

МОСКОВСКИЙ Ордена Ленина, Ордена Октябрьской Революции  
и Ордена Трудового Красного Знамени  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

---

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Кафедра космических лучей и физики космоса

Е. Е. Антонова

ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
Часть I

Издательство Московского университета

1985

- сы теории плазмы. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963.
8. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
  9. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968.
  10. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
  11. Велихов Е.П., Земцов Ю.К. Введение в физику плазмы. М.: Изд. Моск. ун., 1977.
  12. Альвен Х., Фельтхаммар К.Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
  13. Альвен Х. Космическая плазма. М.: Мир, 1983.
  14. Паркер Е. Космические магнитные поля, т. 1, 2. М.: Мир, 1982.
  15. Основы физики плазмы (под ред. Галева А.А., Судана Р.). М.: Энергоиздат, 1984, т. 1, 2.
  16. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980.
  17. Вайнштейн С.И. Магнитные поля в космосе. М.: Наука, 1986.
  18. Росси Е., Ольберт С. Введение в физику космического пространства. М.: Атомиздат, 1989.
  19. Тверской Б.А. К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей. Геомагнетизм и аэронавтика, т. 6, № 1, с. 11-18.
  20. Гетлинг А.В., Тверской Б.А. Теория солнечной активности. Изв. АН СССР, т. 44, № 12, 1980, с. 2560-2568.
  21. Гетлинг А.В. Конвективная зона Солнца. Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца. Вып. 61. М.: Наука, 1982, с. 3-19.
  22. Чириков Б.В. Проблема устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке. Физика плазмы, т. 4, вып. 3, 1978, с. 521-541.
  23. Солнечная и солнечно-земная физика. Иллюстрированный словарь терминов (под ред. Бруцера А., Дюрана Ш.). М.: Мир, 1980.

Елизавета Евгеньевна Антонова

ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
Часть I

Редактор

К.И.Стратилатова

---

Подписано к печати 19.12.85 г.

Д-104562. Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов. Офсетная печать. Усл.печ.л.6.25. Уч.-изд. л.5,25. Тираж 150 экз. Заказ 3247. Цена 15 коп.

Заказное

---

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Гарцева, 5/7.

---

Ротапринт НИИЯФ МГУ

УДК 550.3 + 533.9

Рецензенты

А.Т. Рахимов, доктор физ.-мат. наук

Ю.И. Логачев, доктор физ.-мат. наук

Антонова Е.Е. Плазменные процессы в космическом пространстве. - М.:  
Изд-во Моск. ун-та, 1985

В книге систематически изложены общие вопросы физики плазмы, различные подходы и способы теоретического описания плазменных процессов в космическом пространстве. Курс включает вопросы степени ионизации плазмы, одночастичного приближения и приближения магнитной гидродинамики.

Пособие рассчитано на студентов V курса отделения ядерной физики физического факультета МГУ, может быть использовано аспирантами и специалистами в области космофизики.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	5
Глава 1. СТЕПЕНЬ ИОНИЗАЦИИ ПЛАЗМЫ . . . . .	7
§ 1. Формула Саха . . . . .	7
§ 2. Ионизация и рекомбинация в ионосфере . . . . .	8
Глава 2. ОДНОЧАСТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ . . . . .	10
§ 1. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях . . . . .	10
§ 2. Адиабатическое приближение . . . . .	13
§ 3. Адиабатические инварианты и магнитные ловушки. . . . .	15
§ 4. Точность сохранения адиабатических инвариантов . . . . .	17
Глава 3. КИНЕТИЧЕСКАЯ И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ . . . . .	20
§ 1. Функция распределения и интеграл столкновений . . . . .	20
§ 2. Дрейфовое кинетическое уравнение . . . . .	25
§ 3. Уравнение переноса . . . . .	26
§ 4. Двухжидкостная магнитная гидродинамика . . . . .	31
§ 5. Одножидкостная магнитная гидродинамика . . . . .	32
§ 6. Обобщенный закон Ома . . . . .	37
§ 7. Магнитная гидродинамика трехкомпонентной плазмы. Проводимость в ионосфере Земли . . . . .	40
§ 8. Диффузия магнитного поля и вмороженность . . . . .	43
§ 9. Приближение Чу-Гольдбергера-Лоу . . . . .	49
Глава 4. МАГНИТОСТАТИКА . . . . .	50
§ 1. Уравнение магнитостатического равновесия . . . . .	50
§ 2. Магнитные поверхности и магнитные трубки . . . . .	51
§ 3. Магнитное натяжение и давление магнитного поля . . . . .	53
§ 4. Теорема вириала . . . . .	54
§ 5. Пинчи и бессиловые магнитные поля . . . . .	55
§ 6. Токовые слои . . . . .	58
§ 7. Основное уравнение теории магнитосферно-ионосферных взаимодействий . . . . .	62

	стр
Глава 5. * ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ* В КОСМОСЕ . . . . .	64
§ 1. Космические магнитные поля. Задача динамо . . . . .	64
§ 2. Сдвиговое движение и дифференциальное вращение . . . . .	66
§ 3. Антидинамо теоремы . . . . .	70
§ 4. Конвективные ячейки . . . . .	71
§ 5. Торoidalный вихрь Тверского . . . . .	73
§ 6. Генерация полоидального поля . . . . .	78
§ 7. Турбулентное динамо . . . . .	79
Глава 6. * ВОЛНЫ И РАЗРЫВЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ . . . . .	80
§ 1. * МГД волны . . . . .	80
§ 2. Ионный звук . . . . .	86
§ 3. * МГД разрывы . . . . .	89
Л и т е р а т у р а . . . . .	97

## В В Е Д Е Н И Е

В настоящее время физика плазмы представляет собой одну из наиболее развитых областей физики. Широким фронтом ведутся исследования как на Земле, так и в космосе. Возникшая с появлением первых космических аппаратов возможность непосредственных измерений плазмы вне лабораторных установок привела к появлению ряда новых направлений. Количество публикаций ежегодно нарастает. Поэтому специалисту в области космических лучей и физики космоса необходимо владеть "языком" физики плазмы, ориентироваться в основной проблематике. Так, например, типичной задачей физики плазмы как лабораторной, так и космической, является возникновение "немаксвелловских хвостов" на функции распределения, которая в физике космоса формулируется как задача ускорения космических лучей. Наиболее распространенный в настоящее время подход — стохастическое фермиевское ускорение на заданных движущихся магнитных неоднородностях — не является самосогласованным, так как сами магнитные поля определяются движением частиц. Достигнутый за последнее время прогресс в решении самосогласованных задач приводит к лучшему пониманию наблюдаемых спектров космических лучей и соответствующих спектров электромагнитных неоднородностей. Непосредственно для изучения космических объектов интерес представляют, в основном, процессы в газовой плазме, на которых мы и сосредоточим основное внимание, не затрагивая такие области как, например, плазменные эффекты в физике полупроводников и металлов.

Система заряженных частиц называется плазмой, если свойства этой системы в значительной степени определяются коллективным взаимодействием частиц с самосогласованными электрическими и магнитными полями. При достаточно высокой плотности зарядов в плазме даже малое пространственное разделение зарядов приводит к появлению очень сильных электрических полей. Поэтому достаточно плотная плазма должна сохранять квазинейтральность: число электронов в единице объема должно приблизительно равняться числу ионов, умноженному на среднее зарядовое число иона.

Найдем характерные пространственный и временной масштабы разделения зарядов в плазме, находящейся вблизи термодинамического равновесия. Будем считать, что плазма состоит из электронов и ионов водорода,  $e$  — заряд частицы,  $n$  — концентрация

(среднее число) частиц в единице объема,  $T$  - температура (в единицах энергии),  $m_e$  - масса электрона,  $m_i$  - масса иона. Пусть в некотором объеме произошло полное разделение зарядов и возникло электрическое поле  $E$ . Так как в соответствии с уравнением Пуассона  $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ , если линейные масштабы области равны  $r$ , то  $E/r = 4\pi n e$  и потенциал в области разделения зарядов

$\varphi \sim 4\pi n e r^2$ . Вблизи термодинамического равновесия потенциальная энергия частиц в электрическом поле не может превышать их кинетическую энергию  $\sim T$ . Поэтому характерный размер области  $r_D$ , в которой может происходить разделение заряда, можно получить из условия  $U = e\varphi \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim T$ , откуда  $r_D \sim (T/4\pi n e^2)^{1/2}$ .

Величина  $r_D$  называется дебаевским радиусом или дебаевской длиной (введена Дебаем при изучении сильных электролитов). Характерное время, в течение которого может существовать декомпенсация зарядов вблизи термодинамического равновесия, получим, разделив  $r_D$  на скорость более быстрых частиц (электронов):

$$\tau \sim (T/4\pi n e^2)^{1/2} / (T/m_e)^{1/2} = (m_e \cdot 4\pi n e^2)^{1/2}. \quad \text{Величина}$$

$\omega_p = (4\pi n e^2/m_e)^{1/2}$  называется плазменной или ленгмювской частотой. Для масштабов времени  $\tau \gg \omega_p^{-1}$  и пространственных масштабов  $r \gg r_D$  вблизи термодинамического равновесия плазма квазинейтральна.

В космофизических приложениях обычно приходится иметь дело с идеальной плазмой. При этом фигурирует число частиц в дебаевской сфере:  $N_D = \frac{4}{3} \pi n r_D^3$ . Плазма называется идеальной, если  $N_D \gg 1$ . При выполнении этого условия кулоновская энергия взаимодействия частиц плазмы ( $\sim e^2 n^{1/3}$ ) много меньше их тепловой энергии ( $\sim T$ ). Примером неидеальной плазмы могут служить электролиты.

Плазма называется вырожденной, если длина волны де Бройля  $\lambda = h(m_e T)^{-1/2}$  (где  $h$  - постоянная Планка) превышает среднее межчастичное расстояние  $\bar{r} \sim n^{-1/3}$ . Параметр вырождения

$\chi = h^2 n^{2/3} / m_e T = \varepsilon_F / T$ , где  $\varepsilon_F$  - энергия Ферми. Для большинства космических объектов (кроме вещества сверхплотных звезд типа белых карликов)  $\chi \ll 1$  и плазма является невырожденной.

Вырожденная плазма изучается в физике твердого тела.

## Глава I. СТЕПЕНЬ ИОНИЗАЦИИ ПЛАЗМЫ

Степенью ионизации плазмы называется отношение числа заряженных частиц к первоначальному числу атомов. Задача определения степени ионизации плазмы является первой, которую приходится решать при изучении того или иного плазменного объекта. В космических объектах, кроме ионосферы Земли и планет, мы имеем дело с сильно ионизованной плазмой. Основными процессами ионизации являются ионизация электронным ударом ( $A+e \rightarrow A^++2e$ ) и ионизация излучением ( $A+h\nu \rightarrow A^++e$ ) (здесь символ  $A$  обозначает атом,  $A^+$  - ион,  $e$  - электрон,  $h\nu$  - фотон). Каждому из этих процессов отвечает обратный процесс - рекомбинация.

### § I. Формула Саха

В состоянии термодинамического равновесия концентрация заряженных частиц для идеальной плазмы определяется формулой Саха (по имени индийского астрофизика, впервые ее получившего)

$$n_{A^+} \cdot n_e / n_A = f(T), \quad (I.1)$$

где  $f(T)$  - функция температуры. Приведем квазиклассический вывод формулы Саха и определим  $f(T)$ . В состоянии термодинамического равновесия

$$n_A n_e K_{\text{ион}}(T) = n_{A^+} n_e^2 K_{\text{рек}}(T) \quad (I.2)$$

и 
$$f(T) = K_{\text{ион}}(T) / K_{\text{рек}}(T)$$

Пусть  $I$  - энергия ионизации атома. Число электронов в континууме (объеме фазового пространства, в котором энергия частицы меняется непрерывно) в интервале импульсов  $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$

$$dN_e = \frac{N_A}{g_A} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) g_1 g_e d g_{\text{конт}}, \quad (I.3)$$

где  $g_A$  - статвес основного состояния атома,  $E$  - энергия электрона, отсчитанная от основного состояния атома,  $d g_{\text{конт}}$  - статвес континуума (число квантовых ячеек в объеме фазового пространства  $d\vec{p} d\vec{r}$ , равное в силу принципа неопределенности Гайзенберга  $d\vec{p} d\vec{r} / (2\pi\hbar)^3$ ,  $g_e = 2$  - статвес электрона (две возможные ориентации спина электрона),  $g_{A^+}$  - статвес основного состояния иона,  $N_A$  - число невозбужденных атомов. Полное число электронов в континууме в изотропном случае, учитывая, что

$$\int_0^\infty \exp\left\{-p^2/2mT\right\} 4\pi p^2 dp = (2\pi mT)^{3/2}, \quad (I.4)$$

$$N_e = N_A \frac{g_i g_e}{g_A} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-1/T} \int d\bar{r}. \quad (I.5)$$

$\int d\bar{r}$  - объем, приходящийся на один электрон. Если отсутствуют двукратно заряженные ионы и газ пространственно однороден, в среднем на электрон приходится такой же объем, как и на ион:

$$\int d\bar{r} = 1/n_{A^+}. \quad \text{Откуда получаем}$$

$$\frac{n_e n_{A^+}}{n_A} = \frac{g_i g_e}{g_A} e^{-1/T} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = f(T). \quad (I.6)$$

Более строго формула Саха выводится общими методами химической термодинамики.

В разреженной плазме часто реализуется случай открытых систем, когда излучение свободно выходит из плазмы (ионизация осуществляется, в основном, при соударениях электронов с атомами, рекомбинация - в основном, с излучением). Тогда в стационарном состоянии:

$$n_A n_e K_{\text{ион}}(T) = n_{A^+} n_e K_{\text{рек}}(T) \quad (I.7)$$

и

$$n_{A^+}/n_A = K_{\text{рек}}(T)/K_{\text{ион}}(T) = \text{const}. \quad (I.8)$$

Данное соотношение носит название формулы Эльверта.

## § 2. Ионизация и рекомбинация в ионосфере

Процессы ионизации и рекомбинации играют определяющую роль в формировании ионосферы - верхней ионизованной части атмосферы планеты. Земная ионосфера разделяется на четыре слоя (рис. I. I) D, E, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, концентрация электронов в которых сильно варьирует в зависимости от времени суток и солнечной активности.

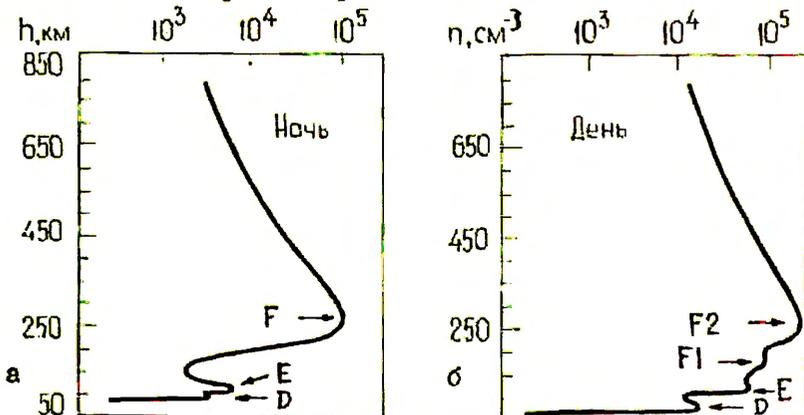


Рис. I. I. Распределение концентрации электронов  $n$  по высоте  $h$  в ионосфере средних широт, а - ночью, б - днем.

Ионизация нейтральных составляющих атмосферы вызывается солнечным излучением и потоками частиц (в основном, электронов) с энергией, большей потенциала ионизации.

Область D располагается на высотах 50-90 км, электронная плотность в ней составляет  $10^2-10^4 \text{ см}^{-3}$ . Основной положительный ион  $\text{NO}^+$ , большую роль в динамике D-слоя играют отрицательные ионы ( $\text{O}_2^-$  и другие).

Область E ионосферы, расположенная в интервале высот 90-150 км, иногда называется динамо-слоем. В этой области текут большие горизонтальные (вдоль поверхности Земли) токи, вызывавшие возмущение магнитного поля Земли. Концентрация электронов в слое E порядка  $10^5 \text{ см}^{-3}$ , преобладают молекулярные ионы  $\text{NO}^+$ ,  $\text{O}_2^+$ ,  $\text{N}_2^+$ . Диффузия не играет существенной роли в динамике ионизации, и концентрация электронов определяется из уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = Q - L, \quad (I.9)$$

где  $Q$  - скорость ионизации,  $L$  - скорость рекомбинации.

В отличие от области E, динамика ионизации слоя F, который делится на  $F_1$  (высоты 150-250 км) и  $F_2$  (выше 250 км), в значительной степени определяется восходящими и нисходящими потоками ионов и электронов. Максимум концентрации  $\sim 10^6 \text{ см}^{-3}$  находится на высоте  $\sim 300$  км. Скорость реакций радиативной рекомбинации ионов  $\text{O}^+$ ,  $\text{N}^+ + \text{O}^+ + e \rightarrow \text{O} + h\nu$ ,  $\text{N}^+ + e \rightarrow \text{N} + h\nu$  порядка  $10^{-12} \text{ см}^3/\text{с}$ . Эта скорость много меньше скоростей реакций диссоциативной рекомбинации молекул  $\text{NO}^+$ ,  $\text{O}_2^+$ ,  $\text{N}_2^+$  ( $\sim 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}$ )  
 $\text{NO}^+ + e \xrightarrow{\alpha_1} \text{N} + \text{O}$ ,  $\text{O}_2^+ + e \xrightarrow{\alpha_2} \text{O} + \text{O}$ ,  $\text{N}_2^+ + e \xrightarrow{\alpha_3} \text{N} + \text{N}$ .

Поэтому исчезновение ионов  $\text{O}^+$  и  $\text{N}^+$  происходит в два этапа: первый - перезарядка ион-атом  $\text{O}^+ + \text{N}_2 \xrightarrow{\beta_1} \text{NO}^+ + \text{N}$  ( $\beta_1 \sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3/\text{с}$ ),  $\text{O}^+ + \text{O}_2 \xrightarrow{\beta_2} \text{O}_2^+ + \text{O}$  ( $\beta_2 \sim 2 \cdot 10^{-11} \text{ см}^3/\text{с}$ ),  $\text{N}^+ + \text{O}_2 \xrightarrow{\beta_3} \text{NO}^+ + \text{O}$  ( $\beta_3 \sim 5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3/\text{с}$ ), и второй - быстрая диссоциативная рекомбинация. В слое E и нижней части слоя F скорость рекомбинации

$$L = \alpha_{\text{эф}} n^2, \quad (I.10)$$

где

$$\alpha_{\text{эф}}^E = \frac{\alpha_1 n(\text{NO}^+) + \alpha_2 n(\text{O}_2^+) + \alpha_3 n(\text{N}_2^+)}{n(\text{NO}^+) + n(\text{O}_2^+) + n(\text{N}_2^+)}$$

и

$$\alpha_{\text{эф}}^F = \frac{\alpha_1 n(\text{NO}^+) + \alpha_2 n(\text{O}_2^+)}{n(\text{NO}^+) + n(\text{O}_2^+)},$$

т.е. имеет место квадратичный закон рекомбинации. В верхней части области  $F_1$ , где  $n(\text{O}^+) \gg n(\text{NO}^+)$ ,  $n(\text{O}_2^+)$ , реакции перезарядки определяют скорость всего процесса и

$$L = \beta_{эф} n, \quad (I. II)$$

где  $\beta_{эф} = \beta_1 n(N_2) + \beta_2 n(O_2)$ , т.е. скорость рекомбинации линейна по электронной плотности.

На высотах - 700 км и выше большую роль играют реакции перезарядки  $H^+ + O \rightleftharpoons H + O^+$ .

Область ионосферы, где доминируют ионы  $H^+$ , принято называть протоносферой.

Кроме рассмотренных основных реакций, в процессах ионизационно-рекомбинационного равновесия необходимо учитывать десятки других реакций. Задачи такого типа решаются в настоящее время с применением ЭВМ.

## Г л а в а 2. ОДНОЧАСТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Составным элементом решения многих задач физики космической плазмы является рассмотрение движения частиц в электромагнитных полях, поиск точных и приближенных (адиабатических инвариантов) интегралов движения. Космическая плазма, как правило, является бесстолкновительной, и решение кинетического уравнения - произвольная функция интегралов движения.

### § I. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях

Уравнение движения частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $e$  в электрическом поле  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  имеет вид:

$$i \frac{d}{dt} m \vec{v} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}], \quad (2. I)$$

где  $m = m_0 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ,  $v$  - скорость частицы,  $c$  - скорость света. В произвольных координатах  $x_i$  уравнение (2. I) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad (2. 2)$$

где лагранжиан  $L = - m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} + e \vec{v} \vec{A} / c - e \Phi$ ,

(в нерелятивистском случае ( $v \ll c$ )  $L = \frac{m v^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} - e \Phi$ ),

$\vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$ ;  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . В гамильтоновской форме для импульсов  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$  и функции гамильтона  $H = -L + \sum p_i \dot{x}_i$

(в релятивистском случае  $H = (m_0^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2)^{1/2} + e \Phi$ ,

в нерелятивистском -  $H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + e\Phi$

$$dp_i/dt = -\partial H/\partial x_i, \quad dx_i/dt = \partial H/\partial p_i. \quad (2.3)$$

Общее решение (2.1) представляет собой систему шести функций-интегралов движения, зависящих от координат, скоростей, времени и шести постоянных, определяемых положением и скоростью частицы в начальный момент времени. В случае трансляционной симметрии (параллельный сдвиг) сохраняется проекция импульса на ось сдвига

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z = \text{const}. \quad (2.4)$$

В случае аксиальной симметрии (симметрии поворота) сохраняется момент количества движения

$$p_\psi = \partial L/\partial \dot{\psi} = m r^2 \dot{\psi} + \frac{e}{c} r A_\psi = \text{const}. \quad (2.5)$$

Если поле не зависит от времени, то интеграл движения - энергия частицы  $\mathcal{E} = mc^2 + e\Phi = \text{const}$  (в нерелятивистском случае

$\mathcal{E} = \frac{m v^2}{2} + e\Phi = \text{const}$ ). Если магнитное поле постоянно в пространстве, не зависит от времени и  $\vec{E} = 0$ , то  $|\vec{v}| = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ,  $\vec{v}_\parallel = \text{const}$  и уравнение движения

$$m \vec{v}_\perp = \frac{e}{c} [\vec{v}_\perp \vec{B}] \quad (2.6)$$

имеет решение:

$$\vec{v}_\perp = [\vec{\omega}_B \vec{r}], \quad (2.7)$$

где  $\vec{\omega}_B = -e\vec{B}/mc$ ,  $\vec{r}$  - радиус-вектор цилиндрической системы координат. Модуль угловой скорости  $\omega_B = eB/mc$  ( $e$  - модуль заряда) называется циклотронной частотой. Частица равномерно вращается по окружности, называемой ларморовской, с угловой частотой  $\omega_B$  и равномерно движется вдоль магнитного поля. В целом, траектория частицы представляет собой спираль (рис. 2.1). Радиус ларморовской окружности  $r_L = v_\perp / \omega_B$ . Магнитный момент "ларморовского кружка"

$$\mu = \frac{J S}{c} = \frac{1}{c} \frac{e v_\perp}{2\pi r_L} \pi r_L^2 = \frac{m v_\perp^2}{2B}. \quad (2.8)$$

В векторной форме

$$\vec{\mu} = -(m v_\perp^2 / 2B^2) \vec{B}. \quad (2.9)$$

Если имеется постоянное электрическое поле  $\vec{E}$ , перпендикулярное магнитному  $\vec{B}$ , то решение задачи получается при переходе в систему координат, движущуюся со скоростью  $\vec{V}_d$ , в которой электрическое поле  $\vec{E}' = 0$ :  $\vec{E}' = (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_d \vec{B}]) / (1 - V_d^2/c^2)^{1/2} = 0$ ,

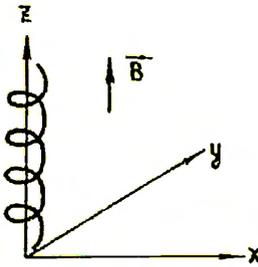


Рис. 2.1. Траектория движения частицы в постоянном однородном поле  $\vec{B}$

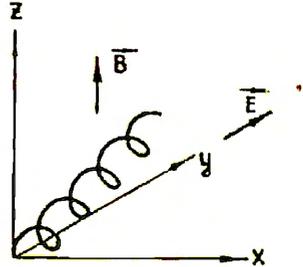


Рис. 2.2. Траектория движения частицы в скрещенных однородных электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  полях

$$\vec{V}_d^E = \frac{1}{c} \frac{[\vec{F} \vec{B}]}{B^2} . \quad (2.10)$$

В данном случае (рис. 2.2) движение частицы есть суперпозиция двух движений: движения по спирали и равномерного прямолинейного движения со скоростью  $\vec{V}_d$ . Нетрудно видеть, что если вместо электрического поля  $\vec{E}$  на частицу действует постоянная сила  $\vec{F} \perp \vec{B}$  (например, сила тяжести), то частица будет дрейфовать со скоростью

$$\vec{V}_d^F = \frac{1}{c} \frac{[\vec{F} \vec{B}]}{e B^2} . \quad (2.11)$$

Интересно отметить, что в электрическом поле частицы дрейфуют в одном и том же направлении и с одной и той же скоростью, независимо от знака заряда, в гравитационном поле скорость дрейфа определяется знаком заряда (электроны и ионы дрейфуют в противоположных направлениях) (рис. 2.3).

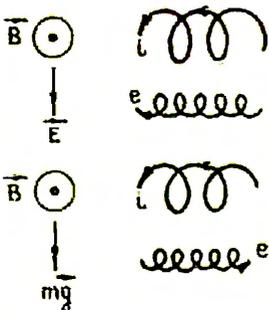


Рис. 2.3. Проекция траектории движения иона  $+$  и электрона  $e$  на плоскость, перпендикулярную магнитному полю  $\vec{B}$  при дрейфе в электрическом  $\vec{E}$  и гравитационном  $m\vec{g}$  полях. Стрелками указаны направления движения

§ 2. Адиабатическое приближение

В физике космоса часто приходится иметь дело с движением частицы в полях довольно сложной конфигурации, где надо, как правило, проводить численное интегрирование уравнения (2.1). К такому типу задач относится задача Штермера — движение частицы в поле магнитного диполя. Решение (2.1) может быть с достаточной для практического использования точностью найдено в случае, когда магнитное поле сильное и медленно меняется в пространстве и во времени, а электрическое — слабое. В задаче при этом могут быть выделены малые параметры, и решение найдено методами теории возмущений<sup>1</sup>. Естественной мерой длины в задачах данного типа кроме  $r_L$  является  $r_{||} = mcU_{||}/eV$ , где  $U_{||}$  — скорость движения частицы вдоль магнитного поля, мерой времени —  $\omega_B^{-1}$ . Будем считать, что

$$\left| \frac{r_L}{V} \frac{\partial V}{\partial x} \right|, \left| \frac{r_{||}}{V} \frac{\partial V}{\partial x} \right|, \left| \frac{r_L}{E} \frac{\partial E}{\partial x} \right|, \dots, \left| \frac{\omega_B^{-1}}{R} \frac{\partial V}{\partial t} \right|, \left| \frac{\omega_B^{-1}}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (2.12)$$

Максимальная из этих величин является параметром малости задачи  $\epsilon \ll 1$ . Приближение, в котором справедливо разложение решения в ряд по параметру  $\epsilon$ , называется адиабатическим. Как правило, получаются асимптотические ряды.<sup>\*</sup> На практике используется только первый порядок разложения по  $\epsilon$ . К условиям (2.12) добавим условие малости изменения скорости частицы за время порядка  $\omega_B^{-1}$ :

$$\left| c \frac{E}{V} \right| \ll v. \quad (2.13)$$

Медленное изменение полей позволяет представить движение частицы  $R(t)$  как вращение  $\rho(t)$  с медленно изменяющимся радиусом и частотой вокруг перемещающегося центра  $r(t)$  ларморовской окружности, называемого ведущим центром (рис. 2.4). Довольно громоздкая процедура усреднения (2.1) по быстрому ларморовскому вращению приводит к следующему результату:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = V_{||} \vec{h} + \frac{1}{\omega_B} \left[ \vec{h} \times \left( \frac{eE}{m} - v_{||}^2 (\vec{h} \nabla) \vec{h} - \frac{V_{||}^2}{2} \frac{\nabla R}{R} \right) \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{dE}{dt} = eE \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{mV_{||}^2}{2B} \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (2.15)$$

<sup>\*</sup> Это значит, что хотя бесконечный ряд не сходится к искомой функции и вообще не сходится, конечное число членов ряда сходится к искомой функции при  $\epsilon \rightarrow 0$ :  $|f - S_n| < A_n \epsilon^{n-1}$ , где  $f$  — искомое решение,  $S_n$  — сумма  $n$  членов ряда. Асимптотические ряды приводят иногда к такой ситуации, когда увеличение числа членов ряда при заданном  $\epsilon$  не улучшает, а ухудшает аппроксимацию истинного решения.

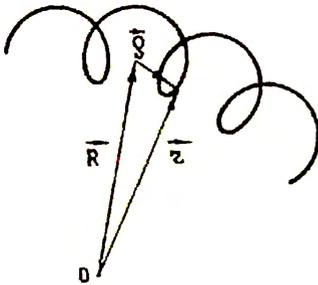


Рис. 2.4. Траектория движения частицы в адиабатическом приближении,  $\vec{r}$  - радиус вектор частицы,  $\vec{r}$  - радиус вектор центра вращения,  $\vec{R} = \vec{r} \cdot \vec{r}$

*Мал. мом. не счит.*

$$d\mu/dt = 0, \quad (2.16),$$

где  $\vec{h} = \vec{B}/B$ ,  $(\vec{h} \nabla) \vec{h} = \vec{N}/R_c$  - вектор кривизны силовой линии ( $\vec{h}$  - единичный вектор нормали,  $R_c$  - радиус

кривизны),  $V_{||}$  и  $V_{\perp}$  - сглаженные проекции скорости частицы на направление, параллельное и перпендикулярное магнитному полю в точке нахождения ведущего центра,  $\mathcal{E}$  - усредненная энергия. (2.15) может быть приведено к виду

$$dp_{||}/dt = (eE - \mu \nabla B) \vec{h}. \quad (2.17)$$

Три члена, входящие в векторное произведение в (2.14), описывают дрейф поперек силовых линий геомагнитного поля. Первый дает электрический дрейф со скоростью (2.10), второй - центробежный дрейф, связанный с появлением при криволинейном движении центробежной силы  $\vec{F}_N = mV_{||}^2 \vec{N}/R_c$  (рис. 2.5),

$$\vec{V}_d^N = \frac{mcV_{||}^2}{eB^4} [\vec{B}, (\vec{B} \nabla) \vec{B}] \quad (2.18)$$

Третий - градиентный дрейф (рис. 2.6), связанный с неоднородностью магнитного поля по величине,

$$\vec{V}_d^{v8} = \frac{mcV_{\perp}^2}{2eB^3} [\vec{B} \nabla B]. \quad (2.19)$$

Дрейфовая теория может быть обобщена на случай сильных поперечных электрических полей  $E_{\perp} \sim \frac{v}{c} B$ , если

$$E_{||} \ll \frac{v}{c} B, \quad v/c \ll 1. \quad (2.20)$$

К выражению (2.14) при этом добавляется член

$$\vec{V}_d^W = -\frac{mc}{eB^2} [\vec{W} \vec{B}], \quad (2.21)$$

где  $\vec{W} = c[\vec{E} \vec{B}]/B^2$ ,  $\dot{\vec{W}} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \nabla) \vec{W}$  который интерпретируется как дрейф под действием силы инерции  $-(-m\dot{\vec{W}})$ . В постоянном однородном магнитном поле  $\vec{B} = \vec{B}_0$ .

$$d\vec{r}/dt = \vec{V}_d^E + mc^2 \dot{\vec{E}}/eB^2. \quad (2.22)$$

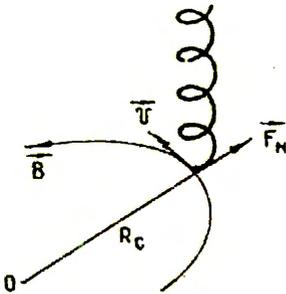


Рис. 2.5. Траектория дрейфа частицы в неоднородном по направлению магнитном поле  $\vec{B}$ .  $R_c$  - радиус кривизны поля,  $\vec{F}_c$  - центробежная сила,  $\vec{v}$  - скорость частицы

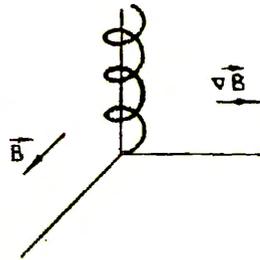


Рис. 2.6. Траектория дрейфа частицы в неоднородном по величине магнитном поле  $\vec{B}$ .  $\nabla B$  - градиент магнитного поля

### § 3. Адиабатические инварианты и магнитные ловушки

Функция Гамильтона  $H(p, q, \lambda)$  ( $p = p_1, \dots, p_n$ ;  $q = q_1, \dots, q_n$ ;  $\lambda = \varepsilon t$ ) осциллирующей динамической системы, зависящей от медленно меняющегося параметра  $\lambda = \varepsilon t$ , содержит время  $t$  и не сохраняется. Функция  $J(p, q, \lambda)$  называется адиабатическим инвариантом системы, если при малых  $\varepsilon$  величина  $J(t) = J[p(t), q(t), \lambda(t)]$  мало меняется за время  $t \sim 1/\varepsilon$  (изменения  $\lambda$  и  $H$  при этом конечны). При фиксированном  $\lambda$  проходящие через  $p_0, q_0$  линии уровня энергии  $H(p, q, \lambda) = H(p_0, q_0, \lambda)$  ограничивают некоторую область, площадь которой  $2\pi I(p_0, q_0, \lambda)$  и есть адиабатический инвариант, где  $I$  - переменная действия или действие. Из адиабатической инвариантности величины не следует, вообще говоря, что она мало меняется за неограниченное время при фиксированном малом  $\varepsilon$ . Это связано с возможностью накопления малых изменений адиабатического инварианта.

Из (2.16) вытекает сохранение магнитного момента частицы. Так как  $\mu$  при сделанных предположениях с точностью до константы равен  $\oint p dq$  в системе, где ведущий центр покоится, магнитный момент является адиабатическим инвариантом.

В силу сохранения  $\mu$  для описания продольного движения частицы (2.17) может быть введена эффективная потенциальная энергия  $U = \mu B$ . Если напряженность магнитного поля имеет макси-

муны вдоль силовой линии (рис. 2.7), то частица может совершать устойчивые продольные колебания.

Пусть  $L$  - характерный масштаб магнитного поля,  $\vec{E} = 0$ ,  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$  и  $\chi = r_L / L \ll 1$ .  $\chi$  - угол между вектором скорости частицы и направлением магнитного поля, называемый pitch-углом частицы. В данном случае  $v_{||} = (v^2 - 2\mu B / m)^{1/2}$ . Если существует точка на магнитной силовой линии, где  $v_{||} = 0$ , т.е.  $\chi = \pi/2$  и  $v_{\perp} = v$ , то частица, движущаяся вдоль магнитной силовой линии в сторону возрастающего поля, отразится в этой точке и начнет двигаться в противоположном направлении. Области сильного магнитного поля называются магнитными зеркалами или магнитными пробками. Отражение частиц от магнитных пробок используется при создании адиабатических (основанных на адиабатических инвариантах) магнитных ловушек. Магнитное поле Земли и многих других космических объектов являются характерными примерами таких ловушек. Если  $B_{\max}$  - магнитное поле в пробке, то отразится все частицы, у которых в области, где  $B = B_{\min}$ ,

$z$  - угол 
$$\alpha = \alpha_{кр} = \arcsin (B_{\min} / B_{\max})^{1/2}. \quad (2.23)$$

$\alpha_{кр}$  принято называть углом раствора конуса потерь. Если  $\alpha < \alpha_{кр}$ , частица уходит из ловушки. На рис. 2.8 показана схема движения частицы в радиационных поясах Земли. Частица быстро вращается вокруг силовой линии магнитного поля, совершает колебания между пробками и дрейфует в неоднородном магнитном поле вокруг оси ловушки. Каждому движению соответствует свое характерное время:  $\tau_1 = 2\pi\omega_B^{-1}$  - период ларморовского вращения,  $\tau_2$  -

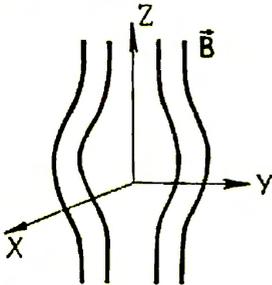


Рис. 2.7. Магнитное поле адиабатической ловушки  $\vec{B}$

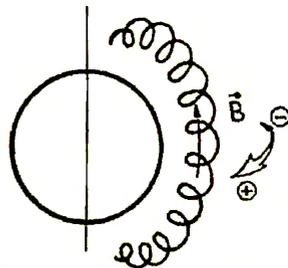


Рис. 2.8. Схема движения частицы в радиационных поясах Земли. Стрелками показаны направления дрейфа электронов и ионов

период колебаний между зеркальными точками,  $\tau_3$  - период дрейфового движения вокруг магнитной оси. Как правило,  $\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_3$ . В соответствии с тремя типами почти периодических движений в пробкотроне вводятся три адиабатических инварианта. Первый  $I_1 = \mu$  - магнитный момент частицы, равный с точностью до численного множителя потоку магнитной индукции через площадь ларморовского кружка. Второй  $I_2 = \oint p_{\parallel} d\ell$  - соответствует колебаниям между пробками

$$I_2 = 2m v \int_1^2 (1 - B^2(\ell) / B_{\text{max}}^2)^{1/2} d\ell, \quad (2.24)$$

где интегрирование проводится между точками отражения. Третий - потоковый инвариант, в нулевом приближении равен потоку магнитного поля (магнитный поток через сечение дрейфовой поверхности), охватываемого траекторией частицы

$$I_3 = \oint A_{\varphi} r d\varphi. \quad (2.25)$$

#### § 4. Точность сохранения адиабатических инвариантов

Дрейфовое приближение не отвечает на вопрос о точности сохранения адиабатических инвариантов. Внешние возмущения приводят прежде всего к нарушению третьего инварианта. С этим процессом связано, например, формирование радиационных поясов Земли. Инвариантность  $I_2$  используется при рассмотрении нагрева плазмы в адиабатических ловушках путем магнитного сжатия. Особый интерес представляет степень сохранения первого адиабатического инварианта. В хорошо отраженной ловушке, содержащей мало частиц, пелл-угловая диффузия в результате накапливавшихся малых изменений  $\mu$  является основным источником потери частиц. Для очень энергичных протонов радиационных поясов Земли точность сохранения  $\mu$  является определяющим фактором их движения.

В.И. Арнольд строго доказал, что при достаточно большой напряженности магнитного поля заряженная частица остается запертой в аксиально симметричной магнитной ловушке неограниченно долго, т.е. если

$$\chi = \Gamma_L / R_c < \chi_{\text{кр}}, \quad (2.26)$$

$W_L / V$  является вечным адиабатическим инвариантом. Соотношение (2.26) получило название критерия Арнольда.  $\chi_{\text{кр}}$  определяется экспериментально или в результате численного счета. На рис. 2.9 схематически показаны результаты опытов С.Н. Родионова по измерению времени жизни  $\tau$  электронов, возникающих при распаде радио-

$\chi_{\text{крит}} \approx 30$

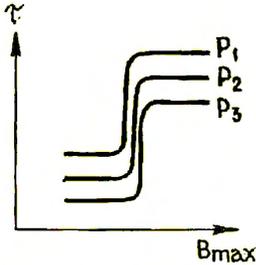


Рис. 2.9. Зависимость времени жизни  $\tau$  электронов, возникающих при распаде радиоактивного трития, от величины максимального магнитного поля в ловушке  $B_{\text{max}}$ . Различные кривые соответствуют разной степени откачки ( $P_1 < P_2 < P_3$  - давление остаточного газа)

активного трития в зависимости от величины  $B_{\text{max}}$  в ловушке. При некотором  $B_{\text{max}}$  время жизни независимо от степени откачки скачком увеличивается.

В аксиально симметричной ловушке может возникнуть нелинейный резонанс продольных колебаний между магнитными пробками и ларморовским вращением. Пусть  $\bar{\omega}$  - усредненная по продольным колебаниям ларморовская частота,  $\Omega$  - частота продольных колебаний. Условие резонанса -

$$\bar{\omega} = 2n\Omega, \quad (2.27)$$

где  $n$  - порядок резонанса. Резонанс является нелинейным, т.к. частота колебаний зависит от амплитуды (в данном случае от магнитного момента). Порядок резонанса в ловушке очень высокий ( $\tau_1 \ll \tau_2$ ). Переход частицы от одного резонанса к другому (а, следовательно, и сильное изменение  $\mu$ ) возможен, когда ширины резонансов становятся больше расстояний между ними. Отдельные нелинейные резонансы (в отличие от линейного случая параметрического резонанса) приводят лишь к ограниченным колебаниям и сохранению частот  $\Omega, \bar{\omega}$ . Эти колебания называются фазовыми. На рис. 2.10 на плоскости  $\bar{\omega}, \Omega$  сплошными линиями показаны резонансы (2.27). В аксиально симметричной ловушке точными интегралами движения являются  $\mathcal{U}$  и угловой момент. На рис. 2.10 пунктир - проекция поверхности интегралов движения на плоскость



Рис. 2.10. Схема перекрытия нелинейных резонансов на плоскости частот  $\bar{\omega}, \Omega$ . Сплошные линии - резонансы  $\bar{\omega} = 2n\Omega$ , пунктир - проекция поверхности интегралов движения  $\mathcal{U} = \text{const}, \mu = \text{const}$  на плоскость частот, стрелки - фазовые колебания

направление  $2n - (7k)$

частот, стрелки показывают фазовые колебания на нелинейных резонансах. При перекрытии резонансов возникает "блуждание" частиц по резонансам. Если в результате такого блуждания  $\mu$  уменьшается, частица, в конце концов, выходит из ловушки через магнитные пробки. На рис. 2. II схематически показана зависимость магнитного момента частицы от времени ( $t=0$  соответствует прохождению медианной плоскости ловушки). Основное изменение магнитного момента происходит при прохождении частицей медианной плоскости. Изменение магнитного момента за время колебаний между пробками

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = A \exp\left\{-\frac{\Psi}{\chi}\right\} \sin \Phi_0, \quad (2.28)$$

где  $A$  - множитель, зависящий от параметров системы,  $\Phi_0$  - фаза вращения по лармеровскому кружку в момент прохождения через медианную плоскость,  $\Psi$  - функция  $\Phi_0$ . Вдали от резонансов  $\Phi_0$  быстро изменяется (размешивание по фазам) и изменения  $\Delta\mu$  не накапливаются. При наличии резонанса (2.27) величина  $\mu$  испытывает большие, но ограниченные (из-за нелинейности) колебания.

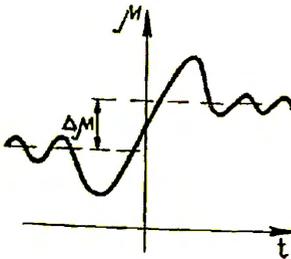


Рис. 2. II. Зависимость магнитного момента  $\mu$  от времени  $t$  при одном колебании между точками отражения в пробках

Когда ширина резонанса становится больше расстояния между резонансами, движение от динамического переходит к стохастическому. Изменения  $\mu$  происходят по диффузионному закону с коэффициентом диффузии

$$D = \overline{\Delta\mu}^2 \Omega / \pi. \quad (2.29)$$

В аксиально несимметричной магнитной ловушке система основных резонансов определяется уравнением

$$\overline{\omega} - 2n\overline{\Omega} + m\Omega_g = 0, \quad (2.30)$$

где  $\Omega_g$  - частота азимутального дрейфа,  $\overline{\omega}$  - усредненная по дрейфовому и продольному движению циклотронная частота,  $\overline{\Omega}$  - усредненная по дрейфовому движению частота продольных колебаний. Каждый из резонансов (2.27) расщепляется на мультиплет ( на рис. 2. IO показано такое расщепление одного из резонансов).  $2|m|$  - число линий в мультиплете. Сколь угодно слабая неоднородность

делает возможным движение частицы вдоль резонанса (2.27) (сохраняется только энергия). Возникает движение, в котором при изменении  $\mu$  сохраняется  $\bar{\omega}/2\Omega$ . Случайные блуждания частицы вдоль резонансов называются диффузией Арнольда. Диффузия Арнольда — медленный процесс. Коэффициент диффузии

$$D \sim \exp\{-\alpha \exp(\delta/\chi)\}, \quad (2.31)$$

где  $\alpha$  зависит от параметров системы частица-поле,  $\delta$  — от питч-угла частицы. Диффузия Арнольда играет определенную роль в динамике частиц радиационных поясов с энергиями в сотни МэВ. Для частиц меньших энергий основной вклад в питч-угловую диффузию вносят различные плазменные неустойчивости.

### Г л а в а 3. КИНЕТИЧЕСКАЯ И МАГНЕТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Любая реальная, в том числе космическая, плазма является необычайно сложной системой, однако, многие ее важные свойства могут быть описаны простыми макроскопическими уравнениями.

#### § 1. Функция распределения и интеграл столкновений

При описании плазмы можно исходить из многочастичной функции распределения. Однако в практических целях обычно исходят из одночастичной функции распределения (ниже мы будем называть ее просто функцией распределения)  $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , представляющей собой плотность частиц данного сорта  $\alpha$  в шестимерном фазовом пространстве  $(\vec{r}, \vec{v})$ .  $\int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$  равно количеству частиц, имеющих в момент времени  $t$  в элементе фазового объема  $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}), (\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ . Определим плотность частиц как

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (3.1)$$

среднюю скорость

$$\vec{V}_\alpha(\vec{r}, t) = \langle \vec{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (3.2)$$

хаотическую скорость

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_\alpha, \quad (3.3)$$

температуру (в энергетических единицах)

$$T_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{m_\alpha}{3} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int \frac{m_\alpha}{3} (\vec{v} - \vec{V}_\alpha)^2 f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (3.4)$$

давление

$$P_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{n_\alpha m_\alpha}{3} \langle u^2 \rangle = \frac{m_\alpha}{3} \int (\vec{v} - \vec{V}_\alpha)^2 f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (3.5)$$

В (3.1)-(3.5) интегрирование проводится по всему объему в пространстве скоростей.

Если столкновения в плазме отсутствуют, то по теореме Лиувелля о сохранении элемента фазового объема, в соответствии с которой вдоль динамической траектории функция распределения остается постоянной.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0, \quad (3.6)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование;  $x_i, p_i (i=1, 2, 3)$  - координата и импульс соответственно. В переменных  $\vec{r}, \vec{v}$  (3.6) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (3.7)$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на частицу.

При наличии столкновений может измениться импульс  $\vec{p}$  частицы, и частица, исчезнув в точке фазового пространства  $(\vec{r}, \vec{p})$ , появляется в точке  $(\vec{r}', \vec{p}')$ , частица может возникнуть в точке  $(\vec{r}, \vec{p})$  (ионизация) или исчезнуть (рекомбинация). В этом случае  $Df/Dt \neq 0$ . Если  $St_{\alpha\alpha}$  дает скорость рождения или уничтожения частиц в данной точке фазового пространства, то (3.7) заменяется на

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}} + (\vec{F}^{\alpha}/m_{\alpha}) (\partial f_{\alpha} / \partial \vec{v}) = St_{\alpha} \quad (3.8)$$

для частиц сорта  $\alpha$ . Здесь  $St_{\alpha} = \sum_{\beta} St_{\alpha\beta}$ . В ряде случаев

$St_{\alpha\beta}$  удается представить в виде интеграла, содержащего в подынтегральном выражении функции  $f_{\alpha}$  и  $f_{\beta}$ , поэтому  $St_{\alpha\beta}$  часто называют интегралом столкновений. При упругих столкновениях столкновительные члены удовлетворяют условиям

$$\int St_{\alpha\beta} d\vec{v} = 0, \quad (3.9)$$

$$\int m_{\alpha} \vec{v} St_{\alpha\alpha} d\vec{v} = 0, \quad (3.10)$$

$$\int \frac{m_{\alpha} v^2}{2} St_{\alpha\alpha} d\vec{v} = 0, \quad (3.11)$$

$$\int m_{\alpha} \vec{v} St_{\alpha\beta} d\vec{v} + \int m_{\beta} \vec{v} St_{\beta\alpha} d\vec{v} = 0, \quad (3.12)$$

$$\int \frac{m_{\alpha} v^2}{2} St_{\alpha\beta} d\vec{v} + \int \frac{m_{\beta} v^2}{2} St_{\beta\alpha} d\vec{v} = 0. \quad (3.13)$$

(3.9) является следствием сохранения числа частиц, (3.10) и (3.12) - импульса, (3.11) и (3.13) - энергии при упругих столкновениях.

В уравнении (3.8)  $\bar{F}^\alpha$  - усредненные макроскопические силы. Случайные микрополя отдельных частиц входят в интеграл столкновений. Если на частицу плазмы не действуют силы неэлектрической природы, то  $\bar{F}^\alpha = e_\alpha (\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{v} \bar{B}])$ , где  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  - значения полей, усредненные по областям, содержащим много частиц, областям с размерами  $l$ , намного превышающими расстояния между частицами  $n^{-1/3}$ , но много меньшими  $r_D$ . Заметим, что в плазме проводится макроскопический учет всех токов и, как правило, не различаются магнитная индукция и напряженность магнитного поля.

В состоянии термодинамического равновесия функция распределения является максвелловской:

$$f_\alpha = f_\alpha^0 = \frac{n_\alpha}{(2\pi T_\alpha / m_\alpha)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha (\bar{v} - \bar{V}_\alpha)^2}{2T} \right\}. \quad (3.14)$$

Левая часть (3.8) при подстановке (3.14) обращается в нуль. Следовательно, каков бы ни был вид столкновительного члена, при подстановке в него (3.14) он должен обращаться в нуль. Релаксация (приближение функции распределения к максвелловской) происходит за время порядка среднего интервала времени между столкновениями  $\bar{\tau}$ . Кулоновские столкновения в плазме не являются мгновенными столкновениями. Из-за дальнего действия кулоновских сил взаимодействие между заряженными частицами происходит непрерывно. Поэтому под  $\bar{\tau}$  понимаются времена, за которые накапливаются изменения в направлении скорости на угол порядка единицы. Для качественных оценок можно считать, что эффективное сечение рассеяния при кулоновских столкновениях примерно на порядок превосходит величину  $\pi(e_1 e_2 / \mathcal{E})^2$ , где  $e_1, e_2$  - заряды сталкивающихся частиц,  $\mathcal{E}$  - энергия их относительного движения. В полностью ионизованной плазме компоненты плазмы (электроны и ионы) обмениваются энергией между собой за времена  $(\bar{\tau}_{e_i}, \dots)$  гораздо более короткие, чем время обмена энергией между элект-

наем и ионами ( $\bar{T}_{e1}$ ). Если температуры электронов и ионов одного порядка, то свободный пробег, определяемый энергией частиц, для ионов и электронов имеет один и тот же порядок величины, а скорости у ионов в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше, чем у электронов.

Поэтому  $\bar{T}_{ii} \sim (m_i/m_e)^{1/2} \bar{T}_{ee}$ . При столкновении легкой частицы с тяжелой передается доля энергии порядка отношения их масс. Следовательно,  $\bar{T}_{ei} \sim (m_i/m_e) \bar{T}_{ee}$ . Таким образом:

$\bar{T}_{ee} : \bar{T}_{ii} : \bar{T}_{ei} \sim 1 : (m_i/m_e)^{1/2} : (m_i/m_e)$  и локальное максвелловское распределение внутри каждой из компонент плазмы устанавливается быстрее, чем между компонентами. Поэтому в теории часто фигурируют отдельно электронная  $T_e$  и ионная  $T_i$  температуры.

Если функция распределения близка к максвелловской, в простейшем случае используется  $\bar{T}$  - приближение для интеграла столкновений

$$St = -(\{ - \}^\circ) / \bar{T}. \quad (3.15)$$

При использовании (3.15) в решении кинетического уравнения необходимо соблюдать определенную осторожность и выбирать  $\bar{T}$  в зависимости от конкретной постановки задачи. Так, например, при рассмотрении токов в полностью ионизованной плазме  $\bar{T} \sim \bar{T}_{ei}$ , при нахождении электронной теплопроводности нужно учитывать столкновения электронов друг с другом и с ионами. В ионосфере определяющими будут столкновения ионов и электронов с нейтральными, поэтому вводится соответственно  $\bar{T}_{en}$ ,  $\bar{T}_{in}$ . Если требуется проводить расчеты с большой точностью, в полностью ионизованной плазме берется интеграл столкновений в форме Ландау:

$$St_{\alpha\beta} = - \frac{2\pi\Lambda e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} \int \left\{ \frac{f_{\alpha}(\bar{v})}{m_{\beta}} \frac{\partial f_{\beta}(\bar{v}')}{\partial v_{\beta}'} - \frac{f_{\beta}(\bar{v}')}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}(\bar{v})}{\partial v_{\alpha}} \right\} \frac{(\bar{v} - \bar{v}')^2 \delta_{\beta\beta} - (v_{\beta} - v_{\beta}')(v_{\alpha} - v_{\alpha}')}{(\bar{v} - \bar{v}')^3} d\bar{v}', \quad (3.16)$$

где  $\Lambda$  - кулоновский логарифм, равный логарифму отношения максимального и минимального параметров столкновения:

$\Lambda = \varrho_n (\nu_{\max} / \nu_{\min}) \cdot \nu_{\min}$  определяется в предположении отклонения частицы на угол порядка  $\pi/2$ ;  $\nu_{\min} \sim e^2 \langle v^2 \rangle / \pi = e^2 / 3T$ ;

$\nu_{\max}$  - дебаевской экранировкой:  $\nu_{\max} \approx \nu_D$  (при больших скоростях надо брать меньшее значение  $\nu_{\max}$ , определяемое из условия сравнимости угла рассеяния с его квантовой неопределенностью  $\nu_{\max} \approx \nu_D e^2 / \hbar v$ ). Влияние магнитного поля на акт голкновения в выражении (3.16) не учитывается, что справедливо, когда радиус кривизны траектории частицы велик по сравнению с дебаевской длиной. Это условие приводит к соотношению

$\omega_{Be} < \omega_p$ , где  $\omega_{Be}$  - циклотронная частота электронов,  $\omega_p$  - плазменная частота. В силу логарифмической зависимости сечения рассеяния от расстояния, на котором происходит обрезание, влиянием магнитного поля на процесс можно пренебречь, когда

$$\varrho_n (\omega_{Be} / \omega_p) < \Lambda, \quad (3.17)$$

Соотношение (3.17) не выполняется только в очень сильных магнитных полях.

Для описания плазменной системы к уравнениям (3.8) добавляются уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho_e, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $\rho_e = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\vec{v}$ ,  $\vec{j} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}$

и соответствующие начальные и граничные условия. Если наряду с внутренними полями на плазму действуют внешние поля  $\vec{E}_{ex}$ ,  $\vec{B}_{ex}$ , в системе (3.8), (3.18) делается замена  $\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \vec{E}_{ex}$ ,  $\vec{B} \rightarrow \vec{B} + \vec{B}_{ex}$ .

Если время рассматриваемых процессов лежит в интервале

При  $\omega_0^{-1} < t < \bar{t}$ , то уравнения (3.8) переходят в бесстолкновительные уравнения Власова:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (3.19)$$

При  $t < \omega_0^{-1}$  следует учитывать многочастичные корреляции. При  $t > \bar{t}$  становится возможным магнитогидродинамическое описание плазмы.

### § 2. Дрейфовое кинетическое уравнение

Если длина свободного пробега  $\lambda = v_T \bar{t}$  (где  $v_T$  - тепловая скорость) много больше ларморовского радиуса или

$$\omega_p \bar{t} \gg 1 \quad (3.20)$$

( (3.20) называют критерием замагниченности), то траектория частицы за время  $\bar{t}$  успевает свернуться в винтовую линию, и можно пользоваться дрейфовым кинетическим уравнением для функции распределения центров ларморовских кружков в пятимерном фазовом пространстве:  $f(\vec{r}, v_{||}, \mu)$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор центра ларморовского кружка,  $v_{||}$  - скорость движения заряда вдоль силовой линии,  $\mu$  - магнитный момент:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\vec{r}} (\vec{U}_d f) + \frac{F_{||}}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{||}} = St, \quad (3.21)$$

где  $F_{||}$  задается уравнением (2.17),  $\vec{U}_d = \vec{v}_d + \vec{v}_d$ ,  $\vec{v}_d$  - скорость дрейфа перпендикулярна магнитному полю.  $St$  - интеграл столкновений - должен зависеть от  $(v_{||}, \mu)$ . В таком описании, кроме тока  $\vec{j}_d = en \vec{v}_d$ , создаваемого перемещением центров ларморовских кружков, надо учитывать ток, создаваемый дипольными моментами  $\vec{\mu}$ , приводящий к ослаблению магнитного поля на величину  $4\pi n \vec{\mu}$  ( $\vec{\mu} = -\mu \frac{\vec{B}}{B}$ ).

Его плотность

$$\bar{j}_d = c \operatorname{rot} n \bar{\mu} = c \operatorname{rot} \int \bar{\mu} f d\bar{v}. \quad (3.22)$$

Если плотность и температура частиц не зависят от координат, то потока частиц внутри плазмы нет, хотя поток центров ларморовских кружков есть, если поле неоднородно. Магнитный и центробежный дрейфы проявляются при этом как краевые эффекты, создавая обтекающие потоки частиц на границе области с постоянной плотностью и температурой.

При одинаковых температурах и длинах свободного пробега

$\omega_{Be} \tau_e = (m_i/m_e)^{1/2} \omega_{ni} \tau_i$ , поэтому в плазме очень часто выполняются условия, когда электроны замагничены, а ионы — нет. Такая ситуация характерна, например, для E-слоя ионосферы, плазмы МГД генераторов. В слое F ионосферы, магнитосфере Земли и многих других космофизических объектах замагничены и электроны и ионы. Если характерные времена исследуемых процессов  $\ll \omega_{ni}^{-1}$ , частицы можно считать незамгниченными.

### § 3. Уравнения переноса

Умножая (3.8) последовательно на  $(\bar{v})^0, (\bar{v})^1, (\bar{v})^2$  и т.д., получим цепочку уравнений для моментов функции распределения. В каждом последующем звене цепочки будут появляться моменты все более высоких порядков. Обычно вычисления проводят до третьих моментов функции распределения  $n$ , в зависимости от конкретных требований задачи, для ее замыкания устанавливают дополнительные связи между макроскопическими параметрами различных порядков. При выводе макроскопических уравнений для сокращения записи будем опускать индекс сорта частиц  $\alpha$ .

Умножим (3.8) на  $I$  и проинтегрируем по  $d\bar{v}$ . Так как

$$\int \frac{\partial f}{\partial v} d\bar{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\bar{v} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

и

$$\int \bar{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{v} = \frac{\partial}{\partial r} \int \bar{v} f d\bar{v} = \frac{\partial}{\partial r} (n\bar{v}),$$

$$\int \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} \left\{ \right\}_{\vec{v} \rightarrow -\infty} - \frac{1}{m} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{F}) d\vec{v} = 0. \quad (3.23)$$

Первый член в (3.23) равен нулю, так как функция распределения очень быстро убывает на бесконечности: второй - также равен нулю, т.к.  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} (e \vec{E}_i + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}]_i) = 0$  (электрическое поле не зависит от скорости, а  $i$ -я компонента силы Лоренца не содержит  $v_i$ ). Таким образом, окончательно получаем уравнение непрерывности или закон сохранения числа частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n \vec{v} = \int St d\vec{v}. \quad (3.24)$$

Если происходят неупругие процессы, то в правой части (3.24) должны стоять источники и стоки. При рассмотрении процессов в ионосфере в правой части (3.24) будут стоять скорость ионизации минус скорость рекомбинации:  $Q - R$ . При упругих процессах в силу (3.9) правая часть (3.24) равна нулю. В дальнейшем, в основном, мы будем интересоваться этим случаем. Умножая (3.24) на массу частицы и заряд соответственно, для массовой плотности  $\rho = mn$  и плотности заряда  $\rho_e$  получим уравнения ( $\vec{j} = en\vec{v}$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (3.26)$$

Для получения уравнения переноса импульса умножим (3.8) на  $m\vec{v}$  и проинтегрируем по  $d\vec{v}$ . Получим векторное уравнение. Его составляющая по координате  $j$  имеет вид:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (mn v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (mn \langle v_i v_j \rangle) - \frac{m}{n} \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i} (F_i v_j) \right\rangle = \int m v_j St d\vec{v}. \quad (3.27)$$

Так как  $\langle v_i v_j \rangle = \langle (u_i + v_i)(u_j + v_j) \rangle = \langle u_i u_j \rangle + v_i v_j$ ,

в силу уравнения непрерывности сумма первого и второго членов (3.27)

$$mn \frac{\partial v_j}{\partial t} + m v_j \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (mn \langle u_i u_j \rangle) + m v_j \frac{\partial n v_i}{\partial x_i} + mn \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i =$$

$$= mn \frac{\partial V_i}{\partial t} + mn V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} (mn \langle u_i u_j \rangle),$$

третий член:

$$\begin{aligned} -\frac{n}{m} \langle \frac{\partial}{\partial u_i} (F_i u_j) \rangle &= -\frac{n}{m} \langle F_i \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \rangle = \\ &= -\frac{n}{m} \langle F_i \delta_{ij} \rangle = -n \langle F_j \rangle = -en (\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V} \bar{B}])_j \end{aligned}$$

( $\delta_{ij}$  - символ Кронекера). Введем обозначения:

$$P_{ij} = mn \langle u_i u_j \rangle = p \delta_{ij} + \pi_{ij}; \quad R_j = \int m v_j St d\vec{v},$$

где  $P_{ij}$  - тензор полного давления,  $\pi_{ij}$  - тензор вязких натяжений (связанный с отклонением функций распределения от сферической симметрии),  $\bar{R}$  - сила трения. Окончательно в векторной форме получаем, вводя субстанциональную и лагранжеву производную,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \quad , \quad \text{уравнение движения}$$

$$mnd \bar{V} / dt = mn [\partial \bar{V} / \partial t + (\bar{V} \nabla) \bar{V}] = -\nabla P + en (\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V} \bar{B}]) + \bar{R}, \quad (3.28)$$

где  $\nabla P = \nabla \bar{J} + \nabla p$  и  $\nabla$  обозначает дивергенцию тензоров  $P$  и  $\bar{J}$  и градиент скалара  $p$ . Часто встречается другая форма записи

$$(3.28): \quad \rho d\bar{V} / dt = -\nabla \bar{J} - \nabla p + en (\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V} \bar{B}]) + \bar{R}. \quad (3.29)$$

При изотропии хаотических скоростей  $\bar{J} = 0$ . В случае упругих столкновений, т.к.  $\bar{R} = \int m \dot{u} St d\vec{u}$ ,  $\bar{R}_\alpha = \sum_p \bar{R}_{\alpha p}$  в силу (3.10), (3.12)

$$\bar{R}_{\alpha\alpha} = 0, \quad \bar{R}_{\alpha\beta} = -\bar{R}_{\beta\alpha}. \quad (3.30)$$

В простейшем случае, аналогичном  $\bar{U}$ -приближению,

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = -n_\alpha m_\alpha (\bar{V}_\alpha - \bar{V}_\beta) / \bar{U}_{\alpha\beta}. \quad (3.31)$$

Для нахождения второго момента кинетического уравнения умножим (3.8) на  $\frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} (u^2 + 2 u_i v_i + v^2)$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nm \langle u^2 \rangle}{2} + \frac{nm v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( n \langle v_i \frac{m v^2}{2} \rangle \right) - \\ - \frac{n}{m} \langle F_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{m v^2}{2} \right) \rangle = \int \frac{m v^2}{2} St d\vec{v}. \end{aligned}$$

Второй член этого выражения преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{nm\langle u^2 \rangle}{2} \right) V_i + nm\langle u_i u_j \rangle V_j + n\langle u_i \frac{mu^2}{2} \rangle \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) V_i + P_{ij} V_j + q_i \right],$$

где  $\vec{q} = n\langle \vec{u} \frac{mu^2}{2} \rangle$  - плотность потока тепла (перенос энергии хаотического движения в системе координат, где газ частиц неподвижен). Третий член равен  $-n\langle \vec{F}\vec{u} \rangle = -enL\vec{V}$ . Член в правой части равен в случае упругих столкновений  $Q + \vec{R}\vec{V}$ , где  $Q = \int \frac{mu^2}{2} St \cdot d\vec{v}$  - выделение тепла за счет столкновений с остальными частицами. Окончательно получаем уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) V_i + P_{ij} V_j + q_i \right] = enE_i V_i - R_i V_i + Q \quad (3.32)$$

или, выделяя тензор вязких натяжений, в векторной форме запишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) + \nabla \left[ \left( \frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) \vec{V} + \pi \vec{V} + q \right] = enE \vec{V} + \vec{R} \vec{V} + Q \quad (3.33)$$

Правые части (3.32), (3.33) является суммой энерговыделений, связанных с работой электрических сил, сил трения и тепловыделения за счет столкновений. Нетрудно показать, что в случае упругих соударений

$$Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} + \vec{R}_{\alpha\beta} \vec{V}_\alpha + \vec{R}_{\beta\alpha} \vec{V}_\beta = 0.$$

Если из уравнения (3.33) с помощью (3.26) и (3.29) исключить изменение кинетической энергии  $nmV^2/2$ , то получится уравнение баланса тепла

$$\frac{3}{2} \frac{\partial nT}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{3}{2} nT \vec{V} \right) + nT \text{div} \vec{V} + (\vec{\pi} \nabla) \vec{V} + \text{div} \vec{q} = 0, \quad Q \quad (3.35)$$

где  $(\vec{\pi} \nabla) \vec{V} = \vec{\pi}_{ij} (\partial V_j / \partial x_i)$ , и уравнение для температуры

$$\frac{3}{2} n(dT/dt) - Q - nT \text{div} \vec{V} - (\vec{\pi} \nabla) \vec{V} - \text{div} \vec{q} = 0. \quad (3.36)$$

Вводя величину  $S$ , с точностью до постоянной равную энтропии, приходящейся на одну частицу,  $S = \ln(T^{3/2}/n) = \ln(p^{3/2}/n^{5/2})$ ,

получим

$$T \left\{ \frac{\partial n S}{\partial t} + \text{div} (n S \vec{V}) \right\} = -\text{div} \vec{q} - (\vec{n} \nabla) \vec{V} + Q. \quad (3.37)$$

Связь  $\bar{f}_{ij}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{R}$ ,  $Q$  с  $n$ ,  $\vec{V}$ ,  $T$  можно найти либо феноменологически, либо методами кинетики путем приближенного локального решения кинетических уравнений при условии малости всех градиентов и медленности изменения всех величин во времени. В последнем случае можно искать решение в виде

$$f_{\alpha}(t, r, \vec{V}) = f_{\alpha}^{\circ} + f_{\alpha}^{\prime} + \dots, \quad (3.38)$$

где  $f_{\alpha}^{\circ}$  имеет вид локального максвелловского распределения (3.14), в котором  $\vec{V}_{\alpha}$ ,  $n_{\alpha}$ ,  $T_{\alpha}$  являются функциями координат и времени, и  $|f_{\alpha}^{\prime}| \ll f_{\alpha}^{\circ}$  - малое возмущение основной части функции распределения. Поправка  $f_{\alpha}^{\prime}$  пропорциональна тем факторам, которые нарушают максвелловское распределение (электрическим полям, градиентам и т.д.). Для достаточно простых случаев удастся найти коэффициенты переноса, т.е. выразить моменты высших порядков через моменты низших порядков и замкнуть цепочку магнитогидродинамических уравнений (3.24), (3.29), (3.33). Действительно, при условии

$$\left| \frac{\nabla n_{\alpha}}{n_{\alpha}} \right|, \left| \frac{\nabla V_{\alpha}}{V_{\alpha}} \right|, \left| \frac{\nabla T_{\alpha}}{T_{\alpha}} \right| \ll \frac{1}{\ell_{\alpha}},$$

$$\left| \frac{1}{n_{\alpha}} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} \right|, \left| \frac{1}{V_{\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial t} \right|, \left| \frac{1}{T_{\alpha}} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} \right| \ll \frac{1}{\tau_{\alpha}}, \quad (3.39)$$

где  $\ell_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$  - длины свободного пробега и время между столкновениями, подставляя функцию распределения в виде (3.38) в уравнение (3.8) со столкновительным членом (3.15), в нулевом приближении будем иметь

$$[\vec{V} \vec{\omega}_{\alpha}^{\circ}] \frac{\partial f_{\alpha}^{\circ}}{\partial \vec{V}} = St_{\alpha}. \quad (3.40)$$

Остальные члены в силу (3.39) и электрическое поле считаются малыми. Левая часть (3.40) обращается в нуль любой сферически симметричной функцией скоростей. Максвелловское распределение обращает в нуль столкновительный член (рассмотрение проводится в системе координат, где плазма покоится). В следующем приближении достаточно учесть в малых членах только  $f_{\alpha}^{\circ}$ , пренебрегая  $f_{\alpha}^{\prime}$ , а в столкновительном члене достаточно учесть часть линейную по  $f_{\alpha}^{\prime}$ . Выражая с помощью уравнений переноса производные по времени через пространственные производные, в резуль-

тате получаем линейное интегродифференциальное уравнение в пространстве скоростей для  $\int_{\alpha}^1$ . Его решение будет линейно зависеть от пространственных производных  $n_{\alpha}$ ,  $\bar{V}_{\alpha}$ ,  $T_{\alpha}$ . Подставив найденное  $\int_{\alpha}^1$  в выражения для потоков тепла, импульса и т.д., мы замыкаем цепочку магнитогидродинамических уравнений переноса.

#### § 4. Двухжидкостная магнитная гидродинамика

Выпишем систему уравнений переноса для плазмы, состоящей из однозарядных ионов одного сорта и электронов. Будем рассматривать достаточно медленные процессы, что позволит пренебречь токами смещения в уравнениях Максвелла. В качестве переменных в такую систему войдут  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $\bar{V}_e$ ,  $\bar{V}_i$ ,  $T_e$ ,  $T_i$ ,  $P_e$ ,  $P_i$ , ( $p_e = n_e T_e$ ,  $p_i = n_i T_i$ ).

$$\partial n_e / \partial t + \nabla (n_e \bar{V}_e) = 0, \quad (3.41)$$

$$\partial n_i / \partial t + \nabla (n_i \bar{V}_i) = 0, \quad (3.42)$$

$$m_e n_e [\partial \bar{V}_e / \partial t + (\bar{V}_e \nabla) \bar{V}_e] = -\nabla \bar{\pi}_e - \nabla p_e - e n_e (\bar{E} + [\bar{V}_e \bar{B}] / c) + \bar{R}, \quad (3.43)$$

$$m_i n_i [\partial \bar{V}_i / \partial t + (\bar{V}_i \nabla) \bar{V}_i] = -\nabla \bar{\pi}_i - \nabla p_i + e n_i (\bar{E} + [\bar{V}_i \bar{B}] / c) + \bar{R}, \quad (3.44)$$

$$\frac{3}{2} n_e [\partial T_e / \partial t + (\bar{V}_e \nabla) T_e] = Q_e - P_e \operatorname{div} \bar{V}_e - (\bar{\pi}_e \nabla) \bar{V}_e - \operatorname{div} q_e, \quad (3.45)$$

$$\frac{3}{2} n_i [\partial T_i / \partial t + (\bar{V}_i \nabla) T_i] = Q_i - P_i \operatorname{div} \bar{V}_i - (\bar{\pi}_i \nabla) \bar{V}_i - \operatorname{div} q_i, \quad (3.46)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4 \bar{\pi}_e (n_i - n_e), \quad (3.47)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (3.48)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (3.49)$$

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \frac{4 \bar{\pi}}{c} e (n_i \bar{V}_i - n_e \bar{V}_e), \quad (3.50)$$

где  $\bar{R} = \int m_e \bar{v} \operatorname{St}_{e_i} d\bar{v}$ ,  $\bar{\pi}_{e\kappa e} = m_e n_e \langle u_{\kappa} u_{\ell} \rangle_e - P_e \delta_{\kappa\ell}$ ,

$$\bar{\pi}_{i\kappa i} = m_i n_i \langle u_{\kappa} u_{\ell} \rangle_i - P_i \delta_{\kappa\ell},$$

$$\bar{q}_e = n_e \left\langle \bar{u} \frac{m_e u^2}{2} \right\rangle_e ; \quad \bar{q}_i = n_i \left\langle \bar{u} \frac{m_i u^2}{2} \right\rangle_i$$

$$Q_e = \int \frac{m_e}{2} (\bar{u} - \bar{V}_e)^2 St_{ei} d\bar{v}, \quad Q_i = \int \frac{m_i}{2} (\bar{u} - \bar{V}_i)^2 St_{ie} d\bar{v}.$$

Током смещения в (3.18) можно пренебречь, если  $V^2 \ll c^2$ . Действительно, сделаем размерностные оценки. Пусть  $L$ ,  $t$  - характерные пространственный и временной масштабы задачи. Тогда из (3.18) следует, что током смещения можно пренебречь, если  $B/L \gg E/cL$  или  $B \gg \frac{V}{c} E$ . Из (3.49) получаем  $E/L \sim n/ct$  т.е.  $L \sim \frac{V}{c} n$ . Следовательно, (3.50) справедливо, если  $V^2 \ll c^2$ .

### § 5. Одножидкостная магнитная гидродинамика

При описании многих медленных процессов в космической плазме нет необходимости решать отдельно уравнения для ионов и электронов, можно ограничиться одножидкостной моделью плазмы, являющейся обобщением обычной гидродинамики на случай проводящей жидкости. Основными переменными при таком описании будут плотность массы  $\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}$  и гидродинамическая скорость

$\bar{V} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \bar{V}_{\alpha}$ ,  $\rho$  и  $\bar{V}$  связаны уравнением непрерывности, которое получается при суммировании (3.25) для всех компонент

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0. \quad (3.51)$$

Плотность электрического заряда  $\rho_q = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}$  и электрического тока  $\bar{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \bar{V}_{\alpha}$  связаны соотношением, получающимся при суммировании (3.26) для всех компонент:

$$\partial \rho_q / \partial t + \text{div} \bar{j} = 0. \quad (3.52)$$

Ограничимся случаем, когда плазма состоит из однозарядных ионов одного сорта и электронов (нетрудно провести обобщение на случай нескольких сортов ионов). Тогда  $\rho_q = e(n_i - n_e)$ ,

$\bar{j} = e n_i \bar{V}_i - e n_e (\bar{V}_i - \bar{V}_e)$ . Будем далее предполагать, что плазма квазинейтральна:  $\rho_q = e(n_i - n_e) \ll e n_e$ ,  $n_i \approx n_e = n$  (при этом  $\bar{j} \approx -en(\bar{V}_i - \bar{V}_e)$ ), и рассматривать такие достаточно медленные процессы, когда в (3.52) можно пренебречь

$\partial \rho_4 / \partial t$ , а в уравнениях Максвелла - током смещения. Тогда мы будем иметь:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3.53)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.54)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.55)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.56)$$

Сюда не вошло уравнение  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e$ . Вихревые электрические поля определяются (3.54); потенциальные, возникающие в результате малой некомпенсации положительных и отрицательных зарядов, определяются уравнениями движения и условием (3.53). Уравнение Пуассона используется, чтобы по известному электрическому полю найти  $\rho_e$ . Для получения уравнения движения в одножидкостном пределе используем закон сохранения импульса в форме (3.27). Для каждой компоненты ( $\alpha = e, i$ ) его можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha V_{\alpha k}) = -\frac{\partial \Pi_{\alpha k \ell}}{\partial x_\ell} + F_{\alpha k}, \quad (3.57)$$

где  $\Pi_{\alpha k \ell} = \rho_\alpha \langle v_k v_\ell \rangle = \mathcal{J}_{\alpha k \ell} + \delta_{k \ell} P_\alpha + \rho_\alpha V_{\alpha k} \cdot V_{\alpha \ell}$ .

Складывая уравнения движения для ионов и электронов, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_k) = -\frac{\partial}{\partial x_\ell} [\Pi_{e k \ell} + \Pi_{i k \ell}] + F_{e k} + F_{i k}. \quad (3.58)$$

Левую часть (3.58) преобразуем в соответствии с (3.51)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_k) &= \rho \frac{\partial V_k}{\partial t} - V_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\rho V_\ell) = \\ &= \rho \left( \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_\ell \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\rho V_k V_\ell). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\rho \left( \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_\ell \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\ell} [\Pi_{e k \ell} + \Pi_{i k \ell} - \rho V_k V_\ell] + F_{e k} + F_{i k}. \quad (3.59)$$

Упрощая выражение в скобках в правой части (3.59), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{e k \ell} + \Pi_{i k \ell} - \rho V_k V_\ell &= \mathcal{J}_{e k \ell} + \mathcal{J}_{i k \ell} + \delta_{k \ell} (P_e + P_i) + \rho_e \cdot V_{e k} V_{e \ell} + \\ &+ \rho_i V_{i k} V_{i \ell} - \frac{1}{\rho_e \cdot \rho_i} (\rho_e V_{e k} + \rho_i V_{i k})(\rho_e V_{e \ell} + \rho_i V_{i \ell}) = \end{aligned}$$

$$= \bar{\Pi}_{\text{екр}} + \bar{\Pi}_{\text{икл}} + \bar{\delta}_{\text{кл}} (P_e + P_i) + \frac{\rho_e \rho_i}{\rho} (V_{\text{ик}} - V_{\text{ек}}) \times \\ \times (V_{\text{ил}} - V_{\text{ел}}) = \bar{\Pi}_{\text{икл}} + \bar{\delta}_{\text{кл}} (P_e + P_i)$$

Тензор  $\bar{\Pi}$  от суммы электронного и ионного тензоров вязкости отличается небольшой квадратичной по скорости добавкой, представляющей собой напряжения, возникающие за счет относительного движения ионов и электронов. В квазинейтральной плазме

$$\frac{\rho_e \rho_i}{\rho} (V_{\text{ик}} - V_{\text{ек}})(V_{\text{ил}} - V_{\text{ел}}) = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \cdot \frac{1}{n_e^2} \bar{j} \times \bar{j}$$

Сила, действующая на плазму, равна (силы трения сокращаются):

$$\bar{F}_e + F_i = e(n_i - n_e) \bar{E} + \frac{1}{c} [(en_i \bar{V}_i - en_e \bar{V}_e) \bar{B}] = \\ = \rho_q \bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{j} \bar{B}]$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\rho \cdot \partial \bar{V} / \partial t = -\nabla p + \frac{1}{c} [\bar{j} \bar{B}] + \bar{F}, \quad (3.60)$$

где  $p = p_e + p_i$  - полное давление, а в  $\bar{F}$  входят вязкость, электрические силы (и могут входить другие силы не электрической природы, например, сила тяжести  $\rho \bar{g}$ , где  $\bar{g}$  - ускорение свободного падения).

Магнитную и электрическую силу в (3.60) удобно представить с использованием тензора Максвелловских натяжений:

$$\bar{T}_{ij} = \bar{T}_{ij}^B + \bar{T}_{ij}^E = \frac{1}{4\pi} (B_i B_j + E_i E_j - \delta_{ij} \frac{E^2 + B^2}{2}), \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{c} [\bar{j} \bar{B}]_i + \rho_q E_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{c}{4\pi} [\bar{E} \bar{B}]_i \right), \quad (3.62)$$

где  $\frac{c}{4\pi} [\bar{E} \bar{B}]$  - вектор Умова-Пойнтинга.

В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики рассматриваются большие масштабы и малые скорости или низкие частоты процессов. Плазма в этих условиях почти квазинейтральна и изотропна. Поэтому в (3.60) можно пренебречь вязкостью и вели-

чинами  $\sim V^2$ , тогда

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{c} [ \bar{j} \bar{B} ] \quad (3.63)$$

Найдем условия, при которых можно пользоваться (3.63). В статической или медленно движущейся плазме, или в плазме без магнитного поля,  $e n E \sim \nabla p$ , т.е.  $E \sim T/eL$ , где  $L$  - характерный масштаб системы. Так как в силу уравнения Пуассона  $\rho_e \sim E/4\pi L$ ,

то  $\rho_e / e n \sim r_D^2 / L^2$ . Обратим внимание на то, что в космических условиях данная оценка для  $E$  может не быть справедливой, нарушается квазинейтральность и возникают большие электрические поля. Если плазма движется поперек магнитного поля, возникает электрическое поле  $E \sim VB/c$ . Для достаточной скорости процессов частоты  $\omega$  скорость плазмы определяется ее инерцией и силой Ампера. Тогда  $\omega \rho_e V \sim \frac{1}{c} j B$ ,  $j \sim c \omega \rho_e V/B$ ,  $\text{div} \bar{j} \sim c \omega \rho_e V/B L$ .

Таким образом,  $\partial \rho_e / \partial t \sim \omega \rho_e \sim \omega E/4\pi L \ll \text{div} \bar{j}$ , если

$$\frac{\omega}{4\pi L} \frac{VB}{c} \frac{BL}{c \omega \rho_e V} = \frac{1}{c^2} \frac{B^2}{4\pi \rho_e} \ll 1.$$

Величина

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi \rho_e}} \quad (3.64)$$

называется альвеновской скоростью. Таким образом, (3.63) можно пользоваться, если  $V_A^2 \ll c^2$ . Данное условие практически всегда выполняется как в лабораторной, так и в космической плазме. Оно может нарушаться только в очень разреженной плазме, находящейся в сильном магнитном поле.

Уравнение переноса энергии в одножидкостной модели получим, сложив уравнения переноса энергии для электронов и ионов:

$$\sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} + \frac{5}{2} p_{\alpha} \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{\rho_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} + \frac{5}{2} p_{\alpha} \right) \bar{V}_{\alpha} + \bar{\pi}_{\alpha} \bar{V}_{\alpha} + \bar{q}_{\alpha} \right] \right\} = \sum_{\alpha} (e_{\alpha} n_{\alpha} \bar{E} \bar{V}_{\alpha} + \bar{R}_{\alpha} \bar{V}_{\alpha} + Q_{\alpha}). \quad (3.65)$$

Так как  $m_e \ll m_i$ ,  $\rho_e \approx \rho_i$  и  $V_e \approx V_i$ , то

$$\rho_e^2 V_e^2 / 2 + \rho_i V_i^2 / 2 \approx \rho_i V_i^2 / 2 \approx \rho V^2 / 2,$$

$$\rho_e V_e^2 \bar{V}_e / 2 + \rho_i V_i^2 \bar{V}_i / 2 \approx \rho V^2 \bar{V} / 2.$$

При  $T_e \sim T_i$  вязкость ионов всегда гораздо больше, чем электронов, поэтому вязкость плазмы целиком определяется ионами

$$\bar{\Pi}_i \bar{V}_i + \bar{\Pi}_e \bar{V}_e = \bar{\Pi}_i \bar{V}_i \approx \bar{\Pi} \bar{V}. \quad \text{В силу (3.4I) } \sum \bar{R}_\alpha \bar{V}_\alpha + Q_\alpha = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \left[ \bar{V} \frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2} (p_e + p_i) \bar{V} + \frac{5}{2} p_e (\bar{V}_e - \bar{V}_i) + \bar{q}_e + \bar{q}_i + \bar{\Pi} \bar{V} \right] = \bar{j} \bar{E}.$$

Обозначая через  $\bar{q} = \bar{q}_e + \bar{q}_i - \frac{5}{2} \frac{p_e}{en} \bar{j}$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \left[ \left( \frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) \bar{V} + \bar{\Pi} \bar{V} + \bar{q} \right] = \bar{j} \bar{E}. \quad (3.66)$$

Уравнение баланса тепла получается сложением уравнений баланса тепла для электронов и ионов

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla (p_\alpha \bar{V}_\alpha) + p_\alpha \nabla \bar{V}_\alpha + (\bar{\Pi} \nabla) \bar{V}_\alpha + \nabla \bar{q} + Q_\alpha \right\} &= 0. \\ \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla (p \bar{V}) - \frac{3}{2} \nabla \left( \frac{p_e}{ne} \bar{j} \right) \cdot p \nabla \bar{V} - p_e \nabla \left( \frac{\bar{j}}{ne} \right) + (\bar{\Pi} \nabla) \bar{V} + \\ &+ \nabla (\bar{q}_e + \bar{q}_i) - Q_e - Q_i = 0: \\ \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla (p \bar{V}) + p \nabla \bar{V} = -\nabla \bar{q} - \frac{\bar{j}}{en} \nabla p_e - (\bar{\Pi} \nabla) \bar{V} + Q_e + Q_i. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Тепловыделение за счет соударений в силу (3.3I)

$$Q_e + Q_i = \bar{R} (\bar{V}_i - \bar{V}_e) = j^2 / (ne^2 \tau_{ei} / m_e) = j^2 / \sigma, \quad (3.68)$$

где  $\sigma = ne^2 \tau_{ei} / m_e$  - проводимость. Выражение (3.66) можно записать в виде:

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla \bar{V} = -\nabla \bar{q} - \frac{\bar{j}}{en} \nabla p_e - (\bar{\Pi} \nabla) \bar{V} + \frac{j^2}{\sigma}. \quad (3.69)$$

Из уравнения непрерывности

$$\nabla \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \nabla \right) \rho = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Поэтому  $\frac{3}{2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3}{2} \rho \frac{d}{dt} \left[ \ln(\rho / \rho^{5/3}) \right]$

и уравнение баланса тепла приобретает вид:

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left( \ln \frac{\rho}{\rho^{5/3}} \right) = -\nabla \bar{q} - (\bar{\Pi} \nabla) \bar{V} - \frac{\bar{j}}{en} \nabla p_e + \frac{j^2}{\sigma}. \quad (3.70)$$

Если диссипативные члены в правой части (3.70) малы, то имеет место адиабата с показателем 5/3. Из уравнений Максвелла (3.53)-(3.56) при  $\epsilon \ll 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} + \nabla \cdot \left\{ \frac{c}{4\pi} [\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{B}}] \right\} = -[\bar{\mathbf{j}}] . \quad (3.71)$$

Сложив (3.66) и (3.71), получим закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t} + \text{div} \bar{\mathbf{q}}^* = 0 , \quad (3.72)$$

где полная энергия и поток энергии имеют вид

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{3}{2} p + \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} ,$$

$$\bar{\mathbf{q}}^* = \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{5}{2} p \right) \bar{\mathbf{V}} + \bar{\Pi} \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{q} + \frac{c}{4\pi} [\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{B}}] .$$

Относительная роль диссипативных процессов тем больше, чем меньше размер системы, т.к. осуществляемый ими перенос энергии имеет диффузионный характер. Если времена диссипативных процессов велики по сравнению с обратными величинами частот движений в плазме или  $L/V$ , где  $L$  - характерный размер системы, то можно пренебречь диссипативными членами и считать, что  $\rho/\rho^{5/3} = \text{const}$ . Диссипативные процессы увеличивают энтропию и вызывают затухание макроскопических движений и волн в плазме.

Уравнение баланса энтропии при  $T_e = T_i = T$  получим, сложив (3.37) для электронов и ионов,

$$\partial S / \partial t + \nabla \cdot \{ S \bar{\mathbf{V}} - S_e \bar{\mathbf{j}} / en + (q_e + q_i) / T \} = \theta ,$$

где  $\theta = T \{ -(\bar{\mathbf{q}}_e + \bar{\mathbf{q}}_i) \cdot \nabla \ln T + Q_e + Q_i \}$  - рождение энтропии,

$S = S_e + S_i = n_e \ln(T^{3/2}/n_e) + n_i \ln(T^{3/2}/n_i)$  - энтропия единицы

объема плазмы.

### § 6. Обобщенный закон Ома

К уравнениям одножидкостной магнитной гидродинамики необходимо добавить соотношение, связывающее электрический ток с электрическим полем и градиентом давления - обобщенный закон Ома.

Умножив правую и левую части (3.57) на  $e_n |m_n$  и сложив, получим

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} (m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (-\nabla \Pi_{\alpha} + e_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_{\alpha} \vec{B}]) + \vec{R}_{\alpha}). \quad (3.74)$$

Член в левой части равен  $\partial \vec{j} / \partial t$ . Так как  $m_e \ll m_i$  и выполняется условие квазинейтральности, то  $\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} n_{\alpha} \vec{E} \approx \frac{n e^2}{m_e} \vec{E}$ ,

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla p_{\alpha} \approx \frac{e}{m_e} \nabla p_e, \quad \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{R}_{\alpha} \approx -\frac{e}{m_e} \vec{R} = -\vec{j} / \tau_{ei},$$

$$\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha} c} [\vec{V}_{\alpha} \vec{B}] = -\frac{e}{m_e c} [\vec{j} \vec{B}] + \frac{e^2 n}{m_e c} [\vec{V} \vec{B}].$$

Пренебрегая членами квадратичными по  $V$ , получаем обобщенный закон Ома

$$\vec{j} + \tau_{ei} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \delta (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{B}] - \frac{1}{n e c} [\vec{j} \vec{B}] + \frac{1}{n e} \nabla p_e). \quad (3.75)$$

При  $\vec{B} = 0$  в стационарном режиме при  $\nabla p_e = 0$  имеет место простой закон Ома  $\vec{j} = \delta \vec{E}$ .

Если при  $\vec{B} = 0$  и  $\nabla p_e = 0$   $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ , то (3.75) определяет удельное сопротивление переменному току, равное  $1/\delta + i\omega \tau_{ei} / \delta = 1/\delta + i\omega m_e / n e^2$ , где  $\omega$  - частота изменения электрического по-

ля. При  $\omega \tau_{ei} > 1$ , т.е. когда частота процесса больше частоты столкновений, индуктивное сопротивление превышает омическое.

Магнитная гидродинамика рассматривает медленные процессы. Наибольший интерес представляет квазистационарный случай, когда

$\partial \vec{j} / \partial t = \partial \vec{V} / \partial t = 0$ . В этом случае можно с учетом (3.63) записать (3.75) в следующем виде

$$\vec{j} = \delta (\vec{E} + [\vec{V} \vec{B}] / c - \nabla p_e / n e) \quad (3.76)$$

или, переходя в систему координат, движущуюся вместе с ионами, получим (3.76) в виде

$$\vec{j} = \delta (\vec{E}' - \nabla p_e / n e), \quad (3.77)$$

где  $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V} \vec{B}] / c$ . Если  $\nabla p_e$  и  $\nabla p_i$  параллельны, то из (3.63) следует, что  $\nabla p_i \perp \vec{j}$ , и уравнение (3.77) подразделяется на два

$\vec{j} = \sigma E_{\parallel}^i$ ,  $E_{\perp}^i = -\nabla p_i / ne$ , т.е. компонента  $E_{\perp}^i$  не создает тока. Она уравнивает градиент ионного давления, обеспечивает квазинейтральность плазмы (ионы не могут оторваться от электронов).

Если  $\nabla p_e = 0$  и  $d\vec{j} / dt = 0$ , т.е. в стационарном и однородном случае, (3.75) можно записать в следующем виде

$$\vec{j} = \omega_{Be} \tau_{ei} [\vec{j} \vec{h}] = \sigma \vec{E}^i, \quad (3.78)$$

где  $\vec{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля и связь тока с электрическим полем имеет вид

$$\vec{j}_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (3.79)$$

где тензор проводимости  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2} & -\frac{\sigma \omega_{Be} \tau_{ei}}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2} & 0 \\ \frac{\sigma \omega_{Be} \tau_{ei}}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2} & \frac{\sigma}{1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

$\sigma_{\parallel} = \sigma$  — продольная проводимость,  $\sigma_p = \sigma / [1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2]$  —

пердсереновская проводимость,  $\sigma_H = \sigma \omega_{Be} \tau_{ei} / [1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2]$  — холловская проводимость,  $\vec{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}^i$ ,  $\vec{j}_{\perp} = \sigma_p \vec{E}_{\perp}^i - \sigma_H [\vec{E}_{\perp}^i \vec{h}]$ .

В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, ток направлен под углом к  $E_{\perp}^i$ , равным  $\arctg(\sigma_H / \sigma_p) = \arctg(\omega_{Be} \tau_{ei})$ .

Абсолютная величина тока связана с модулем электрического поля

соотношением  $j_{\perp} = \frac{\sigma}{[1 + (\omega_{Be} \tau_{ei})^2]^{1/2}} E_{\perp}^i$ . В космофизике вместо

времени между столкновениями ионов и электронов  $\tau_{ei}$  чаще используется обратная ему величина  $\nu_{ei} = \tau_{ei}^{-1}$  — частота столкновений ионов с электронами. Тогда

$$\sigma_{\parallel} = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}}, \quad \sigma_p = ne^2 \frac{1}{m_e} \frac{\nu_{ei}}{\omega_{Be}^2 + \nu_{ei}^2},$$

$$\delta_H = ne^2 \frac{1}{m_e} \frac{\omega_{Ve}}{\omega_{B_0}^2 + \nu_{e1}^2} .$$

Следует отметить, что выбор силы трения в виде  $\vec{R} = -m_e n \nu_{e1} (\vec{V}_e - \vec{V}_i)$ , предполагает, что при столкновении электронов с ионами в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{V}_i \approx \vec{V}$ , скорости электронов, почти не меняясь по величине, хаотически изменяют свое направление, и за время  $\tau_{e1}$  электрон теряет свою упорядоченную скорость относительно ионов, т.е. импульс  $m_e (\vec{V}_e - \vec{V}_i)$  на каждый электрон. На самом деле при действии электрического поля, направленного вдоль  $\vec{B}$ , функция распределения электронов не является максвелловским распределением, сдвинутым на  $\vec{V}_e$  относительно ионов. Вызвано это зависимостью частоты кулоновских столкновений от энергии ( $\nu_{ie}^{-1} \sim v^{-3}$ ). Быстрые электроны под действием электрического поля сильнее сдвигаются относительно ионов, чем медленные. Функция распределения искажается таким образом, что в переносе электрического тока относительно большую роль играют быстрые электроны, и общий коэффициент трения получается меньше, чем для сдвинутого максвелловского распределения. Для однозарядных ионов уменьшение коэффициента трения дается множителем 0,51 и продольная проводимость в два раза меньше поперечной. Вывод обобщенного закона Ома с учетом этого фактора становится несколько более громоздким и приводит в стационарном случае к выражению (3.79), в котором  $\delta_H = 0,51 \delta$ . Во многих расчетах данный момент не является существенным и можно пользоваться  $\delta_H = \delta$ .

## § 7. Магнитная гидродинамика трехкомпонентной плазмы.

### Проводимость в ионосфере Земли

В космических исследованиях часто приходится иметь дело с неполностью ионизованным газом. Такой системой является ионосферная плазма. Если нейтральный газ неподвижен и можно пренебречь процессами ионизации и рекомбинации, то рассмотрение можно проводить с помощью системы уравнений, отличающейся от (3.41)-(3.50) добавлением членов, описывающих взаимодействие электронов и ионов с нейтралами. Однако, если на такую систему достаточно долго действует электрическое поле, то нейтральные частицы при столкновениях с ионами приобретают значительный импульс,

и уже нельзя ограничиваться приближением, когда скорость нейтралов  $\bar{V}_n$  равна нулю. Ограничимся при описании такой системы случаем тройной смеси (так часто делают при изучении электродинамических процессов в ионосфере), состоящей из одного сорта однозарядных ионов, электронов и одного сорта нейтральных частиц массы  $m_n$  и концентрации  $n_n$ . Будем считать, что выполняются условия квазинейтральности, можно пренебречь тензором вязких натяжений и температуры каждой из компонент известны. Уравнения движения для такой плазмы имеют вид

$$\rho_e \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial t} = -\nabla p_e - en(\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V}_e \bar{B}]) - n_{ie}^2 \bar{V}_e (\bar{V}_e - \bar{V}_i) - n_n n_{en} (\bar{V}_e - \bar{V}_n), \quad (3.80)$$

$$\rho_i \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = -\nabla p_i - en(\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V}_i \bar{B}]) - n_{ie}^2 \bar{V}_i (\bar{V}_i - \bar{V}_e) - n_n n_{in} (\bar{V}_i - \bar{V}_n), \quad (3.81)$$

$$\rho_n \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial t} = -\nabla p_n - n_n n_{en} (\bar{V}_n - \bar{V}_e) - n_n n_{in} (\bar{V}_n - \bar{V}_i), \quad (3.82)$$

где

$$\rho_e = m_e n, \quad \rho_i = m_i n, \quad \rho_n = m_n n_{in},$$

$$n_{en}^* = \gamma_{en} \frac{m_e m_n}{\rho_e + \rho_n}, \quad n_{in}^* = \gamma_{in} \frac{m_i m_n}{\rho_i + \rho_n},$$

$$n_{ie}^* = \gamma_{ie} \frac{n_i m_e}{\rho_i + \rho_e} = \frac{\gamma_{ie}}{n} \frac{m_i m_e}{m_i + m_e} \approx \frac{m_e}{n} \gamma_{ie}.$$

Решение системы (3.80)–(3.82) с учетом уравнений непрерывности для каждой компоненты представляет, как правило, довольно сложную задачу. В зависимости от конкретного характера задачи вводятся новые переменные и выбирается соответствующая форма записи. Многие задачи можно решить в системе отсчета, где нейтралы неподвижны. Если рассматриваются медленные установившиеся движения, то производные по времени в левых частях (3.80)–(3.82) опускают. Для ионосферной плазмы часто характерны условия, когда градиентами давления также можно пренебречь. Во всем интервале высот, где необходимо учитывать столкновения частиц (выше

1000 км от поверхности Земли плазма является практически бес-  
столкновительной),  $n < n_n$ , поэтому в правых частях (3.80) -  
(3.82) можно пренебречь силой трения электронов об ионы. В рас-  
сматриваемом приближении

$$\vec{j} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \sigma_p \vec{E}_{\perp} + \sigma_n \frac{[\vec{B}, \vec{E}]}{B}, \quad (3.83)$$

где

$$\sigma_{\parallel} = e^2 n \left( \frac{1}{\nu_{en} m_e} + \frac{1}{\nu_{in} m_i} \right),$$

$$\sigma_p = e^2 n \left( \frac{1}{m_e} \frac{\nu_{en}}{\omega_{Be}^2 + \nu_{en}^2} + \frac{1}{m_i} \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Bi}^2 + \nu_{in}^2} \right),$$

$$\sigma_n = e^2 n \left( \frac{1}{m_e} \frac{\omega_{Be}}{\omega_{Be}^2 + \nu_{en}^2} - \frac{1}{m_i} \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Bi}^2 + \nu_{in}^2} \right).$$

В области E ионосферы  $\nu_{en} \ll \omega_{Be}$ , а  $\nu_{in} \gg \omega_{Bi}$  и воз-  
никает значительная холловская проводимость. С высотой частоты  
 $\nu_{en}$  и  $\nu_{in}$  уменьшаются. С увеличением высоты растет продоль-  
ная проводимость и уменьшаются педерсеновская и холловская  
(рис.3.1). Распределение проводимости в ионосфере Земли сильно  
изменяется в зависимости от времени суток, широты точки наблю-  
дения и уровня солнечной активности. На больших широтах, где в  
земную атмосферу вторгаются мощные потоки частиц и горят поляр-  
ные сияния, в ночной ионосфере проводимость резко увеличивается  
и текут сильные токи.

Так как  $\sigma_{\parallel}$  в ионосфере на несколько порядков превышает  
 $\sigma_p$  и  $\sigma_n$ , силовые линии магнитного поля можно считать экви-  
потенциальными, т.е. на высотах  $\geq 90$  км квазистационарные  
электрические поля практически не зависят от высоты. Поэтому  
для вычисления текущих в ионосфере токов целесообразно ввести  
интегральные по высоте проводимости

$$\Sigma_p = \int \sigma_p dh, \quad \Sigma_n = \int \sigma_n dh, \quad (3.84)$$

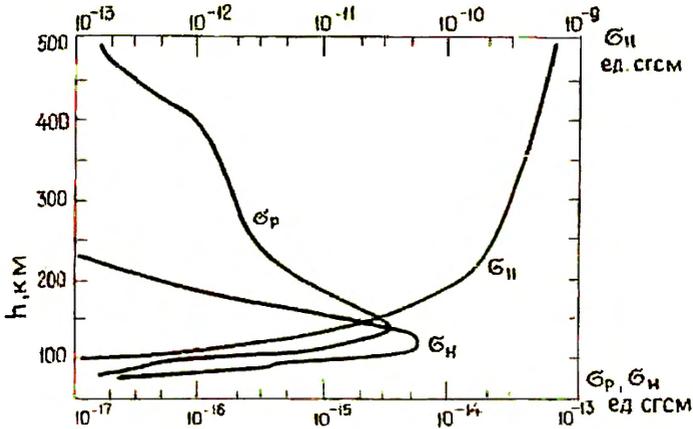


Рис.3.1. Распределение проводимости в ионосфере Земли по высоте в дневное время в средних широтах.  
 $\sigma_p$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_n$  - соответственно пердсереновская, холловская и продольная компоненты броводимости

где интегрирование проводится вдоль силовой линии магнитного поля. В ионосфере высоких широт силовые линии направлены почти вертикально и интегрирование можно проводить по вертикали. Вычисленные таким образом проводимости в дневное время составляют  $\sim 10 \text{ см}^{-1}$ , в ночные часы - на порядок меньше и в дугах полярного сияния - в несколько раз больше.

### § 8. Диффузия магнитного поля и вмороженность

Считая, что заметное изменение плотности тока может в магнитогидродинамическом приближении произойти за время  $\gg \tau_{ei}$ ,

запишем обобщенный закон Ома (3.75) в форме

$$\hat{j} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{E}] - \frac{1}{\text{пес}} [\vec{j} \vec{E}] + \frac{\nabla P_e}{ne} \right). \quad (3.65)$$

Для того, чтобы исключить электрическое поле, возьмем rot от обеих частей (3.85) и учтем уравнения Максвелла (3.53) - (3.56) :

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{E}}{c} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\vec{V} \vec{B}] + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{1}{n} \operatorname{grad} p_e - \\ - \frac{1}{ec} \operatorname{rot} \frac{1}{n} [\vec{j} \vec{B}]$$

или в более симметричном виде

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{V} \vec{B}] - \frac{c}{4\pi e} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{n} [\operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}] \right) - \\ - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{1}{c} \operatorname{rot} \vec{B} + \frac{e}{e} \operatorname{rot} \left( \frac{\nabla p_e}{n} \right). \quad (3.86)$$

Последний член в правой части (3.86) можно упростить:

$$\operatorname{rot} \frac{\nabla p_e}{n} = \operatorname{rot} \left\{ \nabla T_e + T_e \frac{\nabla n}{n} \right\} = \operatorname{rot} \left\{ T_e \frac{\nabla n}{n} \right\} = \\ = \frac{T_e}{n} \operatorname{rot} \nabla n + \left[ \nabla \left( \frac{T_e}{n} \right) \times \nabla n \right] = \frac{1}{n} [\nabla T_e \times \nabla n] - \\ - \frac{T_e}{n^2} [\nabla n \times \nabla n] = \frac{1}{n} [\nabla T_e \times \nabla n].$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{V} \vec{B}] - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{1}{c} \operatorname{rot} \vec{B} - \\ - \frac{c}{4\pi e} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{n} [\operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}] \right) + \frac{c}{en} [\nabla n \times \nabla T_e]. \quad (3.87)$$

Оценим, при каких условиях можно пренебречь третьим и четвертым членами в правой части (3.87). Будем считать, что характерное пространственное изменение происходит на масштабах  $\sim L$ . Первый член в правой части (3.87) много больше третьего, если

$$VL4\pi ne/cB \gg 1,$$

и много больше четвертого, если

$$VL eB/cT_e \gg 1.$$

Таким образом, при достаточно больших

Л можно опустить третий и четвертый члены в правой части (3.87) и получить уравнения для изменения магнитного поля в форме

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{V} \vec{B}] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot rot } \vec{B} \quad (3.88)$$

Если  $\sigma = \text{const}$ , то второй член в правой части (3.88) имеет вид

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot rot } \vec{B} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} (\text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B}$$

и формула (3.88) приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{V} \vec{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B} \quad (3.89)$$

Простой вид уравнения (3.89) привел к тому, что большое число задач магнитной гидродинамики решалось с применением приближений, сделанных при выводе (3.88). Если  $L$  - характерный размер изменения параметров плазмы, то первый член имеет порядок  $V B / L$ , а второй  $c^2 B / 4\pi\sigma L^2$ . Отношение этих величин носит название магнитного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_m = \frac{V L}{c^2} \quad (3.90)$$

Если  $\text{Re}_m \ll 1$ , можно опустить первый член в уравнении (3.88) и получить уравнение диффузионного типа

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B} \quad (3.91)$$

В данном случае происходит омическая диссипация текущих в плазме токов и, соответственно, уменьшение генерируемого этими токами магнитного поля. Вид уравнения (3.91) позволяет употребить понятие диффузии магнитного поля в плазму. Соответствующий коэффициент диффузии равен

$$D = c^2 / 4\pi\sigma \quad (3.92)$$

и время проникновения поля на толщину  $\lambda$  составляет

$$t \sim \frac{\lambda^2}{D} = \frac{4\pi\sigma \lambda^2}{c^2}$$

Если происходит периодический процесс с частотой  $\omega$ , то мы можем получить характерную толщину просачивания магнитного поля в плазму — толщину скин-слоя  $\lambda \sim (D/\omega)^{1/2} = c/(4\pi\sigma\omega)^{1/2}$ .

Коэффициент диффузии (3.92) часто называют коэффициентом магнитной вязкости и обозначают символом  $\nu_m$ . Такая терминология объясняется аналогией между диффузией магнитного поля и вязким просачиванием ротора скорости в обычной гидродинамике из-за обычной вязкости.

Функция Грина для бесконечного пространства

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4\pi Dt}\right] \quad (3.93)$$

описывает процесс диффузии каждой из компонент магнитного поля. В результате, начальное поле  $\vec{B}(\vec{r}, 0)$  со временем расплывается вокруг каждой исходной точки  $\vec{r}'$  по гауссовому закону с зависящей от времени шириной профиля  $(4\pi Dt)^{1/2}$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r}-\vec{r}', t) \vec{B}(\vec{r}', 0) d^3r' \quad (3.94)$$

В процессе диффузии градиенты поля уменьшаются, противоположно направленные поля сливаются и гасятся (ток диссипирует).

Если  $Re_m \gg 1$ , то в ряде задач можно пренебречь вторым членом в уравнении (3.89) и считать, что  $\phi \rightarrow \infty$ . Заметим, что такое приближение понижает порядок уравнения (3.89) и неаккуратное его применение может привести к неверным результатам. Приближение, при котором опускается диссипативный член в (3.89), часто используется при описании магнитных полей в космосе, где за счет больших размеров  $L$  магнитное число Рейнольдса много больше единицы даже при довольно плохой проводимости. Уравнение (3.89) при этом приобретает вид

$$\partial \vec{B} / \partial t = \text{rot} [\vec{V} \vec{B}] \quad (3.95)$$

и называется уравнением вмороженности. Для выяснения физического смысла (3.95) рассмотрим изменение со временем магнитного потока, пронизывающего движущийся вместе с плазмой контур (рис.3.2).

Магнитогидродинамическое (МГД) приближение описывает любую, хорошо проводящую жидкость, поэтому можно говорить об изменении магнитного потока, пронизывающего данный движущийся жидкий контур. Пусть при  $t = 0$  контур совпадает с замкнутой кривой  $c$ , а через время  $\delta t$  контур, сместившись с жидкостью на  $\vec{V} \delta t$ , занял положение  $c'$ . Пусть  $dS_c$  — элемент произвольной поверх-

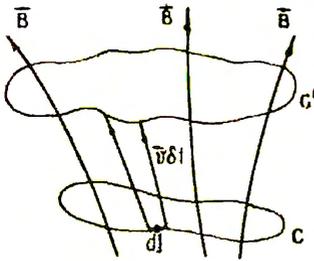


Рис. 3.2. Контур  $c$  и его новое положение  $c'$ , в которое жидкость переходит через время  $\delta t$ .  $d\vec{S}_c$  - элемент дуги  $c$ ,  $\vec{v}$  - скорость жидкости,  $\vec{B}$  - магнитное поле.

ности, натянутой на  $c$ , а  $d\vec{S}_{c'}$  - элемент произвольной поверхности, натянутой на  $c'$ . Элемент дуги контура  $c$ , переместившись на расстояние  $\vec{v}\delta t$ , описывает элемент площади  $[d\vec{\ell} \times \vec{v}\delta t]$  с нормалью, направленной наружу. В силу условия (3.56) и теоремы Гаусса, полный поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Поэтому  $\int_{\vec{S}_c} \vec{B}(t+\delta t) d\vec{S}_c - \int_{\vec{S}_c} \vec{B}(t) d\vec{S}_c - \int_{\vec{S}_c} \vec{B}(t+\delta t) d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t = 0$  и изменение потока через движущийся контур за время  $\delta t$

$$\delta\Phi = \int_{\vec{S}_{c'}} \vec{B}(t+\delta t) d\vec{S}_{c'} - \int_{\vec{S}_c} \vec{B}(t) d\vec{S}_c - \int_{\vec{S}_c} [\vec{B}(t+\delta t) - \vec{B}(t)] d\vec{S}_c - \delta t \oint \vec{B}(t) [d\vec{\ell} \times \vec{v}] - \delta t \int_{\vec{S}_c} \left\{ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}_c - [\text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}]] d\vec{S}_c \right\}. \quad (3.96)$$

При выводе (3.96) мы разложили в ряд  $\vec{B}(t+\delta t)$ , отбросили члены  $-(\delta t)^2$  и применили теорему Стокса к интегралу  $\oint \vec{B} [d\vec{\ell} \times \vec{v}] = \oint [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{\ell}$ . В силу (3.95)  $\delta\Phi = 0$ . Таким образом, магнитный поток через любой контур, движущийся с жидкостью, независимо от вида  $\vec{B}$  и поля скоростей  $\vec{v}$ , постоянен. Вюрстенность можно интерпретировать как движение вместе со средней магнитных силовых линий (отсюда и появился термин вмороженность). Так как  $\sigma = \infty$ , любое сколь угодно малое поле вызвало бы бесконечно большие токи, поэтому в идеально проводящей плазме электрическое поле в сопутствующей системе координат равно нулю  $\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = 0$ . В неподвижной системе координат  $\vec{E} = -\frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$  и скорость движения в направлении, перпендикулярном полю,

$$\vec{v}_\perp = c_1 [\vec{E} \times \vec{B}] / B^2. \quad (3.97)$$

Выражение (3.97) совпадает со скоростью электрического дрейфа в дрейфовой теории. Этот естественный результат (дрейфовую скорость мы находим из требования равенства нулю электрического поля в движущейся системе координат) помогает при решении ряда задач космофизики. Вид уравнения (3.95) совпадает с динамическим уравнением для вихря  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$  в идеальной жидкости:

$\partial \vec{\omega} / \partial t = \text{rot} [\vec{V} \times \vec{\omega}]$ , поэтому методы расчета вихревых движений в идеальной жидкости непосредственно применимы к решению задачи о движении плазмы в условиях  $\sigma = \infty$ . Преобразуем уравнение (3.95). Для этого учтем, что  $\text{rot} [\vec{V} \vec{B}] = (\vec{B} \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \nabla) \vec{B} + \vec{V} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{V}$

и в силу уравнения непрерывности

$$\text{div } \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Тогда  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = (\vec{B} \nabla) \vec{V}$  или  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \nabla \right) \vec{V}$ .

Если скорость не меняется вдоль  $\vec{B}$ , то  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) = 0$ , т.е.

$\vec{B} / \rho = \text{const}$ . Если плазма сжимается, то напряженность поля в ней возрастает, если расширяется - убывает. При решении (3.89) удобно бывает ввести вектор-потенциал ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ) и проинтегрировать один раз, тогда

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = [\vec{V} \text{rot } \vec{A}] - \frac{c^2}{4\pi\epsilon} \text{rot rot } \vec{A} - \nabla \Psi, \quad (3.98)$$

где  $\Psi$  - произвольная скалярная функция координат и времени, которая не влияет на  $\vec{B}$ . Поэтому можно положить ее равной нулю, так что  $\vec{A} = \text{const}$  в любой области, где  $\vec{V} = 0$  и  $\vec{j} = 0$ .

В присутствии омической диффузии нельзя говорить о постоянной связи отдельных магнитных силовых линий с определенными элементами жидкости, т.к. структура поля изменяется. В частном случае, когда  $\text{rot} [\vec{V} \vec{B}]$  точно сбалансирован диффузионным членом

$\frac{c^2}{4\pi\epsilon} \Delta \vec{B}$ , силовые линии можно считать неподвижными ( $\vec{B} = \text{const}$ ), а жидкость - движущейся относительно силовых линий со скоростью  $\vec{V}$ . Поэтому использовать геометрическую концепцию магнитных силовых линий, однозначно связанных с материальными точками, возможно только в простейших случаях.

§ 9. Приложение Чу-Гольдбергера-Лоу

В МГД приближении давление считается скалярной функцией координат и времени, что соответствует функциям распределения по скоростям, близким к изотропным. В бесстолкновительной плазме используют дрейфовое приближение. Если вдоль силовых линий магнитного поля параметры плазмы изменяются достаточно медленно, то можно использовать приближение анизотропной магнитной гидродинамики, развитое в работах Г.Ф. Чу, М.Л. Гольдбергера, Д.Е. Лоу (сокращенно называемое теорией ЧГЛ). В этой теории считается, что при движении частиц сохраняются первый и второй адиабатические инварианты. Уравнения теории имеют вид уравнений одножесткой магнитной гидродинамики, в которых  $\nabla \cdot \mathbf{P}$  заменяется на  $\text{div } \mathbf{P}$ , где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Приближение ЧГЛ выводится при условии пренебрежения тензором теплового потока в уравнении сохранения энергии. Т.к.  $p_{\perp}$  пропорционально  $v_{\perp}^2$ , усредненному по всем частицам и плотности  $\rho$ , то из инвариантности  $\mu$  следует, что  $\langle v_{\perp}^2 \rangle$  пропорционально  $B$  и  $p_{\perp} \sim \langle v_{\perp}^2 \rangle \rho \sim \rho B$ , откуда получаем уравнение состояния

$$\frac{d}{dt} (p_{\perp} / \rho B) = 0, \quad (3.99)$$

которое выполняется вдоль траектории движения.

Рассмотрим трубку бесконечно малого сечения  $dS$ , образованную силовыми линиями магнитного поля. Внутри трубки магнитный поток  $d\Phi = B dS$  сохраняется, поэтому ее поперечное сечение обратно пропорционально  $B$ . Пусть  $\ell$  - протяженность элемента жидкости вдоль силовой линии и  $v_{\parallel} \ell$  сохраняется. Объем, занимаемый частицами, равен  $\delta V = \ell dS$ . Т.к.  $\delta S \sim 1/B$  и объем, занимаемый частицами, обратно пропорционален их плотности  $\ell \sim B/\rho$ . Таким образом, параллельная составляющая давления

$p_{\parallel} \sim \rho \langle v_{\parallel}^2 \rangle \sim \rho / \ell^2 \sim \rho^3 / B^2$ , откуда уравнение состояния, определяющее  $p_{\parallel}$ , в приближении ЧГЛ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0. \quad (3.100)$$

Требование медленности изменения вдоль магнитных силовых линий, налагаемое условием пренебрежения тензором теплового потока, сильно ограничивает возможность применения ЧПД при описании космических объектов. Однако в космосе часто встречаются условия, когда  $\rho_{\perp} \neq \rho_{\parallel}$ . Значительная анизотропия давления ( $\sim 2$ ) может наблюдаться в солнечном ветре\*).

#### Г л а в а 4 . МАГНИТОСТАТИКА

При решении задач в рамках магнитогидродинамического подхода выделяется магнитостатика — определение условий существования равновесных плазменных конфигураций.

##### § 1. Уравнение магнитостатического равновесия

По относительной роли инерции все процессы в плазме делятся на быстрые и медленные. В быстрых процессах инерционный член в (3.89) того же порядка величины, что и остальные члены. В медленных процессах силы инерции много меньше магнитных сил и сил давления, которые практически уравниваются. Оценим скорости движения плазмы, при которых процесс можно считать медленным. Пусть  $L$  — характерный размер плазмы,  $L/V$  — характерное время процесса. Инерционным членом можно пренебречь, если

$$\rho \frac{V^2}{L} \ll \frac{\rho}{L}, \quad \frac{B^2}{4\pi L} \quad (4.1)$$

или  $V^2 \ll V_s^2, V_A^2$ , где  $V_s^2 \sim p/\rho$ ,  $V_A = B^2/4\pi\rho$

\*) Солнечным ветром называется сверхзвуковое истечение плазмы солнечной короны. На орбите Земли величина потока  $\sim 10^8 - 10^{10}$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>; скорость потока  $\sim 200 - 300$  км/с; плотность частиц  $n \sim 1 - 100$  см<sup>-3</sup>; электронная температура  $5 \cdot 10^4 - 10^6$  °К, ионная температура  $3 \cdot 10^4 - 10^6$  °К; напряженность магнитного поля  $\sim 2 - 80 \mu$  ( $I_{\oplus} = 10^{-5}$  Гс); альвеновская скорость  $V_A = B/(4\pi n m_p)^{1/2} \sim 30 - 150$  км/с; относительное содержание гелия 0,0-0,25; число Маха (отношение скорости потока к тепловой скорости) и альвеновское число Маха  $\sim 10$ .

При выполнении (4.1) в плазме магнитное поле и сила давления сбалансированы, и медленное движение плазмы обусловлено их небольшой нескомпенсированной частью - существует магнитостатическое равновесие. Уравнение магнитостатического равновесия имеет вид

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] . \quad (4.2)$$

Система уравнений магнитостатики, кроме (4.2), включает уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \quad (4.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 . \quad (4.4)$$

Уравнения (4.2)-(4.4) определяют равновесные магнитостатические конфигурации.

## § 2. Магнитные поверхности и магнитные трубки

Из (4.2) следует, что

$$\vec{B} \nabla p = 0, \quad \vec{j} \nabla p = 0, \quad (4.5)$$

т.е. магнитные силовые линии и линии тока лежат на поверхности постоянного давления, называемых магнитными поверхностями. В космических условиях и лабораторных установках имеются равновесные плазменные конфигурации, изолированные от окружающего пространства магнитным полем. Их, как следует из (4.5), можно представить себе в виде совокупности сложенных одна на другую магнитных поверхностей. Силовые линии магнитного поля  $\vec{B}(\vec{r})$  определяются как двухпараметрическое семейство решений двух уравнений

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (4.6)$$

для каждого фиксированного момента времени  $t$ . Интегралы (4.6)

$\int (x, y, z) = c_1, \quad \int (x, y, z) = c_2$ , представляют собой поверхности, состоящие из силовых линий. Их пересечение определяет одну силовую линию. Для описания магнитного поля удобно использовать потенциалы Эйлера  $F$  и  $G$  (где  $F$  и  $G$  - скалярные функции)

$$\vec{B} = [\nabla F \times \nabla G] . \quad (4.7)$$

Представление вида (4.7) (рис.4.1) автоматически удовлетворяет уравнению  $\text{div } \vec{B} = 0$  :  $\nabla \cdot (\nabla F \times \nabla G) = \nabla G \cdot [\nabla \times \nabla F] - \nabla F \cdot [\nabla \times \nabla G] = 0$ .

Интегралами системы (4.6) при таком представлении будут

$F = \text{const}$  ,  $G = \text{const}$  (обратное несправедливо: не всякие ин-

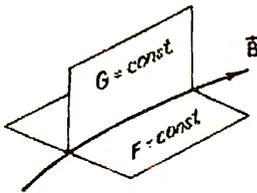


Рис. 4.1. Пересечение поверхностей, определяющее положение силовой линии магнитного поля

тегралы  $\int$ ,  $\oint$  системы (4.6) дают  $\vec{B}$  при подстановке в (4.7). Заметим, что при выполнении условия  $\vec{c} = \infty$  эйлеровы потенциалы удобно использовать при записи уравнения замороженности (3.95)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla F \times \nabla G] &= \text{rot} [\vec{V} \times [\nabla F \times \nabla G]], \\ [\nabla F \times \nabla \frac{\partial G}{\partial t}] - [\nabla G \times \nabla \frac{\partial F}{\partial t}] &= \text{rot} \{ v F (\vec{V} \nabla G) - v G (\vec{V} \nabla F) \} = \\ (\vec{V} \nabla G) \text{rot} \nabla F + [v (\vec{V} \nabla G) \times \nabla F] - (\vec{V} \nabla F) \text{rot} \nabla G - [v (\vec{V} \nabla F) \times \nabla G] - \\ &= [v (\vec{V} \nabla G) \times \nabla F] - [v (\vec{V} \nabla F) \times \nabla G]. \end{aligned}$$

Так как  $dF/dt = \partial F/\partial t + \vec{V} \nabla F$ ,  $dG/dt = \partial G/\partial t + \vec{V} \nabla G$ ,

$$\text{то} \quad [\nabla F \times \nabla \frac{dG}{dt}] = [\nabla G \times \nabla \frac{dF}{dt}]. \quad (4.8)$$

Из множества решений (4.8) выберем самое простое  $\frac{dF}{dt} = \frac{dG}{dt} = 0$ .

Таким образом, потенциалы Эйлера и силовые линии переносятся вместе с жидкостью.

При описании космических магнитных полей широко применяется (см. § 9 гл.3) понятие магнитной силовой трубки. Внутри трубки магнитный поток  $d\Phi = \vec{B} d\vec{S}$  сохраняется, и она не может оборваться (но может расщепиться, как это показано на рис. 4.2 в особых точках). Если поле регулярно в окрестности особой точки, т.е. однозначно и непрерывно, то напряженность поля в ней должна обращаться в нуль. Если такие точки находятся на поверхности плазмы и магнитного поля, то обращение поля в нуль не обязательно.

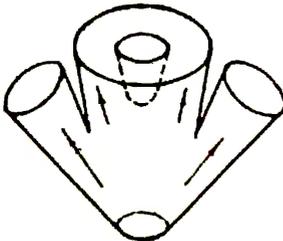


Рис. 4.2. Расщепление магнитных силовых трубок. Стрелками показано направление магнитного поля

Удельный объем магнитной трубки  $W$  равен отношению геометрического объема трубки  $dV$  к магнитному потоку, проходящему внутри нее,  $W = dV/d\Phi$ , или, учитывая сохранение потока внутри трубки,

$$W = \int \frac{dS_n d\ell}{dS_n B} = \int \frac{d\ell}{B}, \quad (4.9)$$

где  $dS_n$  - площадь нормального сечения трубки и интеграл берется вдоль всей силовой линии, если она не замкнута, или между условными точками, соответствующими началу и концу трубки (начало и конец трубки определяются областью, занятой плазмой).

### § 3. Магнитное натяжение и давление магнитного поля

В магнитоэлектростатике часто применяется магнитная часть тензора Максвелловских натяжений

$$\frac{1}{c} [\vec{j} \vec{B}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}] = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \nabla) \vec{B} - \nabla \frac{B^2}{8\pi}. \quad (4.10)$$

С учетом (4.10) уравнение (4.2) приобретает вид

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\vec{n}}{R_c}, \quad (4.11)$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к силовой линии,  $R_c$  - радиус ее кривизны. Сила, обусловленная кривизной магнитных силовых линий, проявляется как натяжение силовых линий. Она сдерживает несбалансированную долю полного давления. Если силовые линии поля прямые, (4.11) дает  $p = B^2/8\pi = \text{const}$ .

Следовательно, если данная плазменная конфигурация удерживается внешним магнитным полем, то магнитное давление, необходимое для удержания, определяется из условия  $B_{\text{ex}}^2/8\pi = p$  (считаем, что магнитное давление внутри плазмы много меньше магнитного давления вне плазмы). В качестве параметра эффективности удержания используется отношение давления плазмы к магнитному давлению

$$\beta = 8\pi p / B^2. \quad (4.12)$$

В зависимости от значения  $\beta$  выделяют плазму низкого давления ( $\beta \ll 1$ ) и высокого давления ( $\beta \gg 1$ ). В первом случае движение частиц определяется внешними магнитными полями и можно пренебречь влиянием тока в плазме на внешнее магнитное поле. Во втором - магнитное поле слабо влияет на движение частиц и само определяется их движением. Для удержания плазмы должно выполняться условие  $\beta < 1$ .

§ 4. Теорема вириала

Преобразуем (4.11), вводя тензор

$$\Theta_{ik} = p_1 \left( \delta_{ik} - \frac{B_i B_k}{B^2} \right) + p_{||} \frac{B_i B_k}{B^2}, \quad (4.13)$$

где  $p_{\perp} = p + B^2/8\pi$ ,  $p_{||} = p - B^2/8\pi$ . Тогда уравнению (4.11) приобретает вид  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_{ik} = 0$ . Магнитное поле в поперечном направлении оказывает давление, а в продольном — создает натяжение. Противоположные действия магнитного давления и натяжения могут скомпенсировать друг друга вдоль одного направления. Теорема вириала устанавливает невозможность такой компенсации вдоль всех направлений одновременно. Для ее доказательства используем тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_k \Theta_{ik}) = \Theta_{ik} \delta_{ik} + x_k \frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial x_i} - \Theta_{ik} \delta_{ik}. \quad (4.14)$$

Интегрируя (4.14) по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , получаем

$$\oint_S \Theta_{ik} x_k dS_i = \int_V \Theta_{ii} dV. \quad (4.15)$$

Так как

$$\begin{aligned} \Theta_{ik} x_k dS_i &= p_1 \delta_{ik} x_k dS_i + (p_{||} - p_1) \frac{B_i B_k}{B^2} x_k dS_i = \\ &= p_1 x_i dS_i + (p_{||} - p_1) \frac{(B_k x_k)(B_i dS_i)}{B^2} \end{aligned}$$

и

$$\Theta_{ii} = p_1 \left( 3 - \frac{B_i B_i}{B^2} \right) + p_{||} \frac{B_i B_i}{B^2} = 2p_{\perp} + p_{||},$$

соотношение (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \oint_S \left\{ p_1 (\vec{r} d\vec{S}) + (p_{||} - p_1) \frac{(\vec{B} \vec{r})(\vec{B} d\vec{S})}{B^2} \right\} &= \int_V (2p_{\perp} + p_{||}) dV \\ \text{или} \quad \oint_S \left\{ \left( p - \frac{B^2}{8\pi} \right) \vec{r} d\vec{S} - \frac{(\vec{B} \vec{r})(\vec{B} d\vec{S})}{B^2} \right\} &= \int_V \left( 3p + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Если вне объема  $V$ , занимаемого плазмой,  $p=0$  и вне плазмы нет жестких проводников с током, то при устремлении поверхности интегрирования в бесконечность поверхностный интеграл обратится в нуль. Так как правая часть (4.16) больше нуля, равенство (4.16) невозможно. Таким образом, ограниченная равновесная конфигурация

плазмы с магнитным полем может существовать лишь при наличии закрепленных проводников с током, интеграл по поверхности которых и войдет в правую часть (4.16).

Из теоремы вириала следует, что равновесное давление в области с усиленным магнитным полем должно быть меньше давления в окружающей плазме. Магнитное поле на Солнце сильно концентрируется в солнечных пятнах - областях солнечной фотосферы\*) с пониженной температурой и излучением, а по теореме вириала и с пониженным газовым давлением.

### § 5. Пинчи и бессильные магнитные поля

При наблюдениях космические объекты часто имеют нитевидную структуру. Поэтому рассмотрим более подробно условия равновесия цилиндрического плазменного шнура или пинча (от английского to pinch - сжимать). Будем вести рассмотрение в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рис. 4.3) с осью  $z$  вдоль оси шнура и считать, что все величины зависят только от  $r$ . Так как

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_r) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r j_r) = 0,$$

то  $B_r = \operatorname{const} / r$ ,  $j_r = \operatorname{const} / r$ . Ограниченность поля и тока при  $r=0$  дает  $B_r = j_r = 0$ . Из (4.3) следует, что

$$j_\varphi = -\frac{c}{4\pi} \frac{dB_z}{dr}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi).$$

Вводя  $J_z(r) = \int_0^r j_z 2\pi r dr$ , получаем  $B_\varphi = \frac{2J(r)}{cr}$ .

---

\*) Солнечная атмосфера (внешний, оптически тонкий слой) делится на фотосферу, хромосферу и корону. В фотосфере - слое толщиной около 500 км - происходит понижение температуры по мере продвижения наружу и формируется фраунгоферовский спектр линий. Над фотосферой до высот порядка 1500 км простирается хромосфера - более разреженная область, в которой температура повышается до  $\sim 10^4$  °К. Между фотосферой и хромосферой имеется область температурного минимума. Выше хромосферы расположена сильно неоднородная часть солнечной атмосферы с температурой  $\sim 10^6$  °К - солнечная корона.

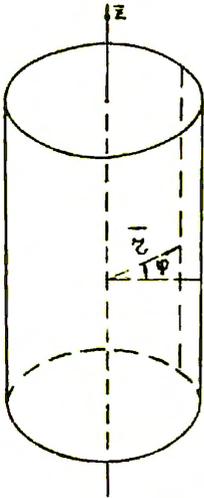


Рис.4.3. Система координат для рассмотрения плазменного пинча. Ось  $z$  направлена вдоль оси пинча,  $\vec{r}$  - радиус-вектор,  $\varphi$  - азимутальный угол

Уравнение (4.3) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left( \rho + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{2\pi c^2 r^2} \frac{dJ_z^2}{dr}$$

Если  $r_0$  - радиус шнура, то интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{r_0} \left( \rho + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) 2\pi r dr - \pi r_0^2 \left( \rho + \frac{B_z^2}{8\pi} \right)_{r=r_0} = \frac{1}{2} J_z^2(r_0).$$

При  $B_z = 0$ ,  $J_\varphi = 0$  ток течет вдоль оси  $z$ , и мы имеем  $z$  - пинч (рис.4.4а). Если  $\rho(r_0) = 0$  в полностью изолированной плазме,  $T_i = T_e = T$ ,  $n_i = n_e = n$  и  $N = \int_0^{r_0} (n_i + n_e) 2\pi r dr$  - полное число электронов и ионов на единицу длины, то мы получаем соотношение Геннетта

$$J_z^2 = 2NT. \quad (4.17)$$

Равновесная конфигурация удерживается полем продольного тока.

Если  $J_z = 0$  и ток течет только в направлении  $\varphi$ , то мы имеем тета-пинч (угол в цилиндрических координатах раньше часто обозначался буквой  $\theta$ ) (рис.4.4б). Если  $\rho(r_0) = 0$ ; то

$$\rho + \frac{B_z^2}{8\pi} = \frac{B_z^2(r_0)}{8\pi}. \quad \text{Удержание плазмы осуществляется внешним продольным полем.}$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то мы имеем бессильное магнитное поле (рис.4.4в), в котором  $J_r / J_\varphi = B_z / B_\varphi$ , т.е. силовые линии имеют вид спиралей, параллельных оси  $z$  при  $r=0$  и перпендикулярных к ней при больших  $r$ .

Магнитное поле называется бессильным в некоторой области пространства, если  $[\vec{j}, \vec{B}] = 0$ . Из условия магнитостатического равновесия следует, что в этой области  $\nabla p = 0$ , а в более общем случае результирующая всех сторонних сил (газокинетических, гравитационных и т.д.) равна нулю. В бессильном поле

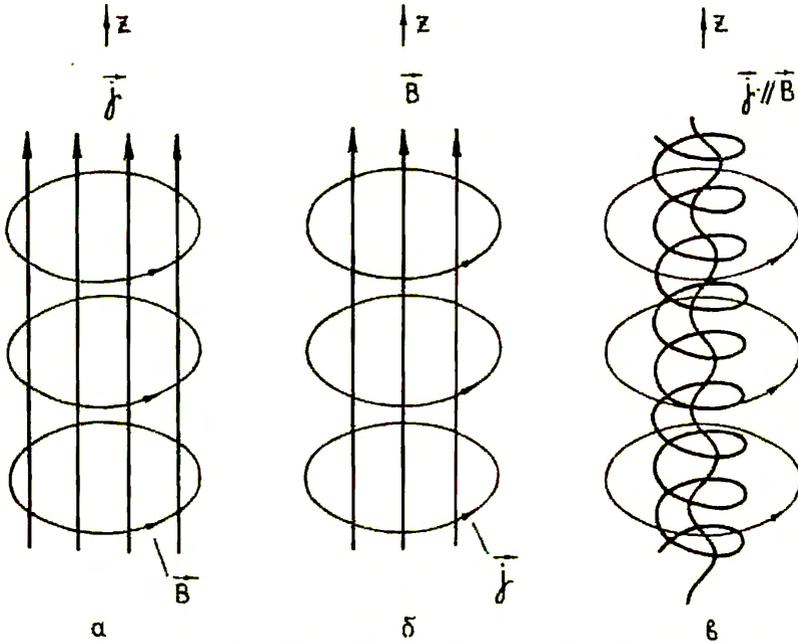


Рис. 4.4. Распределение тока  $\vec{j}$  и магнитного поля  $\vec{B}$  в а - z-пинче, б -  $\Theta$ -пинче, в - бессловом магнитном поле

токи текут вдоль магнитных силовых линий. Условие  $[\vec{j}, \vec{B}] = 0$  выполняется, если  $\text{rot } \vec{B} = \alpha(r) \vec{B}$ , где скалярная функция  $\alpha(r)$  удовлетворяет, в силу  $\text{div } \vec{B} = 0$ , условию:  $\vec{B} \nabla \alpha = 0$ , так что  $\alpha$  - постоянно вдоль каждой магнитной силовой линии (что эквивалентно условию сохранения электрического тока, т.к.  $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \alpha \vec{B}$ ). Частный случай  $\alpha = \text{const}$  на всех силовых линиях соответствует максимальной плотности магнитной энергии при заданной скорости ее диссипации. Из теоремы виряла следует, что бессловое магнитное поле может существовать лишь в части пространства. Бессловые магнитные конфигурации согласно ряду тео-

рий характерны для солнечных протуберанцев\*) и других космических объектов. Вид бессилового магнитного поля в цилиндрической геометрии, показанный на рис. 4.4в, напоминает "магнитный жгут". Волокна конденсированного вещества в космосе наблюдаются по излучению, которое они испускают и поглощают, и часто имеют вид таких жгутов.

### § 6. Токовые слои

При обтекании солнечным ветром геомагнитного диполя образуется магнитосфера Земли. На рис. 4.5 показаны основные структуры в магнитосфере Земли. Поток солнечной плазмы сжимает магнитные силовые линии с дневной стороны и вытягивает их на ночной. Стрелками показаны текущие в магнитосфере токи. В среднем, обращенная к Солнцу граница магнитосферы находится на расстоянии  $\sim 7-12 R_E$  ( $R_E$  - радиус Земли). Вытянутую на ночной стороне часть магнитосферы называют геомагнитным хвостом. Хвост можно проследить до расстояний  $\sim 1000 R_E$ . Внешняя граница магнитосферы называется магнитопаузой (толщина магнитопаузы  $\sim 100-200$  км). Плотность плазмы во внешних областях магнитосферы на порядок меньше плотности плазмы в солнечном ветре. Перед магнитопаузой при торможении солнечного ветра магнитным полем Земли возникает стоячая ударная волна. Область между стоячей ударной волной и магнитопаузой называется магнитослоем или переходным слоем. Она содержит нагретую плазму солнечного ветра. Магнитное поле в переходной области турбулентно. Концентрация плазмы  $\sim 10 \text{ см}^{-3}$ , энергия ионов 100 эВ, электронов  $\sim 30-60$  эВ. На дневной стороне в магнитном поле имеются воронкообразные области со слабым магнитным полем, в которых разделяются квазидипольные и уходящие в хвост магнитные силовые линии - дневные каспы (синонимы - каспы, полярные каспы, магнитосферные ячейки). Узкий слой за магнитопаузой, топологически связанный с каспами, в котором магнитное поле регулярно, но характеристики плазмы близки к переходной области, называют пограничным слоем. Область квазидипольного магнитного поля с

---

\*) Протуберанцем называют объект в солнечной хромосфере или короне, который отличается от окружающего вещества большей плотностью и более низкой температурой. Протуберанцы делятся на спокойные и протуберанцы активных областей. В литературе предлагается несколько типов классификации протуберанцев.

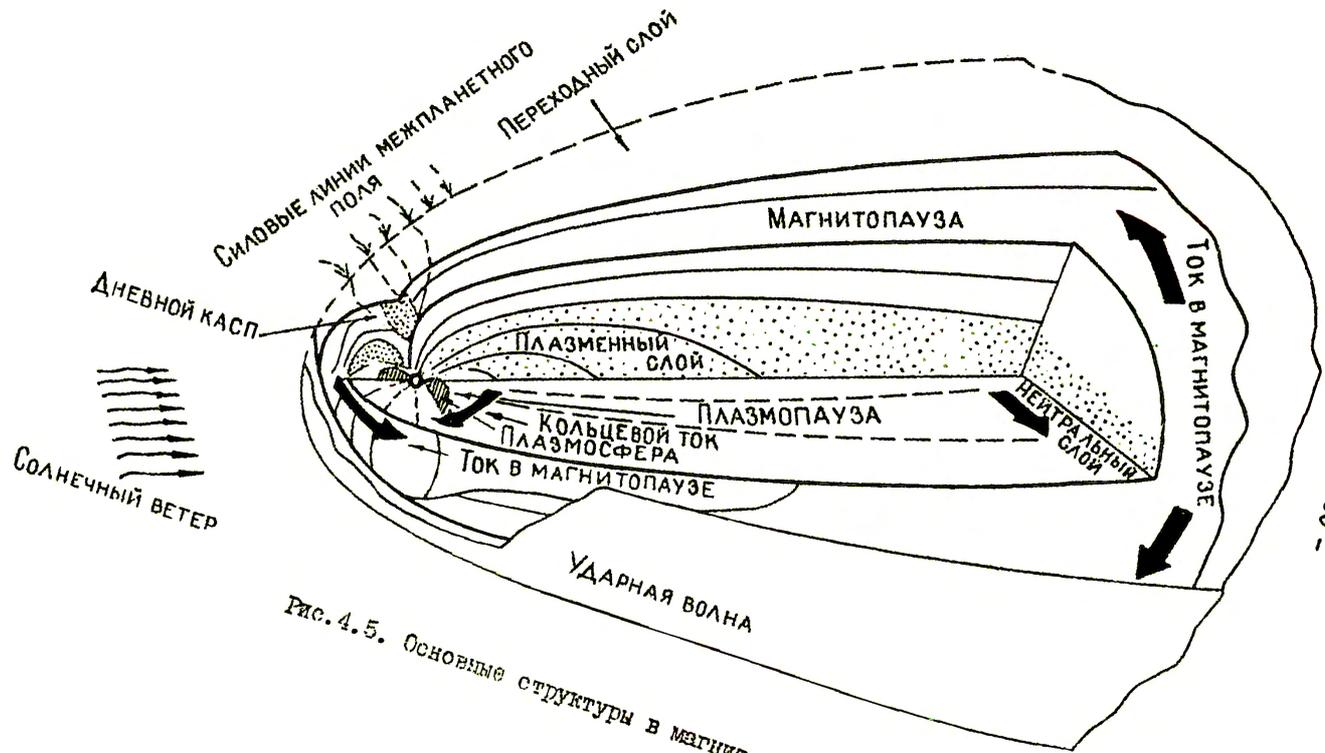
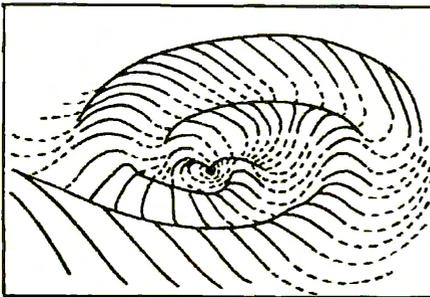


Рис. 4.5. Основные структуры в магнитосфере Земли

силовыми линиями, пересекающими поверхность Земли на низких и средних широтах, заполнена плотной холодной плазмой (с энергией  $\sim 1$  эВ). Эта область называется плазмосферой. Поверхность плазмосферы называют плазмоспаузой. Ее толщина составляет доли земного радиуса. Хвост магнитосферы состоит из двух вериферийных частей -- "придей" силовых линий, топологически связанных с полярной шапкой и почти не содержащих плазмы и плазменного слоя с концентрацией частиц  $\sim 1 \text{ см}^{-3}$ , энергией ионов  $\sim 1-10$  кэВ, электронов  $\sim 0,1-1$  кэВ. Проекция плазменного слоя на высоты ионосферы Земли дает в результате высыпания частиц овал полярных сияний. Вытягивание силовых линий на ночную сторону обусловлено нейтральным токовым слоем, в котором ток течет с утра на вечер.

На рис. 4.6 показана схема гофрированного токового слоя во внутренней части солнечной системы. Токовый слой разделяет межпланетное магнитное поле на две области, с противоположно направленными магнитными силовыми линиями. В одной области магнитное поле направлено к Солнцу, в другой -- от Солнца. Земля находится вблизи экваториальной области Солнца. По наблюдениям вблизи Земли, магнитное поле солнечного ветра состоит из нескольких секторов, в которых магнитное поле направлено преимущественно к Солнцу или от Солнца вдоль архимедовой спирали (из-за вращения Солнца). Две различные полушферы Солнца обычно имеют противоположно направленные магнитные поля. Каждый раз, когда Земля пересекает токовый слой, отмечается прохождение через границу сектора. На рис. 4.6 изображен случай для четырехсекторной структуры. Сплошные и пунктирные линии изображают токовый слой, располагающийся соответственно над и под экваториальной плоскостью.

Рис. 4.6. Схема гофрированного токового слоя во внутренней части солнечной системы



При изучении устойчивости токового слоя в хвосте магнито-сферы Земли, в первом приближении, рассматривается двумерная задача (рис. 4.7) о равновесии плоского нейтрального слоя. В таком слое магнитное поле направлено по оси  $z$ , а все величины зависят только от  $x$ . Поэтому магнитное поле  $B = \text{rot } \vec{A}$  задается одной компонентой вектор-потенциала  $A_y(x)$ . По оси  $y$  течет ток, поддерживающий существование магнитного поля. Так как в бесстолкновительной плазме интегралами движения являются энергия  $mU^2/2$  и  $y$ -компонента обобщенного импульса  $p_y = mU_y + \frac{e}{c} A_y(x)$ , а функция распределения может зависеть только от интегралов движения, то в случае равновесия Харриса, когда функция распределения считается близкой к максвелловской, она задается в виде

$$f_{\alpha} = n_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{\alpha} U^2}{2T_{\alpha}} + \frac{U_{\alpha} p_y}{T_{\alpha}} - \frac{m_{\alpha} U_x^2}{2T_{\alpha}} \right\} \quad (4.18)$$

или

$$f_{\alpha} = n(x) \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{m_{\alpha}}{2T_{\alpha}} [U_x^2 + (U_y - U_{\alpha})^2 + U_z^2] \right\}, \quad (4.19)$$

где  $n(x) = n_0 \exp [e_{\alpha} u_{\alpha} A_y(x) / c T_{\alpha}]$ .

Если  $L$  - толщина слоя и  $B_0$  - напряженность поля вдали от слоя, то из условия квазинейтральности следует, что

$$-e_{\alpha} u_{\alpha} B_0 L / 2c T_{\alpha} = 1 \quad \text{или} \quad u_{\alpha} = -2c T_{\alpha} / e_{\alpha} B_0 L.$$

Из уравнения Максвелла (4.3) следует уравнение для вектор-потенциала

$$\frac{d^2 A_y}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha}. \quad (4.20)$$

Решение (4.20) должно удовлетворять граничным условиям

$$\left. \frac{dA_y}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad A_y \rightarrow \pm B_0 x \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Обозначая через  $\alpha_y = A_y / B_0 L$ , получаем

$$L^2 \frac{d^2 \alpha_y}{dx^2} = \sum_{\alpha} \frac{8\pi n_{\alpha} T_{\alpha}}{B_0^2} \exp [-2\alpha_y(x)]. \quad (4.22)$$

Решение (4.22) при граничных условиях (4.21) имеет вид

$$B_z = B_0 \text{th}(x/L); \quad n = n_0 / \text{ch}(x/L), \quad (4.23)$$

где  $n_0(T_e + T_i) = B^2 / 8\pi$ . На рис. 4.8 показаны зависимости  $B_z$ ,  $B^2 / 8\pi$  и  $p$  в рассмотренном случае.



Рис. 4.7. Плоский токовый слой. Ток  $\vec{j}$  течет вдоль оси  $y$ , магнитное поле  $\vec{B}$  направлено вдоль оси  $z$  и зависит от  $x$ .

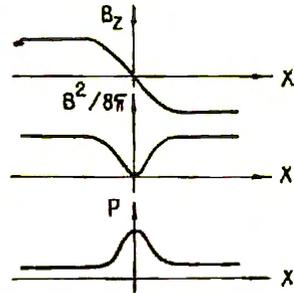


Рис. 4.8. Зависимость распределения магнитного поля  $B_z$ , магнитного давления  $B^2/8\pi$  и давления плазмы  $p$  от координаты  $x$  поперек плоского токового слоя.

### § 7. Основное уравнение

#### теории магнитосферно-ионосферных взаимодействий

В физике магнитосферы большую роль играют токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля. Продольные токи связывают горячую магнитосферную плазму и токовую систему в холодной, слабо ионизованной плазме ионосферы. С существованием продольных токов связаны процессы, приводящие к ускорению частиц вдоль силовых линий геомагнитного поля и появлению дискретных форм полярных сияний.

Пусть  $\hat{\Sigma}$  — тензор проинтегрированной по высоте ионосферной проводимости и  $\vec{E}$  — электрическое поле в ионосфере. Тогда проинтегрированный по высоте ионосферный поток равен  $\vec{j}_{||} = \hat{\Sigma} \vec{E}$ . Из уравнения непрерывности для тока в ионосфере  $\text{div} \vec{j}_{||} = 0$  следует, что продольный ток на границе между горячей магнитосферной плазмой и холодной ионосферной плазмой равен

$$\vec{j}_{||} = - \text{Div} \hat{\Sigma} \vec{E}, \quad (4.24)$$

где  $\text{Div}$  — двумерная дивергенция.

Будем предполагать, что горячая магнитосферная плазма находится в состоянии магнитостатического равновесия и описывается с помощью уравнений (4.2)–(4.4). Для нахождения  $\vec{j}_{||}$  в качестве одного из потенциалов Эйлера согласно Б.А. Тверскому удобно вы-

братъ давление  $p$ . Тогда

$$\vec{B} = [\nabla p \ \nabla G]. \quad (4.25)$$

Умножая (4.25) векторно на  $\vec{B}$ , получаем плотность тока, перпендикулярную  $\vec{B}$

$$\vec{j}_1 = c[\vec{B} \nabla p] / B^2 \quad (4.26)$$

Рассмотрим тонкую силовую трубку, ограниченную поверхностями  $(p, p + \delta p), (G, G + \delta G)$  (рис. 4.9). Согласно (4.26),  $\vec{j}_1$  течет между поверхностями равного давления, поэтому в токовый баланс надо включать токи через  $(G, G + \delta G)$  и вдоль магнитного поля. Элемент площади поверхности  $dS = d\ell \cdot \delta h$ , где  $d\ell$  - дифференциал дуги,  $\delta h$  - расстояние между  $p$  и  $p + \delta p$ .

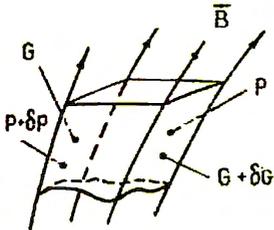


Рис. 4.9. Силовая трубка магнитного поля  $\vec{B}$ , ограниченная поверхностями  $(p, p + \delta p)$  и  $(G, G + \delta G)$

*Handwritten notes:*  
 I\_G = - c delta p W(G, p)  
 I\_{G+delta G} = c delta p W(G+delta G, p)

Так как  $\delta p = ([\vec{B} \times \nabla G] \nabla p) \delta h / |[\vec{B} \nabla G]|$ ,  
 $\delta h = \delta p |[\vec{B} \times \nabla G]| / ([\vec{B} \times \nabla G] \nabla p)$ ,

ток через поверхность трубки  $G = \text{const}$

$$I_G = \int \frac{(j_1 \cdot \nabla G)}{|\nabla G|} \delta h \delta \ell = c \delta p \int \frac{\nabla G [\vec{B} \nabla p] |[\vec{B} \nabla G]|}{|\nabla G| B^2 ([\vec{B} \nabla G] \nabla p)},$$

где интеграл берется между точками вхождения силовой линии в северную и южную полушария. Учитывая, что перестановка двух множителей в смешанном произведении приводит к изменению знака и формулу (4.9), получаем

$$I_G = - c \delta p \int \frac{d\ell}{B} = - c \delta p W(G, p).$$

Аналогично получаем

$$I_{G+\delta G} = c \delta p W((G + \delta G), p).$$

Поэтому ток, вытекающий из трубки в северное и южное полушария,

равен  $\delta I_G = c \delta p \delta G \frac{\partial W}{\partial G}$

Если условия в северном и

в южном полушариях одинаковы, то в каждое из них потечет  $0,5\delta I_G$ . Если  $dS_0$  - сечение трубки у ее основания над ионосферой, то в силу сохранения магнитного потока  $\delta S_0 B = \delta r \delta G$ . Поэтому

$$j_{||} = 0,5\delta I_G / \delta S_0 = 0,5c \frac{\partial W}{\partial G} B.$$

Учитывая, что  $vW = \frac{\partial W}{\partial r} v r + \frac{\partial W}{\partial G} v G$ , выражение (4.25)

и, вводя  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали к ионосфере, окончательно получим

$$j_{||} = 0,5c (\vec{n} [\nabla W \nabla r]). \quad (4.27)$$

Вводя  $\Phi$  - электрический потенциал в ионосфере, получаем основное уравнение теории магнитосферно-ионосферных взаимодействий

$$\operatorname{div} \sum \nabla \Phi = \frac{1}{2} c (\vec{n} [\nabla W \nabla r]). \quad (4.28)$$

## Глава 5. ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В КОСМОСЕ

МГД подход позволяет ответить на вопрос о механизмах усиления и поддержания космических магнитных полей.

### § 1. Космические магнитные поля. Задача динамо

Космические магнитные поля измеряются как непосредственно магнитометрами на борту космических аппаратов (магнитные поля в солнечном ветре и магнитосферах планет), так и в результате наблюдений спектральных характеристик излучающих и поглощающих объектов (магнитные поля Солнца и звезд, магнитное поле Галактики). Напряженность магнитного поля Земли составляет  $\sim 0,3$  Гс на экваторе и  $\sim 0,6$  Гс на полюсах. В солнечной системе зарегистрированы сильные собственные магнитные поля у Юпитера и Сатурна и слабое у Меркурия. Магнитное поле в солнечном ветре порядка нескольких гамм ( $I_{\text{r}} = 10^{-5}$  Гс). Солнце обладает сложной системой магнитных полей с напряженностью от 1 до  $10^3$  Гс, которая может быть представлена как комбинация слабых протяженных унисполлярных областей и компактных интенсивных областей с полями противоположной полярности. Северное и южное полушария Солнца заняты унисполлярными областями противоположной полярности, и эта полярность

меняется с периодом, приблизительно равным 11 годам. На белых карликах обнаружены магнитные поля напряженностью  $10^7-10^8$  Гс, пульсары обладают магнитными полями до  $10^{12}$  Гс. Диск Галактики пронизан магнитным полем напряженности  $\sim 2-3 \cdot 10^{-6}$  Гс.

Энергия, выделяющаяся в недрах звезд и планет в результате действия ядерных и гравитационных сил, вызывает движение газа или жидкости, в которых может протекать электрический ток. Движение проводника преобразуется в энергию электромагнитного поля посредством механизмов, объединенных общим названием динамо (по аналогии с обычной динамо-машиной).

Из уравнения (3.87) следует, что к генерации магнитного поля может приводить первый член, соответствующий движению среды, и последний, в случае, когда  $\nabla T_e$  и  $\nabla p$  неколлинеарны. Неколлинеарность  $\nabla T_e$  и  $\nabla p$ , а также ряд неучтенных нами эффектов, обусловленных радиоактивной и химической неоднородностью, приводят к возникновению слабых "затравочных" полей в космосе, которые затем усиливаются при движении вещества. В дальнейшем мы рассмотрим подробнее именно этот эффект.

Как правило, в космических объектах, таких как планеты и звезды, плотность энергии магнитного поля намного меньше плотности энергии вещества. Поэтому часто можно пренебречь обратным влиянием генерируемых магнитных полей на движение и работать в приближении кинематического динамо, что соответствует заданию поля скоростей  $\vec{V}$  в уравнении (3.88). Тогда (3.88) есть линейное уравнение относительно  $\vec{B}$ . Такое приближение оправдано, если электромагнитная сила в уравнении (3.63) много меньше других членов, т.е.  $\rho v^2/2 \gg H^2/8\pi$  или  $\rho \gg H^2/8\pi$ .

Большие размеры космических объектов приводят к большим числам Рейнольдса:  $Re_m \gg 1$ , поэтому часто рассмотрение можно ограничить уравнением вихревой вязкости. Будем считать для простоты, что  $\sigma = \text{const}$  и пользоваться уравнением (3.89). Так как генерационный член  $\text{rot}[\vec{V}\vec{B}]$  в (3.89) преводит к изменению поля за время  $\sim L/V$ , а диссипативный  $D\Delta\vec{B}$  приводит к диссипации за время в  $Re_m$  раз большее  $\sim L^2/D$ , движение среды за счет индуктивности может приводить к значительному усилению поля.

Если скорость течения  $V$  мала по сравнению со скоростью звука  $V_s \sim (\rho/\rho)^{1/2}$ , то число Маха  $M = V/V_s \ll 1$  и можно

использовать приближение несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (5.1)$$

Если  $\partial \vec{V} / \partial t = 0$ , то динамо называется стационарным.

## § 2. Сдвиговое движение и дифференциальное вращение

Простейшим видом движения, которое приводит к усилению магнитного поля является сдвиговое движение. Пусть при  $L=0$   $\vec{B} = \{0, 0, B_0\}$  и скорость  $\vec{V} = \{V_x(z), 0, 0\}$  (рис. 5.1). Уравнение вмороженности дает

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (V_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (V_x B_z), \quad \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (V_x B_y), \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (V_x B_z)$$

Решение системы приводит к

$$B_z = B_0, \quad B_y = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} V_x. \quad (5.2)$$

Картина силовых линий в случае, если  $V_x(z)$  отлична от нуля при  $z \in (-z_0, z_0)$ , показана на рис. 5.1 В начальный момент силовые линии прямые. Затем движение "вытягивает" силовые линии вдоль  $\vec{V}$  - растет  $B_x$ -компонента. Таким образом, поле генерируется движущейся плазмой. Однако этот рост не может происходить неограниченно. Уменьшение масштаба поля приводит к включению омической диссипации, т.е. включается член  $D \Delta \vec{B}$ . В асимптотическом режиме  $D \Delta B_x \approx -B_0 \frac{\partial V_x}{\partial z}$  и  $B_x \approx \operatorname{Re}_m B_0 \gg B_0$ , т.е. устанавливается значение поля, во много раз превышающее начальное  $B_0$ .

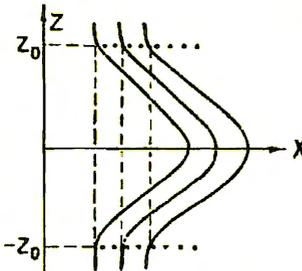


Рис. 5.1. Силовые линии магнитного поля до (пунктир) и после (сплошные линии) начала сдвигового движения по оси  $x$  в интервале  $(-z_0, z_0)$

Более сложным и широко распространенным движением, приводящим к усилению поля, является дифференциальное вращение (рис. 5.2а, б), т.е. вращение, при котором угловая скорость  $\Omega$  зависит

от расстояния до оси вращения. Силовые линии, соединявшие две точки, лежащие на различных расстояниях по радиусу от оси вращения, со временем растягиваются в спирали.

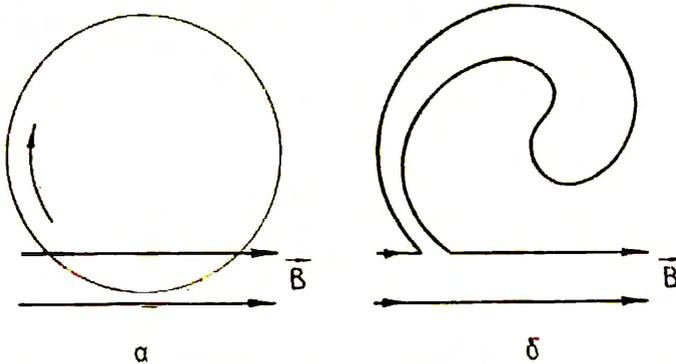


Рис. 5.2. Схема усиления магнитного поля  $\vec{B}$  в процессе дифференциального вращения, а и б - конфигурация магнитных силовых линий до и после включения движения соответственно

На рис. 5.3 (а, б) показаны схемы строения Солнца и Земли. Теоретически предсказана зависимость  $\Omega^2$  от расстояния до центра Солнца, зависимость  $\Omega^2$  от широты наблюдается непосредственно. Период вращения Солнца составляет от 25 до 35 суток. Угловая скорость у полюсов равна  $2/3$  угловой скорости на экваторе. Скорость движения жидкости на поверхности земного ядра составляет  $\sim 0,3$  мм/с. Ядро вращается медленнее мантии. В низких широтах внутренняя часть ядра вращается быстрее, чем его поверхность.

В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  параметры Ланге которой равны соответственно  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\varphi = r \sin \theta$ , магнитное поле выражается через вектор-потенциал следующим образом:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \right),$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right),$$

$$B_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}.$$

Компоненту  $(B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$  принято называть полоидальным полем, компоненту  $B_\varphi \vec{e}_\varphi$  - торoidalным.

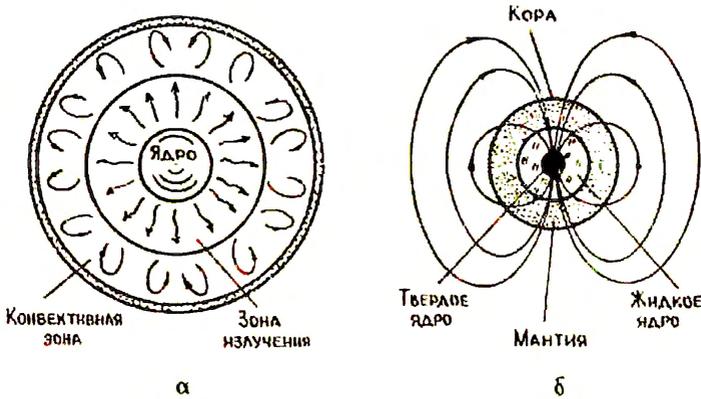


Рис. 5.3. Схемы строения: а - Солнца, б - Земли

В осесимметричном случае ( $\partial/\partial\psi = 0$ ), когда  $\vec{U} = u_\varphi \vec{e}_\varphi$  и

$$B_r = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta A_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \right),$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}, \quad V_\varphi = r \Omega(r, \theta) \sin\theta,$$

полюсальная компонента поля определяется только  $A_\varphi$ , поэтому в качестве параметров удобно выбрать  $A_\varphi, V_\varphi$ . Уравнение для  $A_\varphi$  будет содержать только диссипативный член

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = D \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) \right) A_\varphi. \quad (5.3)$$

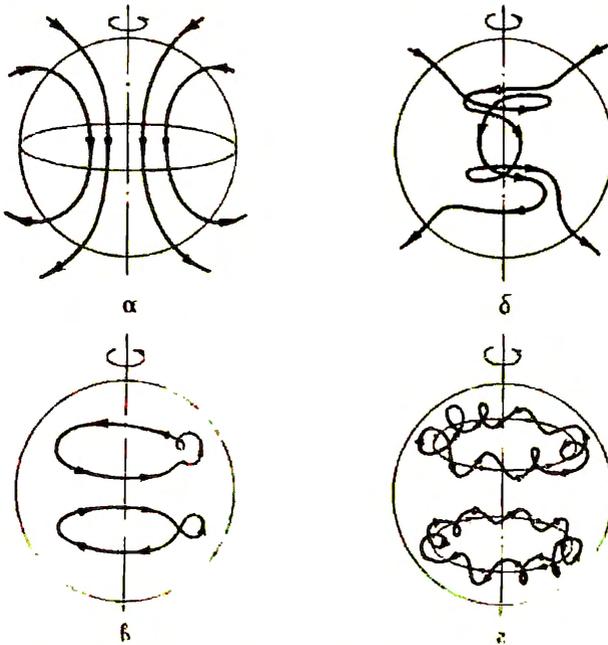
Так как

$$\begin{aligned} (\text{rot}[\vec{V}\vec{B}])_\varphi &= -\frac{\partial}{\partial\theta} (\Omega \sin\theta B_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega \sin\theta B_r) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta} \left( \Omega \sin\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Omega \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta A_\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta A_\varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \Omega \frac{\partial}{\partial\theta} (r \sin\theta A_\varphi) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta A_\varphi) + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} (r \sin\theta A_\varphi) \right] = \\ &= -\frac{\partial \Omega}{\partial\theta} \sin\theta B_\theta - \frac{\partial \Omega}{\partial r} r \sin\theta B_r, \end{aligned}$$

уравнение для  $B_{\varphi}$  при  $\Omega \neq \text{const}$  будет содержать как генерационный, так и диссипативный члены:

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} = - \sin \theta \left[ B_{\theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + r B_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] + D \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \right. \\ \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] B_{\varphi} .$$

Наличие дифференциального вращения, таким образом, может привести к росту  $B_{\varphi}$ . На рис. 5.4а,б показаны первоначально дипольные магнитные силовые линии, изогнутые неоднородным вращением, когда внутренняя часть сферы вращается быстрее внешней. В случае земного шара азимутальное поле может составлять  $\approx 100$  Гс. Оно не



Углы генерации магнитных полей планет, а - первоначально дипольное поле, б - возмущение азимутального поля из силовых линий дипольного поля вследствие неоднородного вращения ядра, в - деформация азимутальных силовых линий в вихреобразные вращательные конвективные ячейки, г - образование силовых линий торoidalного поля - питаль, при входе к регенерации полоидального поля

может проникнуть за пределы ядра в проводящую мантию, т.к. ему соответствуют полоидальные токи. Поэтому такое поле нельзя наблюдать на поверхности Земли. Существует точка зрения, согласно которой азимутальное поле Солнца можно наблюдать в виде выступающих на его поверхности биполярных магнитных областей, ориентированных в широком направлении. Азимутальные компоненты поля непосредственно наблюдаются в диске Галактики. Установившееся квазистационарное значение тороидального поля  $B_{\varphi} \approx \text{Re}_m A_{\varphi} / L$ .

После достижения этого значения за время  $t \sim L^2/D$  поле диссипирует (исчезает полоидальное поле). Поэтому простое дифференциальное вращение может приводить только к временному усилению поля.

### § 3. Антидинамо теоремы

Невозможность стационарного динамо при  $\vec{V} = V_{\varphi} \vec{e}_{\varphi}$  приводит к невозможности возникновения осесимметричного магнитного поля. Данное утверждение было сформулировано в 30-е годы Каулингом и получило название теоремы Каулинга. Невозможность динамо в случае плоского движения показал Л.Б.Зельдович. Пусть

$\vec{V} = (V_x, V_y, 0)$ , тогда уравнение (3.89) распадается на две независимые системы: одно для  $B_z$  и два связанных для  $B_x$  и  $B_y$ . При  $\text{div } \vec{V} = 0$

$$\partial B_z / \partial t + (\vec{V} \nabla) B_z = D \Delta B_z, \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) имеет вид уравнения теплопроводности и  $B_z \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . При  $B_z = 0$  вектор-потенциал имеет только одну компоненту  $A_z$ , для которой

$$\partial A_z / \partial t + (\vec{V} \nabla) A_z = D \Delta A_z, \quad (5.6)$$

т.е.  $A_z \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и затухает не только  $B_z$ , но и  $B_x, B_y$ . В общем случае любое поле скоростей  $\vec{V}$ , для которого  $\text{div } \vec{V} = 0$ , можно записать в виде

$$\vec{V} = [\nabla \xi \nabla \eta], \quad (5.7)$$

так, что вектор  $\vec{V}$  лежит на пересечении поверхностей  $\xi = \text{const}$ ,

$\eta = \text{const}$ . Если поверхность  $\xi = \text{const}$  (или  $\eta = \text{const}$ ) есть плоскость или сфера, то динамо невозможно.

#### § 4. Конвективные ячейки

Большой интерес в проблеме генерации магнитных полей представляет движение в конвективных ячейках. Если слой жидкости или газа нагреть снизу, образуются стационарные конвективные движения. Из-за теплового расширения нижние более легкие слои стремятся поменяться местами с верхними тяжелыми. В слое, подогреваемом снизу и охлаждаемом сверху, циркуляционное конвективное движение непрерывно переносит тепловой поток. Слой выглядит составленным из многоугольных ячеек, которые при достаточной однородности слоя по толщине и условий подогрева приближаются по форме к правильным шестиугольным призмам (см. рис. 5.5). Такое конвективное движение называется Бенаровской конвекцией. С увеличением теплового потока движение принимает нерегулярный или турбулентный характер.

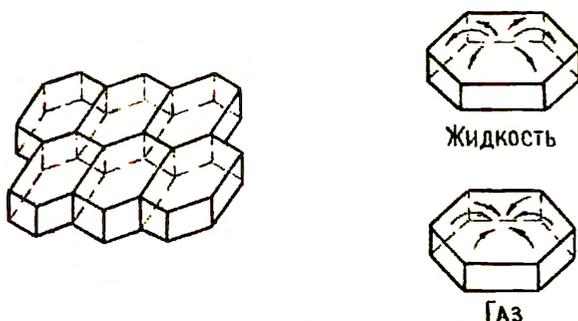


Рис. 5.5. Форма конвективных ячеек. Стрелками показано направление движения

Теория конвекции описывает устойчивые состояния, установившиеся в конвективно неустойчивых нелинейных системах. Считается, что наблюдаемые на Солнце грануляция, супергрануляция и гигантские ячейки являются проявлением солнечной конвекции. Поверхность Солнца выглядит как совокупность ярких элементов — гранул, разделенных более темными промежутками. Характерные размеры гранул  $\sim 10^3$  км. В центре гранулы существует восходящий поток со скоростью  $\sim 0,4$  км/с. Скорость горизонтального растекания  $\sim 0,25$  км/с. Продолжительность жизни гранул  $\sim 8$  мин. На спектро-релиограммах видна характерная сетка, соответствующая областям

локального усиления магнитного поля. Ячейки этой сетки - супергранулы - имеют характерный размер  $\sim 10^4$  км и время жизни  $\sim$  суток. Характерная скорость горизонтальных движений  $\sim 0,3-0,4$  км/с, вертикальных -  $0,1-0,2$  км/с. И в гранулах и в супергранулах вещество поднимается в центральной части ячейки и опускается на периферии. Распределение активных областей и слабых магнитных полей на Солнце, согласно ряду авторов, определяется системой гигантских гранул. Их типичные размеры  $\sim 10^5$  км, а скорость  $\sim 0,1$  км/с.

В случае адиабатического движения условия возникновения конвективных движений даются критерием Шварцшильда

$$dT/dz < 0, \quad |dT/dz| > |d\rho/dz|_s, \quad (5.8)$$

где ось  $z$  направлена вертикально вверх,  $dT/dz$  - вертикальный градиент температуры,  $|dT/dz|_s$  - вертикальный градиент при изэнтропическом движении. При выполнении (5.8) элемент вещества, отклонившийся от своего первоначального положения вверх и изменивший свою плотность по адиабатическому закону, окажется более горячим и менее плотным, чем окружающая среда, поэтому он будет продолжать всплывать. Элемент вещества, отклонившийся вниз, окажется более холодным и более плотным, чем окружающая среда, и будет продолжать тонуть. В случае несжимаемой жидкости  $|dT/dz|_s = 0$  и (5.8) сводятся к первому условию.

Теоретические исследования бенаровской конвекции проводятся, как правило, в приближении Буссинеска: плотность вещества считается функцией только температуры (т.е. предполагается несжимаемость). Согласно теоретическим представлениям в интервале глубин Солнца от  $10^3$  до  $10^5$  км вещество постоянно хорошо перемешивается, так что оно почти изэнтропично. Ниже этой зоны имеет место конвективно устойчивое распределение энтропии и температуры. Выше  $10^3$  км имеется неустойчивый слой, где энтропия растет книзу, несмотря на перемешивание. Температура в конвективной зоне Солнца изменяется от  $10^3$  °К до  $10^6$  °К, а плотность - от  $10^{-7}$  до  $10^{-1}$  г/см<sup>3</sup>, т.е. на 5-6 порядков. Такие перепады делают непригодным приближение Буссинеска, что затрудняет прямое применение теоретических расчетов к конвективной зоне Солнца.

Скорость гидродинамического течения при заданных внешних условиях определяется формой и масштабом движения. Форма и масштаб

определяет тепловой поток, переносимый конвекцией. Под пландотмой конвективной ячейки понимается форму ее горизонтальной проекции и локализацию ячейки по вертикали. Если слой ограничен сверху жесткой пластиной, то возникает система вращающихся горизонтальных валов. В экспериментах со свободной поверхностью возникает шестиугольные ячейки. Существенную роль играет при этом температурная зависимость поверхностного натяжения и сильная температурная зависимость кинематической вязкости (кинематической вязкостью  $\nu$  называется динамическая вязкость, деленная на плотность:  $\nu = \eta/\rho$ ). Если вязкость уменьшается с температурой (как в случае жидкости), то вещество поднимается в центре шестиугольной ячейки и опускается по краям. Если вязкость растет с температурой (как у газов), то наблюдается обратная картина. Таким образом, наблюдения Солнца указывают на направление циркуляции в гранулах и супергранулах, которое характерно для жидкости. Горизонтальный размер ячейки всегда одного порядка с вертикальным, чаще всего горизонтальный размер ячейки в три раза больше ее вертикального размера.

Основными параметрами, определяющими конвекцию, являются числа Рейля и Прандтля  $R = g \alpha \Delta T d^3 / \alpha \nu$ ,  $\rho = \nu / \alpha$ , где  $g$  - ус-

ление силы тяжести,  $\alpha$  - коэффициент объемного теплового расширения,  $\Delta T$  - разность температур между нижней и верхней границами слоя,  $d$  - толщина слоя,  $\alpha$  - температуропроводность,  $\nu$  - кинематическая вязкость. Решение нелинейных уравнений определяет течение с некоторыми предпочтительными размерами  $\alpha_p(R, \rho)$  конвективных ячеек. Если начальное возмущение имело вид ячеек, характерные размеры которых в ограниченной области не совпадали с  $\alpha_p$ , то происходит перестройка течения по характерным размерам. На Солнце слой грануляции имеет толщину  $\sim 10^3$  км, а супергрануляции  $\sim 10^4$  км, т.е. все ячейки занимают по высоте малую часть конвективной зоны. Расчет показывает, что в картине солнечной конвекции существует взаимное проникновение ячеек разных масштабов.

### § 5. Торондальный вихрь Тверского

Рассмотрим генерацию магнитного поля движением типа торондального вихря, которое осуществляется в конвективных ячейках Бенара. Будем предполагать, что жидкость несжимаема, траектории

жидких частиц являются концентрическими окружностями и совокупности линий тока определенного радиуса образуют поверхности круговых торов (рис. 5.6). Введем ортогональную тороидальную систему

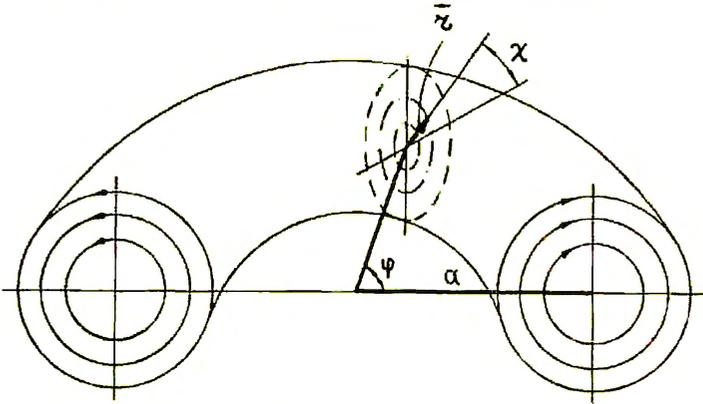


Рис. 5.6. Тороидальный вихрь Тверского.  $r, \chi, \varphi$  - ортогональная тороидальная система координат,  $\alpha$  - радиус окружности  $r = 0$ . Стрелками показаны направления движения

координат, в которой положение точки в пространстве определяется полярными координатами  $r$  и  $\chi$  в пространстве линий тока и азимутальным углом  $\varphi$ . Параметры Ляме этой системы координат имеют вид  $h_r = 1$ ,  $h_\chi = r$ ,  $h_\varphi = \alpha + r \cos \chi$ , где  $\alpha$  - радиус окружности  $r = 0$ . Компоненты скорости  $V_r = V_\varphi = 0$ , а  $V_\chi$  определяется из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \bar{V} = \frac{1}{h_r h_\chi h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \chi} (V_\chi h_r h_\varphi) = \frac{1}{r(\alpha + r \cos \chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \{ V_\chi (\alpha + r \cos \chi) \} = 0.$$

Откуда  $V_\chi = V_0(r) / (1 + \frac{r}{\alpha} \cos \chi)$ . Функция  $V_0(r)$  вне поверхности  $r = r_0 < \alpha$  обращается в нуль. Движение возникает при  $t = 0$  и имеет  $\operatorname{Re} m = 4\pi \delta \bar{V}_0 r_0^2 / c^2 \gg 1$ , где  $\bar{V}_0$  - среднее значение модуля скорости. Запишем уравнение замороженности в компонентах, сделав замену  $V_\varphi^i = V_\varphi / (1 + \frac{r}{\alpha} \cos \chi)$ . Получаем

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = - \frac{V_0(r)}{r(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x)} \frac{\partial B_r}{\partial x}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = - \frac{V_0(r)}{r(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x)} \frac{\partial B_\varphi}{\partial x}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{\alpha + r \cos x} [V_0(r) \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \alpha \frac{\partial}{\partial r} V_0(r) B_r]. \quad (5.11)$$

Обозначим  $\Omega(r) = V_0(r)/r$  и будем искать решение методом разделения переменных в виде  $f(r, x) = \exp\{im\varphi + i\omega t\}$

$$i\omega f(r, x) = - \frac{\Omega(r)}{(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x)} \frac{\partial f}{\partial x}$$

или  $\frac{\partial}{\partial x} (\ln f(r, x)) = - \frac{i\omega}{\Omega(r)} (1 + \frac{r}{\alpha} \cos x).$

Откуда  $f(r, x) = A(r) \exp\left\{-\frac{i\omega}{\Omega(r)}\left(x + \frac{r}{\alpha} \sin x\right)\right\}.$

Из условия периодичности решения по  $x$  следует, что

$$\omega_n(r) = n\Omega(r), \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \dots \quad \text{Функции}$$

$$f_n = \exp\left\{in\left(x + \frac{r}{\alpha} \sin x\right)\right\} \quad \text{ортогональны по } x \text{ с весом } \left(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x\right):$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f_n f_{n'} \left(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x\right) dx = \\ & = \int_0^{2\pi} \exp\left\{i(n-n')\left(x + \frac{r}{\alpha} \sin x\right)\right\} \left(1 + \frac{r}{\alpha} \cos x\right) dx = \\ & = \int_0^{2\pi} \exp\{-i(n-n')\Psi\} d\Psi = 2\pi \delta_{nn'}, \end{aligned}$$

где  $\delta_{nn'} = 1$  при  $n = n'$ ;  $\delta_{nn'} = 0$  при  $n \neq n'$ . Таким образом,  $f_n$  является полной системой функций  $x$  и гармоники поля имеют вид

$$B_{r\Omega n} = A_{r\Omega n}(r) \{f_n(r, x) \exp\{i(m\psi + n\Omega(r)t)\}\}, \quad (5.12)$$

$$B'_{\psi m n} = A_{\psi m n}(r) \{f_n(r, x) \exp\{i(m\psi + n\Omega(r)t)\}\}, \quad (5.13)$$

где  $A_{r\Omega n}(r)$ ,  $A_{\psi m n}(r)$  - произвольные функции  $r$ . Подставляя эти выражения в (5.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\chi m n}}{\partial t} = & \frac{1}{\alpha + r \cos \chi} [imV_0(r)A_{\psi m n} + \alpha \frac{d}{dr} V_0(r)A_{r\Omega n} - \\ & - inV_0(r)A_{r\Omega n} \sin \chi + int \frac{d\Omega}{dr} A_{r\Omega n}] \{f_n(r, x) e^{i[m\psi + n\Omega(r)t]}\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

При  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} B_{\chi m n} = & - \frac{1}{n\Omega(\alpha + r \cos \chi)} [imV_0(r)A_{\psi m n} + \alpha \frac{d}{dr} V_0(r)A_{r\Omega n} - \\ & - inV_0(r)A_{r\Omega n} \sin \chi + nA_{r\Omega n} \frac{d\Omega}{dr} \times (it - \frac{1}{n\Omega})] \{f_n(r, x) e^{i[m\psi + n\Omega(r)t]}\} + \\ & + C(r, \psi, x), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $C(r, \psi, x)$  определяется из начальных условий. При  $n=0$

$$\begin{aligned} B_{\chi m 0} = & \left\{ B_{\chi m 0} \Big|_{t=0} + \frac{t}{\alpha + r \cos \chi} [imV_0(r)B'_{\psi 0\psi}(r) + \right. \\ & \left. + \alpha \frac{d}{dr} V_0(r)B_{0r}(r)] \right\} e^{im\psi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где  $B_{r\Omega 0} = B_{0r}(r) e^{im\psi}$ ,  $B'_{\psi m 0} = B'_{0\psi}$ . Из выражения

(5.16) следует, что  $B_{\chi}(t)$  содержит осциллирующий член, амплитуда которого линейно растет со временем, а пространственный период по  $r$  с течением времени уменьшается. Из условия  $\text{div } \vec{B} = 0$  получаем связь между  $B_{0r}$ ,  $B'_{0\psi}$  и  $B_{\chi m 0} \Big|_{t=0}$ :

$$\frac{1}{r(\alpha + r \cos \chi)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r(\alpha + r \cos \chi) B_{0r}) \right\} +$$

$$+ imr \left( 1 + \frac{r}{\alpha} \cos \chi \right) B_{0\varphi}'(r) + \frac{\partial}{\partial \chi} (\alpha + r \cos \chi) B_{\chi mo} |_{t=0} \Big\} = 0. \quad (5.17)$$

Интегрируя (5.17) по  $\chi$  от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\frac{d}{dr} r B_{0r}(r) + im \frac{r}{\alpha} B_{0\varphi}'(r) = 0. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.18) в (5.17), получаем

$$\cos \chi \left[ \frac{\partial}{\partial r} r^2 B_{0r} + \frac{imr^2}{\alpha} B_{0\varphi}' \right] = - \frac{\partial}{\partial \chi} [(\alpha + r \cos \chi) B_{\chi mo} |_{t=0}]$$

или

$$\cos \chi \cdot r \cdot B_{0r} = - \frac{\partial}{\partial \chi} [(\alpha + r \cos \chi) B_{\chi mo} |_{t=0}].$$

Интегрируя по  $\chi$ , получаем

$$B_{\chi mo} |_{t=0} = - \frac{r B_{0r} \sin \chi}{\alpha + r \cos \chi} + \frac{A_{0\chi}(r)}{\alpha + r \cos \chi}, \quad (5.19)$$

где  $A_{0\chi}$  - константа интегрирования. Подставляя (5.18), (5.19) в (5.16), получаем

$$\begin{aligned} B_{\chi mo} &= \left\{ - \frac{r B_{0r} \sin \chi}{\alpha + r \cos \chi} + \frac{A_{0\chi}(r)}{\alpha + r \cos \chi} + \frac{t}{\alpha + r \cos \chi} \right. \\ &\times \left[ \alpha V_0(r) \left( \frac{im}{\alpha} B_{0\varphi}'(r) + \frac{dB_{0r}}{dr} + \alpha \frac{dV_0(r)}{dr} B_{0r} \right) \right] e^{im\varphi} = \left\{ - \frac{r B_{0r} \sin \chi}{\alpha + r \cos \chi} + \right. \\ &+ \frac{A_{0\chi}(r)}{\alpha + r \cos \chi} - \frac{t}{\alpha + r \cos \chi} \left[ \alpha V_0(r) \frac{B_{0r}}{r} + \alpha \frac{dV_0(r)}{dr} B_{0r} \right] \Big\} e^{im\varphi} = \\ &= \left\{ - \frac{r B_{0r} \sin \chi}{\alpha + r \cos \chi} + \frac{A_{0\chi}(r)}{\alpha + r \cos \chi} + \frac{t \alpha B_{0r}}{\alpha + r \cos \chi} \frac{d\Omega}{dr} \right\} e^{im\varphi}. \quad (5.20) \end{aligned}$$

Таким образом, растущая со временем часть  $B_{\chi mo}$ , имеет вид

$$\frac{dr B_{0r}(r)}{\alpha + r \cos \chi} \frac{d\Omega(r)}{dr} t e^{im\varphi}, \quad \text{т.е. пространственное рас-}$$

пределение усиливаемого со временем поля остается неизменным.

Характерное время диссипации на масштабе  $r_0$  порядка  $r_0^2 \delta / c^2$ ,

поэтому растущее решение имеет место при  $B_{\chi}(t) \ll \text{Re}_m B_{0r}(r)$ ,

и при больших  $\text{Re}_m$  возможно значительное усиление поля. Таким образом, торoidalные вихри являются особым, широко распростра-

ненным классом течений, способных генерировать магнитные поля. Усиливаемое поле сохраняет пространственную корреляцию на расстояниях порядка масштаба вихря и не является ортогональным к начальному полю.

### § 6. Генерация полоидального поля

Конвективные движения могут приводить к генерации полоидального магнитного поля из тороидального. Восходящее движение жидкости в конвективной ячейке увлекает вверх силовые линии азимутального поля, создавая на них выпуклости, имеющие  $\Omega$  форму (рис. 5.4в). Действие силы Карриолиса поворачивает петлю в меридиональную плоскость. В целом, силовая линия тороидального поля превращается в спираль (рис. 5.4г). Таким образом происходит регенерация полоидального поля.

Феноменологические уравнения, реализующие связь между полоидальной  $V_p$  и тороидальной  $V_T$  компонентами магнитного поля, были предложены Е. Паркером и имеют вид

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \Gamma_R V_p + D \Delta V_T, \quad \frac{\partial V_p}{\partial t} = \Gamma_C V_T + D \Delta V_p, \quad (5.21)$$

где  $\Gamma_R$  - коэффициент регенерации тороидального поля из полоидального за счет дифференциального вращения,  $\Gamma_C$  - коэффициент регенерации полоидального поля из тороидального за счет конвекции. При  $Re_m \gg 1$  уравнения (5.21) имеют решение вида

$$V_{T,p} \sim \exp(\Gamma_R, \Gamma_C, t)$$

К уравнениям вида (5.21) приводит теория слабо асимметричного динамо С.И. Брагинского. В этой теории

$$\vec{V} = \vec{V}(r, \theta) + \vec{u}(r, \theta, \varphi), \quad \vec{B} = \vec{B}(r, \theta) + \vec{b}(r, \theta, \varphi), \quad (5.22)$$

где  $\vec{V}(r, \theta)$ ,  $\vec{B}(r, \theta)$  симметричны относительно оси вращения,  $\vec{u}(r, \theta, \varphi)$ ,  $\vec{b}(r, \theta, \varphi)$  - малые асимметричные добавки. Средняя по  $\varphi$  от каждой из трех компонент  $\vec{u}$  предполагалась равной нулю

$$\langle u_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_r(r, \theta, \varphi) d\varphi = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = 0.$$

Главное действие азимутальной скорости  $\vec{V}_\varphi(r, \theta)$  заключается в генерации сильного азимутального поля  $\vec{B}_\varphi(r, \theta)$  из присутствующей

щего произвольно малого меридионального поля.

### § 7. Турбулентное динамо

Существенные упрощения в теории динамо достигаются при рассмотрении генерации поля в турбулентной среде. Турбулентным мы будем называть движение, в котором

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = \langle \bar{u}(\vec{r}, t) \rangle + \bar{u}'(\vec{r}, t), \quad \langle \bar{u}'(\vec{r}, t) \rangle = 0. \quad (5.23)$$

Усреднение в (5.23) проводится по времени в данной точке пространства (вместо усреднения по времени можно пользоваться усреднением по пространству или по ансамбли). Турбулентное движение можно рассматривать как совокупность пульсаций разных масштабов, взаимодействующих между собой. Обозначим через  $\lambda$  масштаб пульсаций,  $U_\lambda, h_\lambda$  - средние изменения скорости и поля на постоянных порядках  $\lambda$ . В трехмерном случае гидродинамической турбулентности движение масштаба  $\ell$  распадается на более мелкие вихри, пока не доходит до масштаба  $\sim \lambda_0$ , на котором включается вязкость. Интервал масштабов  $\ell \gg \lambda \gg \lambda_0$  называется инерционным (в нем нет никакой диссипации). Энергия  $\mathcal{E}$ , диссипируемая в единицу времени в единице массы жидкости, черпается из крупномасштабного движения, откуда постепенно перекачивается во все меньшие масштабы, пока не диссипирует в масштабе  $\sim \lambda_0$ . В гидродинамической турбулентности спектр мощности пульсаций носит универсальный характер  $\lambda^{5/3}$  и был получен А.И. Колмогоровым из соображений размерности. В двумерной турбулентности поток энергии направлен от малых масштабов к большим. В отличие от универсального колмогоровского спектра в гидродинамике плазменная турбулентность характеризуется большим числом разнообразных условий и параметров.

Усредненные характеристики движения в теории турбулентности задаются при помощи корреляционных тензоров

$$K_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle u_\alpha(\vec{r}) u_\beta(\vec{r}') \rangle,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \langle u_\alpha(\vec{r}) u_\beta(\vec{r}') u_\gamma(\vec{r}'') \rangle,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ . Если пульсации однородны, то  $K_{\alpha\beta}$  зависит только от  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ , если изотропны, то  $K_{\alpha\beta}$  конструируется лишь из двух тензоров  $\delta_{ij}$  и  $|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1| |\vec{r}_2 - \vec{r}'_2|$ .

В теории турбулентного динамо считают заданным поле скоростей с мелкими масштабами, которые возбуждают гладкое магнитное поле с масштабом  $L$ . Разбивая магнитное поле на регулярную составляющую с масштабом  $L - \bar{B}(\bar{r}, t)$  и стохастическую  $- \tilde{b}(\bar{r}, t)$ , запишем уравнение (3.89) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\langle [\bar{V} \bar{b}] \rangle) + D \Delta \bar{B}, \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial t} &= \text{rot}(\bar{V} \tilde{b}) + D \Delta \tilde{b}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Проводя громоздкие вычисления, можно свести уравнение для крупномасштабной составляющей к виду

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \bar{B}) + (D_T + D) \Delta \bar{B}, \quad (5.25)$$

где  $\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \bar{V}(t) \text{rot} \bar{V}(t+\tau) \rangle d\tau$ ,  $D_T$  — коэффициент турбулентной диффузии ( $D_T = \langle V^2 \rangle \tau / 3$ , где  $\tau$  — корреля-

ционное время),  $D_T \gg D$ . Турбулентность среды приводит к турбулентной диффузии и быстрой диссипации поля. Если турбулентность гиротропна, т.е. представляет собой статистический ансамбль вихрей, каждый из которых имеет преимущественное направление вращения в зависимости от направления своего поступательного движения, она способна обеспечивать усиление и поддержание магнитного поля.

## Г л а в а 6. ВОЛНЫ И РАЗРЫВЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

### § I. МГД волны

Рассмотрим низкочастотные колебания, способные возбуждаться и распространяться в плазме, для описания которых можно пользоваться методами магнитной гидродинамики в одномагнитном приближении. Ограничимся первоначально рассмотрением линейных колебаний, т.е. будем считать, что найдено стационарное решение магнитогидродинамических уравнений, на которое накладываются малые возмущения. Малость возмущений позволяет линеаризовать систему уравнений. Вместо уравнения переноса тепла будем считать, что давление определяется концентрацией плазмы и показателем

$\gamma$  ( $\gamma = 1$  - изотерма,  $\gamma = 5/3$  - адиабата). Таким образом имеем исходную систему уравнений в предположении идеальной проводимости

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \vec{V} = 0, \quad (6.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}], \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}], \quad (6.3)$$

$$\rho / n^{\gamma} = \text{const.} \quad (6.4)$$

Считаем, что в состоянии равновесия неподвижная ( $V_0 = 0$ ) плазма равномерно заполняет все пространство с плотностью  $\rho_0 = n_0 / m_i$  давлением  $p_0$ . Магнитное поле  $\vec{B}_0$  однородно и направлено вдоль оси  $z$  декартовой системы координат. Малые возмущения  $\vec{V}, \vec{p}, \vec{n}, \vec{B}$  описываются линеаризованной системой уравнений (мы пренебрегли квадратичными членами)

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} + \operatorname{div} n_0 \vec{V} = 0, \quad (6.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla \vec{p} + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}_0], \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}_0], \quad (6.7)$$

$$\vec{p} = \gamma p_0 \vec{n} / n_0. \quad (6.8)$$

Решение системы (6.5)-(6.8) мы получим, вводя смещение плазмы из положения равновесия  $\vec{z} = \vec{z}_\perp + \vec{z}_\parallel$ . Тогда  $\vec{V} = \frac{\partial \vec{z}}{\partial t}$  и уравнение (6.5) приобретает вид

$$\vec{n} = -n_0 \operatorname{div} \vec{z}, \quad (6.9)$$

а уравнение (6.7)

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{B}} &= \text{rot} [\vec{z}, \vec{B}_0] = \text{rot} [\vec{z}_\perp, \vec{B}_0] = \\ &= -(\vec{B}_0 \nabla) \vec{z}_\perp - (\vec{z}_\perp \nabla) \vec{B}_0 + \vec{z}_\perp \text{div} \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \text{div} \vec{z}_\perp = \\ &= -\vec{B}_0 \text{div} \vec{z}_\perp + B_0 \frac{\partial \vec{z}_\perp}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Пусть  $\vec{h} = \vec{B} / B$  - единичный вектор вдоль  $\vec{B}$  и  $\vec{h}_0$  - единичный вектор вдоль оси  $z$ .

$$\begin{aligned} \vec{h} &= (\vec{B}_0 + \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp) / [(\vec{B}_0 + \vec{B}_\parallel)^2 + B_\perp^2]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{B_0} (1 - \frac{B_\parallel}{B_0}) [\vec{h}_0 (\vec{B}_0 + \vec{B}_\parallel) + \vec{B}_\perp] = \vec{h}_0 + \frac{\vec{B}_\perp}{B_0} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \vec{B} \vec{B}] &= -\nabla_\perp \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi} (\vec{h} \nabla) \vec{h} = \\ &\approx -\frac{1}{8\pi} \nabla_\perp \left\{ B_0^2 + 2B_0 B_\parallel \right\} + \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{\partial \vec{h}}{\partial z} = \\ &= -\frac{B_0^2}{4\pi} \nabla_\perp \text{div} \vec{z}_\perp + \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{\partial \vec{z}_\perp}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $\nabla_\perp = \nabla - \vec{h} (\vec{h} \nabla)$  - поперечный градиент.

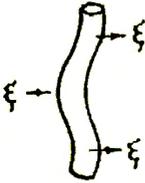
С учетом (6.9), (6.12) уравнение (6.6) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \vec{z}_\perp}{\partial t^2} + V_s^2 \nabla \text{div} \vec{z}_\perp + V_A^2 (\nabla_\perp \text{div} \vec{z}_\perp + \frac{\partial^2 \vec{z}_\perp}{\partial z^2}), \quad (6.13)$$

где  $V_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$  - скорость звука,  $V_A = B_0 / (4\pi \rho_0)^{1/2}$  - альвеновская скорость. Уравнение (6.13) описывает три типа волн - альвеновскую, быструю и медленную магнитозвуковые.

В альвеновской волне  $\vec{z}_\parallel = 0$  и движение в поперечном направлении является несжимаемым:  $\text{div} \vec{z}_\perp = 0$  (рис. 6.1). Уравнение, описывающее альвеновские волны, имеет вид уравнения малых

Рис.6.1. Смещение плазмы в альвеновской волне



колебаний струны

$$\frac{\partial^2 \bar{z}_1}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 \bar{z}_1}{\partial z^2} \quad (6.14)$$

Физически это обусловлено наличием натяжения силовых линий магнитного поля, к которым "приклеены" частицы вещества (за счет вмороженности). Альвеновские волны распространяются только вдоль магнитных силовых линий.

При  $\bar{z}_1 \neq 0$  уравнение (6.13) распадается на два уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{z}_1}{\partial t^2} = V_s^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{z}_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \bar{z}_1 \right), \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \bar{z}_1 = V_A^2 \Delta \operatorname{div} \bar{z}_1 + V_s^2 \left( \Delta_1 \operatorname{div} \bar{z}_1 + \Delta_1 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial z} \right) \quad (6.16)$$

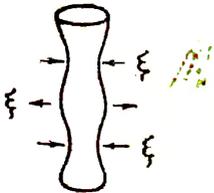
(для получения (6.16) берётся дивергенция от поперечной составляющей (6.13), где  $\Delta_1 = \operatorname{div} \nabla_1$ ,  $\Delta = \Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ).

В случае плазмы низкого давления, когда  $\beta \sim V_s^2 / V_A^2 \ll 1$ , уравнение (6.13) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \bar{z}_1 = V_A^2 \Delta \operatorname{div} \bar{z}_1 \quad (6.17)$$

и описывает магнитозвуковые волны (рис.6.2). Данное название связано с наличием давления магнитного поля и рассмотрением  $V_A$  как скорости звука в среде с  $\rho = B^2 / 8\pi$ ,  $\rho = \rho_0$  и  $\gamma = 2$ .

Рис.6.2. Смещение плазмы в магнитозвуковой волне



При  $\bar{z}_1 = 0$  и выполнении условия вмороженности магнитное поле изменяется пропорционально плотности и  $B^2 / 8\pi$  пропорционально квадрату плотности. Уравнение

(6.15) позволяет определить малое продольное смещение в магнито-звуковой волне. Если  $\text{div } \vec{\tau}_\perp = 0$ , то (6.15) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tau_{\parallel}}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \tau_{\parallel}}{\partial z^2}. \quad (6.18)$$

Описываемые данным уравнением волны называются ионно-звуковыми и представляют собой звук, распространяющийся вдоль магнитного поля. Магнитное поле при этом не возмущается (рис. 6.3).

Рис. 6.3. Смещение плазмы в ионно-звуковых колебаниях



При больших  $\beta$  будем искать решение (6.15), (6.16) в виде разложения по плоским волнам. Тогда  $\vec{\tau}$  пропорционально

$$\exp\{i(\vec{k}\vec{\tau} - \omega t)\} \quad \text{и}$$

$$(\omega^2 - V_s^2 k_{\parallel}^2) \tau_{\parallel} - k_{\parallel} V_s^2 (\vec{k}_\perp \vec{\tau}_\perp) = 0, \quad (6.19)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2 - V_s^2 k_{\perp}^2) (\vec{k}_\perp \vec{\tau}_\perp) - k_{\parallel} V_s^2 k_{\perp}^2 \tau_{\parallel} = 0. \quad (6.20)$$

Приравнявая к нулю определитель системы (6.19), (6.20), получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^4 - (V_A^2 + V_s^2) k^2 \omega^2 + V_A^2 V_s^2 k_{\perp}^2 k^2 = 0, \quad (6.21)$$

решением которого являются

$$\omega_{\pm}^2 = 0,5(V_A^2 + V_s^2) k^2 \pm [0,25(V_A^2 + V_s^2) k^2 - V_A^2 V_s^2 k_{\perp}^2 k^2]^{1/2}, \quad (6.22)$$

$\omega_+$  соответствует ускоренной магнитозвуковой волне, которая при  $\beta \ll 1$  переходит в магнитозвуковую,  $\omega_-^2$  - замедленной магнитозвуковой волне, которая при  $\beta \ll 1$  переходит в ионно-звуковую. При продольном распространении  $k = k_z$  и

$$\omega_+^2 = V_A^2 k_x^2, \quad \omega_-^2 = V_s^2 k_x^2 \quad (V_A > V_s). \quad (6.23)$$

При поперечном распространении  $k_x = 0$

$$\omega_+^2 = (V_A^2 + V_s^2) k^2, \quad \omega_-^2 = 0. \quad (6.24)$$

Зависимость фазовой скорости  $v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}$  и групповой скорости

$v_g = d\omega/dk$  от угла  $\theta$  между вектором  $k$  и магнитным полем  $B$  в полярной системе координат называется фазовой (рис. 6.4а) и групповой (рис. 6.4б) полярами соответственно. Фазовая диаграмма для быстрой магнитозвуковой волны имеет вид овала, сплюснутого вдоль направления магнитного поля, для медленной — двух соприкасающихся овалов, сплюснутых в поперечном направлении, для альвеновской — двух соприкасающихся окружностей. Для быстрой магнитозвуковой волны групповая поляра имеет вид эллипса, медленной магнитозвуковой — двух криволинейных треугольников, для альвеновской — вырождается в две точки. Групповой полярой удобно пользоваться при рассмотрении распространения волновых пакетов.

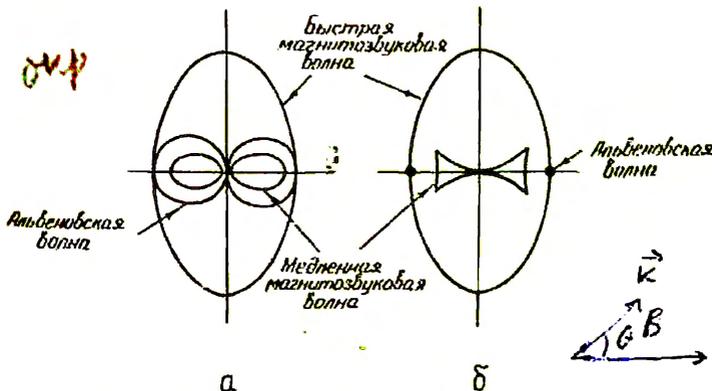


Рис. 6.4. Фазовая (а) и групповая (б) поляры

МГД волны наблюдаются в межпланетном пространстве и магнитосфере Земли. В межпланетном пространстве энергия волн часто сравнима с энергией крупномасштабного магнитного поля и тепловой энергией плазмы. Непрерывные флуктуации магнитного поля в плазме солнечного ветра являются преимущественно альвеновскими волнами, которые генерируются вблизи Солнца.

### § 2. Ионный звук.

Приближение идеальной проводимости соответствует случаю анизотропной, но не диспергирующей среде - фазовая скорость распространения малых возмущений зависит от  $\Theta$ , но не от  $|\vec{k}|$ . Для определения дисперсии волн в первом приближении можно пользоваться двухжидкостной гидродинамикой. В качестве примера рассмотрим ионный звук при  $\beta \ll 1$ , когда можно пренебречь возмущением магнитного поля и  $\text{rot } \vec{E} \approx 0$ . При этом  $\vec{E} = -\nabla \Psi$  ( $\Psi$  - потенциал). Рассмотрим случай  $T_i \ll T_e$ , пренебрегая инерцией электронов и их столкновениями с ионами. Тогда в двухкомпонентной плазме, состоящей из однозарядных ионов одного сорта и электронов,

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } n_i \vec{V}_i = 0, \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div } n_e \vec{V}_e = 0, \quad (6.26)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{e}{m_i} \nabla \Psi + \frac{e}{m_i c} [\vec{V}_i \vec{B}_0], \quad (6.27)$$

$$0 = -\nabla (n_e T_e) + e n_e (\nabla \Psi + \frac{1}{c} [\vec{V}_e \vec{B}_0]), \quad (6.28)$$

$$\Delta \Psi = -4\pi e (n_i - n_e). \quad (6.29)$$

При  $T_e = \text{const}$  продольная компонента (6.28) дает

$$\frac{\partial n_e}{\partial z} = \frac{e n_e}{T_e} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (6.30)$$

т.е. вдоль силовой линии электроны имеют бoльшмановское распределение. Для малых колебаний

$$\bar{n}_e = n_0 e^{\Psi} / T_e . \quad (6.31)$$

Рассмотрим возмущение типа плоских волн  $\exp \left\{ i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right\}$ ,  
↓ ось x  
 направив вектор  $\vec{k}$  вдоль оси X,  $k_x = k_{\perp}$ ,  $k_z = k_{\parallel}$ . Тогда из  
 уравнений (6.25), (6.26) получим

$$V_z = \frac{e}{m_i} \frac{k_{\parallel}}{\omega} \varphi, \quad (6.32)$$

$$-i\omega V_{ix} - \omega_{B_i} V_{iy} = -\frac{e}{m_i} i k_{\perp} \varphi, \quad (6.33)$$

$$\omega_{B_i} V_{ix} - i\omega V_{iy} = 0. \quad (6.34)$$

Откуда получаем

$$V_{ix} = \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{B_i}^2} \frac{e}{m_i} k_{\perp} \varphi, \quad (6.35)$$

$$V_{iy} = \frac{\omega_{B_i}}{\omega^2 - \omega_{B_i}^2} \frac{e}{m_i} k_{\perp} \varphi \quad (6.36)$$

и

$$\operatorname{div} V_{iL} = \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_{B_i}^2} \frac{e}{m_i} k_{\perp}^2 \varphi. \quad (6.37)$$

Из уравнения (6.25) получаем

$$-i\omega \bar{n}_i + n_0 \operatorname{div} \vec{V}_{iL} + n_0 i k_{\parallel} V_{iz} = 0 \quad (6.38)$$

и

$$\bar{n}_i = \left( \frac{k_z^2 V_S^2}{\omega^2} + \frac{k_{\perp}^2 V_S^2}{\omega^2 - \omega_{B_i}^2} \right) n_0 \frac{e\varphi}{T_e}, \quad (6.39)$$

где  $V_S^2 = T_e / m_i$ .

Из уравнения (6.29) находим

$$k^2 z_D^2 n_0 \frac{e\varphi}{T_e} = \bar{n}_i - \bar{n}_e, \quad (6.40)$$

откуда

$$1 + \kappa^2 \nu_D^2 = \frac{\kappa_{\perp}^2 V_S^2}{\omega^2} + \frac{\kappa_{\parallel}^2 V_S^2}{\omega^2 - \omega_{B_1}^2} . \quad (6.41)$$

При  $\kappa_{\perp} = 0$ ,  $\kappa = \kappa_{\parallel}$

$$\omega^2 = \frac{\kappa_{\parallel}^2 V_S^2}{1 + \kappa_{\parallel}^2 \nu_D^2} . \quad (6.42)$$

При  $\kappa_{\parallel} \nu_D \ll 1$   $\omega = V_S \kappa_{\parallel}$ . При  $\kappa_{\parallel} \rightarrow \infty$   $\omega / \kappa_{\parallel}$

начинает уменьшаться и в пределе стремится к нулю. Интересной особенностью таких колебаний является то, что электроны в среднем неподвижны. Их давление компенсирует действие электрического поля. Колеблются только ионы. При  $\omega_{B_1} = 0$ , т.е. в отсутствии магнитного поля, дисперсия ионного звука определяется формулой

$$\omega^2 = \omega_*^2 = \frac{\kappa_{\perp}^2 V_S^2}{1 + \kappa_{\perp}^2 \nu_D^2} . \quad (6.43)$$

В общем случае

$$\omega^2 = 0,5 (\omega_{B_1}^2 + \omega_*^2) \pm [0,25 (\omega_{B_1}^2 + \omega_*^2) - \frac{\kappa_{\parallel}^2}{\kappa^2} \omega_{B_1}^2 \omega_*^2]^{1/2} . \quad (6.44)$$

При  $\omega_{P_1} = (4\pi n_0 e^2 / m_i)^{1/2} \gg \omega_{B_1}$  дисперсионная кривая приведена на рис.6.5. Отметим, что условие  $T_e \gg T_i$  является условием слабого затухания ионного звука.

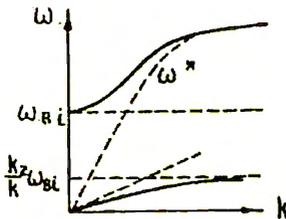


Рис.6.5. Дисперсия ионного звука

§ 3 . МГД разрывы

При распространении волн большой амплитуды в плазме разрывные начальные и граничные условия приводят к возникновению скачков магнитогидродинамических величин. Такие скачки возможны, только когда дифференциальные уравнения, описывающие систему, обладают характеристиками (в противном случае возможно аналитическое продолжение величин, описывающих течение, и должна иметь место непрерывность течения). На поверхностях и линиях разрыва магнитогидродинамические уравнения не справедливы и требуется кинетическое рассмотрение. Однако можно ограничиться решением магнитогидродинамических уравнений, к которым добавлено семь (по числу переменных) граничных условий на каждой поверхности (линии разрыва). Рассмотрим элемент поверхности разрыва в системе координат, движущейся вместе с этим элементом (рис.6.6). Обозначим скачок величины  $A$  на поверхности разрыва  $\{A\} = A_2 - A_1$ .

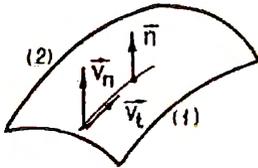


Рис.6.6. Элемент поверхности разрыва в системе координат, движущейся вместе с этим элементом.  $v_n$ ,  $v_t$  - нормальная и тангенциальная компоненты скорости,  $\vec{n}$  - вектор нормали

На поверхности разрыва должна быть непрерывна нормальная (к поверхности разрыва) составляющая вектора плотности потока вещества

$$\{ \rho V_n \} = 0 \quad (6.45) \quad \dagger$$

или, обозначая поток плазмы  $j_m = \rho V_n$ ,

$$\{ j \} = 0 \quad (6.46)$$

Непрерывность потока импульса дает

$$\{ \Pi_{ij} n_j \} = 0, \quad (6.47)$$

где

$$\Pi_{ij} = \rho V_i V_j + p \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} (B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij}), \quad (6.48)$$

а  $\vec{n}$  - вектор нормали к поверхности разрыва. Соотношение (6.47) приводит к двумерному векторному и скалярному условиям

$$\left\{ \rho \cdot \rho V_n^2 + \frac{1}{8\pi} (\vec{B}_t^2 - B_n^2) \right\} = 0, \quad (6.49)$$

$$\left\{ \rho V_n \vec{V}_t - \frac{1}{4\pi} B_n \vec{B}_t \right\} = 0, \quad (6.50)$$

где  $n$  и  $t$  обозначают нормальную и тангенциальную компоненты векторов соответственно. Непрерывность нормальной компоненты потока энергии

$$W = \rho \vec{V} \left( \frac{1}{2} V^2 + w \right) + \frac{c}{4\pi} [ \vec{E} \vec{B} ], \quad (6.51)$$

где  $w = \frac{5}{2} p / \rho$  - тепловая функция единицы массы, а второй член соответствует потоку электромагнитной энергии, и в случае

идеальной магнитной гидродинамики при  $\vec{E} = -\frac{1}{c} [ \vec{V} \vec{B} ]$  приводит к соотношению

$$\left\{ \rho V_n \left( \frac{1}{2} V^2 + w \right) + \frac{1}{4\pi} [ V_n B^2 - B_n (\vec{V} \vec{B}) ] \right\} = 0. \quad (6.52)$$

Непрерывны также нормальная составляющая магнитного поля

$$\{ B_n \} = 0 \quad (6.53)$$

и тангенциальная составляющая электрического поля

$$\{ B_n \vec{V}_t - \vec{B}_t V_n \} = 0. \quad (6.54)$$

(6.45), (6.49), (6.50), (6.52)-(6.54) дают семь необходимых граничных условий. Рассмотренная система координат фиксируется лишь своей скоростью вдоль нормали к поверхности разрыва, поэтому можно перейти в систему координат, движущуюся вдоль  $\vec{V}_t$ , в которой  $\vec{V}$  и  $\vec{B}$  параллельны в среде (1). В силу (6.54) они будут параллельны и в среде (2). В такой системе координат условие (6.52) имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{2} V^2 + w \right\} = 0. \quad (6.55)$$

В магнитной гидродинамике возможны контактные, тангенциальные, вращательные (или альвеновские) разрывы и ударные волны.

1) В контактном разрыве  $j_m = 0$  и граничные условия дают

$$\{\bar{V}\} = 0, \quad \{\bar{B}\} = 0, \quad \{P\} = 0. \quad (6.56)$$

Контактный разрыв характеризуется скачком любой термодинамической величины, кроме давления, и представляет собой границу раздела между неподвижными средами с различными плотностями и температурами.

2) В тангенциальном разрыве  $j_m = 0$  и  $B_n = 0$  и граничные условия (6.45), (6.50), (6.52)-(6.54) выполняются тождественно. Из (6.49) получаем

$$\left\{ P + \frac{1}{8\pi} B_t^2 \right\} = 0 \quad (6.57)$$

и скачок испытывает

$$\{\bar{V}_t\} \neq 0, \quad \{\bar{B}_t\} \neq 0, \quad \{P\} \neq 0. \quad (6.58)$$

3) Во вращательном или альвеновском разрыве  $j_m \neq 0$  и  $\{P\} = 0$ , поэтому  $\{U_n\} = 0$ , и условие (6.54) с учетом (6.53) можно записать в виде

$$B_n \{\bar{V}_t\} = V_n \{\bar{B}_t\}, \quad (6.59)$$

а условие (6.50)

$$j_m \{\bar{V}_t\} = \frac{B_n}{4\pi} \{\bar{B}_t\}. \quad (6.60)$$

Откуда получаем

$$V_n = \pm \frac{B_n}{(4\pi\rho)^{1/2}}, \quad (6.61)$$

т.е. нормальная компонента скорости равна альвеновской

$$\{\bar{V}_t\} = \pm \{\bar{B}_t\} / (4\pi\rho)^{1/2}. \quad (6.62)$$

Условия (6.49) приобретают вид

$$\left\{ P + \frac{1}{8\pi} B_t^2 \right\} = 0. \quad (6.63)$$

В системе отсчета, где  $\bar{V}_t = \frac{V_n}{B_n} \bar{B}_t$ , в силу (6.52) и (6.55)

$$\left\{ w + \frac{B_t^2}{4\pi\rho} \right\} = 0. \quad (6.64)$$

Откуда следует, что  $\{w\} = 0$ ,  $\{\rho\} = 0$  и  $\{\bar{B}_t^2\} = 0$ , т.е.  $\{B_t\} = 0$  и  $\{|\bar{B}|\} = 0$ . Таким образом, непрерывны абсолютная величина вектора магнитного поля и угол, образуемый им с поверхностью разрыва.

В ударных волнах  $j_m \neq 0$ ,  $\{\rho\} \neq 0$ . В системе отсчета, в которой  $\bar{V}_t = \frac{V_n}{B_n} \bar{B}_t$ , справедливо в силу (6.50) соотношение

$$\left\{ \left( \frac{1}{\rho} - \frac{B_n^2}{4\pi j_m^2} \right) \bar{B}_t \right\} = 0. \quad (6.65)$$

Поэтому в ударной волне векторы  $\bar{B}_t$  в средах (1) и (2) параллельны. Векторы магнитного поля  $\bar{B}$  в средах (1), (2) и нормаль к поверхности разрыва лежат в одной плоскости, т.е. ударные волны плоскополяризованы. Выделяют параллельную, перпендикулярную и особую ударные волны. В параллельной ударной волне  $\bar{B} \parallel \bar{n}$ ,  $\bar{B}_t = 0$ . В системе отсчета, где  $\bar{V}_t \parallel \bar{B}_t$ , скорость среды параллельна нормали и  $\bar{V}_t = 0$ .

В перпендикулярной ударной волне  $B_n = 0$  и не существует системы отсчета, в которой  $\bar{V}_t \parallel \bar{B}_t$ , и разрыв покоится. Из (6.50) получаем  $\{\bar{V}_t\} = 0$  и можно выбрать систему отсчета, в которой  $\bar{V}_t = 0$ , т.е. скорость  $\bar{V}$  направлена вдоль нормали  $\bar{n}$ .

В особой ударной волне  $\bar{B}_t = 0$  по одну сторону от поверхности разрыва. Из (6.65) следует, что по другую сторону  $V_n = V_{An}$  - нормальная компонента альвеновской скорости. В системе отсчета, где  $\bar{V}_t \parallel \bar{B}_t$ ,  $\bar{V}_t = \bar{V}_{tA}$ . Таким образом,  $\bar{V} = \bar{V}_A$ .

Изменение параметров для ударных волн в магнитной гидродинамике можно найти из уравнения ударной адиабаты. Для того чтобы его получить, заметим, что с учетом (6.53) условие (6.56) имеет вид

$$j_m \{ \bar{V}_t \} = \frac{B_n}{4\pi} \{ \bar{B}_t \}, \quad (6.66)$$

а условие (6.54)

$$B_n \{ \bar{V}_t \} - j_m \left\{ \frac{\bar{B}_t}{\rho} \right\}. \quad (6.67)$$

Условие (6.52) можно записать в форме

$$j_m \left\{ w + \frac{j_m^2}{2\rho^2} + \frac{\bar{V}_t^2}{2} + \frac{\bar{B}_t^2}{4\pi\rho} \right\} = \frac{B_n}{4\pi} \{ \bar{B}_t \bar{V}_t \}. \quad (6.68)$$

Из (6.66), (6.67) следует, что

$$j_m^2 \left\{ \frac{\bar{B}_t}{\rho} \right\} = \frac{B_n^2}{4\pi} \{ \bar{B}_t \}, \quad (6.69)$$

и в силу коллинеарности тангенциальных компонент магнитного поля в ударной волне

$$j_m^2 \left\{ \frac{\bar{B}_t}{\rho} \right\} = \frac{B_n^2}{4\pi} \{ \bar{B}_t \}. \quad (6.70)$$

Исключая  $\bar{V}_t$  из (6.68), с помощью (6.67) получим

$$\{ w \} + \frac{j_m^2}{2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{B}_t^2}{\rho} \right\} - \frac{B_n}{32\pi^2 j_m^2} \{ \bar{B}_t^2 \} = 0. \quad (6.71)$$

Условие (6.49) запишем в виде

$$\{ \rho \} + j_m^2 \left\{ \frac{1}{\rho} \right\} + \frac{1}{8\pi} \{ \bar{B}_t^2 \} = 0,$$

откуда

$$j_m^2 = \frac{\rho_2 \rho_1}{\{ \rho \}} \left[ \{ \rho \} + \frac{1}{8\pi} \{ \bar{B}_t^2 \} \right]. \quad (6.72)$$

С учетом (6.70), (6.72) условие (6.71) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \{ w \} - \frac{1}{\rho} \left[ \{ \rho \} + \frac{1}{8\pi} \{ \bar{B}_t^2 \} \right] + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{B}_t^2}{\rho} \right\} - \\ - \frac{\{ \bar{B}_t \rho^{-1} \} \{ \bar{B}_t^2 \}}{8\pi \{ \bar{B}_t \}} = 0, \end{aligned} \quad (6.73)$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{1}{2}.$$

Откуда

$$\{w\} = \frac{1}{\rho} \{p\} + \frac{1}{16\Gamma} (V_{u_2} - V_{u_1})^2 \frac{\{P\}}{\rho_2 \rho_1} . \quad (6.74)$$

Соотношение (6.74) играет роль уравнения Гюгонио в обычной гидродинамике.

Для ударных волн справедлива теорема Цемплена, согласно которой в ударной волне давление и плотность увеличиваются, т.е. ударная волна есть волна сжатия  $\rho_2 > \rho_1$ ,  $p_2 > p_1$ . При этом предполагается, что

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial P_2} \right)_{\rho} > 0, \quad \left( \frac{\partial Q}{\partial P_2} \right)_{\rho} < 0, \quad (6.75)$$

где  $S$  - энтропия единицы массы. Теорема Цемплена является следствием закона возрастания энтропии. Покажем ее от противного.

Обозначим через  $Q = \{w\} \frac{1}{\rho} \{P\}$  и предположим, что  $\rho_2 < \rho_1$ .

Тогда  $Q < 0$  при  $\bar{P} \neq 0$  и  $Q = 0$  при  $\bar{P} = 0$ .

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial P_2} \right)_{\rho} = \left( \frac{\partial w}{\partial P_2} \right)_{\rho} \frac{1}{\rho} , \quad (6.76)$$

а так как

$$\left( \frac{\partial w}{\partial P_2} \right)_{\rho} = \frac{1}{\rho} + T_2 \left( \frac{\partial S}{\partial P_2} \right)_{\rho} , \quad (6.77)$$

то

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial P_2} \right)_{\rho} = T_2 \left( \frac{\partial S}{\partial P_2} \right)_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{P_2}{P_1} . \quad (6.78)$$

В силу (6.75) и нашего предположения  $\left( \frac{\partial Q}{\partial P_2} \right)_{\rho} > 0$ . Таким

образом, при фиксированном  $\rho_2$  уменьшение  $Q$  приведет к уменьшению  $P_2$ , а, следовательно, в силу (6.75), должна уменьшаться энтропия, т.е.  $S_2 < S_1$ , что противоречит закону возрастания энтропии.

Для возможности реального существования МГД разрыва необходимо выполнение условия его устойчивости. Разрыв, удовлетворяющий требованию бесконечно малых изменений при бесконечно малых возмущениях, называется эволюционным. Если бесконечно малые возмущения вызывают конечные изменения разрыва, то разрыв называется неэволюционным. На рис. 6.7 показано расщепление скачка

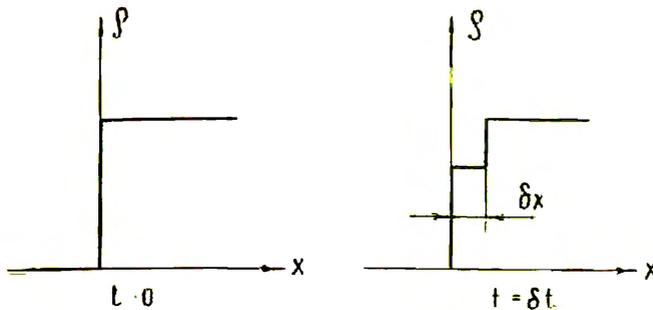


Рис. 6.7. Расщепление скачка плотности.

а -  $t = 0$  ; б -  $t = \delta t$  .

плотности. Возмущение  $\delta\rho$  сразу становится большим, хотя при малых  $\delta t$  оно локализовано в малой области пространства  $\delta x$  .

Если  $(V_{\phi}^-)$ ,  $(V_{\phi}^A)$ ,  $(V_{\phi}^+)$  - фазовые скорости медленной магнитозвуковой, альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн с вектором  $\vec{k} \parallel \vec{n}$  ( $V_{\phi}^- < V_{\phi}^A < V_{\phi}^+$ ) , то при выполнении условий

$$V_{n_1} \gg (V_{\phi}^+)_1, \quad (V_{\phi}^A)_2 < V_{n_2} < (V_{\phi}^+)_2 \quad (6.79)$$

ударная волна называется быстрой. При выполнении условий

$$(V_{\phi}^-)_1 \leq V_{n_1} < (V_{\phi}^A)_1, \quad V_{n_2} \leq (V_{\phi}^-)_2 \quad (6.80)$$

ударная волна называется медленной. Вне интервалов (6.79), (6.80) ударные волны неэволюционны, т.е. распадаются на несколько разрывов. Магнитное поле на фронте быстрой волны нарастает, а на фронте медленной убывает. При малых интенсивностях быстрая и медленная ударные волны переходят в быструю и медленную магнитозвуковые волны. Скорость ударной волны часто характеризуется числом Маха, равным отношению скорости фронта в системе отсчета, в которой плазма перед фронтом неподвижна, к скорости соответствующей (быстрой или медленной) магнитозвуковой волны.

Все виды МГД разрывов обнаруживаются в межпланетном пространстве, и в некоторых случаях дают основной вклад в возмущенность межпланетного пространства. МГД разрывы возникают при обтекании плазмой различных тел, при взаимодействии магнитосфер планет с солнечным ветром, гелиомагнитосферы с межзвездным газом. При взаимодействии магнитосферы Земли с солнечным ветром образуется стоячая ударная волна (в литературе встречаются термины: головная ударная волна, отходящая ударная волна, изогнутая ударная волна). В физике солнечного ветра фигурируют термины: поршневая и взрывная, прямая и обратная ударные волны. Поршневая ударная волна возникает при длительной инжекции ускоренной плазмы. Для нее характерно дальнейшее возрастание плотности и скорости плазмы после резкого скачка на фронте волны. Импульсные возмущения вблизи Солнца генерируют взрывные волны (рис. 6.8). После резкого возрастания на фронте плотность и скорость в такой волне убывают. Прямые ударные волны распространяются от Солнца, обратные — к Солнцу в системе покоя плазмы перед фронтом волны (рис. 6.9). Так как скорость солнечного ветра  $\sim 400$  км/с, относительно Земли обратные ударные волны могут также распростра-

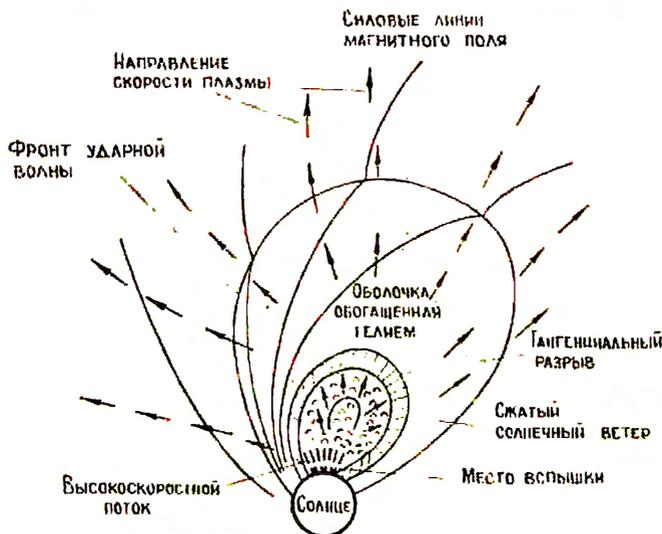


Рис. 6.8. Схематическая картина возмущения межпланетной плазмы солнечной вспышкой

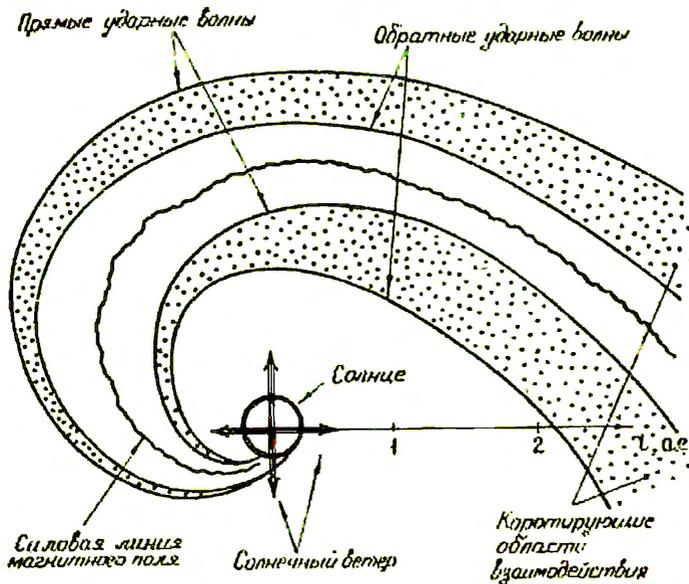


Рис. 6.9. Схематическое изображение коротящихся областей взаимодействия, прямых и обратных волн в солнечном ветре

ваться от Солнца. Обратные ударные волны могут возникнуть при взаимодействии друг с другом фронтов прямых ударных волн и отражении ударных волн от тангенциальных разрывов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Наука, 1979.
2. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
3. Ахизер А.И., Ахизер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
4. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, вып. I, 1963.
5. Сивухин Д.В. Дрейфовая теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях. Сб. Вопросы теории плазмы, вып. I. М.: Госатомиздат, 1963.
6. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Сб. Вопросы теории плазмы, вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963.
7. Шаfranов Б.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле. Сб. Вопро-

- сы теории плазмы. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963.
8. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
9. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968.
10. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969.
11. Велихов Е.П., Земцов Ю.К. Введение в физику плазмы. М.: Изд. Моск. ун., 1977.
12. Альвен Х., Фельтхаммар К.Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
13. Альвен Х. Космическая плазма. М.: Мир, 1963.
14. Паркер Е. Космические магнитные поля, т. 1, 2. М.: Мир, 1962.
15. Основы физики плазмы (под ред. Галеева А.А., Судана Р.). М.: Энергоиздат, 1984, т. 1, 2.
16. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980.
17. Вайнштейн С.И. Магнитные поля в космосе. М.: Наука, 1963.
18. Росс Е., Ольберт С. Введение в физику космического пространства. М.: Атомиздат, 1969.
19. Тверской Б.А. К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей. Геомагнетизм и аэронавтика, т. 6, № 1, с. 11-18.
20. Гетлинг А.В., Тверской Б.А. Теория солнечной активности. Изв. АН СССР, т. 44, № 12, 1980, с. 2560-2568.
21. Гетлинг А.В. Конвективная зона Солнца. Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца. Вып. 61. М.: Наука, 1982, с. 3-19.
22. Чirikov Б.В. Проблема устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке. Физика плазмы, т. 4, вып. 3, 1978, с. 521-541.
23. Солнечная и солнечно-земная физика. Иллюстрированный словарь терминов (под ред. Бруцка А., Дюрана Ш.). М.: Мир, 1980.

Елизавета Евгеньевна Антонова

ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
Часть I

Редактор

К.И.Стратилатова

---

Подписано к печати 19.12.85 г.

Д-104562. Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов. Офсетная печать. Усл.печ.л.6.25. Уч.-изд. л.5,25. Тираж 150 экз. Заказ 3247. Цена 15 коп.

Заказное

---

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

---

Ротапринт НИИЯФ МГУ

**Е.Е.Антонова**

**ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**Часть II**

**Издательство Московского университета**

**1986**

Елизавета Евгеньевна Антонова  
ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
Часть II

---

Редактор

К. И. Стратилатова

---

Подписано к печати 10.10.86г.

Л-66454

Печать офсетная. Бумага для множительных аппаратов.

Формат 60x84/16. Уч.-изд.л.-6,60. Усл.п.л.-6,75.

Заказная.

Заказ № 3488. Тираж 200 экз. Цена 20 коп.

---

Ордена "Знак Почета" издательства Московского университета.  
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7

---

Отпечатано в НИИЯФ МГУ

119899, Москва ГСП

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

---

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
Кафедра космических лучей и физики космоса

Е.Е. Антонова

ПЛАЗМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В  
КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Часть II

Издательство Московского университета

1986

УДК 550.3 + 533.9

Рецензенты

А.Т.Рахимов, профессор

Ю.И.Логачёв, доктор физ.-мат. наук

Антонова Е.Е. Плазменные процессы в космическом пространстве.  
Часть II. -М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986

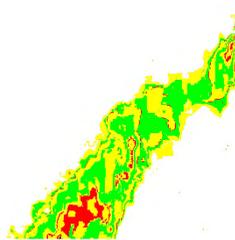
В курсе систематически изложены общие вопросы физики плазмы, различные подходы и способы теоретического описания плазменных процессов в космическом пространстве. Часть II включает вопросы генерации и распространения линейных и нелинейных волн, плазменной турбулентности, ускорения частиц в космосе.

Пособие рассчитано на студентов V курса отделения ядерной физики физического факультета МГУ, может быть использовано аспирантами и специалистами в области космофизики.

077(02)-86-заказное



Издательство Московского  
университета, 1986



## О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ...	5
§ 1. Тензор диэлектрической проницаемости однородной магнитоактивной плазмы . . . . .	5
§ 2. Колебания и волны в холодной магнитоактивной плазме . . . . .	12
§ 3. Затухание волн в плазме . . . . .	20
§ 4. Колебания и волны в горячей магнитоактивной плазме . . . . .	25
§ 5. Колебания и волны в неоднородной плазме . . . . .	26
Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КОСМОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ . . . . .	30
§ 1. Радиоволны в ионосфере Земли . . . . .	30
§ 2. Низкочастотные электромагнитные волны в магнитосфере Земли . . . . .	33
§ 3. Геомагнитные пульсации . . . . .	37
§ 4. Радиозлучение Солнца, колебания и волны в атмосфере Солнца и солнечном ветре . . . . .	39
Глава 3. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В КОСМОСЕ . . . . .	42
§ 1. МГД неустойчивости идеально проводящей плазмы ...	44
§ 2. Диссипативные неустойчивости и тиринг-мода . . . . .	51
§ 3. Дрейфовые неустойчивости . . . . .	55
§ 4. Гидродинамические неустойчивости однородной плазмы . . . . .	57
§ 5. Кинетические неустойчивости . . . . .	61
§ 6. Параметрические неустойчивости . . . . .	65
Глава 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ . . . . .	69
§ 1. Уравнение Кортевега - де Вриза . . . . .	69
§ 2. Периодические волны и солитоны . . . . .	72
§ 3. Метод обратной задачи рассеяния . . . . .	76
§ 4. Ударные волны в слабодиспергирующих средах . . . . .	77
§ 5. Модуляционная неустойчивость и солитоны - отбавки . . . . .	79

Глава 5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ . . . . .	82
§ 1. Квазилинейное приближение . . . . .	83
§ 2. Слабая турбулентность . . . . .	87
§ 3. Перекачка энергии по спектру турбулентности . . . . .	89
§ 4. Турбулентный нагрев и проблема аномального сопротивления . . . . .	91
Глава 6. МЕХАНИЗМЫ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОСМОСЕ . . . . .	95
§ 1. Ускорение пробных частиц . . . . .	95
§ 2. Магнитная накачка . . . . .	97
§ 3. Турбулентное ускорение . . . . .	98
§ 4. Ускорение на ударных волнах . . . . .	99
§ 5. Ускорение частиц при пересоединении магнитных силовых линий . . . . .	100
§ 6. Ускорение при расширении плазмы в вакуум . . . . .	102
§ 7. Двойные слои . . . . .	103
Л и т е р а т у р а . . . . .	105

Г л а в а I. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В  
КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Колебания и волны в космической плазме, как правило, рассматриваются с использованием приближения генерации и распространения в бесстолкновительной плазме, а столкновения учитываются как малая поправка. Сложность исходной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений, включающей кинетическое уравнение в форме Власова и уравнения Максвелла для самосогласованного электрического и магнитных полей, позволяет получать решения только в некоторых специальных случаях. Первым шагом при рассмотрении колебаний и волн является линейное приближение, или приближение волн малой амплитуды, в котором возмущение равновесной функции распределения и равновесных значений электромагнитного поля малы по сравнению с их равновесными значениями.

§ I. Тензор диэлектрической

проницаемости однородной магнитоактивной плазмы

В приближении однородной плазмы не учитывается влияние неоднородностей параметров плазмы и граничных условий на волновые свойства системы. Данное приближение применимо, когда длина волны и длина её затухания (или нарастания) много меньше характерных масштабов неоднородностей плазмы, а её период и время затухания (или нарастания) много меньше характерного времени изменения параметров плазмы.

Исходная система уравнений имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B} + \vec{B}_0] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho_e, \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \\ \rho_e = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\vec{v}, \quad \vec{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}. \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

Так как уравнения Максвелла линейны относительно средних токов и зарядов плазмы, линеаризация подвергается только уравнение для функции распределения частиц  $f_\alpha$  :

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{V}, t) = f_{\alpha 0}(\vec{V}) + f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{V}, t), \quad |f_{\alpha 1}| \ll f_{\alpha 0},$$

где  $f_{\alpha 1}$  - малая осциллирующая добавка к равновесной функции распределения  $f_{\alpha 0}$ . В (I.1)  $\vec{B}_0$  - равновесное магнитное поле,  $\vec{E}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  - возмущения электрического поля, скорости и магнитного поля соответственно ( $\vec{E}_0 = 0$ ,  $\vec{V}_0 = 0$ ).  $f_{\alpha 0}$  удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\vec{V}, \vec{B}_0] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{V}} = -\omega_\alpha \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \varphi} = 0, \quad (I.2)$$

где  $\omega_\alpha$  - циклотронная частота частиц сорта  $\alpha$ ,  $\varphi$  - азимутальный угол в пространстве скоростей (в пространстве скоростей используется цилиндрическая система координат с осью  $Z$  вдоль  $\vec{B}_0$ ). Из (I.2) следует, что  $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(V_\parallel, V_\perp)$ , где  $V_\parallel$ ,  $V_\perp$  - проекции скорости в направлении магнитного поля и перпендикулярно ему соответственно. После линеаризации система уравнений (I.1) становится линейной системой интегродифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (относительно времени и координат), поэтому пространственно-временную зависимость  $\vec{E}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $f_{\alpha 1}$  можно представить в виде разложения по плоским волнам:

$$\exp\{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})\}, \quad \text{где } \omega - \text{частота волны,} \\ \vec{k} - \text{волновой вектор. В силу линейности уравнений связь} \\ \text{плотности тока частиц сорта } \alpha \text{ с электрическим полем} \\ \text{имеет вид} \quad j_i = G_{ij}^\alpha(\omega, \vec{k}) E_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (I.3)$$

где тензор  $G_{ij}^\alpha(\omega, \vec{k})$  называется тензором проводимости<sup>\*)</sup>. Вводя электрическую индукцию  $\vec{D}$

\*) Название "тензор проводимости" происходит от формальной аналогии с обычным законом Ома, но имеет в бесстолкновительной плазме иной физический смысл - является характеристикой индуктивности плазмы. В бесстолкновительной плазме проводимость для постоянного тока бесконечно велика вдоль постоянного магнитного поля и равна нулю поперёк него.

$$\partial \vec{D} / \partial t = 4\pi \vec{j} + \partial \vec{E} / \partial t, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{i} \vec{j} / \omega, \quad (I.4)$$

для монохроматической волны малой амплитуды

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (I.5)$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$  - тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Связь  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} 4\pi \sigma_{ij}^{\alpha} / \omega, \quad (I.6)$$

где  $\delta_{ij}$  - единичный тензор. Вводя показатель преломления  $N = ck / \omega$  равный отношению скорости света к фазовой скорости волны, из уравнений Максвелла получаем

$$\Lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) E_j = [N^2(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij}] E_j = 0. \quad (I.7)$$

Уравнение (I.7) определяет собственные векторы, описывающие собственные колебания плазмы. Условие разрешимости однородной системы линейных алгебраических уравнений (I.7) для  $E_j$  представляет собой дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в анизотропной среде

$$\Lambda = \det | \Lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) | = 0 \quad (I.8)$$

Уравнение (I.8) определяет собственные значения задачи. Если решается задача о распространении волн определённой частоты, то (I.8) определяет  $\vec{k}(\omega)$ . Если решается задача о собственных колебаниях плазменной системы, то  $\vec{k}$  считается заданным и (I.8) определяет  $\omega(\vec{k})$ . В космофизике используются оба подхода, первый - при решении задачи определения параметров плазмы радиочастотными методами, второй - при изучении характера поведения космофизических плазменных систем.

Вид тензора  $\varepsilon_{ij}$  определяет свойства собственных колебаний, их поляризацию и собственные значения  $\omega(\vec{k})$ . В общем случае (I.8) даёт комплексные собственные значения

$\omega = R_e \omega + i \text{Im} \omega$ , где  $R_e \omega = \omega \gamma$  - частота колебаний,  $\text{Im} \omega = \gamma$  - декремент затухания (нарастающий) волны. При  $\omega_2 \gg \gamma$  вывод о наличии поглощающих свойств среды можно сделать без решения дисперсионного уравнения, используя общий вид тензора  $\varepsilon_{ij}$ . Разбивая

$\epsilon_{ij}$  на эрмитову  $\epsilon_{ij}^I$  и антиэрмитову  $\epsilon_{ij}^{II}$  части  
 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^I + i\epsilon_{ij}^{II}$ ,  $i\epsilon_{ij}^{II} = 0,5(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*)$ ,  $\epsilon_{ij}^I = 0,5(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^*)$   
 и рассматривая энергию почти периодической волны, поглощаемой в единицу времени средой, которая определяется средним по периоду от скалярного произведения вектора плотности тока  $\vec{j}$  на вектор электрического поля волны  $\vec{E}$ , получаем

$$\text{Re} \vec{j} \text{Re} \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{4\pi} \epsilon_{ij}^{II}(\omega, \vec{k}) E_i E_j^* \quad (I.9)$$

т.е. поглощающие (или излучающие) свойства среды определяются видом антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости. В слабопоглощающей среде  $\epsilon_{ij}^{II} \gg \epsilon_{ij}^I$ , поэтому в дисперсионном уравнении (I.8) мнимые слагаемые малы по сравнению с вещественными, т.е.  $\text{Im} \Lambda \ll \text{Re} \Lambda$ . Тогда, если нас интересует поведение поля волны во времени (начальная задача), то приближённое решение уравнения (I.8) можно искать в виде  $\omega = \omega_r + i\gamma$ , где  $\omega_r$  — вещественные корни уравнения

$$\text{Re} \Lambda(\omega_r, \vec{k}) = 0 \quad (I.10)$$

Декремент затухания (инкремент нарастания) равен

$$\gamma(\vec{k}) = - \frac{\text{Im} \Lambda(\omega_r, \vec{k})}{\partial \text{Re} \Lambda(\omega_r, \vec{k}) / \partial \omega} \quad (I.11)$$

В дальнейшем для упрощения записи, переобозначим  $\omega_r = \omega$ , и под  $\omega$  будем понимать действительную часть частоты. При анализе пространственного затухания волны в заданном направлении, уравнение (I.8) решается относительно  $K_\theta(\omega)$ , (где  $\theta$  — угол между заданным направлением и вектором  $\vec{k}$ ). При этом

$$\text{Im} K_\theta(\omega) = - \frac{\text{Im} \Lambda(\omega, \vec{k})}{\partial \text{Re} \Lambda(\omega, \vec{k}) / \partial K_\theta} \quad (I.12)$$

характеризует затухание (или нарастание) волны в пространстве.

Для нахождения явного вида тензора диэлектрической проницаемости надо выразить  $\int \alpha_1$  через самосогласованные потоки волны. Для монохроматической волны

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}], \quad \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B}] = -\frac{1}{\omega} \vec{E} (\vec{k}, \vec{V}) + \frac{\vec{V}}{\omega} (\vec{k}, \vec{E}),$$

и линеаризованное кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \varphi} + \frac{i}{\omega_{B\alpha}} (\omega - \vec{k} \vec{V}) f_{\alpha 1} = \\ & = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} \left\{ \vec{E} \left( 1 - \frac{\vec{k} \vec{V}}{\omega} \right) + \frac{\vec{V} (\vec{k} \vec{E})}{\omega} \right\} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{V}}. \end{aligned} \quad (I.13)$$

В системе координат с осью  $z$  вдоль постоянного магнитного поля  $\vec{B}_0$ , в которой  $\vec{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ ,

$$\omega - \vec{k} \vec{V} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_{\perp} v_{\perp} \cos \varphi, \quad (I.14)$$

решение линейного уравнения (I.13) с учётом (I.14) имеет вид

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1} = & \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} e^{-\frac{i}{\omega_{B\alpha}} [(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) \varphi + k_{\perp} v_{\perp} \sin \varphi]} \times \\ & \times \int_c^{\varphi} \left\{ \vec{E} \left( 1 - \frac{\vec{k} \vec{V}}{\omega} \right) + \frac{\vec{V} (\vec{k} \vec{E})}{\omega} \right\} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{V}} e^{\frac{i}{\omega_{B\alpha}} [(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) \varphi' + k_{\perp} v_{\perp} \sin \varphi']} d\varphi', \end{aligned} \quad (I.15)$$

где константа интегрирования  $c$  должна быть выбрана из условия  $f_{\alpha 1}(\varphi + 2\pi) = f_{\alpha 1}(\varphi)$ . Сделав замену переменных  $\varphi' = \varphi - \tau$ , можно записать (I.15) в виде

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1} = & \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} e^{-i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \sin \varphi} \int_0^{\varphi} \left\{ \vec{E} \left( 1 - \frac{\vec{k} \vec{V}}{\omega} \right) + \frac{\vec{V} (\vec{k} \vec{E})}{\omega} \right\} \times \\ & \times \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{V}} e^{\left\{ i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} + \sin(\varphi - \tau) + \frac{i}{\omega_{B\alpha}} (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) \tau \right\}} dt. \end{aligned} \quad (I.16)$$

Множитель перед экспонентой в подынтегральном выражении содержит сумму  $\dots \cos(\varphi - \tau) + \dots \sin(\varphi - \tau)$  и является периодической функцией  $\varphi$ , поэтому для того, чтобы  $f_{\alpha 1}$  было периодическим по  $\varphi$ , достаточно, чтобы пределы интегрирования не зависели от  $c$ , т.е.  $c \rightarrow \infty$ . Получаем

$$f_{\alpha 1} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} e^{\left\{ -\frac{i}{\omega_{B\alpha}} [(\kappa_{\parallel} V_{\parallel} - \omega) \Psi + \kappa_{\perp} V_{\perp} \sin \Psi] \right\}} \cdot \int_{\Psi}^{\Psi} \left\{ \vec{E} \left( 1 - \frac{(\vec{\kappa} \vec{V})}{\omega} \right) + \frac{\vec{V} (\vec{\kappa} \vec{E})}{\omega} \right\} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{V}} \cdot e^{\left\{ \frac{i}{\omega_{B\alpha}} [(\kappa_{\parallel} V_{\parallel} - \omega) \Psi + \kappa_{\perp} V_{\perp} \sin \Psi] \right\}} d\Psi \quad (I.17)$$

Учтём, что

$$\begin{aligned} \exp\{i\lambda \sin \Psi\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\lambda) \exp(in\Psi), \\ \sin \Psi \exp\{i\lambda \sin \Psi\} &= -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(\lambda) \exp(in\Psi), \\ \cos \Psi \exp\{i\lambda \sin \Psi\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) \exp(in\Psi), \end{aligned} \quad (I.18)$$

где  $\lambda = \kappa_{\perp} V_{\perp} / \omega_{B\alpha}$ ,  $J_n(\lambda)$  - функция Бесселя,  $J_n' = dJ_n/d\lambda$ . После интегрирования получаем

$$f_{\alpha 1} = -\frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}} \exp(-i\lambda \sin \Psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}(n) \vec{E} \exp(in\Psi)}{\omega - \kappa_{\parallel} V_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}}, \quad (I.19)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_x(n) &= \left[ \frac{\kappa_{\parallel} V_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\parallel}} + \left( 1 - \frac{\kappa_{\parallel} V_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\perp}} \right] \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) \\ \alpha_y(n) &= \left[ \frac{\kappa_{\parallel} V_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\parallel}} + \left( 1 - \frac{\kappa_{\parallel} V_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\perp}} \right] i J_n'(\lambda) \\ \alpha_z(n) &= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\parallel}} J_n(\lambda) + \left( \frac{\kappa_{\parallel} V_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\perp}} - \frac{\kappa_{\perp} V_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\parallel}} \right) \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) \end{aligned}$$

В (I.19) знаменатель обращается в нуль при

$$\omega = \kappa_{\parallel} V_{\parallel} + n\omega_{B\alpha}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (I.20)$$

Частицы, скорости которых удовлетворяют (I.20), называются резонансными. При  $n = 0$  имеет место черенковский резонанс, при  $n \neq 0$  - циклотронный. Последний соответствует условию равенства частоты волны частотам, кратным циклотронной, с учётом доплеровского смещения. При  $n > 0$  имеет место нормальный доплер-эффект, при  $n < 0$  - аномальный.

Аномальный эффект Доплера возможен только при достаточно большой продольной скорости частиц, превышающей фазовую скорость волны, когда в системе отсчёта, где волна не движется вдоль магнитного поля, её частота равна  $\omega' = \omega - k_{\parallel} V_{\parallel} < 0$ . При нормальном эффекте Доплера излучение волн частицами происходит из-за наличия поперечной составляющей энергии частиц. Резонанс возможен и при  $V_{\parallel} \rightarrow 0$ . В результате происходит уменьшение поперечной энергии частицы. При аномальном эффекте Доплера волны излучаются в результате существования продольной энергии частицы. Излучение сопровождается увеличением поперечной энергии частицы.

Используя выражение (I.19), получаем тензор диэлектрической проницаемости однородной магнитоактивной плазмы

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega^2} \left\{ \int d\vec{V} \left( \frac{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel}}{V_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\parallel}} \right) \cdot \frac{\Pi_{ij}^{(n)}(\vec{V})}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}} - b_i b_j \left[ (f_{\alpha 0} + \frac{V_{\parallel}^2}{V_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial V_{\perp}}) d\vec{V} \right] \right\}, \quad (I.21)$$

где  $\vec{b} = \vec{B}_0 / B_0$ ,

$$\Pi_{ij}^{(n)}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \frac{n^2 \omega_{B\alpha}^2}{K_{\perp}^2} \gamma_n^2 & iV_{\perp} \frac{n \omega_{B\alpha}}{K_{\perp}} \gamma_n \gamma_n' & V_{\parallel} \frac{n \omega_{B\alpha}}{K_{\perp}} \gamma_n^2 \\ -iV_{\perp} \frac{n \omega_{B\alpha}}{K_{\perp}} \gamma_n \gamma_n' & V_{\perp}^2 \gamma_n'^2 & -iV_{\parallel} V_{\perp} \gamma_n \gamma_n' \\ V_{\parallel} \frac{n \omega_{B\alpha}}{K_{\perp}} \gamma_n^2 & iV_{\parallel} V_{\perp} \gamma_n \gamma_n' & V_{\parallel}^2 \gamma_n^2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилом Ландэу интегрирование в (I.21) проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$  с обходом особых точек  $V_{\parallel} = (\omega - n\omega_{B\alpha}) / k_{\parallel}$  снизу при  $k_{\parallel} > 0$  и сверху при  $k_{\parallel} < 0$ . При этом удобно использовать символическую запись:

$$\frac{1}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}} = \frac{P}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}} - i\pi \delta(\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}), \quad (I.22)$$

где символ  $\mathcal{P}$  обозначает главное значение. Слагаемые с  $\delta$  — функцией составляют антиэрмитову часть тензора диэлектрической проницаемости, ответственную за поглощение (раскачку) волны в плазме, и даются выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}'' = & -i \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega^2} \int (k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}}) \cdot \\ & \cdot \Pi_{ij}^{(n)}(\vec{V}) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}) d\vec{V}. \end{aligned} \quad (I.23)$$

Интегрирование в (I.21) можно провести, если  $f_{\alpha 0}$  является максвелловской функцией, и в ряде других специальных случаев\*). Получаемый определитель  $\Delta$  является довольно сложной функцией частоты и волнового вектора. Поэтому число типов собственных решений — ветвей колебаний — может быть бесконечно большим. Однако, подавляющее большинство ветвей колебаний являются сильнозатухающими. Число типов слабозатухающих колебаний ограничено, что позволяет рассматривать отдельные ветви собственных колебаний.

## § 2. Колебания и волны в холодной магнитоактивной плазме

Рассматривая волны, фазовая скорость которых много больше тепловой скорости частиц (в этом случае можно не учитывать влияние теплового движения частиц на распространение волн), и проводя интегрирование (I.21), получаем выражение для тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы

\*) В случае максвелловского распределения интегрирование в (I.21) проводится с использованием второго экспоненциального интеграла Вебера

$$\int_0^{\infty} \exp(-p^2 t^2) J_n(at) J_n(bt) t dt = \frac{1}{2p^2} \exp\left(-\frac{a^2 g^2}{4p^2}\right) I_n\left(\frac{ag}{2p^2}\right)$$

где  $\arg p < \pi/4$ ,  $I_n(x)$  — модифицированная функция Бесселя, а интеграл вероятностей

$$w(z) = \exp(-z^2) \left(1 + 2\pi^{-1/2} i \int_0^z \exp t^2 dt\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (I.24)$$

где 
$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2},$$

$$g = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)},$$

$\omega_{p\alpha} = (4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha} / m_{\alpha})^{1/2}$  — плазменная частота,  $\omega_{B\alpha} = e_{\alpha} B_0 / m_{\alpha} c$  — гирочастота. Выражение (I.24) можно получить, рассматривая систему уравнений двухжидкостной гидродинамики. При  $\vec{B}_0 = 0$  плазма изотропна  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\parallel} \delta_{ij}$ . Тензор (I.24) является эрмитовым, следовательно, холодная плазма, в которой не учитываются столкновения, является средой без потерь. Волны поляризованы эллиптически (при распространении вдоль поля по кругу), за исключением волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Это вызвано тем, что уравнение  $\Delta_{ij} E_j = 0$  нельзя при помощи поворота осей привести к виду  $\Delta_i E_i$  (где по  $i$  суммирование не проводится). Свойство плазмы быть не только анизотропной, но и гиротропной (оптически активной средой) широко используется в космических исследованиях. При  $\omega \rightarrow |\omega_{B\alpha}|$  выражение (I.24) неприменимо и необходим учёт теплового движения частиц.

Подставляя тензор (I.24) в (I.8), получаем дисперсионное уравнение для холодной магнитоактивной плазмы

$$\Delta = AN^4 + BN^2 + C = 0, \quad (I.25)$$

$$A = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta,$$

где 
$$B = -\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \sin^2 \theta,$$

$$C = \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2).$$

каждому из этих уравнений соответствует по крайней мере одно решение. Выводимые из этих уравнений дисперсионные соотношения являются действительными функциями частоты.

$\theta$  - угол между волновым вектором  $\vec{k}$  и  $\vec{B}_0$ . Из (I.25) следует, что возможно распространение двух волн с частотой  $\omega$  и показателями преломления

$$N_{\pm}^2 = \frac{-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \quad (I.26)$$

Если задан волновой вектор  $\vec{k}$ , то (I.26) определяет десять собственных частот  $\omega^j(k, \theta)$ ; пять положительных и пять отрицательных. Рассматривая только положительные собственные частоты, получим пять ветвей колебаний холодной магнитоактивной плазмы. Исследуем уравнение (I.25). Для этого определим  $N$  при  $A \rightarrow 0$ , частоты, при которых  $N^2 = 0$ , и значения  $N$  при  $\omega \rightarrow 0, \infty$

$$\text{При } A \rightarrow 0, \quad N^2 \rightarrow B/A, \quad N_{\pm}^2 \rightarrow C/B,$$

т.е. остаётся конечным. Частоты, при которых  $A = 0$ , называются гибридными или плазменными резонансами. При приближении к резонансной частоте электромагнитные волны становятся продольными, т.е. компонента  $\vec{E}$  вдоль  $\vec{k}$   $\vec{E}_e = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})/k^2$  становится значительно больше компоненты  $\vec{E}$ , перпендикулярной  $\vec{k} - \vec{E}_t$ . Действительно, умножая (I.7) скалярно на  $\vec{k}$ , получаем

$$E_e = - \frac{\sum_i \epsilon_{ij} E_{tj}}{kA} \quad (I.27)$$

где  $A = k^{-2} \sum_i \epsilon_{ij} k_j = \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta$

и  $|E_e/E_t| \rightarrow \infty$  при  $A \rightarrow 0$ . Введем  $\Psi$  и  $\vec{\Pi}$  - скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, получаем  $\vec{E}_e = -\nabla \Psi - i\vec{k} \Psi$ ;  $\vec{E}_t = \text{rot } \vec{\Pi} = i[\vec{k} \vec{\Pi}]$ .

Таким образом, при  $A \rightarrow 0$  колебания плазмы становятся квазиэлектростатическими. Для плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, уравнение  $A = 0$  имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ge}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{gi}^2} \sin^2 \theta = 0. \quad (I.28)$$

Корнями уравнения третьей степени относительно  $\omega^2$  являются три гибридных частоты  $\omega = \omega_{\pm}^j(\theta)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Если  $\theta$  не близко к  $\pi/2$  или  $\omega$  не близко к  $\omega_{B_1}$ , учитывая, что  $m_e/m_i \ll 1$ , получаем

$$\omega_{\infty}^{(1)}(\theta) = \left\{ \frac{1}{2} (\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) + \frac{1}{2} [(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 + 4\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (I.29)$$

$$\omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = \left\{ \frac{1}{2} (\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) - \frac{1}{2} [(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 + 4\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (I.30)$$

При  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\omega_{\infty}^{(1)} = \max(\omega_{pe}, |\omega_{Be}|)$ ,  $\omega_{\infty}^{(2)} = \min(\omega_{pe}, |\omega_{Be}|)$ .

При  $\theta$  близком к  $\pi/2$  и  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$ ,

$$\omega_{\infty}^{(1)} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^{1/2}, \quad (I.31)$$

$$\omega_{\infty}^{(2)} = \frac{\omega_{pe} |\omega_{Be}| \cos \theta}{(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^{1/2}}. \quad (I.32)$$

При  $\theta \approx \pi/2$

$$\begin{aligned} \omega_{\infty}^{(2,5)}(\theta) &= \left( 2 + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{-1/2} \left\{ \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{p_1}^2 + \omega_{B_1}^2 \pm \right. \\ &\left. \pm [(\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{p_1}^2 + \omega_{B_1}^2)^2 - 4 \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{B_0}^2} \right) \omega_{B_1}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (I.33)$$

При  $\cos^2 \theta \ll m_e/m_i$  и  $\theta \rightarrow \pi/2$

$$\omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = [(\omega_{B_1}^2 + \omega_{p_1}^2) / (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2)]^{1/2}, \quad (I.34)$$

$$\omega_{\infty}^{(3)}(\theta) = \omega_{B_1} \omega_{pe} \cos \theta / (\omega_{p_1}^2 + \omega_{B_1}^2)^{1/2} \quad (I.35)$$

Зависимость резонансных частот от  $\theta$  показана на рис. I.1. Частота (I.31) называется верхней гибридной частотой. Частота (I.34), которая при  $\omega_{p_1} \gg \omega_{B_1}$ ,  $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$  имеет вид  $(\omega_{Be} \omega_{B_1})^{1/2}$  - нижней гибридной. Вблизи резонансов фазовая скорость волн значительно меньше скорости света, и имеет место эффективное взаимодействие волн с плазмой. В плазме, содержащей несколько сортов ионов, число гибридных частот, соответственно, увеличивается.

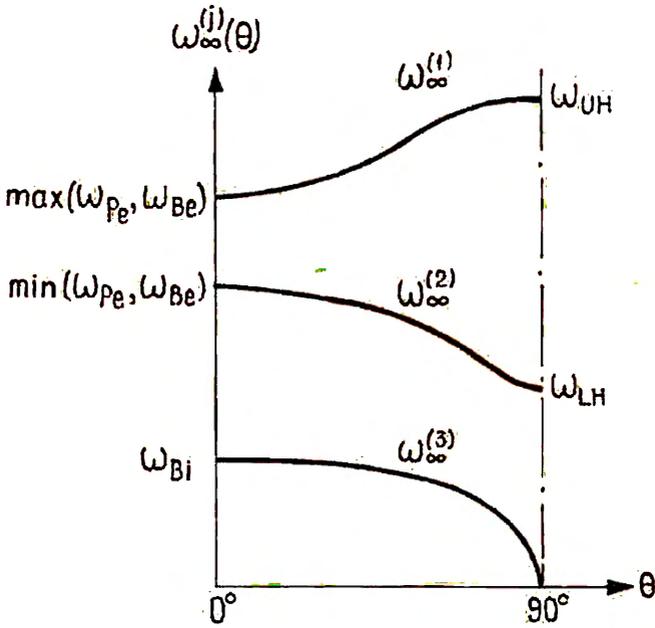


Рис. I. I. Зависимость резонансных частот продольных колебаний холодной плазмы в магнитном поле от угла  $\theta$  между волновым вектором и направлением магнитного поля.  $\omega_{UH}$ ,  $\omega_{LH}$  - верхнегибридная и нижнегибридная частоты соответственно

Определим частоты, при которых  $N^2 = 0$ . Очевидно, это имеет место, когда  $S = 0$ . Пренебрегая малым вкладом ионов, получаем

$$\omega_0^{(1)} = (\omega_{pe}^2 + 0,25\omega_{be}^2)^{1/2} + 0,5|\omega_{be}|; \quad (I.36)$$

$$\omega_0^{(2)} = \omega_{pe}; \quad (I.37)$$

$$\omega_0^{(3)} = (\omega_{pe}^2 + 0,25\omega_{be}^2)^{1/2} - 0,5|\omega_{be}|. \quad (I.38)$$

Рассмотрим  $\omega \rightarrow 0, \infty$ . Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $g \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$ ,  $\epsilon_{\parallel} \rightarrow 1$  и  $N \rightarrow 1$ .

Если  $\omega \rightarrow 0$ , то  $q \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_{11} \rightarrow -\infty$  и  $N^2 = \frac{N_A^2}{\cos^2 \theta}$ ,

$$\text{где } N_A^2 = \varepsilon_1(\omega)|_{\omega=0} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{se}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{si}^2} \quad (I.39)$$

Зная положение нулей и полюсов  $N^2(\omega)$  и его значение при  $\omega \rightarrow 0, \infty$ , можно схематически построить график этой функции (рис. I.2). Рис. I.2 соответствует  $\theta \neq 0, \pi/2$  и  $\omega_0^{(3)} < \omega_\infty^{(2)}$ . (пунктир соответствует  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$ ),

Областям распространения отвечают собственные частоты  $\omega^{(j)}(\theta)$ , зависимость которых от  $k$  при  $\theta \neq 0, \pi/2$  показана на рис. I.3.

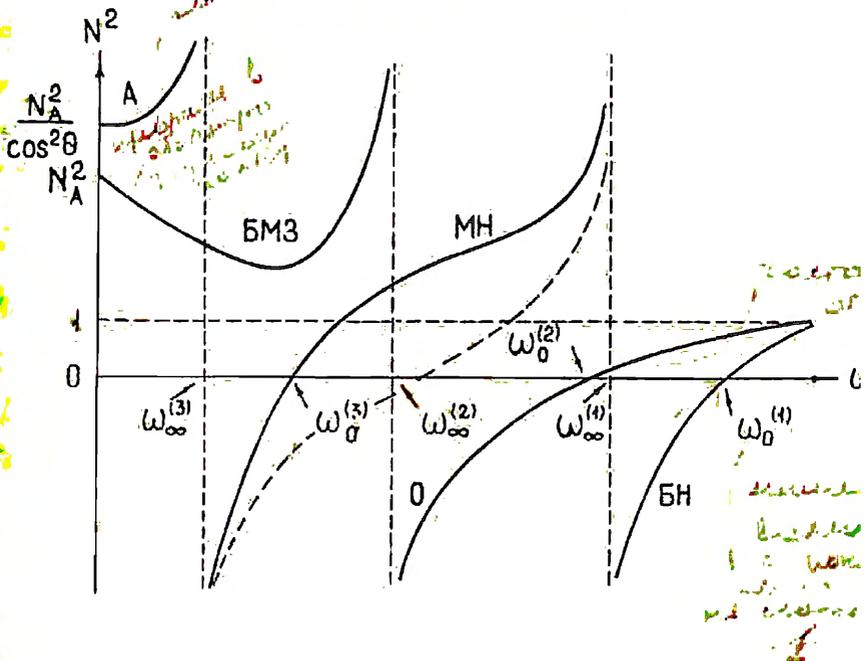


Рис. I.2. Зависимость квадрата показателя преломления от частоты в холодной магнитоактивной плазме при  $\theta \neq 0, \pi/2$  и  $\omega_0^{(3)} < \omega_\infty^{(2)}$ : А, БМЗ, МН, О, БН - альвеновская, быстрая магнитозвуковая, медленная необыкновенная и быстрая необыкновенная ветви соответственно: при  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$  МН-ветвь показана пунктиром

$N^2 = 0, \dots$

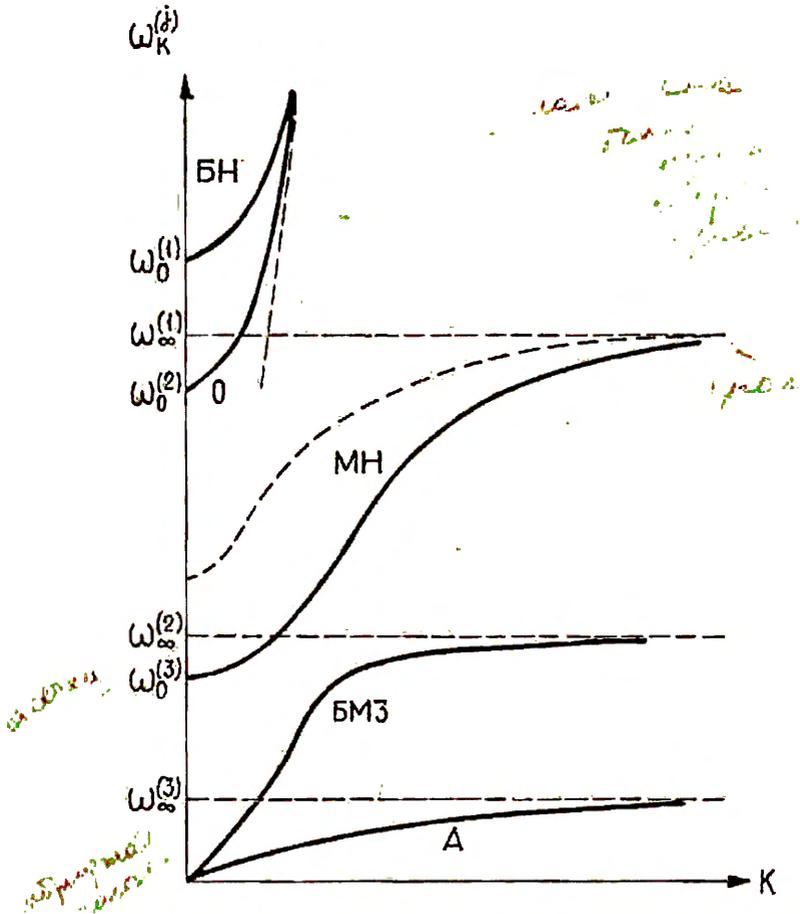


Рис. I.3. Схематический вид зависимости собственных частот колебаний холодной магнитоактивной плазмы  $\omega$  от величины волнового вектора  $k$  при  $\theta = 0, \pi/2$  и  $\omega_0^{(3)} < \omega_\infty^{(2)}$ : пунктир - MH ветвь при  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$ .

На рис. I.2 и I.3 А - альвеновская ветвь, BM3 - быстрая магнитозвуковая, MH - медленная необыкновенная, O - обиховенная, BH - быстрая необыкновенная. Если  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$ , то при  $\omega_\infty^{(2)} < \omega < \omega_0^{(3)}$  распространения волны невозможно. Т.к.  $\omega^{(j)}(k, \theta)$  монотонно растёт с ростом  $k$ , в холодной плазме мы всегда имеем нормальную дис-

персию, и угол между направлением распространения волны и групповой скоростью  $\vec{V}_g = \partial\omega/\partial\vec{k}$  всегда меньше  $\pi/2$ .

Рассмотрим случаи чисто продольного и чисто поперечного распространения. При  $\theta = 0$

$$\Lambda = \epsilon_{\parallel} (N^2 - \epsilon_{\perp} - q)(N^2 - \epsilon_{\perp} + q) = 0. \tag{I.40}$$

Уравнение  $\epsilon_{\parallel} = 0$  имеет решение

$$\omega(k) = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2}. \tag{I.41}$$

Такие колебания называются ленгмюровскими. Они имеют место и без магнитного поля ( $\vec{B}_0$  не оказывает влияния на продольные колебания при  $\theta = 0$ ). Уравнение  $N^2 = \epsilon_{\perp} \pm q$  даёт

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - |\omega_{ce}|)} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{bi})}, \tag{I.42}$$

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + |\omega_{ce}|)} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{bi})}. \tag{I.43}$$

Обе волны имеют круговую поляризацию. Показатели преломления (I.42) и (I.43) имеют особенности на электронной циклотронной и ионной циклотронной частотах соответственно. Для волны, в которой вектор  $\vec{E}$  вращается в ту же сторону, что и ионы, особенность возникает при  $\omega = \omega_{bi}$ , электроны - при  $\omega = |\omega_{ce}|$ . Первая волна называется обыкновенной или R-волной, вторая - необыкновенной или L-волной. При  $\omega \ll \omega_{bi}$  скорости распространения обыкновенной и необыкновенной волн отличаются мало, поэтому возможно распространение линейно поляризованной волны с медленным вращением плоскости поляризации. При поперечном распространении  $\theta = \pi/2$ , дисперсионное уравнение распадается на два

$$N^2 = \epsilon_{\parallel} \tag{I.44}$$

$$N^2 = (\epsilon_{\perp} - q^2) / \epsilon_{\perp}. \tag{I.45}$$

Первый даёт показатель преломления линейно поляризованной обыкновенной волны с  $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$  (поэтому волна и получила название обыкновенной). При поперечном распространении исчезает альвеновская ветвь.

2. Г. Яворский, "Учебник физики для технических вузов", 1978 г.

§ 3. Затухание волн в плазме

Если холодную плазму нельзя считать бесстолкновительной, то в первом приближении можно получить вид тензора диэлектрической проницаемости, вводя член  $-m\nu(\vec{V}_e - \vec{V}_i)$ , (где  $\nu$  — частота столкновений электронов с ионами,  $\vec{V}_e$ ,  $\vec{V}_i$  — гидродинамические скорости электронов и ионов) в уравнении движения. Это приведёт к замене  $\omega^2 \rightarrow \omega(\omega + i\nu)$  в тензоре  $\epsilon_{ij}$  и появлению затухания волн в пространстве или во времени (в зависимости от постановки задачи). Аналогично рассматривается случай, когда необходимо учитывать столкновения электронов и ионов с нейтралами. Последний случай характерен для распространения волн в ионосфере Земли.

При учёте теплового движения частиц в бесстолкновительной равновесной плазме, энергия волн уменьшается в результате затухания Ландау и циклотронного затухания. Рассмотрим подробнее затухание высокочастотных электростатических колебаний плазмы ( $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ) при  $\vec{B}_0 = 0$ . При исследовании высокочастотных колебаний можно пренебречь движением ионов, которое создаёт однородный почти неподвижный фон. В системе координат с осью  $Z$  вдоль  $\vec{K}$  линеаризованная система уравнений (I.1) одномерна и имеет вид

$$\frac{\partial f_{ei}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_{ei}}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m_e} \nabla \varphi \frac{\partial f_{eo}}{\partial \vec{v}} = 0,$$

$$\Delta \varphi = 4\pi e \int f_{ei} d\vec{v} \quad (I.46)$$

Из условия разрешимости (I.45) получаем дисперсионное уравнение

$$\epsilon(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv = 0 \quad (I.47)$$

Для определения контура интегрирования в (I.47) рассмотрим задачу с начальными условиями. Пусть при  $t = 0$  создано начальное возмущение  $q(v, x)$ . Тогда в правую часть кинетического уравнения добавляется  $q(v, x) \delta(t)$ .

Раскладывая  $f_{\kappa}$  и  $\varphi$  в интегралы Фурье по  $\kappa$  и обозначая коэффициенты разложения через  $f_{\kappa}$  и  $\varphi_{\kappa}$ , получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{\kappa}}{\partial t} + i\kappa v f_{\kappa} + i\kappa \varphi \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_{\kappa 0}}{\partial v} = g_{\kappa}(v) \delta(t), \\ \kappa^2 \varphi_{\kappa} = -4\pi e \int f_{\kappa} dv \end{cases} \quad (I.48)$$

Применим к (I.47) преобразование Лапласа (умножим на  $e^{-pt}$  и проинтегрируем от 0 до  $\infty$ ). Обозначая

$$f_{\kappa p}(v) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_{\kappa}(v, t) dt, \quad \varphi_{\kappa p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi_{\kappa}(t) dt,$$

получим

$$f_{\kappa p} = \frac{ig_{\kappa}(v)}{ip - \kappa v} + \frac{\kappa}{ip - \kappa v} \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_{\kappa 0}}{\partial v} \varphi_{\kappa p}.$$

Отсюда получаем

$$\varphi_{\kappa p} = -\frac{4\pi e}{\kappa^2} \frac{1}{\delta(\kappa, ip)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ig_{\kappa}(v) dv}{ip - \kappa v}. \quad (I.49)$$

В соответствии с теорией преобразований Лапласа

$$\varphi_{\kappa}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \varphi_{\kappa p} dp, \quad (I.50)$$

где интегрирование по  $p$  проводится в правой полуплоскости. Вводя  $\omega = ip$  ( $p = -i\omega$ ), получаем

$$\varphi_{\kappa}(t) = \frac{2e}{\kappa^2} \int_{-\infty + i0}^{+\infty + i0} \frac{e^{-i\omega t}}{\delta(\kappa, \omega)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{\kappa}(v) dv}{\omega - \kappa v} \right] d\omega, \quad (I.51)$$

где интегрирование по  $\omega$  проводится в верхней полуплоскости. Так как интегрирование проводится по всем  $\omega$ , строго говоря, определённой связи  $\omega$  с  $\kappa$  не существует.

Однако, если  $g(v)$  не имеет особенностей, то асимптотика (I.51) при больших  $t$  будет определяться нулями  $\delta(\kappa, \omega)$ , и  $f_{\kappa}(t)$  и  $\varphi_{\kappa}(t)$  будут пропорциональны

$$\exp(i\omega_{\kappa} t), \quad \text{где } \omega_{\kappa} \text{ определяются дисперсионными уравнениями (I.47), причём } \delta(\omega, \kappa) \text{ в подынтегральном выражении (I.51) есть заданная в верхней полуплоскости}$$

функция комплексной переменной  $\omega$ . Это означает, что вблизи действительной оси надо заменить  $\omega \rightarrow \omega + i\nu$ , где  $\nu > 0$ . Используя символическую запись,

$$\frac{1}{\omega - kV} \rightarrow \frac{\mathcal{P}}{\omega - kV} - \pi i \delta(\omega - kV), \quad (I.52)$$

где  $\mathcal{P}$  - главное значение, дающее правило обхода полюсов Ландау, получаем

$$\xi = 1 + \frac{4\pi e^2}{k m_e} \int \frac{\mathcal{P}}{\omega - kV} \frac{\partial f_0}{\partial V} dV - \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} \pi i \left. \frac{\partial f_0}{\partial V} \right|_{V=\omega/k} = 0 \quad (I.53)$$

Заметим, что малое затухание волны, связанное со столкновениями, приводит к такому же правилу обхода полюсов - при интегрировании по  $V$  ( $k > 0$ ) особенность надо обходить снизу. При  $\vec{B}_0 \neq 0$  аналогично получается правило обхода полюсов (I.22) в магнитоактивной плазме. Наличие мнимой части в (I.53) соответствует затуханию Ландау. Его величина пропорциональна  $\partial f_0 / \partial V$  в точке  $V = \omega/k$ , где скорость частиц совпадает с фазовой скоростью волны.

Соотношение (I.53) даёт возможность вычислить зависимость  $\omega$  от  $k$  и затухание для ленгмювских колебаний с учётом теплового движения электронов. Для

$$f_{e0} = n_0 \frac{m}{2\pi T} \exp\left(-\frac{mV^2}{2T}\right) \quad \text{и} \quad \omega \gg kV_{Te} \quad (V_{Te} = \left(\frac{2T}{m_e}\right)^{1/2}), \quad (I.53) \text{ принимает вид}$$

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 T}{m_e \omega^2}\right) - \frac{4\pi e^2}{k^2 m_e} i\pi \left. \frac{\partial f_0}{\partial V} \right|_{V=\omega/k} = 0, \quad (I.54)$$

и его решение даёт

$$\omega_L^2 = \omega_{pe}^2 + 3Tk^2/m_e, \quad (I.55)$$

$$\gamma_L = \frac{\omega_L \omega_{pe}^2}{2n_0 k^2} \pi \left. \frac{\partial f_0}{\partial V} \right|_{V=\omega/k} = \pi^{1/2} \frac{\omega_L^2 \omega_{pe}^2}{k^3 V_{Te}^2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_D^2}\right), \quad (I.56)$$

где  $r_D$  - дебаевский радиус. (I.56) показывает, что электронные ленгмюровские волны сильно затухают при  $k^{-1} \ll r_D$ .  
 В отличие от затухания волн при столкновениях, затухание Ландау обратимо, т.к. в бесстолкновительных процессах энтропия сохраняется (в соответствии с H-теоремой Больцмана). В случае затухания Ландау имеет место обращенный эффект Вавилова-Черенкова - происходит поглощение волн резонансными частицами. Частицы, проекции скоростей которых на направление распространения волны лежат в интервале  $-(2e\Phi/m_e)^{1/2} < v - \frac{\omega}{k} < (2e\Phi/m_e)^{1/2}$ , попадают в потенциальные ямы волны. Электроны, скорость которых несколько превышает  $\omega/k$ , отдают свою энергию при отражении от потенциального барьера, а отстающие электроны подталкиваются барьером, забирая энергию у волны. При  $\partial f_{e0} / \partial v |_{v=\omega/k} > 0$  последних больше, чем первых и волна затухает. Линейное затухание Ландау существенно только для волн малой амплитуды с

$$(e\Phi/m_e) \ll r_L/k. \quad (I.57)$$

Условие (I.57) означает, что волна успевает затухнуть за время много меньше периода колебаний электронов в потенциальной яме  $\tau \sim k^{-1}(e\Phi/m_e)^{-1/2}$ . Если (I.57) не выполняется, т.е. имеется волна конечной амплитуды, через время  $\sim \tau$  частицы, которые отставали от волны и которых было больше, начинают опережать волну и при столкновении со стенкой потенциального барьера отдают ей свою энергию. Поэтому затухание меняет знак и является осциллирующей функцией времени. В силу зависимости периода колебаний частиц в потенциальной яме от их энергии происходит размешивание частиц по фазовой плоскости. Число частиц, движущихся быстрее и медленнее волны, выравнивается, затухание прекращается, и в плазме устанавливается волна постоянной амплитуды. Вероятность "возврата" системы в исходное состояние при большом числе частиц очень мала (время "возврата" чрезвычайно велико). Фазовое размешивание приводит к мелкоячеистым осцилляциям на функции распределения, и становится существенной диффузия в пространстве скоростей в результате столкновений частиц, которой раньше можно

*Важно отметить затухание  
 Ландау*

было пренебречь. Столкновения сглаживают шероховатости на функции распределения. При этом энтропия не сохраняется, и процесс становится истинно необратимым.

Выше рассматривалось частное решение неоднородного уравнения (I.46). Общее решение включает решение однородного уравнения

$$f_{ie}^u = n_{res} k \delta(\omega - k\vec{V}) \exp\{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}, \quad (I.58)$$

где  $n_{res}$  - произвольная постоянная относительно  $\omega$ .

$f_{ie}^u$  описывает односкоростной модулированный пучок электронов, скорость которого  $\omega/k$ , а плотность  $n_{res}$ . Таким образом, общее решение имеет вид

$$f_{ie} = \left\{ \frac{p}{\omega - kV} \frac{e k \varphi_k}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} + d_{res} \varphi_k \delta(\omega - kV) \right\} \cdot \exp\{i(\omega t - kx)\}, \quad (I.59)$$

и дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 + \frac{4\pi e^2}{m_e k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kV} dv + \frac{4\pi e}{k^2 |k|} d_{res} = 0 \quad (I.60)$$

В уравнении (I.60) имеются две независимые величины  $\omega$  и  $d_{res}$ , каждую из которых при заданном  $k$  можно рассматривать как функцию другой. Поэтому для любого  $\omega$  можно подобрать такую плотность резонансных частиц ( $d_{res}$ ), при которой решением (I.46) будет незатухающая волна с частотой  $\omega$ . Такие волны называются волнами Ван-Кампена. В волнах Ван-Кампена к резонансным частицам, захваченным волной из максвелловской плазмы, добавлены резонансные частицы модулированного пучка, компенсирующие затухание Ландау. Ленгмюровские волны и волны Ван-Кампена в бесстолкновительной плазме без магнитного поля в пренебрежении движением ионов составляют полный набор, т.е. любое возмущение можно разложить по этому набору функций.

В магнитоактивной плазме при  $n \neq 0$  в (I.20) имеет место циклотронный резонанс и, в равновесных условиях - циклотронное поглощение волн резонансными частицами при нормальном и аномальном эффектах Доплера.

С учётом теплового движения электронов качественно меняет поведение показателя преломления в области гибридных резонансов: показатель преломления не обращается в бесконечность, хотя и остаётся значительно больше единицы, возникает сильное поглощение волн.

Декременты бесстолкновительного затухания слабо затухающих волн вычисляются по формуле (I.II).

#### § 4. Колебания и волны в горячей магнитоактивной плазме

При учёте теплового движения частиц помимо рассмотренных в § 2 пяти ветвей колебаний, появляются новые слабозатухающие ветви колебаний. В области низких частот появляется звуковая ветвь, а на частотах близких к циклотронным и их гармоникам - квазипродольные колебания, распространяющиеся поперёк магнитного поля (циклотронные волны или моды Бернштейна).

При  $T_e \gg T_i$  и  $\omega \ll \omega_{Be}$  существуют три слабозатухающие длинноволновые ( $k r_{De} \ll 1$ ) ветви колебаний - альвеновская (А), быстрая (ЕМЗ) и медленная (ММЗ) магнитозвуковые. При  $k \rightarrow 0$  они соответствуют магнитогидродинамическим альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковым. В области коротких длин волн  $\omega_{ММЗ} \rightarrow \omega_{B_i} \cos \theta$ , колебания альвеновской ветви переходят в незаматичные ионно-звуковые, а ЕМЗ ветвь - в свистящий атмосферик (см. глава 2 § 2).

При  $T_i \gg T_e$ ,  $\theta = \pi/2$  и  $\omega \gg \omega_{B_i}$  существует ветвь коротковолновых ( $k r_{B_i} \gg 1$ ) высокочастотных электронно-звуковых колебаний, а при  $\omega \ll \omega_{B_i}$  - низкочастотных электронно-звуковых колебаний, являющаяся продолжением в область коротких волн ( $k r_{B_i} \gg 1$ ) альвеновской ветви.

Циклотронные волны, распространяющиеся поперёк магнитного поля, не имеют газокинематического аналога. Частоты этих волн близки к циклотронным и их гармоникам. Зависимость  $\omega/k$  (рис.1.4) определяется параметрами плазмы и может быть найдена аналитически для плазмы малого давления.

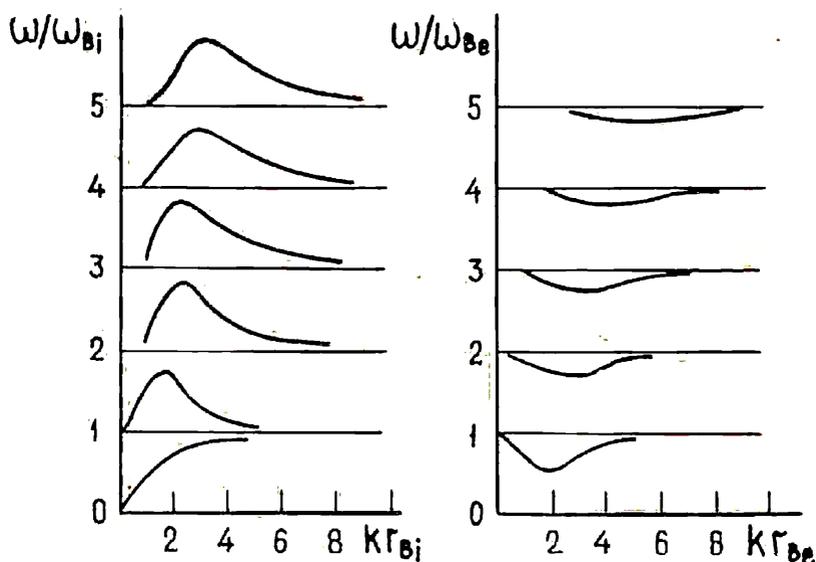


Рис.1.4. Схематический вид зависимости частот от волнового вектора: а - ионо-циклотронные волны, б - электронно-циклотронные волны

### § 5. Колебания и волны в неоднородной плазме

Задача значительно усложняется, если длина волны возмущения сравнима с характерной длиной неоднородности плазмы, а  $\omega^{-1}$  с характерным временем изменения её параметров. При распространении в нестационарной неоднородной среде линейных волн с частотой  $\omega$ , неоднородность среды учитывается зависимостью компонент тензора диэлектрической проницаемости от координат и времени. При этом, получение строгих решений часто сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому широко используются приближённые методы. Если выполняется условие

$$\eta = \frac{2\pi}{\omega} \left| \frac{\partial \ln \xi}{\partial t} \right| + \frac{2\pi}{k} |\nabla \ln \xi| \ll 1, \quad (I.61)$$

где  $\xi$  - любой скаляр, характеризующий фоновую плазму (плотность, температура и т.п.), то  $\eta$  является малым параметром задачи, и может быть использовано приближение геометрической оптики. Решение ищется в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= R_e [\vec{E}^{\circ}(\vec{r}, t) e^{i\Psi(\vec{r}, t)}], \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= R_e [\vec{B}^{\circ}(\vec{r}, t) e^{i\Psi(\vec{r}, t)}], \end{aligned} \quad (I.62)$$

где  $\vec{E}^{\circ}$ ,  $\vec{B}^{\circ}$  - амплитуды электрического и магнитного полей волны, а функция  $\Psi(\vec{r}, t)$  называется эйконалом. При этом

$$\vec{k}(\vec{r}, t) = \nabla \Psi, \quad \omega(\vec{r}, t) = -\partial \Psi / \partial t \quad (I.63)$$

$\omega$  и  $k$  связаны уравнением

$$\nabla \omega + \partial \vec{k} / \partial t = 0. \quad (I.64)$$

Приближение геометрической оптики широко используется при рассмотрении распространения радиоволн в ионосфере, магнитосфере Земли, солнечном ветре и солнечной короне.

При наличии градиентов плотности или температуры в замагниченной плазме частицы совершают дрейфовые движения, и в плазме могут возбуждаться и распространяться поперёк магнитного поля волны, фазовая скорость которых по порядку величины равна дрейфовой скорости. Такие волны называются дрейфовыми.

Рассмотрим дрейфовые волны в плазме низкого давления ( $m_e/m_i \ll 8\pi n T_e / B_0^2 \ll 1$ ), состоящей из горячих электронов с температурой  $T_e$  и холодных ионов, помещённой в однородное магнитное поле  $\vec{B}_0 \parallel z$ . Предположим, что плотность плазмы изменяется только вдоль оси  $x$ , т.е.  $n_0 = n_0(x)$ , а температура в каждой точке одна и та же. Используя приближение двухжидкостной гидродинамики, получаем, что в условиях равновесия при наличии градиента давления, скорость дрейфа электронов находит-

ся из уравнения

$$0 = -\frac{e}{c} [\vec{V}_D \vec{B}] - \frac{\nabla P_e}{n_e} \quad (I.65)$$

Откуда

$$\vec{V}_D = -\frac{c T_e}{e B} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \vec{e}_y \quad (I.66)$$

где  $\vec{e}_y$  - единичный вектор вдоль оси. Если равновесие нарушено, то возмущения развиваются согласно системе уравнений двухжидкостной МГД

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\alpha m_\alpha \left( \frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \nabla \vec{V}_\alpha \right) = n_\alpha e_\alpha \left( \vec{E} + \frac{[\vec{V}_\alpha \vec{B}]}{c} \right) - \nabla P_\alpha, \\ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla n_\alpha \vec{V}_\alpha = 0, \\ \nabla \vec{E} = 4\pi \sum e_\alpha n_\alpha, \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum n_\alpha e_\alpha \vec{V}_\alpha \end{array} \right. \quad (I.67)$$

Если фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, много меньше альвеновской ( $\omega/k_z \ll V_A$ ), то волны не возмущают магнитное поле и  $\vec{E} = -\nabla \Phi$ , где  $\Phi$  - потенциал электрического поля. В случае медленных волн электроны термализуются вдоль силовых линий и подчиняются линеаризованному уравнению Больцмана

$$n = n_0 \exp(e\Phi/T_e) = n_0 (1 + e\Phi/T_e).$$

Для линейных возмущений вида  $\exp(i(\omega t - k_y Y - k_z Z))$

$$\begin{aligned} i\omega \vec{V}_i &= -i\vec{k} \Phi \frac{e}{m_i} + \frac{e}{m_i} [\vec{V}_i \vec{B}_0], \\ i\omega n_i - n_0 i\vec{k} \vec{V}_i + V_{ix} \frac{dn_0}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (I.68)$$

Откуда получаем возмущение плотности ионов

$$n_i = n_0 \left( \frac{k_y k_D}{\omega} + \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega} \right) \frac{e\Phi}{T_e}, \quad (I.69)$$

где  $c_s^2 = Te/m_i$  и учтено, что  $\omega \ll \omega_{ci}$ .

Подставляя (I.69) в уравнение Пуассона, получаем

$$\mathcal{E}(k, \omega) k^2 \varphi = 0, \quad (I.70)$$

$$\text{где } \mathcal{E}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \frac{\omega^2 - \omega_{ky} V_D - k_z^2 c_s^2}{\omega^2}$$

и  $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_i$ . Корни уравнения  $\mathcal{E}(k, \omega) = 0$

дают дисперсионное уравнение для продольных низкочастотных дрейфовых волн. Для длинноволновой моды ( $k^2 c_s^2 < \omega_{pi}^2$ ) оно имеет вид

$$\omega^2 - \omega_{ky} V_D - k_z^2 c_s^2 = 0 \quad (I.71)$$

При  $V_D \rightarrow 0$  и  $k_y = 0$  эти волны переходят в ионно-звуковые. При  $k_z \rightarrow 0$  существует два корня

$$\omega_1 = k_y V_D, \quad \omega_2 = -k_z^2 c_s^2 / k_y V_D.$$

Возмущения, соответствующие частоте

$$\omega_* = k_y V_D = -k_y \frac{cTe}{eV_0} \frac{d n_p n_0}{dx}, \quad (I.72)$$

обычно называют электронными дрейфовыми волнами.

При  $\omega/k_z \sim V_A$  происходит возмущение магнитного поля. При учёте давления ионов и  $\omega > 0$  альвеновская ветвь переходит в электронную дрейфовую волну при  $k_z \rightarrow 0$ , а при  $\omega < 0$  и  $k_z \rightarrow 0$  - в ионную дрейфовую волну с частотой  $\omega_{*i} = -\omega_* T_i / T_e$ . Если ионы имеют температуру близкую к электронной, то фазовая скорость дрейфовой волны - порядка тепловой ионной, и вступает в действие сильный механизм затухания Ландау волны на ионах, поэтому волна не может распространяться.

## Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КОСМО- ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Дисперсионные свойства волн широко используются при изучении космического пространства. Проводится зондирование космической плазмы с Земли, искусственных спутников Земли (ИСЗ) и автоматических межпланетных станций (АМС). Изучаются сигналы естественного происхождения. При изучении принимаемых сигналов необходимо учитывать их искажения при распространении в космической плазме. Рассеяние волн приводит к кажущемуся увеличению угловых размеров источников, вызывает уширение частотного спектра излучаемых волн и увеличение длительности кратковременных всплесков. Поэтому принимаемый сигнал позволяет получить информацию о характеристиках плазмы на пути его распространения. При этом применяется теория распространения волн в статистически неоднородных средах. Естественные излучения позволяют получить информацию о плазменных процессах в области их генерации и на пути распространения.

### § 1. Радиоволны в ионосфере Земли

Для радиосвязи и ионосферного зондирования применяются, в основном, волны с  $\omega \gg |\omega_{pe}|$  (в ионосфере  $f_{pe} = |\omega_{pe}| / 2\pi \leq 1$  МГц), поэтому можно не учитывать влияния магнитного поля. Можно также пренебречь тепловым движением ионов. Малы поправки, связанные с тепловым движением электронов и их столкновениями с другими частицами. Поэтому, в первом приближении,

$$N^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m_e \omega^2}, \quad (2.1)$$

где концентрация плазмы  $n$  зависит от высоты и горизонтальных координат.

При наклонном падении на ионосферный слой под углом  $\alpha_0$ , положение точки поворота луча (отражение) определяется из условия  $N^2 = \sin^2 \alpha_0$ , которое даёт критическую частоту  $f_c(\alpha)$  для данной концентрации

в слое. При  $f < f_k$  волна через слой не проходит. Если  $f_k^F$  ( $\sim 10$  МГц) соответствует максимальной концентрации слоя F ионосферы при вертикальном падении волны, то при  $f > f_k^F$  отражения не возникает. Поэтому метровые волны используются в радиоастрономии, при приеме сигналов с ИСЗ и АМС. Измеряя угол рефракции метровых волн, определяют интегральное содержание электронов в вертикальном столбе ионосферы. Измерение рассеяния позволяет определять характеристики ионосферных неоднородностей.

Декаметровые радиоволны (обычно называемые короткими КВ) используются для дальней радиосвязи и искусственного воздействия мощным наземным излучателем на ионосферу с целью изменения её параметров. При  $\lambda < 30$  м справедливо условие  $f > f_{ve}$ . В результате отражения от поверхности Земли и слоя F ионосферы (Земля и слоя E, слоев E и F) в ионосфере возможно многоскачковое распространение радиоволн. Распространение радиоволн в ионосферных волноводах используется для сверхдальней радиосвязи.

Для изучения ионосферной плазмы применяются методы радиозондирования и радиолокации с использованием источников космического радиоизлучения, наземных передатчиков и сигналов с ИСЗ. При зондировании используется эффект полного отражения от ионосферного слоя, в котором для данной  $\omega$  показатель преломления (2.1) обращается в нуль. Частота испускаемого импульса плавно изменяется, и время запаздывания (время между моментом излучения и моментом прихода волны обратно в ту же точку) фиксируется как функция частоты. Получаемая запись называется ионограммой, а аппаратура — ионосферной станцией. Ионосферная станция на Земле используется для изучения верхней части ионосферы (до максимума слоя  $F_2$ ). При установке на ИСЗ она используется для изучения верхней части ионосферы и называется станцией внешнего зондирования. При ионосферном зондировании излучается волна линейной поляризации, которая может быть представлена как суперпозиция двух нормальных волн — обыкновенной и необыкновенной поля-

ризации. Различие в распространении этих волн в результате влияния магнитного поля Земли приводит к появлению двух следов на ионограмме. Верхний след соответствует волне обыкновенной поляризации. При зондировании с ИСЗ излучаются волны непосредственно в плазму, поэтому могут возбуждаться плазменные волны, соответствующие резонансным частотам. Если ионосферная станция внешнего зондирования излучает сигнал с переменной частотой, то резонансы наблюдаются, когда частота источника почти совпадает с плазменной, электронной циклотронной и верхней гибридной частотами. Если частота зондирования постоянна, то резонанс возникает при прохождении ионосферной станцией области ионосферы с подходящими свойствами. Диффузный след на ионограмме позволяет определить параметры ионосферных неоднородностей. При ионосферном зондировании с ИСЗ применяется метод когерентных частот и метод группового запаздывания. В первом случае, параметры плазмы вычисляются по измерению разности фаз на двух частотах, во втором - разности групповых путей.

При явлении полного отражения регистрируемые радиоволны имеют такую большую интенсивность, что могут быть использованы передатчики небольшой мощности. Если используется передатчик большой мощности, то можно исследовать гораздо более слабые отражённые сигналы, возникающие при частичном отражении от ионосферы. Если характерный размер неоднородности в ионосфере много больше среднего расстояния между электронами и много меньше длины волны, то метод называется методом частичного отражения. Если отражённая волна представляет собой волну, рассеянную независимо отдельными электронами, то метод называется методом некогерентного рассеяния. В методе некогерентного рассеяния измерение интенсивности радиоволн, рассеянных хаотически движущимися электронами, позволяет определять их концентрацию. Частотный спектр рассеянных волн даёт температуру электронов (по доплеровскому уширению). Если  $\lambda > r_{De}$  (где  $r_{De}$  - дебаевский радиус), то излучение электронного облака может стать когерентным, и интенсивность рассеянных радиоволн

отражает тепловые флуктуации концентрации ионов, форма спектра рассеянных волн - температуру ионов плазмы.

§ 2. Низкочастотные электромагнитные волны в магнитосфере Земли

При  $\omega \ll \omega_{pe}$ ,  $\omega_{pe} \gg |\omega_{ve}|$ ,  $\theta$  не близком к  $\pi/2$  и  $\omega < |\omega_{ve}| \cos \theta = \omega_{\infty}^{(2)}$ , может распространяться только быстрая магнитозвуковая волна и

$$N^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (|\omega_{ve}| \cos \theta - \omega)} \quad (2.2)$$

В данном случае, говорят о квазипродольном распространении. Приближение, которое приводит к (2.2), называется свистовым, а саму волну, распространение которой возможно при

$|\omega_{ve}| \cos \theta / \omega > 1$  - свистовой (синонимы: спиральная волна, пеликон, свистовая мода). Зависимость  $\omega(k, \theta)$  для свистовой волны дается соотношением

$$\omega(k, \theta) = \frac{|\omega_{ve}| \cos \theta}{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2} c^2 k^2 \quad (2.3)$$

При  $|\omega_{ve}| \cos \theta / \omega \gg 1$

$$N^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega |\omega_{ve}| \cos \theta} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) в литературе по свистящим атмосферикам называется формулой Стори. Для (2.4)

$$\omega(k, \theta) = \frac{|\omega_{ve}| \cos \theta}{\omega_{pe}^2} c^2 k^2 \quad (2.5)$$

т.е.  $\omega$  пропорциональна  $k^2$ . Для (2.4) групповая и фазовая скорости связаны соотношением

$$V_g = V_{\phi} (4 + 4g^2 \theta)^{1/2} \quad (2.6)$$

Максимальный угол между  $\vec{V}_g$  и  $\vec{E}_0$  равен  $19^{\circ}28'$ , поэтому поток энергии свистовых сигналов не может отклоняться от силовой линии магнитного поля больше, чем на этот угол.

С генерацией волн в диапазоне свистящих атмосфериков связаны многие процессы в магнитосфере Земли. Наиболее исследованы в настоящее время свисты, возникающие при разрядах молний и распространяющиеся приблизительно вдоль силовых линий геомагнитного поля. На рис.2.1 а показана траектория свистящего атмосферика, а на рис.2.1 б - его сонограмма, т.е. зависимость частоты прихода сигнала от времени.

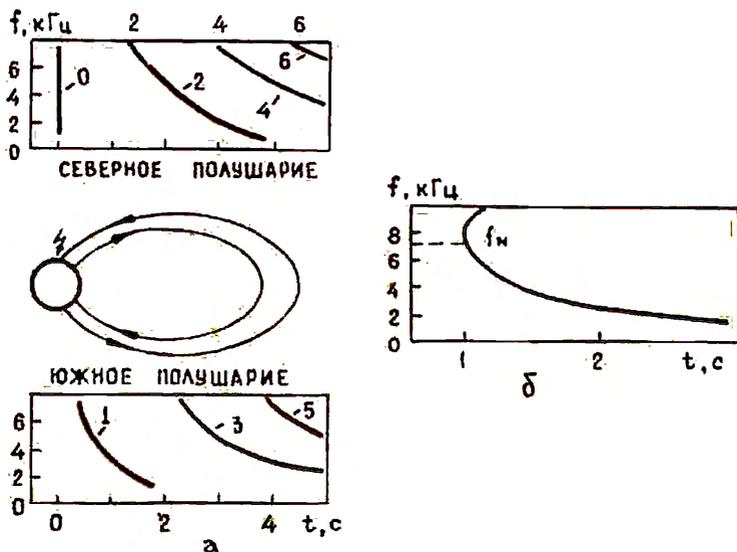


Рис.2.1. Свисты, возникающие при разрядах молний: а - сигналы наблюдаемые в сопряженных точках и траектория свистящего атмосферика, б - сонограмма свиста

Первоначально сигнал излучается на всех частотах. После прохождения через магнитосферную плазму из-за дисперсии среды сигнал воспринимается в громкоговорителе приёмника как свист с понижающейся частотой, (первоначальный

сигнал - сферик - воспринимается как треск). Если появлению свиста предшествует сферик, то такие свисты называются длинными, если нет - короткими (рис.2.1 а). Свистящие атмосферники отражаются от ионосферы в сопряженных точках в противоположных полушариях и снова появляются спустя некоторое время. Траектории движения волновых пакетов, совершающих колебания из одной геомагнитной полушары в другую, близки к магнитным силовым линиям. Такое распространение возможно при существовании в магнитосфере неоднородностей концентрации плазмы, сильно вытянутых вдоль геомагнитного поля, - магнитосферных волноводов, называемых дактами.

Естественные излучения магнитосферы в свистовом диапазоне называются ОНЧ-излучениями<sup>\*)</sup>. Регистрируются три основных типа ОНЧ-излучений: шипения - непрерывные излучения в широком диапазоне частот, продолжающиеся около часа; хоры - совокупность коротких всплесков с возрастающими частотами; дискретные излучения с длительностью ~ 1 с, с узким спектром, изменяющимся во времени. Естественные ОНЧ излучения распространяются по траекториям того же типа, что и свисты. В магнитосфере и ионосфере (кроме нижней её кромки) выполняется условие  $\omega_{pe} \gg |\omega_{se}|$ , и для интервала частот  $f \sim 20$  кГц  $\omega_{pe} \gg \omega$ , поэтому применимо приближение квазипродольного распространения. При  $\cos^2 \theta \approx 1$

$$V_g = 2c \frac{\omega^{1/2} (|\omega_{se}| - \omega)^{3/2}}{\omega_{pe} |\omega_{se}|}, \quad (2.7)$$

что при  $f < 10$  кГц даёт

$$V_g = 2c \omega^{1/2} |\omega_{se}|^{1/2} \omega_{pe}^{-1/2}, \quad (2.8)$$

и время группового запаздывания

\*) В литературе встречается более сложная классификация ОНЧ (очень низкочастотных) излучений. Собственно ОНЧ соответствует диапазон 5 ÷ 15 кГц, КНЧ (крайне низкочастотному) - 1 ÷ 5 кГц. Используется также термин УНЧ (ультранизкочастотные) излучения (3 Гц ÷ 3 кГц).

$$\Delta t_g = \int d\ell / V_g, \quad (2.9)$$

где интегрирование проводится вдоль силовой линии. Откуда получаем

$$\Delta t_g = D f^{-1/2} \quad (2.10)$$

где коэффициент  $D$  называется дисперсией и дается формулой

$$D = (8\pi)^{-1/2} \int \omega_{pe} |\omega_{be}|^{-1/2} d\ell \quad (2.11)$$

Из (2.7) следует существование  $\max V_g$ , который достигается при  $f = f_N$ .  $f_N$  называется носовой частотой. Ей соответствует наименьшее время группового запаздывания (рис.2.1. (б)). Дифференцируя (2.7) и приравнявая производную нулю, получаем  $f_N = |\omega_{be}| / 8\pi = f_{be} / 4$ . Измеряя время между приходом сигналов, носовую частоту, дисперсию сигнала можно определить параметры плазмы на пути распространения сигнала. Этот способ измерения концентрации плазмы в магнитофере Земли широко применялся до начала прямых измерений в космосе и применяется до сих пор. При определении  $f_N$  надо проводить усреднение по силовой линии. Однако, можно показать, что основной вклад в  $\Delta t_g$  при  $f = f_N$  вносят верхинные части траектории, так что  $f_N$  определяется  $f_{be}$  в вершине силовой линии.

Наряду с канализованными, в космосе наблюдаются также неканализованные свисты. Неканализованные свистящие атмосферки не могут проникнуть через ионосферу и на Земле не наблюдаются.

Появление ОНЧ-сигналов обусловлено излучением электронов в магнитосферной плазме при действии черенковского и магнитотормозного механизмов излучения. Оно связано с существованием нетепловой компоненты электронов с надтепловыми скоростями.

### § 3. Геомагнитные пульсации

При  $\omega \ll \omega_{\beta_i}$  и  $k\epsilon \ll \omega_{\beta_i}$  показатели преломления быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн в бесстолкновительной плазме даются выражениями

$$N^2 = N_A^2 = c^2 / V_A^2, \quad (2.12)$$

$$N^2 = N_A^2 / \cos^2 \theta. \quad (2.13)$$

Соответственно,

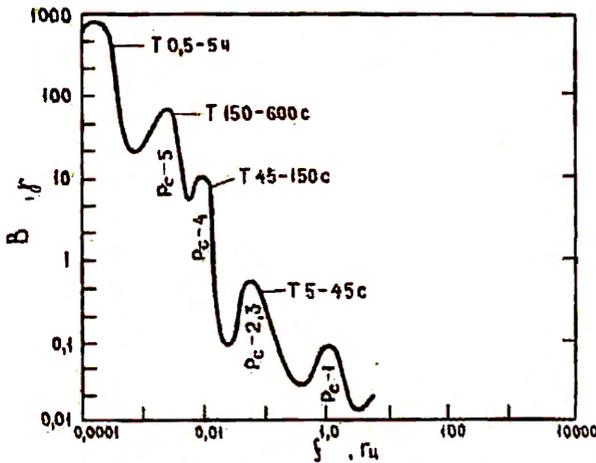
$$\omega(k, \theta) = kV_A, \quad (2.14)$$

$$\omega(k, \theta) = kV_A \cos \theta. \quad (2.15)$$

Таким образом, в случае бесстолкновительной плазмы выражения для частот быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн совпадают с полученными в магнитной гидродинамике при  $V_A \gg v_s$  в случае большой частоты соударений.

Магнитогидродинамические волны в магнитосфере Земли обычно регистрируются магнитометрами, поэтому они получили название геомагнитных пульсаций. Возмущения регистрируются в диапазоне частот от  $10^{-3}$  до 3 Гц и имеют амплитуды от 0,01 до нескольких сотен гамм ( $1 \text{ } \mu = 10^{-5} \text{ Гс}$ ). Геомагнитные пульсации разделяются на два основных типа: P<sub>c</sub> - продолжительные и довольно правильные колебания и P<sub>i</sub> - иррегулярные колебания. На рис.2.2 показана зависимость амплитуды геомагнитных пульсаций от частоты. Магнитограммы (зависимости напряженности магнитного поля от времени) ряда колебаний в диапазоне P<sub>c</sub>-I напоминают цепочку бусин, нанизанных на нить. Из-за этого сходства такие микропульсации были названы жемчужинами. Появление пульсаций P<sub>i</sub> - 2 связывается с началом возмущения магнитного поля Земли длительностью 1 - 2 часа, называемым суббурей, (магнитные возмущения на магнитограмме имеет форму бухты). Для частот  $f > 10^{-1} \text{ с}^{-1}$  при интерпретации экспериментальных данных применимо приближение геометрической оптики, при  $f \ll 10^{-1} \text{ с}^{-1}$  длина волны превышает характерные масштабы магнитосферы. Поэтому при создании теории микропульсаций наряду с использованием

Рис. 2.2. Зависимость амплитуды геомагнитных пульсаций  $B$  от их частоты  $f$  (Гц).



Периоды:

$R_E$  I - (0,2-5с),

$R_E$  2 - (5-10с),

$R_E$  3 - (10-45с),

$R_E$  4 - (45-150с),

$R_E$  5 - (150-600с),

$R_i$  I - (5-40с),

$R_i$  2 - (40-150с)

классических результатов о генерации колебаний и волн резонансными частицами, необходимо решать задачи о собственных резонансных колебаниях магнитосферы (колебания  $R_E$  3,4,5). Генерация волн в диапазоне  $R_E$  I обусловлена анизотропным характером распределения ионов внешнего радиационного пояса Земли<sup>ж)</sup> и кольцевого тока<sup>жж)</sup>.

ж) Радиационные пояса Земли возникают в результате захвата частиц в геомагнитной ловушке. Внутренний радиационный пояс находится на расстояниях (1,2-4,5)  $R_E$ , где  $R_E$  - радиус Земли, и содержит частицы с энергиями в несколько МэВ. Внешний - расположен в области (4,5-6)  $R_E$  и заполнен частицами с энергиями от 0,2 КэВ до 1 МэВ.

ж) Вокруг Земли на запад течёт ток, ослабляющий её магнитное поле. Он возникает в результате дрейфа в магнитосфере Земли ионов на запад, а электронов - на восток.

§ 4. Радиоизлучение Солнца, колебания и волны в атмосфере Солнца и солнечном ветре

Благодаря близости к Земле Солнце является единственной звездой, которую можно наблюдать с высоким пространственным разрешением в радиодиапазоне. Наблюдения радиоизлучения Солнца с Земли ограничено со стороны низких частот — ионосферой, а со стороны высоких — тропосферой. Диапазон частот космического радиоизлучения, доступного для наземного наблюдателя, простирается от  $\sim 15$  МГц до 30 ГГц. Радиоизлучение Солнца подразделяется на излучение спокойного Солнца, локальных источников и спорадическое.

Излучение спокойного Солнца опраделается тормозным механизмом (изменение скорости электронов при столкновении с ионами). Излучение частоты  $f$  возникает на уровне  $f = f_p$ , (где  $f_p = \omega_p / 2\pi$  — плазменная частота) и выше. Метровые волны генерируются в короне, дециметровые — в переходной зоне, а сантиметровые — в хромосфере. Распределение интенсивности по солнечному диску зависит от распределения электронной плотности и температуры вдоль различных траекторий лучей. Поэтому радиоизлучение спокойного Солнца служит одним из методов диагностики параметров солнечной хромосферы и короны.

Другим типом солнечного радиоизлучения является медленно меняющийся или S-компонент. S-компонент представляет собой усиленное тепловое излучение из активных областей на Солнце на сантиметровых и дециметровых длинах волн. Интенсивность S-компонента сильно коррелирует с числом солнечных пятен. Основные характеристики S-компонента объясняются тепловым циклотронным механизмом.

Классификация типов спорадического излучения связана с пространственно-временной структурой и длиной волны излучения. К основным типам спорадического радиоизлучения Солнца относятся микроволновые всплески, шумовые бури I типа, всплески II и III типов, радиоизлучения IV и V типов.

Микроволновые всплески наблюдаются в широком диапазоне

сантиметровых длин волн. Максимумы интенсивности наблюдаются примерно одновременно на различных частотах. Излучение всплесков имеет нетепловое происхождение. Его источником является гиросинхротронное излучение, генерируемое электронами в области релятивистских энергий<sup>\*)</sup>.

Шумовая буря I типа сосредоточена в полосе частот  $\sim 100$  МГц метрового диапазона. Она представляет собой короткие всплески с небольшой шириной полосы (всплески I типа), наложенные на фоновый континуум. Большинство шумовых бурь обладает близкой к 100% круговой поляризацией.

Всплески II типа или медленно дрейфующие всплески представляют собой большие возмущения в диапазоне метровых и дециметровых волн, которые дрейфуют от высоких частот к низким. Их источник расположен на больших расстояниях от Солнца (несколько десятков солнечных радиусов), и, вероятно, является бессточниковителной ударной волной, образующейся во время вспышки на Солнце. Вместе со всплесками III типа, всплески II типа на динамической спектрограмме (зависимости  $f$  от  $t$ ) часто образуют ячонную структуру.

Всплески III типа или быстродрейфующие всплески — очень распространенное явление на метровых и дециметровых длинах волн. Их продолжительность составляет от одной до нескольких секунд. Излучение III типа связывается с преобразованием плазменных волн, генерируемых пучками электронов со скоростями  $\gg 0,3 c$ , при рассеянии в электромагнитные. Разновидностями всплесков III типа являются U-образный и J-образный всплески.

Радиоизлучение (или всплеск) IV типа связано со вспышкой на Солнце. Всплеск IV типа представляет собой продолжительный радиовсплесок, включающий компоненты, соответствующие разным источникам и механизмам излучения. Микроволновый

---

\*) При  $\beta < mc^2$  излучение электрона на гармониках циклотронной частоты называется гирослучением. При  $\beta \sim mc^2$  излучение представляет собой большое число сливающихся гармоник и называется синхротронным. Промежуточный случай получил название гиросинхротронного излучения.

всплеск IV типа (IV M) вызван, видимо, тиросинхротронным излучением необыкновенной волны. Дециметровый (IV dm), вероятно, образуется за счёт рассеяния плазменных волн. Знак его поляризации соответствует обыкновенной волне. На метровых длинах различаются перемещающиеся всплески IV типа (IV mb) и стационарные (IV mA).

Всплеском U типа называется широкополосное непрерывное излучение, которое продолжается около минуты после появления всплеска III типа.

В литературе можно найти более подробную классификацию типов солнечного радиоизлучения, которая постоянно совершенствуется. Радиоизлучение Солнца несёт информацию о параметрах солнечной плазмы и происходящих на Солнце процессах. Исследование радиоизлучения спокойного Солнца позволяет получить данные о распределении концентрации и температуры солнечной короны. Излучение медленно меняющегося компонента является одним из методов определения магнитных полей в верхней хромосфере. Спектры радиовсплесков III типа являются источником сведений о потерях электронов, инжектированных из активных областей Солнца и т.д.

На Солнце генерируется широкий спектр гидромагнитных волн, при расчёте которого учитывается возможность генерации гравитационных волн и неоднородность солнечной атмосферы. Широко распространена точка зрения, согласно которой диссипация этих волн обеспечивает нагрев солнечной хромосферы и короны.

В солнечном ветре с помощью приборов, установленных на космических аппаратах, были обнаружены альвеновские и магнитозвуковые волны, ионно-звукковые и ионно-циклотронные, волны свистового диапазона и ряд других. При регистрации альвеновских волн используется свойство отсутствия флуктуаций концентрации в этих волнах и параллельность (или антипараллельность) групповой скорости и магнитного поля солнечного ветра. Альвеновские волны с  $\lambda \gg r_s$ , практически не затухают, поэтому крупномасштабные альвеновские волны могут распространяться в межпланетной среде на большие расстояния. Предполагается, что их источником является, в основном, фотосферная супергрануляция.

### Глава 3. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В КОСМОСЕ

В космосе плазма находится, как правило, в неравновесном состоянии. Изменяются в пространстве плотность, температура, напряжённость магнитного поля. На плазму влияют внешние силовые поля, которые вызывают потоки частиц, импульсы и энергии. Общий анализ устойчивости равновесной плазменной конфигурации требует рассмотрения малых отклонений параметров плазмы от равновесных. Если эти отклонения нарастают со временем, то плазма неустойчива. Так как плазма является системой с бесконечным числом степеней свободы, в ней может развиваться большое число различных неустойчивостей. Методы описания плазменных неустойчивостей, полученные при исследованиях лабораторной плазмы, широко используются в космофизике и постоянно совершенствуются в связи со спецификой космофизических объектов. Плазменные неустойчивости обычно изучаются теоретически. Результаты теории проверяются при лабораторном моделировании космофизических плазменных конфигураций.

В неустойчивой среде локализованное возмущение может развиваться двумя способами. Если нарастающий импульс удаляется от места возникновения так, что в любой фиксированной точке пространства возмущение затухает со временем, то неустойчивость называется конвективной. Если в каждой точке пространства возмущение растёт со временем, то неустойчивость называется абсолютной. Так как реальные системы имеют конечные размеры, при наличии точек отражения конвективная неустойчивость может стать абсолютной. Абсолютная неустойчивость в ограниченной системе может оказаться стабилизированной.

В литературе встречается несколько способов классификации плазменных неустойчивостей. Часто неустойчивости делятся на две большие группы: неустойчивости пространственно однородной плазмы и неустойчивости неоднородной плазмы. В случае неустойчивостей в однородной плазме отклонение от равновесия происходит в пространстве скоростей, и источником энергии являются потоки заряженных частиц или анизотро-

пия распределения по скоростям. В пространственно неоднородной плазме источники свободной энергии связаны с пространственными изменениями физических величин. Эта энергия высвобождается по мере приближения к однородному состоянию термодинамического равновесия. Некоторые неустойчивости однородной плазмы могут быть описаны магнитогидродинамическими уравнениями, большинство - требуют кинетического описания. По виду возмущения электрического поля неустойчивости разделяют на электростатические и электромагнитные. Электростатические неустойчивости - это неустойчивости, связанные со скоплением зарядов, электромагнитные - с нарастанием плотности тока. Наиболее распространенная классификация плазменных неустойчивостей связана с теоретическими схемами, применяемыми для их описания. Уравнения одножидкостной МГД позволяют исследовать МГД или гидромагнитные неустойчивости. Они связаны с макроскопическими перемещениями больших участков плазмы как целого. Если при этом не учитывается конечная проводимость плазмы, то говорят об идеальных неустойчивостях, если учитывается - о диссипативных. В рамках двухжидкостной гидродинамики изучаются дрейфовые неустойчивости, когда происходит перемещение электронов и ионов со скоростями порядка дрейфовых. Неустойчивости, для описания которых требуется решение кинетических уравнений (происходит раскачка колебаний и волн отдельными группами резонансных частиц), называются кинетическими. При прохождении через плазму сильных электромагнитных волн, в результате колебаний заряженных частиц полем волны могут развиваться параметрические неустойчивости. В космофизических объектах, как правило, регистрируется сразу несколько различных типов неустойчивостей. При этом развитие одной изменяет условия для развития другой. Нарастающие возмущения изменяют свойства плазмы и могут привести к образованию нового равновесного состояния, устойчивого по отношению к нарастанию моды, приведшей к разрушению исходного состояния. Этот процесс требует нелинейного анализа.

§ 1. МГД неустойчивости идеально проводящей плазмы

Первым шагом при исследовании устойчивости данной плазменной системы является рассмотрение в рамках идеальной магнитной гидродинамики. Пусть  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$  - бесконечно малое смещение элемента плазмы из положения равновесия и  $\vec{V} = \delta \vec{\xi} / \delta t$  - скорость такого смещения. Линеаризуя систему уравнений идеальной МГД получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p + \text{div} \rho_0 \vec{\xi} = 0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \ddot{\vec{\xi}} = -\nabla \delta p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot}(\delta \vec{B}) \times \vec{B}_0] + \frac{1}{c} [\vec{j}_0 \times \delta \vec{B}], \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p = \gamma p_0 \delta \rho / \rho_0, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{B} = \text{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}_0], \end{array} \right. \quad (3.4)$$

где  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{j}_0$  - невозмущённые значения плотности, давления, магнитного поля и тока в плазме,  $\delta \rho$ ,  $\delta p$ ,  $\delta \vec{B}$  - возмущения плотности, давления и магнитного поля. Из (3.1) следует, что

$$-\delta p = \rho_0 \text{div} \vec{\xi} + \vec{\xi} \nabla p_0, \quad (3.5)$$

а из (3.3) и (3.5)

$$\delta p = -\gamma p_0 \text{div} \vec{\xi} - \vec{\xi} \nabla p_0. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) и (3.4) в (3.2), получаем

$$\ddot{\vec{\xi}} = -\hat{k} \vec{\xi}, \quad (3.7)$$

где  $\hat{k} = -\frac{1}{\rho_0} \{ \nabla(\gamma p_0 \text{div} \vec{\xi} + \vec{\xi} \nabla p_0) \} - \frac{1}{\rho_0} \{ \frac{1}{c} [\vec{j}_0 \times \text{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}_0]] - \frac{1}{4\pi} [\vec{B}_0 \times \text{rot} \text{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}_0]] \}$ .

Уравнение (3.7) эквивалентно уравнению, описывающему малые колебания неоднородной упругой среды с обобщённым коэффициентом упругости  $\hat{k}$ . Соответствующая потенциальная энергия малых колебаний

$$\delta U = \frac{1}{2} \int \hat{\xi} \hat{K} \hat{\xi} d\vec{r}, \quad (3.8)$$

где интегрирование проводится по объёму плазмы. Если  $\delta U > 0$  для всех  $\xi \neq 0$ , то отклонения от положения равновесия не могут нарастать со временем и плазма магнитогидродинамически устойчива. Если  $\delta U$  может принимать отрицательные значения, то система неустойчива. В выражение для  $\delta U$  входят два слагаемых, соответствующие двум фигурным скобкам в выражении для  $\hat{K}$ . Первое описывает неустойчивости, связанные с изменением внутренней тепловой энергии плазмы, второе — её магнитной энергии. Данное рассмотрение получило название энергетического принципа. Если напряжённость магнитного поля убывает от границы плазмы наружу, положение границы оказывается неустойчивым, и плазма отдельными языками вытекает в область более слабого поля. Для нахождения границы устойчивости решается уравнение  $\hat{K} \hat{\xi} = 0$ . Если зависимость  $\hat{\xi}$  от времени имеет вид  $\exp(i\omega t)$ , то

$$\omega^2 \hat{\xi} = \hat{K} \hat{\xi}, \quad (3.9)$$

и

$$\omega^2 = \int \hat{\xi} \hat{K} \hat{\xi} / \int \hat{\xi}^2 d\vec{r}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что  $\omega^2$  является действительной величиной, поэтому если неустойчивость может развиваться, то она является аperiodической. Аналитически задача может быть решена только для систем с достаточно простой геометрией.

Ряд задач теории гидромагнитной устойчивости может быть сведен к случаю неустойчивости Релея — Тейлора — неустойчивости тяжёлой жидкости над лёгкой в поле тяжести. При малой деформации поверхности раздела языки тяжёлой жидкости опускаются, а лёгкой — всплывают. Найдём инкремент этой неустойчивости. Направим ось  $x$  перпендикулярно границе раздела двух жидкостей. Условие равновесия имеет вид

$$\frac{d p_0}{d x} = \rho_0 g, \quad (3.11)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. Из уравнений непрерывнос-

ти и движения получаем в случае несжимаемой жидкости связь  $\xi$  и вариации давления

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{\xi} = 0, & (3.12) \\ \rho_0 \vec{\xi} = -\nabla \delta p. & (3.13) \end{cases}$$

Для возмущений с волновым вектором  $k > 0$  вдоль  $y$  имеем

$$\begin{cases} \frac{d \tilde{\xi}_x}{dx} - ik \tilde{\xi}_y = 0, & (3.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\rho_0 \omega^2 \tilde{\xi}_x = -\frac{d \tilde{\delta p}}{dx}, & (3.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\rho_0 \omega^2 \tilde{\xi}_y = -ik \tilde{\delta p}, & (3.16) \end{cases}$$

где  $\tilde{\xi}(x, y, t) = \xi(x) \exp(i\omega t -iky)$ ;  $\delta p = \tilde{\delta p}(x) \exp(i\omega t -iky)$ .

Из (3.14) - (3.16) получаем

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}_x}{dx^2} + k^2 \tilde{\xi}_x = 0, \quad (3.17)$$

ограниченные на  $\infty$  решения которого при  $x > 0$  имеют вид  $\tilde{\xi}_x = \xi_x^0 \exp(-kx)$ . Из (3.11) имеем связь

$$\delta p = \xi_x dp/dx = \rho_0 g \xi_x. \quad (3.18)$$

Из (3.15) и (3.18) следует дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -kg. \quad (3.19)$$

данные минимые собственные значения, соответствующие экспоненциально растущим во времени решениям.

При анализе равновесия плазменного столба в магнитном поле роль силы тяжести может играть перпендикулярная к магнитному полю сила, действие которой не зависит от знака заряда. В неоднородном магнитном поле эта сила связана с кривизной силовых линий и градиентом магнитного поля. Поэтому, если  $\bar{V}_0^2$  и  $\bar{V}_1^2$  - средние квадраты скорости продольного и поперечного магнитному полю движения частиц, а  $P_0$  и  $P_1$  - давления вдоль поля и перпендикулярно ему соответственно, то

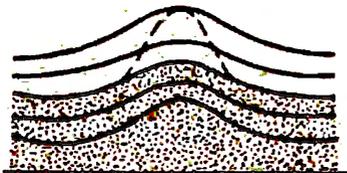
$$g \sim (\bar{V}_0^2 + \bar{V}_1^2/2)/R \sim (P_0 + P_1)/R\rho, \quad (3.20)$$

где  $R$  - радиус кривизны силовой линии магнитного поля. Из (3.20) следует, что выпуклая граница плазмы будет неустойчивой. Будучи диамагнетиком, плазма стремится распространяться в сторону более слабого магнитного поля.

Аналогия между неустойчивостью Релая - Тейлора и неустойчивостью резкой границы плазменной конфигурации, удерживаемой магнитным полем. (в данном случае, магнитное поле играет роль невесомой жидкости с давлением  $B^2/8\pi$ ), относится к возмущениям, вытянутым вдоль магнитного поля, (магнитное поле при проведении аналогии надо направить по оси  $z$ ). В силу вмороженности, образование плазменного языка поперек магнитных силовых линий может не приводить к неустойчивости границы. При этом надо отдельно рассматривать плазму высокого давления  $\beta \sim 1$  ( $\beta = 8\pi R/B^2$ ) и плазму низкого давления  $\beta \ll 1$ .

Если  $\beta \sim 1$ , образование отдельного языка приводит к искривлению силовых линий с увеличением магнитной энергии. Соответствующая работа производится расширяющейся плазмой благодаря её тепловой энергии. Данная неустойчивость проявляется только в тех направлениях, в которых магнитное поле убывает от границы плазмы, и имеет вид локальных деформаций типа "надувающихся пузырей". Поэтому она получила название баллонной моды. На рис.3.1 показан вид возмущения границ плазмы и магнитного поля при развитии баллонной моды.

Рис.3.1. Развитие возмущений при баллонной неустойчивости



Если  $\beta \ll 1$ , возмущения плазмы не могут вызвать искажений формы силовых линий. Локальные возмущения типа языков не развиваются, и могут развиваться только возмущения, несущие характер перестановки целых систем трубок. Рассмотрим

магнитную силовую трубку, заполненную плазмой с  $\beta \ll 1$ . Возможными являются такие движения трубки, при которых магнитное поле остается неизменным. Её удельный объём, т.е. объём, соответствующий единичному магнитному потоку, равен  $W = \int dl/B$ . В процессе перемещения трубки

( $-pW$ ) играет роль, аналогичную потенциальной энергии. Если  $p = p(W)$ , то плазма находится в состоянии равновесия. Рассмотрим смещение плазмы на малое расстояние, при котором она раздвигает остальные трубки.

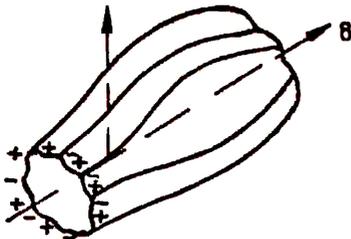
В результате адиабатического расширения давление в трубке изменится на  $dp = -\gamma p \delta W/W$ . Давление в окружающих трубках равно  $p(W + \delta W) = p + \frac{dp}{dW} dW$ . Если

$-\gamma p \frac{\delta W}{W} < \frac{dp}{dW} dW$ , то трубка будет вытесняться обратно в сторону равновесия, и плазма будет устойчива. Если выполняется обратное соотношение, развиваются возмущения, имеющие вид вытянутых вдоль магнитного поля желобков, и неустойчивость называется желобковой. Т.е. условие возникновения желобковой неустойчивости имеет вид

$$\frac{dp}{dW} < -\frac{\gamma p}{W} \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует, что плазма, находящаяся в области  $\min B$ , (в лабораторной плазме такая область называется магнитной ямой), устойчива по отношению к развитию желобковых возмущений. Аналогичная неустойчивость возникает, если жидкость подогревается снизу, поэтому

Рис. 3.2. Желобковые возмущения плазмы



желобковая неустойчивость часто называется конвективной, а так как силовые трубки меняются местами - перестановочной. При развитии желобковых возмущений происходит рифление поверхности плазмы вдоль силовых линий (рис.3.2). В лабораторной плазме для борьбы с желобковой неустойчивостью используются магнитные ловушки с  $\min B$ , в которых магнитное поле нарастает от центра к периферии. Многие явления в космической плазме можно связать с развитием желобковых возмущений.

Другой хорошо изученной МГД неустойчивостью является винтовая. В данном случае, энергетическим резервуаром служит энергия магнитного поля. На рис.3.3 показано развитие винтовых возмущений в плазменном шнуре с током в продольном магнитном поле. В начальный момент силовые линии магнитного

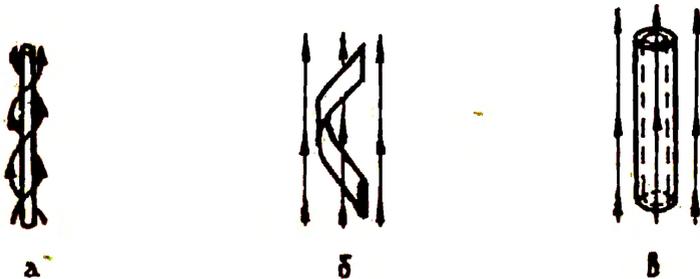


Рис.3.3. Эволюция плазменного шнура при развитии винтовых возмущений. а -  $t=0$ , б - образование винтовой ленты, в - образование трубчатой конфигурации; стрелки - магнитные силовые линии

поля являются винтовыми. Анализ показывает, что возмущения также являются винтовыми (шнур начинает извиваться), и возмущение, имеющее максимальной инкремент, совпадает с шагом силовой линии на границе шнура. Винтовые силовые линии магнитного поля (рис.3.3 а) сокращаются и деформи-

руются таким образом, что уменьшается их кривизна. В результате, силовые линии магнитного поля могут распрямиться, а плазменный шнур-принять вид ленты (рис.3.3 б), и, в конечном счёте, плазменной трубки (рис.3.3 в). Малые винтовые деформации обычно описываются выражением вида  $\Psi \sim \exp[i(m\varphi - kz)]$ , где ось  $z$  направлена вдоль шнура,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\varphi$  - азимутальный угол.  $m=1$  соответствует однозаходному винту,  $m=2$  - двухзаходному и т.д.. В равновесии составляющая азимутального магнитного поля отсутствует, и энергия поля принимает минимально возможные значения. Так как шнур обладает заметной кинетической энергией, весь процесс будет носить колебательный характер. Если шнур имеет конечную длину  $L$ , то при  $m=1$  устойчивы возмущения с

$$V_\varphi / V_z > 2\pi\alpha / L, \quad (3.22)$$

где  $\alpha$  - радиус пинча. Соотношение (3.22) называется критерием Крускала - Шавранова. Для устойчивости шаг силовой линии должен быть больше  $L$ , т.е. плазменный пинч устойчив только при наличии достаточно большого продольного поля.

Как в лабораторной, так и в космической плазме, плазменные ловушки могут обладать проводящими торцами (например, ионосфера Земли) и широм, т.е. поворотом силовых линий равновесного магнитного поля. При этом, возникает возможность стабилизации МГД неустойчивостей. Если силовые линии вмерзены на своих концах, невозможно переставить две трубки без закручивания силовых линий и соответствующего увеличения магнитной энергии. Шир в плазме возникает, если  $\int_0^L \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \neq 0$ . Мерой шира служит угол поворота силовой линии на длине неоднородности плазмы

$$\theta = (4\pi/c) L \int_0^L \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} / B_0^2. \quad (3.23)$$

При наличии шира невозможно развитие желобковой неустойчивости из-за того, что шаг силовой линии на каждой магнитной поверхности различен и для возникновения неустойчивости надо исказить магнитное поле. Размытие границ плазмы также приводит к стабилизации МГД неустойчивостей.

§ 2. Диссипативные неустойчивости и тинг-мода

МГД неустойчивости в случае  $\zeta = \infty$  называются диссипативными. Их необходимо рассматривать, когда подход идеальной МГД говорит об устойчивости данной плазменной конфигурации.

Среди диссипативных неустойчивостей выделяются гравитационная и токово - конвективная, источником для которых является энергия теплового расширения плазмы, а магнитное поле почти не возмущается, т.е.  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . Если в случае  $\zeta = \infty$  развиваются только конвективные деформации, ориентированные строго вдоль  $\vec{B}_0$ , то при  $\zeta \neq \infty$  появляется возможность распространения косых возмущений с конечным  $K_z$ .

В случае гравитационной неустойчивости эффект кривизны магнитного поля, также как и в желобковой, учитывается введением эффективной силы тяжести (откуда и происходит название гравитационная). Гравитационные возмущения развиваются, если в трубке нет продольного тока. Дисперсионное соотношение, получаемое аналогично (3.19), с учётом конечной проводимости имеет вид

$$\omega^2 + i\omega_s \omega + \omega_g^2 = 0, \quad (3.24)$$

где  $\omega_s = \omega_{B_1} \omega_{B_e} \tau_{ei} K_z^2 / K_y^2$ ,  $\omega_g^2 = -g n_0' dn_0 / dx$ ,

и  $g$  даётся соотношением (3.20). При  $\omega_s = 0$  (3.24)

даёт инкремент желобковой неустойчивости  $\gamma = \omega_g$ .

В сильно замагниченной плазме ( $\omega_{B_e} \tau_{ei} \gg 1$ )

$\omega_s \gg \omega_g$  и  $\gamma = -i\omega \approx \omega_g^2 / \omega_s \ll \omega_g$ . Косые возмущения с не очень малым  $K_z / K_y$  нельзя стабилизировать при помощи шира.

Если в равновесном состоянии по плазме течёт ток вдоль магнитного поля, и в направлении, перпендикулярном  $\vec{B}_0$ , существует градиент температуры, то может возникнуть токово - конвективная неустойчивость. Также как в случае гравитационной неустойчивости, в плазме развиваются косые деформации, но главную роль играют не возмущения плотности, а воз-



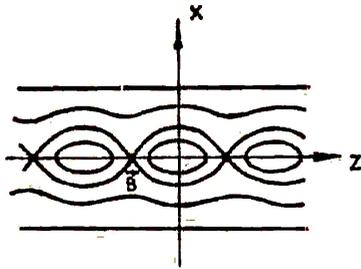


Рис.3.4. Конфигурация магнитного поля в тиринг - моде  
 слипания нитей намного превосходит увеличение энергии при  
 создании возмущенного магнитного поля. Это позволяет гово-  
 рить об отрицательной энергии тиринг - моды. Любая дисси-  
 пация энергии тиринг - моды должна приводить к увеличению  
 её амплитуды. В плазме со столкновениями такая диссипация  
 обусловлена конечной  $\epsilon$ , а в бесстолкновительной - основ-  
 ную роль играют процессы бесстолкновительной диссипации.  
 В последнем случае необходимо учитывать черенковское взаимо-  
 действие частиц с волнами вблизи узкой окрестности плос-  
 кости  $x = 0$  при выполнении условия резонанса  $\omega = \vec{k}\vec{V}$ .  
 Для конфигурации, описываемой равновесием Харриса ( (4.22)  
 ч.1 ) область черенковского взаимодействия:

$$|x| < (r_{b\alpha} L)^{1/2}, \quad (3.26)$$

где  $r_{b\alpha}$  - ларморовский радиус частиц сорта  $\alpha$ . Двумер-  
 ное возмущение векторного потенциала  $A_{1y}(x, z, t) =$   
 $\tilde{A}_1(x) \exp(i\omega t - ikz)$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} - k^2 A_{1y} = -\frac{4\pi}{c} \left( \frac{\partial j_{\alpha z}}{\partial A_0} A_{1y} + j_{\alpha z} \right), \quad (3.27)$$

где  $A_{1y} dj_0 / dA_0$  - адиабатическая часть возмущения тока в слое,  $j_1$  - неадиабатическая. Для распределения поля вида (4.23) ч. I

$$j_0(x) = cV_0 / 4\pi L c h^2(x/L). \quad (3.28)$$

Поэтому  $dj_0/dA_0 = -2j_0/V_0L$ . Откуда получаем

$$\frac{d^2 \tilde{A}_1}{dx^2} + \left[ -k^2 + \frac{2}{L^2 c h^2(x/L)} \right] \tilde{A}_1 = -\frac{4\pi}{c} \tilde{j}_1, \quad (3.29)$$

где  $j_1(x, z, t) = \tilde{j}_1(x) \exp(i\omega t - ikz)$

(3.29) имеет вид уравнения Шредингера с эффективным потенциалом, показанным на рис.3.5, где  $V_0(x) = -2/L^2 c h^2(x/L)$  - потенциальная яма Теллера и  $V_{1e}$  определяется черенковским взаимодействием в узком слое (3.26). На рис.3.5 также показано решение уравнения (3.29) в зависимости от  $x$ .

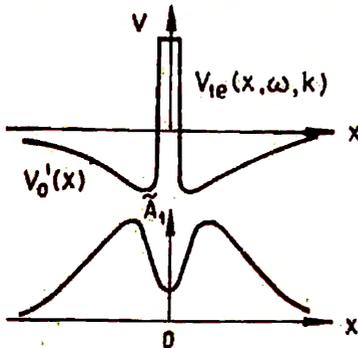


Рис.3.5. Эффективный потенциал уравнения типа Шредингера и форма его решения для возмущения векторного потенциала  $\tilde{A}_1(x)$

На границе раздела солнечного ветра и магнитосферы Земли происходит поворот поля на конечный угол, а не изменение направления поля на противоположное. В данном случае необходимо учитывать шир магнитного поля и возмущение электростатического потенциала. Конфигурация магнитного поля на рис.3.4 близка к существующей в хвосте магнитосферы Земли и может реализоваться в атмосфере Солнца. В хвосте магнитосферы существенно наличие нормальной компоненты  $V_n \bar{e}_x$ . В токовом слое, которое меняет характер движения частиц. Если  $V_n/V_0 > (\tau_{ve}/L)^{1/2}$ , то электроны замагничены, и диссипация энергии тиринг - моды происходит в

результате черенковского взаимодействия с ионами, развивается ионная тиринг-мода. Её инкремент в  $(m_i/m_e)^{1/4}$  раз больше инкремента электронной.

### § 3. Дрейфовые неустойчивости

При наличии в плазме градиентов плотности или температуры могут развиваться дрейфовые неустойчивости. Если диссипация энергии волн обусловлена столкновениями, рассмотрение таких неустойчивостей можно проводить в рамках двухжидкостной магнитной гидродинамики, если диссипация обусловлена черенковским и циклотронным взаимодействием волн с частицами - требуется кинетическое рассмотрение. Без учёта силы трения между электронами и ионами дрейфовые волны представляют собой гармонические колебания, распространяющиеся без затухания или нарастания. Учёт силы трения приводит к появлению мнимой добавки к частоте и раскачке дрейфовых волн. Единственным условием раскачки является неоднородность распределения плотности или температуры, поэтому для таких неустойчивостей применяется термин универсальные.

Рассмотрим электростатическую дрейфовую неустойчивость в случае, когда  $T = \text{const}$  и имеется  $n_0 = n_0(x)$ ,

$\vec{B}_0 = \text{const}$ . Систему уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики, пренебрегая инерцией электронов, запишем в виде

$$\begin{cases} 0 = -\nabla p_e - en\vec{E} - \frac{en}{c} [\vec{V}_e, \vec{B}_0] + \frac{m_e}{c} \frac{\vec{j}}{\tau_{ei}}, & (3.30) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_i n d\vec{V}_i/dt = -\nabla p + [\vec{j}; \vec{B}_0] / c, & (3.31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial n / \partial t + \text{div} n \vec{V}_i = 0, & (3.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div} \vec{j} = 0, & (3.33) \end{cases}$$

где  $\vec{E} = -\nabla \Phi$ , и будем предполагать, что движение ионов, в первом приближении, определяется электрическим дрейфом

$$\vec{V}_i = c [\vec{B}_0, \nabla \Phi] / B_0^2. \quad (3.34)$$

Пусть в слое плазмы возникло малое возмущение в виде плоской волны  $\exp\{i(\omega t - k_y y - k_z z)\}$ , ( $n = n_0 + n_1$ ,  $p = p_0 + p_1$ ,  $\vec{V}_0 = 0$ ,  $\vec{V}_1 = \vec{V}_1$ ). Из (3.33) получаем

$$j_{1z} = -i \operatorname{div} j_{1\perp} / k_z. \quad (3.35)$$

Умножая (3.31) векторно на  $\vec{B}_0$ , будем иметь

$$j_{1\perp} = c[\vec{B}_0 \times (in_0 \omega m_i \vec{V}_1 + \nabla p_1)] / B_0^2. \quad (3.36)$$

Взяв дивергенцию от (3.36) и учитывая, что  $\operatorname{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}$  и  $\operatorname{rot} \nabla p_1 = \operatorname{rot} \vec{B}_0 = 0$ , получаем

$$\operatorname{div} \vec{j}_{1\perp} = -i \omega m_i c \vec{B}_0 \operatorname{rot} n_0 \vec{V}_1 / B_0^2, \quad (3.37)$$

Из (3.34) следует, что  $\vec{V}_1 = ik_y c \Psi \vec{i}_x / B_0$ , поэтому

$$\vec{B}_0 \operatorname{rot} n_0(x) \vec{V}_1 = k_y^2 c n_0 \Psi \quad \text{и} \\ j_{1z} = \omega m_i c^2 k_y^2 n_0 \Psi / B_0^2 k_z. \quad (3.38)$$

Из (3.32) получаем

$$i \omega n_1 + \frac{c}{B_0} ik_y y \frac{dn_0}{dx} = 0. \quad (3.39)$$

Из (3.30) имеем в проекции на ось z

$$-ik_z n_1 T_e = -en_0 ik_z \Psi + \frac{m_e}{e T_{ei}} j_{1z}, \quad (3.40)$$

поэтому

$$\frac{ik_y k_z}{\omega} \frac{c T_e}{B_0} \frac{dn_0}{dx} \Psi = -en_0 ik_z \Psi + \\ + \frac{m_e}{e T_{ei}} \frac{m_i c^2}{B_0^2} k_y^2 n_0 \Psi. \quad (3.41)$$

Откуда получаем

$$i \frac{k_y c T_e}{\omega e B_0} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} = -i + \frac{m_e m_i c^2}{e^2 B_0^2 T_{ei}} \frac{k_y^2}{k_z^2 \omega}. \quad (3.42)$$

Обозначая через  $\omega_B = k_z^2 \omega_{Be} \omega_{Bi} T_{ei} / k_y^2$ ,

и учитывая, что  $\omega_k = -k_y c T_e (n_0^{-1} dn_0 / dx) / e B_0$ ,

получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - i\omega_s \omega + i\omega_s \omega_* = 0. \quad (3.43)$$

При малых  $\tau_{ei}$ , таких, что  $\omega_s \ll \omega_*$

$$\omega \approx \pm i(\omega_s \omega_*)^{1/2}, \quad (3.44)$$

и неустойчивость называется дрейфово - диссипативной.

При  $\omega_s \gg \omega_*$

$$\omega \approx \omega_* + i\omega_*^2 / \omega_s. \quad (3.45)$$

С ростом температуры плазмы инкремент неустойчивости падает. Шир приводит к увеличению эффективной величины  $k_{||}$ , а, следовательно, и  $\omega_s$ , т.е. стабилизирует неустойчивость.

Неустойчивость, обусловленная градиентом температуры, называется температурно - дрейфовой. В столкновительной плазме она имеет место, если  $\eta = d \ln T / d \ln n > 2/3$

В бесстолкновительной - при  $\eta > 2$  для  $k_y r_{e1} \ll 1$  и  $\eta > 1$  для  $k_y r_{e1} \sim 1$ . При  $\omega \approx n \omega_{e1}$  в неоднородной плазме могут развиваться дрейфово - циклотронные неустойчивости. При плазменном параметре  $\beta > m_e / m_i$  надо учитывать непотенциальный характер дрейфовых возмущений; в неоднородной плазме может раскачиваться дрейфово - альвеновская неустойчивость и ряд других дрейфовых неустойчивостей.

#### § 4. Гидродинамические неустойчивости одноральной плазмы

Однородная плазма, заполняющая всё пространство, может быть неустойчивой, если функция распределения по скоростям отличается от максвелловской. Ряд неустойчивостей такой плазмы может быть изучен в рамках магнитной гидродинамики.

В плазме с неоднородным профилем скорости может развиваться неустойчивость скользящих потоков или неустойчивость Кельвина - Гельмгольца. Рассмотрим эту неустойчивость в простейшем случае потенциальных возмущений ( $\vec{E} = -\nabla \Psi$ )

плазмы без магнитного поля, в которой холодные электроны движутся вдоль оси  $z$  со скоростью  $V_0 = V_0(x)$ , а ионы неподвижны. Неустойчивость можно рассматривать в рамках двухжидкостной гидродинамики, система уравнений которой в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{V}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{e}{m} \nabla \varphi, \\ \Delta \varphi = -4\pi e(n - n_0), \end{cases} \quad (3.46)$$

где  $n_0$  - невозмущенная плотность. В линейном приближении

$$n = n_0 + n_1, \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1, \quad |n_1| \ll n_0, \quad |\vec{V}_1| \ll |\vec{V}_0|$$

Рассматривая возмущения вида  $\exp(i(\omega t - k_y y - k_z z))$ , получаем

$$\begin{cases} i\omega n_1 - ik_z V_0 n_1 - ik_z V_{1z} n_0 - ik_y V_{1y} n_0 - \frac{\partial}{\partial x}(n_0 V_{1x}) = 0, \\ i(\omega - V_0 k_z) V_{1x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ i(\omega - V_0 k_z) V_{1y} = i\frac{e}{m} V_y \varphi, \\ i(\omega - V_0 k_z) V_{1z} + V_{1x} \frac{dV_0}{dx} = i\frac{e}{m} k_z \varphi, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \varphi = 4\pi e n_1, \end{cases} \quad (3.47)$$

Система (3.47) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - (k_z^2 + k_y^2) \varepsilon_0 \varphi = 0, \quad (3.48)$$

где

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V_0)^2}.$$

Рассмотрим случай, когда  $n_0 = \text{const}$ , а

$$V_0(x) = \begin{cases} V_1 & x < 0 \\ V_2 & x > 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Скачок скорости происходит в узком слое толщины  $\alpha$ , малой по сравнению с поперечным размером потока. Вдали от слоя

$\Psi$  спадает по экспоненте

$$\Psi(x) = \Psi_0 \exp(-\alpha|x|), \quad (3.50)$$

где  $\alpha = (\kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}$  и непрерывно при  $x=0$ ,  $\alpha a \ll 1$ .

Учитывая непрерывность  $\Psi$  в переходном слое и интегрируя (3.48) по слою толщиной  $\delta$ , где  $\alpha \ll \delta \ll \alpha^{-1}$

и пренебрегая членами порядка  $\alpha a$ , получаем

$$\left( \epsilon_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \Big|_{-\delta}^{\delta} = 0. \quad (3.51)$$

Из (3.51) и (3.50) следует, что  $\epsilon_0(\delta) = \epsilon_0(-\delta)$ , поэтому

$$2 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \kappa_z V_1)^2} - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \kappa_z V_2)^2} = 0. \quad (3.52)$$

Уравнение (3.52) имеет четыре корня  $\omega(\kappa)$ . Два из них действительные, два других — комплексные (этот результат можно получить анализируя (3.52) графически). Неустойчивость возникает, если длина волны возмущения достаточно велика и

$$\kappa_z < 2\omega_p / |V_2 - V_1|. \quad (3.53)$$

Максимальный инкремент соответствует

$$\kappa_z = (3/2)^{1/2} \omega_p / |V_2 - V_1|.$$

Он равен

$$\gamma_{\max} = 2^{-3/2} \omega_p \quad (3.54)$$

Если давление плазмы анизотропно, то в ней может развиваться планговая неустойчивость. Найдём её порог и инкремент в приближении Чу-Гольдбергера-Лоу (гл. II § 9 ч. I). Так как

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{div} P + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}], \quad (3.55)$$

где  $P = p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{h} \vec{h}$ ,  $\vec{h} = \vec{B} / |\vec{B}|$ ,  $I$  — единичный тензор,

$$\operatorname{div} P = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\vec{h} \nabla) \vec{h} \operatorname{div} \vec{h} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \quad (3.56)$$

Для низкочастотных возмущений с  $\omega \ll \omega_{B1}$  получаем

$$\omega^2 = \frac{\kappa^2}{\rho_0} \left( \frac{B^2}{8\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right). \quad (3.57)$$

Аперриодическая неустойчивость возникает, если правая часть (3.57) меньше нуля, т.е.

$$R_{||} > R_1 + V^2/4\pi \quad (3.58)$$

Данная неустойчивость получила своё название по аналогии с поведением шланга, по которому подаётся мощная струя воды.

Большой класс плазменных неустойчивостей составляют пучковые неустойчивости. Рассмотрим гидродинамическую пучковую неустойчивость, когда пучок плотности  $n_1 = \alpha n_0$  проходит через плазму плотности  $n_0$  со скоростью  $\vec{V}_0$  при  $\vec{B}_0 = 0$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $\vec{B}_0 \neq 0$  и  $\vec{V}_0 \parallel \vec{B}_0$ . Пренебрегая ионным вкладом (при рассмотрении высокочастотных неустойчивостей ионы можно считать неподвижными) и модифицируя (1.24) с учётом того, что вклад пучка вместо  $\omega$  будет содержать

$\omega - k_{||} V_0$ , получаем

$$\epsilon_{||} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\alpha \omega_{pe}^2}{(\omega - k_{||} V_0)^2} = 0. \quad (3.59)$$

При  $k_{||} \gg \omega_{pe}/V_0$  все решения (3.59) вещественны.

Неустойчивость начинается при  $k_{||} < K_{zp}$ , при котором (3.59) имеет двойной вещественный корень, поэтому на границе устойчивости  $\epsilon_{||}(\omega_{zp}, K_{zp}) = 0$ ;  $(\frac{\partial \epsilon_{||}}{\partial \omega})_{\omega=\omega_{zp}, k_{||}=K_{zp}} = 0$ .

Откуда

$$K_{zp} = \frac{\omega_{pe}}{V_0} (1 + \alpha^{1/3})^{3/2}, \quad (3.60)$$

$$\omega_{zp} = \omega_{pe} (1 + \alpha^{1/3})^{1/2}, \quad (3.61)$$

Коротковолновые возмущения с  $k > K_{zp}$  устойчивы.

Максимальный инкремент имеет место при выполнении резонансного условия  $k_{||} V_0 = \omega_{pe}$ . Он равен

$$\Gamma_{\max} = \omega_{pe} (3^{1/2} 2^{-1/3}) \alpha^{1/3} \quad (3.62)$$

Данное приближение применимо при малом тепловом разбросе пучка  $\Delta V_0 \ll \Gamma/k_{||}$ . Из (3.62) следует, что тепловой

разброс пучка мал, если

$$\Delta V_0 / V_0 \ll \alpha^{1/3}. \quad (3.63)$$

Аналогично рассматривается случай, когда через плазму проходит несколько пучков. В реальном эксперименте пучок ограничен вдоль своей длины катодом и расположенным на расстоянии  $L$  анодом. Если потенциалы катода и анода фиксированы (задача Пирса), то при  $\omega_{pe} > \pi V_0 / L$  возникает неустойчивость. Если разброс частиц пучка не удовлетворяет (3.63), необходимо кинетическое рассмотрение.

Если холодные электроны плазмы движутся относительно холодных ионов со скоростью  $V_0$ , т.е. в плазме имеется ток, то может развиваться бенемановская неустойчивость. Рассматривая случай  $\vec{E}_0 = 0$  (либо  $\vec{V}_0 \parallel \vec{E}_0$ ) и учитывая в (I.24) вклад ионов, получаем

$$\xi = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_{||} V_0)^2} = 0. \quad (3.64)$$

Анализ (3.64) можно провести аналогично анализу (3.58). Максимальный инкремент достигается при  $k_{||} = \omega_{pe} / V_0$ . Он равен

$$\gamma = (3^{1/2} / 2^{4/3}) \omega_{pi}^{2/3} \omega_{pe}^{1/3}. \quad (3.65)$$

Рассмотренные в данном параграфе неустойчивости развиваются быстро и изменяют состояние плазмы настолько, что требуется кинетическое рассмотрение.

### § 5. Кинетические неустойчивости

Резонансное взаимодействие частиц с колебаниями и волнами приводит к кинетическим неустойчивостям. Собственные частоты и инкременты таких неустойчивостей находят, анализируя компоненты  $\xi_{ij}$  тензора диэлектрической проницаемости (I.21). Среди кинетических неустойчивостей однородной плазмы можно выделить пучковые, токовые и анизотропные. Аналитическое рассмотрение может быть проведено для сдвинутого максвелловского распределения  $f_0 \sim \exp[-m(\vec{V} - \vec{V}_0)^2 / 2T]$  (пучковые и токовые неустойчивости) и анизотропных распре-

деления вида

$$f_0 = \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{T_{\perp} T_{\parallel}} \exp \left( -\frac{mV_{\perp}^2}{2T_{\perp}} - \frac{mV_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} \right), \quad (3.66)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi V_{\perp}} \delta(V_{\perp} - V_{\perp 0}) \delta(V_{\parallel}). \quad (3.67)$$

Для анализа устойчивости реальных функций распределения проводится, как правило, численный анализ. Рассмотрим несколько примеров кинетических неустойчивостей.

На рис. 3.6 показан вид функции распределения плазмы с размытым пучком. Ленгмюровские волны генерируются при  $\partial f_{c0} / \partial V > 0$ . Инкремент неустойчивости при  $\vec{E}_0 = 0$  находится по формуле (I.53). Он равен

$$\gamma = \frac{\pi \omega_{pe}^5}{2 n_0 k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial V} \right|_{v = \omega_{pe}/k}. \quad (3.68)$$

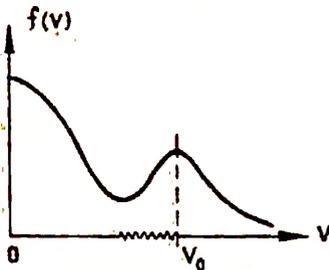


Рис.3.6. Зависимость функции распределения от скорости при наличии размытого пучка. Волнистая линия - область генерации ленгмюровских колебаний

Если в области генерации ленгмюровских волн можно пренебречь вкладом плазменных частиц в функцию распределения, то в этой области  $f_0 \sim \alpha n_0 / (\Delta V_0)^2$ , где  $\alpha$  - отношение плотности частиц пучка к плотности плазмы,  $\Delta V_0$  - разброс частиц пучка по скоростям. Поэтому

$$\gamma \sim \omega_{pe} \alpha (V_0 / \Delta V_0)^2. \quad (3.69)$$

Среди кинетических токовых неустойчивостей наиболее изучена ионно-звуковая, развивающаяся при  $\vec{E}_0 = 0$  и  $T_{\perp} \ll T_{\parallel}$ , когда электроны движутся относительно ионов с токовой скоростью  $V_0 = -j / en_0$ , (где  $j$  - плотность тока). Для колебаний с  $k^2 r_D^2 \ll 1$

инкремент этой неустойчивости равен

$$\gamma = (\pi m_i / 8 T_e) \omega (V_0 \cos \theta - \frac{\omega}{k}), \quad (3.70)$$

где  $\omega = k (T_e / m_i)^{1/2}$  ;  $\theta$  - угол между  $\vec{V}_0$  и  $\vec{k}$  .

Ионно-звуковая неустойчивость развивается, когда направленная скорость электронов превышает скорость звука. В космической плазме часто реализуются условия, когда ток течёт вдоль  $\vec{B}_0$  . Для  $k_{\perp} = 0$  магнитное поле не влияет на развитие неустойчивости. При  $\vec{B}_0 \neq 0$  может развиваться ионно - циклотронная неустойчивость, при которой действительная часть частоты близка к ионной циклотронной. Порог этой неустойчивости меньше порога ионно - звуковой, она развивается при произвольном  $T_i / T_e$  .

В космической плазме часто возникает анизотропия распределения частиц по скоростям. При адиабатическом сжатии (расширении), в результате медленного увеличения (уменьшения) поля  $|\vec{B}_0|$  растёт (уменьшается) поперечная энергия частиц, и функция распределения становится анизотропной. Анизотропия возникает при свободном распрещении плазмы вдоль  $\vec{B}_0$  и инжекции поперёк  $\vec{B}_0$  . В адиабатических ловушках, примером которой является внутренняя часть магнитосферы Земли, функция распределения анизотропна в силу существования конуса потерь. На рис. 3.7 показана зависимость функции распределения от поперечной скорости при наличии конуса потерь.

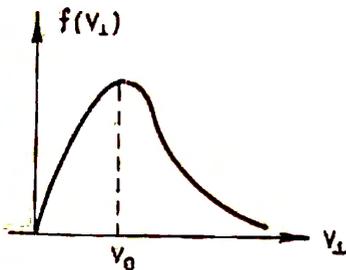


Рис. 3.7. Зависимость функции распределения от поперечной скорости при наличии конуса потерь

Существование анизотропных функций распределения приводит к возникновению различных кинетических неустойчивостей, инкременты которых при данных  $\delta f_0 / \delta v_{||}$  ,  $\delta f_0 / \delta v_{\perp}$  вычисляются по формулам (I.11), (I.21), (I.23). Знаки инкрементов определяются интегралами в сумме правой части (I.23). Получаемые выражения обычно имеют довольно громоздкий вид. Их анализ упрощается, если известна ориентация волнового вектора (например, в случае наличия дактов) и рассматривается определённый частотный диапазон. Свойства генерируемых колебаний и волны в значительной степени определяются плазменным параметром  $\beta = 8\pi r / B_0^2$  .

Если  $\beta \ll 1$  , возмущения в плазме слишком слабы, чтобы изменить магнитное поле, и развиваются электростатические неустойчивости. При малом, но конечном  $\beta$  возможно развитие электромагнитных неустойчивостей. В плазме с малым  $\beta$  распределение типа изображённого на рис.3.7 приводит к развитию электростатической неустойчивости с  $K_{||} \ll K_{\perp}$  . В случае горячих ионов неустойчивы электростатические колебания на гармониках ионной gyroчастоты  $n\omega_{ci}$  ; вплоть до частоты нижнего гибридного резонанса. В случае горячих электронов возбуждаются электростатические колебания в области электронных циклотронных гармоник  $n|\omega_{ce}|$  и верхнего гибридного резонанса. Наблюдаемая на эксперименте генерация обыкновенной электромагнитной волны при  $\omega \approx \omega_{ci}$  и необыкновенной электромагнитной волны при  $\omega \approx |\omega_{ce}|$  с  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$  соответствует циклотронной неустойчивости.

Для распределения вида (3.66) критерий неустойчивости имеет вид

$$\frac{T_{\perp}^{\alpha}}{T_{||}^{\alpha}} - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\perp}^{\alpha}}{T_{||}^{\alpha}} \right) < 0 \quad (3.71)$$

Для обыкновенной волны циклотронная неустойчивость имеет место при  $T_{\perp}^e < T_{||}^e$  или  $T_{||}^i < T_{\perp}^i$  , для необыкновенной - при обратном соотношении между температурами. Для распределения с конусом потерь ионы раскачивают обыкновенную волну, а электроны - необыкновенную. Изучение циклот-

ронной неустойчивости позволило объяснить многие характеристики ОНЧ излучений и гидромагнитных пульсаций в магнитосфере Земли. В космофизических приложениях при рассмотрении развития циклотронной неустойчивости необходим учёт наличия холодной фоновой плазмы. При  $(\omega_{pe}/|\omega_{ce}|) \rightarrow 0$  развиваются электромагнитные неустойчивости на циклотронных резонансах. При этом, необходим учёт релятивистских эффектов (зависимость гирочастоты от энергии частицы). Данная неустойчивость привлекается при объяснении радиоизлучения планет.

В неоднородной плазме картина усложняется. Могут развиваться пучково - дрейфовая, конусно - дрейфовая и другие кинетические неустойчивости. Характер плазменных неустойчивостей изменяется, если в плазме необходимо учитывать столкновения частиц между собой и с нейтралами. Последнее характерно для неустойчивостей в ионосфере Земли, где в результате протекания токов поперёк магнитного поля и возникновения градиентов концентрации развиваются неустойчивости, приводящие к осуществлению вытянутых вдоль магнитного поля ионосферных неоднородностей. Учёт процессов ионизации и рекомбинации приводит к появлению многочисленных неустойчивостей, изучаемых в физике ионосферы и газового разряда.

### § 6. Параметрические неустойчивости

В космофизике часто возникает задача, связанные с воздействием на данный плазменный объём волн конечной амплитуды. Если в плазме возбуждается волна конечной амплитуды (волна накачки), нелинейность волны приводит к периодической модуляции параметров плазмы. При этом собственные моды могут оказаться параметрически связанными и начинают нарастать с теплевого уровня, поглощая волну накачки. Неустойчивости такого типа называются параметрическими. Простейшим типом параметрической неустойчивости является распадная неустойчивость, при которой волна накачки с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $\vec{k}_0$  распадается на две собственные моды плазмы с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и волновыми векторами  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  соответственно. Условия распада имеют вид

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \\ \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \end{cases} \quad (3.72)$$

В плазме без магнитного поля есть три различных ветви колебаний: электромагнитная ( $t$ ), электронная плазменная ( $\ell$ ) и ионно - звуковая ( $s$ ). Распадные условия удовлетворяются при распадах

$$t = t' + \ell; \quad t = t' + s; \quad \ell = \ell' + s; \quad (3.73)$$

$$t = \ell + \ell' \quad t = \ell + s; \quad \ell = \ell' + s. \quad (3.74)$$

При этом, (3.73) соответствует вынужденному рассеянию волны накачки другой ветвью собственных колебаний.

В магнитоактивной плазме число возможных параметрических распадов намного больше. В настоящее время хорошо изучены распады альвеновской волны на альвеновскую и магнитозвуковую и распад волн свистового диапазона. При больших амплитудах накачки могут возникать нерезонансные моды, т.е. волны, которые не существуют в плазме в отсутствии накачки. Параметрические неустойчивости, как правило, имеют пороги по амплитуде волны накачки. Они определяются диссипацией энергии нарастающих волн. В общем случае, возможен резонанс с высшими гармониками волны накачки, условия которого имеют вид  $n\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $n\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ ,

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Однако порог неустойчивости растёт с ростом  $n$ , а инкремент неустойчивости  $n$ -го порядка пропорционален  $n$ -ой степени амплитуды, поэтому практический интерес представляют только случаи  $n = 1, 2$ .

Рассмотрим подробнее, как возникают соотношения типа (3.72). Если дисперсия волны подчиняется соотношению

$$\omega(k) = kV_{\phi} + \alpha(k), \quad \text{где } V_{\phi} - \text{ фазовая скорость,}$$

$\alpha(k)$  - слагаемое, описывающее отклонение от линейного закона дисперсии, и на среду наложено параметрическое возбуждение с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$ , в одномерном случае возмущение плазмы  $u$  подчиняется

уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_\Phi^2 [1 + \varepsilon \cos(\omega_0 t - \kappa_0 x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{\alpha} u = 0, \quad (3.75)$$

где  $\hat{\alpha}$  - линейный оператор, учитывающий отклонение от линейного закона дисперсии. В (3.75) модулируется фазовая скорость волны. Уравнение (3.75) является обобщением на волновую среду уравнения Маттье теории колебаний. Переходя к фурье компонентам  $U_\kappa = \int u \exp(i\kappa x) dx$  и учитывая, что  $\cos(\omega_0 t - \kappa_0 x) = \frac{1}{2} [\exp(i(\omega_0 t - \kappa_0 x)) + \exp(-i(\omega_0 t - \kappa_0 x))]$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_\kappa}{dt^2} + \omega_\kappa^2 U_\kappa = & -\frac{\varepsilon}{2} V_\Phi^2 (\kappa_0 - \kappa)^2 \exp(-i\omega_0 t) U_{\kappa_0 - \kappa}^* - \\ & - \frac{\varepsilon}{2} V_\Phi^2 (\kappa_0 + \kappa)^2 \exp(i\omega_0 t) U_{\kappa_0 + \kappa}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

(3.76) имеет вид уравнения колебаний гармонического осциллятора под действием вынуждающей силы. Вынуждающая сила будет в резонансе с собственной частотой осциллятора, если

$$\omega_0 \pm \omega_{\kappa_0 - \kappa} = \omega_\kappa. \quad (3.77)$$

В дальнейшем, будем рассматривать случай, когда в (3.77) стоит знак минус. Для волны  $U_{\kappa_0 - \kappa}$  аналогично получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{\kappa_0 - \kappa}}{dt^2} + \omega_{\kappa_0 - \kappa}^2 U_{\kappa_0 - \kappa} = & -\frac{\varepsilon}{2} V_\Phi^2 \kappa^2 \exp(i\omega_0 t) U_\kappa - \\ & - \frac{\varepsilon}{2} (2\kappa_0 - \kappa)^2 V_\Phi^2 \exp(-i\omega_0 t) U_{2\kappa_0 - \kappa}^*. \end{aligned} \quad (3.78)$$

При выполнении резонансного условия  $\omega_0 = \omega_{\kappa_0 - \kappa} + \omega_\kappa$

в правых частях (3.76) и (3.78) можно отбросить вторые нерезонансные слагаемые. Вводя обозначения  $\kappa_1 = \kappa$ ,  $\kappa_2 = \kappa_0 - \kappa$ ,

$\omega_k = \omega_1$ ,  $\omega_{k_0-k} = \omega_2$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_{k_1}}{dt^2} + \omega_1^2 U_{k_1} = -\frac{\varepsilon}{2} k_2^2 V_{\Phi}^2 \exp(-i\omega_0 t) U_{k_2}^* , \\ \frac{d^2 U_{k_2}^*}{dt^2} + \omega_2^2 U_{k_2}^* = -\frac{\varepsilon}{2} k_1^2 V_{\Phi}^2 \exp(i\omega_0 t) U_{k_1} . \end{cases} \quad (3.79)$$

Таким образом, параметрически связанными оказываются волны, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют соотношениям  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  и  $k_0 = k_1 + k_2$ , т.е. условию (3.72) в одномерном случае. Ищем решение системы (3.79) в виде

$U_{k_1} = \tilde{U}_1(t) \exp[-i\omega_{k_1} t]$ , где  $\tilde{U}_{k_1}$  — медленно меняющаяся во времени амплитуда связанных волн. Учитывая медленность изменения  $\tilde{U}_{k_1}$  получаем

$$\begin{cases} -2i\omega_1 \frac{d\tilde{U}_1}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} k_2^2 V_{\Phi}^2 \tilde{U}_1^* \exp(-i\Delta\omega t) , \\ -2i\omega_2 \frac{d\tilde{U}_2}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} k_1^2 V_{\Phi}^2 \tilde{U}_2 \exp(i\Delta\omega t) , \end{cases} \quad (3.80)$$

где  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ . Решением системы (3.80)

являются  $\tilde{U}_1 \sim \exp(-i\frac{\Delta\omega}{2}t + \gamma t)$ ,  $\tilde{U}_2 \sim \exp(i\frac{\Delta\omega}{2}t + \gamma t)$ ,

где  $\gamma = (\beta^2 - \Delta\omega^2/4)^{1/2}$ ,

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon^2 k_1^2 k_2^2 V_{\Phi}^4}{16 \omega_1^2 \omega_2^2} . \quad (3.81)$$

$\Delta\omega$  называется частотой расстройки. При  $\Delta\omega = 0$ , т.е. строгом выполнении резонансных условий, амплитуды  $\tilde{U}_1$  и  $\tilde{U}_2$  экспоненциально нарастают с инкрементом  $\gamma$ . Рассмотренный случай соответствует  $\omega_0 > \omega_1, \omega_2$ , т.е. возбуждению "красных спутников".

В физике космоса изучение параметрических неустойчивостей связано, прежде всего, с воздействием мощных радиоволн на космическую, (в основном, ионосферную) плазму и рассмотренном плазменной турбулентности в космофизических объектах (см. гл. У ч. II).

## Глава 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

В космофизических объектах часто наблюдаются волны большой амплитуды, свойства которых даже приближённо нельзя описать линейными уравнениями. При этом, ситуация существенно различается для диспергирующих сред и сред без дисперсии. Нелинейность, т.е. зависимость поведения волны от её амплитуды, налагает определённые связи на фазы и амплитуды гармоник. При распространении волны конечной амплитуды происходит генерация высших гармоник, все появляющиеся гармоники остаются в резонансе друг с другом, и возможна сильная перекачка энергии от одних гармоник к другим вплоть до опрокидывания, т.е. появления бесконечных гармоник, отвечающих возникновению особенностей на профиле волны. Дисперсия, т.е. зависимость фазовой скорости от волнового вектора может конкурировать с нелинейностью, останавливать укрупнение и опрокидывание волны. В слабодиспергирующей среде на некоторых ветвях колебаний может устанавливаться динамическое равновесие между нелинейностью и дисперсионными эффектами, возникают периодические волны и солитоны. Учёт диссипации приводит к образованию ударных волн.

### § I. Уравнение Кортевега - де Вриза

Первым шагом при рассмотрении нелинейных явлений может служить предложенное Кортевегом и де Вризом упрощение волнового уравнения, учитывающее нелинейные и дисперсионные члены с одинаковой степенью точности. При этом, одно и то же уравнение описывает явления различной физической природы.

Приведём вывод КдВ уравнения, исходя из волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

описывающего распространение линейной волны со скоростью  $c_0$  в среде без диссипации и дисперсии. Конкретные свойства среды в (4.1) определяют величину  $c_0$ . Уравнение (4.1) описывает распространение волны неизменной амплитуды

ды только за тот отрезок времени, когда можно пренебречь нелинейностью, дисперсией и диссипацией. Диссипация приведёт к затуханию волны, дисперсия - к распыливанию волнового пакета, нелинейность - к укручению фронтов. Решение (4.1) имеет вид

$$\Psi = \Psi_1(x - U_0 t) + \Psi_2(x + U_0 t) \quad (4.2)$$

и описывает две волны, бегущие в разных направлениях. Учёт малой нелинейности и дисперсии позволяет рассматривать волны, бегущие в разных направлениях, независимо. (такие волны достаточно быстро движутся друг относительно друга, и накопление поправок не успевает происходить). Каждая из волн (4.2) удовлетворяет уравнению первого порядка. Будем рассматривать только волны, бегущие в положительном направлении, тогда

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

Найдём поправки к (4.3), возникающие при учёте нелинейности и дисперсии. Определим вначале поправку, связанную с дисперсией. Пусть точный закон дисперсии волн в среде имеет вид  $\omega = \omega(k)$ . При  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

В общем случае,  $\omega(k)$  - аналитическая функция  $k$ , разложимая по степеням  $k$ . Закон дисперсии получается в результате решения системы линейных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами, дающей зависимость  $(i\omega)$  от  $(ik)$  с вещественными коэффициентами. В отсутствие диссипации  $\omega$  вещественно, и разложение  $\omega$  может идти только по чётным степеням  $(ik)$ . Поэтому

$$\omega = \omega_0 k - \beta k^3. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что обобщение (4.3) на среду с дисперсией должно иметь вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = 0. \quad (4.5)$$

Учёт нелинейности можно произвести заметив, что в бездиссипативной среде всегда имеются точные законы сохранения некоторых величин. Закон сохранения имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (4.6)$$

В линейном по  $\Psi$  приближении из (4.5) и (4.6) получаем зависимость потока  $j$  от  $\Psi$  вида  $j = u_0 \Psi + \beta \partial^2 \Psi / \partial x^2$ .

В следующем приближении появляется квадратичный по  $\Psi$  член:

$$j = u_0 \Psi + \beta \partial^2 \Psi / \partial x^2 + \alpha \Psi^2 / 2, \quad \text{где } \alpha = \text{const}.$$

Поэтому искомое уравнение с учётом нелинейности и дисперсии должно иметь вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \alpha \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (4.7)$$

Замена  $\xi = x - u_0 t$ ,  $\Psi = \beta \eta / \alpha$  приводит (4.7)

к стандартному виду уравнения Кортевега - де Вриза

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) было выведено первоначально для волн на мелкой воде.

Проиллюстрируем рождение высших гармоник в результате нелинейности на примере решения уравнения (4.8) без дисперсионного члена методом последовательных приближений. Решением уравнения

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad (4.9)$$

в первом приближении, в разложении по гармоникам является

$$\eta^{(1)} = \eta_0 \sin k \xi. \quad \text{Во втором приближении -}$$

$$\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} = -k \eta_0^2 \sin k \xi \cos k \xi = -\frac{k}{2} \eta_0^2 \sin 2k \xi. \quad (4.10)$$

Решением (4.10) является линейно нарастающая во времени вторая гармоника. Через время  $t \sim (k \eta_0)^{-1}$  её амплитуда сравняется с первой. Продолжая процедуру, мы получим третью, четвёртую и более высокие гармоники. Двигаясь быстрее основ-

ной гармоники, высшие гармоники приводят к искажению профиля волны, его укручению. В некоторый момент укручение достигает уровня, когда  $\partial\eta/\partial\xi \rightarrow \infty$ , и волна опрокидывается, т.е. в следующие моменты данному  $\xi$  соответствует несколько значений  $\eta$ . Учёт дисперсионного члена меняет характер решения, появляются периодические и уединённые волны.

## § 2. Периодические волны и солитоны

Проанализируем решение уравнения КдВ в различных случаях. Рассмотрим решение (4.8) в виде бегущих волн:

$\eta = \eta(\xi - ct) = \eta(\tau)$ , (где  $c$  - фазовая скорость волны в системе отсчёта, движущейся со скоростью  $U_0$ ).

Для таких волн  $\partial\eta/\partial t = -c\partial\eta/\partial\xi$ , и (4.8) становится обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^3\eta}{d\tau^3} + \eta \frac{d\eta}{d\tau} - c \frac{d\eta}{d\tau} = 0. \quad (4.II)$$

Интегрируя (4.II) и полагая без нарушения общности константу интегрирования равной нулю, получаем

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = c\eta - \frac{\eta^2}{2}. \quad (4.I2)$$

Уравнение (4.I2) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad (4.I3)$$

где  $W = -\frac{c\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{6}$ .

Уравнение (4.I3) совпадает с уравнением движения нелинейного осциллятора, т.е. материальной точки единичной массы в потенциальной яме глубиной  $W$ . При этом  $\tau$  является аналогом времени,  $\eta$  - координаты. Зависимость  $W = (\eta)$  показана на рис.4.1 а.  $W=0$  при  $\eta=0, 3c$  и имеет минимум при  $\eta = 2c$ . Первый интеграл (4.I3) совпадает с интегралом энергии частицы с единичной массой и полной энергией  $\mathcal{E}$ .

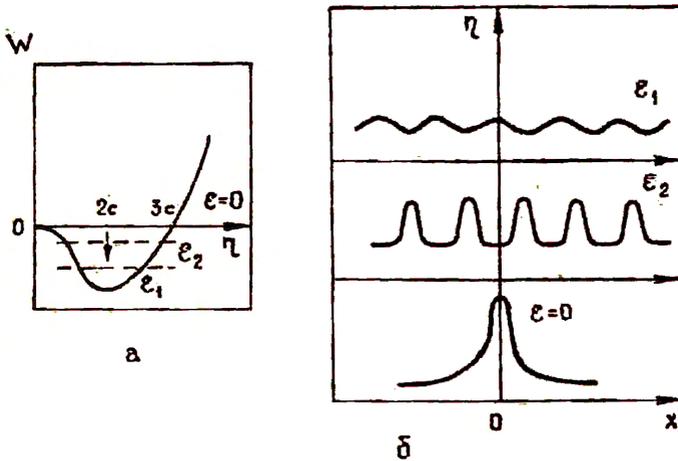


Рис.4.1. Формирование солитонов и кноидальных волн в плазме: а - зависимость эффективной потенциальной энергии от координаты, б - вид решения уравнения КдВ при различных  $\epsilon$ .

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right)^2 = \epsilon - W(\eta) \quad (4.14)$$

Если  $\epsilon = \epsilon_1$  (см. рис.4.1. а), волна является практически гармонической (рис.4.1 б) и

$$\eta = 2c + \eta_0 \exp\{i\sqrt{\epsilon} \tau\}. \quad (4.15)$$

При  $\epsilon = \epsilon_2$  возникает нелинейная кноидальная волна (рис.4.1 б), а при  $\epsilon = 0$  вершины  $\eta$  разносятся на бесконечно большое расстояние, и возникает уединённая волна или солитон (от английского "solitary wave").

Прямой подстановкой можно проверить, что в этом случае

$$\eta = \eta_0 \operatorname{ch}^{-2}(\tau/\Delta), \quad (4.16)$$

где  $\Delta$  - характерная ширина солитона. Действительно, подстановка (4.16) в (4.14) при  $\epsilon = 0$  даёт

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\Delta} \eta_0 \operatorname{ch}^{-5} \left( \frac{\tau}{\Delta} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\tau}{\Delta} \right) \right]^2 = \\ & = \frac{c}{2} \eta_0^2 \operatorname{ch}^{-4} \left( \frac{\tau}{\Delta} \right) - \frac{1}{c} \eta_0^5 \operatorname{ch}^{-6} \left( \frac{\tau}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Учитывая, что  $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\operatorname{ch}(\tau/\Delta)$ , получаем

$$\Delta^2 = 4/c, \quad (4.18)$$

$$\eta_0 = 3c. \quad (4.19)$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что

$$\Delta^2 \eta_0 = 12 = \text{const}. \quad (4.20)$$

Т.е. произведение амплитуды солитона на квадрат его ширины есть величина постоянная. Чем больше амплитуда солитона, тем он уже. В среде с отрицательной дисперсией (например, в случае ионно-звуковой, альвеновской, поперечной магнитозвуковой воли), при  $\beta > 0$ ,  $\eta > 0$  (солитон сжатия). В среде с положительной дисперсией (например, в случае косой магнитозвуковой волны), при  $\beta < 0$ ,  $\eta > 0$ , т.е. могут распространяться только "солитоны разрежения".

Если при  $t = 0$  создается возмущение амплитуды  $\eta(0) = \eta_0$  и ширины  $\Delta$ , то его эволюция определяется величиной параметра

$$\zeta = \Delta^2 \eta_0 / 12 \quad (4.21)$$

При  $\zeta \ll 1$  возмущение можно считать линейным. Оно быстро распадается на два, бегущих в разные стороны со скоростью, близкой к  $U_0$ . Если  $\zeta = 1$ , и профиль возмущения соответствует формуле (4.16), образуется солитон. При  $\zeta \gg 1$  возмущение распадается на солитоны и слабо нелинейный волновой пакет. При  $\beta > 0$  солитоны будут двигаться со скоростью, большей  $U_0$ , которая тем больше, чем больше их амплитуда, а волновой пакет, распливаясь со временем и уменьшаясь по амплитуде, отстаёт

от точки  $x = u_0 t$ . При  $\beta < 0$  - картина обратная. Данная зависимость была получена в результате численного интегрирования (4.8) с заданными граничными условиями.

Численные расчёты показывают, что солитон во многих случаях надо рассматривать как частицу. Если взаимодействуют солитоны, достаточно сильно отличающиеся по амплитуде (солитон большой амплитуды догоняет солитон малой амплитуды), то происходит как бы прохождение одного солитона сквозь другой. (Однако, при пересечении солитонов суперпозиции возмущений нет - суммарная амплитуда меньше суммы амплитуд). Когда амплитуды близки, при подходе на близкое расстояние более быстрый солитон передаёт часть возмущения в находящийся перед ним более медленный солитон. В результате медленный солитон ускоряется, а быстрый - замедляется. После взаимодействия получаются два солитона, в точности совпадающие с начальными, т.е. солитоны сохраняют свои характеристики после взаимодействия.

Рассмотренные решения относятся к случаю малой нелинейности, когда дисперсионные эффекты могут остановить опрокидывание волны. Если нелинейность велика, во многих случаях решение задачи также может быть сведено к решению уравнения типа (6.14) с заданным  $W(\eta)$ . При этом, определяется критическая амплитуда волны (аналог числа Маха

$M = V_\phi / C_s$ , где  $C_s$  - скорость звука), при достижении которой дисперсия не может остановить опрокидывания, и солитоны не образуются.

Двумерный солитон в плазме представляет собой вихрь, в котором движутся электроны и ионы. Когда солитон доходит до данной точки пространства, в ней возникает вихревое движение. В этом случае солитоны в плазме во многом похожи на солитоны волн Россби в гидродинамике, которые, согласно современным представлениям, описывают антициклоны в земной атмосфере, Большое Красное Пятно на Юпитере и другие "пятна" на Юпитере и Сатурне.

### § 3. Метод обратной задачи рассеяния

Нелинейное уравнение КдВ принадлежит к классу полностью интегрируемых дифференциальных уравнений. Нахождение его решения может быть сведено к решению линейного интегрального уравнения методом обратной задачи рассеяния.

Напомним, как решается задача рассеяния на заданном потенциале  $U(x, t)$  в квантовой механике. Пусть волновая функция  $\Psi(x, t)$  подчиняется одномерному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (4.22)$$

где  $\hat{H}$  - эрмитов оператор, соответствующий гамильтониану рассматриваемой задачи. Если  $\hat{L}$  - эрмитов оператор, отвечающий некоторой физической величине, то

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + i[\hat{H}\hat{L}], \quad (4.23)$$

где  $[\hat{H}\hat{L}] = \hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H}$ . Если  $d\hat{L}/dt = 0$ , то оператор  $\hat{L}$  не зависит от времени, и его собственные значения  $\lambda$ , определяемые соотношением  $\hat{L}\Psi = \lambda\Psi$ , не зависят от времени. Если  $\hat{H} = -4i\partial^3/\partial x^3 + 3i(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u)$  и  $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u$ , то (4.23) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + [(-\lambda) - u] \Psi = 0. \quad (4.24)$$

Если  $u$  достаточно быстро убывает на  $\pm \infty$ , то  $\lambda > 0$  отвечает дискретный спектр связанных состояний, а  $\lambda < 0$  - непрерывный. При  $u \rightarrow 0$  получаем асимптотические решения (4.24)

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \alpha_n(t) e^{-\alpha_n x}, \\ \Psi_k &= \alpha_k(t) e^{-ikx} + \beta_k(t) e^{ikx}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $\alpha_n = \lambda_n^{1/2}$ ,  $k = (-\lambda)^{1/2}$ ,  $\lambda_n$  - собственные значения в дискретном спектре,  $\lambda < 0$  - в непрерывном.

Уравнение (4.22) при  $x \rightarrow \pm \infty$  имеет решения (4.25), в которых

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \alpha_n(0) e^{i\kappa_n^2 t}, \\ \alpha_k(t) &= \alpha_k(0) e^{i\kappa^2 t}, \quad \beta_k(t) = \beta_k(0) e^{-i\kappa^2 t}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Отношение  $S_k(t) = \beta_k(t)/\alpha_k(t)$  можно рассматривать, как коэффициент отражения для падающей из бесконечности плоской волны на потенциал  $U(x, t)$ . Из общей теории рассеяния следует, что значения  $S_k$  для непрерывного спектра и  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  для дискретного достаточно для восстановления потенциала  $U(x, t)$ . Обозначая  $U = -\delta\eta$ ,  $x = \xi$ , прямой подстановкой в (4.23) получаем уравнение (4.8). Откуда и следует метод нахождения решения уравнения КдВ при заданном  $\eta(\xi, 0)$ . Для нахождения амплитуд солитонов, на которые разобьётся заданное  $\eta(\xi, 0)$ , достаточно найти собственные  $\lambda_n$  уравнения (4.24). При этом число солитонов  $N \sim \sqrt{\epsilon}$  (где  $\epsilon$  задаётся соотношением (4.21)), а амплитуда солитона пропорциональна  $\lambda_n$ . Любой положительный импульс порождает хотя бы один солитон, т.к. (4.24) имеет хотя бы один дискретный уровень. Отрицательный импульс не может породить ни одного солитона. Затем, по известной зависимости  $\alpha_n$  и  $S_k$  от времени, определяется  $\eta(\xi, t)$ .

#### § 4. Ударные волны в слабодиспергирующих средах

Учёт затухания приводит к изменению характера решения волнового уравнения. В простейшем случае учёт вязкости приводит к уравнению вида

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}, \quad (4.27)$$

где  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости. Проведя рассмотрение для волн типа  $\eta(\xi - ct)$ , получаем аналогично § 2 данной главы

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} - \nu \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\partial W}{\partial \eta} = c\eta - \frac{\eta^2}{2}. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28) является уравнением линейного осциллятора

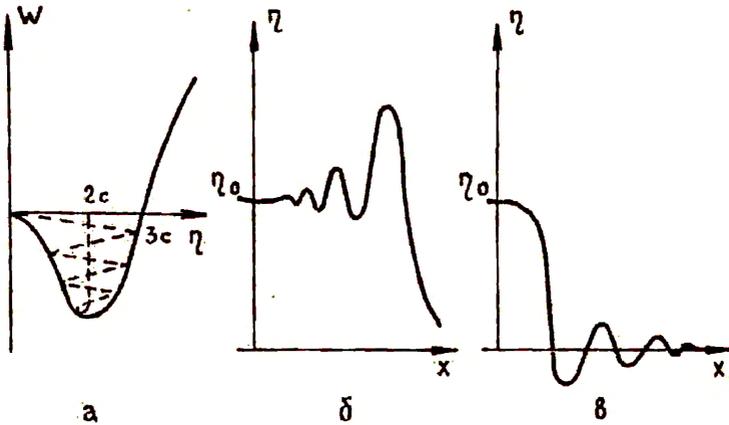


Рис.4.2. Формирование ударных волн в плазме: а - вид эффективной потенциальной ямы в среде с дисперсией и диссипацией, б - ударная волна в среде с отрицательной дисперсией, в - ударная волна в среде с положительной дисперсией с затуханием. Движение материальной точки в заданном потенциале и вид получаемых решений в средах с отрицательной и положительной дисперсией показан на рис.4.2. После прохождения пути волн состояние среды меняется. За ним вещество движется со скоростью  $\eta_0 = 2c$ . Данное решение представляет собой ударную волну с осциллирующей структурой. При достаточно большом  $\nu$  осцилляции исчезают, процесс становится аперiodическим и описывается уравнением Бургерса

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \quad (4.29)$$

Если амплитуда волны достаточно велика, ламинарную теорию ударной волны построить не удастся. В плазме возникает аналог гидродинамического течения типа прыжка воды или бора, представляющий собой переходную область конечной толщины. При переходе через эту область удовлетворяются соответствующие законы сохранения (см. § 3 гл. VI ч. I). Для

описания ударных волн широко используется численное моделирование. Толщина бесстолкновительной ударной волны - порядка нескольких ларморовских радиусов иона.

§ 5. Модуляционная неустойчивость и солитоны -  
оглибающие

Рассмотренные выше солитоны являются в некотором смысле вырожденными, так как не обладают внутренней структурой. Существует широкий класс нелинейных уравнений, допускающий солитоны с внутренней структурой. При этом форму солитона может иметь оглибающая волнового пакета.

К образованию солитонов - оглибающих приводит широко обсуждаемая в космофизической литературе модуляционная неустойчивость или самосжатие волнового пакета. Рассмотрим плоский волновой пакет с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Будем считать, что амплитуда волны велика, и волна не сильно оглибается от синусоидальной с частотой  $\omega_k$  и волновым вектором  $k$ . Дисперсионное уравнение для такой волны имеет вид

$$\omega = \omega_k + \alpha A^2, \quad (4.30)$$

где  $\alpha A^2$  - малая нелинейная поправка к  $\omega_k$ ,  $A$  - амплитуда волны. Если  $k$  и  $A$  изменяется с  $x$ , т.е.  $\omega = \omega(x)$ , то

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -V_g \frac{\partial k}{\partial x} + \alpha \frac{\partial A^2}{\partial x}, \quad (4.31)$$

где  $V_g = \partial \omega_k / \partial k$ . Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (V_g A^2) = 0. \quad (4.32)$$

Наложим на монохроматическую волну с волновым числом  $k_0$  и амплитудой  $A_0$  малое возмущение

$$k = k_0 - k, \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x), \quad (4.33)$$

$$A = A_0 + A_1 \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x), \quad (4.34)$$

где  $\omega_1 \ll \omega$ ,  $k_1 \ll k_0$  - частота и волновое число модуляции. В линейном приближении, из (4.31), (4.32) следует дисперсионное уравнение

$$\omega_1 = [V_g \pm (\alpha A_0^2 \frac{\partial V_g}{\partial k})^{1/2}] k_1, \quad (4.35)$$

Следовательно, при  $\alpha \partial V_g / \partial k < 0$  имеет место неустойчивость типа разбиения на волновые пакеты и самоожия волновых пакетов.

Наиболее подробно модуляционная неустойчивость изучалась для ленгмюровских колебаний. Для вычисления модуляции плотности в ленгмюровских колебаниях вычислим силу, действующую на электрон в неоднородном высокочастотном поле (силу Миллера) в одномерном случае. Разбивая координату электрона  $X$  на быстро меняющуюся часть  $\tilde{X}$  и медленно меняющуюся часть  $x_0$ , из уравнения движения

$$m_e \ddot{X} = -eE = -eE_0(x) \cos \omega t \quad \text{для быстро меняющейся части имеем} \quad \tilde{X} = eE / m_e \omega^2, \quad \text{а для медленной составляющей} - m_e \ddot{x}_0 = -\langle e\tilde{X} \partial E / \partial x \rangle = -\partial (e^2 E_0^2 / 4 m_e \omega^2) / \partial x.$$

Таким образом, на электрон действует усреднённая сила с потенциалом

$$U = eE_0^2 / 4 m_e \omega^2 = e^2 \langle E^2 \rangle / 2 m_e \omega^2, \quad (4.36)$$

В изотермической плазме эта сила должна уравновешиваться градиентом давления. При  $T_e = T_i = T$ ,  $-n \partial U / \partial x = \partial (2T \delta n) / \partial x$ , где  $\delta n$  - малая вариация плотности  $n$ . Откуда получаем

$$\delta n = - \frac{e^2 E_0^2 n}{8 m_e \omega_p^2 T} = - \frac{E_0^2}{32 \pi T}, \quad (4.37)$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n / m_e$ . Дисперсионное уравнение

для ленгмюровских волн при изменении плотности имеет вид

$$\omega_{p2} = \omega_{p0} + \frac{1}{2} \omega_{p0} \frac{\delta n}{n} + \frac{3}{2} \frac{T}{T_0 \omega_{p0}} k^2, \quad (4.38)$$

поэтому  $\alpha$  в формуле (4.30) имеет значение

$$\alpha = -\omega_{p0} / 64 \pi n T. \quad (4.39)$$

Так как  $\partial V_g / \partial k = 3T / m_e \omega_{p0} > 0$ , может развиваться модуляционная неустойчивость. Области локализации более высокой концентрации волновой энергии, из которых под действием силы высокочастотного давления вытеснена плазма, носят название каверн. Динамика образующихся каверн зависит от размерности каверны. В одномерном случае образуется солитон - отгибающая. В двух и трёхмерном случаях происходит схлопывание каверны с нарастанием плотности энергии колебаний до размеров, сравнимых с  $r_D$ . При этом фазовая скорость колебаний приближается к тепловой, и волны погибают в результате затухания Ландау. Явление схлопывания каверн носит характер взрыва и называется коллапсом ленгмюровских волн.

Кроме самосжатия волновых пакетов в результате нелинейности возможен эффект самофокусировки. В результате возрастания показателя преломления среды, распространяющимся по оси  $x$  и ограниченным по оси  $y$  волновым пакетом возникает отставание центральной части волнового фронта от периферийных, и волна становится сходящейся. Солитоны в среде с отрицательной дисперсией не испытывают самофокусировки. В среде с положительной дисперсией эффект самофокусировки приводит к разбеганию солитона на отдельные сгустки вдоль оси  $y$ .

Рассмотренные выше нелинейные эффекты и ряд других проявляются при воздействии на космическую плазму мощными электромагнитными волнами и при распространении волновых возмущений конечной амплитуды. Солитоны наблюдаются в магнитосфере Земли и солнечном ветре, однако, в большинстве случаев, развитие нелинейных возмущений приводит к образованию ударных волн.

## Глава 5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

При изучении состояния космофизических систем, как правило, приходится иметь дело с плазмой, в которой амплитуды волн существенно превышают уровень тепловых колебаний, а их фазы случайны. Такие состояния плазмы принято называть турбулентными. В результате развития турбулентности в плазме искажаются функции распределения частиц, и происходит аномально быстрый перенос перпендикулярно магнитному полю. Если гидродинамическая турбулентность представляет собой набор большого числа взаимодействующих вихрей, для плазмы характерно возбуждение многих мод колебаний, сложно взаимодействующих между собой, и турбулентное движение может сильно отличаться от гидродинамического. Плазменную турбулентность от турбулентности жидкости отличает также то, что в плазме доминирующую роль может играть эффект резонансного взаимодействия волн с частицами. Если в данном плазменном объеме неустойчивой оказывается, в основном, только одна ветвь колебаний, то говорят о турбулентном состоянии, соответствующем данной моде (например, о ленгмювской, ионно-звуковой, свистовой турбулентности). При вихревом движении в гидродинамике отдельные вихри мало перемещаются в пространстве, и каждый отдельный вихрь длительно взаимодействует со своими соседями; имеет место сильное взаимодействие возбуждений и, соответственно, сильная турбулентность. При волновом движении отдельные волновые пакеты за время своего существования успевают разойтись на большие расстояния, взаимодействие отдельной пары волновых пакетов между собой оказывается слабым, и можно говорить о слабой турбулентности. Ряд плазменных задач космофизики (например,pitch-угловая диффузия частиц в радиационных поясах Земли) может быть решен в рамках хорошо развитого в настоящее время приближения слабой турбулентности. Полной количественной теории сильной турбулентности пока не существует. При её построении, видимо, будут объединены два существующих подхода - солитонный и стохастический<sup>(\*)</sup>.

---

(\*) Основной проблемой в теории турбулентности, в решении которой за последнее время был получен ряд фундаментальных результатов при применении численных методов, является переход от динамического описания системы к стохастическому.

§ I. Квазилинейное приближение

Если в плазме развивается много мод, сложно взаимодействующих между собой, требуется статистический подход для описания процесса. При очень слабой турбулентности уровень развивающихся шумов может быть настолько низким, что отдельные моды колебаний практически не будут взаимодействовать между собой, т.е. их можно описывать в линейном приближении. Воздействие волн на частицы плазмы может так изменить функцию распределения частиц по скоростям, что нарастание шумов прекратится. При этом изменение распределения резонансных частиц по скоростям имеет характер диффузии в пространстве скоростей. Учёт влияния колебаний на усреднённую функцию распределения частиц по скоростям при линейном описании колебаний получил название квазилинейного приближения.

Рассмотрим квазилинейное приближение на примере взаимодействия с плазмой ленгмюровских колебаний при  $\vec{E}_0 = 0$ .

однородной, а колебания — одномерными. Полная система уравнений имеет при этом, вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 4\pi n e (1 - \int f dv), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $f(x, v, t)$  — функция распределения электронов,  $\varphi(x, t)$  — потенциал электрического поля  $E$ . Если период колебаний резонансных электронов, захваченных полем волны  $T_K =$

$$= (2m_e / ek^2 \varphi_k^0) \ll \tau_K^{-1}, \quad \text{где } \varphi_k^0 \text{ — амплитуда потенциала, } \tau_K \text{ — инкремент нарастания ленгмюровской во}$$

ны, то за время колебания амплитуда волны изменяется мало.

Если в плазме возбуждается много волн, так, что потенциальные ямы соседних волн перекрываются, происходит "коллективизация" резонансных частиц; скорость частицы испытывает случайные изменения, которые, используя статистический подход, можно описать в диффузионном приближении. Пусть в плазме возбуждён набор плазменных колебаний с фазовыми скоростями в интервале  $(\omega/k)_{\min} < \omega/k < (\omega/k)_{\max}$ ,

тогда, электрическое поле волны

$$E(x, t) = \sum_k E_k \exp[i\omega_k t - ikx]. \quad (5.2)$$

Т.к. действительно,  $E_{-k} = E_k^*$ ,  $\omega_{-k} = -\omega_k^*$ .

Если  $\delta_k$  - расстояние между соседними гармониками по фазовой скорости,  $|E_k|^2$  - спектральная плотность энергии электрического поля, то потенциал отдельной гармоники  $\sim (|E_k|^2 \delta_k)^{1/2} / k$ . Поэтому условие перекрывания резонансов имеет вид

$$\left[ \frac{e^2 |E_k|^2 \delta_k}{m_e^2 k^2} \right] \gg \delta \left( \frac{\omega}{k} \right), \quad (5.3)$$

где  $\delta(\omega/k)$  - расстояние между соседними гармониками по фазовой скорости, т.е. это расстояние много меньше ширины потенциальной ямы отдельной волны. В плазменном объеме с размером  $L$ ,  $\delta_k = \pi/L$  является, как правило, настолько малым, что условие (5.3) выполняется с большим запасом. Диффузионное приближение для описания движения частиц справедливо, если ширина пакета волн с близкими скоростями много меньше ширины всего спектра возбуждаемых волн. Воспользуемся методом Ван-дер-Поля разделения во времени быстрого и медленного процессов задачи. Быстрым процессом является изменение фазы резонансной частицы в поле волны. Медленным является изменение амплитуд Фурье - гармоник поля и усредненной функции распределения частиц. Представим функцию распределения частиц в виде суммы медленно и быстро меняющихся частей

$$f = f_0(v, t) + f_1(x, v, t), \quad (5.4)$$

усредняя по промежутку времени, большому по сравнению с быстрым временем задачи и меньшему, чем время изменения

$f_0$  ( $\langle f \rangle = f_0(v, t)$ ), и пренебрегая членом

$(eE/m_e)(\partial f_1 / \partial v)$ , для  $f_1$  и  $f_0$  получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial v} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \langle E \frac{\partial f_1}{\partial v} \rangle, \quad (5.6)$$

где  $\langle E \rangle = 0$ . Разлагая  $f_1$  в ряд Фурье и считая, что

амплитуды разложения мало меняются со временем, получаем

$$f_1(x, v, t) = \sum_k f_k(v, t) \exp[i\omega_k t - ikt]. \quad (5.7)$$

Учитывая, что члены с  $k_1 \neq -k^2$  исчезают в (5.6) при усреднении, получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \sum_k E_k^*(t) \frac{\partial f_k}{\partial v}. \quad (5.8)$$

В линейном приближении

$$\begin{aligned} f_k(v, t) &= \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{i(\omega_k - kv - i\gamma_k)} = \\ &= \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f_0}{\partial v} \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{i(\omega_k - kv) + i\gamma_k} + \pi \delta(kv - \omega) \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8), получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (5.10)$$

где

$$D(v) = \frac{e^2}{m_e^2} \sum_k |E_k|^2 \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} + \pi \delta(\omega_k - kv) \right\}. \quad (5.11)$$

Первый член в фигурной скобке (5.11) учитывает отклик нерезонансных частиц на амплитуду волны (как правило, им пренебрегают), второй — резонансных. В (5.11), учитывая, что длина плазменного объема много больше длины волны, переходим от суммирования к интегрированию с помощью соотношения

$$\sum_k = \frac{L}{2\pi} \int dk = \frac{L}{\pi} \int_{k>0} dk. \quad \text{Производя интегрирование}$$

в (5.11) и учитывая, что  $\delta(f(x)) = \delta(x - x_0) / |df/dx|$ ,

если  $f(x_0) = 0$ , получаем

$$D = \frac{e^2}{m_e^2} \frac{|E_k|^2 |k = \omega_k/v|}{|v - d\omega/dk|}. \quad (5.12)$$

Спектральную плотность энергии волн находим в линейном приближении

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2 \gamma_k |E_k|^2, \quad (5.13)$$

где

$$\gamma_k = \frac{\pi}{2 n_0} \omega_k \left( \frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v = \omega_k/k}. \quad (5.14)$$

Уравнения (5.10), (5.12) - (5.14) и составляют замкнутую систему уравнений квазилинейной теории для ленгмюровских колебаний.

Рассмотрим релаксацию размытого электронного пучка в плазме (рис.5.1). На функции распределения возникает волна релаксации, имеющая вид ступеньки с крутым фронтом и распространяющаяся в область малых скоростей (рис.5.1)

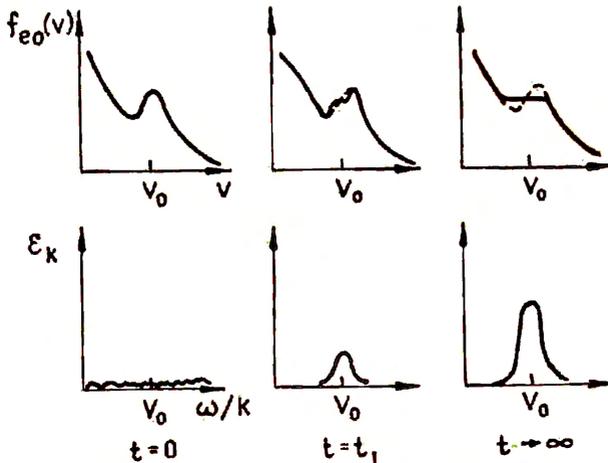


Рис.5.1. Квазилинейная релаксация размытого пучка в плазме и образование плато на функции распределения  $f(v)$ .  $\epsilon_k$  - спектральная плотность энергии волн. Функция распределения при  $t \rightarrow \infty$ ,  $f_0^\infty$  ( $\partial f_0^\infty / \partial v = 0$ ), определяется из условия сохранения числа частиц в процессе квазилинейной диффузии

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} f_0(v,0) dv = f_0^\infty (v_{max} - v_{min}), \quad (5.15)$$

где  $f_0(v_{max}, 0) = f_0(v_{min}, 0) = f_0^\infty$ ,  $v_{min} \approx v_T$ ,  $v_T$  - тепловая скорость частиц,  $v_{max} \approx v_0$  - скорость пучка при  $t = 0$ . Если  $\int_{v_{min}}^{v_{max}} f_0(v, 0) dv \approx n_1$ , где  $n_1$  - число частиц в пучке, т.к.  $v_{min} \ll v_{max}$ , то  $f_0^\infty = n_1 / v_0$ . На возбуждение волн пучок тратит 1/3 своей энергии.

Квазилинейная теория применяется к различным ветвям колебаний плазмы. Применяя её для описания различных космофизических систем надо только помнить, что она справедлива при очень низком уровне шумов в плазме. В космофизике, квазилинейная теория получила наибольшее развитие при анализе квазилинейной диффузии частиц в конус потерь. Квазилинейный метод имеет довольно узкую область применимости, т.к. нелинейные взаимодействия колебаний начинают играть заметную роль уже при не очень больших амплитудах волн.

## § 2. Слабая турбулентность

Если уровень шумов не настолько мал, чтобы было оправдано квазилинейное приближение, т.е. необходимо учитывать взаимодействие волн между собой, но и не настолько велик, чтобы существенно влиять на дисперсионные свойства плазмы, то применимо приближение слабой турбулентности. При этом, энергия шумов должна быть много меньше тепловой энергии плазмы. Слабая турбулентность представляет собой суперпозицию монохроматических плоских волн с различными  $\vec{k}$ .

Фазы этих волн с точностью до малых членов случайны и статистически независимы. В рамках теории слабой турбулентности можно пользоваться теорией возмущений, проводить разложение уравнений по малому параметру, равному отношению энергии взаимодействия между волнами к их полной энергии.

При анализе процессов в рамках слабой турбулентности удобно рассматривать набор элементарных мод - осцилляторов, как газ квазичастиц с энергией  $\omega$  и импульсом  $\vec{k}$  (это соответствует квантовомеханическому подходу в системе единиц, где постоянная Планка равна единице). Газ элементарных

волновых движений задаётся функцией распределения квантов определённого типа  $N_{\kappa}(t, \kappa)$ . При этом  $N_{\kappa} = \varepsilon_{\kappa} / \omega_{\kappa}$ , где  $\varepsilon_{\kappa}$  - спектральное распределение по волновым числам (для электростатических волн  $\varepsilon_{\kappa} = |E_{\kappa}|^2 / 8\pi$ , для электромагнитных  $\varepsilon_{\kappa} = (|E_{\kappa}|^2 + |B_{\kappa}|^2) / 8\pi$ ). Схематически кинетическое уравнение для числа квантов можно записать в виде

$$\frac{\partial N_{\kappa}}{\partial t} = St\{N_{\kappa}\} + 2\gamma_{\kappa} N_{\kappa}, \quad (5.16)$$

где  $St\{N_{\kappa}\}$  - интеграл столкновений волн с волнами, т.е. результат нелинейного взаимодействия волн друг с другом. Член  $2\gamma_{\kappa} N_{\kappa}$  учитывает накачку энергии в турбулентность за счёт неустойчивости и поглощение волн частицами. Если закон дисперсии взаимодействующих волн допускает трёхволновое взаимодействие, при котором выполняются распадные условия (3.72), интеграл столкновений  $St\{N_{\kappa}\}$  можно символически записать как

$$\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 V(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}) N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2}, \quad \text{где } V(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}) =$$

матричный элемент взаимодействия. Для получения вида  $V$  используется уравнение параметрической неустойчивости в предположении о случайных фазах взаимодействующих волн и медленном изменении их амплитуд ( $|\gamma_{\kappa} / \omega_{\kappa}| \ll 1$ ). Т.к.  $|\vec{k}_1 + \vec{k}_2| < |\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|$ , для волн с данным законом дисперсии распадные условия выполняются для спектров вида А и В на рис.5.2. Спектры вида С и D на рис.5.2 являются

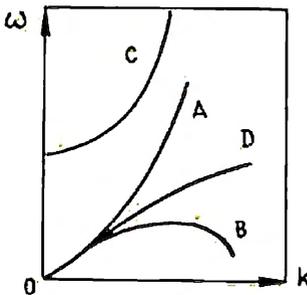


Рис.5.2. Спектры колебаний однородной плазмы: А и В - распадные, С и D - нераспадные

нераспадными. В плазме дисперсионное соотношение имеет, как правило, более чем одну ветвь, и распадные условия могут выполняться для волн, принадлежащих к различным ветвям (например, в плазме без магнитного поля распад ленгмювской волны со спектром типа С на ленгмювскую и ионно-звуковую).

Биения на частотах  $\omega_{\vec{k}_1} \pm \omega_{\vec{k}_2}$  с волновыми векторами  $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$  могут попасть как в резонанс с третьей волной, так и в резонанс с частицами (при черенковском резонансе  $\omega_{\vec{k}_1} \pm \omega_{\vec{k}_2} = (\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2) \cdot \vec{V}$ ). Необходимость

учета возникающих процессов обусловлена тем, что в резонанс сходящий на разностной частоте высокочастотных волн с большими фазовыми скоростями может попасть основная масса теплых частиц плазмы. Поэтому резонанс на биениях может оказываться весьма существенным в динамике спектра волн. В квантово-механической аналогии, при этом происходит поглощение частицей кванта с частотой  $\omega_{\vec{k}_1}$  и испускание кванта с частотой  $\omega_{\vec{k}_2}$ , т.е. индуцированное рассеяние.

Если распадные условия для трёх волн не выполнены, надо учитывать четыре волны:  $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3$ ,  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , а соответствующий интеграл столкновений имеет вид

$$\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 V(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}) N_{\vec{k}_1}^{\pm} N_{\vec{k}_2}^{\pm} N_{\vec{k}_3}^{\pm}$$

### § 3. Передача энергии по спектру турбулентности

Основной физический процесс, происходящий в турбулентной среде — необратимая передача энергии из степеней свободы, в которых происходит возбуждение, в степени свободы, где происходит затухание. Решение задачи о гидродинамической турбулентности может быть получено только численными методами, которые пока недостаточно развиты. Поэтому наиболее надёжные оценки основаны пока на соображениях размерности. В случае стационарной турбулентности, т.е. при наличии внешних источников энергии, непрерывно передающих её основному крупномасштабному движению, если её можно считать однородной и изотропной, и источник крупномасштабного (малые  $k$ ) турбулентного движения отделён от области, где турбулентные движения быстро затухают (большие  $k$  и малые длины волн) из-за увеличения вязкой диссипации в мелких масштабах

(см. рис.5.3), в инерционном интервале энергии перекачивается от малых  $k$  к большим в результате нелинейного дробления масштабов вихрей. Постоянство потока энергии в инерционном интервале позволяет найти зависимость  $\mathcal{E}_k(k)$ .

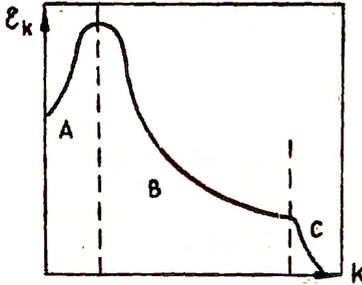


Рис.5.3. Схематический вид зависимости спектра турбулентности  $\mathcal{E}_k$  от волнового числа  $k$  при перекачке энергии между областями раскачки A и затухания C в инерционном интервале B.

Действительно, постоянство потока энергии по спектру означает, что

$$\mathcal{E}_k k / \mathcal{U}_k = \text{const} \quad (5.17)$$

где  $\mathcal{U}_k$  — характерное время перекачки энергии,  $k / \mathcal{U}_k$  — скорость переноса в  $k$ -пространстве. Так как процесс перекачки вызван нелинейным слагаемым в уравнении Эйлера  $(\mathbf{V}_k \nabla) \mathbf{V}_k \sim k V_k^2$ , из соображений размерности  $\mathcal{U}_k \sim k V_k^2$ , т.е.  $\mathcal{U}_k^{-1} \sim k V_k$ , где  $V_k$  — скорость турбулентных пульсаций масштаба  $k^{-1}$ . Энергия пульсаций  $k \mathcal{E}_k \sim \rho V_k^2$ , где  $\rho$  — плотность, поэтому  $\mathcal{U}_k^{-1} \sim k [k \mathcal{E}_k]^{1/2}$

Откуда получаем закон А.Н.Колмогорова — А.М.Обухова для гидродинамической турбулентности

$$\mathcal{E}_k \sim k^{-5/3} \quad (5.18)$$

МГД турбулентность отличается от обычной гидродинамической тем, что в гидродинамике движение основного масштаба не сказывается существенным образом на свойствах мелкомасштабных пульсаций, а в магнитной гидродинамике магнитное поле основного масштаба влияет на движение всех остальных масштабов. МГД турбулентность можно

рассматривать как совокупность магнитогидродинамических волн, в которых соблюдается равномерное распределение между магнитной и кинетической энергией ( $\rho V_K^2 \sim B_K^2 / 4\pi$ ). Рассмотрение МГД турбулентности показывает, что  $V_K \sim (V_A \epsilon_K k^{-1})^{1/4}$

где  $V_A$  — альвеновская скорость.

В плазме простой зависимости типа (5.18) получить, как правило, не удастся. Зависимость  $\epsilon(k)$  можно найти только для возбуждения определённого типа волн.

Спектр ионно-звуковой турбулентности — распадный. При этом, под воздействием увлекаются колебания с почти коллинеарными волновыми векторами. Процесс коротковолновой переноски связан со слиянием ионно-звуковых квантов (фононов). Спектр имеет вид

$$\epsilon_K \sim K^{-5/2}. \quad (5.19)$$

В ленгмювской турбулентности основным исходным процессом является распад ленгмювской волны на ленгмювскую и ионно-звуковую (в изотермической плазме в результате поглощения ионного звука — индуцированное рассеяние на ионах). Нелинейное взаимодействие в ленгмювской турбулентности сопровождается "покрашением ленгмювских квантов" (плазмоннов), т.е. переносом энергии в область длинных волн и больших фазовых скоростей, где невозможно резонансное поглощение волн частицами. Образуется длинноволновый "плазмонный конденсат". В нём может развиваться модуляционная неустойчивость. Через масштаб инерционного интервала модуляционной неустойчивости ленгмювская энергия пронесётся сложившимися кавернами. Спектр турбулентности в инерционном интервале имеет вид

$$\epsilon_K \sim K^{-5/2}. \quad (5.20)$$

#### § 4. Турбулентный нагрев и проблема аномального

##### сопротивления

Поглощение волн может приводить к ускорению группы частиц (этот процесс мы рассмотрим в следующей главе) или

к увеличению средней хаотической скорости. Последний процесс носит название турбулентного нагрева.

Одним из способов турбулентного нагрева является поглощение волн частицами при развитии токовых неустойчивостей. В данном случае, причиной неустойчивости является превышение некоторого критического значения тока. Поэтому, развитие неустойчивости должно приводить к механизму, ограничивающему рост тока, что эквивалентно появлению некоторого дополнительного сопротивления, называемого аномальным. В режиме аномального сопротивления электроны, переносящие электрический ток, в дополнение к потере импульса из-за парных столкновений, теряют импульс благодаря излучению волн, которые поглощаются ионами. Вид вольт-амперной характеристики при развитии аномального сопротивления показан на рис. 5.4.

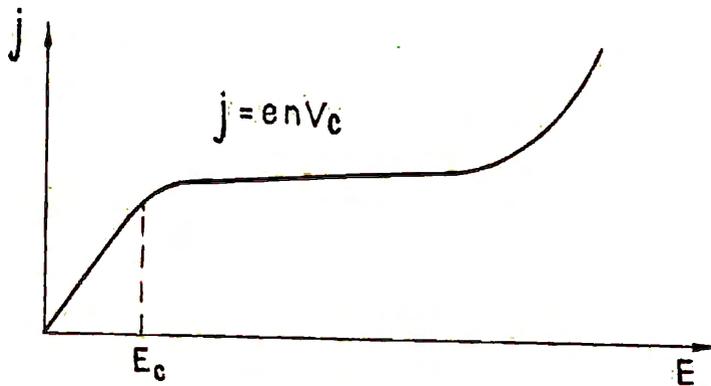


Рис. 5.4. Зависимость плотности тока  $j$  от электрического поля  $E$  в режиме аномального сопротивления.  $E_c$  — критическое значение электрического поля,  $V_c$  — критическое значение токовой скорости.

В связи с проблемой аномального сопротивления рассматривается ряд неустойчивостей (оупемановская, зонно-звуковая, зонно-циклотронная и т.д.). Строгое решение задачи может

онты получено в случае применимости приближения слабой турбулентности при возбуждении ионно-звуковых волн в плазме с электрическим полем. При этом предполагается, что редкие столкновения способны поддерживать максвелловскую форму функций распределения ионов и электронов. В условиях космической плазмы, как правило, столкновения полностью отсутствуют, и задача может быть строго решена только для тока, текущего поперёк магнитного поля.

Обычная формула для проводимости в отсутствие (или вдоль) магнитного поля  $\sigma = ne^2/m_e \nu$  содержит частоту столкновений  $\nu$  с рассеивающими центрами. При аномальной потере импульса электронов в результате развития токовой неустойчивости  $\nu \rightarrow \nu_{\text{eff}}$ . Средняя потеря импульса в единицу времени  $\nu_{\text{eff}} m_e n_0 \vec{V}_0 = -\vec{F}_{\text{тр}}$ , где  $\vec{V}_0$  - токовая скорость и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  - сила трения, испытываемая электронами в единицу времени, равная импульсу волн, излучаемых электронами в единицу времени  $2 \int j_k^e \epsilon_k(\vec{k}/\omega_k) d\vec{k} / (2\pi)^3$ , где  $j_k^e$  - вклад электронов в инкремент неустойчивости вычисленный с помощью квазилинейной теории. Откуда

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{2}{m_e n_0 V_0^2} \int j_k^e \epsilon_k \left( \frac{\vec{k} \vec{V}_0}{\omega_k} \right) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (5.21)$$

Т.о., для определения  $\nu_{\text{eff}}$  необходимо знать  $\epsilon_k$  в режиме развития неустойчивости.  $\epsilon_k$  может быть найдена в рамках теории слабой турбулентности. В случае сильной турбулентности применяются размерностные оценки. Аномальное выделение тепла равно  $j^2 / \sigma_{\text{eff}}$ . Как правило, в процессе турбулентного нагрева быстрее увеличивается температура электронов.

Трудности, возникающие при решении задачи об аномальном сопротивлении при ионно-звуковой турбулентности в бесстолкновительной плазме, иллюстрирует рис.5.5. Развитие турбулентных процессов сопровождается искажением функций распределения электронов и ионов, их, даже приближённо, нельзя считать максвелловскими. Если при  $t=0$  имеется сдвинутая

на  $V_0$  относительно максвелловской функции распределения ионов  $f_i$ , функция распределения электронов  $f_e$  (рис.5.5), волна с фазовой скоростью  $\omega/k$ , взаимодействуя с электронами, приводит к образованию плато в узком плоском слое пространства скоростей ( $\vec{k} \vec{v} = \omega$ ). Если возбуждены волны в широком угле распространения, происходит изотропизация  $f_e$  в широком веерообразном секторе пространства скоростей (на рис.5.5

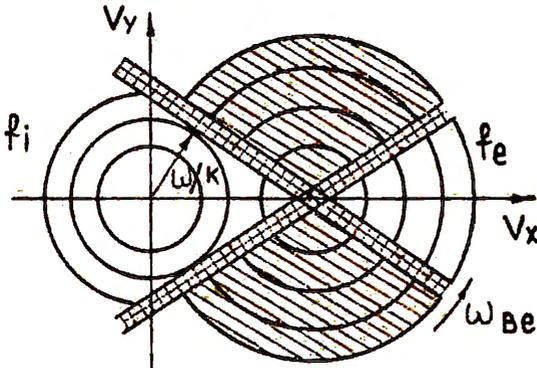


Рис.5.5. Двумерная картина пространства скоростей при ионно-звуковой турбулентности

он заштрихован). Но в ионно-звуковом спектре отсутствуют волны со скоростями, меньшими критической ( $\omega/k \leq V_{кр}$ ), и при  $V < V_{кр}$  взаимодействие волн с электронами связано с нелинейными эффектами следующего за квазилинейным приближения. К появлению области, в которой ионно-звуковые волны не возбуждаются, приводит также отсутствие раскачки волн с  $\vec{k} \perp \vec{j}$ . В конусе пространства скоростей, где нет волн, электроны свободно ускоряются полем  $E$  (убегающие электроны). В резонансной области происходит сильное квазилинейное искажение  $f_i$ . Если имеется слабое магнитное поле, перпендикулярное току (например, в случае бесстолкновительных ударных волн), оно размешивает электроны

но углам и предотвращает убегание электронов, но не успевает перемещивать ионы. Ионное распределение сильно искажается. При  $\vec{v}_0 \perp \vec{j}$  удаётся получить  $j(E)$  в квазилинейном приближении. Если  $\vec{v}_0 \parallel \vec{j}$ , необходимо пользоваться численными методами.

Быстрый нагрев плазмы в режиме аномального сопротивления затрудняет возможность наблюдения явлений такого типа в космосе.

## Глава 6. МЕХАНИЗМЫ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

### В КОСМОСЕ

Изменение энергии частицы равно работе, производимой электрическим полем вдоль траектории частицы. Поэтому классификация механизмов ускорения связана с природой возникающих электрических полей. Механизмы ускорения делятся на регулярные, при которых среднее электрическое поле  $\langle \vec{E} \rangle \neq 0$ , и стохастические, при которых  $\langle \vec{E} \rangle = 0$ ,  $\langle \vec{E}^2 \rangle \neq 0$ . В первом случае происходит монотонное увеличение (или уменьшение) энергии всех частиц, во втором - со временем растёт средний квадрат приращения энергии, и функция распределения изменяется в результате диффузии частиц в пространстве импульсов. В связи с развитием теории турбулентной плазмы подробно разрабатывался, в основном, второй тип механизмов, широко привлекавшийся для объяснения ускорения космических лучей. Он связан со свойством турбулентной плазмы эффективно передавать энергию малой доле частиц. В данной главе будут кратко рассмотрены основные типы механизмов ускорения частиц в космосе, различные модификации которых приводят к генерации и ускорению космических лучей.

#### § 1. Ускорение пробных частиц

На первых этапах исследования ускорительных механизмов в космосе ограничивались одночастичным приближением, применимым, когда можно пренебречь токами и зарядами быстрых частиц, и рассматривать их движение в заданных электро-

магнитных полях.

Простейшим случаем является прохождение частицей заданной разности потенциалов  $\Delta\varphi$ , когда она приобретает энергию  $e\Delta\varphi$ . При бетатронном ускорении в слабо нестационарных магнитных полях  $\mu = \rho_1^2 / B_0(t) = \text{const}$ ,

где  $\mu$  - магнитный момент,  $\rho_1$  - перпендикулярная составляющая импульса. Двигаясь в магнитном поле частица может изменить направление своего движения, если она движется вдоль искривлённой магнитной силовой линии или отражается от магнитной пробки. Если магнитное поле медленно изменяется во времени, а частица совершает колебания между точками отражения, сохраняется второй адиабатический инвариант

$$J_{||} = \oint p_{||} d\ell = \text{const}. \quad \text{Если расстояние между точками}$$

отражения  $L = L(t)$ , то  $p_{||} \sim L^{-1}$ . Данный механизм ускорения носит название регулярного фермиевского или фермиевского первого рода. Рассмотренные механизмы полностью обратимы, т.е. в случае периодического процесса изменения электромагнитного поля ускорения не происходят. Для того, чтобы частица ускорялась, необходим учёт процессов, приводящих к необратимости.

Наиболее распространённым механизмом, учитывающим стохастичеку, является стохастический фермиевский или фермиевский второго рода - упругое отражение частиц от движущихся магнитных облаков. Если  $\bar{U}$  - скорость движения облака, а  $\bar{V}$  - частицы, то отношение энергии частицы  $W_2$  после столкновения к её первоначальной энергии  $W_1$  равно

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1 + 2(\bar{U}\bar{V})/c^2 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} \quad (6.1)$$

Если  $u^2/c^2 \ll 1$  и  $\ell$  - длина свободного пробега, то в дифференциальном приближении

$$\frac{dW}{d\ell} = -2 \frac{(\bar{U}\bar{V})}{\ell c^2} W \quad (6.2)$$

При догоняющих столкновениях скорость частицы уменьшается, при встречных - увеличивается. Если магнитные облака движутся хаотически, то происходит диффузия в пространстве

скоростей и

$$\left\langle \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \right\rangle = 4 \frac{u^2 V}{c^2 \ell} \quad (6.3)$$

Стохастический фермиевский механизм относится к медленно действующим, при его применении необходимо учитывать потери энергии частицы в результате кулоновских столкновений и излучения, поэтому он начинает эффективно ускорять частицы, начиная с некоторой энергии, называемой энергией инжекции. Эффективнее ускоряются тяжелые ионы. В космосе движущимися магнитными неоднородностями являются МГД волны и разрывы.

### § 2. Магнитная накачка

К механизмам, промежуточным между полностью самосогласованными и одночастичными, относится магнитная накачка Ливена. В этом механизме предполагается, что плазма помещена во внешнее магнитное поле  $B(t)$ , которое изменяется с частотой  $\Omega \ll \omega_g$ , где  $\omega_g$  - циклотронная частота частицы. Схема действия магнитной накачки показана на рис.6.1.

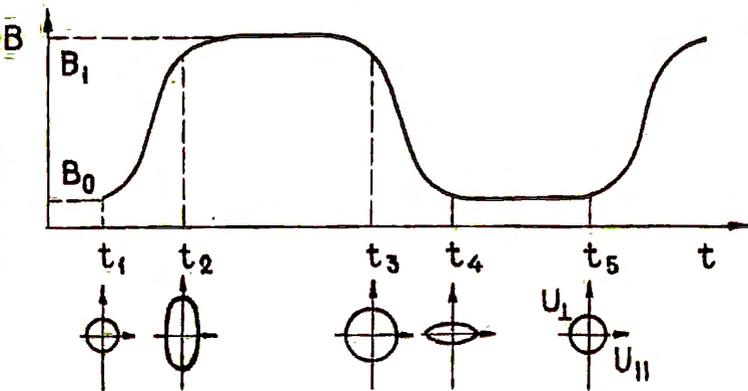


Рис.6.1. Схема, поясняющая действие магнитной накачки: на верхнем рисунке - изменение магнитного поля  $B$  со временем  $t$ , на нижнем - функция распределения в пространстве скоростей

Если при  $t = 0$  имеется изотропное распределение частиц по pitch-углам, и за период от  $t_1$  до  $t_2$  магнитное поле быстро нарастает от  $B_0$  до  $B_1$ , то в результате действия бетатронного механизма функция распределения становится анизотропной. От  $t_2$  до  $t_3$  происходит изотропизация функции распределения в результате развития анизотропных неустойчивостей. При такой изотропизации часть полученной поперечной энергии превращается в продольную, и при уменьшении  $B(t)$  за время от  $t_3$  до  $t_4$ , не изменяется. От  $t_4$  до  $t_5$  происходит изотропизация, и цикл повторяется. Количество энергии, теряемой частицами за время от  $t_3$  до  $t_4$ , меньше энергии, приобретаемой ими за время от  $t_1$  до  $t_2$ . Поэтому частицы, в среднем, ускоряются. Кинетическое уравнение, описывающее магнитную накачку имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} = \hat{S}' f_0, \quad (6.4)$$

где  $dp_{\perp}/dt = p_{\perp} \dot{B}/2B$ ,  $dp_{\parallel}/dt = 0$ ,

$\bar{v}$  считается заданной функцией  $t$ ,  $\hat{S}'$  - оператор, описывающий изотропизацию функции распределения при развитии высокочастотной турбулентности, уровень которой самосогласованным образом определяется функцией  $f_0$ .

### § 3. Турбулентное ускорение

При развитии в плазме турбулентности, функция распределения изменяется в соответствии с диффузионным уравнением

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial p_j}, \quad (6.5)$$

где  $D_{ij}$  - тензор диффузии в пространстве импульсов, определяемый видом турбулентности и спектром  $\mathcal{E}_k(\bar{k})$ , который самосогласованным образом определяется видом  $f_0$ . В случае изотропной турбулентности, изотропизация частиц осуществляется быстрее, чем изменение их энергии, поэтому

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 D(p) \frac{\partial f_0}{\partial p}. \quad (6.6)$$

Как уже отмечалось в главе 5, задача может быть решена аналитически в приближении слабой турбулентности. В плазме без магнитного поля может иметь место ускорение частиц ионно-звуковой турбулентностью, развитие ленгмировской турбулентности приведёт к преимущественному ускорению электронов. В случае модуляционной неустойчивости, электроны могут эффективно ускоряться при взаимодействии с плазменными кавернами. В плазме с магнитным полем происходит ускорение МГД (преимущественно альвеновской) турбулентностью. Это ускорение близко к стохастическому фермиевскому ускорению при рассеянии частиц альвеновской волной на малые углы. Рассеяние на большие углы относится к механизмам взаимодействия с сильной МГД турбулентностью, и пока не может быть рассмотрено самосогласованно.

#### § 4. Ускорение на ударных волнах

Одним из наиболее распространённых нелинейных явлений в космосе можно считать ударные волны. В межпланетной среде они генерируются солнечными вспышками и в результате обтекания солнечным ветром магнитосфер планет (стоячие ударные волны). В проблеме ускорения космических лучей больших энергий основную роль, видимо, играют ударные волны, образующиеся при вспышках новых и сверхновых звёзд. Ускорение на фронтах бесстолкновительных ударных волн является одним из основных механизмов ускорения космических лучей.

При пересечении фронта ударной волны, частица движется в переменном электромагнитном поле. В поперечной МГД волне все частицы попадают на фронт и пересекают его. Если (2) - область за фронтом, а (1) - область перед фронтом, то при однократном пересечении

$$\frac{W_{2\perp}}{W_{1\perp}} = \frac{B_2}{B_1} \quad (6.7)$$

в нерелятивистском случае, и

$$\frac{W_{2\perp}}{W_{1\perp}} = \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^{1/2} \quad (6.8)$$

релятивистском. При однократном взаимодействии частицы с косою ударной волной, её энергия не может увеличиться более, чем в 7 раз в нерелятивистском случае и более, чем в 13 раз

в релятивистском. Поэтому для значительного набора энергии частицами необходимо многократное повторение действия этого механизма. Многократное пересечение частицей фронта ударной волны может иметь место при взаимодействии частицы с ансамблем ударных волн или при возвращении частицы на фронт одной ударной волны в результате рассеяния турбулентными магнитными полями. Последнее имеет место при распространении ударных волн в турбулентной среде. При этом дополнительное ускорение возникает из-за столкновения с магнитными неоднородностями, движущимися с различными скоростями по разнице скорости фронта волны. В результате сноса частиц по течению при ускорении на ударных волнах, характерное время ускорения и выхода из режима ускорения одного порядка величины, и формируется степенной энергетический спектр частиц.

#### § 5. Ускорение частиц при пересоединении магнитных

##### силовых линий

В токовых слоях присутствуют сильные электрические поля в собственной системе координат плазмы. Разрушение токовых слоев сопровождается возбуждением сильных индукционных электрических полей. Поэтому с процессом пересоединения связано ускорение частиц в космосе. В общем случае, процесс магнитного пересоединения, т.е. нарушения условия вмороженности с изменением топологии магнитных силовых линий, происходит вблизи особых силовых линий. Наиболее изучен случай, когда ток параллелен нулевой линии магнитного поля.

Стационарный режим пересоединения в двумерном случае иллюстрирует рис.6.2. В режиме стационарного пересоединения плазма с вмороженным магнитным полем втекает в слой со скоростью  $V_E$  и вытекает со скоростью  $V_A$ . Наличие проводимости  $\sigma$  в слое обеспечивает квазистационарное перезамыкание со скоростью  $V_E = c^2 / 4\pi \sigma a$ . Под действием натяжения магнитных силовых линий и градиентов газового давления плазмы выбрасывается из слоя со скоростью  $V_A$ . Из условия сохранения числа частиц следует, что

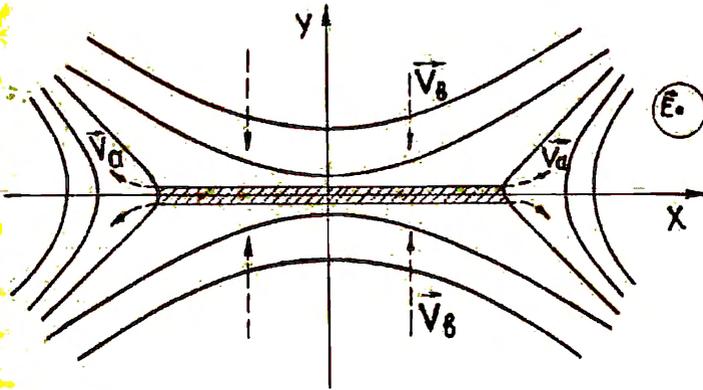


Рис. 6.2. Схема процесса вынужденного пересоединения магнитных силовых линий: плазма со скоростью  $V_\beta$  втекает в слой по его широкой поверхности и вытекает со скоростью  $V_\alpha$  через его узкие концы

$$n_0 V_\beta \delta = n_s V_\alpha \alpha, \quad (6.9)$$

где  $n_0$ ,  $n_s$  - концентрации плазмы вне слоя и внутри него соответственно. Из (6.9) следует, что

$$V_\beta = V_\alpha \left( \frac{e^2}{4\pi \epsilon \delta V_\alpha} \frac{n_s}{n_0} \right)^{1/2}. \quad (6.10)$$

Отношение  $n_s/n_0$  определяется тепловым балансом (в несжимаемой среде  $n_s = n_0$ ).  $V_\alpha$  находится из условия баланса давления внутри и вне слоя  $B_0^2/8\pi = p + \rho V^2$ .

Т.к. на краю слоя  $p = 0$ ,  $V_\alpha$  - порядка альвеновской скорости вне слоя. Течение в окрестности нулевой линии магнитного поля содержит системы пересекающихся или сливающихся ударных волн.

Если ширина токового слоя

$$\delta > V_\alpha \mu^{-1}, \quad (6.11)$$

где  $\delta$  - инкремент развития тиринг - моды, то возникает разрыв токового слоя. На нелинейной стадии возбуждаются электрические поля с напряжённостью  $E \sim (V_0/c) E_0$  в области, где магнитное поле обращается в нуль. Если  $\ell$  - длина токового слоя, то все частицы приобретают энергию порядка  $e\ell E$ .

Рассмотренный механизм разрабатывается в космофизике в связи с проблемой генерации быстрых частиц в солнечных вспышках и ускорения частиц в магнитосфере Земли.

### § 6. Ускорение при расширении плазмы в вакууме

Расширение плазмы в результате быстрого локального нагрева в область, занятую разреженной холодной плазмой, может приводить к появлению быстрых ионов. Если в небольшой области происходит быстрый нагрев электронов, то при расширении плазмы электроны будут стремиться обогнать ионы, и создадутся электрические поля, ускоряющие ионы. В среднем, ионы и электроны движутся со скоростью  $V_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ . Часть ионов может приобрести скорость вплоть до скоростей порядка электронной. При решении задачи, как правило, предполагается, что можно пренебречь влиянием теплового разброса ионов, т.е. для ионов в одномерном случае при расширении вдоль  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= - \frac{ez}{m_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $n_i$ ,  $V_i$  - концентрация и скорость ионов,  $z$  - заряд иона,  $\Phi$  - потенциал электрического поля, а для электронов применимо квазистатическое описание, т.е.

$$f_e(V_x, V_z, x, t) = f_{e0}(m_e(V_x^2 + V_z^2)/2 - e\Phi(x, t)).$$

Предполагается также, что справедливо условие квазинейтральности, т.е.  $n_e = n_i$ . Если имеются ионы нескольких сортов, то происходит ускорения примесных ионов.

§ 7. Двойные слои.

Одним из наиболее сильных нелинейных явлений в плазме можно считать возникновение электростатических двойных слоёв, в которых нарушается квазинейтральность, и в локализованной области пространства возникают сильные электростатические поля.

Найдём распределение потенциала в стационарном одномерном релятивистском двойном слое, расположенном в промежутке  $0 \leq x \leq d$ ,  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(d) = \Phi_0$ . Будем считать первоначально электроны и ионы холодными (это справедливо, если  $e\Phi_0 \gg T_e, T_i$ ). Токи электронов и ионов  $j_e = -en_e v_e$ ,  $j_i = en_i v_i$ . Из закона сохранения энергии следует, что

$$e(\Phi_0 - \Phi) = \frac{m_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}} - m_i c^2, \quad (6.13)$$

$$e\Phi = \frac{m_e c^2}{(1 - v_e^2/c^2)^{1/2}} - m_e c^2 \quad (6.14)$$

Уравнение Пуассона даёт

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_e - n_i) = -4\pi \left( \frac{j_e}{v_e} + \frac{j_i}{v_i} \right). \quad (6.15)$$

Из (6.13) и (6.14) следует, что  $v_e = v_e(\Phi)$ ,  $v_i = v_i(\Phi)$ , поэтому (6.15) может быть проинтегрировано один раз. Откуда

$$\frac{E^2}{4\pi} = - \int \left( \frac{j_e}{v_e} + \frac{j_i}{v_i} \right) d\Phi. \quad (6.16)$$

Из (6.13) получаем  $d\Phi = -m_i v_i dv_i / e(1 - v_i^2/c^2)^{3/2}$ ,

Из (6.14) -  $d\Phi = m_e n_e dv_e / e(1 - v_e^2/c^2)^{3/2}$ .

Поэтому интегрирование (6.16) с учётом, что  $E|_{\Phi=0, \Phi_0} = 0$ , даёт

$$\frac{m_i n_i v_i^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_e n_e v_e^2}{(1 - v_e^2/c^2)^{1/2}} - \frac{E^2}{8\pi} = \text{const} \quad (6.17)$$

Из (6.17) следует, что

$$\frac{j_i}{j_e} = \left( \frac{\Phi_0 + 2m_e c^2/e}{\Phi_0 + 2m_i c^2/e} \right)^{1/2} \quad (6.18)$$

При  $\Phi_0 \ll 2m_e c^2/e$ , т.е. в нерелятивистском случае, получаем

условие Ленгмюра

$$j_i / j_e = (m_e / m_i)^{1/2} \quad (6.19)$$

В ультрарелятивистском пределе

$$j_i = j_e \quad (6.20)$$

В нерелятивистском пределе ток  $j = j_e + j_i$  и размер слоя связаны законом 3/2

$$j d^2 / \varphi_0^{3/2} = \text{const}, \quad (6.21)$$

в релятивистском

$$j d^2 / \varphi_0^2 = \text{const} \quad (6.22)$$

На рис.6.3 показаны зависимости потенциала, электрического поля и плотности заряда  $\rho$  в одномерном двойном слое.

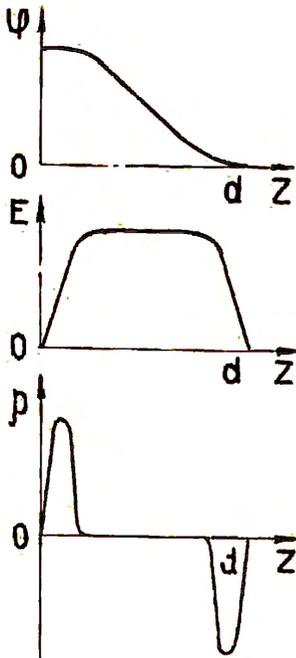


Рис.6.3. Распределение потенциала  $\varphi_0$ , электрического поля  $\vec{E}$  и плотности заряда  $\rho$  в одномерном электростатическом двойном слое.

Квазинейтральность вне слоя обеспечивается холодными электронами и ионами, которые в отличие от электронов и ионов, переносящих ток и являющихся пролетными, принято называть запертыми.

Образование двойных слоёв в ряде случаев можно рассматривать как нелинейную стадию бунемановской неустойчивости. В космосе, кроме рассмотренных двойных слоёв, могут образовываться вырожденные двойные слои (с соблюдением квазинейтральности, но сильно немаксвелловскими функциями распределения частиц) и косые (по отношению к магнитному полю) двойные слои, ускоряющие электроны и ионы. С такими двойными слоями, в настоящее время, связывается ускорение электронов в спокойных дугах полярного сияния и появление в магнитосфере пучков ионов.

### Л и т е р а т у р а

1. Аршимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Наука, 1979.
2. Кацомцев В.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
3. Основы физики плазмы (под ред. Галеева А.А., Судана Р.). М.: Наука, 1983-84, т.1,2, дополнение к второму тому.
4. Ахмезер А.И., Ахмезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
5. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
6. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
7. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1977, т.1,2. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М.: Атомиздат, 1978.
8. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975.
9. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
10. Солитоны в действии (под ред. Лонгрена К., Скотта Э.). М.: Мир, 1981.
11. Данилов Ю.А., Петвиашвили В.И. Солитоны в плазме. Сб. Итоги науки и техники. Физика плазмы т.4. М.: ЕИНИТИ, 1983.
12. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.

13. Бхатнагор П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
14. Теория солитонов. Метод обратной задачи (под ред. Новикова С.П.). М.: Наука, 1980.
15. Незлин М.В. Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982.
16. Незлин М.В. Электронные пучки в плазме. Сб. Итоги науки и техники. Физика плазмы т. 5. М.: ВИНТИ, 1984.
17. Астрофизика космических лучей (под ред. Гинзбурга В.Л.). М.: Наука, 1984.
18. Топтыгин И.К. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983.
19. Тверской Б.А. Динамика радиационных поясов Земли. М.: Наука, 1968.
20. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яптин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984.
21. Гершман Б.Н. Динамика ионосферной плазмы. М.: Наука, 1974.
22. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. М.: Мир, 1985.
23. Крюгер А. Солнечная радиоастрономия и радиофизика. М.: Мир, 1984.
24. Акасофу С.-И., Чепмен С. Солнечно - земная физика. М.: Мир, 1974, т. 1,2.
25. Троицкая В.А., Гульельми А.В. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М.: Наука, 1973.
26. Раткли Дж. Введение в физику ионосферы и магнитосферы. М.: Мир, 1975.
27. Космическая геофизика (под ред. Эгеланда А., Холтера О., Омхольта А.). М.: Мир, 1976.
28. Альвен Х., Фельтхаммар К.Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
29. Шафранов В.Д. Электромагнитные волны в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М.: Госатомиздат, 1963.
30. Михайловский А.Б. Колебания неоднородной плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М.: Госатомиздат, 1963.

31. Ваденов А.А. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М.: Госатомиздат, 1963.
32. Сагдеев Р.З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964.
33. Ваденов А.А., Рюттов Д.Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1972.
34. Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964.
35. Тимофеев А.В., Пистунович В.И. Циклотронная неустойчивость анизотропной плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1967.
36. Михайловский А.Б. Электромагнитные неустойчивости немасвелловской плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1972.
37. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Нелинейная теория плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М.: Атомиздат, 1973.
38. Петвиашвили В.И. Нелинейные волны и солитоны. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1979.
39. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1980.
40. Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. Циклотронная неустойчивость радиационных поясов Земли. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1980.

Е. Е. Антонова,

М. Ф. Бахарева, В. Н. Ломоносов, Б. А. Тверской

**УСКОРИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ  
В КОСМОСЕ**

Издательство Московского университета

1988

Елизавета Евгеньевна Антонова  
Мергарита Федоровна Бахарова  
Владимир Николаевич Ломоносов  
Борис Аркадьевич Тверской

Ускорительные механизмы в Космосе

Редактор

К. И. Стратилатова

---

Подписано к печати 10.02.89г.

Л-15046.

Заказ N 4354. Тираж 200 экз. Офсетная печать.

Бумага для множительных аппаратов.

Формат 60×84/16. Уч. – изд л. – 5,37. Усл. п. л. 6,7 Цена 20к.

Заказное

---

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

---

Отпечатано в лаборатории офсетной печати и множительной  
техники НИИЯФ МГУ  
119899, Москва ГСП

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

---

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра космических лучей и физики космоса

Е. Е. Антонова, М. Ф. Бахарев, В. Н. Ломоносов, Б. А. Тверской

УСКОРИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ В КОСМОСЕ

Издательство Московского университета

1988

УДК 550.3+533.9

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета  
Московского университета

Рецензенты

Ю.И. Логачёв, доктор физ.-мат. наук

И.С. Веселовский, доктор физ.-мат. наук

Антонова Е.Е. и др. Ускорительные механизмы в Космосе /  
Е.Е. Антонова, М.Ф. Бахарева, В.М. Ломоносов, Е.А. Тверской.  
— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 107 с.: ил. — 18.

Рассмотрены основные механизмы ускорения заряженных частиц в космофизических системах. Изложены основы теорий ускорения частиц в радиационных поясах Земли и планет, ускорения частиц полярных сияний, ускорения частиц при импульсном пересоединении, ускорения типа магнитной накачки, турбулентного и фермиевского ускорения, ускорения ударными волнами и ускорения при крупномасштабных движениях космической плазмы.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов V курса отделения ядерной физики физического факультета МГУ при изучении курса "Физика плазмы космического пространства". Может быть использовано аспирантами и специалистами в области космических лучей и космофизики.

077(02)-88-заказное

ISBN 5-211-01259-3



Издательство Московского  
университета, 1988

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение.....	5
Глава 1. Ветатронное ускорение частиц и формирование радиационных поясов.....	7
§ 1. Потоки заряженных частиц в естественных магнитных ловушках.....	7
§ 2. (L, V) координаты и функция распределения частиц.....	11
§ 3. Условия диффузии частиц поперек дрейфовых оболочек.....	14
§ 4. Радиальная диффузия под действием внезапных импульсов.....	16
§ 5. Источники и потери частиц поясов.....	20
Глава 2. Ускорение частиц индукционными электрическими полями при пересоединении магнитных силовых линий.....	23
§ 1. Магнитное пересоединение.....	23
§ 2. Ускорение частиц индукционным электрическим полем в окрестности X-линии при развитии тигане-моды.....	27
§ 3. Функция распределения частиц.....	31
§ 4. Спектр ускоренных частиц.....	33
Глава 3. Ускорение частиц продольными электростатическими полями.....	36
§ 1. Независимость магнитных силовых линий.....	36
§ 2. Ускорение частиц обводными слоями.....	40
§ 3. Ускорение частиц в пробочных ловушках и возникновение оболочечных структур у функций распределения.....	45
Глава 4. Ускорение заряженных частиц в крупномасштабных нестационарных магнитных полях (магнитная накачка).....	51
§ 1. Качественное рассмотрение.....	51
§ 2. Кинематическое квазилинейное рассмотрение в ультрарелятивистском случае.....	53

§ 3. Уравнение диффузии в импульсном пространстве.....	59
§ 4. Постановка самосогласованной задачи о спектре волн и частиц.....	64
§ 5. Условия возможности ускорения.....	68
<b>Глава 5. Стохастическое ускорение.....</b>	<b>70</b>
§ 1. Столкновения частиц с магнитогидродинамическими возмущениями конечной амплитуды.....	70
§ 2. Статистическое фермиовское ускорение.....	72
§ 3. Турбулентное ускорение.....	78
<b>Глава 6. Ускорение ударными волнами и крупномасштабными сжимаемыми движениями плазмы.....</b>	<b>83</b>
§ 1. Ударные волны в космической плазме.....	83
§ 2. Взаимодействие быстрых частиц с плоской ударной волной.....	84
§ 3. Уравнение переноса быстрых заряженных частиц.....	87
§ 4. Спектр частиц, ускоренных плоской ударной волной в турбулентной среде.....	90
§ 5. Ускорение частиц крупномасштабными сжимаемыми движениями плазмы.....	94
<b>Глава 7. Ускорение в сдвиговых течениях.....</b>	<b>96</b>
§ 1. Механизм ускорения.....	96
§ 2. Кинетическое расслоение.....	98
§ 3. Спектр и угловое распределение частиц.....	102
<b>Л и т е р а т у р а.....</b>	<b>105</b>

## В в е д е н и е

Многообразие встречающихся в литературе механизмов ускорения заряженных частиц обусловлено различными свойствами тех физических систем, в которых они работают. Энергия ускоряемых частиц во всех ускорительных механизмах черпается из энергии крупномасштабных движений плазмы, поэтому полное решение задачи о формировании спектра нетепловых частиц включает рассмотрение физики процессов передачи энергии заданного крупномасштабного движения небольшой группе ускоряемых частиц. Такое рассмотрение пока возможно далеко не во всех случаях. Ряд задач данного типа рассмотрен ниже.

Т.к. энергия, приобретаемая частицей  $\Delta\epsilon$ , равна работе электрического поля  $E$  вдоль траектории движения частицы ( $\Delta\epsilon = e \int v dt$ , где  $e$ ,  $v$  — заряд частицы и ее скорость), то обычно механизмы ускорения делят на регулярные, при которых среднее электрическое поле  $\langle E \rangle \neq 0$ , и стохастические, при которых  $\langle E \rangle = 0$ . Т.к. радиус ларморовской орбиты частицы растет с ростом энергии, а большие электрические поля имеют малые пространственные масштабы, стохастические механизмы, как правило, привлекаются для объяснения ускорения частиц до больших энергий (проблема ускорения космических лучей). Однако, не исключена возможность существования во Вселенной процессов ускоряющих частицы регулярными электрическими полями до высоких и сверхвысоких энергий.

Крупномасштабные движения вещества во Вселенной поддерживают существование в плазме градиентов различных параметров и приводят к возникновению токов и соответствующих этим токам магнитных полей. Ламинарное движение, как правило, оказывается неустойчивым, и возбуждаются различные виды плазменной турбулентности. При малых возмущениях движение плазмы носит нерегулярный характер, поэтому возможно применение методов статистической физики к решению задачи об ускорении частиц. Возмущения конечной амплитуды могут носить ламинарный характер. Таким возмущениям отвечают регулярные электрические поля.

Как правило, регистрируемые на эксперименте ускоренные частицы возникают в результате действия нескольких механизмов ускорения. Поэтому попытки восстановить только по зарегистрированному спектру вид ускорительного механизма сталкивается с большими трудностями, тем более, что вид спектра не определяется только типом ускорительного механизма, а зависит от потерь и условий удержания и выхода частиц из области ускорения.

Настоящее пособие посвящено анализу основных физических особенностей, наиболее часто привлекаемых для объяснения наблюдаемых ускоренных частиц ускорительных механизмов. Самостоятельное ознакомление с материалом пособия при изучении курса "Физика плазмы космического пространства" поможет более глубоко изучить вопрос об ускорении заряженных частиц в космосе, являющегося неотъемлемой составной частью решения задачи динамики космофизических систем.

§ I. *Потоки заряженных частиц в  
естественных магнитных ловушках*

Локальными космофизическими объектами, содержащими большое число энергичных частиц являются естественные магнитные ловушки, к которым относятся магнитосферы Земли и таких больших планет солнечной системы как Юпитер и Сатурн. Характерные времена изменения параметров таких ловушек связаны с медленными конвективными движениями проводящего вещества внутри планет. В атмосферах звезд и Солнца такие движения имеют гораздо меньшие временные масштабы, и времена существования локальных магнитных ловушек, в которых удерживаются частицы, соответственно меньше. В ряде случаев магнитные поля ловушечного типа могут образовываться в солнечном ветре. Как известно, плазма конечного давления является диамагнетиком и может существовать устойчиво только в областях минимумов магнитного поля. В то же время, отдельные энергичные заряженные частицы, составляющие хвост функции распределения, могут быть эффективно захвачены в ловушке с нарастающей к центру напряженностью магнитного поля, и время их жизни в ловушке будет определяться торможением при кулоновском взаимодействии с частицами плазмы, перезарядкой с нейтральными атомами и взаимодействием с волнами генерируемыми как самими частицами (если их концентрация больше определенной величины), так и внешними источниками (менее энергичными частицами плазмы, молниевыми разрядами в атмосфере планеты, промышленными радиопомехами и др.). Для частиц больших энергий, для которых ларморовский радиус соизмерим с характерными масштабами неоднородности поля (для оценок можно брать  $r_L \propto U / |r|$ ) магнитный момент перестает быть адиабатическим инвариантом и возникает диффузия по pitch-углам, не зависящая от внешних возмущений.

Удержание частиц имеет место, если параметры ловушки стационарны или медленно меняются по сравнению с тремя

характерными временами движения частиц в ловушке: временем оборота по ларморовской орбите  $2\pi/\omega_B$  (где  $\omega_B$  - циклотронная частота частицы в магнитном поле  $B$ ),  $\tau_\theta$  - времени осцилляций частицы между магнитными пробками и  $\tau_\phi$  - времени обхода частицы вокруг центра ловушки в результате градиентного дрейфа и дрейфа за счет кривизны магнитного поля. Как правило,  $\omega_B^{-1} \ll \tau_\theta \ll \tau_\phi$ . Заряженные частицы могут быть инжектированы внутрь ловушки за счет распада нейтронов, могут попасть в нее с торцов (при действии ускорительных механизмов на торцах) или с периферии ловушки. В первом случае энергия частицы жестко фиксирована и определяется спектром распадающихся нейтронов, во втором - энергетикой источника, а в 3-ем - видом спектра частиц на периферии ловушки. При движении частицы в область с большим  $B$  при сохранении первого и второго адиабатических инвариантов эта энергия нарастает и спектр становится более жестким. Последний механизм вносит основной вклад в формирование радиационных поясов Земли и планет - потоков энергичных заряженных частиц в областях захваченной радиации.

Распределение потока частиц с определенной энергией в зависимости от расстояния от центра планеты имеет один или несколько максимумов, возникновение которых обусловлено конкуренцией процессов ускорения при сносе частиц в области больших магнитных полей и процессов потерь. На рис 1.1 показаны зависимости потоков протонов, а на рис 1.2 - электронов в магнитосфере Земли. Протоны и альфа частицы попадают в геомагнитную ловушку из солнечного ветра. Наряду с солнечным ветром вторым источником протонов и более тяжелых ионов является земная ионосфера, из которой частицы вытягиваются и ускоряются электрическими полями вдоль магнитных силовых линий. Этот источник действует, в основном, на периферии ловушки и приводит к образованию ионных радиационных поясов Земли. В геомагнитной ловушке при энергиях  $>40$  мэВ начинает играть роль нейтронный распад. Область повышенной интенсивности протонов с энергиями  $>100$  кэВ имеет 1 максимум (на малых расстояниях от Земли при энергиях  $>40$  мэВ наследуется небольшой второй максимум).

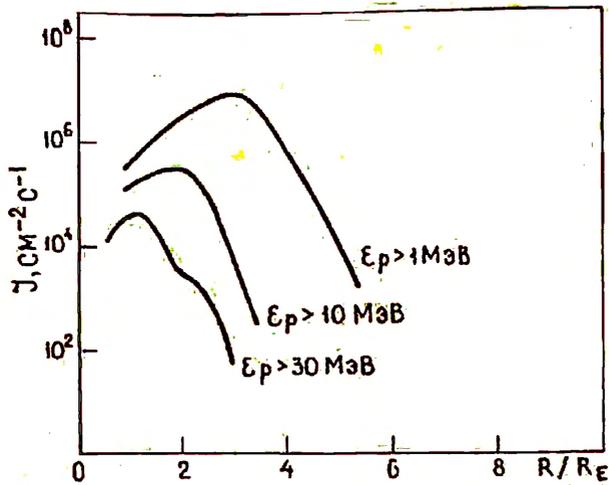


Рис. 1.1.  
Зависимости потоков протонов от геоцентрического расстояния ( $R_E$  — радиус Земли)

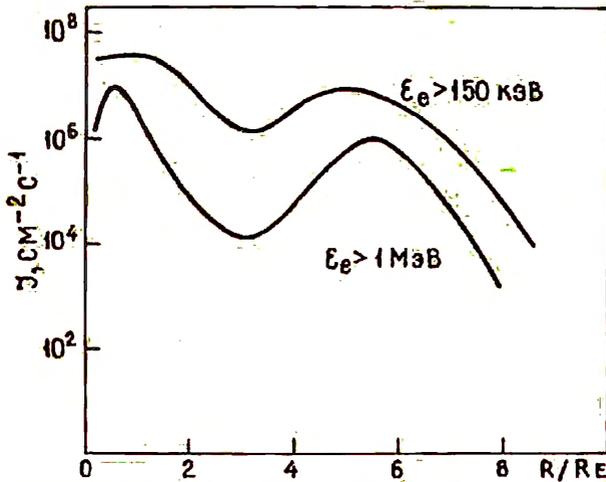


Рис. 1.2.  
Зависимости потоков электронов от геоцентрического расстояния

Характерной особенностью зависимости потоков протонов от геоцентрического расстояния является увеличение крутизны внешнего края пояса и приближение максимума к земле с ростом энергии. Дифференциальный спектр протонов вблизи плоскости экватора имеет вид

$$\frac{\partial T_0}{\partial \epsilon} = S_0 \exp(-\epsilon/\epsilon_0). \quad (1.1)$$

При энергиях больших некоторого критического значения в энергетическом диапазоне 0,1–30 мэВ величина  $\epsilon_0$  изменяется в

соответствии с сохранением первых двух адиабатических инвариантов. Поэтому, если в качестве независимых переменных выбрать адиабатические инварианты, спектр частиц во внутренних областях гесмагнитной ловушки не будет зависеть от геоцентрического расстояния, т.е. источник энергичных частиц радиационных поясов Земли в энергетическом интервале 0,1–30 мэВ находится на периферии ловушки. В отличие от протонов, область повышенной интенсивности электронов с энергией >100 кэВ распадается на 2 максимума – внешний и внутренний пояса. Зазор между ними, в котором интенсивность на 2–3 порядка ниже чем в максимуме, расположен на геоцентрическом расстоянии  $3-3,2 R_E$ . Его положение слабо зависит от энергии. Во внутренней зоне и в зазоре временные вариации на больших высотах невелики. В то же время распределение интенсивности и спектр электронов во внешней зоне сильно изменяется, и амплитуды вариаций достигают трех порядков величины. Несмотря на значительные отличия ионных и электронных радиационных поясов, их объединяет одна важная общая черта: возрастание интенсивности в экваториальной плоскости с уменьшением геоцентрического расстояния связано с увеличением жесткости спектра, а не с увеличением плотности частиц всех энергий, что является характерной особенностью адиабатического ускорения.

Перенос частиц с периферии в центр ловушки осуществляется электрическими полями, которые могут иметь индукционный (при изменениях магнитного поля) или электростатический характер. Если характерное время изменения электрического поля  $\tau$  удовлетворяет условиям  $\tau_e \ll \tau \ll \tau_p$ , частицы движутся с сохранением первого и второго адиабатических инвариантов, а третий инвариант – магнитный поток через дрейфовую траекторию частицы – сохраняется. Для того, чтобы происходило радиальное движение частицы, электрическое поле должно иметь долготную, зависящую от долготы, компоненту. Если эти поля имеют случайную природу (что, как правило, реализуется в эксперименте), движение частицы по радиусу будет иметь диффузионный характер (малые неупорядоченные смещения за характерное время изменения поля) и может быть описано в диффузионном приближении. При

этом устанавливается некоторое стабильное равновесное распределение, соответствующее усредненному за большой период (характерное время переноса из области малых в область больших магнитных полей) распределению частиц, а резкие изменения параметров источника вызывает медленно движущиеся диффузионные волны.

Среди радиационных поясов планет солнечной системы наиболее изучены радиационные пояса Юпитера. Дипольный момент Юпитера в  $10^4$  раз больше, чем дипольный момент Земли, а наклон юпитерианского диполя составляет  $10^\circ$  по отношению к оси вращения планеты. Самая внутренняя часть юпитерианской магнитосферы на расстоянии  $\ll 10 R_J$  (где  $R_J$  — радиус Юпитера) имеет очень близкое сходство с внутренними областями магнитосферы Земли. В этой области зарегистрированы интенсивные потоки энергичных электронов и ионов, стабильно захваченных в дипольноподобном магнитном поле. Значительным отличием от магнитосферы Земли является присутствие 5 внутренних спутников Юпитера, орбиты которых расположены внутри радиационных поясов. Спутники влияют на интенсивность и угловые распределения потоков энергичных частиц как вследствие поглощения, так и инжекции частиц. Во внутренних областях магнитосферы Юпитера радиальная иpitch-угловая диффузии являются преобладающими процессами, аналогично тому, как это происходит в радиационных поясах Земли.

Ниже будут рассмотрены процессы формирования радиационных поясов на примере радиационных поясов Земли.

## §2. $(L, V)$ координаты и функция распределения частиц

Напомним, что магнитное поле Земли на расстояниях  $\ll 5 R_E$  близко к магнитному полю диполя с магнитным моментом  $M_E = 8,02 \cdot 10^{15}$  Гл. В сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$  с центром в диполе и осью, антипараллельной магнитному моменту, напряженность поля на геомагнитной широте  $(\pi/2 - \theta)$  и расстоянии  $R$  от центра диполя

$$B = M_E (4 - 3 \sin^2 \theta)^{1/2} / R^3, \quad (1.2)$$

а уравнение силовой линии имеет вид

$$R = R_E L \sin^2 \theta, \quad (1.3)$$

где параметр  $L$  определяет расстояние от вершины силовой линии до центра Земли, измеренное в земных радиусах  $R_E$ . В поле диполя зависимость периода долготного дрейфа  $\tau_\varphi = 2\pi R_E L / v_\varphi$  (где  $v_\varphi$  - скорость долготного дрейфа) от  $L$  и энергии частицы  $\epsilon$  определяется соотношением

$$\tau_\varphi = c \Phi_\varphi(\theta_m) / L \epsilon, \quad (1.4)$$

где константа  $c$  слабо зависит от энергии (изменяется в 2 раза при переходе от нерелятивистских к релятивистским энергиям), функция  $\Phi_\varphi(\theta_m)$  определяет зависимость  $\tau_\varphi$  от широты зеркальной точки  $(\pi/2 - \theta_m)$  и изменяется от  $\Phi_\varphi(\pi/2) = 1$  на экваторе до  $\Phi_\varphi(0) = 1,5$ .

В случае земного диполя для частиц с энергиями  $\approx 100$  МэВ  $\tau_\varphi \approx \tau_\theta \cdot \omega_B^{-1}$ , и траектории частиц заполняют аксиально симметричную дрейфовую оболочку. Отклонение магнитного поля Земли от поля диполя, связанное с геомагнитным динамо, рассчитывается по методу Гаусса с использованием разложения по сферическим гармоникам. На расстояниях от центра Земли  $> 5-6 R_E$  сильно сказываются искажения поля, вызываемые токами в окружающей плазме. С дневной стороны поле поджато в результате обтекания магнитосферы солнечным ветром, с ночной - магнитные силовые линии вытянуты и образуют геомагнитный хвост. Если в случае поля диполя частицы с различными магнитными моментами  $\mu$  и вторыми инвариантами  $I_\varphi$  находятся первоначально на одной и той же силовой линии, они в дальнейшем, дрейфуя с разными скоростями, будут заполнять одну и ту же дрейфовую оболочку. При этом говорят о вырождении дрейфовых оболочек. В реальном поле такое вырождение снимается: частицы с разными  $\mu$  и  $I_\varphi$  дрейфуют по разным оболочкам, т.е. оболочки расщепляются. При этом, если искажения поля диполя невелики, то, как показал Мак-Илвайн, дрейфовая оболочка частицы слабо зависит от широты точки отражения. Сохранение  $\mu$  и  $I_\varphi$  при движении частицы позволило Мак-Илвайну ввести систему координат

( $L, B$ ), в которой удобно описывать движение частиц в реальном, отличном от дипольного, магнитном поле в тех областях, где это отличие не очень велико. В этой системе координат каждая силовая линия, пересекающая поверхность Земли (точнее оболочку, отстоящую от поверхности Земли на  $10^2-10^3$  км, что позволяет исключить мелкие аномалии магнитного поля, не влияющие на движение частиц), характеризуется двумя величинами: напряженностью поля  $B_m$  и параметром  $L$ , который определяется следующим образом. Для данной силовой линии вычисляется величина

$$I = \int_m^m (1 - B/B_m)^{1/2} dl, \quad (1.5)$$

где интегрирование проводится вдоль магнитной силовой линии, соединяющей магнитосопряженные точки. Т.к. в стационарном магнитном поле энергия частицы сохраняется, эта величина пропорциональна  $I_0$  для частицы, имеющей точки отражения на высотах  $10^2-10^3$  км. Далее через точку  $B_m$  проводятся дипольные магнитные силовые линии и из них выбирается та, для которой расчет по формуле (1.5) приводит к такому же значению  $I$ , как и в реальном поле. Расстояние  $L$ , измеренное в  $R_E$ , на котором данная дипольная силовая линия пересекает плоскость экватора, ставится в соответствие данной точке.

При произвольной инжекции частиц на данную дрейфовую оболочку за время  $t_p^2/\Delta t_p$  (где  $\Delta t_p$  — разброс значений дрейфовых периодов инжектированных частиц) устанавливается распределение частиц, при котором линии  $B = \text{const}$  являются линиями постоянной плотности частиц, поэтому величина потока зависит только от  $L$  и координаты вдоль магнитной силовой линии. Таким образом трехмерная картина измерений со спутников может быть представлена в двумерном пространстве, что позволяет приводить запутанные массивы данных к достаточно простой форме. Если процессы, приводящие к изменениям адiabатических инвариантов, энергии  $\epsilon$  или числа частиц в некоторой силовой трубке поля, характеризуются временами  $\tau, \tau_0$ , то вдоль силовой линии устанавливается квазистационарное распределение частиц, однозначно связанное

с угловым распределением и спектром в плоскости экватора. Если  $f(L, p, \alpha_0)$  - функция распределения частиц в плоскости экватора, где  $B=B_{\min}$  ( $p$  - импульс частицы,  $\alpha_0$  - экваториальный питч-угол), то в точке силовой линии, где напряженность поля равна  $B$

$$f(L, p, \alpha) = f_0(L, p, \arcsin[(\sin^2 \alpha B_{\min}/B)^{1/2}]). \quad (1.6)$$

В важном частном случае, когда  $f_0 = \psi(p) \sin^{\nu} \alpha_0$ , функция  $f = \psi(p) \sin^{\nu} \alpha (B/B_{\min})^{-\nu/2}$ , т.е. угловое и энергетическое распределения частиц будут одинаковыми по всей силовой линии, а их плотность изменяется как  $(B/B_{\min})^{-\nu/2}$ .

При переходе с магнитной оболочки  $L$  на магнитную оболочку  $L'$  импульс частицы изменяется как  $p' = p(L/L')^{3/2}$  при  $\alpha_0 = 0$ , а при  $p_1 = 0$  в силу сохранения второго инварианта  $p' = pL/L'$ . С ошибкой менее 3%, когда точки отражения лежат на широтах  $\leq 30^\circ$ , основной вклад в изменение энергии частицы вносит бетатронное ускорение и  $p' \approx p(L/L')^{3/2}$ . Большинство частиц в магнитной силовой трубке имеет точки отражения на широтах меньше  $30^\circ$  ( $\alpha_0 \geq \arcsin[(B/B_{\min})^{-1/2} \pi/31] \approx 36^\circ$ ). При изотропном распределении такие частицы составляют 60% от общего числа частиц, а при  $f_0(\alpha_0) \propto \sin^2 \alpha_0$  - 90%. Поэтому при изучении динамики основной массы частиц можно исключить угловое распределение и ввести функцию распределения  $\theta(J, L, t)$  такую, что величина  $\theta(J, L, t) dJ dL$  дает число частиц между оболочками  $L, L+dL$  в интервале значений  $J = pL^{3/2}$  от  $J$  до  $J+dJ$ .

### §3. Условия диффузии частиц поперек дрейфовых оболочек

Далеко не всякое возмущение приводит к диффузии частиц поперек дрейфовых оболочек. Если характерное время возмущения достаточно велико ( $\tau \gg \tau_p$ ) или возмущение имеет аксиально симметричный характер, движение частицы обратимо, т.е. при исчезновении возмущения частица возвращается на ту же дрейфовую оболочку. В первом случае сохраняется третий адиабатический инвариант - магнитный поток через дрейфовую

траекторию, и при деформациях дрейфовой оболочки дрейфовая траектория следует за изменениями оболочки. При аксиально симметричных возмущениях сохраняется проекция обобщенного момента импульса  $M = (r(p + eA/c))$  (где  $r, p, e$  - радиус вектор, импульс и заряд частицы,  $c$  - скорость света,  $A$  - вектор потенциал поля) на ось симметрии. Т.к. в дрейфовом приближении  $eA/c \gg p$  ( $A \ll Br$  и  $cp/eA \ll r \ll 1$ , где  $r$  - масштаб неоднородности поля), с точностью до небольших осцилляций при ларморовском вращении  $M_z = r \sin \theta A_\varphi = \text{const}$ . Последнее выражение является уравнением силовой линия. Откуда следует, что частица при аксиально симметричных полях движется вместе с силовой линией и по окончании возмущения возвращается на исходную оболочку. Таким образом первым условием необратимого движения частиц поперек дрейфовых оболочек является нарушение третьего адиабатического инварианта, а вторым условием - существование долготной компоненты электрического поля, зависящей от долготы.

Третьим условием диффузии является резонанс азимутального движения частиц и возмущений электрического поля, т.е. наличие в спектральных функциях долготных гармоник Фурье электрического поля достаточно больших возмущений на частотах

$$\Omega_r = m \Omega_D = m v_D / LR_E, \quad (1.7)$$

где  $m$  - номер долготной гармоники,  $v_D$  - скорость азимутального дрейфа частицы. Получим это условие для случая движения частицы в экваториальной плоскости при наличии возмущений электрического поля. В рассматриваемом случае уравнения движения частицы имеют вид

$$\dot{r}/dt = -c E_r / B, \quad \dot{\varphi}/dt = c E_\varphi / B, \quad (1.8)$$

где  $E_r, E_\varphi$  - компоненты поля  $E$ . При малых смещениях за время одного оборота частицы с частотой  $\Omega$  вокруг Земли, т.е. при  $t + 2\pi/\Omega$

$|\int_t^{t+2\pi/\Omega} (cE/B)/r\Omega dt| \ll 1$  для любого  $t$ , в нулевом приближении

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \varphi = \Omega_D t + \varphi_0, \quad (1.9)$$

где  $\varphi_0$  - начальное угловое положение частицы,  $\Omega_D = 3\mu/er_0^2$  - частота обращения частицы вокруг центра диполя,  $\mu$  - магнитный момент. В первом приближении

$$dr/dt = -E_\varphi(r_0, \varphi = \Omega_D t + \varphi_0, t) / B \cdot c \quad (1.10)$$

Разлагая  $E_\varphi$  в ряд Фурье, получаем

$$r - r_0 = cB^{-1} \int_0^t \sum_{m=-1}^{\infty} E_\varphi^m(r_0, \xi) \cos(m \Omega_D \xi + m \varphi_0 + \gamma(r_0, \xi)) d\xi \quad (1.11)$$

Если среднее по времени поле  $\langle E_\varphi \rangle = 0$ , а это флуктуации не зависят от времени (стационарный эргодичный процесс), то

$$\langle r - r_0 \rangle = 0, \quad \langle (r - r_0)^2 \rangle = (c/B)^2 \sum_m P^m(r_0, m \Omega_D), \quad (1.12)$$

где  $P^m(r_0, m \Omega_D) = \int_0^t E_\varphi^m(r_0, t) E_\varphi^m(r_0, t+\tau) \cos(m \Omega_D \tau) d\tau$  - спектр

мощности флуктуаций электрического поля (в силу предполагаемой стационарности процесса, не зависящей от  $t$ ). Из выражения (1.12) следует, что коэффициент радиальной диффузии под действием флуктуаций электростатического поля со спектром мощности  $P_E$  будет

$$D_{LL}^E \propto L^{6\gamma} \sum_m P_E^m(m \Omega_D). \quad (1.13)$$

Несколько более сложное рассмотрение для флуктуаций геомагнитного поля со спектром мощности  $P_M$  приводит к выражению

$$D_{LL}^M \propto L^{10\gamma} \sum_m \Omega_D^2 P_M^m(m \Omega_D). \quad (1.14)$$

#### §4. Радиальная диффузия под действием внезапных импульсов

В магнитосфере постоянно наблюдаются электрические поля достаточно больших амплитуд, но эти поля сосредоточены на больших  $L$  ( $\geq 6-7$ ), где диффузия частиц по  $L$  носит, в основном, электростатический характер. Во внутренней магнитосфере амплитуды флуктуаций электростатических полей на частотах, кратных частоте вращения частицы вокруг оси диполя, резко убывают в результате экранировки внутренней магнитосферы при

движении частиц плазменного слоя. Основной вклад в формирование радиационных поясов Земли дают быстрые изменения магнитного поля, возникающие при взаимодействии магнитосферы с межпланетными ударными волнами и разрывами - внезапные импульсы (рис. 1.3). В результате сжатия или

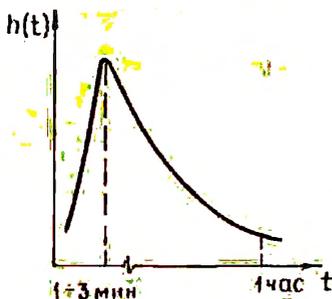


Рис. 1.3. Зависимость возмущения геомагнитного поля от времени при внезапном импульсе

расширения магнитосферы (последнее происходит значительно реже) величина магнитного поля на всей планете изменяется на  $10-40 \gamma$  ( $1\gamma=10^{-5}\text{Гс}$ ). Временные параметры возмущения сильно асимметричны - скачок происходит за  $1-3$  мин, а восстановление за  $1$  час и более. Внезапные импульсы развиваются на Земле и в магнитосфере одинаковым образом. Некоторые положительные импульсы вызывают большие возмущения магнитного поля Земли с продолжительностью около суток - магнитные бури. Спектр внезапного импульса соответствует резонансу с основной массой частиц поясов. Период долготного дрейфа частиц с энергией в  $1 \text{ мэВ}$  при  $L \approx 4-5$  составляет около  $10$  мин. Таким образом время скачка много меньше, а время восстановления много больше периодов долготного дрейфа частиц поясов. Искажение магнитного поля при внезапном импульсе складывается из однородного по  $\varphi$  поля, которое в силу аксиальной симметрии не дает вклада в перенос, и мультиполей. Наиболее эффективной гармоникой с точки зрения переноса является квадруполь с магнитным полем

$$b = b_0(t) \sqrt{L^2} \sin 2\theta \cos \varphi. \quad (1.15)$$

Остальные квадрупольные члены вызывают индукционные электрические поля, долготные компоненты которых

антисимметричны относительно плоскости экватора. При этом дрейфовые смещения частицы в радиальном направлении в противоположных полушариях имеют различные знаки и взаимно уничтожаются. Члены с более высокой мультипольностью быстро убывают с уменьшением  $L$ . Для однозначного определения поля  $E$  из условия  $\text{rot}E = -c^{-1} \partial b / \partial t$  обычно налагается дополнительное условие об идеальной проводимости вдоль магнитных силовых линий, эквивалентное условию смещения частиц вместе с силовыми линиями. На рис.1.4 показано движение частиц при возникновении внезапного импульса. Во время быстрой фазы

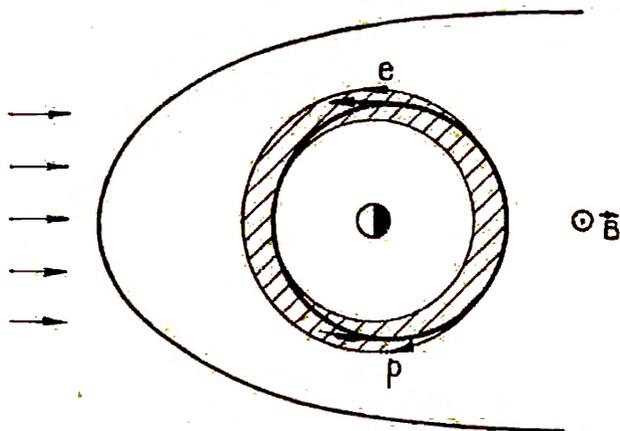


Рис.1.4. Диффузия кольца частиц во время внезапного импульса

цикла частицы, находящиеся на дневной стороне, смещаются по направлению к Земле при сжатии магнитосферы (удаляются при расширении). На ночной стороне имеет место обратная картина. При этом, линии  $L = \text{const}$  движутся как бы навстречу частицам. В результате, при сжатии магнитосферы частицы, первоначально находившиеся на дневной стороне, попадают на траектории с меньшими, а на ночной с большими  $L$  по сравнению с исходным  $L$ . Т.к. после скачка поле меняется медленно по сравнению с периодом долготного дрейфа частиц, третий инвариант сохраняется, новые значения  $L$  "замораживаются", и частицы расходятся по новым дрейфовым траекториям. Протоны или электроны, первоначально дрейфовавшие по бесконечно узкой

оболочке, распределяются по слою конечной толщины. Т.к. амплитуда смещения  $\delta L \propto E/B$ , а для возмущений вида (1.15)  $|b| \propto L$ ,  $|\operatorname{rot} E| \propto E/L \propto |b|$ , то  $E \propto L^2$ , и т.к.  $B \propto L^{-3}$ , то  $\delta L \propto L^5$  и  $D_{LL} \propto L^{10}$ . Таким образом коэффициент диффузии под действием внезапных импульсов определяется степенью асимметрии возмущения магнитного поля и распределением вероятностей импульсов различных амплитуд

$$D_{LL} = D_0 L^{10}, \quad (1.16)$$

где  $D_0$  не зависит от энергии и сорта частиц, если их период дрейфа удовлетворяет неравенству  $1 \text{ мин} \ll t_D \ll 1 \text{ час}$ . Экспериментальные определения  $D_0$  приводят к  $D_0 \approx (5-10) \cdot 10^{-14} R_E^2/\text{с}$ . К соотношению (1.16) приводит достаточно громоздкий расчет, при котором сначала определяется индукционное поле  $E_p$  от поля вида (1.15), а затем рассматривается движение частиц в электрическом и искаженном магнитном полях. Полученные выражения усредняются по фазам начального движения частиц от 0 до  $2\pi$  и находятся среднее  $\Delta L$  и среднеквадратичное  $\overline{\Delta L^2}$  смещения частицы. Если  $T$  - время между двумя последовательными импульсами, то изменение введенной в §2 функции распределения описывается уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial L^2} D \theta - \frac{\partial}{\partial L} U \theta + Q - G, \quad (1.17)$$

где  $D = 0,5 \langle \Delta L^2 / T \rangle$ ,  $U = \langle \Delta L / T \rangle$ ,  $Q$  - мощность источников частиц,  $G$  - скорость потерь. Расчет дает  $\overline{\Delta L^2} = \alpha (\Delta \eta)^2 L^{10}$ ,  $\Delta L = 4\alpha (\Delta \eta)^2 L^9$ , где  $\alpha = \text{const} = 25/98$ , а  $\Delta \eta = \eta - \eta^*$ ,  $\eta = b(t)/B_0$  ( $B_0 = 0,3 \text{ Гс}$  - поле на земном экваторе),  $\eta^*$  - статическая асимметрия поля, обусловленная постоянной составляющей солнечного ветра. Первые два члена в правой части (1.17) можно заменить на  $(-\partial F / \partial L)$ , где  $F$  - диффузионный поток через оболочку с заданным  $L$  при

$$F = -D_0 L^{10} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial L} + \frac{2}{L} \theta \right], \quad (1.18)$$

где  $D_0 = 0,5\alpha \langle (\Delta\eta)^2 / T \rangle$ . Выражение (1.18) содержит регулярный поток частиц к Земле. Это чисто геометрический эффект, связанный с тем, что область, из которой частицы перейдут внутрь данной оболочки, больше, чем область, занятая уходящими из оболочки частицами. Порядок величины направленного потока  $\delta L \cdot \partial(\delta L) / \partial L$ , и, т.к.  $\delta L \propto L^5$ , средний поток  $\propto L^9$ . Отсутствие зависимости  $D_0$  от энергии и сорта частиц обусловлено в случае внезапных импульсов тем, что на стадии смещения частицы движутся в электрическом поле, скорость дрейфа в котором одинакова для всех частиц, а на последующих стадиях движение обусловлено сохранением третьего инварианта, величина которого также не зависит от характера частицы. Расплывание оболочки складывается из смещения силовой линии в плоскости экватора на дневной стороне  $\delta L_1$  и искажения дрейфовой орбиты при возмущении поля  $\delta L_2$ . Смещение  $\delta L_1$  одинаково для всех частиц на данной силовой линии, а  $\delta L_2$  зависит от pitch-угла частицы. В случае внезапных импульсов, для которых все гармоники поля сфазированы,  $D(\alpha=\pi/2)/D(\alpha=0) \approx 1,7$ . В случае хаотических фаз отдельных временных гармоник, коэффициент диффузии для  $\alpha=\pi/2$  на порядок больше, чем для  $\alpha=0$ .

Значение  $D_0$  определяется по прямым измерениям внезапных импульсов и скоростям распространения диффузионных волн. Последние возникают как результат скачкообразных изменений  $\theta$  на границе диффузионной области. Замена переменной  $\xi = D_0 t L^8$  приводит уравнение (1.17) при  $Q=C=0$  к автомодельному виду. Решение автомодельного уравнения дает одиночную диффузионную волну, распространяющуюся к Земле. Время распространения  $t \propto (D_0 L^8)^{-1}$ , и для  $L=1,5$  время переноса составляет почти 200 лет. Получаемое по данным о диффузионных волнах значение  $D_0$  находится в хорошем согласии с данными по внезапным импульсам.

### 55. Источники и потери частиц поясов

Наряду с солнечным ветром, наиболее мощным источником частиц в магнитосфере является ионосфера. Эти источники

работают на больших  $L$  оболочках и входят в качестве граничного спектра при решении уравнения диффузии. Во внутренней магнитосфере действует источник от распада нейтронов альbedo космических лучей, который может быть задан выражением

$$Q = Q_0 L^{-\mu} J^{-\nu}. \quad (1.19)$$

Такая зависимость имеет место в случае степенного энергетического спектра и степенной зависимости полного числа рождающихся в единице объема частиц от  $L$ . Введение источника (1.19) в уравнение переноса позволяет с достаточной точностью описать самый внутренний протонный пояс, максимум которого находится на  $L \approx 1,5$ .

Радиационные пояса в среднем стационарны, а максимумы интенсивности захваченных частиц, как правило, достаточно удалены от Земли. Такая ситуация означает, что имеет место динамическое равновесие между динамическим потоком и утечками частиц. Максимумы частиц определенной энергии лежат там, где время диффузии примерно равно времени жизни. Несмотря на большую угловую анизотропию протонные и ионные радиационные пояса за счет малого числа частиц в трубке, как правило, устойчивы относительно раскачки волн, и гибель частиц при больших энергиях происходит за счет ионизационного торможения, а при меньших ( $\ll 200$  кэВ) начинают играть роль процессы перезарядки. Характерное время кулоновского торможения протона пропорционально кубу импульса. Поэтому при сносе вглубь магнитосферы протона с данным  $J$  время жизни при постоянной плотности холодной плазмы увеличивается как  $L^{3/2}$ . Так как время переноса растет как  $L^{-6}$ , начиная с некоторого  $L$ , где время переноса сравнивается со временем торможения, рост интенсивности приостанавливается, а на меньших  $L$  интенсивность убывает - формируется максимум пояса. Положение максимума пояса  $L_m$  связано с энергией при постоянной плотности холодной плазмы соотношением

$$L_m \propto \varepsilon^{-3/16}. \quad (1.20)$$

При заданной энергии для нерелятивистской частицы с атомным весом  $A$  и зарядом  $Z$  время торможения  $\tau_c(\varepsilon) \propto A^{-1/2} Z^{-2}$ . В случае  $\alpha$  частиц ( $A=4$ ,  $Z=2$ ) время торможения в 8 раз меньше, чем для протонов той же энергии, а время диффузии не зависит

от энергии. Поэтому максимум пояса  $\alpha$  - частиц расположен в  $8^{1/3} \approx 1,9$  раза дальше от Земли, чем максимум протонного пояса той же энергии.

Утечка электронов из внешнего радиационного пояса и из зазора на много порядков быстрее ионизационного торможения и связана с несохранением магнитного момента при взаимодействии с волнами. Полная теория такого взаимодействия еще далека от своего завершения. Она должна учитывать вклад черенковского и циклотронного резонансов волн с частицами при выполнении резонансных условий

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = n\omega_B, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.21)$$

(где  $\omega, k_{\parallel}$  - частота и продольная компонента волнового вектора,  $v_{\parallel}$  - продольная компонента скорости частицы,  $\omega_B$  - циклотронная частота) для всех направлений  $k$ ; генерации волн за счет анизотропии распределения частиц и процессы их распространения, обратное влияние волн на частицы и наличие внешних источников волнового излучения. Многие особенности распределения электронов в радиационных поясах удалось объяснить в рамках квазилинейной теории циклотронной неустойчивости радиационных поясов с учетом зависимости отражающих свойств ионосферы от частоты волны. Для внутреннего электронного радиационного пояса из-за увеличения минимальной резонансной энергии частиц с уменьшением  $L$  не возникает циклотронных резонансных взаимодействий с постоянно наблюдаемыми внутри плазмосферы плазмосферными шипениями, обеспечивающимиpitch-угловую диффузию и потерю частиц в области зазора и во внешнем поясе, и основную роль играет рассеяние при кулоновских взаимодействиях.

В районе максимума протонного пояса интенсивность частиц близка к критической, необходимой для раскачки альвеновских волн. Небольшие вариации потоков протонов или коэффициента отражения волн от ионосферы вызывает генерацию распространяющихся вдоль магнитных силовых линий волновых пакетов, регистрируемых на Земле в виде пульсаций типа Pc1 - жемчужин, взаимодействие с которыми вызывает выпадение избытка протонов.

## Глава 2. Ускорение частиц индукционными электрическими полями при пересоединении магнитных силовых линий

### §1. Магнитное пересоединение

Магнитным пересоединением или пересоединением магнитных силовых линий называется течение плазмы, сопровождающееся изменением топологии магнитных силовых линий. Различают случаи вынужденного и спонтанного пересоединения. При вынужденном пересоединении движение происходит под действием внешних сил, при спонтанном - возникает как результат неустойчивости системы.

Вопрос о пересоединении магнитных силовых линий возникает при изучении движений плазмы с большими магнитными числами Рейнольдса

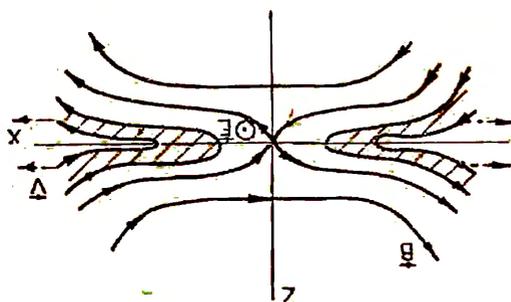
$$Re_m = 4\pi\sigma v_A L/c^2. \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  - проводимость плазмы,  $v_A = B_0 / (4\pi\rho)^{1/2}$  - альфвеновская скорость,  $L$  - характерный масштаб движения,  $c$  - скорость света. Большие масштабы космофизических объектов приводят к условию  $Re_m \gg 1$ , соответствующему замороженности магнитных силовых линий, т.е. очень высокой индуктивности плазмы, приводящей к сохранению магнитного потока через любой движущейся с частицами плазмы контур. При  $Re_m \gg 1$  топология магнитных силовых линий сохраняется (они как бы приклеены к частицам плазмы). В космофизических объектах часто наблюдаются процессы с достаточно большими  $L$ , для которых рассчитанное по формуле (2.1) с обычной кулоновской проводимостью значения  $Re_m \gg 1$  (солнечные вспышки, образование плазмоидов в хвосте магнитосферы Земли и др.), но наблюдается изменение топологии магнитных силовых линий. В этих областях неприменимо описание плазмы в рамках идеальной магнитной гидродинамики, и их возникновение связано с образованием МГД разрывов и тонких (по сравнению с  $L$ ) токовых слоев.

Токовые слои длительное время могут находиться в

метастабильном состоянии и запасать значительное количество энергии. В зависимости от граничных условий, электропроводности, теплопроводности и т.д. возможны различные пути эволюции токовых слоев. При разрывах токовых слоев (рис. 2.1) натяжение пересекнувшихся магнитных силовых

Рис. 2.1. Разрыв токового слоя



линий приводит к энергичному выталкиванию плазмы из области разрыва (образуются нестационарные течения кумулятивного типа), возникают сильные индукционные электрические поля. Энергия, запасенная в магнитном поле, превращается в тепловую энергию плазмы, энергию направленных плазменных струй и энергию ускоренных частиц.

Токовые слои могут возникать в результате течения плазмы вблизи нулевых и особых (принадлежащих одновременно двум магнитным областям) магнитных силовых линий. На таких линиях электрическое поле, возникающее при изменениях магнитного поля, вызывает ток вдоль линии, который из-за взаимодействия с магнитным полем принимает форму ленточного токового слоя - квазиодномерного токового слоя, разделяющего противоположно направленные магнитные поля.

Процессы пересоединения магнитных силовых линий наиболее полно исследованы в случае двумерной геометрии, где удается провести аналитическое рассмотрение течений плазмы. При этом результаты теории получают хорошее подтверждение при лабораторном моделировании процессов пересоединения. Существует несколько моделей процесса пересоединения, которым отвечают различные постановки задачи и различные

условия в области разрыва магнитных силовых линий. При определенном выборе граничных условий и течений плазмы могут реализоваться стационарные режимы пересоединения. Ламинарные стационарные режимы пересоединения, такие как течение Петчека, в котором области с пересоединенными и непересоединенными магнитными силовыми линиями разделены стоячими альвеновскими ударными волнами (на этих волнах происходят резкие повороты магнитных силовых линий), на пересечении которых находится малая диффузионная область, и решение Соннерапа, в котором вводится в 2 раза большее число ударных волн, чем в случае решения Петчека, и возможно пересоединение однородных магнитных полей, требуют выполнения совершенно определенных граничных условий, реализация которых имеет малую вероятность. При турбулентном стационарном режиме пересоединения в области пересоединения существует развитая турбулентность. Турбулентный квазистационарный режим пересоединения во многих случаях связан с превышением тока в токовом слое порога одной из токовых неустойчивостей, а параметры области пересоединения могут подстраиваться под заданные граничные условия. Такой режим описывается обычно введением в уравнения эффективного аномального сопротивления, намного превышающего кулоновское сопротивление, что приводит к соответствующему уменьшению  $Re_{\eta}$ . В качестве возможных неустойчивостей рассматриваются ионно-звуковая, ценоно-циклотронная и градиентная. Токовые неустойчивости имеют определенные пороги, поэтому токовые слои могут находиться в спокойном ламинарном состоянии, пока плотность тока не превысит порога неустойчивости. Если это произойдет на небольшом участке слоя, то образуется область пересоединения и может произойти разрыв токового слоя. Поэтому режим аномального сопротивления может входить составной частью в спонтанные механизмы пересоединения.

Перестройка топологии магнитного поля может происходить и при возмущениях, длина волны которых сравнима с толщиной токового слоя. Такая неустойчивость называется разрывной или тиринг-модой. Перестройка топологии поля связана с тем, что притяжение токовых пучков, из которых состоит токовый слой,

может привести к их слиянию. При этом магнитная энергия слоя уменьшается, и образуются магнитные острова. Развитие разрывной неустойчивости в бесстолкновительной плазме обычно связывается с затуханием Ландау на резонирующих частицах при выполнении условия резонанса  $\omega = kv$ . Такое взаимодействие имеет место лишь в узкой области вблизи нейтральной плоскости, где магнитное поле обращается в нуль и не влияет на движение частиц. В одномерных конфигурациях, которые абсолютно неустойчивы, основной эффект дает взаимодействие с электронами. Резонансное взаимодействие с электронами разрушается уже при очень слабых, поперечных к току, полях  $B_{\perp}$ , таких, что гирочастота электронов в поле  $B_{\perp}$  становится соизмеримой с инкрементом неустойчивости  $\gamma$ . Если электроны соизмеримы, то может осуществляться резонанс Ландау с ионами и развиваться ионная тиринг-мода (рис. 2.2). При  $B_{\perp}$  больших определенного критического значения, токовый слой

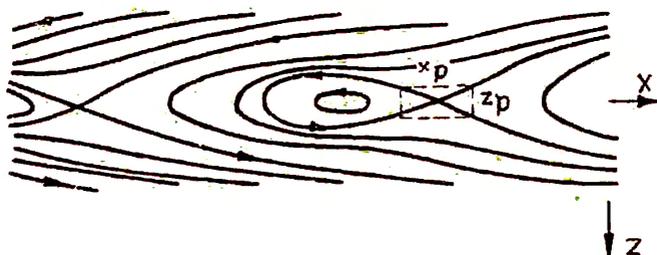


Рис. 2.2. Развитие тиринг-моды в хвосте магнитосферы Земли

устойчив. Т.о., изменяя  $B_{\perp}$ , можно перевести токовый слой из стабильного в нестабильное состояние. Такая ситуация реализуется в хвосте магнитосферы Земли, где имеется токовый слой с током, направленным с утра на вечер, и где, в результате развития тиринг-моды, формируются плазменные образования с замкнутыми магнитными силовыми линиями: плазмиды. Развитие ионной тиринг-моды при достаточно сильном  $B_{\perp}$  оказывается стабилизированным в широком интервале параметров за счет замороженности магнитного поля в

электронную компоненту. Затраты энергии на изменение плотности электронов при развитии возмущений делает ее нарастание энергетически невыгодным. При этом, динамика неустойчивости оказывается чувствительной к влиянию даже очень малых эффективных столкновений. Одним из наиболее мощных дестабилизирующих эффектов является механический резонанс между продольными и поперечными степенями свободы движений электронов. При приближении к области резонанса траектории электронов начинают стохастизироваться, происходит рассеяние электронов по pitch-углам, что эквивалентно рассеянию при взаимодействии с турбулентностью.

С процессом накопления и высвобождения магнитной энергии в токовых слоях связан, вероятно, и механизм солнечных вспышек. Солнечные вспышки возникают в активных областях солнечной атмосферы, содержащих, как правило, солнечные пятна. Магнитная теория вспышек предполагает, что при вспышках выделяется свободная энергия магнитного поля, т.е. избыток магнитной энергии по сравнению с энергией потенциального поля, имеющей те же источники на фотосфере. Этот избыток магнитной энергии связан с токами, протекающими в короне, а процесс вспышек есть процесс быстрого изменения этих токов.

При распаде токового слоя происходит быстрая аннигиляция магнитного поля, и возникают сильные индукционные электрические поля, в которых происходит ускорение частиц. При этом, характерная конфигурация магнитного поля имеет форму сингулярной нулевой линии гиперболического типа или X-линии (рис. 2.2). Ниже мы рассмотрим ускорение частиц в окрестности нулевой линии магнитного поля при развитии тиринг-моды в качестве примера действия данного типа ускорительных механизмов.

## *§2. Ускорение частиц индукционным электрическим полем в окрестности X-линии при развитии тиринг-моды*

Рассмотрим процесс ускорения в простейшей двумерной задаче, не учитывающей конечность длины X-линии, т.е. будем

считать, что размер области, вдоль которой происходит ускорение, меньше длины  $X$ -линии. Частица проводит в окрестности  $X$ -линии, где она может свободно ускоряться лишь конечное время  $\tau_A$ , а затем под действием слабой, но конечной, силы Лоренца, она выходит из нее, и набор ее энергии замедляется. Применительно к магнитосфере Земли данная модель хорошо описывает ускорение ионов. Для электронов время их жизни в области ускорения контролируется общей длиной  $X$ -линии. Решение задачи о динамике токового слоя приводит к изменению напряженности вертикальной составляющей магнитного поля  $B_1(t) \sin kx$  со временем в соответствии с зависимостью показанной на рис. 2.3. На линейной фазе от  $t=0$  до

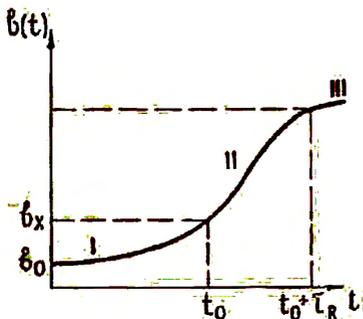


Рис.2.3. Схема роста нормальной компоненты магнитного поля  $b(t)=B_1(t)/B_0$  со временем при развитии тиринг-моды в нейтральном токовом слое: I - линейная фаза, II - нелинейная взрывная фаза, III - фаза насыщения

$t=t_0$  нормальная к слою компонента поля растет по экспоненте

$$b_{1L}(t) = B_1(t)/B_{0z} = b_0(t) \exp(\gamma_L t), \quad (2.1)$$

где  $\gamma_L$  - инкремент неустойчивости, определяемый шириной слоя, температурами электронов и ионов и величиной волнового вектора,  $B_1$  - перпендикулярная к слою компонента поля,  $B_{0z}$  - горизонтальная компонента магнитного поля вне слоя. С момента  $t_0$  наступает нелинейная фаза

$$b_{1NL}(t) = b_* \left[ 1 - \frac{t-t_0}{\tau_R} \right]. \quad (2.2)$$

где  $b_* = b_0 \exp(\gamma_L t_0)$ ,  $\tau_R$  - время взрыва. Нелинейная фаза заканчивается насыщением неустойчивости при  $b_1(t) \approx 1$ . В системе координат с осью  $x$  вдоль слоя с током, направленным вдоль оси  $y$ , и осью  $z$  направленной поперек слоя в области близкой к точке разрыва

$$B_1(t) \sin kx \approx B_1(t) kx, \quad |B_0| = |B_{0x} \operatorname{th}(z/\Delta) e_x| \approx B_{0x} z/\Delta, \quad (2.3)$$

где  $\Delta$  - толщина слоя,  $B_0$  - невозмущенное поле, имеющее зависимость от  $z$ , соответствующую равновесию Харриса. Вектор потенциал  $A = Ae_y$  ( $B = \operatorname{rot} A$ ,  $E = -c^{-1} \partial A / \partial t$ ) такого поля равен

$$A = B_{0x} [k^{-1} b_1(t) (1 - 0,5 k^2 x^2) - \Delta^{-1} z^2]. \quad (2.4)$$

Уравнения движения частицы, с учетом сохранения обобщенного импульса вдоль оси  $y$ , имеют вид

$$\dot{x}_{tt} = \omega_c b_1(t) k v_y(t) x, \quad (2.5)$$

$$v_y(t) = k^{-1} \omega_c b_1(t) - 0,5 \omega_c |b_1(t) kx^2 - \Delta^{-1} z^2| = \text{const}, \quad (2.6)$$

$$\dot{z}_{tt} = -\omega_c v_y(t) z / \Delta, \quad (2.7)$$

где  $\omega_c = eB_{0x}/mc$  ( $e, m$  - заряд и масса иона). В области  $-k^{-1} < z < k^{-1}$  в уравнении сохранения обобщенного импульса (2.6) можно пренебречь третьим слагаемым в левой части. Т.к. ускорения частиц происходит в основном вдоль оси  $y$ , а приобретаемая в электрическом поле индукции энергия частиц много больше тепловой, можно положить  $v_y(0) = 0$ . Из уравнений (2.5), (2.7) следует, что движение по оси  $x$  неустойчиво, а по оси  $z$  устойчиво. Размер коридора  $d_z$ , в котором колеблется частица между отражающими слоями по  $z$ , порядка ларморовского радиуса частицы в магнитном поле на краях коридора, т.е.  $d_z \approx r_{B_{0x}} B_x / B_{0x} = r_{B_{0x}} \Delta / d_x$ , откуда  $d_z = (r_{B_{0x}} \Delta)^{1/2}$ . При сделанных предположениях движение по координате  $x$  описывается уравнениями

$$x_{tt} - \omega_0^2 b_0^2 \exp(2\gamma_L t) x = 0, \quad x(0) = x^0, \quad x_t(0) = x_t^0 \quad \text{при } 0 < t < t_0. \quad (2.8)$$

$$x_{tt} - \omega_0^2 b_*^2 [1 - (t - t_0)/\tau_R]^{-2} x = 0, \quad x(t_0) = x^{t_0}, \quad x_t(t_0) = x_t^{t_0} \quad \text{при} \\ t_0 < t < t_0 + \tau_R. \quad (2.9)$$

Заменой переменной  $\tau = \exp(\gamma_L t)$  уравнение (2.8) сводится к уравнению

$$x'' + \tau^{-1} x' - \gamma_L^{-2} b_0^2 \omega_0^2 x = 0, \quad (2.10)$$

решением которого являются модифицированные функции Бесселя  $I_0(A\tau)$  и  $K_0(A\tau)$ , где  $A = \omega_0 b_0 / \gamma_L$ . Напомним, что  $dI_0(\xi)/d\xi = I_1(\xi)$ ,  $dK_0(\xi)/d\xi = -K_1(\xi)$  и  $I_0(\xi)K_1(\xi) + I_1(\xi)K_0(\xi) = -\xi^{-1}$ , поэтому

$$x(t) = A[K_1(A)x^0 + K_0(A)x_t^0 / A\gamma_L] I_0(\tau) + A[I_1(A)x^0 - I_0(A)x_t^0 / A\gamma_L] K_0(\tau) \\ \text{при } 0 < t < t_0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.9) сводится заменой  $\zeta = 1 - (t - t_0)/\tau_R$  к уравнению

$$x'' - (\omega_0 b_* \tau_R)^2 x / \zeta^2 = 0, \quad (2.12)$$

решениями которого являются  $\zeta^{0,5+\alpha}$ , где  $\alpha = [0,25 + (\omega_0 b_* \tau_R)^2]^{1/2}$ . Поэтому решение уравнения (2.9) дается выражением

$$x(t) = 0,5\alpha^{-1} \{ (0,5+\alpha)x^{t_0+\tau_R} x_t^{t_0} \} [1 - (t - t_0)/\tau_R]^{0,5-\alpha} \quad (2.13) \\ - 0,5\alpha^{-1} \{ (0,5-\alpha)x^{t_0+\tau_R} x_t^{t_0} \} [1 - (t - t_0)/\tau_R]^{0,5+\alpha} \quad \text{при } t_0 < t < t_0 + \tau_R.$$

Вне области  $-k^{-1} < x < k^{-1}$  ускорение малоэффективно и частицы движутся по дрейфовым траекториям.

### §3. Функция распределения частиц

Если известны решения уравнений движения, то функция распределения частиц в момент  $t$  -  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, t)$  связана с функцией распределения  $f_1$  в момент  $t_1 < t$  соотношением

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, t) = \frac{D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{1t})}{D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t)} f_1(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, t), \mathbf{r}_{1t}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, t), t_1), \quad (2.14)$$

где  $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{1t})/D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t)$  - якобиан преобразования от начальных координат и скоростей к конечным. Уравнения движения по осям  $x, y, z$  в данном случае не зависят друг от друга, поэтому

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{1t})/D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t) = D_x D_y D_z, \quad (2.15)$$

где  $D_x = (\partial x_1^t / \partial x^t) (\partial x_1^t / \partial x_t^t) - (\partial x_1^t / \partial x_t^t) (\partial x_1^t / \partial x^t)$ , и для функции распределения вдоль оси  $x$

$$f(x, x_t, t) = \frac{D(x_1, x_{1t})}{D(x, x_t)} f(x_1(x, x_t, t), x_{1t}(x, x_t, t), t_1). \quad (2.16)$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что якобиан преобразования и на линейной и на нелинейной фазах равен 1. Полагая начальное распределение частиц максвелловским,  $f_0 = \pi^{-1/2} v_T^{-1} n_0 \exp(-(x_t^0/v_T)^2)$  и учитывая, что при больших  $\xi$   $I_p(\xi) = \exp(\xi)/(2\pi\xi)^{1/2}$ , получаем при больших  $t$  ( $\exp(\gamma_L t) \gg 1$ ) на линейной фазе

$$f_L(x, x_t, t) = \pi^{-1/2} v_T^{-1} n_0 \exp \left[ -v_T^{-2} S(t) \left( x_t - A \gamma_L \int^{\gamma_L t} x \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

где  $S(t) = (2\pi)^{-1} A K_1^2(A) \exp \left[ -\gamma_L t + 2Ae^{\gamma_L t} \right]$ . На нелинейной фазе при  $(t-t_0)/\tau_R^{-1}$

$$\begin{aligned}
 f_{NL}(x, x_t, t) = f_L(x^{t_0}, x_t, t) \cdot x_t^{t_0}(x, x_t, t), t_0) = \\
 \frac{n_0}{\pi^{1/2} v_T} \exp \left\{ - \frac{S(t_0)}{v_T^2} \left[ \frac{\alpha + 0,5}{\tau_R} + A \gamma_L e^{\gamma_L t_0} \right]^{-0,5-\alpha} \left( 1 - \frac{t-t_0}{\tau_R} \right)^{-0,5-\alpha} x_t \right. \\
 \left. + \frac{1}{2\alpha} \left[ \alpha + 0,5 + A \gamma_L e^{\gamma_L t_0} \right] \left( 1 - \frac{t-t_0}{\tau_R} \right)^{0,5-\alpha} x_t^2 \right\} \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Принтегрировав (2.17) и (2.18) по скоростям, можно получить, что в области ускорения концентрация частиц на линейной фазе равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_L(x, x_t, t) dx_t = \frac{n_0}{G_L(t)} = n_0 \frac{(2\pi)^{1/2}}{A^{1/2} K_1} \exp \left[ \frac{\gamma_L t}{2} - A e^{\gamma_L t} \right], \quad (2.19)$$

а на нелинейной фазе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{NL}(x, x_t, t) dx_t = \frac{n_0}{G_{NL}(t)} = n_0 \frac{2\alpha (1 - (t-t_0)/\tau_R)^{\alpha-0,5}}{G_L(t_0) [\alpha + 0,5 + A \gamma_L \tau_R \exp(\gamma_L t_0)]}, \quad (2.20)$$

где  $G_L$ ,  $G_{NL}$  - функции убывания частиц. Плотность частиц убывает в области ускорения за счет того, что сила Лоренца выбрасывает частицы из области вблизи  $x=0$ .

#### §4. Спектр ускоренных частиц.

Рассмотрим теперь вопрос об энергетическом спектре ускоренных частиц. Из выражения (2.6) получаем энергию частиц, ускоренных вдоль нейтральной линии

$$\epsilon = mv^2/2 = m(\omega_0 b_1(t)/k)^2 = \epsilon_0 b_1^2(t). \quad (2.21)$$

В пренебрежении начальными скоростями все частицы, оставшиеся к моменту  $t$  невылетевшими из области ускорения, имеют одинаковую энергию, и их спектр имеет вид

$$n_{L,NL}^{tr}(\epsilon, t) = \frac{n_0}{G_{L,NL}(t)} \delta(\epsilon_0 b_{1L,NL}(t) - \epsilon), \quad (2.22)$$

где  $\delta(\xi)$  — дельта-функция, т.е. спектр имеет форму узкого горба, высота которого падает со временем (рис. 2.4.).

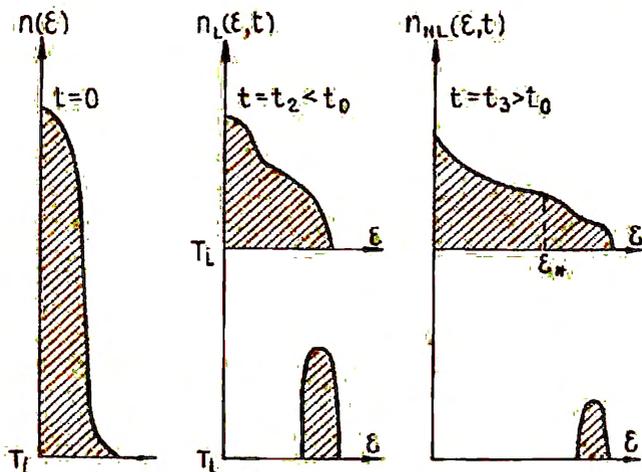


Рис. 2.4. Формирование энергетического спектра ускоренных частиц при развитии тиринг-моды. Нижняя часть рисунка — динамика спектра частиц, находящихся непосредственно в области ускорения, в верхней — вылетевших частиц

Спектр вылетающих из области ускорения частиц формируется по мере убывания частиц в области ускорения и имеет максимальную энергию в момент времени  $t$ , равную  $\varepsilon_0 d_1^2(t)$ . Форма их спектра

$$n_{L,NL}^{ex}(\varepsilon, t) = n_0 \frac{d}{d\varepsilon} \left[ 1 - G_{L,NL}^{-1}(t(\varepsilon)) \right] = - \frac{d}{d\varepsilon} \frac{n_0}{G_{L,NL}(t(\varepsilon))}, \quad (2.23)$$

где функция убывания выражена через энергию частиц. Подставляя в соотношение (2.19)  $t = \gamma_L^{-1} \ln(\varepsilon/\varepsilon_0)/2$ , а в соотношение (2.20)  $t = t_0 - \tau_R [1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^{-1/2}]$ , получаем

$$G_L^{-1} = (2\pi\alpha^{-1}K_1^{-2})^{1/2} (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/4} \exp[-(\varepsilon/\varepsilon_0 \gamma_L^2 d_0^2 \omega_0^{-2})^{1/2}] \quad (2.24)$$

$$G_{NL}^{-1} = 2\alpha d_*^{\alpha-1/2} G_L^{-1}(t_0) (\alpha + 0,5 + A\gamma_L \tau_R e^{\gamma_L t_0})^{-1} (\varepsilon/\varepsilon_0)^{(1-2\alpha)/4}. \quad (2.25)$$

Спектр частиц при больших  $\varepsilon$  на линейной и нелинейной фазах имеет вид

$$n_L^{ex} = \frac{n_0 (2\pi d_0)^{1/2}}{2K_1 \varepsilon_0} \left( \frac{\omega_0}{\gamma_L} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1/4} \exp \left\{ - \frac{\omega_0}{\gamma_L} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \right\} \theta(\varepsilon_0 d_{1L}^2(t) - \varepsilon), \quad (2.26)$$

$$n_L^{ex} = \frac{\alpha(\alpha-0,5) d_*^{\alpha-0,5} \varepsilon_0^{-1}}{G_L(t_0) (\alpha + 0,5 + A\gamma_L \tau_R e^{\gamma_L t_0})} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-(3+2\alpha)/4} \theta(\varepsilon_0 d_{1NL}(t) - \varepsilon). \quad (2.27)$$

где  $\theta(\xi)=0$  при  $\xi<0$  и  $\theta(\xi)=1$  при  $\xi>0$  — ступенчатая функция Хевисайда. По окончании линейной фазы на спектре формируется излом при  $\varepsilon_*=\varepsilon_0 b_*^2$  (рис. 2.4). Однако, так как линейная фаза быстро переходит в нелинейную, такой излом трудно заметить на эксперименте.

Из-за дрейфа в скращенных полях в область ускорения постоянно осуществляется подток частиц сверху и снизу. Можно показать, что учет этого эффекта изменяет форму спектра в области малых энергий, где его форма будет даваться зависимостями

$$n_L^{ex} \propto (\varepsilon/\varepsilon_0)^{-1/2}, \quad n_{NE}^{ex} \propto (\varepsilon/\varepsilon_0)^{-3/4}. \quad (2.28)$$

Рассмотренные процессы хорошо описывают всплески энергичных частиц в хвосте магнитосферы Земли. На эксперименте событиям данного типа отвечает обратная дисперсия по скоростям, когда первоначально наблюдаются частицы малых, а затем больших энергий.

Характер спектра ускоренных частиц зависит от закона, по которому амплитуда магнитного поля изменяется со временем. Форма спектра крайне чувствительна к режиму процесса пересоединения. На линейной фазе в нашем рассмотрении спектр имеет экспоненциальный вид, а на нелинейной — степенной, при этом форма спектра зависит и от сорта ускоряемых частиц. При анализе действия ускорительных механизмов данного типа, как правило, их рассматривают как первоначальную стадию процесса ускорения. Сформированный данным механизмом спектр удается наблюдать только в непосредственной близости от области ускорения, т.к. дальнейшая эволюция функции распределения может быть связана с действием бетатронного механизма или ускорения на ударных волнах.

### Глава 3. Ускорение частиц продольными электростатическими полями

#### §1. Неэквипотенциальность магнитных силовых линий

В космофизических объектах может происходить непосредственное ускорение частиц большими ламинарными электрическими полями вдоль магнитных силовых линий. Возникновение таких полей наряду с тиринг-модой и развитием мелкомасштабной плазменной турбулентности приводит к нарушению условия вмороженности магнитных силовых линий. Отличительной особенностью действия такого ускорительного механизма является возникновение квазистационарных функций распределения частиц, сильно отличающихся от максвелловских во всем диапазоне энергий. Возникновение разности потенциалов  $\Delta\Phi$  между двумя точками одной магнитной силовой линии приводит к приращению энергии всех частиц, попадающих в область ускорения, на  $e\Delta\Phi$ , при этом может реализовываться режим, когда  $e\Delta\Phi \gg T$ , где  $T$  — температура частиц (напомним, что в бесстолкновительной плазме температурой принято называть усредненную энергию хаотического движения частиц).

Покажем, что в случае разреженной плазмы, т.е. плазмы, в которой длина свободного пробега частиц относительно кулоновских соударений намного превышает размер системы, в магнитной ловушке могут возникать большие разности потенциалов между вершиной магнитной силовой линии и ее основанием в случае пространственно разнесенных источников электронов и ионов. Этот пример был рассмотрен Альвеном и Фельтхаммером как доказательство возможности возникновения больших разностей потенциалов на магнитной силовой линии. Предположим, что плазма состоит из ионов одного и электронов сорта с магнитными моментами  $\mu_i$  и  $\mu_e$  соответственно.  $N_e$  электронов и  $N_i$  ионов колеблются между пробками магнитной ловушки, причем в силу общей нейтральности системы  $N_e e_e + N_i e_i = 0$  (где  $e_e$ ,  $e_i$  — заряды электронов и ионов соответственно). Полупериод колебаний частицы сорта  $k$  равен

$l_2$   
 $\tau_k = \int_{l_1}^{l_2} dl/v_{k\parallel}$ , где  $dl$  - элемент длины магнитной силовой линии,

$l_1$  и  $l_2$  - координаты точек отражения,  $v_{k\parallel}$  - компонента продольной скорости частицы сорта  $k$ . Во время движения частица на отрезке  $dl$  создает заряд  $dq_k = e_k dl/\tau_k v_{k\parallel}$ . Предполагая, что на каждом участке силовой линии выполняется условие квазинейтральности, получаем условие  $N_e dq_e + N_i dq_i = 0$ , откуда следует, что  $\tau_e v_{e\parallel} = -\tau_i v_{i\parallel}$ , т.е.  $v_{e\parallel} = \alpha v_{i\parallel}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Уравнение движения частицы сорта  $k$  с массой  $m_k$  при выполнении дрейфового приближения имеет вид

$$m_k \frac{dv_{k\parallel}}{dt} = m_k v_{k\parallel} \frac{dv_{k\parallel}}{dl} = e_k E_{\parallel} - \mu_k \frac{dB}{dl}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что при  $e_i = -e_e = e$

$$-e E_{\parallel} - \mu_e \frac{dB}{dl} = \frac{\alpha^2 m_e}{m_i} \left[ e E_{\parallel} - \mu_i \frac{dB}{dl} \right]. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что

$$E_{\parallel} = - \frac{1}{e} \frac{\mu_e/m_e - \alpha^2 \mu_i/m_i}{1/m_e + \alpha^2/m_i} \frac{dB}{dl} = -K \frac{dB}{dl}. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) следует, что  $E_{\parallel} = 0$  только если магнитное поле однородно, т.е.  $dB/dl = 0$ , или если  $K = 0$ . Т.к.  $\mu_k = W_{k\perp}/v$  и  $W_{e\parallel} = \alpha^2 (m_e/m_i) W_{i\parallel}$ , где  $W_{k\parallel}$  и  $W_{k\perp}$  - продольная и перпендикулярная компоненты кинетической энергии, последнее возможно только при

$$\frac{W_{i\parallel}}{W_{e\parallel}} = \frac{W_{i\perp}}{W_{e\perp}}. \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) означает, что винтовые линии траекторий электронов и ионов имеют одинаковыйpitch-угол. При этом, оба сорта частиц колеблется с одинаковой амплитудой в отсутствии электрического поля. При КЧО разность потенциалов между

точками а и b магнитной силовой линии

$$\Phi_a - \Phi_b = E(B_a - B_b) = e^{-1} \left( \frac{B_b}{B_a} - 1 \right) \left[ \frac{W_{e\parallel} W_{e\perp} - W_{e\perp} W_{e\parallel}}{W_{e\parallel} + W_{e\perp}} \right]_a, \quad (3.5)$$

где выражение в квадратных скобках относится к точке а. Если инжекция ионов с нулевой энергией происходит в точке b, а инжекция электронов в точке а, причем  $B_b > B_a$ , то  $(W_{e\parallel})_a = e(\Phi_a - \Phi_b)$ ,  $(W_{e\perp})_a = 0$ , и соотношение (3.5) дает

$$e(\Phi_a - \Phi_b) = \left( \frac{B_b}{B_a} - 1 \right) W_{e\perp} - W_{e\parallel}. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) показывает, что в ловушках с большим пробочным отношением, т.е. при  $B_b \gg B_a$ ,  $e\Phi \approx W$ .

Обобщение рассмотренной модели при различных распределениях по скоростям инжектируемых в ловушку частиц показывает, что в бесстолкновительной плазме магнитосфер Земли и планет могут существовать значительные разности потенциалов между торцом ловушки и вершиной магнитной силовой линии. Такие разности потенциалов могут быть вычислены по энергиям близких к моноэнергетическим потоков электронов, вторгающихся в ионосферу на высоких широтах. В магнитосфере Земли такие потоки электронов вызывают появление дискретных дуг полярных сияний. Если в некоторой области магнитной ловушки возникает продольное электростатическое поле, то вблизи этой области должны существовать электростатические поля, перпендикулярные магнитным силовым линиям. Такие поля действительно экспериментально наблюдаются при пересечении спутником потоков электронов, ускоренных вдоль магнитных силовых линий (рис. 3.1). На правой части рисунка показаны характерная форма зависимости энергии электронных потоков, измеряемой на спутнике, от координаты  $x$  вдоль траектории полета и вид зависимости от  $x$  поперечного электрического поля. Чем выше

проходит траектория спутника, тем больше регистрируемые электрические поля. Отсюда делается вывод, что форма эквипотенциалей в области, пересекаемой спутником, имеет

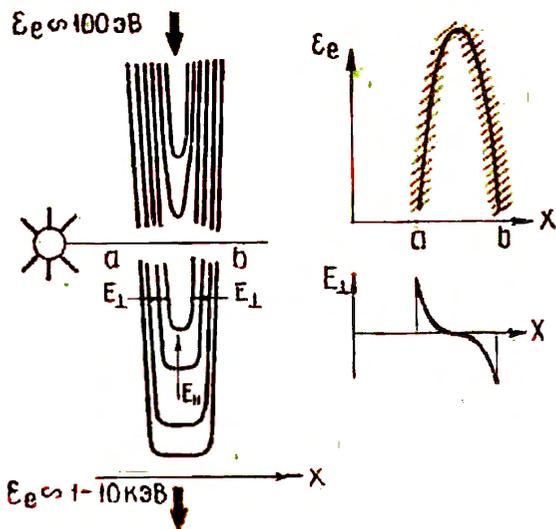


Рис.3.1. Формы эквипотенциалей и зависимости энергии высыпавшихся электронов  $\epsilon_e$  и поперечных электрических полей  $E_{\perp}$  от координаты вдоль траектории полета спутника при пересечении им спокойной однородной дуги полярного сияния

вид, показанный в левой части рис. 3.1. Представленные на рис. 3.1. области высыпаний электронов получили название структур типа "перевернутого V" или  $\Lambda$ -структур. Характерным свойством таких потоков является очень большой ток, переносимый высыпавшимися электронами, который намного превышает  $e n v_T$ , где  $n, v_T$  - концентрация и температура электронов. Поэтому физика образования продольной разности потенциалов должна отличаться от рассмотренного выше идеализированного бестокового случая.

## §2. Ускорение частиц двойным слоем

Если в плазме течет большой продольный ток, т.е. ток вдоль магнитных силовых линий, в ней может развиваться одна из токовых неустойчивостей (в зависимости от параметров системы и токовой скорости: бунемановская, ионно-звуковая, ионно-циклотронная и др.), на нелинейной стадии развития которых могут образовываться области сильных локализованных продольных электростатических полей — двойные слои. Возникновение сильных продольных полей в двойном слое обусловлено нарушением условия квазинейтральности и возникновением больших объемных зарядов.

В системе отсчета, где двойной слой покоится, распределение потенциала в двойном слое должно удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi e (n_i - n_e), \quad (3.7)$$

где предполагено, что плазма состоит из электронов и однозарядных ионов. На границах области скачка потенциала должно выполняться условие квазинейтральности, а распределение зарядов внутри слоя, как функция от  $\Phi$ , определяется из решения уравнений движения частиц при заданных функциях распределения на границах. Решая задачу о движении частиц в заданном потенциальном поле, определяя зависимость  $n_e$  от  $\Phi$  при известном распределении вне слоя и подставляя найденные концентрации в (3.7), можно получить уравнение для потенциала, решение которого дает возможность определить величину скачка потенциала в слое  $\Delta\Phi$  и энергию  $e\Delta\Phi$ , приобретаемую частицей при пересечении слоя.

В качестве примера рассмотрим решение задачи для классического одномерного двойного слоя Ленгмюра. Будем считать, что поток холодных электронов, т.е. электронов, тепловые скорости которых много меньше регулярных, направлен в сторону увеличения координаты  $z$ , направленной вдоль постоянного магнитного поля  $B$ , а поток холодных ионов — в сторону уменьшения. Все величины в одномерном рассмотрении зависят только от  $z$ . Если  $j_e, j_i$  — потоки электронов и ионов,

ускоряемых в слое,  $u_{0e}$ ,  $u_{0i}$  - токовые скорости электронов и ионов вне слоя, то скорости электронов и ионов определяются из закона сохранения энергии и, в силу уравнения непрерывности,

$$j = v \cdot n$$

$$n_{ec} = j_e / [u_{0e}^2 + 2e\Phi/m_e]^{1/2}, \quad n_{ia} = j_i / [u_{0i}^2 + 2e(\Phi_0 - \Phi)/m_i]^{1/2}, \quad (3.8)$$

где  $\Phi = \Phi(z)$ ,  $\Phi_0$  - потенциал на анодной границе слоя при равном нулю катодном потенциале,  $m_{e,i}$  - массы электрона и иона,  $n_{ec}$  - концентрация электронов в катодной части слоя,  $n_{ia}$  - концентрация ионов в анодной части слоя. Квазинейтральность в катодной части слоя должна обеспечиваться ионами, которые отражаются двойным слоем. Если они имеют температуру  $T_{ic}$ , значительно меньшую энергии, приобретаемой частицей в слое, то они подчиняются бальцмановскому распределению, и их концентрация равна

$$n_{ic} = n_{ic}^0 \exp(-e\Phi(z)/T_{ic}). \quad (3.9)$$

Разлагая (3.8), (3.9) в ряд при малых значениях потенциала, получаем, что потенциал может расти с увеличением  $z$ , только если

$$u_{0e} > T_{ic}/m_e. \quad (3.10)$$

Аналогично получаем, что

$$u_{0i} > T_{ea}/m_i, \quad (3.11)$$

где  $T_{ea}$  - температура электронов в анодной части слоя. При учете теплового движения частиц ионного и электронного пучков, условия (3.10), (3.11) заменяются на условия

$$m_e u_{0e}^2 > \gamma T_{ec} + T_{ic}. \quad (3.12)$$

$$m_i u_{0i}^2 > \gamma T_{ia} + T_{ea}. \quad (3.13)$$

где  $\gamma$  - показатель адиабаты. Подставляя (3.8) в (3.7),

получаем уравнение для потенциала

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 4\pi e \left\{ \frac{J_e}{[u_{0e}^2 + 2e\Phi/m_e]^{1/2}} - \frac{J_i}{[u_{0i}^2 + 2e(\Phi_0 - \Phi)/m_i]^{1/2}} \right\}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) можно проинтегрировать один раз, учитывая, что  $d^2\Phi/dz^2 = [d(\Phi/dz)/dz] / dz$ . Откуда получаем

$$E^2(\Phi) = 8\pi e \left\{ J_e m_e [u_{0e}^2 + 2e\Phi/m_e]^{1/2} - u_{0e} \right\} - \\ - J_i m_i \left\{ [u_{0i}^2 + 2e(\Phi_0 - \Phi)/m_i]^{1/2} - (u_{0i}^2 + 2e\Phi_0/m_i)^{1/2} \right\}, \quad (3.15)$$

где  $E = -d\Phi/dz$ ,  $E(0) = 0$ . Выполнение условия  $E(\Phi_0) = 0$  связывает скачок потенциала с электронным и ионным токами. При  $e\Phi_0 \gg m_i u_{0i}^2, m_e u_{0e}^2$  обращение поля в ноль на границе слоя накладывает условие на потоки электронов и ионов

$$m_e^{1/2} J_e = J_i m_i^{1/2}, \quad (3.16)$$

которое называется условием Ленгмюра. Проинтегрировав (3.15) численно, можно найти распределение потенциала в двойном слое. В релятивистском случае соотношение (3.16) приобретает вид  $J_e = J_i$ . Из (3.16) следует, что если в системе отсчета наблюдателя ионные и электронные потоки не связаны данным условием, двойной слой должен двигаться с такой скоростью, чтобы в системе двойного слоя условие Ленгмюра могло бы выполняться. Толщина прямого двойного слоя, которая может быть получена из (3.15), составляет несколько дебаевских длин.

Более сложным для рассмотрения является случай двумерного наклонного двойного слоя. В таких слоях кроме компоненты электрического поля, направленной вдоль  $B$ , существует компонента, направленная поперек  $B$ , которая оказывает влияние на движение частиц. Точное решение задачи требует проведения кинетического рассмотрения, но при выполнении условия малости изменения электрического поля на расстоянии порядка ларморовского радиуса иона может быть проведено гидродинамическое рассмотрение. Пусть, как и в случае прямого двойного слоя, ось  $z$  направлена вдоль

постоянного  $B$ , ось  $x$  - вдоль поперечной к магнитному полю компоненты электрического поля  $E_{\perp}$ , а нормаль к слою образует с направлением магнитного поля угол  $\theta$ . При учете поляризационного дрейфа в поле  $E_{\perp}$  изменение фазы циклотронного вращения  $\varphi$  со временем дается выражением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[ \omega_k^2 - \frac{e_k}{m_k} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

где  $\omega_k = eB/m_k c$  - циклотронная частота частицы сорта  $k$  ( $k=e, i$ ),  $e_k$ ,  $m_k$  - заряд и масса частицы. Относительное изменение фазы пропорционально массе частицы, поэтому вкладом поляризационного дрейфа в изменение фазы вращения электронов можно пренебречь, и учитывать этот вклад только при описании движения ионов. В соответствии с (3.17), интегралом движения в постоянном магнитном поле является не скорость перпендикулярного движения, а

$$v_{\perp}^0 = v_{\perp} \left[ 1 - \frac{e}{m_i \omega_i^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right]^{-1/2} \quad (3.18)$$

Изменение энергии поперечного движения связано с тем, что средний потенциал, который частица "видит" при гировращении отличается от потенциала в точке, где расположен ведущий центр. Вторым интегралом движения является сумма потенциальной энергии ведущего центра и кинетических энергий продольного движения и поляризационного дрейфа

$$\epsilon = e\Phi + \frac{1}{2} m_i v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m_i c^2 \frac{E_{\perp}^2}{B^2} \quad (3.19)$$

где все величины относятся к ионам, т.к. вкладом последнего члена в правой части для электронов также можно пренебречь. Решение кинетического уравнения в данном случае может быть записано в виде произвольной функции интегралов движения, поэтому оно полностью определяется заданием граничных условий. Полагая, что функция распределения не зависит от фазы циклотронного вращения частиц, получаем

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = f^0(v_{\parallel}^0, v_{\perp}^0), \quad (3.20)$$

где  $f^0$  — функция распределения на границе слои, а  $v_{\parallel}^0, v_{\perp}^0$  — определяются из соотношений (3.18), (3.19), в которых производные вычисляются в точке расположения будущего центра частицы. Граничное значение функции распределения ионов задается при  $\Phi = \Phi_0$ , поэтому ниже мы переобозначим  $\Phi = \Phi_0 - \Phi$ . Концентрация пролетных ионов

$$n_{i\pm} = \int f \alpha^3 v = \left[ 1 + \frac{1}{m_i \omega_i^2} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right] \int dv_{\parallel} F \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{2e\Phi}{m_i} + \frac{2e^2}{m_i^2 \omega_i^2} \left( \frac{dx}{dx} \right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

где  $F = F(v_{\parallel}^0) = \int v_{\perp}^0 dv_{\perp}^0 f^0(v_{\parallel}^0, v_{\perp}^0)$ . Вводя

$$n_i^* = \int dv_{\parallel} F \left[ v_{\parallel}^2 + \frac{2e\Phi}{m_i} \right], \quad (3.22)$$

где  $n_i^*$  — концентрация ионов при  $E_{\parallel} = 0$ , проводя интегрирование в (3.21), отбрасывая члены второго порядка малости и вводя переменную  $\eta = z - \alpha x$ , где  $\alpha = \omega_i \theta$ , можно прийти к уравнению

$$(1 + \zeta \alpha^2) \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d\zeta}{d\eta} \frac{d\Phi}{d\eta} = -4\pi e [n_i^* - n_e] \Phi, \quad (3.23)$$

где  $\zeta = 1 + c^2/v_A^2$  — альвеновская диэлектрическая проницаемость,  $v_A^2 = B^2/4\pi n_i^* m_i$  — квадрат альвеновской скорости. Переходя к переменной  $\Phi$ , получаем

$$\frac{d}{d\Phi} \left[ (1 + \zeta \alpha^2) \left( \frac{d\Phi}{d\eta} \right)^2 \right] = -8\pi e [n_i^*(\Phi) - n_e(\Phi)] \Phi. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) отличается от (3.14) тем, что в его левой части стоит множитель  $(1 + \zeta \alpha^2)$ , который обычно много больше 1. Величины  $n_i^*$ ,  $n_e$  рассчитываются так, как если бы

поперечное электрическое поле отсутствовало. Толщина двойного слоя при этом возрастает в  $c/v_A$  раз и составляет несколько ларморовских радиусов ионов.

### §3. Ускорение частиц в пробочных ловушках и возникновение оболочечных структур у функций распределения

При ускорении электронов и ионов в прямом и наклонном двойных слоях формируются пучковые распределения, минимальная энергия которых определяется падением потенциала в слое. Электроны в спокойных дугах полярного сияния обладают pitch-угловым распределением, близким к изотропному. Такая изотропизация при ускорении в продольном поле обусловлена неучтенным в §2 фактором - неоднородностью внешнего магнитного поля  $B$ . При рассмотрении структур, размеры которых много больших ларморовского радиуса в поперечном к магнитному полю направлении, инвариантными переменными являются полная энергия частицы  $\epsilon$  и ее магнитный момент. В этих переменных функция распределения пролетных электронов, имеющих первоначально максвелловское распределение, приобретает вид

$$f = n_e^0 B \frac{1}{2\pi^{1/2} T_e^{3/2}} (\epsilon + e\Phi - B\mu)^{-1/2} \exp(-\epsilon/T_e), \quad (3.25)$$

где  $n_e^0$ ,  $T_e$  - концентрация и температура электронов над областью ускорения,  $\mu$  - магнитный момент электрона. Концентрация внутри ускорительной области  $n_e = \int f d\epsilon d\mu$ . Ускоряясь в продольной разности потенциалов, электроны могут достигнуть торца ловушки - ионосферы и погибнуть там, вызывая свечение (такие частицы принято называть высыпавшимися), либо могут отразиться магнитной пробкой и вернуться в исходную область, потеряв энергию, равную приобретенной при ускорении. Ускорение в данном случае может быть описано только чисто кинетически при рассмотрении всех возможных траекторий частиц. В случае электронов (рис. 3.2) заполнение областей фазового пространства пролетными

частица может быть определено из условия

$$m_e v_e^2 / 2 = \varepsilon + e\Phi - B_1 > 0. \quad (3.26)$$

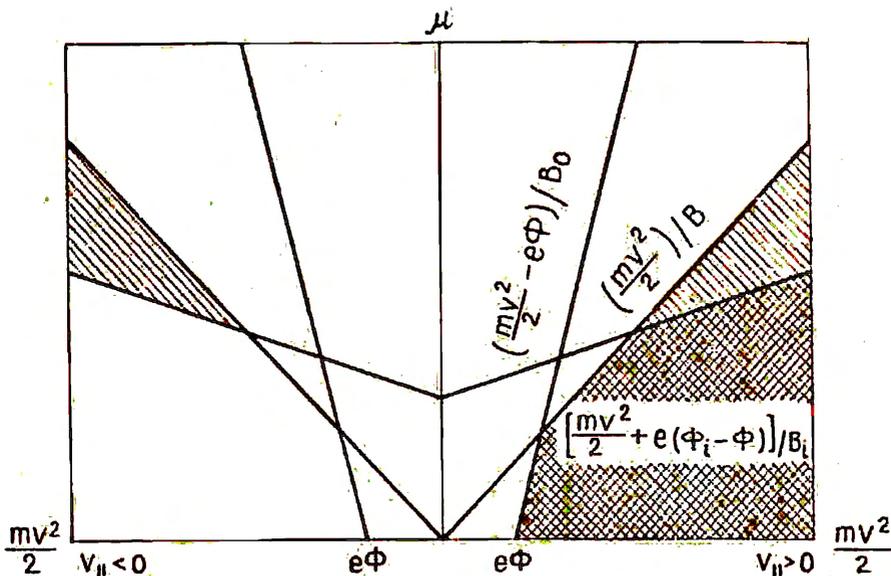


Рис. 3.2. Области фазового пространства  $(\frac{mv^2}{2}, \mu)$ , занимаемые пролетными электронами. Двойной штриховкой показаны области соответствующие высыпавшимся частицам.

На рис. 3.2. двойной штриховкой показана область фазового пространства для высыпавшихся частиц, одиночной — отраженных магнитным полем и возвращающихся в исходную область.  $B_0$ ,  $B_i$  — напряженности поля в области начала ускорения и в области гибели электронов (ионосфере) соответственно. Ускоренные ионы ионосферного происхождения образуют ионный пучок. Задача о распределении потенциала вдоль силовой линии при решении уравнения (3.7) требует кроме учета четырех групп частиц, рассмотренных в § 2 (пролетные электроны из магнитосферы, пролетные ионы ионосферного происхождения, отражаемые слоем электроны ионосферы,

отражаемые слои ионы из магнитоферы), учета существования групп частиц, захваченных между скачком потенциала и магнитной пробкой. При этом, может быть получено решение со скачком потенциала, растянутым вдоль магнитной силовой линии при малом отклонении от квазинейтральности.

Образующиеся при продольном ускорении функции распределения электронов, если их первоначальная температура отличалась от нуля, имеют пучковую структуру в пространстве модуля скорости, но близкое к изотропному пич-угловое распределение вне конуса, обратного конусу потерь. Вид функции распределения пролетных электронов на ионосферных высотах показан на рис. 3.3. Пик в центре соответствует

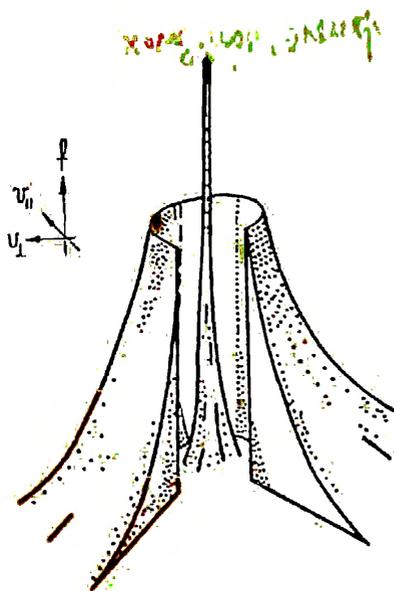


Рис. 3.3. Схематический вид функции распределения электронов оболочечного типа ниже области ускорения

холодным ионосферным электронам. При учете процессов релаксации (и) частиц, захваченных между магнитной пробкой и электростатическим барьером, функция распределения деформируется в области энергий меньшей приобретаемой в области ускорения, как это показано на рис. 3.4. а, вплоть до образования плато (рис. 3.4. б). Такие функции распределения являются типичными для электронов, выходящих

свечение в виде спокойных однородных дуг полярного сияния. Отношение энергии, приобретаемой в продольном поле, к первоначальной тепловой для таких электронов порядка 10.

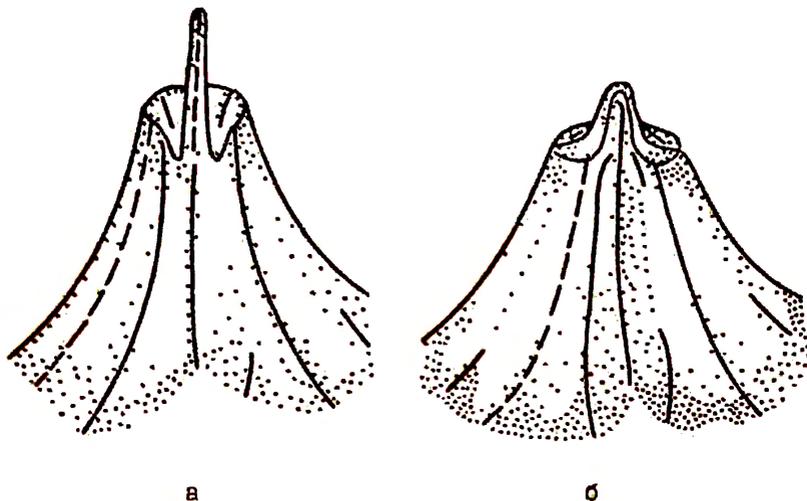


Рис.3.4. Изменение оболочечной структуры электронной функции распределения в результате квазилинейной релаксации и захвата частиц между магнитной пробкой и электростатическим барьером: а - функция распределения с максимумом по модулю скорости, б - функция распределения на стадии образования плато

Кинетическое рассмотрение дает возможность определить связь продольной разности потенциалов с переносимым электронами током, позволяющую оценить эффективность данного ускорительного механизма при заданной плотности переносимого тока. Если  $J_0 = en_e^0 v_{Te} = en_e^0 T_e^{1/2} / (2\pi m_e) (v_{Te} - \text{тепловая скорость электронов})$  - ток, сопровождающий свободное газодинамическое истечение электронов из магнитосферы в ионосферу, то ток ускоренных электронов связан с энергией, приобретаемой

электроном в продольном поле  $V=e\Delta\Phi$  соотношением

$$j/j_0 = B_i/B_0 + (1 - B_i/B_0) \exp(-V/T_e (B_i/B_0 - 1)). \quad (3.27)$$

На рис. 3.5. а показана зависимость  $j/j_0$  от геоцентрического расстояния  $R_0$ , на котором находится область ускорения ( $R_E$  - радиус Земли). Эта зависимость быстро

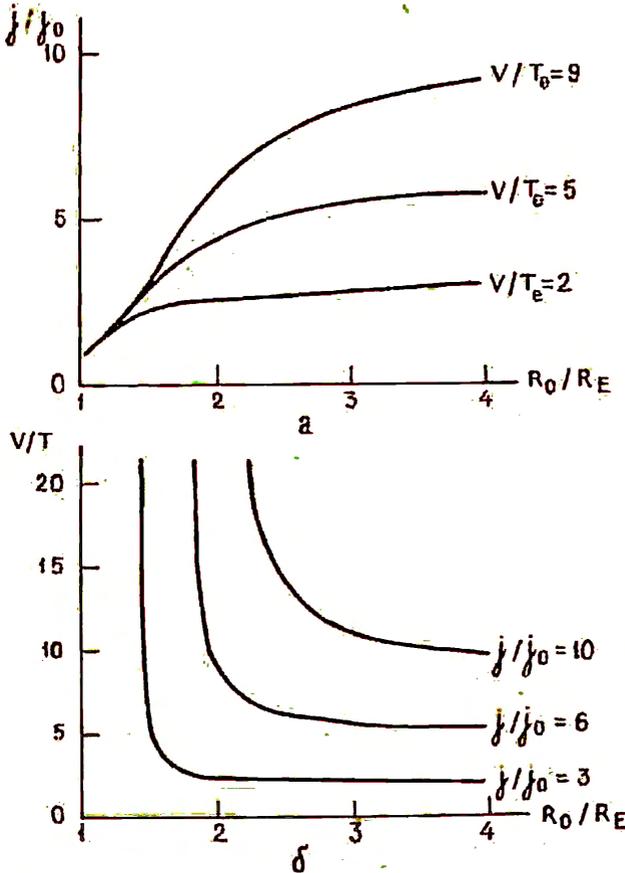


Рис.3.5.  
 а - зависимость продольного тока от геоцентрического расстояния области ускорения,  
 б - зависимость продольного падения потенциала, необходимого для создания данного тока от  $R/R_E$ .

выходит на плато и принимает вид

$$J/J_0 = 1 + V/T_e. \quad (3.28)$$

т.е. вид своеобразного закона "Ома", устанавливающего линейную связь между током и падением потенциала на магнитной силовой линии. Зависимость (3.28) легко получить на основании следующих простых рассуждений. Если в ускоряющую область попадают частицы с энергией  $T_e$ , имеющие изотропноеpitch-угловое распределение, то после ускорения они будут иметь изотропное распределение в угле  $0 < \theta < \theta_0(V) = \arcsin(V/V + T_e)$  (если не принимать во внимание расхождимость магнитных силовых линий в области ускорения). От высот, где напряженность магнитного поля  $B_0$ , до высот ионосферы, где  $B = B_1$ , дойдут только те частицы, у которых  $0 < \theta < \theta_c = \arcsin(B_0/B_1)$ . Если  $\Omega_0$  - телесный угол, отвечающий  $\theta_0$ , а  $\Omega_c$  - телесный угол, отвечающий  $\theta_c$ , то из первоначального потока только доля частиц, равная  $\Omega_c/\Omega_0$ , дойдет до ионосферы при  $\Omega_c < \Omega_0$ . Так как на ускоряющую область сверху падает поток электронов  $J_0/e$ , который за счет расхождимости магнитных силовых линий увеличился бы до  $(B_1/B_0)J_0/e$ , если бы все частицы дошли до ионосферы, то плотность тока горячей ионосферы  $(B_1/B_0)J_0\Omega_c/\Omega_0$ . При  $B_1/B_0 \gg 1$  и  $V \gg T_e$   $\Omega_c/\Omega_0 \approx \theta_c^2/\theta_0^2 \approx (1 + V/T_e)(B_1/B_0)$ , откуда и получаем (3.28). На рис. 3.5. б показана зависимость продольного падения потенциала, необходимого для создания данного электрического тока от высоты области ускорения. Ниже определенной высоты, как это следует из (3.27), никакой, даже бесконечно большой, скачок потенциала, не может сформировать заданный ток. Ускорение электронов в полярных сияниях обусловлено динамикой магнитосферных процессов, требующих при выполнении условия магнитоэстатического равновесия и наличии крупномасштабных возмущений существования довольно больших продольных токов. Если величина вытекающего из ионосферы тока превышает  $J_0$ , то для его поддержания в силу ограниченности количества носителей возникают большие квазистационарные продольные падения потенциалов, в которых и происходит ускорение электронов, вызывающих появление спокойных дискретных дуг полярного сияния.

## Глава 4. Ускорение заряженных частиц в крупномасштабных нестационарных магнитных полях (магнитная накачка)

### §1. Качественное рассмотрение

Механизм ускорения заряженных частиц при периодических изменениях магнитного поля  $B(t)$  с частотой, много меньшей циклотронной частоты частицы, был предложен Альваном. В таком поле сохраняется магнитный момент частицы, а перпендикулярная магнитному полю  $p_{\perp}$  и параллельная полю  $p_{\parallel}$  составляющие импульса в случае однородного поля определяются соотношениями

$$p_{\perp}^2/B(t) = \text{const}, \quad p_{\parallel} = \text{const}. \quad (4.1)$$

Среднее значение импульса за период изменения магнитного поля  $T$  остается неизменным (увеличение поперечного импульса за время нарастания поля компенсируется его уменьшением за время спада, а параллельная составляющая импульса не изменяется). Процесс изменения импульса принимает необратимый характер, если в плазме может развиваться турбулентность, приводящая к эффективной изотропизации функции распределения частиц без изменения величины импульса. При этом, возможно экспоненциальное нарастание полного импульса  $p$  за счет бетатронного ускорения, сопровождаемого рассеянием частиц на турбулентных пульсациях поля. Для выполнения условий ускорения длина волны турбулентных пульсаций поля должна быть сравнима с с лагмэровским радиусом частицы.

Для того, чтобы пояснить механизм магнитной накачки рассмотрим изменение во времени магнитного поля с периодом  $T$ , показанное на рис. 4.1. Магнитное поле от  $t_1$  до  $t_2$  ( $t_2 - t_1 = \tau_1$ ) нарастает от величины  $B_0$  до величины  $B_1$ , за время от  $t_2$  до  $t_3$  ( $t_3 - t_2 = \tau_0$ ) - остается постоянным, а за время от  $t_3$  до  $t_4$  уменьшается до своего исходного значения. В начальный момент  $t_1$  импульс равномерно распределен между тремя

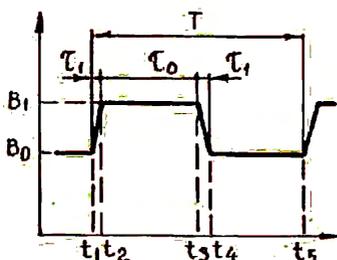


Рис. 4.1. Модельная зависимость магнитного поля от времени

степенями свободы, так что  $p_1^2(t_1) = (2/3)p_0^2$ ,  $p_{\parallel}^2(t_1) = (1/3)p_0^2$ , где  $p_0$  — полный импульс частицы в момент  $t_1$ . Если  $\tau$  — время равнораспределения энергии по трем степеням свободы частицы, и выполняются условия  $\omega_B^{-1} \ll \tau, \tau \ll \tau_0$  (где  $\omega_B$  — циклотронная частота частицы, и предполагается, что крупномасштабное поле не проходит через ноль), то от  $t_1$  до  $t_2$  в соответствии с (4.1) будет происходить нарастание поперечной компоненты импульса и в момент  $t_2$  величины  $p_1^2(t_2) = (2/3)kp_0^2$ ,  $p_{\parallel}^2(t_2) = (1/3)p_0^2$ , где  $k = B_1/B_0$ . Квадрат полного импульса в момент  $t_2$  равен  $p^2(t_2) = p_0^2(1+2k)/3$ . Это значение полного импульса не изменяется за время от  $t_2$  до  $t_3$ , но за счет рассеяния происходит изотропизация распределения, и часть энергии, приобретенная при бетатронном ускорении за время  $\tau_1$ , передается параллельной составляющей импульса. Таким образом в момент  $t_3$   $p_1^2(t_3) = p_0^2(1+2k)/9$ ,  $p_{\parallel}^2(t_3) = 2p_0^2(1+2k)/9$ . При уменьшении поля от  $t_3$  до  $t_4$  перпендикулярная составляющая импульса уменьшается, а параллельная — сохраняет свое значение. Таким образом в момент  $t_4$   $p_1^2(t_4) = p_1^2(t_3)$ ,  $p_{\parallel}^2(t_4) = p_{\parallel}^2(t_3) = 2p_0^2(1+2k)/9k$ . Квадрат полного импульса в момент  $t_4$  равен  $p^2(t_4) = p_0^2(5+2k+(2/k))/9$ . За время от  $t_4$  до  $t_5$  снова происходит изотропизация, но значение полного импульса не изменяется. Таким образом в результате одного цикла периодического изменения поля происходит прирост импульса  $\delta p_0$ , где  $\delta = (5+2k+(2/k))^{1/2}/3$  как при  $k > 1$ , так и при  $k < 1$ . Процесс ускорения происходит за счет того, что потеря полного импульса при спаде поля за счет перехода при изотропизации части перпендикулярного импульса в параллельный оказывается меньше, чем приобретение полного импульса при нарастании поля. За время  $t > T$  цикл повторяется  $t/T$  раз, и импульс в

момент времени  $t$  принимает значение

$$p(t) = p_0 \delta^{t/T} = p_0 \exp(t/T), \quad (4.2)$$

где  $T = T/\ln 2$ . Скорость роста импульса со временем дается выражением

$$dp/dt = p/T. \quad (4.3)$$

## §2. Кинетическое квазилинейное рассмотрение в ультрарелятивистском случае

Для рассмотрения процесса магнитной накачки в кинетическом приближении выведем квазилинейные уравнения для функции распределения частиц  $f(p, r, t)$  в ультрарелятивистском случае при наличии внешнего однородного нестационарного поля  $B(t)$ . Обозначив через  $E$  и  $H$  электрическое и магнитное поля турбулентных пульсаций, через  $j$  ток частиц плазмы,  $n$  — их концентрации, запишем систему уравнений для полей и частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{\epsilon} p \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{m_0 c} \left\{ F_{ex} + F \right\} \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

$$\text{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{rot} E_{ex} = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (4.4)$$

$$j = \frac{ec}{4} \int p f d^3 p, \quad n = \int f d^3 p, \quad F = e(E + \epsilon^{-1} [pH]),$$

где  $e$  — заряд частицы,  $c$  — скорость света,  $p = \gamma v/m_0 c = \epsilon v/c$  — безразмерный полный импульс частицы,  $\epsilon$  — ее безразмерная полная энергия в единицах  $m_0 c^2$ ,  $m_0$  — масса покоя частицы,  $F_{ex}$ ,  $E_{ex}$  — соответственно сила и индукционное электрическое поле, обусловленные полем  $B(t)$ ,  $F$  — сила, действующая на частицу со стороны электромагнитной волны. Если частота изменения внешнего магнитного поля много больше  $\omega_B$  (где  $\omega_B = |e|B/\epsilon m_0 c$  — ларморовская частота частицы), под влиянием

$F_{ex}$  происходит изменение перпендикулярной к направлению  $B$  составляющей импульса частицы  $p_{\perp}$ , а параллельная составляющая  $p_{\parallel}$  остается неизменной

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{p_{\perp}}{2B} \frac{dB}{dt}, \quad \frac{dp_{\parallel}}{dt} = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что сила  $F_{ex} = m_0 c \frac{dp_{\perp}}{dt}$  равна

$$F_{ex} = m_0 c \frac{p_{\perp}}{2B} \frac{dB}{dt} e_{p_{\perp}}, \quad (4.6)$$

где  $e_{p_{\perp}}$  — единичный вектор вдоль составляющей импульса  $p_{\perp}$ . Представим  $f$  в виде суммы быстро ( $f_1$ ) и медленно ( $f_0$ ) изменяющихся частей

$$f = f_0 + f_1, \quad |f_1| \ll f_0. \quad (4.7)$$

где  $\partial f_0 / \partial t = 0$  в силу однородности  $B$ . Подставляя (4.7) в первое из уравнений системы (4.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{c}{\varepsilon} p \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{F_{ex}}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{F_{ex}}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} + \\ + \frac{F}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{F}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Усредняя (4.8) по волновым колебаниям, получаем

$$\overline{\frac{\partial f_0}{\partial t}} + \frac{F_{ex}}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{F}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} = 0, \quad (4.9)$$

где черта сверху обозначает такое усреднение. Вычитая (4.9) из (4.8) и оставляя только члены первого порядка малости, получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{c}{\epsilon} \rho \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{F_{\text{ex}}}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} = - \frac{F}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial p}. \quad (4.10)$$

Если частота электромагнитных волн  $\omega \gg \Omega$  (где  $\Omega$  - частота колебаний В), то за время  $\omega^{-1}$  величина  $B \approx \text{const}$ . Поэтому в (4.10)  $F_{\text{ex}} \approx e(pV)/\epsilon$  и уравнение (4.10) принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{c}{\epsilon} \rho \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{e}{m_0 \epsilon c} [pV] \frac{\partial f_1}{\partial p} = - \frac{e}{m_0 c} \left[ E + \frac{1}{\epsilon} (pH) \right] \frac{\partial f_0}{\partial p}. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) линейно, поэтому его решение можно искать в виде разложения в интеграл Фурье. Получим решение (4.11) в случае волн, бегущих вдоль магнитного поля и имеющих вид  $e^{i(kz - \omega t)}$ , где  $k = \pm |k|$ ,  $k$  - волновой вектор, а ось  $z$  направлена вдоль В. Для каждого из направлений распространения (по полю и против поля) возможны две круговые поляризации волн:  $E_x = \pm i E_y$ , где знак (+) соответствует правому вращению электрического поля волны, т.е. направлению вращения протона в поле В, а знак (-) - левому, т.е. направлению вращения электрона. Полярный угол  $\phi$  определяется из уравнения  $\text{tg} \phi = E_y / E_x = \mp \text{tg} \omega t$ , т.е.  $\phi = \mp \omega t$ . Поскольку  $E_x \propto \text{Re}(e^{-i\omega t}) = \cos \omega t$ ,  $E_y \propto \text{Re}(\mp i e^{-i\omega t}) = \mp \sin \omega t$ . Введем цилиндрическую систему координат в пространстве импульсов  $p = (p_1, p_1, \phi)$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial p_x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\sin \phi}{p_1} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial p_y} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\cos \phi}{p_1} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$p_x = p_1 \cos \phi, \quad p_y = p_1 \sin \phi, \quad p_1 = p_z. \quad (4.12)$$

При этом третья слагаемое в левой части (4.11) принимает вид

$$\frac{e}{m_0 \epsilon c} [pV] \frac{\partial f_1}{\partial p} = \omega_B \left[ p_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} - p_x \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] = -\omega_B \frac{\partial f_1}{\partial \phi}, \quad (4.13)$$

где  $\omega_B = eV/mc = eV/m_0 c$  ( $\omega_B^0 = eV/m_0 c$ ). Используя (4.13), учитывая, что  $\rho \partial f_1 / \partial t = \rho_z \partial f_1 / \partial z$  и вводя фурье-компоненту  $f_k$  функции  $f_1(\rho, t)$ , преобразуем левую часть уравнения (4.11), которую обозначим через  $\hat{L}f_1$ , к виду

$$\hat{L}f_1 = -i\omega f_k + \frac{1ck}{\epsilon} \rho_z f_k - \frac{\omega_B}{\epsilon} \frac{\partial f_k}{\partial \phi}. \quad (4.14)$$

При преобразовании правой части уравнения (4.11) воспользуемся соотношением  $N = c\omega^{-1} [kE_k]$ , которое следует из уравнений Максвелла, где  $E_k, H_k$  - фурье-компоненты полей  $E$  и  $H$  соответственно. При этом

$$E_k + \epsilon^{-1} [\rho H_k] = E_k + c(\epsilon\omega)^{-1} [\rho [kE_k]] = (\epsilon\omega)^{-1} [(\epsilon\omega - ck\rho_z)E_k + ck(E_k\rho)].$$

В результате, правая часть уравнения (4.11), которую мы обозначим через  $\hat{R}f_1$ , принимает вид

$$\hat{R}f_1 = -\frac{e}{m_0 c} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{ck\rho_z}{\epsilon\omega} \right) \left[ E_{kx} \frac{\partial}{\partial p_x} + E_{ky} \frac{\partial}{\partial p_y} \right] + \frac{ck}{\epsilon\omega} \left[ E_{kx} p_x + E_{ky} p_y \right] \right] \frac{\partial}{\partial p_z} \right\} f_0. \quad (4.15)$$

где для волны круговой поляризации  $E_{kx} = iE_{ky}$ . Используя (4.12), полагая  $\partial f_0 / \partial \phi = 0$  (так как  $f_0$  не связано с волной) и обозначая  $E_{\pm} = E_{kx} \pm iE_{ky}$ , находим

$$E_{kx} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + E_{ky} \frac{\partial f_0}{\partial p_y} = \frac{E_{\pm}}{2} e^{\pm i\phi} \frac{\partial f_0}{\partial p_1} \cdot E_{kx} p_x + E_{ky} p_y = \frac{p_1}{2} E_{\pm} e^{\pm i\phi}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15) и приравнявая (4.15) и (4.14), получаем для  $f_k(\phi)$  линейное дифференциальное уравнение

$$= i\omega f_k + \frac{ick}{\varepsilon} p_z f_k - \frac{\omega_B}{\varepsilon} \frac{\partial f_k}{\partial \varphi} = - \frac{e}{2m_0 c} E_{\pm} e^{\mp i\varphi} \left\{ \left( 1 - \frac{ckr_z}{\varepsilon\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} + \frac{ck}{\varepsilon\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right\},$$

решение которого

$$f_k = \frac{-1 \frac{e}{m_0 c} \left\{ \left( 1 - \frac{ckr_z}{\varepsilon\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} + \frac{ckr_1}{\varepsilon\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right\} \frac{E_{\pm}}{2} e^{\mp i\varphi}}{\omega - \frac{ckr_z}{\varepsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\varepsilon}}, \quad (4.17)$$

где верхний знак соответствует правому вращению, а нижний - левому. Учитывая, что  $\partial/\partial p_1 = 2p_1 \partial/\partial p_1^2$  и  $\partial/\partial p_z = 2p_z \partial/\partial p_z^2$ , запишем (4.17) в виде

$$f_k = -1 \frac{e \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial p_1^2} - \frac{ckr_z}{\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial f_0}{\partial p_1^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_z^2} \right) \right\} p_1 E_{\pm} e^{\mp i\varphi}}{m_0 c \left( \omega - \frac{ckr_z}{\varepsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\varepsilon} \right)}, \quad (4.18)$$

где, как можно показать, первое слагаемое в фигурной скобке обусловлено действием электрического поля волны, а остальные слагаемые - действием силы Лоренца.

Аналогично преобразуем третий, квадратичный по турбулентным пульсациям, член в уравнении (4.9), учитывая

что

$$\frac{\mathbf{F}}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{m_0 c} \left[ E_{\pm} \varepsilon^{-1} [\rho \mathbf{H}] \right] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m_0 c} \sum_k \mathbf{F}_k^* \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.19)$$

где  $\mathbf{F}_k^*$  - комплексно-сопряженное от фурье-компоненты  $\mathbf{F}_k$  силы

F. Используя (4.12), (4.16) и учитывая, что, в отличие от

$$(4.16). \quad E_{kx} \frac{\partial f_k}{\partial p_x} + E_{ky} \frac{\partial f_k}{\partial p_y} = \frac{E_z}{2} e^{i\varphi} \frac{1}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 f_k. \quad \text{поскольку}$$

$\partial f_k / \partial \varphi \neq 0$ , получаем

$$F_{k \frac{\partial f_k}{\partial p}}^* = \frac{e}{\pi_0 c} \left\{ \left[ 1 - \frac{ckp_z}{\omega} \right] \frac{1}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 + \frac{ck}{\omega} \frac{\partial}{\partial p_z} \right\} \frac{E_z}{2} e^{i\varphi} f_k. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.17) в (4.20), а затем (4.20) в (4.19), используя соотношения

$$E_+ E_- = E_- E_+ = E_{kx}^2 + E_{ky}^2 = |E_k^2|, \quad |E_k^2| = \omega^2 (kc)^{-2} |H_k^2|$$

и вводя спектральную функцию турбулентности

$$\Phi(|k|) = \frac{\sigma l^2}{\Delta k} = |H_k|^2, \quad (4.21)$$

преобразуем выражение (4.19) к виду

$$\frac{F}{\pi_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1e^2}{\pi_0^2 c^4 \epsilon^2} \sum_k \frac{\left[ \left[ \left( \frac{\omega}{k} - p_z \right) \frac{1}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 + p_1 \frac{\partial}{\partial p_z} \right] \right]}{\omega - \frac{ckp_z}{\epsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\epsilon}} \times \\ \times \Phi(|k|) \left[ \left( \frac{\omega}{k} - cp_z \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} + cp_1 \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right].$$

При суммировании по k основной вклад дадут резонансные члены, соответствующие резонансным значениям волнового числа  $k_z$ , определяемым из условия циклотронного резонанса

$$\omega \epsilon - ck_1 p_z \mp \omega_B^0 = 0. \quad (4.22)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma \cdot \frac{\omega - \text{ckp}_z}{\epsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\epsilon} + 1\gamma} = \frac{P}{\omega - \frac{\text{ckp}_z}{\epsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\epsilon}} - 1\pi\delta\left(\omega - \frac{\text{ckp}_z}{\epsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\epsilon}\right).$$

где  $P$  понимается в смысле главного значения, окончательно получаем

$$\frac{F}{m_0 c} \frac{\partial f_1}{\partial p} = - \frac{\pi e^2}{m_0^2 c^4 \epsilon^2} \sum_k \left[ \left( \epsilon - \frac{\omega}{k} - p_z \right) \frac{1}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 + p_1 \frac{\partial}{\partial p_z} \right] \times \\ \times \Phi(|k|) \left[ \left( \epsilon - \text{ckp}_z \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} + \text{ckp}_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \delta \left( \omega - \frac{\text{ckp}_z}{\epsilon} \mp \frac{\omega_B^0}{\epsilon} \right). \quad (4.23)$$

где суммирование производится по всем резонансным значениям  $k_x$  и где для сокращения записи  $k_x$  заменено на  $k$ . Для частиц высоких энергий резонансные условия выполняются с альвеновской ветвью колебаний, поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением альвеновской турбулентности, для которой

$$\omega = (4\pi\rho)^{-1} Bk, \quad \delta\omega/\delta k = c_A B/|B|. \quad (4.24)$$

где  $c_A = B/(4\pi\rho)$  - альвеновская скорость,  $\rho$  - плотность плазмы.

### §3. Уравнение диффузии в импульсном пространстве

Для вывода уравнения, описывающего ускорение частиц при магнитной накачке, рассмотрим уравнение (4.9) с внешней силой, даваемой выражением (4.6) и квадратичным по турбулентным пульсациям членом, даваемым (4.23). Если  $\theta$  -pitch-угол частицы, то  $p_1 = p \sin\theta$ ,  $p_z = p \cos\theta$  и

$$\frac{\partial}{\partial p_1} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos\theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial p_z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin\theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4.25)$$

Обозначая  $B = dB/dt$ , получаем после суммирования (4.23) по резонансным  $k$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + p \sin \theta \frac{B}{2B} \left[ \sin \theta \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{\cos \theta}{p} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right] = \frac{\pi e^2}{m^2 c^4 \epsilon} \hat{S} f_0, \quad (4.26)$$

где

$$\hat{S} = \left[ \frac{c p_x - \epsilon \omega c_A}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - c p_1 \frac{\partial}{\partial p_x} \right] \frac{\Phi}{|c p_x - \epsilon \omega c_A|} \left[ (c p_x - \epsilon \omega c_A) \frac{\partial f_0}{\partial p_1} - c p_1 \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \right],$$

$\sigma = p_x / |p_x|$ .  $\sigma = 1$  при  $p_x > 0$ ,  $\sigma = -1$  при  $p_x < 0$ . При записи правой части (4.26) было учтено, что  $\delta(f(x)) = \sum_n \delta(x - x_n) / |f'(x_n)|$ , если функция  $f(x)$  имеет только простые нули. Было учтено также, что, как следует из условия циклотронного резонанса (4.22), при  $|v_x| > c_A$  в случае однокомпонентной протонной плазмы правому вращению соответствуют  $k > 0$  при  $p_x < 0$  и  $k < 0$  при  $p_x > 0$ , а левому вращению —  $k > 0$  при  $p_x > 0$ ,  $k < 0$  при  $p_x < 0$ . Для электронной компоненты, когда  $\omega_B < 0$ , все знаки следует поменять на противоположные. Таким образом, выражение (4.26) соответствует всем возможным значениям направления импульса и поляризации волн и справедливо как для протонной, так и для электронной компоненты. В (4.26) спектр  $\Phi(|k|)$  соответствует резонансным  $|k| = \omega_B^0 / |c p_x - \epsilon \omega c_A|$ .

Представим оператор  $\hat{S}$  в виде разложения по малому параметру  $u = c_A / v$  (где  $u = c p / \epsilon$  — скорость частицы) с точностью до членов  $u^2$  включительно. Т.к.  $(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \dots$ ,  $\Phi = \Phi_{u=0} + u (\partial \Phi / \partial u)_{u=0} + 0,5 u^2 (\partial^2 \Phi / \partial u^2)_{u=0} + \dots$ , то объединяя члены одного порядка малости и учитывая, что из (4.25) вытекают соотношения

$$\frac{p_x}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - c p_1 \frac{\partial}{\partial p_x} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad p_x \frac{\partial}{\partial p_1} - c p_1 \frac{\partial}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.27)$$

получаем

$$\hat{S} = \hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2, \quad (4.28)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \frac{c^2}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\sin\theta}{|cp_z \cos\theta|} \frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \hat{S}_1 &= \frac{c}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \operatorname{esc}_A \left[ - \frac{\partial\Phi}{\partial cp_z} \frac{c}{p \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\Phi}{|cp_z| p \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\Phi}{|cp_z|} \frac{\partial}{\partial p_1} \right] - \frac{\operatorname{esc}_A c}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\Phi}{p \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \hat{S}_2 &= - \frac{c}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\Phi (\operatorname{esc}_A)^2}{cp_z |cp_z|} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\operatorname{esc}_A c}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\Phi \operatorname{esc}_A}{|cp_z| p \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \\ &+ \frac{\operatorname{esc}_A c}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 \frac{\Phi \operatorname{esc}_A}{|cp_z|} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{c}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \operatorname{esc}_A \frac{c}{\partial cp_z} \frac{\Phi}{|cp_z|} \frac{\partial}{\partial\theta} \times \\ &\cdot \left[ \frac{1}{p \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right] + \frac{\operatorname{esc}_A c}{p_1} \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 \operatorname{esc}_A \frac{\partial\Phi}{\partial cp_z} \frac{1}{|p_z|} \frac{\partial}{\partial\theta} + \\ &+ \frac{c}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta (\operatorname{esc}_A)^2 \left[ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial |cp_z|^2} + \frac{\Phi}{cp_z |cp_z|} \right] \frac{1}{p \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

В формулах (4.28)  $\Phi$  берется при резонансных значениях  $k$ , соответствующих  $u=0$ , т.е. при  $|k| = u_B^0 / |cp_z|$ . Операторы  $\hat{S}_0$ ,  $\hat{S}_1$ ,  $\hat{S}_2$  являются членами соответственно нулевого, первого и второго порядков малости по параметру  $u$ . Оператор  $\hat{S}_0$ , который воздействует только на угловую часть функции распределения, называется оператором рассеяния.

Решение уравнения (4.26), усредненное за период  $T=2\pi/\Omega$  колебаний крупномасштабного поля  $B(t) = B_0(1 + \beta \cos \Omega t)$  (где  $\beta < 1$ ), будем искать в виде

$$f_0(p, \theta, t) = \overline{f(p, t)} + f_c(p, \theta, t) + f_a(p, \theta, t). \quad |f_0| = |f_c| + |f_a| \ll \overline{f}. \quad (4.29)$$

где  $\overline{f}$  — изотропная часть функции распределения,  $f_c$  и  $f_a$  соответственно симметричная и несимметричная относительно  $\theta = \pi/2$  добавки к  $\overline{f}$ , а черта сверху обозначает усреднение по  $T$ . Так как рассеяние приводит к изотропизации функции распределения, то

$$\langle f_c \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin\theta f_c d\theta = 0 \quad (4.30)$$

Разбиение угловой части в (4.29) на  $f_c$  и  $f_a$  связано с тем, что изотропизация происходит различно при начальных симметричном и несимметричном распределениях, так что

$$\hat{S}_0 f_c \neq 0, \quad \hat{S}_0 f_a = 0. \quad (4.31)$$

Используя выражение для оператора рассеяния  $\hat{S}_0$ , можно показать, что

$$\langle \hat{S}_0 f_c \rangle = \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{\sin\theta \Phi(|k|)}{c\varrho \cos\theta} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right\}_0^\pi = 0. \quad (4.32)$$

Действительно, интенсивность турбулентности  $k^2 \alpha |k\Phi(|k|)|$  ограничена при  $\theta = 0, \pi$ , поскольку основной масштаб турбулентности много больше ларморовских радиусов быстрых частиц, так что  $k^2$  убывает с ростом  $|k| = \omega_B^0 / |c\varrho \cos\theta|$ , а величина  $\partial f_0 / \partial \theta$  вдоль магнитного поля тоже ограничена или стремится к бесконечности не быстрее, чем  $\sin^{-1}\theta$ .

Линеаризованное кинетическое уравнение для  $(f_c + f_a)$  получаем, подставляя (4.29) в (4.26) и используя (4.28). После усреднения по телесному углу с учетом (4.30)–(4.32) в кинетическое уравнение входит только  $f_a$ , и оно имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial f_a}{\partial t} \right\rangle + p \langle \sin^2 \theta \rangle \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial p} \frac{B}{2B} = 0. \quad (4.33)$$

Ограничимся случаем сильного рассеяния, когда время изотропизации  $\tau$  (время рассеяния частиц на угол  $\sim \pi$ ) много меньше периода  $T$ . Вычитая (4.33) из неусредненного (по телесному углу) линеаризованного кинетического уравнения и полагая, что в случае сильного рассеяния

$$\frac{\partial f_o}{\partial t} + \frac{\partial f_a}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial f_a}{\partial t} \right\rangle \approx 0, \quad (4.34)$$

а нарушение этого равенства возможно только внутри пренебрежимо малых интервалов времени  $\tau_o \ll T$ , получаем следующее уравнение для  $f_o$

$$\begin{aligned} p \frac{\partial \bar{f}_o}{\partial p} \frac{B}{2B} (\sin^2 \theta - \langle \sin^2 \theta \rangle) + \frac{\pi e^2 c_A}{m^2 c^2 \sin \theta} \frac{\partial \sin^2 \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{f}_o}{|\cos \theta|} \frac{\partial f}{\partial p} = \\ = \frac{\pi e^2}{m^2 c^3 \varepsilon \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial f_o}{|\cos \theta|} \frac{\partial f}{\partial p}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Хотя условие  $\tau_o \ll T$  является определенным ограничением, при его выполнении, как это следует из качественного рассмотрения §1 данной главы, альвеновский цикл приводит к ускорению, так что применение данного приближения оказывается вполне оправданным. Интегрируя (4.35) дважды по  $\theta$  и учитывая, что  $\langle \sin^2 \theta \rangle = 2/3$ , находим  $f_o$

$$f_o = f_o^1 + f_o^2. \quad (4.36)$$

где

$$f_o^1 = \frac{\pi^2 c^2}{3 m^2 \varepsilon} \frac{B}{2B} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \int \frac{\cos \theta \sin \theta |\cos \theta| d\theta}{\Phi(\omega_p^0 / |\cos \theta|)}, \quad f_o^2 = -\varepsilon \frac{c_A}{c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \cos \theta.$$

Чтобы получить уравнение для  $\bar{f}$ , нужно подставить (4.29) в (4.26) и усреднить полученное уравнение по телесному углу и

по периоду  $T$ . Учитываем, при этом, что  $\dot{f}_\alpha B/2B=0$ , так как согласно (4.33)  $B/2B \propto \dot{f}_\alpha/\delta t$ . При таком усреднении получаем

$$\langle \hat{S} f_\alpha \rangle_T = \langle \hat{S} f'_\alpha \rangle_T = \langle \hat{S}_1 \bar{f} \rangle_{T,\theta} + \langle \hat{S}_0 f''_\alpha \rangle_{T,\theta} = 0, \quad (4.37)$$

где индексы  $T, \theta$  означают соответственно усреднение по  $T$  и по  $\theta$ . Непосредственным интегрированием можно убедиться, что

$$\langle \hat{S}_1 f''_\alpha + \hat{S}_2 \bar{f} \rangle_{T,\theta} = 0. \quad (4.38)$$

Тогда правая часть уравнения (4.26) после интегрирования по  $T$  и по  $\theta$  обращается в нуль. Сохраняя в этом уравнении члены, квадратичные по пульсациям с периодом магнитной накачки  $T$ , в результате получаем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + p \sin^2 \theta \left\langle -\frac{\dot{B}}{2B} \frac{\partial f_c}{\partial p} \right\rangle_T + \sin \theta \cos \theta \left\langle -\frac{\dot{B}}{2B} \frac{\partial f_c}{\partial p} \right\rangle_T = 0. \quad (4.39)$$

Подставляя (4.36) в (4.39), после усреднения по телесному углу получаем уравнение ускорения диффузионного типа

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D(p) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \right], \quad (4.40)$$

где коэффициент диффузии в пространстве импульсов равен

$$D(p) = \frac{m^2 c^2 p^2 \varepsilon}{6 \pi e^2} \left\langle \left( \frac{\dot{B}}{2B} \right)^2 \right\rangle_T \int_0^\pi \sin^3 \theta \left[ \frac{\cos \theta' |c p \cos \theta'| \sin \theta'}{\Phi(\omega_B^0 / |c p \cos \theta'|)} d\theta' \right]. \quad (4.41)$$

#### §4. Постановка самосогласованной задачи о спектре волн и частиц

При наличии переменного магнитного поля источником интенсивной турбулентности в плазме является циклотронная неустойчивость, связанная с анизотропией углового распределения по скоростям. Такая анизотропия при сохранении первого адиабатического инварианта возникает в первоначально изотропной плазме при двумерном сжатии - расширении ларморовских орбит частиц за счет изменения магнитного поля. Циклотронная неустойчивость, обусловленная циклотронным резонансом между волнами и частицами на циклотронной частоте с учетом эффекта Доплера, при достаточно больших скоростях частиц возникает при весьма малой анизотропии. Инкремент неустойчивости  $\gamma$  равен  $\gamma = -\text{Im} k^2 / \partial(\text{Re} k^2) / \partial \omega$ , где  $\delta k^2$  - добавка к волновому числу обусловленная током быстрых частиц. Для волн круговой поляризации, бегущих вдоль оси z

$$\gamma = -\frac{4\pi\omega}{c^2 E_{\pm} \partial(\text{Re} k^2) / \partial \omega} \text{Re} J_{\pm}, \quad J_{\pm} = J_x \pm i J_y = \frac{ec}{\varepsilon} \int (p_x \pm i p_y) f_k d^3 p. \quad (4.41)$$

где  $J_x, J_y$  - компоненты тока быстрых частиц,  $E_{\pm} = E_x \pm i E_y$ . Подставляя в (4.41) выражение (4.18) для фурье-компонент  $f_k$  функции распределения быстрых частиц, вводя координаты интегрирования  $p_1, p_2$  и  $\varphi$  в соответствии с (4.12) и интегрируя (4.41) по  $\varphi$ , получаем

$$\gamma = -1 \frac{4\pi^2 e^2 \omega}{m_0 c^2 \partial(\text{Re} k^2) / \partial \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{ckp_x}{\omega \varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{\partial f}{\partial p_2^2} \right)}{ckp_x - \omega \varepsilon \pm \omega_B^0} p_1^2 dp_2 dp_1^2. \quad (4.42)$$

где опущен индекс 0 у функции распределения частиц. Вычисление интеграла в (4.42) путем обхода особых точек знаменателя при  $p_x > 0$  и  $p_x < 0$  дает

$$\gamma(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2 e_A^2}{m_0 c^3 k} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{\omega \varepsilon + \omega_B^0}{\omega \varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{\partial f}{\partial p_z^2} \right) \right]_{p=p_r} p_1^2 dp_1^2, \quad (4.43)$$

где подынтегральное выражение берется при резонансном значении импульса  $p_z^2 = (\omega \varepsilon + \omega_B^0)^2 / (ck)^2$  и при дисперсионном уравнении (4.24). Примем в дальнейшем, что  $\omega \varepsilon \ll \omega_B^0$ , тогда условия циклотронного резонанса имеют вид

$$p_z^2 \approx (\omega_B^0 / ck)^2. \quad (4.44)$$

С учетом (4.12) величина  $\alpha$ , характеризующая анизотропию функции распределения, равна

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{\partial f}{\partial p_z^2} = \frac{1}{2p^2 \sin \theta \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (4.45)$$

В силу (4.44)  $p^2 = p_1^2 + (\omega_B^0 / ck)^2$ , поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial p_1^2} p_1^2 dp_1^2 = - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial p_z^2} dp_z^2 = -2 \int_{|\omega_B^0 / ck|}^\infty f p dp.$$

Подставляя (4.45) и выражение (4.29) в (4.43), получаем

$$\gamma(\omega) = - \frac{4\pi^3 \theta^2 c_A^2}{m_0 c^3 k} \int_{|\omega_B^0 / ck|}^\infty \left[ f + \frac{\omega_B^0}{2\omega \varepsilon} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] p dp. \quad (4.46)$$

В (4.46) учтено, что вклад в инкремент дает только симметричная часть функции распределения (4.29), так как исходное выражение (4.43) получено суммированием по двум значениям  $p_z = p \cos \theta$ , имеющим противоположные знаки, а ве-

величина  $\operatorname{tg} \theta \frac{\delta f_a}{\delta \theta}$  несимметрична относительно  $\theta = \pi/2$ , так как  $\frac{\delta f_a}{\delta \theta}$  симметричная, а  $\operatorname{tg} \theta$  — несимметричная функция. Используя выражение (4.36) и учитывая, что, как можно показать,

$$\int_{|\omega_B^0/c|}^{\infty} \left[ f + \frac{\omega_B^0}{2\omega \epsilon} \operatorname{tg} \theta \frac{\delta f_a^2}{\delta \theta} \right] p \, dp = 0.$$

приведем (4.46) к виду

$$\gamma = \pm \frac{4 \pi^2 \pi_0 c_A (\omega_B^0)^2 (B/2B)}{3 c k^3 \Phi(k)} \int_{|\omega_B^0/c|}^{\infty} p f \, dp. \quad (4.47)$$

При получении (4.47) было использовано резонансное условие (4.44), в силу которого входящая в выражение (4.36) для  $f_a^1$  спектральная функция  $\Phi(\omega_B^0/c \operatorname{sgn} \cos \theta) \equiv \Phi(|k|)$  была вынесена за знак интеграла, а входящая под знак интеграла величина  $\cos^2 \theta$  была представлена в виде  $\cos^2 \theta = (\omega_B^0)^2 (c/k)^{-2}$ . Скорость роста спектральной функции связана с инкрементом соотношением

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\gamma\Phi. \quad (4.48)$$

Изменение  $\Phi$  за время  $t$ , сравнимое с периодом магнитной накачки, определяется лишь множителем  $(B/2B)$  в (4.47), так как  $f_a \approx \text{const}$  за указанный промежуток времени. Учитывая, что  $(B/2B) = 0,56 \sin \Omega t$ , подставляя (4.47) в (4.48) и производя интегрирование, получаем выражение для спектра турбулентности, усредненного за период  $T$

$$\Phi = A + B + C + D + E + E + X$$

$$Q = \frac{8}{3} \beta \pi \frac{c^4}{c} m_0 (\omega_B^0)^2 |k^{-3}| \int_{|\omega_B^0/ck|}^{\infty} p \bar{f} dp. \quad (4.49)$$

Уравнения (4.40) и (4.49) образуют искомую самосогласованную систему уравнений для нахождения спектров частиц и волн.

### §5. Условия возможности ускорения

Если бы не было обратного влияния волн на частицы, то анизотропия  $\alpha_0$  вызывала бы только адиабатические изменения импульса в переменном магнитном поле и была бы очень велика по сравнению с анизотропией  $\alpha$  при наличии сильного рассеяния. Т.о. при сильном рассеянии, когда угловая функция распределения близка к изотропной, имеется малый параметр  $\alpha/\alpha_0 \ll 1$ , по которому можно проводить разложение. Приближение сильного рассеяния, использованное в §4, фактически и является разложением по степеням этого параметра. Условие  $\tau \ll T$  является одним из условий возможности ускорения. При отсутствии рассеяния и при достаточно большой концентрации быстрых частиц инкремент  $\gamma$  может периодически принимать большие положительные значения  $\gamma_0 \gg \Omega$ . При  $\gamma_0 \gg \Omega$  время  $t_0 = 1/\gamma_0$  нарастания колебаний в  $e$  раз значительно меньше периода  $T = 2\pi/\Omega$ , и именно при этом условии рассеяние может происходить за время  $\tau \ll T$ . Т.о. условие  $\gamma_0 \gg \Omega$  является необходимым для возможности ускорения, т.к. в противном случае, когда неустойчивость развивается медленно, рассеяние частиц не приводит к полной изотропизации в конце цикла, и альвеновское ускорение может прекратиться. Условие  $\gamma_0 \gg \Omega$  может быть использовано для оценки минимальной концентрации  $n_{\min}$ , при которой возможно ускорение, при этом  $\gamma_0(n_{\min}) = \Omega$ . Т.о. для оценки  $n_{\min}$  надо вычислить инкремент  $\gamma_0(\omega)$  резонансных колебаний при отсутствии рассеяния. Зависимость  $\gamma_0(\omega)$  можно получить, используя (4.43) и (4.45) и учитывая, что в отсутствие рассеяния угловая часть функции

распределения определяется только адиабатическими изменениями в переменном поле. При этом теряет смысл введение  $f_0$  и  $f_a$ , и линеаризованное кинетическое уравнение для угловой части  $f_\theta$  после усреднения по медленному периоду  $T$  принимает вид

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial t} + p \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial B} = 0. \quad (4.50)$$

Откуда

$$f_0 = \frac{\partial f}{\partial p_1^2} - \frac{\partial f}{\partial p_z^2} = \frac{\beta}{2p} \frac{\partial f}{\partial p} (-\cos \Omega t + \text{const}), \quad (4.51)$$

где  $f$  — решение диффузионного уравнения (4.40). В (4.51) без ограничения общности можно положить  $\text{const} = 0$ , т.к. анизотропия должна быть положительной, когда  $\cos \Omega t \geq 0$ , т.е. когда  $B \geq B_0$ , а для быстрых частиц на хвосте функции распределения  $\partial f / \partial p < 0$ . Если известно это решение, то

подставляя  $f$  и (4.51) в (4.43) и пренебрегая первым слагаемым в подынтегральном выражении (4.43), можно вычислить величину  $\gamma_0(\omega)$ , которая пропорциональна  $n$ .

В §1 этой главы было сформулировано еще одно очевидное условие возможности ускорения:  $\omega \gg \Omega$ . Т.е. альвеновское ускорение возможно, когда

$$\omega \gg \Omega, \quad \tau \ll T, \quad n \gg n_{\min}. \quad (4.52)$$

Приведенное квазилинейное рассмотрение, при котором решалось нелинейное уравнение для спектра частиц, а спектр волн описывался в линейном приближении, справедливо, когда амплитуда турбулентных пульсаций не превышает величину исходного крупномасштабного магнитного поля.

Механизм магнитной накачки привлекается для объяснения ускорения ультрарелятивистских электронов в пульсарах и крабовидной туманности, ускорения релятивистских электронов вблизи Юпитера, а также при описании процесса ускорения нерелятивистских ионов с энергиями порядка 10 мэВ/нуклон на границе гелиосферы и в межпланетной среде.

## Г л а в а 5. Стохастическое ускорение

### §1. Столкновение частиц с магнитогибродинамическими возмущениями конечной амплитуды

При стохастическом ускорении энергия небольшой группы ускоряемых частиц черпается непосредственно из энергии плазменной турбулентности. Исторически первым из рассмотренных стохастических механизмов ускорения был механизм, предложенный Ферми, основанный на рассмотрении столкновений частиц с движущимися магнитными облаками. Так как элементы данного рассмотрения входят составной частью в ряд других механизмов, ниже мы рассмотрим физические основы фермиевского механизма ускорения.

Если ларморовский радиус частицы  $r_L$  много меньше характерных масштабов изменения параметров турбулентности, а характерные времена изменения электрического и магнитного полей много больше времени обращения частицы по ларморовской окружности, изменение энергии частицы  $\varepsilon$  может быть рассчитано в дрейфовом приближении (в данном разделе мы ограничимся нерелятивистским рассмотрением)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = eER + \frac{mv_L^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (5.1)$$

где  $R$  - скорость движения ведущего центра,  $B$  - напряженность магнитного поля. Первый член в правой части (5.1) соответствует скорости изменения энергии под действием электрического поля  $E$ , второй - бетатронному ускорению.

Рассмотрим столкновения частицы с магнитным облаком - сгустком замагниченной плазмы. Такой сгусток содержит большое число частиц малой энергии и переносит структуру магнитного поля. Отметим, что данное модельное представление позволяет описывать характерные свойства некоторых МГД структур в космосе (например, ударных волн). Взаимодействие быстрой частицы с таким сгустком можно рассматривать как столкновение с массивной частицей. Как известно, в

стохастическом режиме столкновения частиц приводят к равномерному распределению энергии между частицами. Поэтому столкновения частиц с движущимися магнитными облаками приводят как бы к "нагреву" газа частиц (аналогия здесь несколько условна, т.к. ускорение прекращается много раньше, чем частица приобретет энергию, сравнимую, с энергией всего облака). Возможны два типа столкновений. При первом происходит отражение частицы движущейся магнитной пробкой — зеркалом. Если частица удерживается между двумя магнитными зеркалами, то сохраняется второй адиабатический инвариант  $\oint m v_{\parallel} ds$ , где  $v_{\parallel}$  — продольная скорость движения ведущего центра,  $ds$  — элемент длины магнитной силовой линии. В системе отсчета наблюдателя при отражении от зеркала энергия частицы изменяется при условии  $u \ll v_{\parallel}$  на  $\Delta \epsilon = 2m v_{\parallel} u$ . Если  $L$  — расстояние между зеркалами, то интервал времени между соударениями  $\Delta t = L/v_{\parallel}$  (где  $v_{\parallel}$  — средняя продольная скорость частицы). Т.к.  $u = -0,5 dL/dt$ , средняя скорость изменения импульса частицы  $\Delta p_{\parallel} / \Delta t = 2m v_{\parallel} v_{\parallel} / L$ . Откуда следует, что

$$\frac{dp_{\parallel}}{p_{\parallel}} + \frac{dL}{L} = 0, \quad (5.2)$$

т.е.  $p_{\parallel} L = \text{const}$ . При втором типе столкновений заряженная частица движется вдоль искривленной силовой линии, следуя за ее изгибом. Если траектория ведущего центра при движении вдоль силовой линии при постоянном  $|B|$  меняет свое направление на противоположное, то изменение ее энергии в системе отсчета наблюдателя при  $u \ll v_{\parallel}$  равно  $\epsilon_{\parallel} = 2m v_{\parallel} u$ . При реальных столкновениях изменение скорости частицы происходит как за счет отражения от магнитной пробки, так и за счет движения вдоль искривленных магнитных силовых линий. Отметим, что при столкновениях первого типа изменение энергии частицы обусловлено бетатронным механизмом ускорения.

При многократных столкновениях суммарное изменение энергии зависит от соотношения встречных и догоняющих соударений. Вероятность встречных столкновений, равная  $(u_{\parallel} + v_{\parallel}) / 2v_{\parallel}$ , превышает вероятность догоняющих столкновений  $(v_{\parallel} - u_{\parallel}) / 2v_{\parallel}$ , так что среднее изменение энергии частицы за

соударение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \frac{u^2}{c^2} \varepsilon, \quad \eta \ll 1. \quad (5.3)$$

Для лобовых столкновений  $\eta=2$ , для случая сферических упруго рассеивающих неоднородностей  $\eta=4/3$ . Если  $L$  — среднее расстояние между магнитными облаками, то средняя скорость изменения энергии частицы

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \left[ \frac{u^2}{c^2 L} \right] \varepsilon. \quad (5.4)$$

## §2. Статистическое фермиевское ускорение

В космофизических условиях крупномасштабные структуры плазменной турбулентности могут выполнять роль магнитных облаков Ферми. Рассмотрим действие фермиевского механизма в условиях существования развитой гидромагнитной турбулентности. В плазме концентрации  $n$ , температуры  $T$ , со средним значением магнитного поля  $B$  при выполнении условий  $nT \ll B^2/8\pi$ ,  $nc_A^2 M \ll B^2/8\pi$  (где  $M$  — масса иона,  $c_A$  — скорость турбулентных пульсаций) возбуждается спектр гидромагнитных волн различной длины со скоростью распространения  $c_A = B/(4\pi\rho)^{1/2}$ . Если  $L_0$  — основной масштаб турбулентности, то крупномасштабные колебания с длиной волны  $\lambda_L \ll \lambda \ll L_0$  будут эффективно отражать частицы с  $u \gg c_A$ . Частицы, захваченные между локальными максимумами волн, будут ускоряться при отражении от областей усиленного магнитного поля. При сильном рассеянии частиц на волнах, длина которых порядка ларморовского радиуса частиц с данной скоростью, происходит эффективное статистическое фермиевское ускорение, которое может быть описано как диффузия частиц в импульсном пространстве, если столкновения частиц с волновыми пакетами статистически независимы, что обеспечивается сильным рассеянием частиц. При выполнении принципа детального равновесия вероятности изменения продольного импульса

частицы от  $p_{\parallel}$  до  $p_{\parallel}'$  и от  $p_{\perp}'$  до  $p_{\perp}$  равны в релятивистском и нерелятивистском случаях. Тогда изменение функции распределения в пространственно однородном случае имеет диффузионный характер и описывается уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \overline{(\Delta p_{\perp})^2} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}}, \quad (5.5)$$

где  $f$  - функция распределения быстрых частиц. В лабораторной системе отсчета с точностью до членов  $\alpha(c_A/c)^2$  при использовании преобразований Лоренца к системе движущейся магнитной неоднородности, на которой происходит упругое рассеяние,

$$\Delta p_{\perp}^2 = \begin{cases} 4\varepsilon^2 \beta^2 & \text{при } |\cos\theta| < x_0 \\ 0 & \text{при } |\cos\theta| > x_0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

где значение граничногоpitch-угла  $\theta_0$  ( $|\cos\theta_0| = x_0$ ) соответствует pitch-углу, при котором частица перестает отражаться от магнитной неоднородности, импульс  $p_{\perp}$  измеряется в единицах  $m_0 c$  ( $m_0$  - масса покоя частицы), энергия  $\varepsilon$  - в единицах  $m_0 c^2$ ,  $\varepsilon v = p c$ ,  $\beta = c_A / c$ . Действительно, если при каждом отражении от области усиленного магнитного поля импульс частицы изменяется на величину  $2m c_A$ , то  $\Delta p_{\perp} = 2\beta m / m_0 = 2\varepsilon \beta$ , откуда и следует (5.6). Для альвеновских волн, распространяющихся вдоль  $B_0$  с амплитудой  $B_{\lambda}$ , перпендикулярной  $B_0$ , величина магнитного поля в точке отражения при  $B_{\lambda} \ll B_0$   $B_M = (B_0^2 + B_{\lambda}^2)^{1/2} \approx B_0 (1 + B_{\lambda}^2 / 2B_0^2)$ . Откуда,  $x_0 = |\cos\theta_0| = (1 - B_M / B_0)^{1/2} \approx 2^{-1/2} B_{\lambda} / B_0$ , то есть  $x_0 \propto B_{\lambda} / B_0$ . Для магнитозвуковых волн, в которых  $B_{\lambda} \parallel B_0$ , величина  $x_0 \propto (B_{\lambda} / B_0)^{1/2}$ . Если  $\lambda(B_{\lambda})$  - длина волны магнитных пульсаций с амплитудой  $B_{\lambda}$ , то среднее время между столкновениями с магнитными неоднородностями  $\Delta t = \lambda(B_{\lambda}) / |v_{\parallel}|$ . Откуда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} 2\beta^2 \varepsilon^2 |v_{\parallel}| \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}}, \quad |\cos\theta| < x_0, \quad (5.7)$$

Ускорение Ферми эффективно, если время рассеяния частицы  $\tau_s(p)$  с импульсом  $p$  на угол  $\pi$  много меньше времени ускорения  $\tau_a$  до этого значения импульса. С учетом рассеяния уравнение эффективного ускорения записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} 2\beta^2 \varepsilon c |p_{\parallel}| K(B_{\lambda}) \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{\hat{S}}{\tau_s} f, \quad (5.8)$$

где  $K(B_{\lambda}) = 1/\lambda(B_{\lambda})$ , оператор  $\hat{S}$  действует на угловую часть функции распределения. При сильном рассеянии  $f$  близка к изотропной, так что разложение  $f$  по собственным функциям оператора  $\hat{S}$  представляется в виде

$$f = \bar{f}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(p) \psi_n(\theta), \quad |\alpha_n| \ll \bar{f}(p). \quad (5.9)$$

Проинтегрировав уравнение (5.8) по поверхности единичной сферы, получим диффузионное уравнение для изотропной функции распределения, описывающее процесс ускорения при  $\tau_s \ll \tau_a$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} D_F \varepsilon p^3 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \quad (5.10)$$

с коэффициентом диффузии в пространстве импульсов  $D = \varepsilon p \bar{D}_F$ , где  $\bar{D}_F = 2\beta^2 c \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^3\theta |K(h)| d\theta$ ,  $h = B_0 c t g^2\theta$ ,  $K(h)$  - спектр пульсаций. Величина  $K(h) = 1/\lambda(B_{\lambda})$ , равная среднему числу волн с амплитудой больше  $h - B_0$  на единицу длины, может быть

представлена в виде  $K=L_0^{-1}(h_m/h)^{\nu}$ , где  $h_m=B_m-B_0$ . При этом, величина  $D_F$  принимает вид

$$D_F=2\beta^2cL_0^{-1}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^3\theta(h_m/B_0tg^2\theta)^{\nu}d\theta=\frac{\beta^2c}{2L_0}(h_m/B_0)^{\nu}\Gamma(\nu+1)\Gamma(2-\nu),$$

где  $\Gamma$  - гамма функция,  $\nu < 2$ . При  $\nu \geq 2$  интеграл  $D_F$  расходится на верхнем пределе, так как при  $\theta \rightarrow \pi/2$  отражение происходит от волн сколь угодно малой амплитуды, и при достаточно слабой зависимости амплитуды от масштаба время между столкновениями стремится к нулю. Таким образом, чисто фермиевское ускорение, то есть, отражение частиц от длинных волн, имеет место лишь при достаточно быстро убывающих с масштабом амплитуд пульсаций ( $h(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\lambda^{1/2}$ , то есть  $\nu < 2$ , так как  $h(\lambda) = h_m(\lambda/L_0)^{1/\nu}$ ). При  $\nu < 2$  величина  $D_F \approx c_A^2/L_0$  не зависит от импульса, и коэффициент диффузии в импульсном пространстве пропорционален  $\epsilon p$ . Можно показать, что условие сильного рассеяния  $\tau_a \ll \tau_o = p^2/D = p/\epsilon D_F$  налагает ограничение снизу на возможные значения импульса ускоряемых частиц.

Если задача пространственно неоднородна, то в уравнение диффузии надо добавить член, соответствующий пространственной диффузии с коэффициентом пространственной диффузии в одномерном случае  $D_z = v_A \lambda / 2$ , где ось  $z$  направлена вдоль невозмущенного поля. Т.к.  $\lambda = 2\beta^2 c / D_F$ , коэффициент диффузии в реальном пространстве  $D_z = \beta^2 c^2 p / 2D_F \epsilon$ , и при учете одномерной пространственной диффузии

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} D_F \epsilon p^3 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} + \frac{\beta^2 c^2 p}{2D_F \epsilon} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2}. \quad (5.11)$$

Умножив уравнение (5.11) на  $p$  и интегрируя по всему пространству импульсов, получим в нерелятивистском случае

( $\epsilon \approx 1$ )  $\overline{dp/dt} = \text{const.}$ , а в релятивистском случае ( $\epsilon \approx p$ )

$\partial p / \partial t = \text{const}$  и  $\text{const} = \beta^2 / \Lambda$  совпадает по порядку величины с фермиевской константой выражения (5.4). Отметим, что принцип детального равновесия налагает ограничения на спектр частиц, а уравнение (5.11) позволяет исследовать асимптотику функции распределения в области достаточно больших импульсов.

Рассмотрим решение диффузионного уравнения без учета пространственной диффузии в случае импульсного возбуждения и последующего затухания турбулентности. Такая ситуация может быть реализована, например, при взрыве сверхновой. Пусть  $D_p = 0$  при  $t < 0$ , при  $t = 0$   $D_p$  скачком возрастает до конечного значения, а затем убывает до нуля по заданному закону.

Полагая  $\tau = \int_0^t D_p(t') dt'$ , получаем в нерелятивистском случае ( $\epsilon = 1$ )

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} = p \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial p^2} + 3 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) имеет частные, ограниченные в нуле, решения вида  $e^{-x^2 \tau} p^{-1} J_2(2xp^{1/2})$ .  $J_2$  - функция Бесселя. Откуда общее решение

$$\bar{f}(p, \tau) = p^{-1} \int_0^{\infty} \Phi(x) e^{-x^2 \tau} J_2(2xp^{1/2}) x dx \quad (5.13)$$

где  $\Phi(x)$  связана с функцией инжекции  $f(p, 0) = f_0(p)$  соотношением

$$p f_0(p) = \int_0^{\infty} \Phi(x) J_2(2xp^{1/2}) x dx \quad (5.14)$$

Применяя теорему Фурье-Бесселя, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^{\infty} p' f_0(p') J_2[2x(p')^{1/2}] 2(p')^{1/2} d[2(p')^{1/2}] = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_0(p') J_2[2x(p')^{1/2}] p' dp' \end{aligned} \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в (5.13) и интегрируя по  $\alpha$ , получаем

$$\bar{f}(p, \tau) = \frac{1}{p\tau} \int_0^{\infty} f_0(p') \exp\left[-\frac{p+p'}{\tau}\right] I_2\left[\frac{2\sqrt{pp'}}{\tau}\right] p' dp', \quad (5.16)$$

где  $I_2$  - функция Бесселя мнимого аргумента.

В большинстве задач (особенно астрофизических) можно положить, что функция инжекции отлична от нуля в области  $p < p_0 \ll 1$ . При этом, асимптотика  $f(p, \tau)$  при больших  $\tau$  и  $p > p_0$  имеет универсальный вид. Разлагая  $I_2$  в ряд Лорана и полагая  $\exp(-p'/\tau) \approx 1$ , получаем

$$f(p, \tau) = \frac{1}{2\tau^3} e^{-p/\tau} \int_0^{\infty} f_0(p') (p')^2 dp' = \frac{n_0}{2\pi\tau^3} e^{-p/\tau}, \quad (5.17)$$

где  $n_0$  - полное число инжектированных частиц в  $1 \text{ см}^{-3}$ . Интенсивность частиц с импульсом  $> p$

$$S(>p) = 4\pi c \int_p^{\infty} p^3 f(p, \tau) dp = 3n_0 c \tau \left[ 1 + \frac{p}{\tau} + \frac{p^2}{2\tau^2} + \frac{p^3}{6\tau^3} \right] e^{-p/\tau} \quad (5.18)$$

имеет широкое плато при малых  $p/\tau$ . Величина  $S(>0)/n_0 c = 3\tau$  определяет средний импульс  $\bar{p}$ . Этот результат можно получить с точностью до численного множителя из (5.4). Однако учет флуктуаций числа встречных и догоняющих столкновений показывает, что спектр тянется в область значительно больших  $p$ . Интенсивность падает на порядок лишь при  $p \approx 3\tau$ . Энергия таких частиц в 7 раз выше, чем при  $p = \bar{p}$ .

В ультррелятивистском случае

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (5.19)$$

Полагая  $p = e^\sigma$  и  $f = p^{-3/2} \phi(p, \tau) e^{-9\tau/4}$ , сведем (5.19) к

одномерному уравнению теплопроводности  $\partial\phi/\partial\tau = \partial^2\phi/\partial\sigma^2$  с функцией Грина  $G(\sigma, \sigma', \tau) = (4\pi\tau)^{-1/2} \exp\{-(\sigma - \sigma')^2/4\tau\}$ . Откуда следует, что при ускорении частиц в области с затухающей турбулентностью ( $\tau \rightarrow \tau_0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) устанавливается спектр вида

$$f = \text{const } p^{-3/2} \exp(-\ln^2 p/4\tau_0). \quad (5.20)$$

При  $\tau_0 \sim \sigma_A^2 t_0 / L_0 c \ll 1$ , спектр (5.20) становится очень жестким, т.е. интенсивность частиц  $4\pi p^2 f$  падает очень медленно с ростом энергии частиц.

Решение уравнения ускорения при учете излучения волн из ускоряющего объема приводит к другому виду зависимости функции распределения от импульса. Поэтому, применение фермиевского механизма, обеспечивающего достаточно эффективное ускорение частиц в турбулентном объеме, для объяснения ускорения в данной системе требует задания начальных и граничных условий.

### §3. Турбулентное ускорение

Если при фермиевском ускорении процессы резонансного взаимодействия волна-частица обеспечивали только рассеяние частиц при взаимодействии с турбулентностью, широкий класс ускорительных механизмов, за которым закрепилось название турбулентного ускорения, рассматривает ускорение случайными электрическими полями при выполнении условий резонанса. Для каждой из ветвей колебаний  $\omega(k)$  могут выполняться соответствующие резонансные условия, поэтому в соответствии с возбуждаемым типом турбулентности группа частиц может ускоряться ленгмювской турбулентностью, нижнегибридной, свистовой и т.д. Эффективность ускорения определяется спектром соответствующей турбулентности при учете потерь и выхода частиц из ускоряющей области. В космофизических системах, как правило, основная доля энергии сосредоточена в МД турбулентности, с которой в соответствии с резонансными условиями наиболее эффективно взаимодействуют быстрые частицы, поэтому ниже мы более подробно рассмотрим

резонансное турбулентное ускорение при развитии магнитогиродинамической турбулентности. Заметим, что для частиц со скоростями  $v \gg c_A$  черенковский резонанс не играет существенной роли и ускорение может быть обусловлено либо рассмотренным выше механизмом Ферми, либо циклотронным резонансом.

Рассмотрим холодную плазму давления  $P$  в магнитном поле  $B$  ( $P \ll B^2/8\pi$ ), в которой возбуждена МГД турбулентность с основным масштабом  $L_0 \gg r_L$  (где  $r_L$  - ларморовский радиус ускоряемых частиц), угловое распределение волновых векторов которой не имеет максимумов при больших углах с внешним полем  $B$  (в этом случае циклотронный резонанс хорошо описывается одномерной моделью). Будем считать внешнее магнитное поле однородным  $B_0 = B_0 \hat{h}$ ,  $\hat{h} = z/z$  и постоянным во времени. Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ . Разлагая функцию распределения и поле волны в ряд Фурье аналогично рассмотрению §2 главы 4, приходим к квазилинейному уравнению для функции распределения быстрых частиц ( $v \gg c_A$ ).

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 c^4} (\hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2) f_0. \quad (5.21)$$

где  $\hat{S}_0, \hat{S}_1, \hat{S}_2$  - соответственно операторы нулевого, первого и второго по  $(c_A/v_1)$  порядка малости. В нулевом приближении чистого рассеяния

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\pi Z^2 e^2}{\pi^2 c^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\Phi(|v \cos \theta|)}{|v \cos \theta|} \frac{\partial f_0}{\partial \theta}. \quad (5.22)$$

где  $\Phi = d n^2 / dk$  спектральная функция турбулентности при резонансном  $|k| \approx \omega_B / |v \cos \theta|$ ,  $Ze$  - заряд частицы. Для степенного спектра с показателем степени  $\nu$ , т.е. при

$$\Phi(|v \cos \theta|) = \left. \frac{dn^2}{dk} \right|_{k=\omega_B/v|\cos \theta|} = \left. \frac{h_c^2 L}{(kL)^\nu} \right|_{k=\omega_B/v|\cos \theta|} =$$

$$= \lambda_{01}^2 L \left( \frac{v}{I\omega_B} \right)^\nu |\cos\theta|^\nu. \quad (5.23)$$

уравнение (5.22) принимает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\pi z^2 e^2 h_0^2 L v^{\nu-1}}{\pi^2 c^2 (I\omega_B)^\nu} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \sin\theta |\cos\theta|^{\nu-1} \quad (5.24)$$

Решением (5.24) является стационарное изотропное распределение, а также дискретный набор экспоненциально затухающих угловых гармоник. Положив  $f_0 = \exp(-\lambda_n^2 t / \lambda_1^2 \tau) \psi_n(\theta)$ , для  $\psi_n(\theta)$  получаем уравнение

$$-\lambda_n^2 \psi_n(\theta) = \frac{\lambda_1^2 \pi z^2 e^2 h_0^2 L v^{\nu-1}}{\pi^2 c^2 (I\omega_B)^\nu} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \sin\theta |\cos\theta|^{\nu-1}. \quad (5.25)$$

Пологая  $\frac{\lambda_1^2 \pi z^2 e^2 h_0^2 L v^{\nu-1}}{\pi^2 c^2 (I\omega_B)^\nu} = 1$ , получаем зависимость времени

рассеяния  $\tau$  от скорости частицы для степенного спектра турбулентности

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1^2 \omega_B} \left( \frac{v}{h} \right)^2 \left( \frac{v}{I\omega_B} \right)^{1-\nu}. \quad (5.26)$$

За время  $t = \tau$  первая гармоника  $f_{01}$  уменьшится в  $e$  раз, т.е.  $\tau$  характеризует изотропизацию углового распределения.

Остальные гармоники спадают быстрее ( $\lambda_n^2 = n(n+1)$ ,  $\tau_n = \lambda_1^2 \tau / \lambda_n^2$ ). Собственными функциями углового оператора правой части (5.25) при  $\nu=1$  являются полиномы Лежандра от  $\cos\theta$ . В нулевом приближении по параметру  $(c_A/v_1)$ , т.е. за время изотропизации  $\tau$  энергия частицы с  $v \gg c_A$  не изменяется. Поэтому при исследовании процесса ускорения за времена  $t \gg \tau$  функцию распределения можно считать изотропной.

Перевозначая  $f_0 \rightarrow \langle f_0 \rangle = \int \int_{4\pi_0} f_0 \sin\theta \, d\theta d\phi$ , усредняя (5.21) по

телесному углу и учитывая, что

$$\langle S_0 f_0 \rangle = 0, \quad \langle S_1 f_0 \rangle = 0,$$

$$\langle S_2 f_0 \rangle = \left\langle \frac{oc_A}{v_1} \frac{\partial}{\partial v_1} v \frac{\Phi oc_A}{|v_1|} \frac{\partial f_0}{\partial v_1} \right\rangle, \quad \sigma = \pm 1, \quad (5.27)$$

получаем после усреднения диффузионное уравнение ускорения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (5.28)$$

с коэффициентом диффузии в пространстве скоростей

$$D = \frac{\pi z^2 e^2 c_A^2}{m^2 c^2 v} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \Phi(v \cos \theta) d\theta. \quad (5.29)$$

Для спектра турбулентности вида (5.23) с учетом того, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta |\cos \theta|^{\nu-1} d\theta = - \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{\nu-1} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = 2/\nu(\nu+2),$$

(5.29) имеет вид

$$D(v) = \frac{2}{v(\nu+2)} \frac{v c_A^2}{L} \left[ \frac{v_0}{B_0} \right]^2 \left[ \frac{v}{L \omega_B} \right]^{\nu-2}, \quad (5.30)$$

т.е.  $D \propto v^{\nu-1}$ . При этом, решение диффузионного уравнения (5.28) с начальным условием  $f(t=0) \propto \delta(v)$  имеет вид

$$f(v, t) = K v^{3(\nu-1)/(3-\nu)} [D t]^{-3/(3-\nu)} \exp\left[-\frac{v^2}{(3-\nu)^2 D t}\right], \quad (5.31)$$

где  $K = \text{const.}$  Из (5.31) следует, что при  $\nu=1$  асимптотически формируется максвелловский спектр, при  $\nu=2$  формируется

спектр вида  $\exp(-u/v_0)$ . Заметим, что последний спектр характерен, например, для спектра протонов за фронтом ударных волн солнечных вспышек.

Для случаев магнитогидродинамических волн, распространяющихся только в одном направлении, турбулентное ускорение отсутствует. Действительно, причиной ускорения являются случайные электрические поля  $E$  волн. Время ускорения  $\tau_a \propto (eE)^{-2}$ , где значение электрического поля связано с магнитным полем волны соотношением  $E \propto \lambda / c$ . Если волны распространяются в одном направлении, то в системе координат, движущейся вместе с волнами, электрическое поле  $E=0$  и ускорение отсутствует во всех системах, движущихся относительно исходной с постоянной скоростью.

Отметим, что при широком спектре волн наряду с турбулентным ускорением будет происходить фермиевское ускорение при адиабатическом отражении частиц от крупномасштабных волн. Для степенного спектра при  $u \ll 2$  ускорение частиц определяется как турбулентным, так и фермиевским механизмами, при  $u \gg 2$  ускорение определяется механизмом Ферми.

Турбулентное ускорение, обусловленное резонансным взаимодействием частиц с волнами, является универсальным свойством турбулентности при непрерывном потоке энергии по спектру турбулентности в пространстве волновых чисел. Взаимодействие частиц с волнами для убывающего с  $k$  спектра турбулентных пульсаций сосредоточено в коротковолновой области спектра, поэтому эффективная диссипация связана с хвостом функции распределения и ускорением малой доли быстрых частиц. Граничная скорость быстрых частиц определяется внутренним масштабом турбулентности  $L_0 \propto \xi_0^{-1} = v_0 / \omega_B$ . Спектр пульсаций при  $k > k_0$  обрывается, и частицы с  $u > v_0$  перестают ускоряться из-за отсутствия резонансных волн.

§1. Ударные волны в космической плазме

Одним из наиболее мощных ускорительных механизмов является ускорение на ударных волнах. В бесстолкновительной плазме характер распространения ударной волны определяется магнитным или альвеновским числом Маха  $M_A = u/c_A$  (где  $u$  - скорость волны,  $c_A$  - альвеновская скорость), магнитозвуковым числом Маха  $M_f = u/v_f$  (где  $v_f$  - скорость магнитного звука), плазменным параметром  $\beta = nT/(B^2/8\pi)$  (где  $n$ ,  $T$  - концентрация и температура плазмы,  $B$  - напряженность магнитного поля) и углом между нормалью к фронту и магнитным полем. Диссипация энергии обусловлена развитием плазменных неустойчивостей на фронте волны. На рис. 6.1. показан профиль сильной ударной волны, распространяющейся под

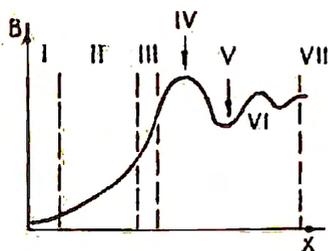


Рис. 6.1. Профиль сверхкритической бесстолкновительной ударной волны. (I - VII области фронта)

большим углом к магнитному полю. I - асимптотически невозмущенная область набегающего течения перед фронтом, II - "подножие" (foot) - область медленного нарастания магнитного поля и плотности плазмы благодаря отраженным от фронта ионам, III - "скачок" (ramp) магнитного поля - область максимального градиента поля, IV - максимальный выброс магнитного поля над его асимптотическим значением за фронтом (overshoot), в котором величина магнитного поля оказывается больше рассчитанной по соотношению Гюгенио, V - первый минимум поля (undershoot),

VI - область осцилляций, затухающих с ростом расстояния от фронта, VII - асимптотически возмущенная область за фронтом. Плазменные параметры в областях I и VII связаны адиабатой Гюгонио. Показанный на рис. 6.1. профиль реализуется только при числах Маха больших критического ( $\approx 3$ ). В докритических ударных волнах с сильной диссипацией остаются только области I, III, VII.

### §2. Взаимодействие быстрых частиц с плоской ударной волной

Характер движения достаточно быстрых частиц в окрестности фронта бесстолкновительной ударной волны мало зависит от деталей структуры фронта. Если ларморовский радиус частицы много больше толщины фронта, ее взаимодействие с волной определяется соотношением параметров между областями I и VII, поэтому в дальнейшем будем считать фронт волны тонким. Для поперечной ударной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , скорость  $u$ , плотность плазмы  $\rho$  и магнитное поле связаны соотношениями

$$\rho_2 = \sigma \rho_1, \quad u_2 = u_1 / \sigma, \quad B_2 = \sigma B_1, \quad (6.1)$$

где  $\sigma$  - степень сжатия вещества на ударном фронте. Электрические поля за и перед фронтом волны совпадают

$$E_1 = c^{-1} [u_1 B_1], \quad E_2 = c^{-1} [u_2 B_2]. \quad (6.2)$$

При пересечении ударного фронта быстрые частицы под влиянием градиентного дрейфа смещаются вдоль электрического поля и ускоряются (рис. 6.2). Детальный расчет на основе анализа

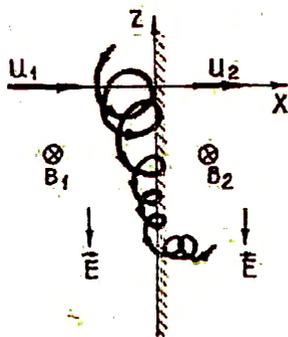


Рис. 6.2. Движение быстрой частицы вблизи фронта плоской поперечной ламинарной ударной волны

траектории движения частицы приводит к сохранению магнитного потока, охватываемого двумя дугами траектории частицы в областях за и перед фронтом за один оборот. Откуда следует, что:

$$p_{11}^2/B_1 = p_{12}^2/B_2, \quad p_{11} = p_{12}. \quad (6.3)$$

Заметим, что соотношение (6.3) не является следствием сохранения магнитного момента частицы, т.к. в данном случае не выполнено условие малости градиентов полей на расстоянии порядка ларморовского радиуса, и первый инвариант не должен сохраняться. Набор частицей энергии ограничен тем, что она только однократно пересекает фронт. Например, если  $B_2/B_1 = 4$ , то в нерелятивистском случае энергия частицы увеличивается в 4 раза, а в релятивистском — только в 2 раза. Эта эффективность может возрасти при распространении фронта в турбулентной среде. В случае параллельной ударной волны прирост энергии при пересечении фронта равен нулю, т.к. регулярное поле перед и за фронтом волны отсутствует ( $E_1 = E_2 = 0$ ).

При распространении в турбулентной среде частицы за счет рассеяния на магнитных неоднородностях могут многократно пересекать фронт ударной волны. Для сильных ударных волн  $u_1, u_2 \approx c_A$ , поэтому если рассеяние частиц обусловлено МГД турбулентностью, магнитные неоднородности можно считать замороженными в плазму. На рис. 6.3. показаны случайные блуждания частицы в турбулентной среде вблизи фронта ударной

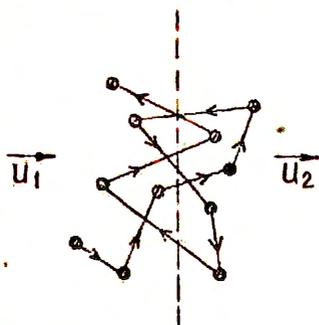


Рис. 6.3. Движение частицы вблизи фронта ударной волны в турбулентной среде

волны. Рассеяние частиц на неоднородностях магнитного поля приводит к их изотропизации, а также дает возможность

многократно пересекать ударный фронт и подвергаться ускорения, которое носит циклический характер. Если пренебречь влиянием быстрых частиц на среду, рассеяние частиц будет упругим в системе отсчета, связанной с рассеивающими центрами. Изменение импульса частицы, обусловленное ее рассеянием, равно  $\Delta p = (p_f - p_i)u/v$ ,  $u/v \ll 1$  (где  $p_f, p_i$  - импульсы частицы до и после рассеяния,  $u$  - скорость плазмы). Двукратное пересечение фронта дает изменение импульса  $\Delta p = [(p_f - p_i)u_1 + (p_f - p_i)u_2]/v$ . Усреднение последнего выражения по потоку частиц в случае, если он близок к изотропному, дает среднее изменение импульса за цикл двукратного пересечения ударного фронта

$$\langle \Delta p \rangle = \frac{4}{3} \frac{p}{v} (u_1 - u_2) \quad (6.4)$$

После совершения очередного цикла частица имеет определенную вероятность не вернуться к фронту. Поэтому число частиц падает с ростом номера цикла. Если  $P_c$  - вероятность совершения очередного цикла, то количество частиц в единице объема с импульсом, большим чем  $p$  -  $N$ , т.е. интегральный спектр ускоренных частиц  $N(p)$  определяется из условия  $N(p + \Delta p) = P_c N(p)$ , которое показывает, что количество частиц, способных совершить  $(i+1)$  цикл пересечения фронта, равно произведению числа частиц, совершивших  $i$  циклов, на вероятность совершения следующего цикла. Откуда следует, что

$$\frac{dN}{dp} = \frac{P_c - 1}{\langle \Delta p \rangle} N \quad (6.5)$$

Если  $P_{1,2}$  - вероятности возвращения частицы из областей перед и за фронтом волны на ударный фронт, то  $P_c = P_1 P_2$ . Из области перед фронтом все частицы коллективно сносятся к фронту, поэтому  $P_1 = 1$ . Вероятность  $P_2$  можно выразить через поток частиц  $J_{12}$ , поступающий из области 1 в область 2, и направленный поток частиц в области 2:  $P_2 = (J_{12} - J_2)/J_{12}$ . Если  $n = dN/dp$  - дифференциальная плотность частиц, то при распределении частиц за фронтом, близком к однородному и изотропному распределению,  $J_{12} = nu/4$ ,  $J_2 = nu_2$ . Откуда

$$P_{\sigma} = 1 - \frac{4u_2}{v} \quad (6.6)$$

Из (6.4) - (6.6) следует уравнение для  $n$

$$\frac{d n}{d r} + 3 \frac{u_2}{u_1 - u_2} n = 0. \quad (6.7)$$

Решением (6.7) при учете (6.1) является степенная функция  $n \propto r^{-\gamma}$ , где  $\gamma = (\sigma+2)(\sigma-1)$ . Быстрая частица, сталкиваясь с замороженными перед и за фронтом магнитными неоднородностями, приобретает энергию за счет механизма Ферми первого рода (многократные отражения от сближающихся стенок). Данный механизм принято называть регулярным механизмом ускорения или диффузионным ускорением ударной волны. Он работает даже в случае параллельной ударной волны. Для сильной ударной волны  $\sigma=3-4$  и  $\gamma=2-3$ . Такой показатель спектра соответствует спектру галактических космических лучей и релятивистских электронов в остатках сверхновых.

### 3. Уравнение переноса быстрых заряженных частиц

Процессы переноса быстрых заряженных частиц в космической плазме могут быть достаточно полно описаны на основе диффузионного уравнения переноса, что обеспечивается наличием хаотического магнитного поля. Диффузионный способ описания применим, если достаточно частые рассеяния быстрых частиц на неоднородностях магнитного поля делают угловое распределение частиц близким к изотропному, так что представляется возможным ограничиться первыми двумя угловыми моментами в разложении функции распределения. Для вывода уравнения переноса рассмотрим магнитное поле  $\mathbf{B}(r, t) = \mathbf{B}_0(r, t) + \mathbf{B}_1(r, t)$  (где  $\langle \mathbf{B}_0(r, t) \rangle = \mathbf{B}_0$ ,  $\langle \mathbf{B}_1(r, t) \rangle = 0$  и усреднение проводится по ансамблю случайных полей), переносимое замагниченной плазмой со скоростью направленного движения  $u < c$  (где  $c$  - скорость света). Бесстолкновительное кинетическое уравнение в системе координат наблюдателя

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (6.8)$$

содержит член, пропорциональный силе  $\mathbf{F}$ , которая складывается из силы Лоренца  $\mathbf{F}_1 = e[\mathbf{v}\mathbf{B}]/c$  и силы, вызываемой индукционным электрическим полем  $\mathbf{E} = -[\mathbf{u}\mathbf{B}]/c$  (считаем, что электрическими полями собственных колебаний плазмы можно пренебречь). Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{B} D f = 0, \quad (6.9)$$

где  $D = \frac{e}{c} \left[ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]$ . Усреднение (6.9) по случайным реализациям магнитного поля при степенной форме спектра случайного поля с показателем степени  $\nu$  дает

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{B}_0 D F + \gamma L_0 \langle B^2 \rangle \hat{D} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|^{-1} \hat{D} F, \quad (6.10)$$

где  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle$ ,  $L_0$  радиус корреляции случайного поля,  $\gamma = \pi^{1/2} \Gamma(\nu/2) / 6 \Gamma[(\nu-1)/2]$  (где  $\Gamma$  — гамма функция Эйлера). Усредненная функция распределения быстрых частиц при условии сильного рассеяния близка к изотропной и может быть представлена в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{3}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right\}, \quad (6.11)$$

где  $N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  — усредненные концентрация и поток частиц с импульсом  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}^2$ ). Подстановка (6.11) в (6.10) приводит к системе уравнений для  $N$  и  $\mathbf{j}$ , имеющих вид в системе координат с осями вдоль  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ ,  $\mathbf{n}_1 = [(\mathbf{u}/u), \mathbf{b}_0]$ ,  $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{b}_0, \mathbf{n}_1]$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \alpha_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta} - u_\alpha \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} + \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}, \quad (6.12)$$

$$j_\alpha = -\alpha_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta} - \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} u_\alpha. \quad (6.13)$$

В уравнении переноса (6.12) для изотропной части функции распределения быстрых частиц первый член в правой части описывает пространственную диффузию. Компоненты тензора диффузии равны

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\alpha_0 R_0^2}{R_0^2 + \Lambda^2}, \quad \alpha_{33} = \alpha_0, \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \frac{\alpha_0 \Lambda R_0}{R_0^2 + \Lambda^2}, \quad (6.14)$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{13} = \alpha_{32} = \alpha_{23} = 0.$$

где  $\alpha_0 = u\Lambda/3$ ,  $\Lambda = \Lambda(r, p)$  - длина пробега частицы,  $R_0 = cr/eV_0$ . Второй член (6.12) описывает конвекцию частиц из-за вмерзших в плазму неоднородностей магнитного поля, перенесшихся со скоростью  $u$ . Последний член описывает изменение энергии частицы при взаимодействии с движущейся средой, которое при отсутствии ударных волн сводится к так называемому адиабатическому замедлению частиц. Выражения (6.13) для потока частиц состоит из суммы диффузионного потока, пропорционального градиенту  $N$ , и конвективного потока из-за движения магнитных неоднородностей. Уравнение (6.12) справедливо, когда масштаб неоднородности среды  $L \gg \Lambda$ . Если течение является разрывным для быстрых частиц (как, например, в случае ударной волны), это условие нарушается. В этом случае уравнение (6.12) должно быть дополнено граничным условием на ударном фронте, связывающим решения этого уравнения по обе стороны фронта.

§4. *Спектр частиц, ускоренных плоской ударной волной в турбулентной среде*

Рассмотрим квазипараллельную плоскую ударную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  в однородной среде. В системе покоя фронта ( $x=0$  - координата фронта) в диффузионном приближении уравнение переноса для изотропной части функции распределения  $f$  имеет вид (смотри (6.12))

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha}{\partial x} f \right) + \frac{\text{div} u}{3} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (6.15)$$

где  $\alpha = \alpha(p, x)$  - коэффициент пространственной диффузии. В стационарном одномерном случае в плоской волне

$$u(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2 = u_1 (k-1)/(k+1), & x > 0 \end{cases}, \quad (6.16)$$

где  $k$  - показатель политропы,  $(k-1)/(k+1) = 1/\sigma$ . Из (6.16) следует, что  $\text{div} u = (u_2 - u_1) \delta(x)$ , так что уравнение (6.15) в стационарном случае принимает вид

$$u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha}{\partial x} f \right) - \frac{\Delta u}{3} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (6.17)$$

где  $\Delta = u_1 - u_2$ . Интегрируя (6.17) почленно от  $-\Delta x$  до  $+\Delta x$  и устремляя  $\Delta x$  к нулю, получим два граничных условия

$$f_1 = f_2, \quad (6.18)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{u_1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial p} = \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{u_2}{3} \frac{\partial f_2}{\partial p}, \quad (6.19)$$

где  $f_1 = f(x=-0)$ ,  $f_2 = f(x=+0)$ . Условие (6.18) означает непрерывность функции распределения на фронте, условие (6.19) - непрерывность диффузионного и конвективного потоков. Решение уравнения (6.17) имеет вид

$$f_t = A_t + B_t \exp \int_0^x \frac{u_t dx}{\alpha_t(x, p)}, \quad t=1, 2. \quad (6.20)$$

Из условия ограниченности  $f_2(x, p)$  при  $x \rightarrow \infty$  следует, что  $B_2 = 0$ .  
 Зададим граничное условие при  $x \rightarrow -\infty$ :  $f_1(-\infty, p) = A$ , означающее присутствие в невозмущенном потоке определенного количества быстрых частиц, вступающих в ускорение и выполняющих роль инжектированных частиц. Из условия (6.18) следует, что  $f_1(0, p) = A_1 + B_1 = A_2$ ,  $B_1 = A_2 - A_1$ . Откуда получаем

$$\begin{cases} f_1(x, p) = A_1(p) + (A_2(p) - A_1(p)) \exp \int_0^x \frac{u_1}{\alpha_1} dx, & x < 0 \\ f_2(x, p) = A_2(p), & x > 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Из (6.19) при учете (6.21) следует, что

$$u_1(A_2 - A_1) + \frac{u_1}{3} \frac{\partial A_2}{\partial p} = \frac{u_2}{3} \frac{\partial A_2}{\partial p} \quad \text{или} \quad \frac{\partial A_2}{\partial \ln p} = \frac{3\gamma}{\gamma - 1} (A_1 - A_2), \quad (6.22)$$

где  $\gamma = u_1/u_2$ . Решение (6.20) принимает вид

$$f_2(p) = q \int_0^p p'^{-q} f_{A_1}(p') p'^{q-1} dp', \quad (6.23)$$

с показателем спектра  $q = 3\gamma / (\gamma - 1) = 3u_1 / (u_1 - u_2)$ . Для граничного условия вида  $f_1(-\infty, p) = A_1(p) = C_0 \delta(p - p_0)$  имеем за фронтом ударной волны ( $x > 0$ )

$$f_2(p) = q \frac{C_0}{p_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-q} \theta(p - p_0), \quad (6.24)$$

где  $\theta(\zeta)$  - функция Хевисайда ( $\theta(\zeta) = 1$  при  $\zeta < 0$ ,  $\theta(\zeta) = 0$  при  $\zeta > 0$ ). Полученный степенной спектр частиц характерен для ускорения ударными волнами. Для плотности частиц  $n = 4\pi r^2 f$  имеем спектр  $n \propto p^{-\gamma}$ ,  $\gamma = q - 2$ . Если  $k = 5/3$  (идеальный газ), то  $q = 4$  и  $n \propto p^{-2}$ ,  $\gamma = 2$ . Использование уравнения переноса (6.15) предполагает, что масштаб изменения скорости плазмы  $L = |u/v_L|$  значительно больше длины пробега частицы  $\lambda$ . Это условие не выполняется на ударном фронте, поэтому мы заменили его граничными условиями (6.18), (6.19). Степенные спектры образуются, когда  $\lambda$  и  $r_L$  много больше толщины ударного фронта.

Конечность размеров толщины фронта волны  $l$  приводит к ограничению на процесс ускорения, когда  $l$  сравнивается с характерной длиной ускорения  $x_a = \alpha/u_1$ . Рассмотрим плавное изменение профиля скорости волны на характерной длине  $l$

$$u(x) = 0,5(u_1 + u_2) - 0,5(u_1 - u_2) \text{th}(x/l). \quad (6.25)$$

В стационарном случае уравнение (6.15) при постоянном коэффициенте диффузии  $\alpha$  и при выполнении (6.25) путем замены пространственной переменной приводится к виду

$$\alpha \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right] - u \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (6.26)$$

где  $\partial u / \partial x = -2(u_1 - u)(u - u_2) / l(u_1 - u_2)$ . Краевое условие  $f(u = u_1, p) = (n_0 / 4\pi r_0^2) \delta(p - p_0)$  соответствует спектру инжектированных быстрых частиц, ускорившихся на фронте ударной волны. Решение (6.26) имеет вид

$$f = (u_1 - u)^\alpha p^{-\alpha_0}, \quad (6.27)$$

где  $\alpha = lu_1 / 2\alpha$ ,  $\alpha_0 = (3\gamma/\gamma - 1) [1 + (lu_2 / 2\alpha)]$ . Как следует из (6.27), при больших значениях импульса спектр имеет степенной вид, а показатель спектра растет с ростом толщины фронта. При  $l \gg \alpha / u_2$  влияние толщины фронта становится существенным, т.к.  $l \ll x_a$ .

Приближение плоского фронта выполняется, если диффузионная длина ускорения  $x_a$  намного меньше радиуса кривизны фронта  $R$ , т.е.  $\alpha(u_1 R)^{-1} \ll 1$ . При малой кривизне фронта, т.е. при  $\alpha(u_1 R)^{-1} \gg 1$ , формируется спектр вида  $f(p) \propto p^{-3\alpha/uR}$ , большая крутизна которого указывает на неэффективность ускорения частиц.

Нестационарное уравнение (6.15) с граничными условиями (6.18), (6.19) для источника быстрых частиц с начальной функцией  $f_0 = (n_0 / 4\pi r_0^2) \delta(p - p_0) \theta(t)$  при  $t \gg \alpha / u^2$  имеет решение

$$\begin{cases} J_1(x, p, t) = J_2(p) \exp(xu_1/x_1) \theta(t-t_a) \\ J_2(x, p, t) = J_2(p) \theta[t-t_a - (x/u_2)] \end{cases}, \quad (6.28)$$

где  $t_a = \int_{p_0}^p \frac{3}{u_1 - u_2} \left[ \frac{x_1}{u_1} + \frac{x_2}{u_2} \right] \frac{dp}{p}$  - характерное время ускорения

частиц от  $p_0$  до  $p$ ,  $J_2(p) = \frac{n_0}{4\pi p_0^2} q \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-q}$ . При этом,

$$\frac{dp}{dt} \equiv \frac{p}{\tau_a}, \quad \tau_a \equiv \frac{3}{u_1 - u_2} \left[ \frac{x_1}{u_1} + \frac{x_2}{u_2} \right] \quad (6.29)$$

и импульс увеличивается со временем по закону

$$p = p_0 \exp \left\{ \frac{(u_1 - u_2)t}{3 \left[ (x_1/u_1) + (x_2/u_2) \right]} \right\}, \quad (6.30)$$

где  $\tau_a$  имеет смысл характерного времени ускорения. По порядку величины  $\tau_a \sim x/u^2$ . Т.к.  $x \sim uL/3$ ,  $\tau_a \sim uL/3u^2$ . Скорость набора энергии  $\tau_a^{-1} \sim u^2/uL$ . Сравнение с темпом набора энергии в фермиевском механизме ( $\sim c^2/uL$ ) показывает, что эффективность ускорения на ударных волнах и фермиевского механизма становятся одного порядка величины, когда гидродинамическая скорость волны сравнивается со скоростью турбулентных хаотических пульсаций.

Если в плазме возбужден ансамбль ударных волн, рассмотрение ускорительного механизма сводится к фермиевскому при скоростях магнитных облаков, равных скоростям ударных волн. Такое ускорение может обеспечить очень эффективный набор энергии частицей, поэтому данный ускорительный механизм рассматривается в качестве основного при решении вопроса об ускорении космических лучей больших энергий.

Ударные волны в космосе являются одним из наиболее

часто встречающихся сильных возмущений. Формируемый спектр, как правило, имеет степенной вид. Ускорение на ударных волнах способно передавать значительную долю энергии небольшой группе быстрых частиц. Давление этих частиц быстро нарастает и начинает модифицировать форму фронта ударной волны.

#### §5. Ускорение частиц крупномасштабными сжимаемыми движениями плазмы

Крупномасштабные движения космической плазмы также могут передавать часть своей энергии группе быстрых частиц. Если скорости крупномасштабных движений достаточно велики, формируются ударные волны. Рассмотрим формирование спектра частиц в случае крупномасштабного движения при  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  в регулярном магнитном поле  $\mathbf{V}_0$  при условии выполнения дрейфового приближения, т.е. когда ларморовский радиус быстрых частиц  $r_L \ll \Lambda$ , где  $\Lambda$  — длина транспортного пробега по отношению к рассеянию мелкомасштабными неоднородностями.

Уравнение (6.12) дает возможность исследовать взаимодействие быстрых частиц с ансамблем крупномасштабных сжимаемых движений плазмы. Если скорость  $\mathbf{u}$  является случайной величиной, для которой при усреднении по крупномасштабным движениям среды справедливы условия

$$\langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \langle \nabla \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (6.31)$$

где символ  $\langle \rangle$  означает усреднение по статистическому ансамблю, и основной масштаб турбулентности для случайных флуктуаций скорости в пространстве и во времени  $L_0 \ll 1/k_0$ ,  $k \ll k_0$ , удовлетворяет условию  $L_0 \gg \Lambda$ , то физической причиной ускорения является появление случайных электрических полей  $\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \nabla) / c$  при флуктуациях скорости  $\mathbf{u}$  и регулярного движения плазмы. Ускорение возможно как при сильном диффузионном распространении, так и при конвективном переносе.

Ускорение при сильном диффузионном распространении соответствует случаю, когда время  $\tau_d$  диффузионного распространения на расстояние порядка основного масштаба

турбулентности  $L_0$  значительно меньше времени конвективного распространения  $\tau_0$

$$\tau_d/\tau_0 = uL_0/v\Lambda \ll 1. \quad (6.32)$$

В этом случае, представляя

$$F = \bar{F} + F_1, \quad \bar{F} = \langle F \rangle, \quad \langle F_1 \rangle = 0, \quad (6.33)$$

после усреднения (6.12) по ансамблю крупномасштабных движений при изотропном коэффициенте диффузии  $\alpha_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta}$  имеем уравнение

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \alpha \Delta \bar{F} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 D(p) \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}, \quad (6.34)$$

где  $D(p) = p^2 u^2 / 3v\Lambda$  - коэффициент диффузии в пространстве скоростей,  $u^2$  - среднеквадратичное значение флуктуирующей скорости.

При выполнении условия

$$\tau_d/\tau_0 = uL_0/v\Lambda \gg 1, \quad (6.35)$$

в уравнении (6.12) можно пренебречь пространственной диффузией. После усреднения по крупномасштабным изменениям скорости плазмы уравнение ускорения принимает вид

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 D(p) \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}, \quad (6.36)$$

где коэффициент диффузии  $D(p) = p^2 u / 9L_0$ . При доминирующем конвективном переносе коэффициент пространственной диффузии  $\alpha \approx uL_0$ , поэтому  $D(p) = p^2 u^2 / 9\alpha$ .

## Глава 7. Ускорение в сдвиговых течениях

### §1. Механизм ускорения

В космической плазме сдвиговые течения плазмы обычно сопровождаются надтепловыми потоками заряженных частиц. Рассмотрим первоначально качественную картину ускорения частиц в области двумерного сдвигового течения бесстолкновительной плазмы при наличии рассеивающих центров, роль которых выполняют случайные турбулентные неоднородности магнитного поля. На рис. 7.1. показана зависимость скорости потока плазмы  $u$ , текущей в направлении  $x$ , от координаты  $y$

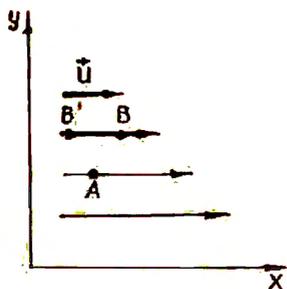


Рис. 7.1. Картина течения плазмы при наличии сдвига скорости

при наличии сдвига скоростей, т.е. когда скорость плазмы изменяется в направлении, поперечном ее движению. Будем считать рассеяние частиц на магнитных неоднородностях упругим, а скорость частицы  $u \ll u$ . Движение частицы удобно представить в виде совокупности колебаний между двумя рассеивающими центрами. Так, если частица колеблется между центрами A и B, причем  $u_A > u_B$  и  $x_A < x_B$  (рис. 7.1), то энергия ее будет нарастать, т.к. центры A и B сближаются. Для центра B', расположенного симметрично центру B ( $y_{B'} = y_B$ ,  $x_{A'} - x_B = -x_B - x_A$ ), ситуация обратная - центры A и B удаляются и частица теряет энергию. Если  $l$  - расстояние между центрами,  $dl/dt = w$  - относительная скорость движения рассеивающих центров, то изменение энергии  $\epsilon$  частицы с точностью до членов  $\propto (u/v)^2$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2 \frac{w}{l} \left[ 1 - \frac{w}{v} \right] \varepsilon. \quad (7.1)$$

Из выражения (7.1) следует, что суммарный вклад в  $d\varepsilon/dt$  от центров В и В' положителен и равен  $4\varepsilon w^2(lv)^{-1}$ . При усреднении по всем рассеивающим центрам в рамках адиабатического приближения с точностью  $w/v$  ускорение отсутствует, т.е.  $\langle d\varepsilon/dt \rangle = 0$ . При усреднении с точностью до членов  $\propto (w/v)^2$  с учетом того, что вероятность пройти частице путь  $l$  без рассеяния есть  $\exp(-l/\lambda)$  (где  $\lambda$  — длина свободного пробега), получаем

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = a \varepsilon - \left[ \frac{du}{dy} \right]^2, \quad (7.2)$$

где  $a = \text{const}$  (в нашем простейшем рассмотрении  $a = 1/2$ ). Обобщение (7.2) показывает, что скорость набора энергии в сдвиговых течениях пропорциональна квадрату ротора гидродинамической скорости (в нашем рассмотрении  $(\text{rot}u)^2 = (du/dy)^2$ ). Физический смысл полученного результата можно пояснить с использованием рис. 7.1. За среднее время между рассеяниями  $\tau$  частица смещается вдоль направления оси  $y$  на среднее расстояние  $w\tau/3$ . Из-за того, что скорость рассеивающих центров меняется при этом на величину  $\Delta u \approx \pm (w\tau/3)(du/dy)$ , рассеяние частицы будет сопровождаться изменением ее импульса на  $\Delta p \propto (\Delta u)r/v$ , причем положительный и отрицательный знаки этого приращения равновероятны. Поэтому процесс изменения энергии частиц носит характер диффузии в фазовом пространстве с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{\langle \Delta p^2 \rangle}{2\Delta t} \approx r^2 \left[ \frac{du}{dy} \right]^2 \tau. \quad (7.3)$$

Из выражения (7.3) следует, что чем больше изменения испытывает скорость плазмы  $u$  на длине свободного пробега  $\lambda = w\tau$ , тем выше темп ускорения. По аналогии с обычной столкновительной средой процесс ускорения частиц в сдвиговых течениях плазмы часто называют фрикционным.

## §2. Кинетическое рассмотрение

Последовательное описание распространения быстрых частиц в плазме состоит в осуществлении процедуры усреднения (смотри гл.6) по реализациям хаотического магнитного поля, имеющего случайную природу. Выполнение этой процедуры в уравнении Лиувилля для функции распределения быстрых частиц, которая испытывает случайные флуктуации на тех же масштабах, что и магнитное поле, приводит к кинетическому уравнению для усредненной по возможным реализациям магнитного поля функции распределения  $F$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}\mathbf{v}F + \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial p} = StF, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{v}$  - скорость частицы в системе координат наблюдателя, а интеграл столкновений  $StF$  описывает влияние хаотического магнитного поля на движение частиц. При выводе (7.4) было предположено, что регулярное магнитное поле отсутствует. Запишем интеграл столкновений через дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma$ . В соответствии с определением дифференциального сечения, число столкновений, происходящих в объеме  $d^3r$  в течение времени  $dt$  и сопровождающихся изменением импульса от  $p$  до  $p'$ , равно

$$dN(p, p') = d\sigma(p_u, p'_u) N_c v_u F(p_u) d^3r_u d^3p_u dt_u, \quad (7.5)$$

где  $N_c$  - концентрация частиц, и где индексом  $u$  обозначены величины в сопутствующей системе координат, т.е. в системе координат, которая движется относительно наблюдателя со скоростью  $u$ . Величины  $r, p, t$  и  $r_u, p_u, t_u$  связаны между собой преобразованиями Лоренца. Изменение числа частиц в объеме  $d^3r$  за время  $dt$

$$dN(p) = \int_{p'} (dN(p', p) - dN(p, p')). \quad (7.6)$$

Согласно определению, интеграл столкновений есть изменение

числа частиц  $N(p)$ , отнесенное к величине фазового объема  $d^3r d^3p$  и к интервалу времени  $dt$ . Учитывая инвариантность величин  $d^3r dt$  и  $d^3r d^3p$ , приходим к выражению

$$StF(p) \equiv \frac{\epsilon_u}{\epsilon} N_u v_u \left[ \int d^3p' \frac{d^3\sigma}{d^3p_u} F_u(p'_u) - F_u(p_u) \int d^3p' \frac{d^3\sigma}{d^3p_u} \right], \quad (7.7)$$

где  $\epsilon = m_0 \gamma^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  - полная энергия частицы,  $m_0$  - ее масса покоя. Упругий характер процесса рассеяния позволяет представить сечение в виде

$$\frac{d^3\sigma(p, p')}{d^3p} = \frac{\sigma_0}{4\pi p^2} \delta(p - p') \Phi(\Omega, \Omega'), \quad (7.8)$$

где  $\Omega = p/p$  - угол, определяющий направление импульса частицы. Если рассеяние частиц осуществляется изотропно, то  $\Phi = 1$ , и интеграл столкновений можно записать в виде

$$StF = \frac{\epsilon_u \langle F_u \rangle - F_u}{\epsilon \tau}, \quad (7.9)$$

где  $\langle F_u \rangle = \int d^2\Omega F_u(p_u) / 4\pi$  - усредненная по углам функция распределения,  $\tau = (N_u v_u \sigma_0)^{-1}$  - среднее время между рассеяниями.

Изложенный полуфеноменологический подход позволяет рассматривать процесс ускорения без конкретизации свойств рассеивающей плазменной турбулентности. Перейдем в левой части (7.4) к сопутствующей системе координат в соответствии с преобразованиями Лоренца. Учитывая, что  $F_u(r_u, p_u) = F(r, p)$ , и используя выражение (7.9), получаем

$$\frac{\partial F_u}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial F_u}{\partial r_\alpha} - p_\alpha \frac{\partial v_\beta}{\partial r_\alpha} \left( \frac{\partial F_u}{\partial p_\beta} \Omega_\beta + \frac{1}{p} \frac{\partial F_u}{\partial \Omega_\beta} \right) = \frac{\langle F_u \rangle - F_u}{\tau}, \quad (7.10)$$

где по дважды повторяющимся индексам производится

суммирование, а индекс  $u$  кроме функции  $F_u$  для краткости опущен. Поясним преобразование левой части уравнения (7.4). При этом будем рассматривать случай нерелятивистских частиц, когда  $v \ll c$ , но будем считать  $u \gg u$ . Изменение импульса со временем связано с изменением кинетической энергии в нерелятивистском случае  $E = mv^2/2 = pr/2m$  соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p}{m} \frac{dp}{dt} = \frac{p_\beta}{m} \frac{dp_\beta}{dt} = p_\beta \frac{d}{dt} \left[ v_\beta + u_\beta \right] = p_\beta \frac{du_\beta}{dt} = -p_\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} v_\alpha,$$

где  $v_\alpha = \dot{r}_\alpha / dt$ . Учитывая, что в сопутствующей системе координат при упругих рассеяниях скорость не изменяется, (т.е.  $du_\beta/dt = 0$ ), получаем  $(dp_\beta/dt) = -p_\alpha (du_\beta/\partial r_\alpha)$ , где  $(-du_\beta/\partial r_\alpha)$  — уменьшение составляющей  $u_\beta$  скорости плазмы и при увеличении перпендикулярной к  $r_\beta$  координаты  $r_\alpha$ . При использовании данного соотношения третье слагаемое в левой части (7.4) преобразуется к виду

$$\frac{\dot{r}_\alpha}{dt} \frac{\partial F_u}{\partial p} = \frac{\partial p_\beta}{dt} \frac{\partial F_u}{\partial p_\beta} = -p_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} \frac{\partial F_u}{\partial p_\beta}. \quad (7.11)$$

где  $\frac{\partial F_u}{\partial p_\beta} = \frac{\partial F_u}{\partial p} \Omega_\beta + \frac{1}{p} \frac{\partial F_u}{\partial \Omega_\beta}$ . Из (7.11) и (7.9) получаем (7.10).

Для получения уравнения ускорения разложим функцию  $F_u(r, p, t)$  в ряд по степеням  $\Omega$ , ограничиваясь членами второго порядка

$$F_u(r, p, t) = \bar{F}_u(r, p, t) + F_\alpha^{\Omega}(r, p, t) \Omega_\alpha + F_{\alpha\beta}^{\Omega\Omega}(r, p, t) \Omega_\alpha \Omega_\beta, \quad (7.12)$$

где  $\bar{F}_u(r, p, t)$ ,  $F_\alpha^{\Omega}(r, p, t)$ ,  $F_{\alpha\beta}^{\Omega\Omega}(r, p, t)$  — нулевой, первый и второй моменты функции распределения  $F_u(r, p, t)$ . Будем считать, что компоненты второго момента удовлетворяют условию  $F_{\alpha\alpha}^{\Omega\Omega} = 0$ . При этом нулевой момент является изотропной частью функции распределения  $F_u(r, p, t) = \langle F_u \rangle$ . Подставляя

(7.12) в (7.10), домножая (7.10) последовательно на 1,  $\Omega_\alpha$ ,  $\Omega_\alpha \Omega_\beta$  и усредняя по углу  $\Omega$ , получаем уравнения, связывающие моменты  $F_u$ ,  $F_{\alpha}^{\mu}$ ,  $F_{\alpha\beta}^{\mu}$

$$\frac{\partial F_u}{\partial t} + v \frac{\partial F_{\alpha}^{\mu}}{\partial r_{\alpha}} - \frac{1}{5} F_{\alpha\beta}^{\mu} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right) - \frac{1}{15} p \frac{\partial F_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial p} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_{\alpha}^{\mu}}{\partial r_{\alpha}} + v \frac{\partial F_{\alpha}^{\mu}}{\partial r_{\alpha}} + \frac{2}{5} v \frac{\partial F_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial r_{\beta}} - \frac{1}{5} p \frac{\partial F_{\beta}^{\mu}}{\partial p} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right) -$$

$$- \frac{1}{5} F_{\beta}^{\mu} \left( 4 \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} \right) = - \frac{F_{\alpha}^{\mu}}{\tau} \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial F_{\alpha}^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial t} + v \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu}^{\mu}}{\partial r_{\mu}} + v \left( \frac{\partial F_{\alpha}^{\mu}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial F_{\beta}^{\mu}}{\partial r_{\alpha}} \right) - p \frac{\partial F_u}{\partial p} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right) -$$

$$- \frac{2}{7} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial r_{\alpha}} \left[ 15 (\delta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{\mu} + \delta_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}^{\mu} + \delta_{\beta\mu} F_{\alpha\nu}^{\mu}) - 2 (\delta_{\beta\nu} F_{\alpha\mu}^{\mu} + \delta_{\alpha\nu} F_{\beta\mu}^{\mu}) \right] +$$

$$+ p \frac{\partial}{\partial p} (\delta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{\mu} + \delta_{\beta\mu} F_{\alpha\nu}^{\mu} + \delta_{\beta\nu} F_{\alpha\mu}^{\mu} + \delta_{\alpha\nu} F_{\beta\mu}^{\mu}) = - \frac{2}{\tau} F_{\alpha\beta}^{\mu}.$$

Необходимым условием адекватности разложения (7.12) является малость второго момента  $|F_{\alpha\beta}^{\mu}| \ll F_u$ . Из (7.13) следует, что это условие выполняется для достаточно быстрых частиц со скоростями  $u \ll c$ , если скорость плазмы мало меняется на расстоянии порядка длины свободного пробега частиц, так что  $\Delta u \ll u$ . Используя метод последовательных приближений и сохраняя члены не выше второго порядка по  $u/v$ , можно получить из (7.13) выражения для моментов

$$F_{\alpha}^{\mu} = -\tau v \frac{\partial \bar{F}_u}{\partial r_{\alpha}} - \frac{\tau^2 v}{5} p \frac{\partial \bar{F}_u}{\partial p} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}^2}, \quad F_{\alpha\beta}^{\mu} = -p \frac{\partial \bar{F}_u}{\partial p} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right) \quad (7.14)$$

и уравнение для изотропной части функции распределения

$$\frac{\partial \bar{F}_u}{\partial t} = \frac{\tau v^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{F}_u}{\partial y^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D \frac{\partial \bar{F}_u}{\partial p} \right], \quad (7.15)$$

где принято  $r_1 = x$ ,  $r_2 = y$  и коэффициент диффузии в импульсном пространстве при течении, показанном на рис. 7.1., имеет вид

$$D = \frac{1}{15} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tau p^2. \quad (7.16)$$

Т.о. кинетическое рассмотрение привело с точностью до численного множителя к такому же значению  $D$ , что и качественное. Первый член в правой части (7.15) описывает пространственную диффузию, второй - процесс ускорения.

### §3. Спектр и угловое распределение частиц

При однородных граничных условиях решение стационарного уравнения (7.15) имеет простой универсальный вид

$$\bar{F}_u(p) = \bar{F}_u(p_0) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-q}, \quad (7.17)$$

где показатель спектра  $q = 3 + \eta$  зависит от единственного параметра  $\eta$ , характеризующего зависимость времени между рассеяниями  $\tau$  от импульса

$$\tau(p) = \tau_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\eta} \quad (7.18)$$

Т.о. в процессе ускорения формируется степенной спектр. Характерной особенностью ускорения на сдвиговых течениях является наличие анизотропии в угловом распределении частиц. Угловую зависимость функции распределения можно представить в виде

$$F(y, p) = F(y, p) (1 + a_1 \cos \theta + a_2 \sin 2\theta \cos \varphi), \quad (7.19)$$

где  $a_1 = (q+2) \left[ \frac{u}{v} + \frac{\tau^2 v}{5} \frac{d^2 u}{dy^2} \right]$ ,  $a_2 = -(q+2) \frac{\tau}{2} \frac{du}{dy}$ ,  $\theta$  - угол между

вектором  $p$  и осью  $x$ ,  $\varphi$  - угол между проекцией вектора  $p$  на плоскость  $Oyz$  и осью  $y$ . Из выражения (7.19) следует, что вклад второй сферической гармоники в угловое распределение частиц максимален при углах  $\theta = 45^\circ$  и  $135^\circ$ . По порядку величины модуль коэффициента  $a_2$  при второй сферической гармонике составляет  $[(q+2)/2] (u/v) (\lambda/L)$ , где  $L$  - характерный масштаб изменения крупномасштабной скорости плазмы. Для частиц, пробег которых  $\lambda = \tau u$  сравним с величиной  $L$ , коэффициент  $a_2$  может достигать величины порядка  $u/v$ . Этот факт может служить отличительной особенностью ускорения частиц в сдвиговых течениях плазмы.

При однородных в пространстве начальных и граничных условиях развитие фрикционного процесса ускорения во времени описывается уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D \frac{\partial F}{\partial p} \right], \quad (7.20)$$

где коэффициент диффузии дается выражением (7.16), а время между рассеяниями выражением (7.18). Начальное условие

$$\bar{F}(p, t=t_0) = \frac{N_0}{4\pi p_0^2} \delta(p-p_0) \quad (7.21)$$

отвечает ситуации, когда в момент времени  $t=t_0$  инжестируются моноэнергичные частицы с концентрацией  $N_0$ . Решение уравнения (7.20) можно получить методом разделения переменных. Оно имеет вид

$$\bar{F}(p, t) = \frac{N_0}{4\pi p_0^3} \frac{1}{|\eta|T \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1-\eta}{2}}} \exp\left[-\frac{1+(p/p_0)^{-\eta}}{\eta^2 T}\right] \times \\ \times I_{|1+3\eta|}^{-1} \left[ \frac{2}{\eta^2 T} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-\eta}{2}} \right], \quad (7.22)$$

где  $I_\nu$  - функция Бесселя мнимого аргумента,

$$T = \frac{1}{15} \int_{t_0}^t \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tau dt. \quad (7.23)$$

Из (7.22) следует, что при  $\eta \gg 0$  в результате ускорения формируется степенной спектр  $\bar{F} \propto p^{-q}$  с показателем  $q=3+\eta$  во всей области импульсов  $p \gg p_0$  за конечный промежуток времени  $t_a = 15\tau_0^{-1} (\frac{du}{dy})^{-2}$ , где  $\tau_0$  - значение  $\tau$  при  $p=p_0$ . В случае  $\eta < 0$  спектр имеет экспоненциальный вид, а характерное время его установления в диапазоне от  $p_0$  до  $p$  есть

$$t_a = p^2/D = 15\tau^{-1}(p) \left(\frac{du}{dy}\right)^{-2}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. -М.: Наука, 1979.
2. Астрофизика космических лучей (под ред. Гинзбурга В.Л.). -М.: Наука, 1968.
3. Тверской Б.А. Динамика радиационных поясов Земли. -М.: Наука, 1968.
4. Толпыгина И.К. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. -М.: Наука, 1983.
5. Крымский Г.Ф. Модуляция космических лучей в межпланетном пространстве. -М.: Наука, 1969.
6. Альвен Х., Фальтхаммар К.Г. Космическая электродинамика. -М.: Мир, 1967.
7. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Токовые неустойчивости и аномальное сопротивление плазмы. Основы физики плазмы. Дополнение к второму тому. -М.: Энергоатомиздат, 1984.
8. Вернов С.Н., Вакулов П.В., Горчаков Е.В., Логачев Ю.И. Радиационные пояса Земли и космические лучи. -М.: Просвещение, 1970.
9. Тверской Б.А. Основные механизмы формирования радиационных поясов Земли. Физика магнитосферы. -М.: Мир, 1972.
10. Бетпалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. Альвеновские мазеры. - Горький, ИГФ, 1986.
11. Лейонс Л., Уильямс Д. Физика магнитосферы, -М.: Мир, 1987.
12. Шпигер III. Магнитосфера. Радиационные пояса (под ред. Гералса Т.). -М.: Мир, 1979.
13. Галеев А.А. Спонтанное пересоединение магнитных силовых линий в бесстолкновительной плазме. Основы физики плазмы. Т. II. -М.: Энергоатомиздат, 1984.
14. Зеленый Л.М. Ускорение частиц при развитии резонансной неустойчивости. Космические исследования, т. 20, Вып. 5, с. 714-724, 1982.
15. Тверской Б.А. К теории статистического ускорения Ферми. ЖЭТФ, т. 52, вып. 2, с.483-497, 1967.

16. Тверской Б.А. К теории турбулентного ускорения заряженных частиц в плазме. ЖЭТФ, т. 53, вып. 4(10), с.1417-1430, 1967.
17. Антонова Е.Е. Турбулентность в магнитосфере Земли и динамика частиц магнитосферы. Препринт НИИЯФ МГУ - 87 - 05, М., 1987.
18. Антонова Е.Е., Тверской Б.А. О природе полос высыпания электронов типа "перевернутое V" и разрыва Харанга в вечернем секторе авроральной ионосферы. Геомагнетизм и аэрномия, т. 15, N 1, с.105-107, 1975.
19. Бахарева М.Ф., Ломоносов В.Н., Тверской Б.А. К теории ускорения заряженных частиц в нестационарных магнитных полях. Геомагнетизм и аэрномия, т. 13, N 5, с. 767-776, 1973.
20. Березко Е.Г., Елшин В.К., Крымский Г.Ф., Петухов С.И. Генерация космических лучей ударными волнами. Н.: Наука, 1988.
21. Березко Е.Г. Ускорение заряженных частиц в сдвиговых течениях космической плазмы. Письма в ЖЭТФ, т. 33, вып. 8, с. 416-419, 1981.
22. Березко Е.Г., Крымский Г.Ф. Кинетическое рассмотрение процесса ускорения заряженных частиц в сдвиговых течениях бесстолкновительной плазмы. Письма в АЖ, т. 7, N 10, с. 636-640, 1981.