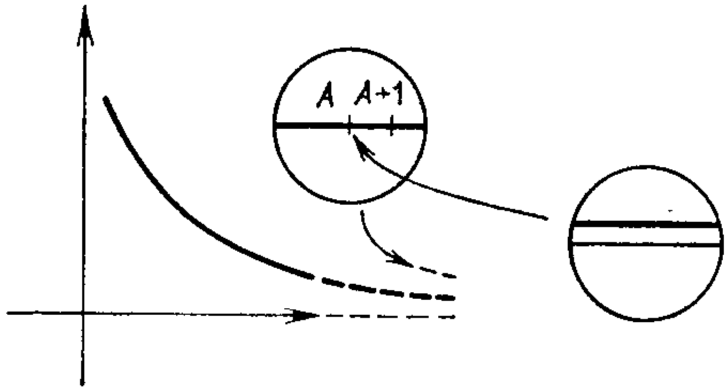


Рис. 13

в микроскоп, можно увидеть его в виде прямой, проходящей «параллельно оси абсцисс» (отклонение графика от прямой — бесконечно малое более высокого порядка).

## § 4. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

До сих пор мы говорили о гипердействительной прямой (а точнее, любом неархимедовом расширении упорядоченного поля действительных чисел), откладывая вопрос о том, существует ли хотя бы одно такое расширение. Попытаемся теперь построить такое расширение.

Первая приходящая в голову мысль — следуя традиции, назвать бесконечно малыми гипердействительными числами последовательности действительных чисел, сходящиеся к 0. Нужно, разумеется, иметь и не бесконечно малые гипердействительные числа. По-видимому, самый естественный путь здесь таков: считать гипердействительным числом произвольную последовательность действительных чисел. Необходимо, чтобы действительные числа были частным случаем гипердействительных: этого можно легко добиться, отождествив каждое действительное число $a$ с последовательностью из одинаковых элементов $a, a, a, \ldots$ Получаем на первый взгляд привлекательную картину: все последовательности действительных чисел называются гипердействительными числами, среди них есть стандартные (постоянные, или стационарные, последовательности) и стремящиеся к нулю. Гипердействительные числа можно складывать и умножать так, как это обычно делают с последовательностями,— почленно, считая суммой последовательностей $a = a_0, a_1, \ldots$ и $b = b_0, b_1, \ldots$ последовательность $a + b = a_0 + b_0, a_1 + b_1 \ldots$, а произведением — последовательность $a \cdot b = a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, \ldots$ (При этом нулем будет последовательность из одних нулей, а единицей — из единиц.)

Однако дальше нас постигает разочарование: поля не получается. Именно: не удается определить операцию взятия обратного. Что считать, например, обратным к последовательности 0, 1, 0, 1, ...? Ясно, что найти такое $x$, что $ax = 1$, можно, лишь если в последовательности $a$ нет нулей. Попытка исключить из рассмотрения последовательности, содержащие нули, также ни к чему хорошему не приводит: после этого непонятно, как определять сложение (сумма двух последовательностей без нулей может содержать нули!). С определением порядка также, несомненно, нас ждут большие трудности: нам предстоит решить, например, какая из двух (неравных) последовательностей 0, 1, 0, 1, ... и 1, 0, 1, 0, ... больше.

В итоге мы видим, что идея с определением гипердействительных чисел как последовательностей наткнулась на серьезные препятствия, для преодоления которых нужна какая-то новая идея. Мы еще вернемся к этому построению.

Опишем теперь другой путь построения системы гипердействительных чисел (для нас пока «система гипердействительных чисел» означает «неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел»). Основная идея этого построения может быть описана в одной фразе так: у нас нет объектов, но есть имена для них; так объявим же имена объектами! Эта (часто применяемая в математической логике) идея конкретизируется в нашем случае следующим образом.

Мы знаем, что в нашем (пока еще не построенном и неизвестно существующем ли) расширении должно быть хотя бы одно бесконечно малое положительное гипердействительное число. Обозначим его через $\varepsilon$. Поскольку гипердействительные числа можно умножать друг на друга (и, в частности, на действительные числа), то наряду с $\varepsilon$ в нашем расширении будут и числа $2\varepsilon$, $0{,}5\varepsilon$ и вообще все числа вида $a\varepsilon$, где $a$ — произвольное стандартное действительное число. Более того, число $\varepsilon$ можно умножать и на себя, поэтому в нашем расширении будут иметься $\varepsilon^2$, $\varepsilon^3$, $2\varepsilon^2$, $3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1, \ldots$ и вообще все гипердействительные числа вида $P(\varepsilon)$, где $P$ — многочлен со стандартными действительными коэффициентами. Множество чисел такого вида, как легко понять, замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Это значит, что, складывая, вычитая или перемножая два числа такого вида, мы вновь получим число такого же вида. Но для гипердействительных чисел определено еще и деление. Поэтому в расширении будут и числа вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где $P$ и $Q$ — многочлены со стандартными действительными коэффициентами. После этого мы получаем множество гипердействительных чисел, замкнутое относительно всех арифметических операций: складывая, вычитая, умножая или деля две дроби указанного вида по обычным правилам, получаем дробь такого же вида.

Таким образом, не имея пока искомого расширения, мы уже смогли назвать некоторые его элементы, дать им имена. Этими именами являются записи вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — некоторый символ. Более того, мы можем судить и о том, какая из двух записей обозначает большее число. В самом деле, достаточно уметь определять, обозначает ли данная запись положительное, отрицательное или нулевое число (поскольку $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$). Вспоминая, что знак дроби можно определить по знакам числителя и знаменателя, мы видим, что достаточно уметь определять знак $P(\varepsilon)$, где $P$ — многочлен. Это делается так. Легко видеть, что знак величины $a_0 + a_1\varepsilon + \ldots$ совпадает со знаком $a_0$, если $a_0 \neq 0$. В самом деле, добавка $a_1\varepsilon + \ldots$ бесконечно мала, а складывая положительное (отрицательное) число с бесконечно малым, мы получаем положительное (соответственно отрицательное) число. Возможен, однако, случай $a_0 = 0$. Будем считать для определенности, что $\varepsilon$ — положительное бесконечно малое. Вынесем из нашего многочлена $\varepsilon$ в наибольшей возможной степени, т. е. представим его в виде

$$\varepsilon^k (a_k + a_{k+1}\varepsilon + \ldots),$$

где $a_k$ уже отлично от 0. Теперь ясно, что знак всего выражения определяется знаком выражения в скобках (при умножении на положительное число знак не меняется), а знак выражения в скобках (как мы уже видели) определяется знаком числа $a_k$.

Поясним сказанное на примере. Пусть мы хотим сравнить числа $\dfrac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$ и $\dfrac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$ или, другими словами, сравнить их разность

$$\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$$

с нулем. Вычисляя эту разность по обычным правилам, получаем

$$\frac{(1+\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)-(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}=\frac{\varepsilon(-2+3\varepsilon-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}.$$

Видно, что она отрицательна. Значит, первое число меньше второго.

По существу, мы уже построили искомое неархимедово расширение. Нужно лишь посмотреть на наши рассуждения с другой позиции. До сих пор выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ рассматривались нами как имена «настоящих» гипердействительных чисел (взятых неизвестно откуда). А теперь они станут самими гипердействительными числами. Рассмотрим формальные выражения вида $P(\varepsilon)/$ $/Q(\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — некоторый символ, а $P$ и $Q$ — многочлены с действительными коэффициентами, причем $Q\neq 0$. Провозглашая, что объектами, а в данном случае гипердействительными числами, мы объявим имена, а в данном случае выражения, или записи вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, мы были не совсем точны. Дело в том, что, очевидно, две различные записи могут выражать одно и то же число (иными словами, быть двумя различными именами одного и того же числа): так, например, естественно считать, что запись $(\varepsilon^2-1)/(\varepsilon-1)$ выражает то же самое число, что и $(\varepsilon+1)/1$. Будем называть два выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)/S(\varepsilon)$ эквивалентными, если $P(\varepsilon)\cdot S(\varepsilon)=R(\varepsilon)\cdot$ $\cdot Q(\varepsilon)$ (равенство понимается как равенство многочленов, т. е. как равенство коэффициентов при одинаковых степенях). Легко проверить, что это определение действительно задает отношение эквивалентности, разбивающее все выражения вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ на классы. Эти классы мы и будем называть гипердействительными числами. Сложение, вычитание, умножение и деление гипердействительных чисел определяются по обычным правилам. Так, например, если $\alpha$ — класс, содержащий $P/Q$, а $\beta$ — класс, содержащий $R/S$, то их суммой называется класс, содержащий $(PS+RQ)/SQ$, а произведением — класс, содержащий $PR/QS$. Легко проверить, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора элементов $P/Q$ в классе $\alpha$ и $R/S$ в классе $\beta$ (в результате получаются разные представители одного и того же класса). Аналогичным образом можно определить взятие обратного и противоположного, нуль и единицу. Нетрудно проверить, что все аксиомы поля при этом будут выполнены. Изложенная конструкция хорошо известна в алгебре: построенное поле называется полем рациональных функций с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathbb{R}(\varepsilon)$.

Нам осталось определить только порядок, указав, как выбрать из двух различных гипердействительных чисел (т. е. из двух различных классов эквивалентных дробей) большее. Для этого нужно вычесть одно число из другого и определить, будет ли разность (отличная от нуля, поскольку числа различны) положительной или отрицательной. Чтобы определить, будет ли отличное от нуля число $\alpha$ положительным или отрицательным, возьмем его представитель $P/Q$. Здесь $P$ и $Q$ отличны от 0 ($Q$ отлично от нуля по определению, $P$ — потому что, по нашему предположению, разность не равна 0). Вынесем в числителе и в знаменателе $\varepsilon$ в наибольшей возможной степени:

$$P = \varepsilon^k (a_k + a_{k+1}\varepsilon + \ldots), \quad Q = \varepsilon^l (b_l + b_{l+1}\varepsilon + \ldots), \quad a_k, \; b_l \neq 0.$$

Число $\alpha$ будет положительным, если $a_k$ и $b_l$ имеют одинаковые знаки, и отрицательным, если они имеют разные знаки. В качестве упражнения читатель может проверить (это нетрудно), что предлагаемое определение корректно (т. е. что неважно, какой именно из эквивалентных представителей взять) и что выполнены все аксиомы упорядоченного поля. Построенное упорядоченное поле $\mathbb{R}(\varepsilon)$ можно рассматривать как расширение поля $\mathbb{R}$: достаточно отождествить действительное число $x$ с классом эквивалентных дробей, содержащим дробь $x/1$. Осталось лишь показать, что аксиома Архимеда не выполняется, предъявив бесконечно малый элемент. Этим элементом будет, конечно, $\varepsilon$ (точнее, класс, содержащий $\varepsilon/1$). В самом деле, $\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1$, так как разность $1 - n\varepsilon$ положительна (знак определяется свободным членом, а $1 > 0$).

Итак, искомое расширение построено. На этом примере можно проиллюстрировать некоторые понятия, обсуждавшиеся нами. Дробь

$$\frac{a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^n}{b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_k\varepsilon^k}$$

будет бесконечно малой, если первый ненулевой коэффициент $a_t$ в числителе расположен правее, чем первый ненулевой коэффициент $b_s$ в знаменателе, т. е. если $t > s$. Если же $t < s$, то дробь будет бесконечно большой. Если же $t = s$, то дробь будет конечным гипердействительным числом, стандартная часть которого равна $a_t/b_s$. Например,

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{1+\varepsilon} \text{ — бесконечно малые,}$$

$$\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3} \text{ — бесконечно большие,}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon},\ \frac{\varepsilon^2+\varepsilon^5}{2\varepsilon^2+3\varepsilon^4} \text{ — конечные гипердействительные чис-}$$

ла (стандартная часть первого равна 1, второго 1/2).

## § 5. НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ

Итак, мы построили неархимедово расширение $\mathbb{R}(\varepsilon)$ поля действительных чисел. Постараемся теперь понять, хватит ли его для обоснования приведенных выше «нестандартных рассуждений».

Пример с вычислением производной функции $y = x^2$ становится вполне корректным: нужно сказать лишь, что производной функции $y = x^2$ в стандартной точке $x$ называется стандартная часть отношения $dy/dx$. Действительно, $\operatorname{st}(dy/dx) = \operatorname{st}(2x + dx) = 2x$. Хуже обстоит дело с другими примерами. При попытке продифференцировать корень необходимо вычислить разность $\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$ и, в частности, извлечь корень из гипердействительного числа $x + dx$. А в нашем поле $\mathbb{R}(\varepsilon)$ гипердействительных чисел корень извлекать можно не всегда. (В качестве упражнения читатель может проверить, что в нем не существует гипердействительного числа $a$, для которого $a^2 = \varepsilon$.) Еще хуже дело обстоит с определением интеграла: там необходимо складывать величины вида $f(x)$, где $x$ — гипердействительное число, в то время как функция $f$ определена только на действительных числах.

Уже из этих примеров ясно, чего нам не хватает. Нам нужно уметь вычислять «значения» стандартных функций (заданных первоначально как функции с действительными аргументами и значениями) на гипердействительных аргументах. Другими словами, для каждой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ необходимо иметь ее «гипердействительный аналог» ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. При этом, конечно, значения ${}^*f$ на стандартных числах должны совпадать с соответствующими значениями функции $f$. Другими словами, ${}^*f$ должно быть продолжением $f$. Такие аналоги были у нас для операций сложения, вычитания, умножения и деления. Но этого мало: нам нужны такие аналоги и для других функций. Если бы они были, при вычислении корня мы могли бы рассмотреть функцию $\mathrm{sqrt}(x)=\sqrt{x}$ (с действительными аргументами и значениями), затем взять ее продолжение $^*\mathrm{sqrt}$ и определить производную как стандартную часть отношения

$$({}^*\mathrm{sqrt}\,(x+dx)-{}^*\mathrm{sqrt}\,(x))/dx.$$

Итак, для каждой стандартной функции $f$ (функции с действительными аргументами и значениями) нам нужно иметь ее гипердействительное продолжение ${}^*f$. Если от ${}^*f$ ничего не требовать, то это тривиально: можно считать, что во всех действительных точках ${}^*f$ принимает те же значения, что и $f$, а в нестандартных точках ${}^*f$ имеет какие угодно значения (например, нули). Ясно, однако, что от такого продолжения никакого толку нет: при вычислении производной корня, например, нужно, чтобы функция $^*\mathrm{sqrt}$ обладала свойством

$${}^*\mathrm{sqrt}\,(b)-{}^*\mathrm{sqrt}\,(a)=\frac{b-a}{{}^*\mathrm{sqrt}\,(b)+{}^*\mathrm{sqrt}\,(a)},$$

которое мы использовали при этом вычислении. Поскольку трудно предсказать заранее, какие именно свойства могут нам понадобиться, было бы желательно, чтобы функция ${}^*f$ была как можно более похожа на функцию $f$: в идеале ${}^*f$ должна обладать всеми свойствами, которыми обладает функция $f$, быть как бы ее «естественным распространением» с $\mathbb{R}$ на ${}^*\mathbb{R}$.

Слова «всеми свойствами» нуждаются, однако, в правильном толковании. Вряд ли мы хотим, чтобы ${}^*f$, подражая $f$, была определенной только на действительных числах. Таким образом, нам нужно выделить некоторый класс свойств — класс тех свойств, которые мы хотим сохранить. Правильный выбор этого класса имеет решающее значение для успеха нашего построения системы гипердействительных чисел. Если этот класс будет слишком узок, то от наличия продолжений ${}^*f$ не будет пользы. Если же, напротив, он будет слишком широк, то сама возможность построения системы гипердействительных чисел и определения продолжений окажется под угрозой.

Итак, наша главная задача — описать, какие свойства стандартных функций мы хотим сохранить при переходе от действительных чисел к гипердействительным. Есть две возможности это сделать. Первая возможность состоит в применении методов математической логики. Можно сказать, что при переходе от действительных чисел к гипердействительным сохраняются все свойства, которые можно выразить на «языке первого порядка». Мы обсудим этот путь (в частности, объясним, что такое язык первого порядка) в дальнейшем.

А сейчас мы обсудим вторую возможность, позволяющую обойтись более «кустарными» средствами и не прибегать к сведениям из логики. Конечно, при этом мы будем испытывать некоторые неудобства, использовать обходные маневры и т. п., но зато не потребуется знакомство с математической логикой.

Напомним ситуацию, в которой мы находимся. Мы предполагаем, что помимо поля $\mathbb{R}$ действительных чисел имеется более широкое упорядоченное поле $^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел, включающее $\mathbb{R}$ как подмножество (еще раз подчеркнем, что существование $^*\mathbb{R}$ с нужными свойствами является пока только гипотезой, а не доказанным фактом). Пусть для каждой функции $f$ с действительными аргументами имеется ее естественное распространение, ее «гипердействительный аналог» — функция с гипердействительными аргументами и значениями. При этом функция $f$ может быть функцией не только одного действительного аргумента, но и двух, трех и т. д.; функция $^*f$, разумеется, должна иметь то же самое число аргументов. Для простоты мы пока не будем рассматривать частичных функций и будем считать, что $f$ (соответственно $^*f$) определена при всех действительных (соответственно гипердействительных) аргументах. Сформулируем теперь наше требование («аналоги обладают теми же свойствами, что и исходные функции») более точно.

Будем рассматривать системы уравнений вида $t = s$ и неравенств вида $t \neq s$, левые и правые части которых содержат какие-то действительные функции действительных аргументов, действительные константы и переменные — что-нибудь вроде

$$\sin(\cos(x)) = y + \exp(z),\ z \neq y - 2 \cdot x,\ [z] = y.$$

Эта система содержит переменные $x$, $y$, $z$, одноместные функции sin, cos, exp, [ ] (целая часть), двуместные функции (сложение, вычитание, умножение) и константу 2 (константы для единообразия мы будем считать функциями нуля аргументов). Все входящие в систему функции имеют по нашему предположению гипердействительные аналоги. Обозначим их *sin, *cos, *exp, *[ ], *+, *−, *· и напишем систему

$$*\sin(*\cos(x)) = y *{+} *\exp(z), \quad z \neq y *{-}\, 2 *{\cdot}\, x, \quad *[z] = y,$$

которую естественно назвать «гипердействительным аналогом исходной».

В качестве возможных значений переменных этой системы могут фигурировать любые гипердействительные числа. Тем самым приобретает смысл вопрос о наличии или отсутствии гипердействительных решений этой системы. Поскольку мы предполагаем, что входящие в нее функции являются продолжениями соответствующих функций действительного аргумента, то всякое (действительное) решение исходной системы будет одновременно решением новой системы. Таким образом, если исходная система имеет решения, то и ее гипердействительный аналог имеет решения. Мы потребуем и обратного: *всякая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет (гипердействительные) решения, должна иметь действительные решения.*

Придирчивый читатель мог бы указать нам на то, что понятие «система уравнений и неравенств» не определено нами: мы всего лишь привели один пример. Тем самым и наше требование не получило точной формулировки. Чтобы ответить на эти возражения, введем понятие терма. Выберем счетный набор символов, элементы которого будем называть *переменными*. Будем называть *термом* любую переменную, любое действительное число, а также любое выражение вида $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $f$ — функция $n$ действительных аргументов, а $t_1, \ldots, t_n$ — построенные ранее термы. Тем самым $\sin(\cos(x))$, $a(y, \exp(z))$ ($a$ — функция сложения) и т. п. становятся термами. Системой (точнее, системой уравнений и неравенств) назовем конечный набор записей вида $t = s$ или $t \neq s$, где $t$ и $s$ — термы. Приведенный нами выше пример системы подпадает под это определение, нужно только заменить привычные обозначения типа $x + y$ на $a(x, y)$, где $a$ — функция сложения, и т. п. Определим теперь понятие *решения* системы. Если в терм подставить действительные числа вместо переменных, то он приобретет некоторое действительное значение. Решение системы — это такой набор значений переменных, при котором левая и правая части любого равенства $t = s$, входящего в систему, приобретают одно и то же значение, а левая и правая части любого неравенства $t \neq s$, входящего в систему,— разные.

По нашему предположению всякая функция с действительными аргументами и значениями имеет гипердействительный аналог («естественное продолжение»). Понятие гипердействительного аналога легко распространяется на термы — чтобы получить аналог терма $t$, надо просто заменить все входящие в него функции на их гипердействительные аналоги. Проделав эту операцию со всеми термами, входящими в какую-то систему $S$, мы получим систему $*S$, которую естественно также назвать гипердействительным аналогом системы $S$. Поскольку в нее входят функции с гипердействительными аргументами и значениями, вместо переменных можно подставлять произвольные гипердействительные числа. Гипердействительным решением системы $*S$ назовем такой набор гипердействительных значений переменных, при которых выполнены все входящие в нее уравнения и неравенства. Теперь можно сформулировать наше требование к системе гипердействительных чисел и к гипердействительным аналогам следующим образом.

*Пусть $S$ — произвольная система уравнений и неравенств, $*S$ — ее гипердействительный аналог. Если $*S$ имеет (гипердействительные) решения, то $S$ должна иметь действительные решения.*

Напомним, что возможность построения неархимедова упорядоченного расширения $\mathbb{R}$ поля $\mathbb{R}$ и таких гипердействительных аналогов $*f$ для всех действительных функций $f$, которые бы удовлетворяли сформулированному требованию, остается пока всего лишь гипотезой. (Мы будем называть эту гипотезу Основной гипотезой.) В следующих параграфах мы обсудим некоторые ее следствия. А к вопросу о построении системы гипердействительных чисел с требуемыми свойствами мы еще вернемся.

## § 6. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ

В этом параграфе мы приведем несколько примеров, показывающих, какие следствия можно вывести из сформулированной в предыдущем параграфе Основной гипотезы. Оказывается, что несмотря на то, что сформулированное нами требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств кажется весьма частным, оно имеет самые разнообразные следствия и достаточно для обоснований значительной части рассуждений с гипердействительными числами.

Пример 1. Пусть $f$ — функция одного действительного аргумента, принимающая только значения 0 и 1. Докажем, что функция $^*f$ принимает только значения 0 и 1. Для этого рассмотрим систему

$$f(x) \neq 0, \quad f(x) \neq 1,$$

которая по предположению не имеет действительных решений. Следовательно, не имеет (гипердействительных) решений и ее аналог — система

$$^*f(x) \neq 0, \ ^*f(x) \neq 1.$$

Пример 2. Пусть $f$ и $g$ — функции одного действительного аргумента, причем множества их нулей совпадают. (Множество нулей функции — множество тех значений аргумента, при которых значение функции равно 0.) В этом случае и множества гипердействительных чисел, являющиеся множествами нулей функций $^*f$ и $^*g$, совпадают. Докажем это. В самом деле, каждая из систем

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad g(x) \neq 0;$$

$$(2) \qquad g(x) = 0, \quad f(x) \neq 0$$

не имеет действительных решений. Следовательно, не имеют гипердействительных решений и их аналоги. Поэтому любой гипердействительный нуль функции $^*f$ обязан (чтобы не быть решением аналога системы (1)) быть нулем и для $^*g$ и наоборот.

Этот пример позволяет определить гипердействительные аналоги не только для функций, но и для множеств. Пусть $A$ — произвольное множество действительных чисел. Рассмотрим произвольную функцию $f$, для которой $A$ — множество нулей. (Такая есть: достаточно положить, например, $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \notin A$.) Рассмотрим теперь гипердействительный аналог $^*f$ функции $f$ и множество $^*A$ его (гипердействительных) нулей. Как мы видим, множество $^*A$ не зависит от выбора функции $f$. Его мы и назовем гипердействительным аналогом множества $A$.

Пример 3. Мы можем теперь разрешить включать в системы наряду с равенствами $t = s$ и неравенствами $t \neq s$ и записи вида $s \in A$, где $s$ представляет собой терм, а $A$ — множество действительных чисел. При этом решениями будут такие наборы (действительных или гипердействительных) значений переменных, при которых выполнены все равенства и неравенства, а значение $s$ принадлежит множеству $A$. Гипердействительным аналогом записи $s \in A$ будет $^*s \in {}^*A$, где $^*s$ — гипердействительный аналог терма $s$, а $^*A$ — аналог множества $A$ (в указанном смысле). Таким образом, у всякой системы равенств, неравенств и включений (т. е. записей вида $s \in A$) появляется гипердействительный аналог. Для таких систем остается в силе свойство одновременной разрешимости: если гипердействительный аналог системы имеет (гипердействительные) решения, то исходная система имеет (действительные) решения. Чтобы увидеть это, достаточно заменить $s \in A$ на $a(s) = 0$, где $a$ — функция с действительными аргументами и значениями, множеством нулей которой является $A$. Аналогичным образом можно добавлять в систему и утверждения вида $s \notin A$ (что заменяется на $a(s) \neq 0$).

Пример 4. Пусть $A$ — пустое множество. Докажем, что $^*A$ — пустое множество. В самом деле, система

$$x \in A$$

не имеет действительных решений, поэтому и система $x \in {}^*A$ не имеет (гипердействительных) решений. Рассмотрев систему $x \notin A$, получаем аналогичным образом, что если $A$ содержит все действительные числа, то $^*A$ содержит все гипердействительные числа. Таким образом, гипердействительным аналогом множества $\mathbb{R}$ будет множество $^*\mathbb{R}$, так что наши обозначения согласованы.

Чтобы не быть излишне многословными, мы в дальнейшем будем позволять себе некоторые вольности речи. Именно: вместо того чтобы говорить о системе $S$ и ее действительных решениях, а также о системе $^*S$ и ее гипердействительных решениях, будем говорить о действительных и гипердействительных решениях системы $S$. (Разумеется, говоря о гипердействительных решениях системы $S$, мы на самом деле будем иметь в виду гипердействительные решения системы $^*S$.) Это позволит нам сэкономить место и не писать две системы, отличающиеся друг от друга лишь звездочками. Например, в последнем примере мы могли бы сказать, что «система $x \in A$ не имеет действительных решений и, следовательно, не имеет и гипердействительных решений, поэтому $^*A$ пусто».

Пример 5. Если $A = B \cap C$, то $^*A = {}^*B \cap {}^*C$. В самом деле, каждая из систем

$$x \in B,\ x \in C,\ x \notin A;$$
$$x \in A,\ x \notin B;$$
$$x \in A,\ x \notin C$$

не имеет действительных, и, следовательно, гипердействительных решений. (Точнее, следовало бы говорить об аналогах этих систем!) Отсюда получаем, что $^*B \cap {}^*C \subset {}^*A$ (первая система), $^*A \subset {}^*B$ (вторая) и $^*A \subset {}^*C$ (третья), откуда вытекает, что $^*A \subset {}^*B \cap {}^*C$. В качестве упражнения читатель может проверить аналогичные свойства других теоретико-множественных операций (если $A = B \cup C$, то $^*A = {}^*B \cup {}^*C$; если $A = \mathbb{R} \setminus B$, то $^*A = {}^*\mathbb{R} \setminus {}^*B$).

Напомним, что наши требования к системе гипердействительных чисел состояли из двух частей. Во-первых, $^*\mathbb{R}$ должно быть упорядоченным неархимедовым полем, расширяющим $\mathbb{R}$. Во-вторых, должны существовать аналоги для всех действительных функций, удовлетворяющие требованию одновременной разрешимости систем уравнений. Эти требования оказываются избыточными: тот факт, что гипердействительные аналоги сложения, умножения и т. п. превращают $^*\mathbb{R}$ в поле, можно вывести из требования одновременной разрешимости систем уравнений. Покажем это.

Пример 6. Пусть $a$ и $m$ — функции сложения и умножения действительных чисел: $a(x, y) = x + y$, $m(x, y) = x \cdot y$. Функции $a$ и $m$ (как и любые функции с действительными аргументами и значениями) имеют гипердействительные аналоги $^*a$ и $^*m$. Эти аналоги мы будем рассматривать в качестве сложения и умножения гипердействительных чисел. Аналогичным образом, рассмотрев функции $N$ (взятие противоположного) и $R$ (взятие обратного) и их гипердействительные аналоги, мы определим взятие противоположного и обратного в $^*\mathbb{R}$. (Небольшая тонкость: мы рассматриваем лишь всюду определенные функции, а функция $R$ первоначально не определена в 0. Это легко поправить, например, доопределив ее и считая, что $R(0) = 0$.) Покажем, что введенные таким образом в $^*\mathbb{R}$ операции удовлетворяют аксиомам поля. Это делается совсем просто. Проверим, например, что в $^*\mathbb{R}$

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Так как $\mathbb{R}$ — поле, то система

$$m(x,\ a(y,\ z)) \neq a(m(x,\ y),\ m(x,\ z))$$

не имеет действительных решений. Значит, она не имеет и гипердействительных решений, т. е. требуемое свойство выполнено и в $^*\mathbb{R}$. Аналогично проверяются и остальные аксиомы поля. Мы рассмотрим для примера еще одну: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ при $x \neq 0$ (ее выбор объясняется желанием проиллюстрировать, что учет условия $x \neq 0$ не создает трудностей). Система

$$x \neq 0,\ m(x,\ R(x)) \neq 1$$

не имеет действительных и, следовательно, гипердействительных решений. Поэтому нет гипердействительных $x$, для которых $x \neq 0$ и $^*m(x,\ ^*R(x)) \neq 1$, т. е. для всех гипердействительных $x$, для которых $x \neq 0$, выполнено $^*m(x,\ ^*R(x)) = 1$.

Пример 7. Продолжая двигаться в выбранном направлении, мы должны превратить $^*\mathbb{R}$ в упорядоченное поле, исходя из требования одновременной разрешимости систем в $^*\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Другими словами, нам нужен гипердействительный аналог отношения порядка. Отношение порядка на $\mathbb{R}$, как и всякое двуместное отношение, есть некоторое подмножество множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ пар действительных чисел. Определим для каждого $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ его аналог следующим образом (см. пример 2). Рассмотрим функцию $s$ двух действительных аргументов, для которой $s(x,\ y) = 0$ равносильно $\langle x,\ y \rangle \in S$. Рассмотрим ее гипердействительный аналог $^*s$ и множество $^*S$ тех пар гипердействительных чисел $\langle x,\ y \rangle$, для которых $^*s(x,\ y) = 0$. Как и в примере 2, легко проверить, что множество $^*S$ зависит только от множества нулей функции $s$. Эту общую процедуру можно применить и к отношению порядка, рассмотрев множество Ord тех пар $\langle x,\ y \rangle$ действительных чисел, для которых $x < y$, его аналог $^*$Ord и определив порядок в $^*\mathbb{R}$ так: гипердействительное число $x$ меньше гипердействительного числа $y$, если пара $\langle x,\ y \rangle$ принадлежит $^*$Ord.

Теперь в Основной гипотезе можно наряду с равенствами $t = s$, неравенствами вида $t \neq s$ и включениями $t \in A$ включать в системы и неравенства вида $t < s$ и $t \nless s$. Такие записи нужно рассматривать как сокращения для $\mathrm{ord}\ (t,\ s) = 0$ и $\mathrm{ord}(t,\ s) \neq 0$, где ord — функция, множеством нулей которой является Ord.

Легко проверить свойства порядка. В самом деле, система

$$x < y, \ y < x$$

не имеет действительных решений, поэтому одновременное выполнение свойств $x < y$ и $y < x$ невозможно и для гипердействительных чисел. Аналогично система $x < x$ не имеет действительных решений, поэтому никакое гипердействительное число не меньше самого себя. Наконец, рассмотрев систему

$$x \neq y, \ x \nless y, \ y \nless x,$$

не имеющую решений, убеждаемся, что из любых двух различных гипердействительных чисел одно меньше другого. Рассмотрев систему

$$x < y, \ x + z \nless y + z,$$

убеждаемся, что из $x < y$ следует $x + z < y + z$, и т. д.

Тем самым $^*\mathbb{R}$ превращается в упорядоченное поле.

Пример 8. Пусть $A$ — произвольное множество действительных чисел. Покажем, что $A \subset {}^*A$. В самом деле, если $a \in A$, а $f$ — функция с множеством нулей $A$ (пример 2), то $f(a) = 0$ и, значит, $^*f(a) = 0$, т. е. $a \in {}^*A$.

Пример 9. Пусть $A$ — конечное множество действительных чисел. Покажем, что в этом случае $^*A = A$, т. е. никаких новых элементов $^*A$ по сравнению с $A$ не содержит.

Пусть, например, $A$ содержало три действительных числа $p$, $q$, $r$. Рассмотрим систему

$$x \neq p, \ x \neq q, \ x \neq r, \ x \in A.$$

Она не имеет действительных решений, значит, не имеет и гипердействительных решений. Но всякое $x \in {}^*A$, отличное от $p$, $q$, $r$, было бы ее решением. Значит, $^*A = A$.

Пример 10. Естественный вопрос, возникающий после рассмотрения предыдущего примера, таков: а что будет для бесконечных $A$? Мы видели, что всякое действительное $x$, принадлежащее $A$, принадлежит и $^*A$. Аналогичным образом всякое действительное $x$, не принадлежащее $A$, не принадлежит и $^*A$. Поэтому все новые элементы $^*A$ по сравнению с $A$ обязаны быть нестандартными. Оказывается, что они обязательно будут, если $A$ бесконечно! Прежде чем приводить это рассуждение, обратим внимание на то, что это первое рассуждение, использующее наличие бесконечно малых в $^*\mathbb{R}$. До сих пор мы ссылались только на Основную гипотезу, и, следовательно, все наши рассуждения были справедливы и для случая $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Итак, докажем, что если $A$ бесконечно, то в $^*A$ существуют нестандартные (и, следовательно, не принадлежащие $A$) элементы. Это доказательство значительно сложнее уже встречавшихся (которые были почти очевидны). Его идею можно описать так. Раз $A$ бесконечно, существует вещественная функция $f$, не ограниченная сверху на $A$. Тогда ее аналог $^*f$ будет неограниченным на $^*A$. Это значит, что среди $x \in {}^*A$ найдутся нестандартные: если бы все элементы $^*A$ были стандартны, то и все значения $f(x)$ при $x \in {}^*A$ были бы стандартны, и множество этих значений было бы ограничено сверху бесконечно большим гипердействительным числом.

Проведем теперь это рассуждение подробно.

Пусть $A$ бесконечно. Рассмотрим функцию $f$ одного действительного аргумента с действительными значениями, не являющуюся ограниченной сверху на $A$. (Чтобы построить такую функцию, достаточно выбрать счетное подмножество $A' = \{a_0, a_1, \ldots\}$, $A' \subset A$ и положить $f(a_n) = n$, $f(x) = 0$ при $x \notin A'$.) Так как функция $f$ не ограничена, то для любого $c$ существует такое $x \in A$, что $f(x) > c$. Обозначим это $x$ через $g(c)$. Мы имеем две функции $f$ и $g$ с такими свойствами: $g(c) \in A$ при всех действительных $c$, причем $c < f(g(c))$. Рассмотрим теперь гипердействительные аналоги $^*f$ и $^*g$ функций $f$ и $g$ и докажем несколько утверждений о них.

1. $^*g(c) \in {}^*A$ при всех гипердействительных $c$. В самом деле, система $g(x) \notin A$ не может иметь гипердействительных решений, так как не имела действительных решений.

2. $c < {}^*f({}^*g(c))$ при всех гипердействительных $c$. В самом деле, система $x \not< f(g(x))$ не имеет гипердействительных решений, так как не имеет действительных.

3. При бесконечно большом положительном $c$ число $^*g(c)$ нестандартно. В самом деле, если бы $^*g(c)$ было стандартным, то и $^*f({}^*g(c))$ было бы стандартным ($^*f$ на стандартных числах принимает стандартные значения, так как продолжает $f$). Но это противоречит неравенству $c < {}^*f({}^*g(c))$ и тому, что $c$ — положительное бесконечно большое.

Таким образом, $^*g(c)$ при бесконечно большом $c$ представляет собой нестандартное гипердействительное число, принадлежащее $^*A$, что и требовалось доказать.

Советуем обратить особое внимание на это рассуждение, несмотря на то, что оно может показаться поначалу странным и даже несколько искусственным, поскольку все использованные в нем приемы не раз нам еще встретятся.

## § 7. ОГРАНИЧЕННОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ

В предыдущем параграфе мы показали, что любое конечное множество действительных чисел $A$ равно своему гипердействительному аналогу $^*A$ (и, следовательно, $^*A$ состоит только из стандартных элементов), а для любого бесконечного $A$ множество $^*A$ содержит нестандартные элементы. Этот факт можно рассматривать с различных точек зрения. Можно считать его любопытным свойством системы гипердействительных чисел. Другая точка зрения, кажущаяся на первый взгляд неестественной и даже абсурдной, состоит в том, чтобы видеть в этом свойстве *определение конечности множества*. Представим себе на минуту, что мы не знаем, что такое конечные и бесконечные множества. Тогда мы можем определить бесконечное множество как такое множество $A$, гипердействительный аналог $^*A$ которого содержит нестандартные элементы. Мы можем даже доказывать разные свойства бесконечных множеств, исходя из этого определения. Докажем, например, что если $C = A \cup B$ бесконечно, то хотя бы одно из множеств $A$ и $B$ бесконечно. В самом деле, как отмечалось в предыдущем параграфе, $^*C = {}^*A \cup {}^*B$; по предположению $^*C$ содержит нестандартный элемент, значит, его должно содержать по крайней мере одно из множеств $^*A$ и $^*B$.

Это рассуждение выглядит абсурдным: мы доказываем очевидный факт с использованием загадочного гипердействительного расширения, само существование которого пока весьма сомнительно! Согласитесь, однако, что, несмотря на свою абсурдность (или благодаря ей), это рассуждение весьма изящно. Оценивший это изящество читатель может считать, что он понял движущую силу нестандартного анализа; все дальнейшее изложение состоит лишь в применении той же идеи в других ситуациях.

Наш первый пример применения нестандартного анализа — нестандартное доказательство следующей (весьма стандартной) теоремы:

*всякое ограниченное бесконечное множество действительных чисел имеет предельную точку.*

Доказательство будет состоять в том, что мы дадим новые, нестандартные (но, разумеется, эквивалентные обычным, стандартным) определения ограниченного множества и предельной точки, после чего теорема станет почти очевидной. Но вначале напомним стандартные определения.

Множество $A$ действительных чисел называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором отрезке, т. е. если существуют такие действительные числа $p$ и $q$, что $p \leqslant x \leqslant q$ для всех $x \in A$. Точка $a$ называется *предельной точкой* множества $A$, если для всякого положительного $\varepsilon$ в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ найдется точка множества $A$, отличная от $x$.

Нестандартное определение ограниченности весьма просто: $A$ ограничено, если $^*A$ не содержит бесконечно больших гипердействительных чисел. Покажем, что оно равносильно стандартному определению. Пусть $A$ ограничено в обычном смысле, т. е. содержится в некотором отрезке $[p,\ q]$. Тогда система

$$x \in A,\ x > q$$

не имеет действительных решений, поэтому не имеет гипердействительных решений, и, следовательно, все элементы $^*A$ не больше $q$ (в смысле имеющегося на гипердействительных числах порядка). Аналогичным образом все элементы $^*A$ не меньше $p$. Поэтому все элементы $^*A$ конечны. Теперь надо доказать обратное утверждение. Пусть $A$ не ограничено (в обычном смысле). Тогда либо для всякого действительного $p$ найдется $x \in A$, для которого $x < p$ ($A$ не ограничено снизу), либо для всякого действительного $q$ найдется $x \in A$, для которого $x > q$ ($A$ не ограничено сверху). Пусть, например, $A$ не ограничено сверху. Рассмотрим функцию $f$, которая по каждому действительному $q$ дает $x \in A$, для которого $x > q$. Другими словами, $f(q) \in A$ и $f(q) > q$ при всех действительных $q$. Тогда $^*f(q) \in {}^*A$ (система $f(q) \notin A$ не имеет решений) и $^*f(q) > q$ (система $f(q) \ngtr q$ не имеет решений) при всех гипердействительных $q$. Взяв $q$ положительным и бесконечно большим, увидим, что $^*f(q)$ есть бесконечно большой (так как $^*f(q) >$

$> q$) элемент множества $^*A$. Таким образом, $A$ не ограничено и в смысле гипердействительного определения.

Дадим теперь гипердействительное определение предельной точки. Оно таково: стандартное число $a$ называется *предельной точкой* множества $A$ действительных чисел, если $^*A$ содержит нестандартное гипердействительное число, бесконечно близкое к $a$. (Отметим важную оговорку «нестандартное»: если бы ее не было, всякий элемент $A$ являлся бы его предельной точкой.) Докажем, что это определение равносильно стандартному. Пусть $a$ — предельная точка множества $A$ в смысле стандартного определения. Тогда для всякого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x \in A$, что $x \neq a$ и $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Рассмотрим функцию $f$, которая дает одно из таких $x$ по $\varepsilon$ (при $\varepsilon \leqslant 0$ доопределим ее как угодно). Тогда при всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$f(\varepsilon) \in A,\ f(\varepsilon) \neq a,\ f(\varepsilon) < a+\varepsilon,\ f(\varepsilon) > a-\varepsilon.$$

Каждое из этих соотношений сохранится и после перехода к гипердействительным числам: для всех $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ имеем

$$^*f(\varepsilon) \in {}^*A,\ ^*f(\varepsilon) \neq a,\ ^*f(\varepsilon) < a+\varepsilon,\ ^*f(\varepsilon) > a-\varepsilon$$

(достаточно рассмотреть четыре системы, каждая из которых не имеет решения относительно $\varepsilon$:

$$f(\varepsilon) \notin A,\ \varepsilon > 0;\ f(\varepsilon) = a,\ \varepsilon > 0;$$
$$f(\varepsilon) \nless a+\varepsilon,\ \varepsilon > 0;\ f(\varepsilon) \ngtr a-\varepsilon,\ \varepsilon > 0).$$

Возьмем положительное бесконечно малое $\varepsilon$. Тогда $^*f(\varepsilon)$ будет элементом $^*A$, отличным от $a$. Кроме того, $^*f(\varepsilon)$ бесконечно близко к $a$, так как разность $^*f(\varepsilon) - a$ заключена между $-\varepsilon$ и $\varepsilon$ и, следовательно, ее модуль меньше $\varepsilon$ и меньше любого стандартного положительного числа. Итак, эквивалентность определений наполовину доказана. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что $a$ не является предельной точкой в смысле стандартного определения. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ нет точек множества $A$, отличных от $a$. Другими словами, система

$$x > a-\varepsilon,\ x < a+\varepsilon,\ x \neq a,\ x \in A$$

(рассматриваемая как система относительно $x$) не имеет решений. (Обратите внимание на то, что, в отличие от предыдущего рассуждения, $\varepsilon$ в этой системе является не переменной, а константой — такой же константой, как и

$a$.) Согласно Основной гипотезе эта система не имеет и гипердействительных решений. Но любой нестандартный элемент $^*A$, бесконечно близкий к $a$, являлся бы ее гипердействительным решением. Поэтому $a$ не является предельной точкой множества $A$ в смысле гипердействительного определения.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство обещанного в начале параграфа утверждения. Пусть $A$ — ограниченное бесконечное множество действительных чисел. Так как $A$ бесконечно, $^*A$ содержит нестандартный элемент $s$ (таково гипердействительное определение бесконечности). Так как $A$ ограничено, то $s$ — конечное гипердействительное число (в силу гипердействительного определения ограниченности). Как и всякое конечное число, $s$ имеет стандартную часть $a$ — стандартное число, бесконечно близкое к $s$. Оно и будет предельной точкой множества $A$ (в силу гипердействительного определения предельной точки).

Мы видим, что доказательство становится почти тривиальным. На это можно возразить, конечно, что это упрощение — фикция: вся трудность перенесена в доказательство эквивалентности стандартных и гипердействительных определений бесконечности, ограниченности и предельной точки. Но приверженцев нестандартного анализа это возражение не смутит: они скажут, что стандартные определения вообще не нужны, а нужно с начала и до конца пользоваться нестандартными. При этом вопрос об эквивалентности, конечно, отпадает.

Не будем продолжать этого воображаемого диалога между энтузиастами нестандартного анализа и скептиками. Вместо этого мы приведем несколько примеров, которые, быть может, помогут читателю составить собственное мнение об этом предмете. Посмотрим с гипердействительной точки зрения на понятия, по традиции открывающие курс математического анализа,— понятия последовательности и предела.

Последовательностью называется функция, которая сопоставляет с каждым натуральным числом $n$ некоторое действительное число, называемое $n$-м членом последовательности. Естественно ожидать, что гипердействительный аналог последовательности будет сопоставлять с каждым гипернатуральным числом $n$ некоторое гипердействительное число. Дадим точные определения.

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и его гипердействительный аналог $^*\mathbb{N}$. Элементы множества

${}^*\mathbb{N}$ мы будем называть *гипернатуральными числами.* Легко видеть, что все нестандартные гипернатуральные числа бесконечно велики. В самом деле, для любого стандартного числа $q$ система

$$x \in \mathbb{N}, \quad x \leqslant q, \quad x \neq 0, \ \ldots, \quad x \neq \llcorner q \lrcorner,$$

где $\llcorner q \lrcorner$ обозначает целую часть $q$ (наибольшее целое число, не превосходящее $q$), не имеет решений. Поэтому всякое гипернатуральное число, не большее $q$, должно совпадать с одним из чисел $0, \ldots, \llcorner q \lrcorner$ и, следовательно, быть стандартным. Так как $q$ можно выбрать произвольно, получаем, что всякое конечное гипернатуральное число стандартно. Поэтому все нестанадартные гипернатуральные числа бесконечно велики. Такие бесконечно большие гипернатуральные числа действительно существуют: достаточно взять функцию $f(x) = \llcorner x \lrcorner + 1$, убедиться, что системы $f(x) \notin \mathbb{N}$ и $f(x) < x$ не имеют решений (и, следовательно, ${}^*f(x) \in {}^*\mathbb{N}$ и ${}^*f(x) \geqslant x$ для всех гипердействительных $x$) и взять ${}^*f(a)$ для произвольного бесконечно большого $a$.

Пусть $a_0, \ a_1, \ldots$ — произвольная последовательность. Рассмотрим функцию $\alpha$, для которой $\alpha(i) = a_i$ при натуральном $i$, значения же $\alpha(x)$ при $x$, не являющемся натуральным числом, могут быть выбраны как угодно. Рассмотрим теперь значения ${}^*\alpha$ на гипернатуральных числах. Функцию, сопоставляющую с каждым гипернатуральным числом значение функции ${}^*\alpha$ на нем, будем называть *гипердействительным аналогом последовательности $a$.* Мы будем использовать вольность речи, называя ${}^*\alpha(\omega)$ (при гипернатуральном $\omega$) $\omega$-м членом последовательности $a$ и обозначая его $a_\omega$. Таким образом, при переходе из действительной области в гипердействительную у каждой последовательности «вырастает гипердействительный хвост».

Чтобы сказанное в предыдущем абзаце стало корректным, нужно проверить лишь, что значение $a_\omega$ при гипердействительных $\omega$ не зависит от выбора функции $\alpha$. В самом деле, пусть $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — две функции, совпадающие на натуральных аргументах. Тогда система

$$x \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1(x) \neq \alpha_2(x)$$

не имеет решений, и, следовательно, ${}^*\alpha_1$ и ${}^*\alpha_2$ совпадают на всех гипернатуральных аргументах.

Теперь мы должны систематически переводить определения различных свойств последовательностей на гипердействительный язык. Начнем с наиболее простого свойства — ограниченности. Вот стандартное определение: последовательность $a_0$, $a_1, \ldots$ ограничена, если найдутся такие действительные $p$ и $q$, что $p \leqslant a_i \leqslant q$ при всех $i$. Вспоминая содержание предыдущего параграфа (гипердействительный вариант определения ограниченности для множеств), можно предположить, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда все ее члены (как натуральные, так и гипернатуральные!) конечны (т. е. $a_n$ — конечное гипердействительное число при всех $n \in {}^*\mathbb{N}$). Доказательство эквивалентности почти такое же, как и для множеств. Пусть $a = a_0$, $a_1, \ldots$ ограничена в стандартном смысле и $p \leqslant a_n \leqslant q$ при всех (стандартных) натуральных $n$. Тогда каждая из систем

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_n < p;$$
$$n \in \mathbb{N}, \quad a_n > q$$

не имеет решений. (Более формально следовало бы написать не $a_n < p$ и $a_n > q$, а $\alpha(n) < p$ и $\alpha(n) > q$, где $\alpha$ — функция, продолжающая $a$ на аргументы, не являющиеся натуральными, см. выше.) Поэтому $a_n \geqslant p$ и $a_n \leqslant q$ для всех гипернатуральных $n$ (в том числе и нестандартных), поэтому $a_n$ конечно.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть последовательность $a = a_0$, $a_1, \ldots$ не ограничена. Тогда она либо не ограничена сверху (т. е. для всякого действительного $q$ найдется такое натуральное $n$, что $a_n > q$), либо она не ограничена снизу (т. е. для всякого $p$ найдется $n$, для которого $a_n < p$). Пусть, например, она не ограничена сверху. Рассмотрим функцию $N$, которая дает $n$ по $q$, т. е. $N(q) \in \mathbb{N}$ и $a_{N(q)} > q$ для всех действительных $q$. Рассуждая обычным образом, получаем, что при всех гипердействительных $q$ справедливы соотношения ${}^*N(q) \in {}^*\mathbb{N}$ и $a_{{}^*N(q)} > q$. Взяв $q$ бесконечно большим и положительным, обнаруживаем, что при $n = N(q)$ гипердействительное число $a_n$ будет бесконечно большим. Итак, эквивалентность стандартного и нестандартного определений ограниченности последовательности доказана.

Более сложной задачей является описание нестандартного определения предела. Постараемся вспомнить, однако, как мы представляли себе предел, начиная изучать математический анализ. По-видимому, следующая формулировка весьма правдоподобна: «число $a$ есть предел последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если бесконечно далекие члены этой последовательности бесконечно близки к $a$».

Теперь ее можно истолковать вполне буквально: бесконечно далекие члены — это $x_n$ с бесконечно большими гипернатуральными $n$, а бесконечная близость $x_n$ к $a$ означает, что $x_n - a$ бесконечно мало. Единственное обстоятельство, нуждающееся в уточнении, таково: требуем ли мы, чтобы *все* бесконечно далекие члены были бесконечно близки к $a$, или нам достаточно того, чтобы *некоторые* из них были таковы. Оказывается, что оба варианта ответа приводят к осмысленным понятиям: первый («все») дает определение предела, а второй («некоторые») дает определение предельной точки. К предельным точкам мы еще вернемся, а сейчас докажем эквивалентность двух определений предела.

Стандартное определение. Число $a$ называется *пределом* последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M$, что для всех натуральных $n \geqslant M$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Гипердействительное определение. Число $a$ называется *пределом* последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, если для любого бесконечно большого гипернатурального $n$ разность $x_n - a$ бесконечно мала.

Напомним, что и в том, и в другом определении числа $a$ и $x_i$ стандартные. Пусть $a$ является пределом последовательности $x_0, x_1, \ldots$ по стандартному определению, $n$ — бесконечно большое гипернатуральное число. Докажем, что $x_n - a$ бесконечно мало, т. е. что $|x_n - a| < \varepsilon$ для любого положительного стандартного $\varepsilon$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — стандартное число. Тогда по определению найдется такое стандартное $M$, что для всех стандартных $n > M$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда оно выполняется и для бесконечно больших гипернатуральных $n$ (так как система $n \in \mathbb{N}$, $n > M$, $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ не имеет решений), что нам и нужно.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $a$ не является пределом последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (в смысле обычного определения). Это означает, что для некоторого (стандартного) действительного $\varepsilon > 0$ и для любого $M$ найдется (стандартное) натуральное $n \geqslant M$, для которого $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$. Как обычно, рассмотрим функцию $f$, дающую $n$ по $M$, т. е. такую функцию, что $f(M) \in \mathbb{N}$, $f(M) \geqslant M$ и $|x_{f(M)} - a| \geqslant \varepsilon$ для любого действительного $M$. Возьмем теперь $n = {}^*f(M)$ для бесконечно большого гипердействительного $M$. Тогда $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geqslant M$ и $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ (это доказывается обычным образом с помощью подходящих систем, не имеющих решений). Тогда $n$ — бесконечно большое гипернатуральное число, а $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — стандартное положительное число и, следовательно, $x_n$ не бесконечно близко к $a$. Таким образом, нестандартное определение предела также не выполнено.

Доказав равносильность стандартного и нестандартного определений предела, посмотрим, как выглядят нестандартные доказательства стандартных теорем. Начнем с самых простых.

Единственность предела. Докажем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ не может иметь двух разных пределов $a$ и $b$. В самом деле, в этом случае $x_n$ при бесконечно большом гипернатуральном $n$ должно быть бесконечно близко и к $a$, и к $b$, поэтому $a$ и $b$ бесконечно близки. Но так как они стандартны, то $a = b$.

Монотонность предела. Докажем, что если $x_n \leqslant y_n$ при всех $n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $a \leqslant b$. В самом деле, пусть $n$ — бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда $a = \mathrm{st}(x_n)$, $b = \mathrm{st}(y_n)$ (через $\mathrm{st}(p)$ обозначается стандартная часть конечного гипердействительного числа $p$). Так как $x_n \leqslant y_n$ при всех стандартных $n$, то это неравенство справедливо и для всех гипернатуральных $n$. Легко проверить также, что из $p \leqslant q$ следует $\mathrm{st}(p) \leqslant \mathrm{st}(q)$. Поэтому $a = \mathrm{st}(x_n) \leqslant \mathrm{st}(y_n) = b$.

Предел суммы. Докажем, что если $z_n = x_n + y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $z_n \to a + b$. В самом деле, равенство $z_n = x_n + y_n$ справедливо для всех натуральных, а значит, и для всех гипернатуральных $n$. Поэтому $z_n$ при бесконечно большом $n$ равно $x_n + y_n = a +$ (бесконечно малое) $+ b +$ (бесконечно малое). Как мы видели, сумма бесконечно малых бесконечно мала, поэтому $z_n$ бесконечно близко к $a + b$ при бесконечно больших гипернатуральных $n$.

Аналогично можно доказать, что предел произведения равен произведению пределов (при этом будет использован тот факт, что произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало).

Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Пусть $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots$ — монотонно неубывающая ограниченная последовательность. Докажем, что она имеет предел. Все ее бесконечно далекие члены конечны (по определению ограниченности); осталось доказать лишь, что их стандартные части равны. Пусть $m$ и $n$ — два бесконечно больших гипернатуральных числа и пусть $\mathrm{st}(x_m) \neq \mathrm{st}(x_n)$. Пусть для определенности $m<n$. Тогда $\operatorname{st}(x_m)<\operatorname{st}(x_n)$ ($\operatorname{st}(x_m)\neq\operatorname{st}(x_n)$ по предположению, а $\operatorname{st}(x_m)>\operatorname{st}(x_n)$ невозможно, так как в этом случае $x_m>x_n$, что противоречит монотонности). Рассмотрим (стандартное) число $a$, для которого $\operatorname{st}(x_m)<a<\operatorname{st}(x_n)$. Тогда $x_m<a$, $x_n>a$. Все члены $x_k$ со стандартными $k$ удовлетворяют неравенству $x_k<a$ (так как $x_k\leqslant x_m$ в силу монотонности, а $x_m<a$). Поэтому система $x_k>a$ не имеет натуральных решений, но имеет гипернатуральное решение ($k=n$). Полученное противоречие показывает, что предположение $\operatorname{st}(x_m)\neq\operatorname{st}(x_n)$ ложно, что и требовалось.

Рассмотрев несколько применений гипердействительного определения предела, перейдем теперь к понятию предельной точки последовательности. Стандартное его определение таково: $a$ называется предельной точкой последовательности $x_0$, $x_1, \ldots$, если для всякого положительного $\varepsilon$ и всякого $N$ найдется такое натуральное $n\geqslant N$, при котором $|x_n-a|<\varepsilon$. Докажем, что это стандартное определение эквивалентно следующему (уже упоминавшемуся) нестандартному: $a$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если при некотором бесконечно большом гипернатуральном $n$ число $x_n$ бесконечно близко к $a$.

Пусть выполнено стандартное определение. Как обычно, рассмотрим функцию, дающую $n$ по $\varepsilon$, $N$, т. е. такую функцию $f$, что (при $\varepsilon>0$ и произвольном $N$) выполняются свойства $f(\varepsilon, N)\in\mathbb{N}$, $f(\varepsilon, N)>N$ и $|x_{f(\varepsilon, N)}-a|<\varepsilon$. Обычное рассуждение показывает, что при любом положительном гипердействительном $\varepsilon$ и при любом гипердействительном $N$ число $n={}^*f(\varepsilon, N)$ будет гипернатуральным числом, бо́льшим $N$ и таким, что $|x_n-a|<\varepsilon$. Взяв $\varepsilon>0$ бесконечно малым, а $N$ бесконечно большим и положительным, найдем бесконечно большое гипернатуральное число $n$, для которого $|x_n-a|$ бесконечно мало, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть стандартное определение не выполнено. Тогда найдутся такие $\varepsilon>0$ и $N$, что $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$ при всех натуральных $n\geqslant N$ и, следовательно, $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$ при всех гипернатуральных $n$, бо́льших $N$. Так как все бесконечно большие гипернатуральные $n$ таковы, ни одно из $x_n$ при бесконечно больших $n$ не может быть бесконечно близко к $a$ (разница $|x_n-a|$ больше положительного стандартного числа $\varepsilon$).

Итак, мы доказали эквивалентность стандартного и нестандартного определений предельной точки. В качестве немедленной награды получаем доказательство следующей известной теоремы:

*всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.*

В самом деле, рассмотрим произвольный ее член с бесконечно большим номером. Он будет конечным гипердействительным числом (последовательность ограничена), а его стандартная часть будет предельной точкой.

## § 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И КОМПАКТНОСТЬ

Следующая традиционная тема курсов математического анализа — свойства непрерывных функций. Придерживаясь этой традиции, дадим нестандартное определение непрерывности. Оно, как и определение предела, почти дословно воспроизводит «наивное» определение (упоминавшееся в § 1): функция $f$ непрерывна в точке $x$, если ее значение в бесконечно близких к $x$ точках бесконечно близко к значению в точке $x$: $x' \approx x \Rightarrow f(x') \approx f(x)$ (здесь $\approx$ означает бесконечную близость).

Сказанное требует уточнений в нескольких отношениях: должно ли $x$ быть стандартным? что делать, если $f$ — не всюду определенная функция? Дадим точное определение. Пусть $f$ — функция с действительными значениями, определенная на некотором множестве $M$ действительных чисел. (Мы рассматриваем функции одного действительного аргумента, читатель может проверить, что случай нескольких аргументов ничуть не сложнее.) Построим гипердействительный аналог функции $f$ — функцию $^*f$, определенную на множестве $^*M$ и принимающую гипердействительные значения. Мы будем действовать в точности так же, как и для последовательностей (когда $M$ равнялось $\mathbb{N}$). Возьмем произвольное продолжение $F$ функции $f$ на все действительные числа, совпадающее с $f$ на $M$ и какое угодно на $\mathbb{R} \setminus M$. Возьмем теперь гипердействительный аналог $^*F$ функции $F$ и ограничим его на $^*M$, т. е. будем интересоваться его значениями лишь на элементах множества $^*M$. Легко проверить, что полученная функция будет определяться функцией $f$ и не будет зависеть от того, какое продолжение $F$ этой функции мы взяли. В самом деле, если $F_1$ и $F_2$ — два продолжения функции $f$, то система

$$x \in M, \quad F_1(x) \neq F_2(x)$$

не имеет действительных решений. Поэтому она не имеет и гипердействительных решений, т. е. $^*F_1(x) = {}^*F_2(x)$

при $x \in {}^*M$. Таким образом, для каждой функции $f$ с действительными значениями, определенной на некотором множестве $M$ действительных чисел, мы имеем гипердействительный аналог $^*f$ с областью определения $^*M$ и гипердействительными значениями.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Определим, что означает непрерывность $f$ в точке $x \in M$. (Обратите внимание: $x$ — стандартная точка! Мы еще вспомним об этом, обсуждая равномерную непрерывность). Именно: это значит, что для всякого гипердействительного числа $x' \in {}^*M$, для которого $x' \approx x$, справедливо $^*f(x') \approx \approx f(x)$.

Теперь мы должны показать, что это определение эквивалентно стандартному. Напомним стандартное определение. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x' \in M$, для которых $|x' - x| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Пусть функция $f$ непрерывна в смысле стандартного определения. Пусть $x' \in {}^*M$ и $x' \approx x$; покажем, что $^*f(x') \approx f(x)$, т. е. что для любого стандартного $\varepsilon > 0$ справедливо $|{}^*f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Так как $f$ непрерывна в обычном смысле, найдется такое $\delta > 0$, что для всех стандартных $x' \in M$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполнено $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Привычное для нас рассуждение показывает, что и для всех гипердействительных $x'$, для которых $x' \in {}^*M$ и $|x' - x| < \delta$, выполнено неравенство $|{}^*f(x') - f(x)| < \varepsilon$. К числу таких $x'$ относятся, очевидно, все бесконечно близкие к $x$ элементы $^*M$.

Обратно, пусть $f$ не является непрерывной в обычном смысле. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\delta > 0$ найдется $x' \in M$, для которого $|x' - x| < \delta$ и $|f(x') - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Как обычно, рассмотрим $x'$ как функцию от $\delta$, т. е. рассмотрим функцию $X$, для которой при всех $\delta > 0$ выполнены свойства $X(\delta) \in M$, $|X(\delta) - x| < \delta$ и $|f(X(\delta)) - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Теперь $x' = {}^*X(\delta)$, где $\delta$ — положительное бесконечно малое, будет гипердействительным числом, для которого $|x' - x| = |{}^*X(\delta) - x| < \delta$ и поэтому $x' \approx x$, но $|{}^*f(x') - f(x)| = |{}^*f({}^*X(\delta)) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ и поэтому $^*f(x') \not\approx f(x)$.

Посмотрим теперь, какие доказательства получают теперь теоремы о непрерывных функциях, доказываемые в любом стандартном курсе анализа.

Непрерывность суммы непрерывных функций. Пусть $f$, $g$ — функции, определенные на множестве $M$ и непрерывные в точке $x$. Тогда их сумма $h$: $h(u)=f(u)+g(u)$ непрерывна в точке $x$. В самом деле, если $x'\approx x$, $x'\in {}^*M$, то ${}^*h(x')={}^*f(x')+{}^*g(x')\approx\approx f(x)+g(x)=h(x)$. (Мы воспользовались тем, что $a\approx b$ и $c\approx d$ влечет $a+c\approx b+d$. Это легко следует из свойств бесконечно малых, обсуждавшихся в § 3.)

Ограниченность непрерывной функции на отрезке. Пусть $f$ — функция, определенная и непрерывная во всех точках отрезка $I=[a, b]$. Докажем, что она ограничена. Легко показать (ср. нестандартные определения ограниченности множества и последовательности), что ограниченность функции $f$ равносильна тому, что ${}^*f(x)$ конечно для всех $x\in {}^*I$. Легко видеть, что ${}^*I$ состоит из всех гипердействительных чисел $z$, для которых $a\leqslant z\leqslant b$. Все они конечны, и их стандартная часть $\mathrm{st}(z)$ принадлежит $[a, b]$ (если $\mathrm{st}(z)<a$, то $z<a$, а если $\mathrm{st}(z)>b$, то $z>b$). В силу непрерывности в точке $\mathrm{st}(z)$ из $z\approx \mathrm{st}(z)$ вытекает, что ${}^*f(z)\approx f(\mathrm{st}(z))$; так как $f(\mathrm{st}(z))$ стандартно, то ${}^*f(z)$ конечно.

Читатель может проверить себя, ответив на вопрос: почему это рассуждение неприменимо в равной мере к интервалу $(a, b)$ вместо отрезка $[a, b]$? (Для интервалов утверждение, очевидно, неверно: функция $y=1/x$ определена и непрерывна, но не ограничена на интервале $(0, 1)$.) Дело в том, что мы пользовались непрерывностью $f$ в точке $\mathrm{st}(z)$ и, следовательно, нам было нужно, чтобы $\mathrm{st}(z)$ принадлежало области определения функции. А для интервала $(a, b)$ это не так: если $z=a+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — бесконечно малое, то $z$ принадлежит области определения ${}^*f$, в то время как $\mathrm{st}(z)$ не принадлежит области определения функции $f$.

Теорема о промежуточных значениях. Если $f$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $f(a)>0$, $f(b)<0$, то существует такое действительное число $x\in[a, b]$, что $f(x)=0$. Докажем это. Начнем со следующего простого замечания (никак не связанного с гипердействительными числами). Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ равных частей и посмотрим на знаки $f$ в точках разбиения. Если хотя бы в одной из них $f$ равна 0, то доказывать нечего, если же нет, то найдется отрезок разбиения, на концах которого $f$ имеет разные знаки. Обозначим его концы через $x_n$ и $y_n$. Тогда справедливы такие утверждения: $|x_n-y_n|=(b-a)/n$, $x_n$, $y_n\in[a, b]$, $f(x_n)>0$, $f(y_n)<0$. Теперь вспомним о гипердействительных числах и возьмем бесконечно далекие члены последовательностей

$x_n$ и $y_n$. Пусть $N$ — бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда $|x_N - y_N| = (b-a)/N$ и бесконечно мало, поэтому $x_N \approx y_N$ и $\mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N)$. Так как $x_N$, $y_N \in [a, b]$, то и $x = \mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N)$ принадлежит $[a, b]$. В силу непрерывности $f(x)$ бесконечно близко к положительному числу ${}^*f(x_N)$ и отрицательному ${}^*f(y_N)$. Единственное стандартное число, для которого это возможно,— нуль. Значит, $f(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к понятию равномерно непрерывной функции. Согласно стандартному определению функция $f$, определенная на множестве $M \subset R$, называется равномерно непрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $x$, $y \in M$, $|x - y| < \delta$ вытекает $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Нестандартное определение требует, чтобы для любых бесконечно близких гипердействительных $x$, $y \in {}^*M$ значения ${}^*f(x)$ и ${}^*f(y)$ были бесконечно близки. При первом взгляде на это нестандартное определение равномерная непрерывность ничем не отличается от непрерывности в любой точке множества $M$. Есть, однако, важная разница: в определении непрерывности в точке $x$ точка $x$ обязательно стандартна, а в определении равномерной непрерывности обе точки $x$ и $y$ могут быть гипердействительными.

Доказательство эквивалентности стандартного и нестандартного определений равномерной непрерывности проходит аналогично приведенным выше. Если $f$ равномерно непрерывна (в стандартном смысле), а $x$ и $y$ бесконечно близки, то $|{}^*f(x) - {}^*f(y)|$ меньше любого стандартного $\varepsilon$ (выберем $\delta$ по $\varepsilon$, пользуясь определением, и заметим, что $|x - y| < \delta$). Если же $f$ не является равномерно непрерывной в стандартном смысле, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x$ и $y$ с $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим эти $x$ и $y$ как функции от $\delta$ и подставим вместо $\delta$ бесконечно малое число. Тогда $|x - y| < \delta$, $x \approx y$, но $|{}^*f(x) - {}^*f(y)| \geqslant \varepsilon$, ${}^*f(x) \not\approx {}^*f(y)$.

Теперь приведенное в § 1 рассуждение (практически без изменений) можно рассматривать как вполне строгое доказательство теоремы о том, что всякая непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.

В самом деле, пусть $f$ определена и непрерывна на $[a, b]$. Докажем равномерную непрерывность. Пусть $x$, $y$ — произвольные бесконечно близкие гипердействительные числа из ${}^*[a, b]$, т. е. $a \leqslant x$, $y \leqslant b$. Тогда $\mathrm{st}(x)$ и $\mathrm{st}(y)$ равны, обозначим их общее значение через $c$. Ясно, что

$c \in [a, b]$. (Именно здесь важно, что у нас отрезок, а не, скажем, интервал.) Тогда (в силу непрерывности в точке $c$) $*f(x) \approx f(c)$, $*f(y) \approx f(c)$ и, следовательно, $*f(x) \approx$ $\approx *f(y)$. Равномерная непрерывность доказана.

До сих пор мы рассматривали свойства непрерывных функций, определенных на отрезках действительной прямой. Как известно из обычных курсов математического анализа, многие из этих свойств непрерывных на отрезке функций справедливы и для функций, определенных на произвольных компактных множествах. В этом параграфе мы покажем, как соответствующие утверждения могут быть получены методами нестандартного анализа.

Поскольку мы ограничиваемся (пока) подмножествами действительной прямой, нам будет достаточно такого определения компактности:

> множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Напомним, что множество $A$ называется замкнутым, если для всякой точки $x$, не принадлежащей $A$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon$-окрестность точки $x$ (множество всех точек $y$, для которых $|x - y| < \varepsilon$) не пересекается с $A$.

Как обычно, мы должны вначале дать нестандартное определение компактности. Поскольку для ограниченности такое определение у нас уже есть, нам осталось найти его для замкнутости. Вот оно.

> Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если для всякого конечного гипердействительного числа $y$, принадлежащего $*A$, его стандартная часть $\operatorname{st}(y)$ принадлежит $A$.

Применяя это определение, например, к интервалу $I = (a, b)$, видим, что он не является замкнутым, так как число $a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — бесконечно малое) принадлежит $*I$, а стандартная часть этого числа, равная $a$, не принадлежит $I$. Докажем, что наше определение равносильно стандартному. Пусть $A$ замкнуто в смысле стандартного определения, $y$ — конечное гипердействительное число, принадлежащее $*A$, $x$ — его стандартная часть. Пусть $x$ не принадлежит $A$. Тогда найдется такое (стандартное) $\varepsilon > 0$, что никакое действительное $z$, для которого $|z - x| < \varepsilon$, не принадлежит $A$. Система

$$|z - x| < \varepsilon, \quad z \in A$$

(с единственным неизвестным $z$) не имеет действительных решений. Но $y$ является ее гипердействительным решением. Полученное противоречие с Основной гипотезой показывает, что $x \in A$.

Пусть теперь $A$ не является замкнутым (согласно стандартному определению) и точка $x$ та самая, для которой требования определения не выполняются. Это значит, что $x$ не принадлежит $A$ и что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $y$ из $A$, для которого $|y-x| < \varepsilon$. Рассмотрим это $y$ как функцию от $\varepsilon$, т. е. рассмотрим такую функцию $f$, что (при $\varepsilon > 0$) $f(\varepsilon) \in A$, $|f(\varepsilon)-x| < \varepsilon$. Теперь легко проверить, что $y = {}^*f(\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — бесконечно малое положительное число, будет гипердействительным числом, принадлежащим $^*A$, бесконечно близким к $x$ и, следовательно, конечным, стандартная часть которого не принадлежит к $A$.

Итак, мы доказали эквивалентность стандартного и нестандартного определений замкнутости. (Другой способ доказательства состоит в том, чтобы сослаться на нестандартное определение предельной точки и на то, что множество $A$ замкнуто тогда и только тогда, когда $A$ содержит все свои предельные точки.) Таким образом, приходим к такому определению компактности:

> $A$ *компактно*, если любой элемент $^*A$ бесконечно близок к одному из элементов $A$.

Вспоминая доказательство теоремы об ограниченности непрерывных функций на отрезке или о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции, мы видим, что, по существу, в них использована именно компактность отрезка. Продемонстрируем это на примере доказательства теоремы о равномерной непрерывности. Пусть функция $f$ непрерывна на компактном множестве $A$. Докажем ее равномерную непрерывность, предварительно вспомнив соответствующее нестандартное определение. Пусть $x$, $y$ — бесконечно близкие элементы $^*A$. В силу компактности множества $A$ элементы $x$ и $y$ бесконечно близки к некоторым $x_0$, $y_0 \in A$. Тогда $x_0 \approx y_0$ ($x_0 \approx x \approx \approx y \approx y_0$); так как $x_0$ и $y_0$ стандартны, то $x_0 = y_0$. В силу непрерывности $f$ в $x_0$ имеем $^*f(x) \approx f(x_0) = f(y_0) \approx {}^*f(y)$, поэтому $^*f(x) \approx {}^*f(y)$, что и требовалось доказать.

Мы еще вернемся к данному выше нестандартному определению компактности, обсуждая применения нестандартных методов в топологии. А сейчас вспомним о примерах, с которых мы начинали наше знакомство с нестандартным анализом. Первый и второй примеры становятся вполне ясными, если определить производную $f'(a)$ как стандартную часть отношения $dy/dx$, где $dx$ — бесконечно малое, а $dy = {}^*f(a+dx) - f(a)$. (Во втором примере мы среди прочего используем тождество

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = (y-x)/(\sqrt{y}+\sqrt{x}),$$

которое верно и для гипердействительных $x$ и $y$, раз система

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \neq (y-x)/(\sqrt{y}+\sqrt{x})$$

не имеет действительных решений.)

В третьем примере (определение интеграла) стандартная функция $f$ продолжается до ${}^*f$, после чего выражения $f(a+dx)$, $f(a+2dx)$, ..., $f(a+(H-1)dx)$ приобретают смысл. Этого, однако, мало — нужно объяснить, что такое сумма бесконечно большого числа слагаемых (именно, $H$ слагаемых). Это делается с помощью такого приема. Определим (в обычном «стандартном» мире) функцию

$$S(n,\ dx) = [f(a) + f(a+dx) + \ldots + f(a+(n-1)dx)] \cdot dx$$

($n$ — натуральное, $dx$ — действительное число). Соответствующий нестандартный аналог представляет собой функцию ${}^*S$ с гипернатуральным и гипердействительным аргументами. Подставив в нее $H$ и $dx = (b-a)/H$, получим гипердействительное число ${}^*S(H,\ dx)$, стандартную часть которого мы и называем *интегралом* (стандартной) функции $f$ по (стандартному) отрезку $[a,\ b]$.

Четвертый пример нами уже разобран. Наш пятый пример — пример неизмеримого множества — становится также вполне ясным. В нем мы должны рассмотреть функцию $z(n,\ x) = (n$-й знак двоичного разложения числа $x)$. Это функция из множества $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ в $\{0,\ 1\}$. Ее гипердействительный аналог есть функция ${}^*z$ из ${}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{R}$ со значениями также в $\{0,\ 1\}$. Выберем теперь бесконечно большое гипернатуральное число $H$ и рассмотрим те с т а н д а р т н ы е числа $x \in [0,\ 1]$, для которых ${}^*z(H,\ x) = 0$. Это множество (стандартных) действительных чисел и будет неизмеримым по Лебегу. (Это, конечно, нужно еще доказать, но доказательство несложное: оно основывается на том, что, грубо говоря, любой интервал заполняется этим множеством наполовину.)

Шестой пример (принадлежащий Эйлеру) подробно разбирается на с. 64—65 статьи Люксембурга [53]. Там делается попытка разъяснить, как ход рассуждений Эйлера становится корректным (с современной точки зрения) в свете нестандартного анализа.

## § 9. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Обратимся, наконец, к вопросу о существовании гипердействительных чисел. Точнее этот вопрос следует сформулировать так: можно ли построить расширение множества действительных чисел, для которого выполнялась бы Основная гипотеза. Напомним, что Основная гипотеза требует, чтобы:

(1) имелось некоторое множество $^*\mathbb{R}$, для которого $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$;

(2) для каждой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имелась некоторая функция $^*f\colon ({}^*\mathbb{R})^n \to {}^*\mathbb{R}$, являющаяся продолжением исходной;

(3) любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог который имеет (гипердействительные) решения, имела действительные решения (о том, что может стоять в левых и правых частях уравнений и неравенств, см. подробнее выше);

(4) $^*\mathbb{R}$ содержало бесконечно малые элементы, отличные от нуля.

В этом параграфе мы покажем, каким образом этим требованиям можно удовлетворить. Правда, нам придется принять без доказательства некоторое утверждение из теории множеств (существование нетривиального ультрафильтра на множестве натуральных чисел, см. далее).

Вернемся к нашей первой попытке построения системы гипердействительных чисел, когда мы назвали гипердействительными числами последовательности действительных чисел. Эта попытка провалилась в § 4. Чтобы исправить дело, вспомним, как происходит переход от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ (точнее, как он может происходить в одном из вариантов построения системы действительных чисел из рациональных). Рассматриваются всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел, т. е. такие последовательности, что для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины $\varepsilon$, содержащий все члены последовательности, кроме конечного числа. Две такие последовательности $x_n$ и $y_n$ называют *эквивалентными*, если $x_n - y_n$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Это отношение эквивалентности разбивает фундаментальные последовательности на классы, которые и называются действительными числами.

Теперь, набрав достаточную инерцию мышления (как видим, инерция мышления — это не всегда плохо!), обратимся к нашей задаче — построению множества гипердействительных чисел. Оказывается, что мы достигнем цели, если от последовательностей перейдем к классам последовательностей, считая, что две последовательности $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$ задают одно и то же гипердействительное число, если $x_n = y_n$ «для большинства натуральных чисел $n$». Тут, конечно, непонятно, что означают слова «для большинства $n$».

Для наглядности будем представлять себе, что проводится голосование по вопросу «считать ли последовательности $x_n$ и $y_n$ совпадающими». В нем голосующими являются натуральные числа, причем число $n$ голосует «за», если $x_n = y_n$, и «против», если $x_n \neq y_n$. Будем считать последовательности $x_n$ и $y_n$ совпадающими, если большинство натуральных чисел голосуют за это. Нужно объяснить лишь, какова система подсчета голосов, т. е. какие множества натуральных чисел мы считаем «большими» (содержащими «большинство» натуральных чисел), а какие «малыми» (содержащими «меньшинство» натуральных чисел). Перечислим те свойства, которым должна удовлетворять система подсчета голосов, т. е. деление множеств натуральных чисел на большие и малые.

1. Любое множество натуральных чисел является либо большим, либо малым. Ни одно множество не является большим и малым одновременно. (Голосование должно всегда давать ответ.)

2. Множество всех натуральных чисел большое, пустое множество малое. (Предложение, за которое голосуют все, принимается.)

3. Дополнение (до $\mathbb{N}$) любого малого множества является большим, дополнение любого большого множества — малым. (Из двух противоположных законопроектов получает большинство голосов ровно один.)

4. Любое подмножество малого множества является малым, любое надмножество большого множества — большим. (Утратив часть голосов, отвергнутый законопроект не может стать принятым.)

5. Объединение двух малых множеств является малым, пересечение двух больших множеств является большим. (Если каждая из двух групп голосующих не образует большинства, то они и вместе не образуют большинства («невозможность коалиций»); если каждая из групп составляет большинство, то голосующие, входящие одновременно в обе группы, уже составляют большинство.)

Эти требования весьма сильны. Чтобы понять это, рассмотрим случай конечного множества голосующих (получающийся заменой $\mathbb{N}$ на некоторое конечное множество $M$). Можно ли тогда удовлетворить этим требованиям? Один способ почти очевиден. Выберем одного из «голосующих» $m \in M$ и назовем большими все множества, содержащие $m$, а малыми — все множества, не содержащие $m$ («диктатура» $m$). При таком определении легко проверить все свойства 1—5. Оказывается, что этим исчерпываются все возможности удовлетворить требованиям 1—5 для случая конечного множества $M$. В самом деле, пусть имеется разбиение всех множеств на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1—5. Рассмотрим тогда все большие множества и выберем из них множество $M_0$, содержащее наименьшее возможное число элементов (среди больших множеств). Множество $M_0$ непусто. Если оно содержит ровно один элемент $m$, то в силу свойства 4 все множества, содержащие $m$, будут большими, а в силу свойства 3 все множества, не содержащие $m$, будут малыми. Осталось показать, что $M_0$ не может содержать более одного элемента. В самом деле, в этом случае его можно было бы разбить на две непустые непересекающиеся части $M_1$ и $M_2$. Эти части должны быть малыми (так как содержат меньше элементов, чем $M_0$), а их объединение $M_0$ является большим, что противоречит требованию 5.

Оказывается, однако, что при счетном числе голосующих возможны системы голосования, удовлетворяющие требованиям 1—5 и не сводящиеся к упомянутому тривиальному случаю. Другими словами, можно так разбить все подмножества натурального ряда на большие и малые, чтобы выполнялись свойства 1—5 и любое одноэлементное множество было малым. Тогда (в силу свойства 5) и любое конечное множество будет малым, а (в силу свойства 3) всякое множество с конечным дополнением (до $\mathbb{N}$) — большим. Таким образом, к требованиям 1—5 можно без противоречия добавить и такое:

6. Всякое конечное множество является малым, всякое множество с конечным дополнением — большим. (При голосовании мнение конечного числа голосующих несущественно.)

Разбиение всех подмножеств натурального ряда на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1—6, называется *нетривиальным ультрафильтром* на множестве натуральных чисел. Мы не будем обсуждать подробно, как можно доказать существование такого разбиения. Скажем лишь, что это доказательство использует трансфинитную индукцию (и, следовательно, так называемую аксиому выбора).

Покажем теперь, что такое разбиение позволяет построить систему гипердействительных чисел, удовлетворяющую требованиям Основной гипотезы. Итак, пусть фиксировано разбиение, удовлетворяющее требованиям 1—6. Назовем две последовательности $x_0$, $x_1$, ... и $y_0$, $y_1$, ... *эквивалентными*, если множество тех $n$, при которых $x_n = y_n$, является большим. В силу требования 2 всякая последовательность эквивалентна самой себе. Докажем, что построенное отношение транзитивно: если последовательность $x$ эквивалентна последовательности $y$, а последовательность $y$ эквивалентна последовательности $z$, то $x$ эквивалентна $z$. В самом деле, обозначим через $A$, $B$ и $C$ множества тех натуральных $n$, при которых $x_n = y_n$, $y_n = z_n$ и $x_n = z_n$ соответственно. По условию множества $A$ и $B$ большие. Кроме того, из $x_n = y_n$ и $y_n = z_n$ следует $x_n = z_n$, поэтому $A \cap B \subset C$. Согласно требованию 5 множество $A \cap B$ является большим. Теперь требование 4 гарантирует, что $C$ также является большим, что и требовалось.

Мы видим, что введенное отношение рефлексивно, симметрично (это очевидно из определения) и транзитивно и, следовательно, разбивает все последовательности действительных чисел на классы эквивалентности, т. е. такие классы, что любые две последовательности одного класса эквивалентны, а любые две последовательности из разных классов — нет. Эти классы мы и назовем гипердействительными числами. Что еще нам нужно? Нужно, чтобы множество действительных чисел было подмножеством множества гипердействительных. Нужно уметь для каждой функции с действительными аргументами и значениями строить ее гипердействительный аналог. Нужно проверить, что любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, имеет действительные решения. И, наконец, нужно убедиться, что среди гипердействительных чисел (рассматриваемых как упорядоченное поле, см. § 6, примеры 6, 7) существуют бесконечно малые, отличные от нуля.

Чтобы сделать $\mathbb{R}$ подмножеством ${}^*\mathbb{R}$, отождествим каждое действительное число $x$ с последовательностью $x$, $x$, $x$, ..., точнее, с содержащим ее классом. При этом разным действительным числам соответствуют разные классы: $x$, $x$, $x$, ... не эквивалентно $y$, $y$, ... (множество тех $n$, при которых $n$-е члены совпадают, пусто и, следовательно, является малым).

Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функция с действительными аргументами и значениями. Определим ее гипердействительный аналог $^*f\colon {}^*\mathbb{R}\to{}^*\mathbb{R}$. Пусть $x$ — произвольное гипердействительное число, т. е. класс эквивалентных последовательностей действительных чисел. Рассмотрим произвольную последовательность $x_0$, $x_1$, ... из этого класса и применим $f$ ко всем ее членам. Класс, содержащий полученную последовательность $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., мы и будем считать значением $f$ на $x$. Нужно проверить, что это определение корректно, т. е. что полученный класс не зависит от выбора последовательности $x_0$, $x_1$, ... в классе $x$. В самом деле, пусть $x_0$, $x_1$, ... и $y_0$, $y_1$, ...— произвольные последовательности, лежащие в одном классе. Это означает, что $x_n=y_n$ «для большинства $n$», т. е. что множество $M$ тех $n$, при которых $x_n=y_n$, большое. Надо доказать, что $f(x_0)$, $f(x_1)$, ... и $f(y_0)$, $f(y_1)$, ... лежат в одном классе, т. е. что множество тех $n$, при которых $f(x_n)=f(y_n)$, большое. Но это очевидно, так как оно содержит $M$ (из $x_n=y_n$ следует $f(x_n)=f(y_n)$), а всякое надмножество большого множества большое (свойство 4).

Аналогично определяются и гипердействительные аналоги для функций нескольких аргументов. Пусть, например, $f$ — функция двух действительных аргументов с действительными значениями: $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Определим ее гипердействительный аналог $^*f$. Чтобы применить $^*f$ к двум гипердействительным числам $x$ и $y$, возьмем последовательности $x_0$, $x_1$, ... и $y_0$, $y_1$, ..., им принадлежащие, и в качестве $^*f(x, y)$ рассмотрим класс последовательности $f(x_0, y_0)$, $f(x_1, y_1)$, ... Докажем корректность этого определения. Если $x_0'$, $x_1'$, ... и $y_0'$, $y_1'$, ...—другие элементы классов $x$ и $y$, то $x_n'=x_n$ для большинства $n$ и $y_n'=y_n$ для большинства $n$, т. е. множества $P=\{n \mid x_n'=x_n\}$ и $Q=\{n \mid y_n'=y_n\}$ большие. В силу свойства 5 множество $P\cap Q$ также является большим, т. е. для большинства $n$ справедливо $x_n'=x_n$ и $y_n'=y_n$ одновременно. Поскольку для этих $n$ выполнено и равенство $f(x_n', y_n')=f(x_n, y_n)$, корректность доказана. Точно так же обстоит дело и для функций большего числа аргументов.

Нужно проверить, что построенные гипердействительные аналоги будут продолжениями исходных функций с действительными аргументами и значениями. Это очевидно следует из определений. Проверим теперь, что всякая система уравнений и неравенств, имеющая гипердействительные решения, имеет и действительные решения (как всегда, следовало бы говорить о системе, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, но мы не будем столь педантичны). Пусть, например, система

$$f(g(x, y), z) = z, \quad h(x) \neq h(y)$$

имеет гипердействительные решения $x$, $y$, $z$. Рассмотрим последовательности $x_0, x_1, \ldots; y_0, y_1, \ldots; z_0, z_1, \ldots$, принадлежащие соответствующим классам эквивалентности. Тогда $g(x_0, y_0), g(x_1, y_1), \ldots$ принадлежит классу $g(x, y)$, а $f(g(x_0, y_0), z_0), f(g(x_1, y_1), z_1), \ldots$ — классу $f(g(x, y), z)$. Поскольку $x$, $y$, $z$ по предположению являются решениями системы, то $f(g(x_n, y_n), z_n) = z_n$ для большинства $n$. Поскольку $h(x) \neq h(y)$, последовательности $h(x_0)$, $h(x_1), \ldots$, и $h(y_0), h(y_1), \ldots$ не эквивалентны и множество тех $n$, при котором $h(x_n) = h(y_n)$, малое. Тогда множество тех $n$, при котором $h(x_n) \neq h(y_n)$, является большим. Так как пересечение двух больших множеств является большим, то множество тех $n$, при котором

$$f(g(x_n, y_n), z_n) = z_n, \quad h(x_n) \neq h(y_n),$$

является большим. Значит, оно непусто! Таким образом, система имеет и действительные решения.

Аналогичным образом обстоит дело и с произвольной системой уравнений и неравенств: если $x, y, z, \ldots$ — ее решение, $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \ldots$ — соответствующие последовательности, то множество тех $n$, при которых действительные числа $x_n, y_n, z_n, \ldots$ являются решениями системы, является большим и, следовательно, непусто.

Осталось проверить, что среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые, отличные от нуля. Положительным бесконечно малым гипердействительным числом будет, например, класс последовательности 1, 1/2, 1/3, ... (или любой другой последовательности положительных действительных чисел, сходящейся к 0). Нам нужно проверить, что это гипердействительное число (обозначим его через $\varepsilon$) положительно, но меньше любого стандартного положительного числа. Чтобы доказать это, мы должны вспомнить, как определяется порядок на множестве гипердействительных чисел. Он определяется в соответствии с общей схемой построения гипердействительного аналога для любого отношения на множестве действительных чисел. Нужно взять функцию $f$ двух действительных аргументов, для которой свойства $f(x, y)=0$ и $x<y$ равносильны, и рассмотреть ее гипердействительный аналог $^*f$. Гипердействительное число $x$ называется меньшим гипердействительного числа $y$, если $^*f(x, y)=0$. Посмотрим, что дает нам эта конструкция для построенной описанным способом системы гипердействительных чисел. Если $x$ — класс последовательности $x_0, x_1, \ldots$, а $y$ — класс последовательности $y_0, y_1, \ldots$, то $^*f(x, y)$ есть класс последовательности $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots$ Равенство этого класса нулю (т. е. классу последовательности $0, 0, 0, \ldots$) означает, что $f(x_n, y_n)=0$ для большинства $n$, т. е. что $x_n<y_n$ для большинства $n$. Таким образом, чтобы выяснить, верно ли $x<y$ для гипердействительных чисел $x$ и $y$, нужно взять последовательности $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$ в классах $x$ и $y$ и выяснить, является ли множество тех $n$, при которых $x_n<y_n$, большим.

Нам нужно было проверить, что $0<\varepsilon$ и что $\varepsilon<p$ для любого стандартного положительного $p$ (напомним, что $\varepsilon$ — класс последовательности $1, 1/2, 1/3, \ldots$). Это просто: $0<\varepsilon$, так как $0<1/n$ при всех $n$ (а множество $\mathbb{N}$ большое), $\varepsilon<p$, так как $1/n<p$ для всех натуральных $n$, кроме конечного числа, а всякое множество с конечным дополнением малое (свойство 6 «системы подсчета голосов»). Отметим, что здесь мы впервые воспользовались свойством 6, до сих пор все наши рассуждения были справедливы и в случае «диктатуры» (когда большими считаются те и только те множества, которые содержат некоторое натуральное число $N$). В этом случае две последовательности эквивалентны, если совпадают их $N$-е члены, и все гипердействительные числа стандартны (класс последовательности $x_0, x_1, \ldots$ совпадает со стандартным числом $x_N$).

## § 10. НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Мы упоминали, что существуют два способа изложения нестандартного анализа — «кустарный» и «научный» (использующий математическую логику). До сих пор наше изложение следовало первому. Сейчас же мы постараемся объяснить, чем может быть полезна математическая логика для облегчения пользования гипердействительными числами и для их построения.

Наша Основная гипотеза гласила, что утверждения о разрешимости систем уравнений и неравенств одновременно истинны или ложны в $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$. На самом деле можно указать гораздо более широкий класс утверждений, которые одновременно истинны или ложны в $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$. Но прежде чем указать этот класс, нам придется обсудить некоторые фундаментальные логические понятия.

Ранее мы говорили о системах уравнений и неравенств, составленных из функций действительных аргументов, а также их аналогах, составленных из функций гипердействительных аргументов. Так, например, можно было рассмотреть систему

$$\sin(x) = y, \quad \sin(\cos(y)) \neq x$$

и ее гипердействительный аналог

$$^*\sin(x) = y, \quad ^*\sin(^*\cos(y)) \neq x.$$

Более естественно, однако, считать, что в систему входят не сами функции, а их *имена*, т. е. обозначающие их символы. После того как этим именам придан смысл, т. е. с каждым из них сопоставлена какая-то функция, можно говорить о решениях системы (при данной интерпретации входящих в нее имен). При этом, вместо того чтобы вводить разные имена для функции и ее гипердействительного аналога, мы будем считать, что имеется одно имя, которое двусмысленно — имеет действительный смысл и гипердействительный смысл.

Опишем все это более формально. Рассмотрим всевозможные функции действительных аргументов с действительными значениями (с произвольным числом аргументов; функции нуля аргументов отождествим с действительными числами) и введем для них имена. Для этого выберем какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между множеством всех таких функций и некоторым множеством $I$, элементы которого мы будем называть именами. Элемент множества $I$, сопоставленный с данной функцией, будем называть ее *именем*. Если функция имеет $n$ аргументов, будем называть соответствующий ей символ *$n$-местным*, или символом *валентности $n$*. Таким образом, нульместные символы суть имена действительных чисел. Имена (элементы $I$) будут использоваться при образовании термов.

Фиксируем счетный список символов, отличных от элементов $I$, элементы которого назовем *переменными*.

Теперь термы можно определить как выражения, составленные по следующим правилам:

(1) всякая переменная есть терм;

(2) всякий нульместный функциональный символ есть терм;

(3) если $u$ — $n$-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $u(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Например, $f(x, h(y))$ и $g(g(x, z), t)$ будут термами, если $x$, $y$, $z$ — переменные, $h$ — одноместный функциональный символ, $t$ — нульместный, а $f$ и $g$ — двуместные. Как видим, определение термов никак не апеллирует к смыслу входящих в них символов — важно лишь, какую валентность имеют входящие в них символы. Поэтому наряду с исходным смыслом термов (возникающим, когда с именем $f$ сопоставляется та самая функция, именем которой оно являлось) можно придать им другой, гипердействительный смысл, сопоставив с $f$ гипердействительный аналог этой функции. Окажется, что при той и другой

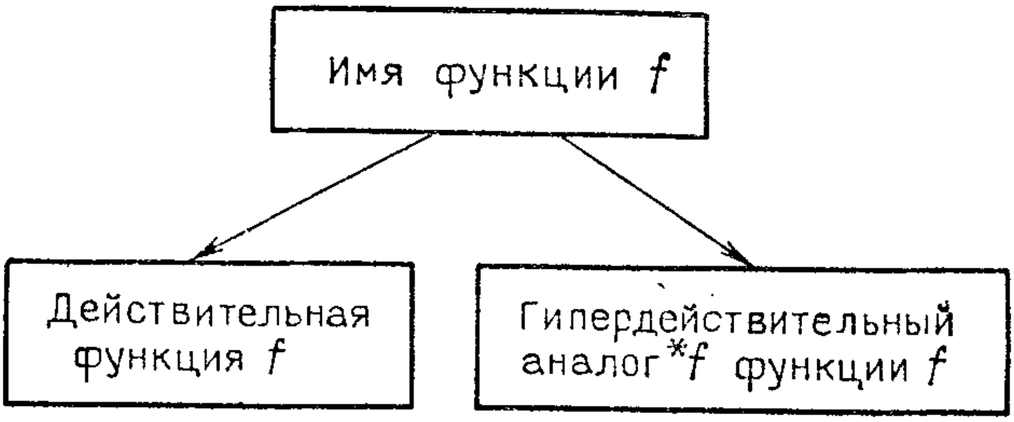


Рис. 14

интерпретации истинными будут одни и те же формулы. Но прежде мы должны определить понятие формулы.

Перечислим правила построения формул. Если $t_1$ и $t_2$ — термы, то запись $(t_1 = t_2)$ является формулой. Если $\varphi$ и $\psi$ — формулы, то записи $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $\urcorner\varphi$ — формулы, которые читаются (соответственно) «$\varphi$ и $\psi$», «$\varphi$ или $\psi$», «если $\varphi$, то $\psi$», «неверно, что $\varphi$». Если $\varphi$ — формула, а $\xi$ — переменная, то записи $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ — формулы, которые читаются «для всех $\xi$ верно $\varphi$» и «существует $\xi$, для которого верно $\varphi$». Формулами называются только те записи, которые можно получить на основании приведенных правил.

Итак, понятие формулы определено. Теперь надо объяснить, какой смысл придается формулам. Предварительно введем понятие параметров формулы. Грубо говоря, параметры формулы — это те переменные, от значений которых зависит истинность формулы. Точное определение параметров таково. Параметрами формулы $(t_1 = t_2)$ являются все переменные, входящие в $t_1$ или в $t_2$. Параметры формулы $\neg\varphi$ те же, что и у формулы $\varphi$. Параметрами формул $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ являются все переменные, являющиеся параметрами $\varphi$ или $\psi$. Параметрами формул $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ являются параметры формулы $\varphi$, отличные от $\xi$. Например, параметрами формулы

$$\exists x \forall y \, ((f(x, h(y)) = g(z, z)) \wedge \neg (z = t))$$

являются переменные $z$ и $t$, а формула

$$\exists x \, (f(x, x) = x)$$

не имеет параметров.

Нас будет интересовать вопрос об истинности и ложности формул. Чтобы он имел смысл, нужно сделать две вещи. Во-первых, нужно фиксировать *интерпретацию* нашего языка, т. е. объяснить, каково множество $M$ возможных значений переменных (носитель интерпретации) и какие функции на этом множестве сопоставляются с функциональными символами. Во-вторых, если нас интересует истинность формулы $\varphi$, имеющей параметры, то нужно указать значения этих параметров, сопоставив с ними какие-то элементы множества $M$.

Итак, пусть фиксирована некоторая интерпретация и каждому параметру формулы $\varphi$ приписано некоторое значение, являющееся элементом $M$. Тогда формула становится либо истинной, либо ложной. Мы не будем точно описывать правила, по которым это происходит, надеясь, что смысл знаков $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$ и $\exists$ ясен из их названий. Приведем несколько примеров. Формула

$$\exists x \forall y \, (h(y) = x)$$

не имеет параметров и будет истинной в том случае, если функция, обозначаемая символом $h$, является постоянной на $M$. (Отметим, что при перестановке кванторов $\exists x$ и $\forall y$ эта формула превращается в тождественно истинную.) Формула

$$\exists x \, (h(x) = y)$$

имеет один параметр $y$ и будет истинной при данном его значении тогда и только тогда, когда это значение входит в область значений функции $h$. Формула

$$\exists x \exists y ((h(x) = k(y)) \wedge \neg (f(x, y) = y))$$

не имеет параметров и будет истинной в том случае, если система

$$h(x) = k(y), \quad f(x, y) \neq y$$

имеет решения, т. е. существуют такие $x_0$, $y_0 \in M$, что значение сопоставленной с символом $h$ функции на $x_0$ равно значению сопоставленной с символом $k$ функции на $y_0$, а значение сопоставленной с символом $f$ функции на паре $(x_0, y_0)$ не равно $y_0$.

Наши правила построения формул допускают, в частности, и формулы вида $\forall \xi A$, где $\xi$ не является параметром $A$. Например, можно построить формулу

$$\forall x (f(y) = g(y)),$$

в которой $x$ не входит в выражение под квантором, или формулу

$$\forall x \exists x (f(x) = y),$$

где $x$ хотя и входит в $A$, но не является ее параметром. Будем считать, что формулы $\exists \xi A$ и $\forall \xi A$, у которых $\xi$ не является параметром $A$, имеют тот же смысл, что и исходная формула $A$.

Итак, мы имеем две интерпретации нашего языка — исходную, действительную (с носителем $\mathbb{R}$), и новую, гипердействительную (с носителем ${}^*\mathbb{R}$). Обобщением требования одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств является следующий принцип, называемый *принципом переноса* или *принципом Лейбница*.

*Пусть $\varphi$ — формула без параметров. Тогда она одновременно истинна или ложна в $\mathbb{R}$ и ${}^*\mathbb{R}$.*

Легко понять, что этот принцип действительно является обобщением нашего старого требования. В самом деле, для каждой системы уравнений и неравенств легко написать формулу, утверждающую (при действительной или гипердействительной интерпретации), что система (или ее гипердействительный аналог) имеет решения. Эта формула имеет вид $\exists x_1, \ldots \exists x_n \varphi$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, входящие в систему, а $\varphi$ имеет вид $(\ldots((\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \wedge \psi_3) \wedge \ldots)$, где каждая формула $\psi_i$ имеет вид $(t = s)$ или $\neg (t = s)$ и соответствует одному из уравнений и неравенств системы.

Можно доказать, что для нашего языка (включающего символы для всех функций) принцип переноса и требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств равносильны. Тем не менее принцип переноса зачастую удобнее применять. Продемонстрируем это на нескольких примерах.

Мы доказывали, что если множества нулей функций с именами $f$ и $g$ совпадают, то и множества нулей функций $^*f$ и $^*g$ совпадают. Теперь для этого достаточно записать утверждение о совпадении множеств нулей в виде формулы:

$$\forall x\,(((f(x)=0)\Rightarrow(g(x)=0))\wedge((g(x)=0)\Rightarrow(f(x)=0))).$$

Еще пример. Мы доказывали эквивалентность стандартного и нестандартного определений непрерывности в точке $x$ функции $f$, определенной на множестве $M$. Теперь это можно сделать так. Пусть $f$ непрерывна согласно стандартному определению, $x' \in M$ и бесконечно близко к $x$. Докажем, что $|^*f(x')-f(x)|$ меньше любого стандартного $\varepsilon>0$. Выберем (стандартное) $\delta>0$, для которого формула

$$\forall y\,(((y\in M)\wedge(|y-x|<\delta))\Rightarrow(|f(y)-f(x)|<\varepsilon))$$

истинна на множестве действительных чисел. Тогда она истинна и в $^*\mathbb{R}$, и, подставляя $x'$ вместо $y$, получаем требуемое. (Отметим две детали. Во-первых, обратите внимание, что эта формула не имеет параметров: $x$, $\varepsilon$ и $\delta$ — не переменные, а символы, изображающие соответствующие действительные числа. Во-вторых, при написании формулы мы употребили ряд сокращений. Вместо $y\in M$ следовало написать $m(y)=0$, где $m$ — функция, множеством нулей которой служит $M$, записи типа $|a-b|<c$ следует расшифровать как $\mathrm{ord}(d(a,\ b),\ c)=0$, где ord — обозначение для функции двух переменных, для которой $\mathrm{ord}(x,\ y)=0\Leftrightarrow x<y$, а $d$ — обозначение для функции, для которой $d(x,\ y)=|x-y|$, и т. п.)

Обратно, пусть $f$ не является непрерывной. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что формула

$$\forall\delta\,((\delta>0)\Rightarrow\exists y\,((|y-x|<\delta)\wedge(|f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon)))$$

будет истинной в $\mathbb{R}$. Тогда она будет истинной и в $^*\mathbb{R}$ (принцип переноса), и, взяв бесконечно малое положительное $\delta$, мы найдем соответствующее ему гипердействительное $y$. Это $y$ будет бесконечно близко к $x$, а $|^*f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ и, следовательно, $^*f(y)\not\approx f(x)$.

Из этого примера видно, что использование принципа переноса позволяет сделать многие рассуждения короче (в основном потому, что отпадает необходимость переходить от истинности утверждения типа $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ к функции, дающей по $x$ такое $y$, что $\varphi(x, y)$).

Прежде чем идти дальше, ответим на вопрос, который, возможно, уже возник у читателя. Принцип переноса утверждает, что гипердействительные числа обладают теми же самыми свойствами, что и стандартные действительные числа. Но стандартные числа удовлетворяют аксиоме Архимеда, а гипердействительные не удовлетворяют. Не противоречит ли это принципу переноса?

Вот что пишет по этому поводу Мартин Девис на с. 26 «Прикладного нестандартного анализа» [3]: «Лейбниц постулировал существование системы чисел, имеющей те же свойства, что и обычные числа, но содержащей отличные от нуля бесконечно малые... Однако позиция Лейбница кажется очевидно абсурдной. Обычные действительные числа, конечно же, имеют по крайней мере одно свойство, которым не обладает желаемое Лейбницем расширение. А именно: среди действительных чисел нет бесконечно малых.

Парадокс устраняется точным выбором формального языка в терминах современной логики (столь же жестко определенного, как и языки программирования для ЭВМ). Таким образом, принцип Лейбница уточняется: существует расширение действительных чисел, содержащее бесконечно малые элементы и имеющее те же свойства, что и действительные числа, поскольку эти свойства могут быть выражены в формальном языке. Отсюда заключаем, что свойство быть бесконечно малым не может быть выражено указанным способом».

В самом деле, попробуем записать аксиому Архимеда на нашем языке. Хочется написать что-то вроде

$$\forall \varepsilon ((\varepsilon > 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\varepsilon > 1) \vee (\varepsilon + \varepsilon > 1) \vee (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon > 1) \vee \ldots)),$$

но, разумеется, каждая формула обязана иметь конечную длину (и не содержать многоточий!). Можно попытаться записать аксиому Архимеда в форме «для всякого числа существует большее его натуральное»:

$$\forall x \exists y ((y \in \mathbb{N}) \wedge (x < y))$$

(как всегда, $y \in \mathbb{N}$ и $x < y$ — сокращения; например,

$y \in \mathbb{N}$ надо понимать как $n(y)=0$, где $n$ — функциональный символ, которому соответствует функция, принимающая значение 0 в натуральных числах, и только в них). Эта формула является формальным аналогом аксиомы Архимеда и, разумеется, истинна в $\mathbb{R}$. Следовательно, она истинна и в $^*\mathbb{R}$ (принцип переноса). Это не противоречит тому, что поле $^*\mathbb{R}$ не является архимедовым, поскольку при интерпретации в $\mathbb{R}$ эта формула означает лишь, что для всякого гипердействительного числа существует большее его гипернатуральное число. Поэтому — как и следовало ожидать — никакого противоречия здесь нет.

Мы увидели, что дает математическая логика при использовании гипердействительных чисел. Сейчас мы рассмотрим вопрос о построении системы гипердействительных чисел с помощью методов математической логики. Оказывается, что существование системы гипердействительных чисел, удовлетворяющей нашим требованиям, является простым следствием одной из основных теорем математической логики — теоремы компактности Мальцева.

Прежде чем формулировать эту теорему, введем некоторые основные для математической логики понятия (языка, терма, формулы, интерпретации языка) в чуть более общей ситуации, чем имевшаяся у нас ранее. Эта общность будет полезна нам и впоследствии, при обсуждении нестандартной топологии.

Пусть фиксирован набор символов $\{P, Q, \ldots\}$, элементы которого мы будем называть *предикатными символами*, и набор $\{f, g, \ldots\}$, элементы которого будем называть *функциональными символами*. Пусть каждому предикатному и каждому функциональному символу поставлено в соответствие некоторое натуральное число, называемое *числом аргументов*, или *валентностью*, соответствующего символа. В таком случае говорят, что задан некоторый язык (точнее, односортный язык первого порядка). До сих пор мы рассматривали язык, в котором для каждой функции с действительными аргументами и значениями мы имели функциональный символ с соответствующим числом аргументов; предикатных символов у нас не было.

Определим теперь понятие формулы данного языка. Прежде чем давать формальное определение, приведем несколько примеров формул. Пусть язык содержит предикатные символы $P$, $Q$, $R$ с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно и функциональные символы $f$, $g$, $h$ также с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно. Тогда формулами этого языка будут, например, такие знакосочетания:

$$\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x, x)),$$
$$(\exists y R(x, y) \Rightarrow (Q(z) \land Q(w))),$$
$$\forall x (f = g(x)),$$
$$\exists x (h(x, y) = h(h(x, x), g(y))),$$
$$(\exists x R(x, x) \land P).$$

(Вторая из этих формул, например, читается так: «если существует такое $y$, что имеет место $R$ от $x$, $y$, то имеют место $Q$ от $z$ и $Q$ от $w$».)

Если этих примеров окажется достаточно, чтобы создать ясное представление о понятии формулы, то последующее точное определение этого понятия можно смело пропустить. Тем не менее дадим его. Выберем и зафиксируем бесконечную последовательность символов, называемых *переменными*. Пусть это будут, например, символы $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $w$, $x_1$, ... Определение терма дается, по существу, так же, как и раньше. Именно:

(T1) любая переменная и любой функциональный символ с нулем аргументов суть термы;

(T2) если термы $t_1, \ldots, t_m$ уже построены, а $s$ — функциональный символ с $m$ аргументами, то выражение $s(t_1, \ldots, t_m)$ есть терм.

Термами называют те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (T1) и (T2). Например, при принятых выше соглашениях о валентностях символов $f$, $g$, $h$ выражения

$$x,\ f,\ g(x),\ h(x, y),\ h(h(x, x), g(y))$$

являются термами. Определим теперь понятие формулы следующим образом:

(Ф1) если $t$ и $s$ — термы, то $(t = s)$ — формула;

(Ф2) если $t_1, \ldots, t_m$ — термы, а $P$ — предикатный символ с $m$ аргументами, то $P(t_1, \ldots, t_m)$ — формула; если $P$ — предикатный символ с нулем аргументов, то $P$ — формула;

(Ф3) если $P$ и $Q$ — формулы, то $\neg P$, $(P \land Q)$, $(P \lor Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ (читается: «не $P$», «$P$ и $Q$», «$P$ или $Q$», «если $P$, то $Q$») — формулы;

(Ф4) если $P$ — формула, а $\xi$ — переменная, то $\forall \xi P$ и $\exists \xi P$ (читается: «для всех $\xi$ верно $P$» и «существует такое $\xi$, что $P$») — формулы.

Формулами называются те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (Ф1) — (Ф4). Читатель легко убедится, что приведенные определения термов и формул представляют собой обобщения имевшихся у нас ранее определений на случай произвольного языка.

Итак, понятие формулы определено. Теперь мы хотим обсудить, какой смысл придается формулам. Для этого нужно прежде всего придать смысл входящим в них предикатным и функциональным символам. Именно: каждому предикатному символу с числом аргументов $m$ нужно поставить в соответствие $m$-местный предикат, принимающий значения «истина» и «ложь», а каждому функциональному символу с числом аргументов $m$ — некоторую $m$-местную функцию. (Все эти предикаты и функции должны, конечно, быть заданы на одном и том же множестве, а значения функций должны принадлежать тому же множеству.) Если это сделано, то говорят, что задана *интерпретация* языка. Точнее, пусть имеется некоторый язык $L$ с предикатными символами $\{P, Q, \ldots\}$ и функциональными символами $\{f, g, \ldots\}$. Определить интерпретацию языка $L$ означает:

1) выбрать некоторое множество $M$ — носитель интерпретации;

2) с каждым предикатным символом $P$ валентности $m$ сопоставить некоторый $m$-местный предикат, т. е. некоторую функцию $\mathbf{P}$, аргументами которой являются кортежи (т. е. конечные последовательности) из $m$ элементов множества $M$, а значениями — символы **И** (истина) и **Л** (ложь):

3) с каждым функциональным символом $f$ валентности $k$ сопоставить некоторую функцию $\mathbf{f}$, ставящую в соответствие любой $k$-элементной последовательности элементов $M$ некоторый элемент $M$. (В этом определении числа $m$ и $k$ могут быть равны нулю; функциональным символам с нулем аргументов при интерпретации должны соответствовать элементы $M$, а предикатным — символы **И** и **Л**.)

Чтобы окончательно определить смысл формул, надо объяснить смысл других входящих в них знаков. Как правило, смысл их ясен из их названий. Мы ограничимся тем, что приведем несколько примеров.

Если $a$ — константа (нульместный функциональный символ), а $Q$ — одноместный предикатный символ, то формула $Q(a)$ будет истинной в том и только том случае, когда элемент **a** множества $M$, сопоставленный с символом $a$, обладает свойством **Q**, сопоставленным с символом $Q$, т. е. когда $\mathbf{Q}(\mathbf{a}) = \mathbf{И}$.

Если $x$ — переменная, то вопрос об истинности формулы $Q(x)$ приобретает смысл лишь после фиксации значения переменной $x$. Точнее, пусть в данной интерпретации с носителем $M$ символу $Q$ соответствует функция **Q** с областью определения $M$ и значениями **И** и **Л**; тогда истинность формулы $Q(x)$ (в этой интерпретации) будет зависеть от того, какой элемент $x_0 \in M$ взят в качестве значения переменной $x$. Именно: $Q(x)$ будет истинной при $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Q}(x_0) = \mathbf{И}$.

Аналогично истинность формулы $h(x, x) = h(h(x, x), g(y))$ зависит не только от выбранной интерпретации, но и от значений переменных $x$ и $y$. Эта формула будет истинна при $x = x_0$ и $y = y_0$, если элементы $x_0 \in M$ и $y_0 \in M$ таковы, что $\mathbf{h}(x_0, x_0) = \mathbf{h}(\mathbf{h}(x_0, x_0), \mathbf{g}(y_0))$.

Рассмотрим теперь формулу $\exists x Q(x)$. Ее истинность уже не зависит от значения $x$, а полностью определяется выбором интерпретации. Именно: эта формула истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда функция **Q** принимает значение **И** хотя бы на одном элементе $M$.

Истинность формулы

$$\exists x (h(x, y) = h(h(x, x), g(y)))$$

также не зависит от значения переменной $x$. Ее истинность полностью определяется выбором интерпретации и значения переменной $y$.

Формальное определение истинности проводится по уже упоминавшейся схеме. Мы вводим понятие «параметра формулы» (переменной, от значения которой может зависеть истинность формулы) и определяем истинность формулы при данных значениях ее параметров. Формулы, не содержащие параметров, называются *закрытыми формулами*, или *суждениями*. Как только мы фиксировали какую-то интерпретацию языка, все закрытые формулы превращаются в истинные или ложные высказывания.

С помощью введенной терминологии можно описать ситуацию следующим образом. Мы рассматриваем язык, содержащий функциональные символы для каждой функции с действительными аргументами и значениями. Обозначим этот язык RL. Язык RL имеет две интерпретации — действительную и гипердействительную. В действительной интерпретации каждому функциональному символу поставлена в соответствие функция с действительными аргументами и значениями, в гипердействительной интерпретации — ее гипердействительный аналог.

Принцип переноса теперь можно сформулировать так: в действительной и гипердействительных интерпретациях истинны одни и те же закрытые формулы языка RL. В логике есть специальное наименование для такой ситуации: две интерпретации некоторого языка, в которых истинны одни и те же закрытые формулы, называются *элементарно эквивалентными*.

Используя эту терминологию, задачу построения системы гипердействительных чисел можно сформулировать так: нужно построить интерпретацию языка RL, элементарно эквивалентную стандартной действительной интерпретации, но содержащую бесконечно малые, отличные от нуля.

Убедимся, что нам нужно именно это. В самом деле, пусть имеется такая интерпретация и $M$ — ее носитель. В нашем языке имеются символы, изображающие все действительные функции действительных аргументов. В частности, для каждого действительного числа (нульместной функции) имеется константа, его изображающая. Этой константе при интерпретации соответствует некоторый элемент множества $M$. Если $c$ и $d$ — константы для разных действительных чисел, то им соответствуют разные элементы $M$, иначе формула $(c=d)$ была бы ложной в стандартной интерпретации и истинной в нашей. Отождествляя каждое действительное число с соответствующим элементом $M$, можно считать, что $\mathbb{R}$ является подмножеством $M$. Нужно проверить также, что функции на $M$, сопоставленные с каждым функциональным символом языка RL, становятся при этом продолжениями соответствующих функций на $\mathbb{R}$. Пусть $f$ — функциональный символ с $n$ аргументами, а $c_1, \ldots, c_n$ — константы, обозначающие $n$ действительных чисел. Тогда формула $f(c_1, \ldots, c_n)=d$ будет истинной в стандартной интерпретации, если $d$ — константа, обозначающая значение $f$ на числах $c_1, \ldots, c_n$ (точнее, значение функции, обозначенной символом $f$, на числах, обозначенных символами $c_1, \ldots, c_n$). В соответствии с принципом переноса эта формула будет истинна в интерпретации с носителем $M$. Поэтому значение функции с аргументами и значениями в $M$, соответствующей символу $f$, на элементах $M$, обозначенных символами $c_1, \ldots, c_n$, равно элементу, обозначаемому символом $d$. Это и означает, что функции на $M$ являются продолжениями соответствующих функций на $\mathbb{R}$.

Посмотрим теперь, что может дать математическая логика для построения интерпретации языка RL, элементарно эквивалентной стандартной. Прежде чем ответить на этот вопрос, введем предварительно несколько понятий. Пусть фиксирован некоторый язык $L$. Пусть $T$ — некоторое множество закрытых формул этого языка. Будем говорить, что интерпретация $\mathscr{P}$ языка $L$ является *моделью* $T$, если все формулы из $T$ истинны в $\mathscr{P}$. Возьмем в качестве $L$ рассмотренный выше язык RL (с символами для всех функций на $\mathbb{R}$), в качестве $T$ — множество Tr всех закрытых формул этого языка, истинных в стандартной его интерпретации. Тогда, в соответствии с нашим определением, стандартная интерпретация, так же как и любая система гипердействительных чисел, будет моделью для Tr.

Покажем, что в любой модели для Tr все закрытые формулы языка RL, не входящие в Tr, будут ложны. В самом деле, если $\varphi$ — закрытая формула, не входящая в Tr, то $\varphi$ ложна в стандартной интерпретации. Тогда формула $\neg\varphi$, отрицание формулы $\varphi$, истинна в ней и, следовательно, входит в Tr. Значит, $\neg\varphi$ истинна в любой модели множества Tr, а $\varphi$ ложна в любой модели множества Tr. Таким образом, в любой модели множества Tr истинны те и только те формулы, которые истинны в стандартной модели. Доказанное можно сформулировать так: если $T$ — множество закрытых формул, истинных в некоторой интерпретации $\mathscr{P}$ языка RL, то свойства $\mathrm{Tr} \subset T$ и $\mathrm{Tr} = T$ равносильны. Теперь задачу отыскания системы гипердействительных чисел можно сформулировать так: найти модель множества Tr, которая, рассматриваемая как упорядоченное поле, не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

Прежде чем заняться этой задачей вплотную, введем еще один термин, относящийся к произвольному языку $L$ и произвольному множеству $T$ закрытых формул языка $L$. Назовем множество $T$ *совместным*, если существует его модель, т. е. если существует интерпретация языка $L$, в которой истинны все формулы из $T$. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать теорему компактности Мальцева, уже упоминавшуюся выше.

Теорема компактности. *Пусть имеется произвольный язык $L$ и произвольное множество $T$ закрытых* *формул этого языка. Пусть каждое конечное подмножество $T_1$ множества $T$ совместно. Тогда и все множество $T$ совместно.*

Эта теорема показывает, что для построения модели множества $T$ достаточно уметь строить модели всех конечных подмножеств множества $T$. (Обратное очевидно, так как модель множества является и моделью всех его конечных подмножеств.) Доказательство этой теоремы мы обсудим позже, а пока продемонстрируем, как с ее помощью может быть получена система гипердействительных чисел.

Прежде всего, добавим к нашему языку RL (содержащему функциональные символы для всех функций на множестве $\mathbb{R}$) еще один нульместный функциональный символ $c$ (отличный от всех других символов). Получается новый, расширенный язык $\mathrm{RL}_c$. Чтобы задать интерпретацию нашего языка $\mathrm{RL}_c$, нужно взять произвольную интерпретацию языка RL, выбрать в ее носителе какой-то элемент и объявить его значением добавленного символа $c$. Наоборот, если мы имеем какую-то интерпретацию языка $\mathrm{RL}_c$, то из нее тривиальным образом получается интерпретация языка RL — нужно просто забыть о символе $c$ и о том, какой элемент ему соответствует. Рассмотрим теперь некоторое множество закрытых формул $T_c$ нового языка. Оно будет содержать, во-первых, все элементы Tr, т. е. все закрытые формулы языка RL, истинные в его стандартной интерпретации, и, кроме того, счетное множество формул вида

$$G(c, \overline{0}) = \overline{0}, \quad G(c, \overline{1}) = \overline{0}, \quad G(c, \overline{2}) = \overline{0}, \ldots$$

где $G$ — двуместный функциональный символ, обозначающий функцию, для которой $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x > y$, а $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}, \ldots$ — нульместные функциональные символы языка RL, соответствующие действительным числам 0, 1, 2, ... Нам достаточно доказать, что это множество ($T_c$) имеет модель. В самом деле, если есть такая модель, то, забыв о символе $c$, мы получим интерпретацию языка RL (не включающего символ $c$), являющуюся моделью множества Tr. Эта модель (как упорядоченное поле) будет неархимедовой: ее элемент, соответствующий символу $c$, будет бесконечно большим.

Итак, осталось доказать совместность множества $T_c$. Для этого согласно теореме компактности достаточно доказать совместность любого конечного подмножества множества $T_c$. Это будет сделано, если мы покажем совместность семейства

$$T_c(n) = \mathrm{Tr} \cup \{G(c, \overline{0}) = \overline{0}, \ldots, G(c, \overline{n}) = \overline{0}\}$$

при любом $n$, так как любое конечное подсемейство семейства $T_c$ содержится в некотором $T_c(n)$ при достаточно большом $n$. Чтобы доказать совместность семейства $T_c(n)$, нужно построить его модель. Это очень просто: возьмем стандартную интерпретацию языка RL и расширим ее до интерпретации языка $\mathrm{RL}_c$, считая, что $c$ интерпретируется как число $n+1$. Очевидно, что все формулы семейства $T_c(n)$ будут истинны в этой интерпретации. Тем самым мы доказали совместность семейства $T_c(n)$ при любом $n$; отсюда по теореме компактности получается совместность семейства $T_c$; модель этого семейства, как мы видели, превращается в искомую систему гипердействительных чисел, как только мы забудем о $c$.

Приведенное рассуждение весьма просто; таким образом, основная трудность в построении системы гипердействительных чисел содержится в теореме компактности. Обсудим теперь, каким образом эту теорему можно доказать. Существуют (по крайней мере) два способа ее доказательства. Один из них аналогичен описанному выше способу построения системы гипердействительных чисел с помощью классов эквивалентных последовательностей. Мы не будем подробно говорить о нем. Другой метод (пожалуй, более естественный) состоит в применении одной из центральных теорем логики — теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. К сожалению, точная формулировка этой теоремы далеко выходит за рамки настоящего изложения, поэтому мы вынуждены ограничиться в этом месте неформальными комментариями.

Если пытаться описать смысл теоремы Гёделя — Мальцева о полноте в одной фразе, можно сказать так: эта теорема дает синтаксический критерий совместности множества формул. Критерий этот таков. Определяется понятие выводимости данной формулы $\varphi$ из данного множества формул $T$. Мы не можем дать здесь точного определения этого понятия, так как оно довольно громоздко. Скажем лишь, что выводимость $\varphi$ из $T$ означает, что существует последовательность формул, каждая из которых принадлежит либо $T$, либо заранее фиксированному множеству (элементы которого называются аксиомами), либо получается из предыдущих членов последовательности по определенным правилам (эти правила называются правилами вывода), причем последней формулой этой последовательности является формула $\varphi$. Последовательность формул, обладающая описанными свойствами, называется *выводом* формулы $\varphi$ из множества формул $T$. Таким образом, выводимость $\varphi$ из $T$ означает, что существует вывод формулы $\varphi$ из $T$. Уже из этого описания становится ясным такое свойство выводимости: если формула $\varphi$ выводится из некоторого множества $T$, то в этом выводе используется лишь конечное число формул из $T$. Точнее, справедливо такое утверждение: если формула $\varphi$ выводится из множества $T$, то существует такое конечное подмножество $T' \subset T$, что формула $\varphi$ выводится из множества $T'$. Наконец, назовем множество формул *противоречивым*, если из него выводится одновременно некоторая формула $\varphi$ и ее отрицание $\neg\varphi$. Теперь все готово для формулировки теоремы Гёделя (точнее, теоремы Гёделя — Мальцева) о полноте.

Теорема. *Пусть $L$ — произвольный язык* (полностью следовало бы сказать: односортный язык первого порядка, но у нас других и не было), *$T$ — множество закрытых формул этого языка. Тогда следующие свойства равносильны:* а) *$T$ совместно*, б) *$T$ непротиворечиво.*

Эта теорема позволяет заменить семантическое (т. е. апеллирующее к интерпретациям) свойство совместности на синтаксическое (рассматривающее формулы только как знакосочетания, в отрыве от их смысла) свойство непротиворечивости. Из нее легко вытекает теорема компактности. В самом деле, раз совместность совпадает с непротиворечивостью, нужно доказать лишь, что если всякое конечное подмножество данного множества закрытых формул непротиворечиво, то и все множество непротиворечиво. Другими словами, нужно доказать, что если данное множество $T$ противоречиво, то противоречиво и некоторое его конечное подмножество. А это следует из упоминавшегося выше свойства отношения выводимости. Ведь если из множества $T$ выводятся формулы $\varphi$ и $\neg\varphi$, то (по отмечавшемуся свойству выводимости) найдутся такие конечные подмножества $T_1$ и $T_2$ множества $T$, что из $T_1$ выводится $\varphi$, а из $T_2$ выводится $\neg\varphi$. Тогда из конечного множества $T_1 \cup T_2$ выводятся как $\varphi$, так и $\neg\varphi$, и, следовательно, оно противоречиво.

Таким образом, теорема компактности легко вытекает из теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. (Мы называем теорему о полноте теоремой Гёделя — Мальцева, а не просто теоремой Гёделя, как это часто делается, так как интересующий нас вариант был впервые доказан А. И. Мальцевым; Гёдель доказал равносильность совместности и непротиворечивости лишь для языков со счетным множеством предикатных и функциональных символов.) Таким образом, основная трудность в построении гипердействительных чисел заключена именно в доказательстве теоремы о полноте.

К сожалению, подробное обсуждение понятия выводимости далеко выходит за рамки нашего изложения, и мы вынуждены ограничиться уже сказанным.

Математическая логика позволяет также прояснить вопрос о неединственности гипердействительного расширения множества действительных чисел. Оказывается, что можно построить систему гипердействительных чисел (т. е. интерпретацию языка RL, элементарно эквивалентную стандартной), имеющую сколь угодно большую мощность. Тем самым $^*\mathbb{R}$ не единственно. Но это не так страшно, так как все интерпретации языка RL, элементарно эквивалентные стандартной, элементарно эквивалентны друг другу. Поэтому они, хотя и не одинаковы, в некотором смысле «неотличимы».

## § 11. «НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ» ИЛИ «НЕСТАНДАРТНАЯ МАТЕМАТИКА»? (ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ)

Термин «нестандартный анализ» может употребляться в двух смыслах — узком и широком. До сих пор мы говорили о нестандартном анализе в узком смысле, понимая под этим сравнительное исследование системы $\mathbb{R}$ действительных чисел и системы $^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел (точнее, любой из систем $^*\mathbb{R}$). В результате такого сравнения мы не только (и, быть может, не столько) получаем сведения о свойствах $^*\mathbb{R}$, но и получаем сведения о свойствах обычной действительной прямой $\mathbb{R}$. Возникает желание распространить этот метод на более широкую область. Где можно ожидать пользы от такого распространения? Вероятно, там, где идет речь о чем-то бесконечно малом или бесконечно большом, т. е. в топологии, теории дифференциальных уравнений, механике и т. п. В топологии, например, хотелось бы распространить те определения предельной точки и предела, которые упоминались нами выше, на случай произвольного топологического пространства. Ниже мы обсудим, можно ли это сделать, и если можно, то как.

Напомним, что такое топологическое пространство (в обычном математическом смысле). Пусть задано некоторое множество $X$. Элементы этого множества будут называться *точками*, а само $X$ — *пространством*. Пусть, помимо $X$, задано некоторое семейство множеств $T$, элементы которого являются подмножествами $X$. Пусть семейство $T$ обладает такими свойствами:

(а) объединение любого числа множеств из $T$ принадлежит $T$;

(б) пересечение любого конечного числа множеств из $T$ принадлежит $T$;

(в) пустое множество $\varnothing$ и все пространство $X$ принадлежат $T$.

В таком случае говорят, что на множестве $X$ введена *топология* $T$; пару $\langle X, T\rangle$ (или, более вольно, само $X$, лишь подразумевая присутствие $T$) называют *топологическим пространством*, а подмножества $X$, входящие в $T$,— *открытыми подмножествами* топологического пространства $\langle X, T\rangle$.

Приведем несколько примеров топологических пространств.

1. Введем топологию на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. Назовем точку $x \in \mathbb{R}$ *внутренней точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любая точка $y$, отстоящая от $x$ менее чем на $\varepsilon$ (в том числе и сама точка $x$), входит в $A$. Назовем множество $A \subset \mathbb{R}$ *открытым*, если любая точка $x$ этого множества является внутренней. Другими словами, множество $A$ открыто, если для любой точки $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ является подмножеством множества $A$. Легко проверить, что семейство всех открытых (в указанном смысле) подмножеств множества $\mathbb{R}$ обладает свойствами (а)—(в) и, следовательно, является топологией на множестве $\mathbb{R}$. Эта топология называется *естественной топологией* на $\mathbb{R}$.

2. Аналогичным образом можно ввести топологию и на множестве всех точек плоскости. Именно: точка $x$ называется *внутренней* точкой множества $A$, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что круг с центром в точке $x$ радиуса $\varepsilon$ целиком входит в $A$. Множество $A$ точек плоскости называется *открытым*, если всякая его точка является внутренней. Мы получаем топологию на плоскости, называемую *естественной топологией*.

3. Пусть $X$ — произвольное множество. Можно ввести топологию на $X$, объявив все подмножества $X$ открытыми. (Легко проверить, что при таком определении свойства (а) — (в) выполняются.) Такая топология называется *дискретной*.

4. Пусть $X$ — произвольное множество. Можно ввести топологию на $X$, в которой будет всего два открытых множества — пустое множество и всё $X$. Свойства (а) — (в), очевидно, выполняются. Этот пример топологии противоположен предыдущему — в предыдущем примере все множества были открытыми, а в этом открытыми объявляются лишь те множества, которые нельзя не объявить таковыми (по свойству (в)).

Попытаемся объяснить, каким образом понятие топологического пространства связано с интуитивной идеей «близости», «окрестности» и т. д. Попытаемся, например, придать точный смысл такому выражению: «для всех точек, достаточно близких к точке $a$, выполнено свойство $P$». Пусть сначала под точками мы понимаем точки действительной прямой (т. е. действительные числа). В этом случае указанное выражение можно уточнить следующим образом: свойство $P$ выполнено для всех $x$, достаточно близких к $a$, тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что свойство $P$ выполнено для всех $x$, для которых $|x-a| < \varepsilon$. Например, для всех $x$, достаточно близких к 1, выполнено такое свойство: $0{,}99 \leqslant x^2 \leqslant 1{,}01$ (чтобы проверить это, достаточно, например, взять $\varepsilon = 0{,}001$). Другой пример: для всех $x$, достаточно близких к $\pi$, выполнено неравенство $\cos x \leqslant -0{,}999$.

Возникает естественная задача: перенести это уточнение с прямой на другие топологические пространства, например, придать точный смысл такому интуитивно ясному утверждению: если луч $AB$ пересекает прямую $l$, то для всякой точки $B'$, достаточно близкой к $B$, луч $AB'$ также будет пересекать прямую $l$.

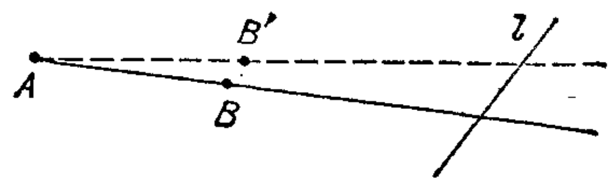

Рис. 15

Придать смысл выражению «для всех достаточно близких» оказывается возможным следующим образом. Пусть на множестве $X$ введена топология $T$, превращающая его в топологическое пространство. Пусть $P$ — некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать точки $X$; пусть $a$ — точка пространства $X$. Будем говорить, что свойство $P$ выполнено для всех достаточно близких к $a$ точек пространства $X$, если существует открытое (т. е. принадлежащее семейству $T$) множество $U \subset X$, содержащее точку $a$, для всех точек которого выполнено свойство $P$. Легко проверить, что если в качестве $X$ взято множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, а в качестве $T$ — естественная топология на нем, описанная в примере 1, то приведенное только что определение равносильно имевшемуся ранее. Сформулированное выше утверждение о лучах может теперь быть уточнено следующим образом: «если луч $AB$ пересекает прямую $l$, то существует открытое множество, содержащее точку $B$, для любой точки $B'$ которого луч $AB'$ пересекает прямую $l$».

Приведем еще несколько примеров, показывающих, каким образом различные понятия переносятся с действительной прямой на произвольные топологические пространства. Дадим определения предела и предельной точки последовательности точек топологического пространства $X$. Пусть $x_0$, $x_1$, ... — последовательность точек топологического пространства $X$, $a$ — некоторая его точка. Говорят, что $a$ есть *предел* последовательности $x_0$, $x_1$, ..., если любое открытое множество, содержащее $a$, содержит все члены этой последовательности, за исключением конечного числа. Говорят, что $a$ есть *предельная точка* последовательности $x_0$, $x_1$, ..., если любое открытое множество, содержащее $a$, содержит бесконечно много членов этой последовательности.

Важный класс топологических пространств составляют хаусдорфовы пространства. Пространство $X$ называется *хаусдорфовым*, если для любых различных точек $x$ и $y$ существуют непересекающиеся открытые множества $U$ и $V$, содержащие $x$ и $y$ (соответственно). Легко проверить, что пространства примеров 1—3 хаусдорфовы, в то время как пространство примера 4 не хаусдорфово (если в $X$ содержится более одного элемента). Большинство пространств, встречающихся в математической практике (а также в ее приложениях, в том числе военных, — см. [4], гл. 9, п. 3), оказываются хаусдорфовыми; таковы, в частности, все так называемые метризуемые простран-

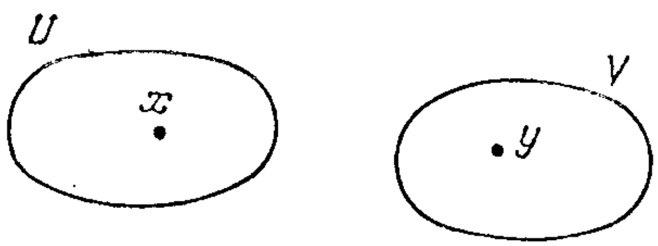


Рис. 16

ства. В нехаусдорфовых пространствах могут возникать неожиданные явления: например, одна и та же последовательность может иметь два разных предела. Хаусдорфовы пространства нередко называются также *отделимыми*.

Познакомившись с несколькими образцами понятий топологии, обсудим, каким образом можно применить методы нестандартного анализа к топологическим пространствам. На первый взгляд эта задача кажется весьма трудной. Раньше (в $\mathbb{R}$ и его расширениях) в определениях бесконечно малых участвовало сложение; в произвольном топологическом пространстве никакого сложения, разумеется, нет. Как же определять бесконечную близость?

Мы сейчас попробуем описать в общих чертах схему применения методов нестандартного анализа к произвольным топологическим пространствам.

Пусть $A$ — произвольное множество. Элементы его мы будем, следуя М. Девису [3], называть индивидами. Будем считать, что индивиды сами не являются множествами. (Это не очень существенно — ценой некоторого усложнения последующих конструкций можно было бы обойтись без этого требования, но удобно.) Рассмотрим теперь всевозможные множества, которые можно построить, отправляясь от элементов $A$, за конечное число шагов. Прежде чем уточнять сказанное, приведем несколько примеров таких множеств. Прежде всего, это всевозможные множества индивидов, т. е. всевозможные подмножества множества $A$. Множество всех таких подмножеств обозначается $\mathscr{P}(A)$. На следующем шаге мы можем рассматривать множества, элементами которых являются (наряду с индивидами) и множества индивидов, т. е. подмножества $A \cup \mathscr{P}(A)$. Эти множества снова можно использовать в качестве элементов в дальнейших построениях.

Приведем теперь более точные формулировки. Определим последовательность множеств $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... так: $A_0 = A$, $A_{i+1} = A_i \cup \mathscr{P}(A_i)$. Мы получаем, очевидно, для каждого $A$ возрастающую последовательность множеств

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots;$$

ее объединение будем (также следуя М. Девису) называть *суперструктурой* с индивидами $A$ и обозначать его $S(A)$. Таким образом, над каждым множеством индивидов $A$ возникает суперструктура $S(A)$.

Поясним, зачем мы требовали, чтобы элементы $A$ сами не являлись множествами. Это нужно для того, чтобы разные «уровни» нашей суперструктуры не смешивались. Например, если бы $A$, наряду с элементами $a$ и $b$, содержало (в качестве элемента!) множество $\{a, b\}$, то $A$ и $\mathscr{P}(A)$ пересекались бы: множество $\{a, b\}$ можно было бы рассматривать и как элемент $A$, и как множество элементов $A$, т. е. как элемент $\mathscr{P}(A)$.

Теперь мы, помимо «стандартной» суперструктуры, описанной выше, построим ее «нестандартное» расширение, в некотором смысле неотличимое от стандартной суперструктуры. Нужно объяснить только, в каком смысле оно неотличимо и в чем его нестандартность. Обсуждение нестандартности мы отложим, а пока займемся неотличимостью.

Неотличимость стандартной суперструктуры от нестандартной будем, как и прежде, понимать в том смысле, что в них истинны одни и те же закрытые формулы (суждения) некоторого языка. Осталось описать этот язык. Формулы этого языка будут строиться из констант (т. е. имен) для всех элементов суперструктуры $S(A)$ и переменных с помощью знаков $\in$ (символа принадлежности) и $=$ (знак равенства), логических знаков (конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и т. п.) и кванторов (общности и существования). Другими словами, этот язык содержит один-единственный двуместный предикатный символ «принадлежность» (для удобства чтения вместо $\in(x, y)$ будем писать, как это обычно делают, $x \in y$) и большое число нульместных функциональных символов (это и будут константы) — столько, сколько элементов имеется в суперструктуре $S(A)$. Мы предполагаем, что фиксировано взаимно однозначое соответствие между функциональными символами и элементами суперструктуры $S(A)$.

Этот язык имеет стандартную интерпретацию, в которой носителем является $S(A)$, с нульместными функциональными символами сопоставляются соответствующие им элементы суперструктуры $S(A)$, а предикатному символу $\in$ соответствует обычное отношение принадлежности, т. е. функция, ставящая в соответствие паре $x, y \in S(A)$ символ И, если $x \in y$, и Л, если $x \notin y$.

Рассмотрим теперь произвольную (не обязательно стандартную) интерпретацию этого языка. Обозначим ее носитель через $^*S$. На множестве $^*S$ имеется бинарное отношение, соответствующее предикатному символу $\in$. Мы будем обозначать это отношение $^*\in$ и писать $x\,^*\!\in y$, если пара $\langle x, y\rangle$ (здесь $x, y \in {}^*S$) находится в этом отношении, т. е. $^*\in(x, y) = \text{И}$. Кроме того, в $^*S$ интерпретированы все функциональные символы языка (напомним, что все они нульместны); другими словами, с каждым элементом $s \in S(A)$ сопоставлен некоторый элемент множества $^*S$. Элемент множества $^*S$, соответствующий элементу $s$ из $S(A)$, будем обозначать $^*s$.

Мы требуем, чтобы для новой интерпретации был справедлив принцип переноса, т. е. были истинны те же самые закрытые формулы рассматриваемого языка, что и в стандартной его интерпретации. Попробуем, зная это, прояснить устройство множества $^*S$. С каждым элементом $s \in S(A)$ сопоставляется элемент $^*s \in {}^*S$; могут ли двум различным элементам $s_1$ и $s_2 \in S(A)$ быть поставлены в соответствие одинаковые элементы $^*S$? Легко видеть, что нет. В самом деле, пусть $c_1$ и $c_2$ — константы (т. е. нульместные функциональные символы), соответствующие элементам $s_1$ и $s_2$. Рассмотрим формулу $c_1 = c_2$. В $S(A)$ эта формула ложна, так как интерпретацией константы $c_1$ служит элемент $s_1$, интерпретацией константы $c_2$ служит элемент $s_2$, а элементы $s_1$ и $s_2$ различны. Значит, и в $^*S$ эта формула будет ложна, т. е. интерпретации констант $c_1$ и $c_2$ в $^*S$ — элементы $^*s_1$ и $^*s_2$ — будут различны. Таким образом, мы построили взаимно однозначное соответствие между $S(A)$ и некоторым подмножеством множества $^*S$. Элементы этого подмножества естественно назвать *стандартными элементами* $^*S$. Теперь становится ясным, что $^*S$ можно считать расширением суперструктуры $S(A)$, отождествив $S(A)$ с некоторой частью множества $^*S$.

Посмотрим на это отождествление более внимательно. Пусть $a \in A$ — некоторый индивид, а $X \subset A$ — некоторое множество индивидов. Тогда и $a$, и $X$ являются элементами суперструктуры $S(A)$. Им соответствуют некоторые элементы $^*a$ и $^*X$ в ее нестандартном расширении $^*S$. Находятся ли они в отношении $^*\in$? Другими словами, верно ли в $^*S$, что $^*a\,^*\!\in {}^*X$? Легко понять, что это верно тогда и только тогда, когда $a \in X$. В самом деле, пусть $c_a$ и $c_X$ — константы нашего языка, соответствующие $a$ и $X$. Истинность суждения $c_a \in c_X$ в стандартной суперструктуре означает, естественно, что $a \in X$; истинность этого же суждения в $^*S$ означает, что $^*a\,^*\!\in {}^*X$. Таким образом, при вложении суперструктуры $S(A)$ в $^*S$ сохраняется отношение принадлежности.

Каждому элементу $Y$ из $^*S$ можно поставить в соответствие некоторое подмножество $^*S$, именно подмножество тех $x \in {}^*S$, для которых в $^*S$ имеет место $x \mathrel{^*\!\!\in} Y$. Посмотрим, каким будет это множество для некоторых стандартных элементов из $^*S$. Самый простой пример — пустое множество $\varnothing \in S(A)$. Ему соответствует стандартный элемент $^*\varnothing \in {}^*S$ и, далее, множество всех тех $x \in {}^*S$, для которых $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*\varnothing$. Легко понять, что это множество пусто. В самом деле, в $S(A)$ истинна формула

$$\forall x \neg (x \in \varnothing)$$

(напомним, что $\forall$ — квантор «для всех», $\neg$ — знак отрицания). Эта формула в силу нашего предположения истинна и в $^*S$. Это значит, что для всех $x \in {}^*S$ неверно, что $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*\varnothing$, т. е. что интересующее нас множество пусто.

Чуть более сложный пример. Пусть $a$ и $b$ — некоторые индивиды, $X = \{a, b\}$. Множество $X$ является элементом суперструктуры $S(A)$ и, значит, с ним сопоставлен некоторый элемент $^*X$ из $^*S$. Какое подмножество в $^*S$ ему соответствует? Другими словами, для каких $x \in {}^*S$ выполнено соотношение $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*X$? Легко видеть, что это так при $x = {}^*a$ и $x = {}^*b$. Но, быть может, есть и другие $x \in {}^*S$, при которых $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*X$? Оказывается, что других нет. Чтобы понять это, рассмотрим формулу

$$\forall x (x \in c_X \Rightarrow (x = c_a) \vee (x = c_b)),$$

в которой $c_X$, $c_a$ и $c_b$ суть константы, соответствующие элементам $X$, $a$, $b$ суперструктуры $S(A)$. Это формула истинна в $S(A)$, так как $X = \{a, b\}$. Значит, она истинна и в $^*S$. Это означает, что любой элемент $x \in {}^*S$, для которого $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*X$, равен либо $^*a$, либо $^*b$. Таким образом, элементу $^*X$ соответствует подмножество $\{^*a, {}^*b\}$.

Будет ли так всегда? Сформулируем этот вопрос точнее. Рассмотрим произвольное множество $X \subset A$. Ему соответствует элемент $^*X \in {}^*S$. Рассмотрим подмножество в $^*S$, состоящее из всех тех $x \in {}^*S$, для которых $x \mathrel{^*\!\!\in} {}^*X$. Очевидно, это подмножество содержит все $^*a$ для всевозможных $a \in X$. Может ли оно содержать что-нибудь еще? Легко видеть, что других стандартных элементов оно не содержит: ведь если бы $^*s \mathrel{^*\!\!\in} {}^*X$ при некотором $s \in S(A)$, то (по принципу переноса) оказалось бы, что $s \in X$. Но, как мы увидим ниже, могут существовать нестандартные элементы $x$, для которых $x {}^*\!\in {}^*X$. Возникающую ситуацию можно проиллюстрировать так:

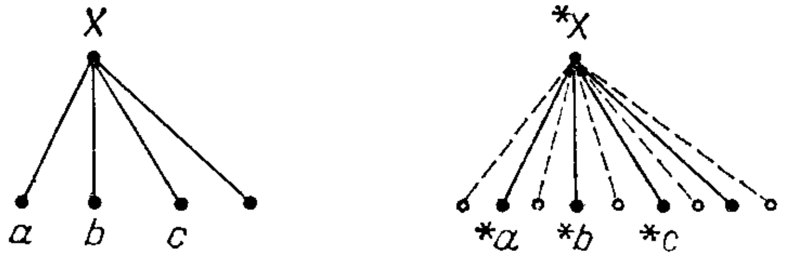


Рис. 17

Левый рисунок изображает ситуацию в стандартной суперструктуре: множество $X$ содержит элементы $a$, $b$, $c$, ... Справа изображена ситуация в ${}^*S$. По-прежнему элементы ${}^*a$, ${}^*b$, ${}^*c$, ... находятся в отношении ${}^*\!\in$ к элементу ${}^*X$; но помимо них могут появиться новые нестандартные элементы, также находящиеся в отношении ${}^*\!\in$ к элементу ${}^*X$.

Подобный эффект может возникнуть (и, как правило, возникает) и на более высоких уровнях. Напомним, что через $\mathscr{P}(A)$ мы обозначали семейство всех множеств индивидов. Множество $\mathscr{P}(A)$ (как и любой элемент $S(A)$) имеет аналог ${}^*\mathscr{P}(A)$ в ${}^*S$; для всякого $X \in \mathscr{P}(A)$ элемент ${}^*X$ находится в отношении ${}^*\!\in$ с ${}^*\mathscr{P}(A)$; однако могут существовать и нестандартные элементы, находящиеся в отношении ${}^*\!\in$ с ${}^*\mathscr{P}(A)$. Таким образом, в ${}^*S$ могут появиться не только «новые индивиды», но и «новые множества индивидов».

Структуру ${}^*S$ можно рассматривать как результат конструкции, похожей на построение $S(A)$. Именно, можно представить себе дело так: мы вкладываем $A$ в более широкое множество $\mathscr{A}_0$; затем рассматриваем множество $\mathscr{A}_1$, являющееся объединением $\mathscr{A}_0$ с некоторым семейством подмножеств множества $\mathscr{A}_0$; затем рассматриваем $\mathscr{A}_2$, равное объединению $\mathscr{A}_1$ с некоторым семейством подмножеств $\mathscr{A}_1$, и т. д. Отличие этого процесса от процесса построения $S(A)$ состоит в том, что мы берем на каждом шаге не все подмножества, а только некоторые (они называются «внутренними»). Сформулируем сказанное точнее. Пусть ${}^*S$ — произвольное расширение $S(A)$, удовлетворяющее принципу переноса. Тогда существуют последовательность множеств $\mathscr{A}_0 \subset \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \ldots$, для которой $A \subset \mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_{i+1} \subset \mathscr{A}_i \cup \mathscr{P}(\mathscr{A}_i)$ при всех $i$, и взаимно однозначное соответствие между ${}^*S$ и объединением всевозможных множеств $\mathscr{A}_i$ при всех

$l$; при этом соответствии отношение $^*\in$ на $^*S$ переходит в обычное отношение принадлежности на объединении всех $\mathscr{A}_i$. Кроме того, если $x \in S(A)$ и входит в множество $A_i$ (напомним, что $S(A)$ мы строили как объединение возрастающей цепи множеств $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ с $A_0 = A$ и $A_{i+1} = A_i \cup \mathscr{P}(A_i)$), то элементу $^*x$ множества $^*S$ соответствует элемент множества $\mathscr{A}_i$.

Таким образом, множество $^*S$ может быть построено так: сначала расширим $A$ до некоторого $\mathscr{A}_0$, а затем будем применять обычное построение суперструктуры на $\mathscr{A}_0$ с той разницей, что на каждом шаге рассматриваются не все подмножества, а только некоторые. Все это можно видеть на рисунке.

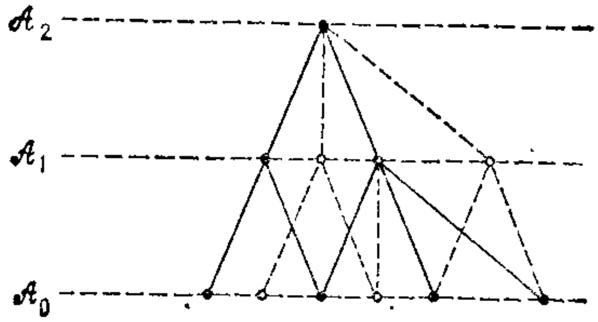


Рис. 18.

Зачерненные кружки и сплошные линии изображают стандартные объекты и стандартное отношение принадлежности. Зачерненные кружки нижнего уровня изображают индивиды из $A$, зачерненные кружки следующего уровня — множества индивидов и т. п. Светлые кружки и штриховые линии изображают добавленные (нестандартные) элементы. Видно, что на каждом уровне появляются новые элементы и что у старых множеств появляются новые элементы.

Эта схема, конечно, весьма условна, но, быть может, способствует созданию общего представления о структуре нестандартных расширений.

Теперь можно объяснить, как происходит, например, применение нестандартных методов к топологии. Точки исследуемого пространства объявляются индивидами. Затем мы надстраиваем над ними стандартную суперструктуру и рассматриваем ее нестандартные расширения. В нестандартном расширении появляются новые, нестандартные точки. Топология (семейство открытых множеств) также является элементом суперструктуры, поэтому возникает соответствующий объект в нестандартном расширении. Его «элементы» (т. е. элементы $^*S$, находящиеся в отношении $^*\in$ с ним) можно рассматривать как нестандартные «открытые множества». Каждое стандартное открытое множество $U$ имеет аналог $^*U$ в нестандартной модели; этому аналогу «принадлежат» «те же» стандартные точки, что и $U$, и, возможно, некоторые нестандартные точки. Слово «принадлежат» взято в кавычки, так как оно представляет собой некоторую вольность речи; корректнее было бы говорить «находится в отношении $^*\in$» вместо «принадлежать». По аналогичным причинам взято в кавычки «те же»: ведь на самом деле множеству $^*U$ принадлежат не сами элементы множества $U$, а их нестандартные аналоги (элементы нестандартной модели, отождествленные с ними). Мы, однако, будем позволять себе подобные вольности, надеясь, что читатель сам восстановит корректные формулировки (если захочет). Итак, при переходе к нестандартной модели старые открытые множества могут приобретать новые (нестандартные) точки; кроме того, могут появиться новые (нестандартные) открытые множества.

Покажем теперь, каким образом в нестандартной интерпретации вводится понятие «бесконечной близости». Рассмотрим сначала ситуацию в стандартной интерпретации. Пусть $x$ — стандартная точка топологического пространства $X$. Рассмотрим все стандартные открытые множества, содержащие $x$. Рассмотрим пересечение всех этих множеств. Если пространство $X$ отделимо, то это пересечение содержит единственную точку $x$. (В самом деле, если $y \neq x$, то существует открытое множество, содержащее $x$ и не содержащее $y$; поэтому точка $y$ не входит в пересечение всех открытых множеств, содержащих точку $x$.)

До сих пор все наши рассмотрения были стандартны. Переходя к нестандартной интерпретации, мы замечаем, что в рассматриваемом пересечении могут появиться нестандартные точки, отличные от $x$. Точнее, могут найтись такие $z \in {}^*S$, отличные от $^*x$, что *для любого (стандартного) открытого множества $U$, содержащего (стандартную) точку $x$, выполнено* $z \,{}^*\!\in {}^*U$. Точки с таким (выделенным курсивом) свойством называются *бесконечно близкими* к $x$. Множество всех таких точек называется *монадой* точки $x$. В случае когда $X$ представляет собой действительную прямую с естественной топологией, мы приходим, по существу, к тому же самому определению монады, что и раньше (если отвлечься от того, что теперь рассматривается другой язык).

В терминах монад удается дать критерий отделимости (т. е. хаусдорфовости) топологических пространств. Напомним, что топологическое пространство $X$ называется отделимым пространством, если для всяких точек $x$ и $y$ этого пространства, для которых $x \neq y$, найдутся непересекающиеся открытые множества $U$ и $V$, содержащие $x$ и $y$ соответственно. Оказывается, что пространство $X$ отделимо тогда и только тогда, когда в его нестандартном расширении монады любых двух стандартных точек не пересекаются. Другими словами, отделимость пространства означает, что не существует (возможно, нестандартной) точки, которая была бы бесконечно близка к двум различным стандартным точкам.

Нужно уточнить, однако, чтó мы имеем в виду, говоря о нестандартных расширениях пространства $X$. До сих пор мы требовали лишь того, чтобы в нестандартном расширении суперструктуры над $X$ были истинны те же закрытые формулы, что и в стандартном. Этого, разумеется, мало: мы должны объяснить также, в чем же состоят особенности рассматриваемых нестандартных объектов (множества $^*S$ и отношения «принадлежности» $^*\in$), отличающие их от стандартных. До сих пор об этом не было сказано ни слова, и все наши требования к $^*S$ были выполнены и в том случае, когда в качестве $^*S$ взята сама суперструктура $S(A)$, а в качестве отношения $^*\in$ взято обычное отношение принадлежности. Ясно, однако, что в этом случае «нестандартная» топология не дает ничего нового по сравнению со стандартной. Поэтому мы должны сформулировать какие-то требования к нестандартным объектам, которые отличали бы их от стандартных. Эти требования должны быть достаточно сильны, чтобы с их помощью можно было развить содержательную теорию, и, кроме того, должны быть такими, чтобы их можно было удовлетворить,— ведь если мы потребуем от $^*S$ слишком много, то такого $^*S$ просто не будет. Раньше, когда мы рассматривали нестандартный анализ в узком смысле (для действительной прямой), таким требованием была неархимедовость поля гипердействительных чисел. Ее оказалось достаточно для развития содержательной теории. К сожалению, свойство неархимедовости использует специфику действительных чисел — наличие сложения и порядка. Для случая произвольного топологического пространства нужны какие-то существенно более общие понятия и методы. Один из таких методов мы впоследствии опишем, сформулировав требование «направленности», отличающее нестандартное расширение от исходной стандартной суперструктуры. С его помощью критерий отделимости получает следующую точную формулировку.

Пусть фиксировано произвольное нестандартное расширение суперструктуры на топологическом пространстве $X$, для которого справедливы принцип переноса и требование направленности. В этом случае монады любых двух стандартных точек не пересекаются тогда и только тогда, когда исходное пространство $X$ отделимо.

Доказательство этого критерия состоит из двух частей. Нужно доказать, что если $X$ отделимо, то монады не пересекаются, и, напротив, что если $X$ неотделимо, то монады некоторых двух стандартных точек пересекаются. Требование направленности используется лишь во второй части, поэтому мы отложим его формулировку и приведем вначале первую часть доказательства. Отметим, что как приводимое ниже рассуждение, так и его словесное оформление (с нестандартно понимаемыми словами типа «принадлежать», «включена» и т. п.) весьма типичны для нестандартного анализа. Пусть пространство является отделимым. Докажем, что монады различных стандартных его точек не пересекаются. Пусть $x$ и $y$ — две различные стандартные точки пространства. Докажем, что монады $\mu(x)$ и $\mu(y)$ не пересекаются. Так как требование отделимости выполнено, то существуют открытые множества $U$ и $V$, содержащие точки $x$ и $y$, не имеющие общих стандартных точек. Рассмотрим соответствующие им объекты $^*U$ и $^*V$ в нестандартной интерпретации. Это — «открытые множества» нестандартной интерпретации. Они «содержат» точки $x$ и $y$. Утверждение о том, что множества $U$ и $V$ не пересекаются, может быть записано в виде суждения нашего языка:

$$\neg \exists x((x \in c_U) \wedge (x \in c_V));$$

здесь $c_U$, $c_V$ — константы (т. е. функциональные символы с нулем аргументов), соответствующие элементам $U$ и $V$ в стандартной интерпретации. Будучи истинно в стандартной интерпретации, это суждение (согласно принципу переноса) обязано быть истинным и в нестандартной. Это означает, что $^*U$ и $^*V$ «не пересекаются». Отсюда следует, что и монады точек $x$ и $y$ не пересекаются, так как монада точки $x$ «включена» в множество $U$, а монада точки $y$ «включена» в $V$.

В приведенном рассуждении мы широко пользовались «вольностями речи», используя некоторые слова в переносном смысле; надеемся, что читатель сможет (если захочет) восстановить корректный способ выражения. Например, когда мы говорили, что монада $\mu(x)$ «включена» в $U$, мы имели в виду следующее: всякий элемент монады $\mu(x)$ находится в отношении $^*\in$ с $^*U$. Привычка к такого рода переносному словоупотреблению совершенно необходима для полного овладения методами нестандартного анализа.

Итак, одна из половин доказательства нестандартного критерия отделимости завершена. Прежде чем перейти ко второй, нам необходимо сформулировать требование направленности. К сожалению, его формулировка может поначалу показаться несколько искусственной и ее смысл проясняется лишь при применении этого требования.

Начнем со следующего простого замечания. Пусть на суперструктуре $S(A)$ задано некоторое бинарное отношение $R(x, y)$, причем участвующие в нем пары $\langle x, y\rangle$ имеют своими членами элементы некоторого фиксированного уровня. Сформулируем это точнее. Напомним, что суперструктура $S(A)$ представляет собой объединение множеств $A_0$, $A_1$, ..., где $A_0 = A$, а $A_{i+1} = A_i \cup \cup \mathscr{P}(A_i)$. Так вот, наше предположение о бинарном отношении $R$ на множестве $S(A)$ состоит в следующем: существует такое $N$, что для любой пары $\langle x, y\rangle$, находящейся в отношении $R$, элементы $x$ и $y$ принадлежат множеству $A_N$. Будем рассматривать в дальнейшем только бинарные отношения с описанным свойством, называя их отношениями конечного уровня. Это свойство позволяет рассматривать бинарное отношение как элемент суперструктуры с помощью известного метода Куратовского, отождествляющего пару $\langle x, y\rangle$ с множеством $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Если $x$ и $y$ принадлежат уровню $A_N$, то множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ принадлежит уровню $A_{N+2}$ (так как $\{x\}$ и $\{x, y\}$ принадлежат $A_{N+1}$). Тем самым любое множество понимаемых по Куратовскому упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, где $x, y \in A_N$, становится элементом $A_{N+3}$.

Напомним, что первой проекцией отношения $R$ называется множество всех тех $x$, для которых $R(x, y)$ имеет место при некотором $y$. Назовем отношение $R$ *направленным*, если для любого конечного набора $x_1, \ldots, x_n$, элементы которого входят в первую проекцию отношения $R$, найдется $y$, находящийся в отношении $R$ со всеми $x_i$.

Другими словами, условие направленности состоит в следующем: если для каждого $x_i$ из конечного набора $x_1, \ldots, x_n$ найдется $y$, для которого $R(x_i, y)$, то существует единое $y$, при котором $R(x_i, y)$ при всех $x_i$.

С помощью понятия направленного отношения конечного уровня мы и сформулируем требования к нестандартной интерпретации, отличающие ее от стандартной. Прежде чем сформулировать эти требования, напомним, что с каждым элементом $S(A)$ сопоставлен некоторый элемент $^*S$. Итак, пусть $R$ — произвольное направленное отношение конечного уровня. Мы требуем выполнения следующего условия: существует такое $y \in {}^*S$, что для любого стандартного $x$, входящего в первую проекцию отношения $R$, выполнено $R(x, y)$. Эта формулировка требует разъяснения. Непонятно, что означает $R(x, y)$: ведь $x$ — элемент суперструктуры $S(A)$, а $y$ — элемент ее расширения $^*S$. Объясним это. Напомним, что отношение конечного уровня рассматривается как элемент суперструктуры $S(A)$. Как и всякому другому элементу, ему соответствует некоторый элемент $^*R \in {}^*S$. Так вот, требуется, чтобы $\langle {}^*x, y\rangle \,{}^*{\in}\, {}^*R$ для любого элемента $x \in S(A)$, входящего в первую проекцию отношения $R$. Элемент $y$ с такими свойствами должен существовать для любого направленного отношения $R$ конечного уровня. В этом и состоит требование направленности.

Здесь требуется еще объяснить, что означает запись $\langle {}^*x, y\rangle$. Сделаем это. Для любых элементов $a$ и $b$ из $^*S$ существует и единствен элемент $c \in {}^*S$, для которого $a \,{}^*{\in}\, c$, $b \,{}^*{\in}\, c$ и из $t \,{}^*{\in}\, c$ следует, что $t = a$ или $t = b$ для любого $t \in {}^*S$. (Это следует из того, что аналогичное свойство верно в $S(A)$.) Этот элемент $c$ естественно обозначить через $\{a, b\}$. Обозначим также $\{a, a\}$ через $\{a\}$ и $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ через $\langle a, b\rangle$. Таким образом, мы придали смысл выражению $\langle a, b\rangle$ для любых элементов $a, b \in {}^*S$.

Сформулированные требования можно коротко выразить так: если в (стандартной) суперструктуре $S(A)$ для любого конечного набора элементов можно найти элемент, находящийся со всеми ними в каком-то отношении, то в нестандартном расширении можно найти элемент, находящийся в этом отношении со всеми стандартными.

На первый взгляд это требование (будем называть его требованием направленности) выглядит довольно бессмысленным. Чтобы оправдать его, нужно, во-первых, показать, что оно выполнимо, т. е. что для всякой суперструктуры $S(A)$ можно найти ее расширение $^*S$, удовлетворяющее принципу переноса и требованию направленности, и, во-вторых, продемонстрировать полезность последнего для построения нестандартного анализа. Начнем с первого.

Как и в случае поля гипердействительных чисел, построение искомого расширения $^*S$ (точнее, доказательство его существования) может быть осуществлено различными методами. Один из методов использует теорему о компактности, другой — нетривиальные ультрафильтры. Единственным существенным отличием возникающей здесь ситуации от случая гипердействительных чисел является, пожалуй, то, что нужно рассматривать ультрафильтры не на натуральном ряде $\mathbb{N}$, а на некоторых других множествах. За подробностями (в том числе за точным определением ультрафильтра на произвольном множестве) мы вновь отсылаем читателя к книге Дэвиса «Прикладной нестандартный анализ» [3].

Перейдем теперь к обсуждению второго вопроса — вопроса о том, какую пользу можно извлечь из требования направленности. Мы обещали использовать его, завершая доказательство нестандартного критерия отделимости. Но для начала продемонстрируем его в более простой ситуации, показав, что в применении к суперструктуре с множеством индивидов $\mathbb{R}$ оно дает нам некоторое неархимедово расширение этого поля. В самом деле, рассмотрим такое отношение $R(x, y)$ на множестве $\mathbb{R}$: $R(x, y) \Leftrightarrow x < y$. Его первой проекцией является всё $\mathbb{R}$, так как для каждого числа существует большее. Более того, для каждого конечного множества чисел можно найти число, которое больше всех элементов этого множества, поэтому отношение $R$ является направленным. Теперь остается применить принцип направленности и получить такое (нестандартное) $c$, что $R(x, c)$ при любом стандартном действительном числе $x$. Это $c$ и будет бесконечно большим. Можно также провести подобное рассуждение и с бесконечно малыми вместо бесконечно больших; для этого в качестве $R$ нужно взять отношение $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x > y)$.

Перейдем теперь к завершению доказательства нестандартного критерия отделимости. Пусть топологическое пространство не является отделимым. Пусть $x$ и $y$ — точки, для которых не выполнено требование отделимости. Это означает, что любые открытые множества $U$, и $V$, для которых $x \in U$ и $y \in V$, имеют общую точку. Определим такое отношение:

$R(a, b) \rightleftharpoons a$ представляет собой пару открытых множеств $\langle U, V \rangle$, причем $U$ содержит $x$, $V$ содержит $y$, а $b$ является общей точкой множеств $U$ и $V$.

Убедимся, что это отношение является направленным. Для этого нужно рассмотреть произвольный конечный набор $a_1, \ldots, a_n$, каждый из членов которого принадлежит первой проекции отношения $R$, и найти такое $b$, что $R(a_i, b)$ при всех $i$. Раз каждый из $a_i$ принадлежит первой проекции отношения $R$, то он представляет собой пару $\langle U_i, V_i \rangle$, где $U_i$ — открытое множество, содержащее $x$, а $V_i$ — открытое множество, содержащее $y$. Рассмотрим пересечения $F = \bigcap U_i$ и $G = \bigcap V_i$. Эти пересечения являются открытыми множествами. (В определении топологического пространства мы требовали, чтобы конечные пересечения открытых множеств были открытыми множествами.) Множества $F$ и $G$ содержат $x$ и $y$ соответственно. Так как для точек $x$ и $y$ нарушается требование отделимости, то множества $F$ и $G$ имеют общую точку. Взяв ее в качестве $b$, получим, что $R(a_i, b)$ при всех $i$. Этим завершается проверка направленности отношения $R$.

До сих пор все наши рассуждения происходили в стандартной интерпретации. Теперь перейдем в нестандартную и воспользуемся требованием направленности. Согласно этому требованию найдется такое (вообще говоря, нестандартное) $b$, что $R(a, b)$ для любого стандартного $a$, входящего в первую проекцию отношения $R$. Другими словами, $b \in {}^*U \cap {}^*V$ для любой пары стандартных открытых множеств $U$ и $V$, для которых $x \in U$ и $y \in V$. Тогда $b$ принадлежит и монаде точки $x$, и монаде точки $y$; следовательно, эти монады пересекаются. Тем самым мы завершаем доказательство нестандартного критерия отделимости, сформулированного выше.

Приведем еще один пример нестандартного критерия стандартного понятия. Этим понятием будет компактность. Мы уже имели нестандартный критерий компактности множества действительных чисел, теперь обобщим его на произвольные топологические пространства. Напомним, что топологическое пространство $X$ называется *компактным*, если из любого покрытия этого пространства открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Другими словами, $X$ компактно, если для любого семейства $\alpha$ открытых (в пространстве $X$) множеств, образующего покрытие пространства $X$ (это значит, что всякая точка пространства $X$ принадлежит хотя бы одному из множества семейства $\alpha$), существует конечное подсемейство $\alpha' \subset \alpha$, также образующее покрытие пространства $X$. Свойство компактности (иногда его называют также свойством бикомпактности) является одним из важнейших свойств топологических пространств. Дадим теперь нестандартный критерий компактности. Именно: пространство $X$ компактно тогда и только тогда, когда любая точка его нестандартного расширения $^*X$ бесконечно близка к какой-нибудь из стандартных точек этого расширения. Другими словами, $X$ компактно тогда и только тогда, когда объединение всех монад совпадает с множеством всех точек нестандартного расширения пространства $X$.

Попытаемся изложить основную идею доказательства критерия компактности. При этом мы, как и прежде, будем широко пользоваться вольностями речи, систематически отождествляя объекты стандартной интерпретации с соответствующими им объектами нестандартной интерпретации. Итак, пусть пространство $X$ компактно. Докажем, что всякая (возможно, нестандартная) точка бесконечно близка к некоторой стандартной точке. Пусть $x$ — произвольная (возможно, нестандартная) точка пространства $X$. Нам нужно найти стандартную точку, к которой она бесконечно близка. Предположим, что такой точки нет. Это означает, что для каждой стандартной точки $a$ существует открытое множество $U_a$, не содержащее точки $x$ (вспоминаем определение монады!). Эти открытые множества образуют покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$. Это подпокрытие будет содержать все стандартные точки пространства, но не все нестандартные. Поэтому суждение

$$\forall x\,((x \in X) \Rightarrow ((x \in U_1) \vee \ldots \vee (x \in U_n))),$$

гласящее, что множества $U_1, \ldots, U_n$ образуют покрытие, будет истинным в стандартной интерпретации и ложным в нестандартной, что противоречит принципу переноса. Итак, в одну сторону критерий компактности доказан. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть известно, что всякая точка бесконечно близка к некоторой стандартной. Покажем, что из всякого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть $\alpha$ — покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Рассмотрим отношение

$R(U, x) \rightleftharpoons U$ есть множество из покрытия $\alpha$, а $x$ — точка пространства, не принадлежащая $U$.

Так как покрытие $\alpha$ не имеет конечного подпокрытия, то это отношение будет направленным. Согласно требованию направленности, можно найти (возможно, нестандартную) точку $x$, которая находится в этом отношении с любым стандартным открытым множеством из нашего покрытия. Покажем, что она (в противоречии с предположением) не будет бесконечно близка ни к одной стандартной точке. В самом деле, пусть $a$ — произвольная стандартная точка. Она содержится в каком-то из множеств покрытия. Обозначим это множество через $U$. По определению бесконечной близости все бесконечно близкие к $a$ точки также содержатся в множестве $U$. Но точка $x$ не содержится в $U$. Значит, она не может быть бесконечно близкой к $a$. Полученное противоречие завершает доказательство нестандартного критерия компактности.

Подробное доказательство этого критерия можно найти в книге М. Девиса [3], уже неоднократно упоминавшейся нами, на с. 113 (следствие 1.7). Там же можно найти и доказательство рассмотренного нами нестандартного критерия отделимости на с. 111, теорема 1.2.

С помощью нестандартного критерия компактности можно без особого труда доказать знаменитую теорему Тихонова о компактности произведения произвольного числа компактных пространств. Это доказательство также имеется в книге Девиса — на с. 118 (теорема 2.6). Отметим, что «стандартное» доказательство этой теоремы довольно сложно (в частности, использует аксиому выбора). Нестандартный анализ позволяет «спрятать» применения аксиомы выбора в основные конструкции (а именно в построение нестандартной интерпретации с нужными свойствами). Это — одна из причин того, что нестандартные доказательства часто оказываются проще стандартных доказательств тех же самых теорем.

На этом мы заканчиваем обсуждение применения нестандартных методов в топологии.

## § 12. ЛЕЙБНИЦ И «ДРЕВНЯЯ ИСТОРИЯ» НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зависимости от точки зрения) от двух с половиной десятков до трех сотен лет. Два с половиной десятка получится, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад на одном из семинаров Принстонского университета о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Триста лет получится, если считать началом нестандартного анализа появление символов бесконечно малых $dx$ и $dy$ в трактате Лейбница «Новый метод» (см. [7], с. 166).

Трудно сказать с уверенностью, насколько в действительности Лейбниц был близок к идеям нестандартного анализа. Как пишет сам Робинсон в [61], гл. 10, «история предмета обычно пишется в свете его позднейшего развития. Уже более чем полвека все обзоры истории дифференциального и интегрального исчислений основывались на уверенности в том, что понятие бесконечно малых и бесконечно больших, если даже и непротиворечиво, бесполезно для развития анализа. В результате в работах этого периода заметно различие между строгостью, с которой рассматриваются идеи Лейбница и его последователей, и снисходительностью, проявляемой к провозвестникам идеи предела». Характерно, например, следующее высказывание Анри Лебега от 3 декабря 1926 г. «Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благодаря понятию предела» ([6], с. 6).

Считая, что идеи Лейбница и идеи сторонников понятия предельного перехода мерились двойным стандартом при несправедливом склонении весов правосудия в пользу предела, Робинсон предлагает во многом пересмотреть общую картину возникновения и развития математического анализа от Ньютона и Лейбница до Коши и Вейерштрасса. Этот пересмотр приводит к более полному признанию заслуг Лейбница, и сам Лейбниц перемещается, таким образом, из разряда гениев третьего класса в разряд гениев второго класса (здесь мы пользуемся классификацией, предложенной Станиславом Лемом [8]: в этой классификации гении третьего класса получают прижизненное, а гении более высокого второго класса — лишь посмертное признание).

Постараемся изложить историко-математические взгляды Робинсона. Отметим, однако, что здесь есть возможность впасть в другую крайность, приписав Лейбницу и его последователям наши сегодняшние взгляды, сложившиеся под влиянием нестандартного анализа. Чтобы быть в состоянии дать «объективную» оценку ранних этапов развития математического анализа, нужно прочесть работы его основателей глазами их учеников и современников, что, по-видимому, невозможно сделать, не погрузившись в культурную атмосферу того времени. Автор, разумеется, ни в малейшей степени не претендует на это. (Как, впрочем, не претендует на это и Робинсон, который пишет: «Наши замечания по необходимости будут фрагментарными, так как полная история Анализа лежит за пределами книги».) Переходя к изложению взглядов Робинсона (многие из которых нетрадиционны), мы хотим напомнить читателю об опасности их некритического восприятия: «публика, как судия беспристрастный и благоразумный, всегда соглашается с тем, кто последний жалуется ей» (А. С. Пушкин «Опровержения на критики»).

Прежде чем излагать свою точку зрения, Робинсон резюмирует стандартный взгляд на историю развития математического анализа в следующих словах ([61], с. 260):

«После длительного периода, в течение которого были определены площади, объемы и касательные в различных частных случаях, во второй половине семнадцатого столетия Ньютоном и (несколько позже, но независимо) Лейбницем была построена общая теория дифференцирования и интегрирования. Касаясь обоснования введенных им понятий, Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуиции; его непосредственные последователи предпочитали последнее. С другой стороны, Лейбниц и его последователи развивали теорию исходя из дифференциалов первого и следующих порядков. Технические удобства обозначений, использовавших дифференциалы, привели к быстрому развитию Анализа и его приложений в Европе, где они были приняты. Однако внутренние противоречия этой концепции привели к осознанию того, что необходимы какие-то другие основания. Лагранж считал, что ему удалось найти подходящий путь, взяв за основу тейлоровское разложение функции. Но первое строгое обоснование математического анализа было дано лишь Коши. Основой теории Коши было понятие предела, которое, будучи впервые выдвинуто Ньютоном, впоследствии поддерживалось Даламбером. Более формальное изложение методов Коши было дано Вейерштрассом (которого в некоторой степени предвосхитил Больцано). После создания теории пределов использование бесконечно больших и бесконечно малых превратилось в оборот речи, применяемый в выражениях типа «... стремится к бесконечности». Дальнейшее развитие теории неархимедовых полей было целиком предоставлено алгебре.»

Этот стандартный взгляд, по мнению Робинсона, в некоторых отношениях «должен быть дополнен или даже изменен». В доказательство этого Робинсон приводит большое количество выдержек из сочинений Лейбница и других упомянутых выше авторов. Как считает Робинсон, «... отношение Лейбница к бесконечно большим и бесконечно малым величинам в Анализе в основном оставалось неизменным в течение двух последних десятилетий его жизни. Он полностью одобрял их введение, но считал их «идеальными элементами, подобными мнимым числам. Эти идеальные элементы подчиняются тем же законам, что и обычные числа. Тем не менее они представляют собой не более чем удобные фикции, необходимые для облегчения рассуждений и открытий. Всегда, при желании, можно исключить их использование и вернуться к стилю античных математиков, рассуждая в терминах величин, достаточно больших (или малых) для того, чтобы ошибка была меньше любой наперед заданной. Все это отчетливо и неоднократно утверждается в сочинениях Лейбница» ([61], с. 261).

Приведем теперь некоторые из высказываний Лейбница, цитируемых Робинсоном. (Мы использовали переводы А. П. Юшкевича [7]; если не оговорено противное, страницы указаны по [7].)

«... Нужно воспринимать бесконечное подобно тому, как это делается в оптике, когда солнечные лучи считаются приходящими из бесконечно удаленной точки и поэтому параллельными... И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с радиусом земного шара, так что расстояние до неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика. Вместо бесконечно большого или бесконечно малого количества можно взять количество настолько большое или малое, насколько это нужно, чтобы ошибка не превышала заданной. Отличие от архимедовского стиля рассуждений лишь в выражениях, которые у нас более непосредственные и лучше приспособлены для искусства изобретать» (с. 190).

«...Если кто-то не желает рассматривать бесконечно большие и малые в строго метафизическом смысле, как реально существующие, он может пользоваться ими как „идеальными понятиями", которые сокращают рассуждения, подобно мнимым корням в обычном анализе (вроде, например, $\sqrt{-2}$)... Таким же образом представляют более трех измерений...— все это для установления идей, способных сокращать рассуждения и основывающихся на реальностях.

Не следует все же воображать, что наука о бесконечном унижается этим объяснением и сводится к фикциям, ибо постоянно остается, говоря языком схоластики, синкатегорематическая бесконечность. Например, остается верным, что 2 равно $1/1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32$ и т. д., что есть бесконечный ряд, в котором содержатся сразу все дроби с числителем 1 и со знаменателями, образующими удваивающуюся геометрическую прогрессию, хотя здесь употребляют все время лишь обыкновенные числа и хотя не вводят никакой бесконечно малой дроби или дроби с бесконечным знаменателем... Правила конечного сохраняют силу в бесконечном, как если бы существовали атомы..., хотя они вовсе не существуют, ибо материя в действительности делима без конца, и, наоборот, правила бесконечного сохраняют силу в конечном, как если бы имелись метафизические бесконечно малые, хотя в них и нет нужды и хотя деление материи никогда не приходит к бесконечно малым частицам. Это объясняется тем, что все управляется разумом и что иначе совсем не было бы ни науки, ни правила, а это не согласовалось бы с природой верховного начала» (с. 192—193). (Это высказывание Лейбница можно при желании рассматривать как формулировку принципа переноса, что дает еще одно основание называть его также «принципом Лейбница».)

«...По правде говоря, я сам не слишком убежден, что надо рассматривать бесконечные и бесконечно малые иначе чем как идеальные вещи и хорошо обоснованные фикции...» (цитируем по [61], с. 263)

«...Несравнимыми величинами я называю такие, одна из которых никогда не сможет превзойти другую, на какое конечное число ее бы ни помножили, так же как это понимает Евклид...» (с. 189).

Приведем еще несколько цитат (на этот раз отсутствующих в монографии Робинсона), которые мы заимствуем из [7].

«...Я покажу, что $dx\,dx$ и $d\,dx$ суть величины, ибо при их умножении на бесконечное число (но высшее, или бесконечно бесконечное) они дают обыкновенные величины» (с. 188).

«...При доказательстве я применял несравнимо малые величины, например разность двух обыкновенных величин, несравнимую с самими величинами. Если я не ошибаюсь, их можно яснее всего объяснить таким образом. Если кто-либо не желает допускать бесконечно малые, то он может принимать величины настолько малые, настолько ему представляется достаточным, чтобы они были несравнимыми и порождали совершенно несущественную ошибку, меньшую всякой данной. Подобно тому как в сравнении с небом земля принимается за точку, а диаметр земли за бесконечно малую линию, так можно доказать, что если стороны угла заключают основание, несравнимо меньшее, чем они сами, то образуемый ими угол будет несравнимо меньше прямого, а разность сторон будет несравнимой с самими разнящимися сторонами; разности целого синуса, синуса дополнения и секанса также будут несравнимы с самими разнящимися, и также будут с разностями хорды, дуги и тангенса. А так как они сами суть бесконечно малые, то разности будут бесконечно бесконечно малыми и синус-верзус будет бесконечно бесконечно малым и несравнимым с прямым. Имеется бесконечно много порядков как бесконечных величин, так и бесконечно малых» (с. 187).

«...новый Анализ бесконечных рассматривает не линии и не числа, но величины вообще, как это делает обыкновенная Алгебра. Этот Анализ содержит новый алгоритм, т. е. новый способ складывать, вычитать, умножать, делить, извлекать корни, соответствующий несравнимым величинам, т. е. тем, которые бесконечно велики или бесконечно малы в сравнении с другими...» (с. 166).

Методы Лейбница господствовали в континентальной Европе в течение более чем 50 лет. Однако во второй половине XVIII столетия начались поиски альтернативных путей построения анализа. В качестве такого пути Лагранж предлагал рассматривать разложения функций в степенные ряды, предполагая, по-видимому, что любая или почти любая функция может быть разложена в такой ряд. Даламбер предлагал понятие предела в качестве исходного для построения математического анализа. Он писал:

«Говорят, что одна величина является пределом другой, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую заданную величину... Теория пределов является основанием подлинной Метафизики дифференциального исчисления... В дифференциальном исчислении речь идет не о бесконечно малых величинах, как это обычно утверждают; речь идет лишь о пределах конечных величин... Термином «бесконечно малая» пользуются лишь как сокращением...»

Эти высказывания Даламбера выглядят как изложение (хотя и не вполне точное) современной точки зрения на предел. Можно было бы предположить, что с этого времени понятие бесконечно малых будет полностью устранено. Это, однако, не так. Коши, рассматриваемый обычно как основатель современного подхода к построению анализа, использует понятие бесконечно малой величины. Пытаясь объяснить в современных терминах, что Коши называет «величиной», можно предположить, что величина — это функция с действительными значениями, определенная на упорядоченном множестве без наибольшего элемента. Коши, однако, отнюдь не сводит величины к функциям. Наоборот, он говорит о функции как о соотношении, связывающем две величины. В его изложении бесконечно малые и пределы фигурируют как равноправные компоненты обоснования анализа.

Проиллюстрируем стиль изложения Коши на примере знаменитой «ошибки Коши» — его «доказательства» того, что сумма функционального ряда $u_0(x)+u_1(x)+\ldots$, составленного из непрерывных функций, непрерывна. Формулировка Коши выглядит вполне современно: «Если различные члены ряда... являются функциями одной и той же переменной $x$, непрерывными по отношению к этой переменной в окрестности данной точки, в которой ряд сходится, сумма ряда также является непрерывной в окрестности этой точки».

Доказательство, однако, апеллирует к бесконечно малым величинам. Вводя обозначения

$$s_n(x) = u_0(x) + \ldots + u_n(x),$$
$$s(x) = \lim s_n(x), \quad r_n(x) = s - s_n(x),$$

Коши рассматривает «приращения, которые получают эти три функции, когда $x$ увеличивается на бесконечно малую величину. Приращение $s_n$ будет бесконечно малой величиной...; приращение $r_n$ станет несущественным..., если взять $n$ очень большим...».

На этом рассуждение Коши заканчивается. В терминах нестандартного анализа его можно прочитать так: разность $|s(x+\alpha) - s(x)|$ оценивается как не превосходящая $|s(x+\alpha) - s_n(x+\alpha)| + |s_n(x+\alpha) - s_n(x)| + |s(x) - s_n(x)|$, второй член бесконечно мал при бесконечно малых $\alpha$, а первый и третий бесконечно малы при бесконечно больших $n$. Это рассуждение, однако, неверно: $s_n(x+\alpha) - s_n(x)$ бесконечно мал при бесконечно малых $\alpha$ и стандартных $n$ (а не любых!).

Вернувшись к этому утверждению (уже после приведенного Абелем контрпримера — ряда из непрерывных функций, сумма которого разрывна), Коши формулирует такое утверждение: если $u_i$ — непрерывные функции и «сумма $u_n + \ldots + u_{n'-1}$ всегда бесконечно мала при бесконечно большом $n$ и $n' > n$», то ряд $\sum u_i$ сходится к непрерывной функции. Здесь уже и формулировка требует истолкования. Если толковать это так: «$u_n(x) + \ldots + u_{n'-1}(x)$ бесконечно мала при любых бесконечно больших $n$ и $n' > n$ и любом (не обязательно стандартном!) $x$», то мы приходим к понятию равномерной сходимости, фигурирующем в современном варианте аналогичной теоремы (о непрерывности предела равномерно сходящегося ряда непрерывных функций).

Сказанное показывает, что точка зрения Коши, по-видимому, не так проста и не сводится, как это может показаться, к нечеткому изложению наших нынешних взглядов.

На этом мы закончим обзор «древней» истории нестандартного математического анализа (в котором мы следовали Робинсону) и обратимся к другому, более современному источнику нестандартного анализа — математической логике. Более конкретно, этим источником стали нестандартные модели аксиоматических систем. О них мы расскажем в следующем параграфе.

## § 13. РОБИНСОН И «НОВАЯ ИСТОРИЯ» НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Аксиоматический метод изучения какой-то математической структуры состоит, грубо говоря, в следующем. Мы выделяем некоторые свойства рассматриваемой структуры и называем их аксиомами. Затем мы выводим из аксиом различные следствия (теоремы). Эти теоремы будут истинны в рассматриваемой структуре. Более того, они будут истинны не только в рассматриваемой структуре, но и в любой другой, в которой истинны аксиомы. Может оказаться, что существует много самых разных структур, удовлетворяющих данной системе аксиом. Каждая такая структура называется *моделью* рассматриваемой системы аксиом. Хорошо или плохо, если система аксиом имеет много различных (неизоморфных) моделей? Это зависит от того, с какой целью создавалась аксиоматическая система. Если она, подобно системе аксиом поля, предназначена для того, чтобы выделить общие свойства различных структур и единым методом получать результаты о всех этих структурах, то чем разнообразнее модели этой аксиоматической системы, тем лучше. Разнообразие моделей системы аксиом поля свидетельствует о широкой применимости теории полей. (То же самое можно сказать и про аксиомы групп, колец и т. п.)

Существует, однако, и другой подход к аксиоматическим системам, согласно которому аксиоматическая система должна возможно более полно отражать свойства данной конкретной структуры, например множества натуральных чисел. Примером аксиоматической системы, созданной с такой целью, являются аксиомы Пеано, характеризующие натуральный ряд как множество $N$ с выделенным элементом (обозначаемым $O$ и называемым нулем) и одноместной операцией (обозначаемой $S$ и называемой прибавлением единицы или взятием последующего):

1. $\forall a\,(O \neq S(a))$.
2. $\forall a \forall b\,((S(a) = S(b)) \Rightarrow (a = b))$.
3. (Аксиома индукции.) Если множество $M \subset N$ таково, что $O \in M$ и для всякого $\alpha \in M$ выполнено $S(\alpha) \in M$, то $M = N$.

Эти аксиомы предназначены для того, чтобы как можно полнее отражать свойства натуральных чисел. Поэтому обнаружение структуры (множества $N$ с выделенным элементом и одноместной операцией), которая удовлетворяла бы этим аксиомам, но сильно отличалась бы от обычного натурального ряда, означало бы, что эти аксиомы неудовлетворительны. К счастью, оказывается, что найти такую структуру нельзя. Именно, имеет место такое утверждение (категоричность аксиом Пеано).

Пусть $N$ — произвольное множество, $O$ — любой элемент $N$ и $S$ — функция, определенная на $N$ со значениями в $N$, причем выполнены свойства 1—3. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством $N$ и обычным натуральным рядом $\mathbb{N}$, при котором элементу $O \in N$ соответствует натуральное число 0, а функция $S$ переходит в функцию прибавления единицы (как говорят, структуры $N$ и $\mathbb{N}$ изоморфны).

Доказательство этого утверждения достаточно просто, и мы приведем его. Установим искомое соответствие таким образом:

| Натуральные числа | Элементы $N$ |
|---|---|
| 0 | $O$ |
| 1 | $S(O)$ |
| 2 | $S(S(O))$ |
| 3 | $S(S(S(O)))$ |
| ... | ... |

Обозначив $\underbrace{S(S(\ldots S}_{m\ \text{раз}}(O)\ldots)$ через $S^m(O)$, можно сказать, что натуральному числу $m \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие элемент $S^m(O) \in N$. Нужно доказать, что это соответствие взаимно однозначно, т. е. что $S^m(O) \neq S^n(O)$ при $m \neq n$ и что любой $x \in N$ равен $S^m(O)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Если $S^m(O) = S^n(O)$, $m \neq n$ и $m, n > 0$, то $S^{m-1}(O) = S^{n-1}(O)$ по аксиоме 2 [так как $S^k(O) = S(S^{k-1}(O))$]. Применяя это рассуждение несколько раз, находим, что $S^{m-n}(O) = 0$, т. е. $S(a) = O$, где $a = S^{m-n-1}(O)$ (для определенности мы рассматривали случай $m > n$). А это противоречит аксиоме 1. Чтобы завершить доказательство взаимной однозначности, нужно показать еще, что множество $M = \{O, S(O), \ldots, S^n(O), \ldots\}$ совпадает со всем $N$. Это непосредственно следует из аксиомы индукции. Итак, взаимная однозначность построенного соответствия доказана. То, что при этом соответствии нуль переходит в элемент $O$, а функция прибавления единицы — в функцию $S$, очевидно. Таким образом, категоричность аксиом Пеано доказана.

Таким образом, можно сказать, что аксиомы Пеано «полностью» описывают натуральные числа.

Однако система аксиом Пеано имеет следующий недостаток: она предполагает заранее известным понятие множества (это понятие фигурирует в аксиоме индукции). Хотелось бы, чтобы все аксиомы были записаны в виде формул некоторого языка первого порядка (наподобие первых двух аксиом: эти аксиомы представляют собой формулы языка первого порядка с одним нульместным и с одним одноместным функциональными символами). При этом хотелось бы, чтобы свойство категоричности (изоморфии всех моделей этой системы аксиом) сохранилось. К сожалению, теорема Гёделя о полноте и ее следствие — теорема компактности — разрушают надежду на построение категоричной системы аксиом в языке первого порядка — такой системы аксиом не существует ни для какой структуры, содержащей бесконечное число элементов. Поясним, почему так получается. Возьмем в качестве системы аксиом множество $T$ всех закрытых формул, истинных в данной структуре. Ясно, что эта система аксиом самая большая из всех возможных; если она окажется не категоричной, то и любая другая система аксиом, записанных на том же языке, не будет категоричной. Далее, применяя рассуждения, аналогичные использованным в § 7, мы можем построить модель множества $T$, существование которой противоречит требованию категоричности, иными словами, «нестандартную» модель множества $T$.

Приведенное выше обсуждение аксиоматического метода (весьма неточное и расплывчатое) понадобилось нам для того, чтобы показать, каким образом исследование возможностей этого метода приводит к понятию нестандартной модели. К 1960 г. методы построения нестандартных моделей (и с помощью ультрафильтров, и с помощью теорем полноты и компактности) были давно разработаны и хорошо известны специалистам по теории моделей, одним из основателей которой был А. Робинсон. (Советскому читателю он известен по русскому переводу [11] его монографии; нестандартному анализу посвящены три заключительных параграфа этой монографии — параграфы 9.4, 9.5 и 9.6). Оставалось «всего лишь» соединить их с идеями о применении бесконечно малых величин в анализе, чтобы положить начало бурному развитию нестандартного анализа.

Проследим за историей этого развития. В 1961 г. появилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук [60]. В статье были намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье Робинсон, в частности, писал: «Наша главная цель — показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтенной проблеме построения исчисления, включающего бесконечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, настойчиво защищаемое Лейбницем и без колебаний принимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Коши, поставивших математический анализ на твердую основу». (Заметим в скобках, что за твердость основы надо было платить и сложностью аппарата, и отдалением от физической наглядности.)

Итак, до 1961 г. понятие бесконечно малой постоянной величины, бесконечно малого числа, третировалось как в лучшем случае нестрогое, а в худшем — бессмысленное. Робинсон [60] впервые обнаружил, что этому понятию можно придать точный математический смысл [1]). (Примечательно, что примерно в то же время был разрушен и другой миф — миф об инертности инертных газов: в 1962 г. было обнаружено, что инертные газы способны вступать в химические соединения! Думается, что до этого момента из многих химических лабораторий был бы с позором изгнан всякий сотрудник, которого начальство застало бы за попыткой заставить инертный газ с чем-нибудь соединиться. Этот позор можно было бы сравнить лишь с позором, покрывавшим лет тридцать назад всякого математика, рассуждавшего о бесконечно малых числах.)

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г.— книга У. А. Дж. Люксембурга «Нестандартный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел» [50], в 1966 г.— книга самого А. Робинсона «Нестандартный анализ» [61] и в 1969 г.— книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда «Лекции о нестандартном анализе» [54] (из 77 страниц этих «Лекций» действительной прямой отведено немногим бо-

---

[1]) Наполнение смыслом понятий, традиционно рассматриваемых как не имеющие смысла,— важный шаг в развитии науки. Другой важный шаг — отнятие смысла у понятий, традиционно признаваемых осмысленными (именно так поступил Эйнштейн с понятием одновременности, и это положило начало теории относительности).

лее двух: «нестандартный анализ» понимается здесь в самом широком смысле). Наибольший резонанс вызвала книга Робинсона, вышедшая в известной серии «Исследования по логике и основаниям математики». В девяти первых главах этой монографии содержалось как построение необходимого логико-математического аппарата (со ссылкой на А. И. Мальцева как автора лежащей в основе этого аппарата теоремы компактности), так и многочисленные приложения — к дифференциальному и интегральному исчислению, к общей топологии, к теории функций комплексной переменной, к теории групп Ли, к гидродинамике и теории упругости. Специальный интерес представляет последняя, десятая глава, в которой автор излагает свой взгляд на историю развития математического анализа. Хотя книга Робинсона, выдержавшая не одно издание, и сыграла значительную роль в развитии нестандартного анализа, ее вряд ли следует рекомендовать для начального ознакомления; она написана сжато и трудно.

Помимо выхода книги Робинсона, в 1966 г. в нестандартном анализе произошло еще одно событие. Появилась статья А. Р. Бернстейна и А. Робинсона [21], в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение ранее поставленной проблемы, относящейся к обычным, «стандартным» математическим объектам. Для знатоков поясним, какая проблема имеется здесь в виду. Речь идет о проблеме инвариантных подпространств для полиномиально компактных операторов (оператор $T$ называется полиномиально компактным, если компактен оператор $p(T)$ для некоторого полинома $p$ с комплексными коэффициентами). Краткая история вопроса такова. Теорема о существовании нетривиального инвариантного замкнутого пространства для компактных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве была доказана Дж. фон Нейманом в начале 30-х годов. (Как известно, все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны «каноническому» пространству $l_2$, состоящему из последовательностей комплексных чисел, суммируемых с квадратом; что касается несепарабельных пространств, то для них названная теорема очевидна.) Доказательство Неймана, однако, не было опубликовано. Та же теорема для компактных операторов в произвольном банаховом пространстве над полем комплексных чисел была установлена впоследствии Н. Ароншайном и К. Т. Смитом [18].

В очерке П. Р. Халмоша «Взгляд в гильбертово пространство» [31] в качестве девятой проблемы фигурирует поставленная К. Т. Смитом задача о существовании инвариантного подпространства для таких операторов $T$ в гильбертовом пространстве $l_2$, для которых оператор $T^2$ компактен (все такие $T$, очевидно, полиномиально компактны). Решение этой проблемы и было получено А. Р. Бернстейном и А. Робинсоном методами нестандартного анализа; они доказали, что любой полиномиально компактный оператор в гильбертовом пространстве $l_2$ имеет нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство. П. Р. Халмош ознакомился с доказательством двух названных авторов и переработал их доказательство в свое, не использующее нестандартный анализ [32]. В дальнейшем Бернстейн, используя нестандартный анализ, распространил теорему Бернстейна — Робинсона на случай полиномиально компактных операторов в произвольных банаховых пространствах над полем комплексных чисел [20]. Сравнительно недавно теорема об инвариантных подпространствах для компактных операторов была обобщена (также с помощью методов нестандартного анализа), на более широкий класс линейных топологических пространств, чем банаховы [30]. Впрочем, следует отметить, что В. И. Ломоносов показал (стандартными методами), в частности, что всякий оператор в бесконечномерном банаховом пространстве, коммутирующий с компактным (и тем самым всякий полиномиально компактный), имеет инвариантное подпространство. См. [12], с. 427—428, примечание редактора (Е. А. Горина), который называет доказательство Ломоносова более простым, чем все известные ранее.

Теорема Бернстейна — Робинсона представляет собой отнюдь не единственный (хотя, быть может, наиболее эффектный) пример применения методов нестандартного анализа. Число и разнообразие таких применений (заложенных, как мы видели, еще Робинсоном) неуклонно растут. Приложения нестандартного анализа внутри математики охватывают обширную область от топологии (см. [1], с. 210—211, [19], [29], [36]) до теории дифференциальных уравнений [17], теории мер и вероятностей (в которой возникает возможность понимания вероятности события как отношения бесконечного числа благоприятных исходов к общему числу исходов), см. [22], [26], [42], [46], [47], [58], [59] и теории игр [68]. Бесконечно малые числа (в смысле нестандартного анализа) оказываются полезными в исследовании бесконечно малых величин в смысле стандартных учебников анализа (функций, стремящихся к нулю), см. [43], [45].

Что касается внематематических приложений, то среди них мы встречаем даже приложения к математической экономике (рассматривается рынок с бесконечно большим числом участников, каждый из которых вносит бесконечно малый вклад) [23], [24]. Многообещающим выглядит использование нестандартного гильбертова пространства $^*l_2$ для построения квантовой механики (традиционно формулируемой в терминах «обычного» пространства $l_2$), см. [28], а также [55] (рассматривается нестандартное определение фейнмановского интеграла по путям), [41] (рассматривается бесконечная флуктуация поля в бесконечно малой области) и [40]. А в статистической механике становится возможным рассматривать системы из бесконечного числа частиц, см. [35]. Интерес физиков к нестандартному анализу обусловил появление его популярных изложений в физических журналах ([64], [66]).

Помимо применений к различным областям математики (и не только математики), исследования в области нестандартного анализа включают в себя и исследование самих нестандартных структур (см., например, [37]).

В 1976 г. вышли сразу три книги по нестандартному анализу: «Элементарный анализ» и «Основания исчисления бесконечно малых» Г. Дж. Кейслера ([38], [39]) и «Введение в теорию бесконечно малых» К. Д. Строяна и В. А. Дж. Люксембурга [62]. Первая из них представляет собой написанный с нестандартных позиций учебник по математическому анализу — типа учебника для втузов с повышенными требованиями по математике. В этой книге большое число примеров и упражнений, однако многие доказательства даны лишь эскизно; само существование поля гипердействительных чисел и некоторый вариант принципа переноса провозглашены в качестве аксиом. Все необходимое обоснование перенесено во вторую книгу, тесно связанную с первой и выступающую в качестве руководства для преподавателей. «Основания исчисления бесконечно малых» содержат тот материал, который следует предварительно изучить, чтобы квалифицированно использовать в преподавании «Элементарный анализ». Наконец, книга Строяна и Люксембурга — это фундаментальная монография, вызывающая при чтении трудности даже у специалистов.

В 1977 г. вышла книга М. Девиса, русский перевод которой [3] уже неоднократно упоминался нами. Эта книга, пожалуй, в наибольшей степени подходит для первого ознакомления с предметом. Слова «прикладной нестандартный анализ» суть буквальный перевод английского названия книги; содержанию книги больше отвечало бы название «Нестандартный анализ и его приложения» при понимании термина «нестандартный анализ» в широком смысле общей абстрактной теории; действительно, первая глава книги посвящена именно такой теории, а остальные главы — приложениям этой теории. Так, в главе второй общие построения первой главы применяются к изучению множества действительных чисел $\mathbb{R}$, а в главе третьей — к изучению метрических и, более общо, топологических пространств. В главе четвертой рассматривается приложение методов нестандартного анализа к задачам исследования нормированных линейных пространств, а в главе пятой — к исследованию гильбертова пространства $l_2$; центральное место в последней главе занимает доказательство ранее упоминавшейся теоремы Бернстейна — Робинсона.

Быть может, наибольшую пользу нестандартные методы могут принести в области прикладной математики — недаром физики и инженеры так любят говорить о «бесконечно малом» и «бесконечно большом». В 1981 г. в серии «Lecture notes in mathematics» вышла книга Р. Лутца и М. Гозе «Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями» [48]. В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений. Грубо говоря, задача теории возмущений состоит в следующем. Имеется какой-то объект (многочлен, линейный оператор, алгебра Ли, дифференциальное уравнение и т. д.). Его чуть-чуть изменяют. Как связаны свойства получившегося объекта со свойствами исходного? На языке нестандартного анализа задача ставится так. Исходный объект является стандартным. Изменение, которому он подвергается, бесконечно мало. Что можно сказать о свойствах измененного объекта, если нам известны свойства исходного? Мы видим, что понятия нестандартного анализа фигурируют уже в самой постановке задачи (а не только в ее решении). Разумеется, можно пытаться перевести задачу на язык классического анализа (без бесконечно малых) и решать ее классическими средствами, но, как пишут авторы рассматриваемой книги, в результате применения нестандартных методов появляются «как изящные формулировки, так и интуитивно более ясные доказательства» (с. 127).

В частности, в 8-м уроке части IV книги Лутца и Гозе рассматривается приобретшая широкую известность (в немалой степени благодаря усилиям математиков круга Н. Бурбаки, см. [25], [5]) так называемая «проблема уток». Эта проблема состоит в требовании объяснить, каким образом у уравнения ван дер Поля

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a,$$

где $\varepsilon$ положительно и достаточно мало, исчезает предельный цикл, когда параметр $a$, возрастая, переходит через значение 1. Термин «утка» объясняется тем, что этот цикл в процессе своего превращения приобретает форму, напоминающую контур летящей утки. Рассмотрение параметра $\varepsilon$ не просто как малого действительного, но как бесконечно малого гипердействительного числа оказалось для этой задачи чрезвычайно полезным.

В заключительном параграфе недавно вышедшего учебного пособия А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе «Субдифференциалы и их применения» (Новосибирск, 1985.— 88 с.), названном «Конус Кларка», авторы, приведя соответствующее определение, указывают на с. 72: «с первого взгляда невозможно понять ни свойства конуса Кларка, ни сам смысл его формального определения». Последующие страницы пособия посвящены разъяснению этих свойств и этого смысла на языке нестандартного анализа (причем отмечается, что «с качественной точки зрения инфинитезимальные касательные конусы представляют собой результаты разглядывания множества в микроскоп»).

Наряду с изложенным в нашей книжке подходом к нестандартному анализу (восходящим к Робинсону) существует и приобретает возрастающую популярность другой подход. При этом подходе бесконечно малые элементы не «изобретают», строя расширения действительной прямой или других математических структур, а «открывают» внутри этих структур. Нам предлагается считать, например, что бесконечно малые всегда были среди действительных чисел, но просто мы их не видели, не имея средств выделить среди остальных.

Сказанное кажется противоречивым: ведь мы же знаем, что в поле действительных чисел справедлива аксиома Архимеда и, следовательно, нет бесконечно малых. Как же их можно там «открыть»? Вспомним, однако, обсуждение аксиомы Архимеда и ее формального аналога в § 10. Мы видели, что вполне возможна ситуация, в которой аксиома Архимеда не выполняется, в то время как ее формальный аналог является истинной формулой. Нам теперь предлагается считать, что именно так и обстоит дело в «обыкновенных» действительных числах. При этом все обычные теоремы, касающиеся действительных чисел, остаются в силе, так как их доказательства могут быть формализованы, и в этих формализациях используется не интуитивно понимаемая аксиома Архимеда, а ее формальный аналог.

Сказанное, разумеется, требует уточнения. Мы наметим лишь общую его схему (следуя работе Нельсона [56]; другой способ уточнения обсуждается в [33]). Рассмотрим аксиоматическую систему теории множеств и добавим к ней новое неопределяемое понятие «$x$ — стандартное множество» (в дополнение к уже имевшемуся неопределяемому понятию «$x$ — элемент множества $y$»). При этом сохраняются все имевшиеся ранее аксиомы этой системы (ничего не говорящие, естественно, о новом понятии «быть стандартным»), а также добавляются новые аксиомы. Грубо говоря, эти аксиомы соответствуют принципу переноса, принципу направленности и возможности рассматривать произвольные множества в стандартной суперструктуре. При этом оказывается, что возникающее расширение аксиоматической теории множеств является консервативным в том смысле, что всякая выводимая в этом расширении формула обычной теории множеств (т. е. не содержащая понятия «стандартный») выводима и в обычной теории множеств. Таким образом, для «старых» формул «новые» средства доказательства равносильны «старым», хотя — и в этом пафос всего нестандартного анализа — «новые» доказательства могут быть более короткими и естественными, чем «старые» доказательства тех же утверждений.

Различие между робинсоновским подходом к нестандартному анализу и новым, аксиоматическим подходом к нему проявляется не столько в математических результатах, которые с их помощью могут быть получены, сколько в той позиции, с которой мы их рассматриваем. Провозглашая, что бесконечно малые — это существовавшая всегда реальность, аксиоматический подход вдохновляет нас на их безбоязненное использование не только в качестве средств доказательства, «полезных фикций», но и как полноправных математических объектов, могущих входить в формулировки наших утверждений. Будущее развитие нестандартного анализа покажет, насколько этот взгляд является плодотворным.

В настоящее время нестандартный анализ завоевывает все большее признание. Состоялся ряд международных симпозиумов, специально посвященных нестандартному анализу и его приложениям [51], [52], [34]. В течение последних десятилетий нестандартный анализ (точнее, элементарный математический анализ, но основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США. Некоторые итоги такого рода преподавания были подведены в методической статье, опубликованной в 1976 г. в «Американском математическом ежемесячнике» [63]. Статья заканчивается следующими фразами: «Опасения, ... что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных (бесконечно малых) элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов».

## § 14. СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА «НА САМОМ ДЕЛЕ»?

Конечно, нестандартные гипердейстительные числа (т. е. гипердействительные числа, не являющиеся действительными) — довольно-таки необычные объекты. На то они и называются нестандартными. Но что значит необычные? Необычные означает непривычные. Ведь то, к чему привык, уже перестает ощущаться как необычное. И к нестандартным числам надо просто привыкнуть.

Процесс привыкания к нестандартным числам встречает известные психологические трудности. Не всем сразу делается понятным, где отводится место для новых чисел. Для бесконечно больших чисел такое место находится с большей (хотя, скорее всего, ложной) легкостью — где-то в отрицательной или положительной бесконечности. В этом смысле психологически проще освоиться с нестандартными гипернатуральными числами. Всякое такое число бесконечно велико и положительно, оно больше всякого натурального. По существу, представление о таком числе уже бытовало (хотя и не в строгом понимании) в среде математиков: словом «гу́гол» ста́ло обозначаться в последнее время натуральное число, превосходящее всякое разумное количество. Бесконечно большие гипердействительные числа могут быть уже не только положительны, но и отрицательны: бесконечно большое отрицательное число меньше [1]), а положительное — больше всех обычных, стандартных чисел. Но ведь есть еще конечные нестандартные числа. Где помещаются они? Они помещаются между действительными, заполняя пустоты между ними. Но разве существуют такие пустоты? Это как посмотреть. Разумеется, если стоять на той точке зрения, что возможны только (стандартные) действительные числа, никаких пустот между ними не окажется, да и заполнять эти пустоты, существуй они, было бы нечем (ведь при выбранной точке зрения никаких нестандартных чисел просто нет). Переход от действительных чисел к конечным гипердействительным числам путем добавления к первым конечных нестандартных чисел происходит аналогично тому, как осуществляется переход от рациональных чисел к действительным числам путем добавления к первым чисел иррациональных. Иррациональные числа располагаются между рациональными, и ясное понимание этого тоже нередко вызывает у учащихся психологические затруднения. И в этом случае тоже можно (хотя это и очень неудобно) стать на точку зрения, что числа бывают только рациональные, и для действительных чисел тогда не будет места на нашей числовой оси. Правда, в таком случае мы должны будем отказаться от таких привычных возможностей, как, скажем, возможность извлечь квадратный корень из любого положительного числа. Отказываясь от нестандартных чисел, мы также лишаем себя некоторых возможностей — но на этот раз возможностей как раз непривычных, таких, как право рассматривать бесконечно малые и бесконечно большие числа.

Конечно, аналогия между конечными нестандартными числами и иррациональными числами справедлива лишь

[1]) Терминология малоприятна: бесконечно *большое* отрицательное число характеризуется как число, которое *меньше* любого числа некоторой совокупности. Дело в том, что бесконечно большие числа (как положительные, так и отрицательные) выделяются тем, что их абсолютная величина *больше* всякого (стандартного натурального числа.

до известных пределов: иррациональные числа заполняют так называемые щели между рациональными числами (по одному иррациональному числу на каждую щель), а чтобы получить конечную часть гипердействительной оси, надо каждое действительное число раздуть в интервал (правда, бесконечно малый). (Ведь мы видим звезды точками, хотя на самом деле они диски. Аналогично можно считать, что то, что мы «видим» как точки на действительной оси, на самом деле представляет собой интервал с центром в действительной точке, т. е. монаду.)

Прочитав предыдущие строки этого параграфа, читатель вправе испытать законное недоумение. Что значит «можно считать так, а можно и этак»? А как на самом деле? Всамделишная-то числовая ось из чего состоит — только из рациональных чисел? или только из действительных? или конечных гипердействительных? или из всех гипердействительных, как конечных, так и бесконечно больших?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо прежде всего понять, что значат слова «на самом деле». В чем же заключается это самое дело? А дело в том, что надо четко различать математическую и физическую реальности.

В математической реальности существуют различные *числовые системы* (если угодно, можно называть их *числовыми осями*): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $^*\mathbb{R}$. Каждая из них представляет собой линейно упорядоченное множество с определенными на нем операциями сложения и умножения. Каждую из этих систем можно считать расширением предыдущей (причем и порядок, и результат применения операций сохраняются для «старых» элементов) и, таким образом, писать

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}.$$

Числовая система (или числовая ось) $\mathbb{R}$ выделяется тем, что ее элементы (действительные числа) взаимно однозначно, и с сохранением порядка, соответствуют точкам геометрической прямой. Казалось бы, это обстоятельство является решающим: геометрическая прямая (точнее, прямая с выделенными на ней двумя точками, названными соответственно «нуль» и «единица») и дает «подлинную» числовую ось.

Однако сама геометрическая прямая представляет собою объект математической (а не физической!) реальности — в данном случае объект математической структуры, описываемой соответствующими аксиомами и называемой «евклидова геометрия». Но ведь можно рассматривать и другие системы аксиом и получать другие геометрии, в которых прямые линии будут обладать другими, нежели в евклидовой геометрии, свойствами. Все мы знаем, что бывают неевклидовы геометрии. Среди них выделяются геометрия Лобачевского и геометрия Римана. В геометрии Лобачевского нарушаются (по сравнению с евклидовой геометрией) внешние свойства прямой, т. е. свойства, характеризующие поведение прямой в отношении других прямых, но внутренние свойства каждой прямой сохраняются: точки на прямой Лобачевского расположены так же, как на прямой Евклида. В геометрии Римана нарушаются не только внешние, но и внутренние свойства прямой: порядок точек на прямой Римана цикличен, он подобен порядку точек на окружности (в строгом математическом смысле его даже нельзя называть порядком). А можно придумать и такую «нестандартную» систему аксиом геометрии, в которой точки на прямой будут расположены так же, как на гипердействительной оси $^*\mathbb{R}$. Итак, мыслимы различные геометрии, и им соответствуют различные числовые системы.

Но тогда естественно спросить, которая же из геометрий, и, в частности, которое же из представлений о геометрической прямой, описывает реальное физическое пространство и, в частности, реальную физическую прямую. Здесь надо отчетливо понимать, что геометрическое описание физической реальности возможно только с известной степенью приблизительности. Так, планету Земля можно описать как шар, как эллипсоид и как геоид: и первое, и второе и даже третье описания приблизительны, хотя точность их возрастает (но не надо думать, что чем точность выше, тем описание лучше: подлинную революцию произвело именно представление о Земле как о шаре и, скорее всего, это представление навсегда останется «самым главным»). При не слишком больших и не слишком малых (по сравнению с размером человека) пространственных размерах физическое пространство с достаточной точностью описывается обычной геометрией Евклида. При значительном увеличении или, напротив, уменьшении размеров эта точность начинает расшатываться.

О том, как устроено физическое пространство в очень большом и в очень малом, мы знаем еще недостаточно. По-видимому, общепринятой является точка зрения, что пространство в целом конечно[1]). Луч света, направленный из некоторой точки такого пространства в какую-либо сторону, вернется в ту же точку с другой стороны (да и это верно со множеством оговорок). Не исключено, что два астрономических объекта, видимых на небе в разных местах, суть один и тот же объект, видимый с разных сторон. В одном из рассказов Уэллса герой рассказа, совершив космическое путешествие, возращается на Землю зеркально отраженным — нельзя исключить и такую возможность, допускаемую в так называемых неориентируемых пространствах. Итак, мы мало знаем, как ведет себя пространство в удаленных от нас районах. Мы мало (хотя, конечно, очень много по сравнению с прошлым веком) знаем и о микромире. Одна из серьезно обсуждаемых гипотез, лежащая в основе так называемой теории квантования пространства-времени, состоит, например, в том, что временны́е и пространственные промежутки не дробимы неограниченно, а что, напротив, существует минимальный возможный для таких промежутков конечный размер. Если бы это было так, все физические величины измерялись бы только натуральными[2]) числами. Противоположная точка зрения состоит в том, что существуют бесконечно малые размеры и бесконечно малые интервалы времени. Эта точка зрения приводит к тому, что физические величины представляют собою гипердействительные (и притом не обязательно действительные, а возможно, нестандартные) числа. Какая из точек зрения ближе к действительности — автору неизвестно. Тем не менее автор убежден, что любая математическая концепция может описывать действительность не исчерпывающим образом, а лишь приблизительно, огрубленно.

Быть может, во многих случаях вообще нецелесообразно спрашивать, которая из данной совокупности математических моделей лучше описывает физическую действительность. По-видимому, разумно принимать *принцип множественности моделей* и считать, что действительность описывается сразу целой совокупностью математических моделей, частично п р о т и в о р е ч а щ и х друг другу. Так, скорее всего, разумно считать, что физическое пространство о д н о в р е м е н н о описывается несколькими моделями, одна из которых — обычная евклидова гео-

---

[1]) Однако столь велико, что утверждение «Вселенная бесконечна» описывает реальность не хуже, чем утверждение «Земля — шар».

[2]) А может быть гипернатуральными?

метрия, другая предполагает минимальный пространственный размер («квант пространства»), третья — существование бесконечно малых расстояний и т. д. В этой связи полезно вспомнить, что в трудах основоположников математического анализа — Ньютона и Лейбница — прослеживаются различные модели мироздания. Говоря образно и уже по одному этому весьма огрубленно, Лейбниц видел мир как мозаику, составленную из мельчайших частиц; можно интересоваться отношением одной из частиц, $dy$, к другой, $dx$. Мир Ньютона непрерывен и непрерывно меняется с течением времени: переменные (по Ньютону *флюенты*) $x$, $y$, ... суть функции времени и можно интересоваться скоростями их изменения (*флюксиями* по Ньютону) $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... Таким образом, если картина мира Лейбница выполнена в технике мозаики и меняется так, как если бы мы встряхивали калейдоскоп через бесконечно малые промежутки времени $dt$, то картина мира Ньютона написана масляными красками, которые еще не успели застыть и потому текут по поверхности холста.

Итак, не исключено, что представление о бесконечно малых расстояниях, массах, зарядах и т. п. хорошо соответствует физической реальности. Тогда для описания этих бесконечно малых величин требуются бесконечно малые числа. Если желать, чтобы эти числа могли подвергаться обычным арифметическим операциям, неизбежно возникают бесконечно большие числа (как результаты деления единицы на бесконечно малые), а также такие нестандартные числа, которые не являются ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми (как результаты прибавления бесконечно малых к обычным действительным числам). Полученная система гипердействительных чисел, включающая все действительные как подсистему, претендует на то, чтобы обслуживать физический мир не хуже, чем это делает обычная числовая ось.

## ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

В сентябре 1986 г. в Ташкенте происходил Первый всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей имени Бернулли. 19-я секция этого конгресса называлась «Нестандартный анализ в теории вероятностей». Некоторые из участников секции имели возможность ознакомиться с только что вышедшей книгой [69], посвященной нестандартным методам в стохастическом анализе и математической физике и содержащей свыше полутысячи страниц.

## Приложение

# «НЕСТАНДАРТНОЕ» ПОСТРОЕНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА

*В. Г. Кановей*

Читатель настоящей книги, который пожелал бы под ее влиянием узнать из трудов классиков математики XVII—XVIII вв. больше о том, что сделали Лейбниц и его последователи «нестандартными» методами, получит особое удовольствие прикосновения к подлинным математическим шедеврам, природа которых до конца не раскрыта и по сей день. Чего стоит, например, проведенное Эйлером разложение синуса на множители! Но попробуйте провести корректно в рамках нестандартного анализа выкладки на с. 7 — это совсем не просто и пока, как кажется, никому не удалось в полной мере. (В работе [53], на которую сделана в этой связи ссылка на с. 56, обойдены некоторые пункты эйлеровского рассуждения.) А другие эксперименты Эйлера и его современников с бесконечностями вообще находятся в настоящее время вне поля зрения «нового» нестандартного анализа.

Читатель, взявший на себя труд изучения лучших математических трактатов того времени (например, «Дифференциального исчисления» Леонарда Эйлера — одного из наиболее богатых идеями сочинений за всю историю математики), также может, к некоторому своему удивлению, обнаружить, что многие математические открытия, известные сейчас в том виде, который они приняли после «кошианской» реконструкции основ анализа, первоначально были сделаны на основе «нестандартных» рассуждений. Здесь мы расскажем об одном из таких открытий — разложении функции в степенной ряд.

Степенные ряды — один из главных инструментов анализа, и в любом учебнике, включающем теорию рядов, приведено разложение

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \qquad (1)$$

правая часть которого называется рядом Тейлора. Для того чтобы записанное равенство фактически выполнялось (в смысле обычного определения сходимости ряда), достаточно потребовать, чтобы функция $f$ удовлетворяла, например, такому условию:

в некотором интервале, содержащем точки $a$ и $x$, все производные $f^{(k)}(\xi)$ существуют и ограничены по абсолютной величине числом $M$, не зависящим от $k$ и $\xi$. (2)

(Мы взяли для иллюстрации простейшее из требований такого рода.)

Вывод равенства (1) в предположении (2) (или каком-либо другом) в современных учебниках дается обычно с помощью оценки остаточного члена ряда Тейлора. Такой подход был основан

Лагранжем. Однако сам Тейлор получил названный его именем ряд задолго до Лагранжа (в 1714 г.) совершенно иным путем. Эта первоначальная конструкция, взятая нами из предисловия М. Я. Выгодского к «Дифференциальному исчислению» Эйлера [70], сводится к следующему рассуждению.

Зафиксируем бесконечно большое натуральное число $n$. Тогда число $dx = \frac{1}{n}(x-a)$ будет бесконечно малым. Исходя из формулы дифференциала функции $df(\xi) = f(\xi + dx) - f(\xi)$ (с. 55) можно определить второй дифференциал — квадрат оператора $d$:

$$d^2f(\xi) = d(df(\xi)) = df(\xi + dx) - df(\xi) =$$
$$= [f(\xi + dx + dx) - f(\xi + dx)] - [f(\xi + dx) - f(\xi)] =$$
$$= f(\xi + 2dx) - 2f(\xi + dx) + f(\xi);$$

его третью степень

$$d^3f(\xi) = f(\xi + 3dx) - 3f(\xi + 2dx) + 3f(\xi + dx) - f(\xi)$$

(в правой части стоят знакочередующиеся биномиальные коэффициенты) и вообще любую степень $d^k$ с натуральным (конечным или бесконечно большим) показателем $k$.

В то же время непосредственно из определения $d$ следует

$$f(\xi + dx) = f(\xi) + df(\xi) = (1 + d)f(\xi),$$

где 1, если угодно,— символ тождественного оператора. Тогда

$$f(\xi + 2dx) = (1 + d)f(\xi + dx) = (1 + d)^2 f(\xi),$$

и вообще $f(\xi + kdx) = (1 + d)^k f(\xi)$ при любом $k$.

Тем самым $f(x) = (1 + d)^n f(a)$, так как $a + n\,dx = x$. Разложив бином по формуле Ньютона, мы приходим к равенству

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f(a). \tag{3}$$

Общий член суммы в правой части преобразуется к виду

$$C_n^k \frac{d^k f(a)}{dx^k} dx^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \frac{(x-a)^k}{n^k} =$$
$$= P_{nk} \frac{d^k f(a)}{k!dx^k} (x-a)^k, \text{ где } P_{nk} = 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

После этого равенство (3) можно переписать следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P_{nk} \frac{d^k f(a)}{k!\,dx^k} (x-a)^k. \tag{4}$$

(Полученное соотношение применяется в исчислении конечных разностей, где оно известно как формула Ньютона — естественно, для конечных $n$ и конечно малых $dx$ [71], с. 31—32.)

Дальше Тейлор замечает, что при бесконечно большом $n$ и конечном $k$ коэффициент $P_{nk}$ бесконечно близок к единице, а отношение $\frac{d^k f(a)}{dx^k}$ также бесконечно близко к производной $f^{(k)}(a)$

ввиду бесконечной малости $dx$. Следовательно, $k$-й член суммы в правой части (4) бесконечно мало отличается от соответствующего члена в правой части (1), если натуральное $k$ конечно, а потому просто совпадает с ним, ибо бесконечно малые суть «нули». Наконец, члены с бесконечно большими номерами $k$ в (4) просто отбрасываются, и мы приходим к разложению (1).

Покажем теперь, как это рассуждение можно заключить в строгие рамки нестандартного анализа. Вывод равенства (4) не вызывает серьезных сомнений (хотя в духе концепций настоящей книги следовало бы писать $f^*$ вместо $f$, чего мы не делаем). Однако переход от (4) к (1) — и, в частности, игнорирование бесконечно больших номеров — выглядит подозрительно. Чтобы прояснить этот момент, обозначим

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad B_k = \frac{d^k f(a)}{k!\,dx^k}(x-a)^k,$$

$$s_m = b_0 + b_1 + \ldots + b_m, \; S_m = B_0 + B_1 + \ldots + B_m$$

($k$ и $m$ — натуральные числа, конечные или бесконечно большие).

Вообще, для доказательства равенства (1) на основе «гипердействительного» определения предела (с. 47) достаточно проверить, что $f(x) \approx s_n$ для любого бесконечно большого натурального $n$. В выводе соотношения (4) бесконечное $n$ произвольно, так что с учетом (4) достаточно доказать, что $s_n \approx S_n$ именно для этого фиксированного $n$. (Напомним, что знак $\approx$ означает равенство с точностью до бесконечно малого слагаемого.)

Начнем с оценки величин $b_k$, $B_k$ и разности $\beta_k = b_k - B_k$ для конечных и бесконечно больших $k$. Требование (2) предполагается сформулированным в рамках стандартных чисел, и поэтому пусть стандартное $M > 0$ таково, что

$$f^{(k)}(\xi) \text{ существует и } |f^{(k)}(\xi)| < M \tag{5}$$

для любого конечного натурального $k$ и любого стандартного $\xi$ из некоторого интервала, содержащего $a$ и $x$. «Основная гипотеза» на с. 34 (или принцип переноса на с. 67) позволяет распространить (5) на все бесконечно большие $k$ и все нестандартные (гипердействительные) $\xi$ из (нестандартного аналога) того же интервала.

Уже одного требования непрерывности $f^{(k)}$ (вытекающего из существования $f^{(k+1)}$) достаточно, чтобы утверждать:

$$\frac{d^k f(a)}{dx^k} = f^{(k)}(a + \theta_k), \quad 0 \leqslant \theta_k \leqslant k\,dx \tag{6}$$

(см., например, [71], с. 19; при $k = 1$ — теорема Лагранжа). Отсюда ввиду бесконечной малости $dx$ немедленно следует

$$b_k \approx B_k \text{ и } \beta_k \approx 0 \text{ для конечных } k. \tag{7}$$

Пусть теперь число $k$ бесконечно велико. Число же $c = 2|x-a|$ стандартно, и поэтому при бесконечном $k$ выполняется неравенство $c^k \leqslant k!$ (которое легко можно вывести исходя из более быстрого роста факториала по сравнению со степенью с любым фиксированным основанием). Следовательно, $(x-a)^k \leqslant 2^{-k}k!$, и мы находим с помощью (5) и (6), что

$$|\beta_k| \leqslant 2M \cdot 2^{-k} \text{ для каждого бесконечного } k, \tag{8}$$

Дальше нам потребуется

Лемма. *Существует бесконечно большое натуральное $m \leqslant n$ такое, что сумма $\sigma_m = |\beta_0| + |\beta_1| + \ldots + |\beta_m|$ бесконечно мала.*

После доказательства леммы сложностей уже нет. Именно: если $m$ таково, как указано, то с помощью (8) можно получить оценку

$$|s_n - S_n| \leqslant \sigma_m + \sum_{k=m+1}^{n} |\beta_k| \leqslant \sigma_m + 2M \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_m + 2M \cdot 2^{-m},$$

т. е. $s_n - S_n \approx 0$ ($m$ бесконечно) и $s_n \approx S_n$, что и требовалось.

Доказательство леммы. Искомыми свойствами обладает наибольшее (конечное или бесконечно большое) число $m \leqslant n$, для которого выполняется неравенство $\sigma_m \leqslant m^{-1}$. Это число $m$ бесконечно большое, поскольку любое конечное $m$ удовлетворяет написанному неравенству благодаря соотношению (7). Обратное число $m^{-1}$ будет бесконечно малым. Следовательно, и сумма $\sigma_m$ бесконечно мала, так как $\sigma_m \leqslant m^{-1}$ по выбору числа $m$. Лемма доказана.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочная книга по математической логике: Пер. с англ.: В 4 ч./Под ред. Дж. Барвайса.— Ч. I: Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— 392 с.— Ч. II: Теория множеств.— М.: Наука, 1982.— 375 с.
2. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ, теория вероятностей/Сост. И. Г. Башмакова и др.— М.: Просвещение, 1977.— 224 с.
3. Davis M. Applied Non-Standard Analysis.— N. Y. et al.: John Wiley & Sons, 1977. [Русский перевод: Девис М. Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.]
4. Дружинин В. В., Конторов Д. С. Идея, алгоритм, решение.— М.: Воениздат, 1972.— 326 с.— (Библиотека офицера.)
5. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 2.— С. 77—127.
6. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций: Пер. с франц.— М.; Л.: ГТТИ, 1934.
7. Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений/Сост. и пер. А. П. Юшкевич // Успехи мат. наук.— 1948.— Т. 2, вып. 1(23).— С. 165—204. (Отрывки приведены также в [2].)
8. Лем С. Рецензия на книгу Куно Млатье «Одиссей из Итаки»: Пер. с польского // Знание — сила.— 1972.— № 2.— С. 46—48.
9. Малыхин В. И., Пономарев В. И. Общая топология (теоретико-множественное направление) // Итоги науки и техники: Алгебра, топология, геометрия.— М.: ВИНИТИ, 1975.— Т. 13.
10. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.— М.: Советское радио, 1979.
11. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры: Пер. с англ.— М.: Наука, 1967.
12. Рудин У. Функциональный анализ: Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.
13. Успенский В. А. О нестандартном анализе // Девис М. Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.— С. 5—21.
14. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ.— М.: Знание. 1983.— 61 с.— (Новое в жизни, науке, технике. Математика, кибернетика, № 8.)
15. Успенский В. А. Нестандартный анализ // Наука и жизнь.— 1984.— № 1.— С. 45—50.
16. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных: Пер. с лат.— 2-е изд.— Т. I.— М.: Физматгиз, 1961.

17. Albeverio S., Fenstad J. E., Høegh-Krohn R. Singular perturbations and nonstandard analysis // Trans. Amer. Math. Soc.— 1979.— V. 252.— P. 275—295.
18. Aronzajn N., Smith K. T. Invariant subspaces of completely continuous operators // Ann. Math.— 1954.— V. 60, № 2.
19. Bellenot S. F. Nonstandard topological vector spaces // Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.— Berlin: Springer, 1974.— P. 37—39.
20. Bernstein A. R. Invariant subspaces of polynomially compact operators on Banach spaces // Pacific J. Math.— 1967.— V. 21, № 3.— P. 445—464.
21. Bernstein A. R., Robinson A. Solution of invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos // Pacific. J. Math.— 1966.— V. 16, № 3.— P. 421—431.
22. Bernstein A. R., Wattenberg F. Nonstandard measure theory // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory: Proceedings of an International Symposium on Non-Standard Analysis.— N. Y.: Holt-Rinehart and Winston, 1969.— P. 171—185.
23. Brown D., Robinson A. A limit theorem on the cores of large standard exchange economies // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1972.— V. 69, № 5.— P. 1258—1260.
24. Brown D., Robinson A. Nonstandard exchange economies // Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.— Berlin: Springer, 1974.— P. VIII—IX.
25. Cartie P. Perturbations singulières des equations differentielles ordinaries et analyse non-standard // Seminaire Bourbaki.— 1981/1982.— 34-e année, № 580.— P. 580-01—580-24. [Русский перевод: Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 2.— С. 57—76.]
26. Cutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc.— 1983.— V. 15, part 6, № 57.— P. 529—589.
27. Theory and Applications of Singular Perturbations: Proc. Conf. Oberwolfach, Aug. 16—22, 1981/Ed. W. Eckhaus, E. M. de Jager.— Berlin: Springer, 1982.— 363 p.— (Lecture Notes in Mathematics, № 942.)
28. Farukh M. D. Applications of nonstandard analysis to quantum mechanics // J. Math. Phys.— 1975.— V. 16, № 2.— P. 177—200.
29. Goodyear P. Double enlargements of topological spaces // Z. math. Logik Grundl. Math.— 1984.— Bd. 30.— S. 389—392.
30. Grainger A. D. Invariant subspaces of compact operators on topologic vector spaces // Pacific J. Math.— 1975.— V. 56, № 2.— P. 477—493.
31. Halmos P. R. A glimpse into Hilbert space // Lectures on Modern Mathematics.— V. I.— N. Y.; London, 1963.— P. 1—22.
32. Halmos P. R. Invariant subspaces of polynomially compact operators // Pacific. J. Math.— 1966.— V. 16, № 3.— P. 433—437.
33. Hrbaček K. Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.— 1979, October.— P. 659—677.
34. Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.— Berlin: Springer, 1974.— (Lecture Notes in Mathematics, № 369.)
35. Hurd A. E. Nonstandard analysis and lattice statistical mechanics; a variational principle // Trans. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 263, № 1.— P. 89—110.

36. Janz A. Eine neue Variante der Nichtstandard-Analysis und einige ihrer Anwendungen in der allgemeine Topologie.— Berlin: Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1980.— (Seminarbericht № 30.)
37. Kamo S. Nonstandard natural number system and nonstandard models//J. Symbolic Logic.— 1981.— V. 46, № 2.— P. 365—376.
38. Keisler H. J. Elementary Calculus.— Prindle: Weber & Schmidt, 1976. [Рецензия//Новые книги за рубежом: Сер. А.— 1978.— № 9.]
39. Keisler H. J. Foundations of Infinitesimal Calculus.— Prindle: Weber & Schmidt, 1976.
40. Kelemen P. J. Quantum mechanics, quantum field theory and hyper-quantum mechanics//Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.— Berlin: Springer, 1974.— P. 116—121.
41. Kelemen P. J., Robinson A. The nonstandard $\lambda:\varphi_2^4(x)$-model//J. Math. Phys.— 1972.— V. 13, № 12.— P. 1870—1878.
42. Lawler G. F. A self-avoiding random walk//Duke Math. J.— 1980.— V. 47, № 3.— P. 655—693.
43. Levitz H. Calculation of an order type: an application of non-standard methods//Z. math. Logik Grundl. Math.— 1982, Bd. 28.— S. 219—228.
44. Lightstone A. H. Infinitesimals//Amer. Math. Monthly.— 1972, March.— P. 242—251.
45. Lightstone A. H., Robinson A. Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions.— Amsterdam: North-Holland, 1975.
46. Loeb P. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability theory//Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 211.— P. 113—122.
47. Loeb P. Weak limits of measures and the standard part map// Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— V. 77, № 1.— P. 128—135.
48. Lutz R., Gose M. Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications.— Berlin: Springer, 1981.— 261 p.— (Lecture Notes in Mathematics, № 881.) [Рецензия//Новые книги за рубежом: Сер. А.— 1983.— № 1.— С. 15—17.]
49. Lutz R., Sari T. Applications of nonstandard analysis to boundary value problems in singular perturbations theory//Theory and Applications of Singular Perturbations: Proc. Conf. Oberwolfach, Aug. 16—22, 1981/Ed. W. Eckhaus, E. M. de Jager.— Berlin: Springer, 1982.
50. Luxemburg W. A. J. Non-Standard Analysis: Lectures on Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers.— Pasadena, 1962.— Revised edition.— Pasadena, 1964.
51. Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory. Proceedings of an International Symposium on Nonstandard Analysis/Ed. W. A. J. Luxemburg.— N. Y.: Holt-Rinehart and Winston, 1969.
52. Contributions to Non-Standard Analysis: Symposium at Oberwolfach, 1970/Ed. W. A. J. Luxemburg, A. Robinson.— Amsterdam: North-Holland, 1972.
53. Luxemburg W. A. J. What is nonstandard analysis?//Amer. Math. Monthly.— 1973.— V. 80, № 6: Papers on the foundations of mathematics, part II.— P. 38—67.
54. Machover M., Hirschfeld J. Lectures on Non-Standard Analysis.— Berlin: Springer, 1969.— (Lecture Notes in Mathematics, № 94.)

55. Moore S. M. Nonstandard analysis applied to path integrals and generalized functions // Il nuovo cimento della società italiana di fisica.— 1982.— V. 70B, № 2.— P. 277—290.
56. Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, № 6.— P. 1165—1198.
57. van Osdol D. H. Truth with respect to an ultrafilter or how to make intuition rigorous // Amer. Math. Monthly.— 1979, April.— P. 355—363.
58. Parikh R., Parnes M. Conditional probabilities and uniform sets // Victoria Symposium on Non-Standard Analysis/Ed. A. Hurd.— Berlin: Springer, 1974.— P. 180—194.
59. Perkins E. Weak invariance principles for local time // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verwandte Gebiete.— 1982.— Bd 60.— S. 437—451.
60. Robinson A. Non-standard analysis // Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A.— 1961.— V. 64, № 4.— P. 432—440.— Reprint // Indag. math.— 1961.— V. 23.— P. 432—440.
61. Robinson A. Non-Standard Analysis.— Amsterdam: North-Holland, 1966.— (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.)
62. Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.— N. Y.: Academic Press, 1976.
63. Sullivan K. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach // Amer. Math. Monthly.— 1976.— V. 83, № 5.— P. 370—375.
64. Tarski J. Short introduction to nonstandard analysis and its physical applications // Many Degress of Freedom in Field Theory: Proceedings of the 1976 International Summer Institute of Theoretical Physics, Bielefeld, Aug. 23 — Sept. 4, 1976/Ed. L. Streit.— N. Y.; London: Plenum Press, 1978.— P. 225—239.
65. Troesch A. Etude macroscopique de l'equation de van der Pol // Theory and Applications of Singular Perturbations: Proc. Conf. Oberwolfach, Aug. 16—22, 1981/Ed. W. Eckhaus, E. M. de Jager.— Berlin: Springer, 1982.
66. Voros A. Introduction to nonstandard analysis // J. Math. Phys.— 1973.— V. 14, № 2.— P. 292—296.
67. Wattenberg F. Nonstandard measure theory: Avoiding pathological sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1979.— V. 250.— P. 357—368.
68. Wesley E. An application of nonstandard analysis to game theory // J. Symbolic Logic.— 1971.— V. 36, № 3.— P. 385—394.

## Добавление при корректуре

69. Albeverio S., Høegh-Krohn R., Fenstad J. E., Lindstrøm T., Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.— N. Y. et al.: Academic Press, 1986.— XII + 514 p.
70. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление: Пер. с лат./Вступительная статья и примечания М. Я. Выгодского.— М.: Гостехиздат, 1949.— 580 с.
71. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.— 376 с.